

FELIPE PAMPLONA MARIANO

**SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS
NÃO-PERÍODICOS UTILIZANDO AS METODOLOGIAS
PSEUDO-ESPECTRAL E DA FRONTEIRA IMERSA
ACOPLADAS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2007**

FELIPE PAMPLONA MARIANO

**SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS NÃO-PERÍODICOS UTILIZANDO
AS METODOLOGIAS PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER E DA
FRONTEIRA IMERSA ACOPLADAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

UBERLÂNDIA – MG

2007

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M334s Mariano, Felipe Pamplona, 1981-
Simulação de escoamentos não-periódicos utilizando as metodologias
Pseudo-espectral de Fourier e da Fronteira imersa acopladas / Felipe
Pamplona Mariano. - 2007.
120 f. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Pro-
grama de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Mecânica dos fluidos - Teses. I. Silveira Neto, Aristeu da. II.
Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 532

FELIPE PAMPLONA MARIANO

**SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS NÃO PERIÓDICOS UTILIZANDO
AS METODOLOGIAS PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER E DA
FRONTEIRA IMERSA ACOPLADAS**

Dissertação **APROVADA** pelo Programa
de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Uberlândia.

Área de Concentração: Mecânica dos Fluidos

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto – UFU – Orientador

Prof. Dr.: Luís Fernando Figueira da Silva – PUC-RJ

Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas – UFU

Uberlândia, 06 de Março de 2007

À meus pais, irmãos e a Tatiane...

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente aos meus pais, Jorge Sebastião Mariano e Ana Silvia Pamplona Mariano, por toda a atenção, respeito, educação e amor que foram me dados ao longo da minha vida.

Aos meus irmãos, Mônica e Fábio, por sempre estarem ao meu lado e acreditarem em mim.

À Tatiane Lie Mano, pelo companheirismo, apoio, paciência e amor transmitidos, principalmente, nos momentos em que mais precisei.

Ao meu orientador e amigo Aristeu da Silveira Neto, pela paciência, ensinamentos e incentivo dados a mim ao longo dessa jornada.

Aos meus amigos do LTCM e a todos que, de uma maneira ou de outra, foram indispensáveis para a realização deste trabalho.

À meus amigos Carlos Frederico Bettencourt da Silva, Francisco José de Souza e Leonardo de Queiroz Moreira, pelas inestimáveis idéias e ajudas quando os problemas pareciam não ter mais solução.

À FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais por financiar meus estudos.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, juntamente com a Coordenação do seu Programa de Pós-Graduação (POSMEC-UFU) onde tive todo suporte e infra-estrutura necessários para realização dos meus trabalhos.

À Deus por me acompanhar nesta jornada, sempre me dando serenidade para discernir entre o certo e o errado, e me dando forças para seguir o caminho do bem.

Mariano, F. P., 2007. "Simulação de escoamentos Não Periódicos Utilizando as Metodologias Pseudo-Espectral de Fourier e da Fronteira Imersa Acopladas", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Resumo

Para compreender fenômenos relacionados à combustão, aeroacústica, transição a turbulência entre outros, a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD) utiliza os métodos de alta ordem. Um dos mais conhecidos é o método pseudo-espectral de Fourier, o qual alia: alta ordem de precisão na resolução das equações, com um baixo custo computacional. Este está ligado à utilização da FFT e do método da projeção do termo da pressão, o qual desvincula os cálculos da pressão da resolução das equações de Navier-Stokes. O procedimento de calcular o campo de pressão, normalmente é o mais oneroso nas metodologias convencionais. Apesar destas vantagens, o método pseudo-espectral de Fourier só pode ser utilizado para resolver problemas com condições de contorno periódicas, limitando o seu uso no campo da dinâmica de fluidos. Visando resolver essa restrição uma nova metodologia é proposta no presente trabalho, que tem como objetivo simular escoamentos não-periódicos utilizando o método pseudo-espectral de Fourier. Para isso, é utilizada a metodologia da Fronteira Imersa, a qual representa as condições de contorno de um escoamento através de um campo de força imposto nas equações de Navier-Stokes. Como teste, para essa nova metodologia, foi simulada uma cavidade com tampa deslizante (Lid Driven Cavity), problema clássico da mecânica de fluidos, que objetiva validar novas metodologias e códigos computacionais. Os resultados obtidos são promissores e demonstram que é possível simular um escoamento não-periódico com o método pseudo-espectral de Fourier.

Palavras Chave: Método Pseudo-Espectral de Fourier, Método da Fronteira Imersa, Modelo Físico Virtual, Cavidade com Tampa Deslizante.

Mariano, F. P., 2007. "Simulation of Non-Periodics Flows using the Fourier Pseudo-Spectral and Immersed Boundary Methods.", Master Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Abstract

Modern engineering increasingly requires the comprehension of phenomena related to combustion, aeroacoustics, turbulence transition, among others. For these purposes the Computational Fluids Dynamics (CFD) requires the used high order methods. One of these methods is the Fourier pseudo-spectral method, that provides an excellent numerical accuracy, and with the use of the Fast Fourier Transform algorithm (FFT), it presents a low computational cost in comparison to others high-order methods. Another important issue is the projection method of the pressure term, which does not require the pressure computation from the Navier-Stokes equations. The procedure to calculate the pressure field is usually the most onerous in classical methodologies. Nevertheless, the pseudo-spectral method can be only applied to periodic boundary flows, thus limiting its use. Aiming to solve this restriction, a new methodology is proposed at the present work, which has the objective of simulating non-periodic flows using the Fourier pseudo-spectral method. For this purpose the immersed boundary method, that represents the boundary conditions through a force field imposed at Navier-Stokes equations is used. As a test to this new methodology, a classic problem of Computational Fluid Dynamics, The Lid Driven Cavity was simulated. The obtained results are promising and demonstrate the possibility to simulating non-periodic flows making use of the Fourier pseudo-spectral method.

Key-Words: Fourier Pseudo-Spectral Method, Immersed Boundary Methods, Virtual Physical Model, Lid Driven Cavity

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: ESCOAMENTO SOBRE UM MODELO DE AUTOMÓVEL (VEDOVOTO, 2007 E OLIVEIRA, 2007).....	2
FIGURA 1.2: VOLUME DE CONTROLE EMPREGADO NO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS	3
FIGURA 1.3: ILUSTRAÇÃO CONCEITUAL DE UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA (DNS) DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS: MÁXIMO NÚMERO DE REYNOLDS VERSUS COMPLEXIDADE GEOMÉTRICA (KIRBY E KARNIADAKIS, 2003).....	4
FIGURA 1.4: JATO SIMULADO POR UZUN (2003), CONTORNOS INSTANTÂNEOS DE VORTICIDADE PARA $Re_D=36.000$	5
FIGURA 1.5: CAMPO MÉDIO DE VORTICIDADE COM LINHAS DE CORRENTE SUPERPOSTAS PARA NÚMERO DE REYNOLDS IGUAL A 10.000, OBTIDO COM A) DISCRETIZAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM E B) DISCRETIZAÇÃO DE QUARTA ORDEM E MALHA 95 X 95 (PINHO, 2006).....	6
FIGURA 1.6: COMPARAÇÃO DOS PERFIS DA COMPONENTE DE VELOCIDADE MÉDIA U EM $x = 0,5m$ PARA NÚMERO DE REYNOLDS IGUAL A 10.000, OBTIDOS COM MALHA DE 95 X 95, (PINHO, 2006).....	6
FIGURA 1.7: COMPARAÇÃO ENTRE ALGUMAS SIMULAÇÕES UTILIZANDO VOLUMES FINITOS: (A) COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE NO EIXO VERTICAL DA CAVIDADE; (B) COMPONENTE VERTICAL DE VELOCIDADE NO EIXO VERTICAL DA CAVIDADE (PILER E STALIO, 2004).	7
FIGURA 1.8: TRABALHO COMPUTACIONAL, NÚMERO DE OPERAÇÕES COM PONTOS FLUTUANTES, REQUERIDOS PARA INTEGRAR UMA EQUAÇÃO ADVECTIVA LINEAR PARA M PERÍODOS DE TEMPO ENQUANTO É MANTIDO UM ERRO DE FASE DE 10% (KIRBY E KARNIADAKIS, 2003).....	7
FIGURA 1.9: COMPARAÇÃO ENTRE O CUSTO COMPUTACIONAL ENTRE UM MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS E UM MÉTODO ESPECTRAL.	8
FIGURA 1.10: VISUALIZAÇÕES DA VORTICIDADE NO JATO NATURAL: (A) ISOSUPERFÍCIE DE VORTICIDADE $= 1,3s^{-1}$ (SOUZA, 2005), (B) VISUALIZAÇÃO EXPERIMENTAL VIA PIV (SAKAKIBARA, 2004).....	9
FIGURA 1.11: PROBLEMA QUE MOTIVOU O DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA (PESKIN, 1977).....	11
FIGURA 1.12: DETALHES DAS ESTRUTURAS TURBILHONARES SOBRE UMA ESFERA SIMULADO POR (CAMPREGHER, 2005).	12
FIGURA 1.13: ESCOAMENTO SOBRE UMA ESTRUTURA TRELIÇADA (VEDOVOTO, 2007 E OLIVEIRA, 2007).....	13
FIGURA 2.1: MALHA EULERIANA RETANGULAR E MALHA LAGRANGINA ELÍPTICA (LIMA E SILVA ET AL., 2002).....	16

FIGURA 2.2: FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DO TIPO GAUSSIANA PROPOSTA POR UVERDI E TRIGGVASON (1992).	18
FIGURA 2.3: CÉLULAS EULERIANAS ONDE A FORÇA LAGRANGIANA É DISTRIBUÍDA (COR CINZA).....	19
FIGURA 2.4: VOLUME DE CONTROLE SOBRE UM PONTO LAGRANGIANO.....	19
FIGURA 2.5: DEFINIÇÃO DO PLANO π (SILVEIRA-NETO, 2002).....	24
FIGURA 2.6: TERMOS DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES DEFINIDOS EM RELAÇÃO AO PLANO π	26
FIGURA 2.7: PROJEÇÃO DO TERMO NÃO-LINEAR SOBRE O PLANO π	28
FIGURA 2.8: PROJEÇÃO DO TERMO FONTE E DO TERMO NÃO-LINEAR SOBRE O PLANO π	31
FIGURA 3.1: EXEMPLO DO FENÔMENO DE GIBBS EM UMA FUNÇÃO DO TIPO ONDA QUADRADA (NAVARRA ET AL., 1994).....	42
FIGURA 3.2: TIPOS DE FILTRO PROPOSTOS POR KOPRIVA (1986): (A) RAISED COSINE, (B) LANCZOS, (C) SHARPENED RAISED COSINE, (D) CUT-OFF	42
FIGURA 3.3: FILTRO DE LANCZOS.....	44
FIGURA 3.4: FILTRO "RAISED COSINE".....	44
FIGURA 3.5: FILTRO "SHARPENED RAISED COSINE".....	44
FIGURA 3.6: JATO SIMULADO POR UZUM (2003) MOSTRANDO A INFLUÊNCIA DA ZONA DE AMORTECIMENTO.....	46
FIGURA 3.7: FUNÇÃO ϕ , COM $\alpha = 3$ E $\beta = 1$	47
FIGURA 4.1: CONDIÇÃO INICIAL PROPOSTA POR CANUTO (1988) PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS, DADA PELA EQ. (4.2).	51
FIGURA 4.2: CONDIÇÃO INICIAL PROPOSTA.....	52
FIGURA 4.3: SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BURGERS PARA DIFERENTES FORMAS DO TERMO NÃO-LINEAR COM 16 PONTOS DE COLOCAÇÃO.	55
FIGURA 4.3: SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BURGERS NA FORMA SKEW-SIMÉTRICA ALTERNADA PARA DIFERENTES NÓS DE COLOCAÇÃO.	56
FIGURA 4.4: COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE (128x128 NÓS DE COLOCAÇÃO).....	59
FIGURA 4.5: COMPARAÇÃO DO ERRO PARA A COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE PARA DIFERENTES NÍVEIS DE REFINAMENTO.....	59
FIGURA 4.6: COMPONENTE VERTICAL DE VELOCIDADE (128x128 NÓS DE COLOCAÇÃO).....	60
FIGURA 4.7: COMPARAÇÃO DO ERRO PARA A COMPONENTE VERTICAL DE VELOCIDADE PARA DIFERENTES NÍVEIS DE REFINAMENTO.....	60
FIGURA 4.8: CAMPO DE PRESSÃO (128x128 NÓS DE COLOCAÇÃO).	61
FIGURA 4.9: COMPARAÇÃO DO ERRO PARA O CAMPO DE PRESSÃO PARA DIFERENTES NÍVEIS DE REFINAMENTO.	61
FIGURA 4.10: COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE (128x64 NÓS DE COLOCAÇÃO).....	62
FIGURA 4.11: COMPONENTE VERTICAL DE VELOCIDADE (128x64 NÓS DE COLOCAÇÃO).....	62
FIGURA 4.12: CAMPO DE PRESSÃO (128x64 NÓS DE COLOCAÇÃO).	63
FIGURA 4.13: ERROS OBTIDOS PARA AS COMPONENTES DE VELOCIDADE E PARA A PRESSÃO PARA O CASO DOS VÓRTICES DE TAYLOR-GREEN COM DOMÍNIO RETANGULAR.....	63

FIGURA 4.14: ESBOÇO DE UMA CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE	64
FIGURA 4.15: DOMÍNIO EXTERNO E INTERNO PARA A SIMULAÇÃO DA CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE	65
FIGURA 4.16: ESBOÇO DO DOMÍNIO DE CÁLCULO UTILIZADO NAS SIMULAÇÕES DA CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE.	66
FIGURA 4.17: COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE – A) COM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO; B) SEM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO E COM FILTRO DE LANCZOS; C) SEM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO E COM RAISED COSINE; D) SEM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO E COM SHARPENED RAISED COSINE.	68
FIGURA 4.18: COMPONENTE VERTICAL DE VELOCIDADE – A) COM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO; B) SEM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO E COM FILTRO DE LANCZOS; C) SEM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO E COM RAISED COSINE; D) SEM FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO E COM SHARPENED RAISED COSINE.	69
FIGURA 4.19: PERFIL DE VELOCIDADE HORIZONTAL DEFINIDO POR UMA LINHA VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE, COMPARANDO OS DIFERENTES TIPOS DE FILTRAGEM.	70
FIGURA 4.20: PERFIL DE VELOCIDADE VERTICAL DEFINIDO EM UMA LINHA HORIZONTAL NO CENTRO DA CAVIDADE, COMPARANDO OS DIFERENTES TIPOS DE FILTRAGEM.	70
FIGURA 4.21: COMPARAÇÃO DA NORMA L_2 EM FUNÇÃO DO TEMPO PARA OS DIFERENTES TIPOS DE FILTRAGEM.....	71
FIGURA 4.22: COMPARAÇÃO DA NORMA L_2 SOBRE A FRONTEIRA PARA DIFERENTES NÍVEIS DE REFINAMENTO.	72
FIGURA 4.23: PERFIS DE VELOCIDADE A) HORIZONTAL - OBTIDO POR UMA LINHA VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE, B) VERTICAL - OBTIDO POR UMA LINHA HORIZONTAL NO CENTRO DA CAVIDADE.	73
FIGURA 4.24: CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE - $Re=100$ COM 512 x 512 NÓS DE COLOCAÇÃO	74
FIGURA 4.25: CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE $Re=100$ COM 256x256 NÓS DE COLOCAÇÃO A) COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE, B) COMPONENTE VERTICAL DE VELOCIDADE, C) CAMPO DE PRESSÃO, D) CAMPO DE VORTICIDADE.	75
FIGURA 4.26: COMPONENTE HORIZONTAL (A, C E E) E VERTICAL (B, D E F) PARA $H=4$, $H=2$ E $H=1,33$, RESPECTIVAMENTE.	77
FIGURA 4.27: PERFIL DE VELOCIDADE HORIZONTAL, OBTIDO POR UMA LINHA VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE, COMPARANDO A INFLUÊNCIA DO DOMÍNIO INTERNO.	78
FIGURA 4.28: PERFIL DE VELOCIDADE VERTICAL, OBTIDO POR UMA LINHA HORIZONTAL NO CENTRO DA CAVIDADE, COMPARANDO A INFLUÊNCIA DO DOMÍNIO INTERNO.	78
FIGURA 4.29: COMPARAÇÃO DA NORMA L_2 SOBRE A FRONTEIRA PARA DIFERENTES TAMANHOS DE DOMÍNIO INTERNO.	79
FIGURA 4.30: ESBOÇO DAS POSIÇÕES DAS SONDAS UTILIZADAS PARA A CAPTURA DA INTENSIDADE DA FORÇA LAGRANGIANA.....	80
FIGURA 4.31: COMPONENTES DA FORÇA LAGRANGIANA EM DIFERENTES PONTOS DA CAVIDADE. OS POSICIONAMENTOS DAS SONDAS PODEM SER VISTO NA FIGURA 4.30.	88

FIGURA 4.32: VELOCIDADES HORIZONTAL NO CENTRO DA CAVIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO, PARA DIFERENTES NÚMEROS DE REYNOLDS.....	90
FIGURA 4.33: VELOCIDADES VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE EM FUNÇÃO DO TEMPO, PARA DIFERENTES NÚMEROS DE REYNOLDS.....	90
FIGURA 4.34: CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE – PERFIL DE VELOCIDADE HORIZONTAL: A) RE=25, B) RE=50, C) RE=75 E D) RE=100.....	91
FIGURA 4.35: PERFIS DE VELOCIDADE HORIZONTAL PARA RE=25.....	92
FIGURA 4.36: PERFIS DE VELOCIDADE HORIZONTAL PARA RE=50.....	93
FIGURA 4.37: PERFIS DE VELOCIDADE HORIZONTAL PARA RE=75.....	93
FIGURA 4.38: PERFIS DE VELOCIDADE HORIZONTAL PARA RE=100.....	94
FIGURA 4.39: PERFIS DE VELOCIDADE VERTICAL PARA RE=25.....	95
FIGURA 4.40: PERFIS DE VELOCIDADE VERTICAL PARA RE=50.....	95
FIGURA 4.41: PERFIS DE VELOCIDADE VERTICAL PARA RE=75.....	96
FIGURA 4.42: PERFIS DE VELOCIDADE VERTICAL PARA RE=100.....	96
FIGURA 4.43: COMPARAÇÃO DA NORMA L_2 SOBRE A FRONTEIRA PARA DIFERENTES NÚMEROS DE REYNOLDS.....	97
FIGURA 4.44: VELOCIDADES NO CENTRO DA CAVIDADE A RE=400 EM FUNÇÃO DO TEMPO, PARA DOMÍNIO EXTERNOS DIFERENTES: A) VELOCIDADE HORIZONTAL NO CENTRO DA CAVIDADE, B) VELOCIDADE VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE.....	98
FIGURA 4.45: PERFIL DE VELOCIDADE HORIZONTAL, OBTIDO POR UMA LINHA VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE, VERIFICANDO A INFLUÊNCIA DO DOMÍNIO EXTERNO.....	99
FIGURA 4.46: PERFIL DE VELOCIDADE VERTICAL, OBTIDO POR UMA LINHA HORIZONTAL NO CENTRO DA CAVIDADE VERIFICANDO A INFLUÊNCIA DO DOMÍNIO EXTERNO.....	99
FIGURA 4.47: COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE E LINHAS DE CORRENTE PARA RE=400 NO DOMÍNIO EXTERNO RETANGULAR.....	100
FIGURA 4.48: COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE E LINHAS DE CORRENTE PARA RE=400 NO DOMÍNIO EXTERNO QUADRANGULAR.....	100
FIGURA 4.49: CAVIDADE QUADRADA; DOMÍNIO EXTERNO RETANGULAR; RE=400; A) CAVIDADE; B) DETALHE DO CANTO INFERIOR DIREITO.....	101
FIGURA 4.50: CAVIDADE QUADRADA; DOMÍNIO EXTERNO RETANGULAR; RE=400; A) CAMPO DE PRESSÃO, B) CAMPO DE VORTICIDADE.....	102
FIGURA 4.51: VELOCIDADES A) HORIZONTAL E B) VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE A RE=1000 EM FUNÇÃO DO TEMPO PARA DIFERENTES PASSOS DE FILTRAGEM.....	103
FIGURA 4.52: NORMA L_2 PARA DIFERENTES PASSOS DE FILTRAGEM.....	103
FIGURA 4.53: PERFIL DE VELOCIDADE HORIZONTAL, OBTIDO POR UMA LINHA VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE, COM $N_F=10$, PARA RE=1.000.....	104
FIGURA 4.54: PERFIL DE VELOCIDADE VERTICAL, OBTIDO POR UMA LINHA HORIZONTAL NO CENTRO DA CAVIDADE, COM $N_F=10$, PARA RE=1.000.....	104
FIGURA 4.55: COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE À RE=1000 COM $N_F=10$	105

FIGURA 4.56: CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE À $Re=1000$ COM $N_f=10$ A) COMPONENTE HORIZONTAL DE VELOCIDADE, B) COMPONENTE VERTICAL DE VELOCIDADE, C) CAMPO DE PRESSÃO, D) CAMPO DE VORTICIDADE.	105
FIGURA 4.57: CAMPO DE VELOCIDADE HORIZONTAL SEM ZONA DE AMORTECIMENTO	109
FIGURA 4.58: CAMPO DE VELOCIDADE HORIZONTAL COM ZONA DE AMORTECIMENTO	109
FIGURA 4.59: NORMA L_2 SIMULAÇÃO COM E SEM ZONA DE AMORTECIMENTO.....	110
FIGURA 4.60: VELOCIDADES A) HORIZONTAL E B) VERTICAL NO CENTRO DA CAVIDADE COMPARANDO A UTILIZAÇÃO DA ZONA DE AMORTECIMENTO.	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Comparação entre o erro absoluto para os diferentes esquema de avanço temporal.....	53
Tabela 4.2: Comparação entre os erros absolutos de diferentes tratamentos do termo não-linear.....	55
Tabela 4.3: Custo computacional em função do número de nós de colocação.....	75
Tabela 4.4: Posição do centro das recirculações formadas na cavidade.....	106
Tabela 4.5: Valor da vorticidade no centro da recirculação primária.....	107

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Gregas

α	constante da função zona de amortecimento	
β	constante da função zona de amortecimento	
ϕ	Função da zona de amortecimento	
η	posição qualquer em uma linha de um vetor ou matriz	
μ	posição qualquer em uma coluna de uma matriz	
ν	viscosidade cinemática	$[m^2s^{-1}]$
ρ	Massa específica	$[kgm^{-3}]$
Δx	passo de discretização na direção horizontal	$[m]$
Δy	passo de discretização na direção vertical	$[m]$
Δt	discretização temporal	$[s]$
δ_{ij}	delta de Kronecker	
σ	função filtro	
σ_0	função base da filtragem Sharpened Raised Cosine	
θ	componente da função filtro	
ω	vorticidade	$[s^{-1}]$

Letras Latinas

\vec{a}	vetor qualquer a ser projetado no plano π
\vec{a}_π	vetor \vec{a} projetado no plano π
D	função distribuição de força
e	exponencial
f	termo fonte de força euleriano, função qualquer no espaço físico
\hat{f}	termo fonte de força euleriano no espaço de Fourier, função qualquer no espaço de Fourier
F	campo de força lagrangiano
g	função qualquer
h	tamanho da malha euleriana
i	número imaginário, $i = \sqrt{-1}$
K_1	coeficiente de Runge Kutta de 4 ^a ordem

K_2	coeficiente de Runge Kutta de 4ª ordem	
K_3	coeficiente de Runge Kutta de 4ª ordem	
K_4	coeficiente de Runge Kutta de 4ª ordem	
L	comprimento característico do corpo imerso	[m]
tnl	termo não-linear	
\widehat{tnl}	termo não-linear no espaço de Fourier	
\vec{k}	vetor número de onda	
k_i	número de onda numa direção específica	
n	contador do somatório	
N	número de nós de colocação	
N_f	intervalo da aplicação da filtragem	
p	pressão	[m ² s ⁻¹]
\widehat{p}	transformada da pressão no espaço de Fourier	
Q	solução de uma função	
Qt	solução objetivo da função de amortecimento	
\vec{r}	parâmetro de transformação	
Re	número de Reynolds	
\vec{s}	parâmetro de transformação	
t	tempo	[s]
u	componente horizontal de velocidade	[ms ⁻¹]
\widehat{u}	componente horizontal de velocidade no espaço de Fourier	[ms ⁻¹]
U_T	Velocidade da tampa da cavidade	
v	componente vertical de velocidade	[ms ⁻¹]
\widehat{v}	componente vertical de velocidade no espaço de Fourier	[ms ⁻¹]
x	coordenada horizontal	[m]
y	coordenada vertical	[m]
ZA	função zona de amortecimento	

Subscritos

a	analítico
l, j	índices tensoriais

k	pontos da malha lagrangiana
f_k	variável do fluido na interface
N	numérico
π	plano π

Sobrescritos

$accel$	termo de aceleração forçante
$advec$	termo advectivo
$press$	termo de pressão
$visc$	termo viscoso
F	Campo lagrangiano
n	iteração no tempo atual
*	grandeza adimensionalizada

Operadores

∂	derivada parcial;
∇	nabla;
\mathbb{F}	transformada de Fouier
\wp	operador de projeção em um plano ortogonal a \vec{k}
Σ	somatório;
\int	integral;

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Aspectos gerais	1
1.2	Métodos de alta ordem	5
1.3	Métodos espectrais	8
1.4	Metodologia da fronteira imersa	11
1.5	Presente trabalho	13
2	Modelo Matemático	15
2.1	Fronteira imersa	15
2.1.1	Modelo Matemático para o Fluido	16
2.1.2	Modelo Matemático para a Interface Imersa	19
2.2	Transformadas de Fourier	20
2.2.1	Propriedades da Transformada de Fourier	21
2.3	Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço de Fourier	23
2.3.1	Método da Projeção	26
2.3.2	Recuperação do Campo de Pressão	29
2.4	Transformação das Equações de Navier-Stokes com Termo-Fonte	30
2.5	Acoplamento das malhas lagrangiana e euleriana no espaço de Fourier	32
3	Método Numérico	35
3.1	DFT e FFT	35
3.2	Tratamento do termo não-linear	37
3.3	Metodologia de acoplamento entre os métodos pseudo-espectral e da fronteira imersa	39
3.4	Avanço temporal	40
3.5	Processo de filtragem	41
3.6	Zona de amortecimento	45
4	Resultados	49
4.1	Equação de Burgers	50
4.1.1	Método de Avanço Temporal	51
4.1.2	Tratamento do termo não-linear	53
4.2	Vórtices de Taylor-Green	56
4.3	Cavidade com tampa deslizante	64
4.3.1	Uso da função distribuição e diferentes tipos de filtragem	66
4.3.2	Análise de Diferentes Níveis de Refinamento	72
4.3.3	Variação do Domínio Interno	76
4.3.4	Análise das componentes da força lagrangiana	80
4.3.5	Influência do número de Reynolds	89

4.3.6	Variação do domínio externo	97
4.3.7	Influência da filtragem	102
4.3.8	Zona de amortecimento (Buffer Zone)	108
5	Conclusão	111
5.1	Perspectivas futuras	112
6	Referências	113

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Aspectos gerais

Hoje em dia existem várias maneiras para se compreender a dinâmica dos fluidos. Existem os métodos experimentais em que se utilizam instrumentos de medidas e técnicas avançadas de visualização; os métodos analíticos, fazendo simplificações pertinentes nas equações de Navier-Stokes e os métodos numéricos, os quais possibilitam simular a dinâmica de escoamentos através de metodologias numéricas, de tal forma que se possa representar um fenômeno físico o mais próximo da realidade possível. A Figura 1.1 mostra os detalhes que uma simulação numérica pode atingir, mesmo envolvendo uma geometria muito complexa (VEDOVOTO, 2007 e OLIVEIRA, 2007).

Fenômenos envolvendo aeroacústica, combustão e transição a turbulência, são problemas que a engenharia moderna está, cada vez mais, buscando compreender utilizando técnicas de CFD. No caso da aeroacústica é importante dispor de um método que consiga capturar as ondas de pressão sonora. Em fenômenos envolvendo transição à turbulência é preciso estudar as pequenas instabilidades que fazem o escoamento transicionar para um regime turbulento. Na combustão, existem processos que envolvem as pequenas escalas do escoamento turbulento inerente a esse problema, que necessitam serem analisadas. Nessa gama de problemas a Mecânica dos Fluidos Computacional utiliza métodos de alta ordem de precisão, para a obtenção de resultados representativos da física dos problemas.

A resolução numérica das equações de Navier-Stokes é a base para a Mecânica dos Fluidos Computacional (CFD). Elas são equações diferenciais parciais (EDP) não-lineares que modelam matematicamente o comportamento dinâmico dos fluidos. Existem várias

formas de resolver numericamente essas equações. Dentre elas podem ser citados os métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, métodos espectrais, etc. Dependendo do tipo do escoamento que se queira resolver, um desses métodos adequa-se melhor que outro.

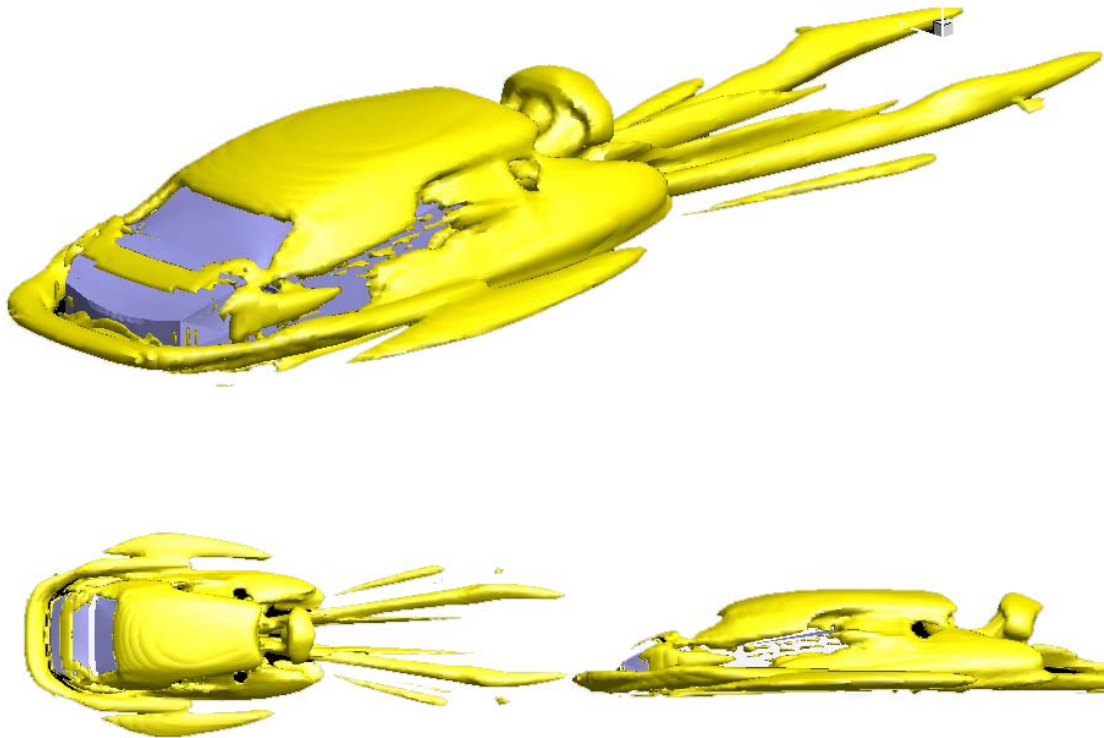


Figura 1.1: Escoamento sobre um modelo de automóvel (VEDOVOTO, 2007 e OLIVEIRA, 2007).

O Método das Diferenças Finitas surgiu na década de 1950 e consiste em aproximar as derivadas das equações governantes por meio de diferenças finitas que são geradas a partir de expansões em séries truncadas de Taylor. Este método pode alcançar uma alta ordem de precisão usando fórmulas de alta ordem (fórmulas que envolvem grande número de pontos), mas requer uma forte restrição no passo de tempo para a estabilidade da solução.

O Método dos Volumes Finitos consiste em uma integração formal das equações governantes do escoamento de fluido, sobre todos os volumes de controle do domínio, como mostrado na figura 1.2. A discretização envolve a substituição dos termos da equação integrada por uma variedade de aproximações do tipo das diferenças finitas. Isto converte

as equações integradas em um sistema de equações algébricas (PATANKAR, 1980 e MALISKA, 1995).

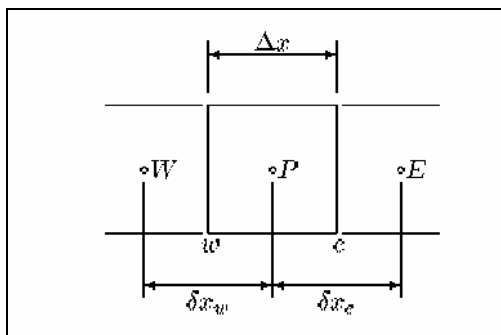


Figura 1.2: Volume de controle empregado no método de volumes finitos

O Método dos Elementos Finitos surgiu por volta de 1960 para a análise de esforços estruturais e desde então são usados para resolver equações diferenciais parciais que aparecem nas áreas da Mecânica dos Sólidos, Elasticidade e na Dinâmica dos Fluidos. Estes métodos são particularmente apropriados para geometrias complexas que aparecem em muitas aplicações da engenharia. A base do Método dos Elementos Finitos consiste em dividir o domínio em um número de elementos e aproximar a solução em cada elemento por uma soma de funções bases, compostas por polinômios. Um novo Método dos Elementos Finitos versão hp, melhorou a convergência ao incrementar simultaneamente o número dos elementos, assim como, a ordem dos polinômios de interpolação dentro do elemento (convergência hp) (CAREY e ODEM, 1986 e ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1991).

Os Métodos Espectrais surgiram em meados de 1970 com o desenvolvimento dos métodos transformados (transformações entre o espaço físico e o espaço espectral) em problemas da Dinâmica dos Fluidos e Meteorologia (ORSZAG, 1970). Os Métodos Espectrais são caracterizados pela expansão da solução em termos de uma série truncada de funções de aproximação globais (séries de Fourier, séries de polinômios de Chebyshev ou Legendre) das variáveis independentes.

Os Métodos Espectrais têm atraído muita atenção nos últimos anos devido a sua alta precisão nas simulações numéricas. Estes métodos se mostraram altamente precisos nas simulações diretas da turbulência homogênea, na modelagem global do clima, na dinâmica dos oceanos, na transferência de calor, na dinâmica dos fluidos e na aerodinâmica. A alta precisão mostrada por estes métodos permite obter soluções precisas na engenharia usando poucos pontos na malha. Esta alta precisão é conseguida sempre que o domínio for suficientemente simples e suave (domínios retangulares ou circulares). Em resumo, para

resolver com alta precisão uma equação diferencial parcial sobre um domínio simples e regular, os Métodos Espectrais são usualmente as melhores ferramentas numéricas (GOTTLIEB e ORSZAG, 1977, GOTTLIEB e TURKEL, 1983, GOTTLIEB et al., 1984, CANUTO et al., 1988, HUSSAINI e ZANG, 1987, HUSSAINI et al., 1989).

Eles podem alcançar até 10 dígitos de precisão onde o Método das Diferenças Finitas ou Método dos Elementos Finitos obteriam 2 ou 3 dígitos de precisão (TREFETHEN, 2000). Uma desvantagem destas técnicas numéricas baseadas nos Métodos Espectrais ocorre quando são aplicados em problemas envolvendo geometrias complexas, que devem ser impostas nestes casos. O uso de transformações suaves de um domínio complexo para outro domínio computacional simples, bem como a utilização de filtros, nem sempre é suficiente para recuperar a alta precisão perdida (MARTINEZ, 1999).

Na Figura 1.3 Kirby e Karniadakis (2003), mostram um esboço de como os métodos espectrais estão enquadrados no contexto da mecânica de fluidos computacional. Ela mostra uma faixa de número de Reynolds versus a complexidade da geometria simulada utilizando a metodologia de Simulação Numérica Direta (DNS). Claramente observa-se que na simulação numérica direta da turbulência em geometrias com domínios simples pode-se alcançar Reynolds muito mais altos que em simulação de domínios com geometrias complexas utilizando os métodos espectrais.

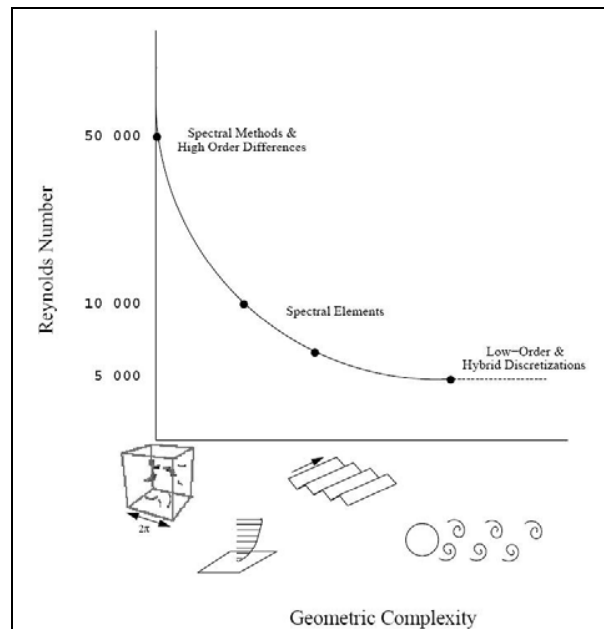


Figura 1.3: Ilustração conceitual de uma simulação numérica direta (DNS) de escoamentos turbulentos: máximo número de Reynolds versus complexidade geométrica (KIRBY e KARNIADAKIS, 2003).

1.2 Métodos de alta ordem

No campo da aeroacústica Uzun (2003) fez simulações de grande escala para jatos, utilizando diferenças finitas compactas de alta ordem (Figura 1.4).

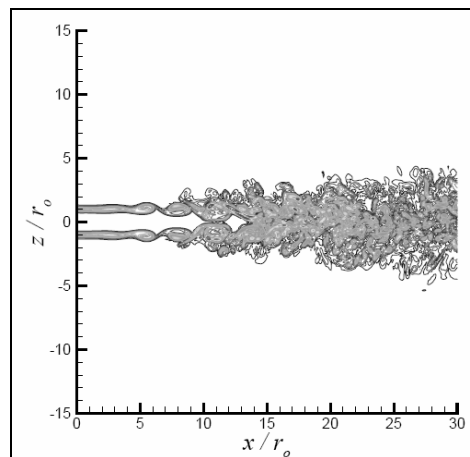


Figura 1.4: Jato simulado por Uzun (2003), contornos instantâneos de vorticidade para $Re_D=36.000$.

Pinho (2006) simulou cavidades com tampa deslizante bidimensionais e tridimensionais comparando os métodos de diferenças finitas de segunda e quarta ordem, mostrando a importância dos métodos de alta ordem.

A Figura 1.5 mostra o campo médio obtido por Pinho (2006) com discretização de segunda e de quarta ordem, respectivamente. Não há grandes diferenças entre os dois, a não ser pelo pequeno vórtice no canto inferior esquerdo, que se apresenta muito menor pela solução com discretização de segunda ordem. Porém quando se compara os perfis de velocidade (Figura 1.6) verifica-se que na discretização de segunda ordem as velocidades não atingem os máximos e mínimos das velocidades, apesar de captar o formato da curva de forma coerente. Já no caso da discretização de quarta ordem a solução chega bem próximo dos resultados de Ghia et al. (1982), mostrando a necessidade de se utilizar métodos de ordem mais elevada.

Shukla et al. (2006) utilizando diferenças finitas compactas de 4ª a 20ª ordem, em malha não uniforme, resolveu o movimento de uma onda e atingiu níveis de precisão elevados. Neste mesmo trabalho o autor (SHUKLA et al., 2006) também simulou um

escoamento passando sobre um cilindro utilizando diferenças finitas compactas de 20ª ordem.

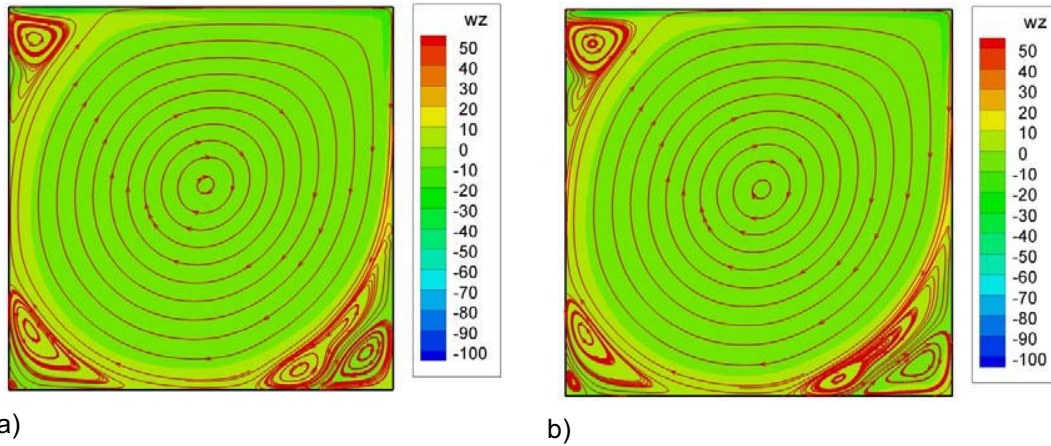


Figura 1.5: Campo médio de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com a) discretização de segunda ordem e b) discretização de quarta ordem e malha 95 x 95 (PINHO, 2006).

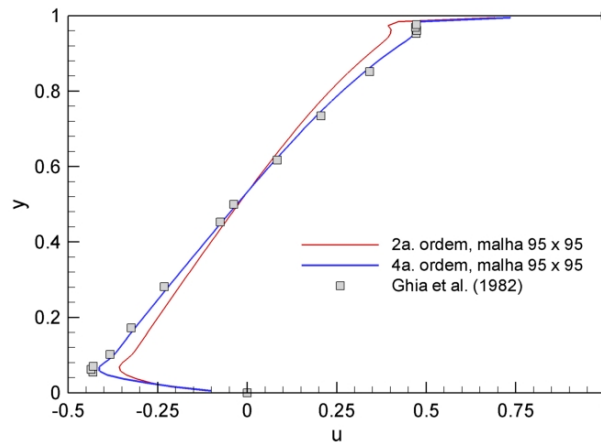


Figura 1.6: Comparação dos perfis da componente de velocidade média u em $x = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtidos com malha de 95 x 95, (PINHO, 2006).

Piler e Stalio (2004), simularam uma cavidade com tampa deslizante comparando o método dos volumes finitos compactos de várias ordens de precisão. Os resultados estão mostrados na Figura 1.7, mostrando que, com poucos pontos na malha, utilizando um método de alta ordem, é possível atingir níveis de precisão tão significativos quanto usar malhas refinadas com métodos de baixa ordem.

Na Figura 1.7 a linha sólida é a simulação para um esquema de 2ª ordem em uma malha deslocada uniforme de 192x192; a linha tracejada é um esquema de 2ª ordem em

uma malha deslocada uniforme de 20×20 ; a linha pontilhada é um esquema de 2ª ordem em uma malha deslocada não-uniforme de 20×20 ; os quadrados pretos representam um esquema de 6ª ordem em uma malha deslocada uniforme de 20×20 ; os quadrados brancos um esquema de 6ª ordem em uma malha deslocada não-uniforme de 20×20 .

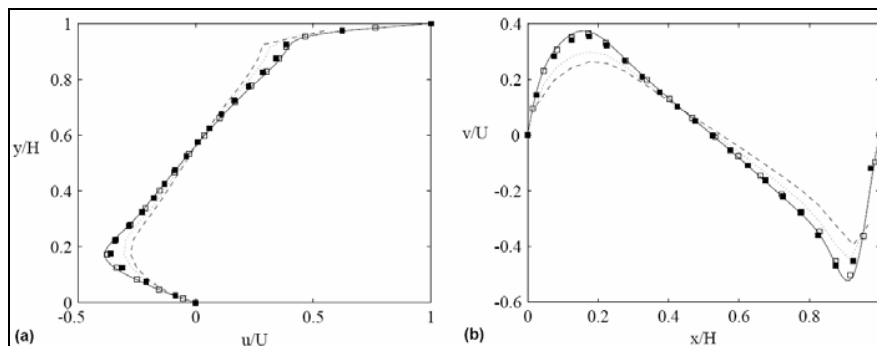


Figura 1.7: Comparação entre algumas simulações utilizando volumes finitos: (a) componente horizontal de velocidade no eixo vertical da cavidade; (b) componente vertical de velocidade no eixo vertical da cavidade (PILER e STALIO, 2004).

No gráfico da Figura 1.8 (KIRBY e KARNIADAKIS, 2003) aonde é mostrada uma comparação entre os esquemas de diferenças finitas de 2ª, 4ª e 6ª ordens, os autores mostram que, para manter um erro de fase de 10%, quando compara-se esses esquemas com uma solução analítica, o trabalho computacional aumenta muito para o método de 2ª ordem.

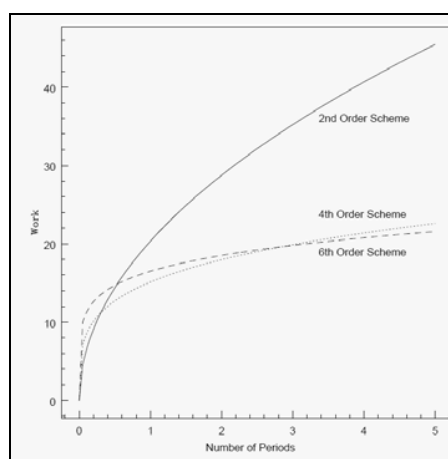


Figura 1.8: Trabalho computacional, número de operações com pontos flutuantes, requeridos para integrar uma equação advectiva linear para M períodos de tempo enquanto é mantido um erro de fase de 10% (KIRBY e KARNIADAKIS, 2003).

1.3 Métodos espectrais

Os métodos espectrais, com base nas transformadas de Fourier, possuem como grande vantagem, quando comparados com outros métodos de alta ordem, o baixo custo computacional, devido à utilização da “Fast Fourier Transform” (FFT), algoritmo que calcula as transformadas de Fourier de forma muito eficiente. Canuto (1988) mostrou que enquanto o custo computacional do método de diferenças finitas é $O(N^2)$ o custo computacional dos métodos espectrais utilizando a FFT é $O(N \log_2 N)$, onde N é o número de pontos da malha.

Além da utilização da FFT, também foi desenvolvido o método da projeção, que possibilita eliminar o campo de pressão dos cálculos. Este procedimento contribuiu enormemente para o baixo custo computacional na resolução das equações de Navier-Stokes utilizando os métodos espectrais.

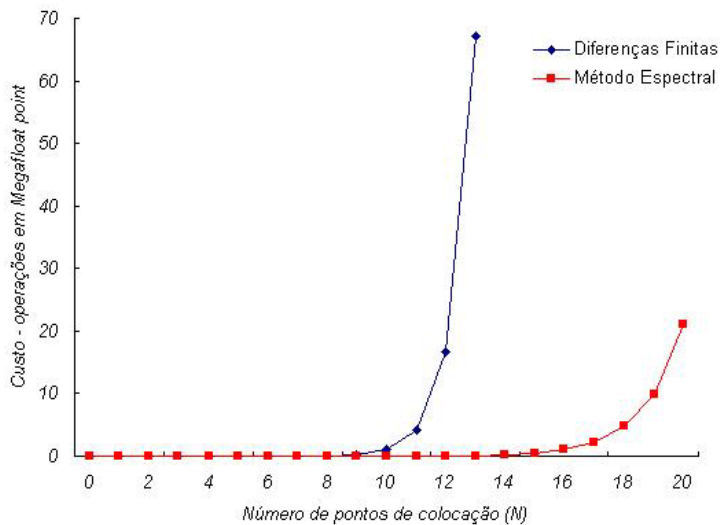
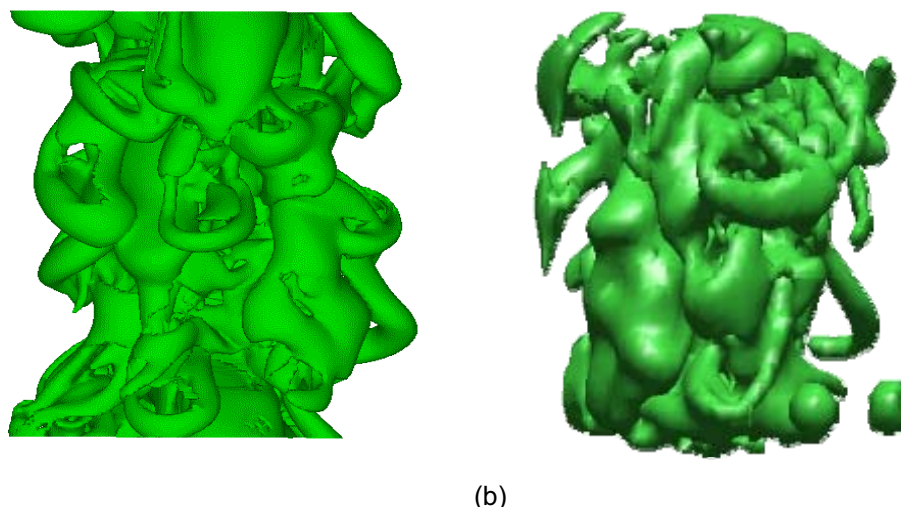


Figura 1.9: Comparação entre o custo computacional entre um método de diferenças finitas e um método espectral.

Souza (2005) obteve excelentes resultados utilizando o método pseudo-espectral de Fourier para simular jatos cisalhantes livres. Os resultados obtidos pela autora conseguem capturar um grande número de detalhes do jato simulado, principalmente com relação ao jato na fase turbulenta.



(a) (b)
 Figura 1.10: Visualizações da vorticidade no jato natural: (a) Isosuperfície de vorticidade = $1,3\text{s}^{-1}$ (Souza, 2005), (b) visualização experimental via PIV (Sakakibara, 2004).

A Figura 1.10 mostra a visualização de um jato natural utilizando a técnica PIV de visualização (Sakakibara, 2004) comparado com um jato simulado via método pseudo-espectral de Fourier (Souza, 2005). Essa comparação ilustra o grande potencial do método pseudo-espectral de Fourier.

Existem algumas restrições com relação ao uso desse método, pois ele não suporta descontinuidades no domínio de cálculo e as condições de contorno devem ser periódicas em todas as direções. Para contornar esse inconveniente dos métodos espectrais surgiram diferentes técnicas: uma das mais conhecidas são as Técnicas de Decomposição do Domínio que têm sido empregadas com o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Volumes Finitos. O uso dos Métodos Espectrais, com estas técnicas de partição do domínio, data do final dos anos 70. Delves e Hall (1979) introduziram um método que foi chamado de Método do Elemento Global; Orszag (1980), em seu trabalho intitulado “Métodos Espectrais em Geometrias Complexas”, propôs pela primeira vez a combinação dos Métodos Espectrais com um pré-condicionamento de Elementos Finitos para resolver um sistema de equações mal condicionado. Também neste trabalho, o autor descreveu uma nova técnica para remendar (Patching) as interfaces entre subdomínios não sobrepostos (Non-Overlapping), a qual foi chamada de Método Espectral de Decomposição do Domínio (também conhecido como Método Multidomínio Espectral), desenvolvida para superar as limitações dos Métodos Espectrais. Este método consiste em dividir o domínio em subdomínios contíguos ou adjacentes mais simples, onde uma representação espectral pode ser usada dentro de cada um deles e a continuidade das derivadas normais seria requerida sobre as linhas das interfaces presentes. A maioria das

versões dos Métodos Espectrais de Decomposição do Domínio usa variações ou extensões desta Técnica de Remendo (*Patching*), originalmente sugerida por Orszag (1980).

Morchoisne (1984) desenvolveu um método baseado na sobreposição (*Overlapping*) de múltiplos domínios para estudar escoamentos incompressíveis em geometrias bi e tridimensionais simples, usando as formulações de função de corrente-vorticidade ou variáveis primitivas. Patera (1984) usou uma formulação variacional para atender à continuidade de fluxo nas interfaces dos elementos ao qual chamou de Método dos Elementos Espectrais. Ele testou este método com polinômios de Chebyshev na equação advecção-difusão unidimensional e aplicou-o na simulação de escoamentos laminares bidimensionais sobre um degrau para números de Reynolds entre 75 e 225, sendo obtida boa concordância com os resultados experimentais da literatura. Deville e Mund (1985) usaram um tipo de pré-condicionamento baseado no Método dos Elementos Finitos para resolver equações diferenciais parciais elípticas de 2ª ordem, pela técnica pseudo-espectral de Chebyshev com condições de remendo nas interfaces dos subdomínios. Precisão espectral foi alcançada no problema elíptico de uma região bidimensional em forma de L com um esforço computacional mínimo.

Karniadakis (1990) apresentou um Método dos Elementos Espectrais Legendre-Fourier para estudar escoamentos turbulentos incompressíveis em geometrias complexas com uma direção de escoamento homogênea. As equações de Navier-Stokes incompressíveis foram escritas em uma forma apropriada tanto para a simulação numérica direta (Direct Numerical Simulation, DNS) como para a simulação de grandes escalas (Large-Eddy Simulation, LES).

Métodos iterativos foram usados para resolver as equações de Helmholtz de coeficientes variáveis, resultantes da discretização. Resultados satisfatórios foram obtidos para o caso do escoamento de transição em um canal unido a uma cavidade (grooved channel) para $375 < Re < 500$, assim como, para o caso do escoamento turbulento sobre superfícies rugosas (Surfaces with riblets) para números de Reynolds de 500 e 2.000.

Karniadakis e Orszag (1993) mostraram os progressos alcançados no estudo e compreensão dos escoamentos turbulentos com altos números de Reynolds usando processamento paralelo. Algumas simulações paralelas de escoamentos incompressíveis e compressíveis turbulentos em geometrias complexas foram apresentadas.

Martinez (2005), apresentou um Método Multidomínio Espectral, o qual se baseia no Método de Colocação Espectral e em um Método de Decomposição do Domínio tipo Remendo (*Patching*), onde se utiliza a Técnica da Matriz Influência para impor as condições de continuidade nas interfaces.

O código numérico desenvolvido pelo autor permitiu simular um canal com degrau, cavidades com tampa deslizante e escoamentos sobre cilindros. Os resultados de Martinez (2005) mostram uma boa concordância quando comparados com outros dados da literatura.

1.4 Metodologia da fronteira imersa

Um método muito utilizado nos últimos anos para resolver problemas de geometrias complexas e/ou móveis é o método da Fronteira Imersa (Immersed Boundary - IB), ele foi desenvolvido por Peskin (1972) para estudar escoamentos de sangue em válvulas cardíacas (Figura 1.11), com o objetivo de desenvolver e otimizar válvulas e corações artificiais. Este método vem sendo muito estudado no Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica de Flúidos (LTCM) da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e tem apresentado resultados satisfatórios com relação à simulação numérica de geometrias complexas e/ou móveis.

Este método consiste em modelar as condições de contorno através de um termo fonte imposto nas equações de Navier-Stokes, sendo que este termo fonte é calculado em uma malha lagrangiana, que representa a interface do corpo imerso, e é transferido, através de métodos de interpolação, para a malha euleriana, a qual é usada para a solução das equações de Navier-Stokes para o fluido.

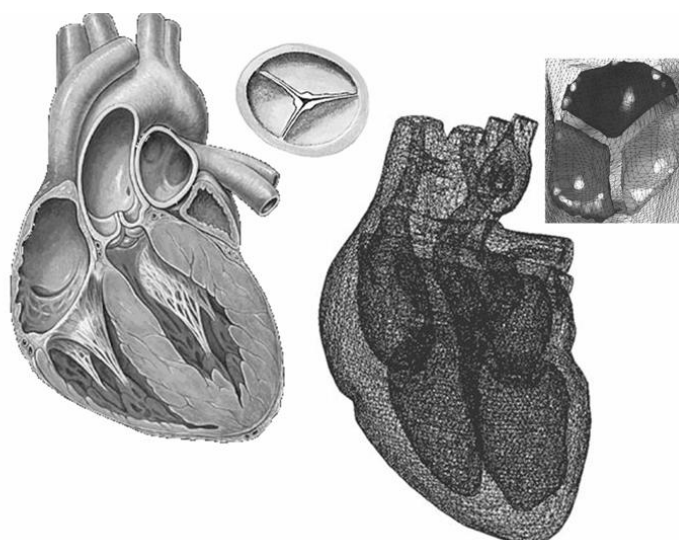


Figura 1.11: Problema que motivou o desenvolvimento do método da Fronteira Imersa (PESKIN, 1977).

Goldstein et al. (1993) propuseram um modelo para determinar o campo de densidade de força, para escoamentos sobre obstáculos ou sobre corpos submersos. Eles utilizaram um método derivado da Fronteira Imersa proposta por Peskin, usando na discretização espacial métodos espectrais de Cherbyshev nas direções não-periódicas e de Fourier nas direções periódicas do escoamento em canais e sobre cilindros.

Mohd-Yusof (1997) propôs a utilização do método da Fronteira Imersa juntamente com códigos pseudo-espectrais para a simulação de geometrias complexas em movimento usando B-Splines para computar os coeficientes de interpolação, porém o cálculo dos coeficientes se torna oneroso, visto que eles devem ser calculados em todo passo de tempo e, para manter a ordem espectral, deve-se utilizar coeficientes no mínimo de terceira ordem.

Lima e Silva et al. (2003) propuseram um novo modelo para cálculo do termo-fonte denominado Modelo Físico Virtual (MFV), o qual consiste em fazer um balanço de quantidade de movimento sobre as partículas de fluido que se localizam sobre a interface, incorporando neste balanço a força de interação entre o fluido e a interface.

Arruda (2004) propôs a utilização da metodologia da Fronteira Imersa para resolver escoamentos internos forçados. O autor simulou um conjunto canal – cavidade, com o fundo da cavidade em movimento.

Campregher (2005) mostrou a capacidade do método da Fronteira Imersa para simulação de problemas de interação fluido-estrutura (Figura 1.12). O autor simulou a interação fluido-estrutura no caso de uma esfera ancorada por molas.

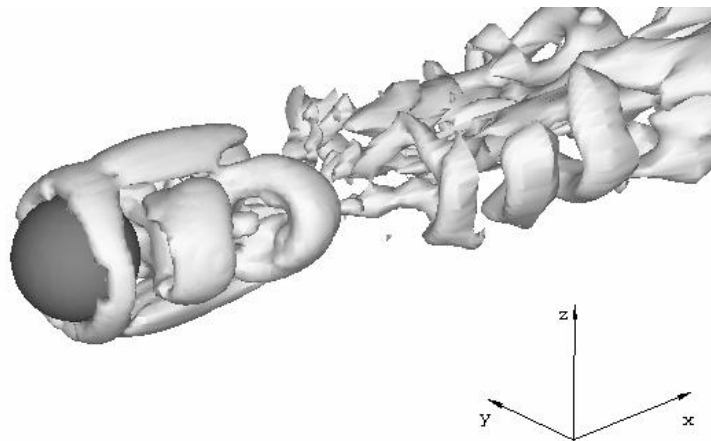


Figura 1.12: Detalhes das estruturas turbilhonares sobre uma esfera simulado por (CAMPREGHER, 2005).

Vedovoto (2007) e Oliveira (2007) simularam geometrias altamente complexas mostrando o potencial do método da Fronteira Imersa (Figura 1.1 e Figura 1.13).

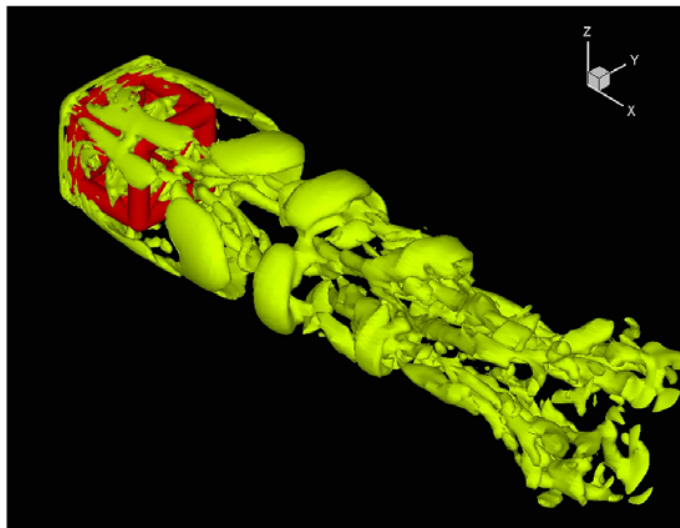


Figura 1.13: Escoamento sobre uma estrutura treliçada (VEDOVOTO, 2007 e OLIVEIRA, 2007).

1.5 Presente trabalho

No presente trabalho é proposto o uso conjunto do método pseudo-espectral de Fourier com a metodologia da fronteira imersa. Como já foi visto, este método possui como grande vantagem a ordem de precisão espectral aliada ao baixo custo computacional, devido a utilização da FFT juntamente com a metodologia da projeção da pressão. Como restrição, o método só é aplicável para escoamentos sobre geometrias simples e condições de contorno periódicas.

Com o objetivo de resolver essa restrição, foi proposta uma nova metodologia de modelagem matemática, na qual acopla-se a metodologia da Fronteira Imersa ao método pseudo-espectral de Fourier, possibilitando a simulação de geometrias complexas e móveis. Com isso vislumbra-se a possibilidade de se resolver problemas não-periódicos utilizando-se a metodologia pseudo-espectral de Fourier.

A modelagem de escoamentos utilizando a metodologia da Fronteira Imersa ainda apresenta uma ordem de precisão baixa (1ª ordem). Uma das razões para essa baixa precisão é o cálculo das derivadas necessárias para o computo da força lagrangiana, que é feita através de interpolações.

No presente trabalho o cálculo dessas derivadas será feito espectralmente, por isso espera-se que utilizando um método espectral obtenha-se resultados de ordem mais elevadas para a metodologia da fronteira imersa. Porém o cálculo espectral pode perder sua precisão, já que existem outros fatores que abaixam a precisão do método, por exemplo, a necessidade de se utilizar filtros.

No presente trabalho serão apresentados três casos teste empregados para a validação do código computacional desenvolvido: o primeiro é a “Equação de Burgers”, que a partir de uma dada condição inicial, apresenta uma solução analítica conhecida. É uma equação unidimensional com condições de contorno periódicas. O segundo caso teste são os “Vórtices de Green-Taylor”, que também admitem uma solução analítica conhecida. Ele foi resolvido para validar o código pseudo-espectral bidimensional com condições de contorno periódicas. O terceiro caso simulado foi uma “Cavidade Bidimensional com Tampa Deslizante” que serviu para testar a metodologia proposta: pseudo-espectral acoplado com a metodologia da Fronteira Imersa. Este é o primeiro caso de escoamento não periódico resolvido com o método pseudo-espectral utilizando a metodologia proposta no presente trabalho: Fronteira Imersa Pseudo-Espectral.

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO

Como descrito anteriormente, o objetivo do presente trabalho é utilizar o método pseudo-espectral de Fourier acoplado com a metodologia da Fronteira Imersa. Para isso serão resolvidas as equações de Navier-Stokes bidimensionais para escoamentos incompressíveis e com um termo fonte imposto. Neste capítulo serão descritos os principais pontos do desenvolvimento do modelo matemático (CANUTO, 1986; LIMA e SILVA, 2002; SOUZA, 2005) proposto no presente trabalho.

Será feita uma revisão a respeito da metodologia da Fronteira Imersa. No que tange ao método pseudo-espectral será mostrada uma rápida revisão de transformadas de Fourier e suas principais propriedades. Em seguida será apresentada a transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral, e por fim, será deduzido e apresentado o processo de acoplamento das duas metodologias.

2.1 Fronteira imersa

A metodologia da Fronteira Imersa (PESKIN, 1977) consiste em trabalhar com duas malhas independentes: a malha euleriana para a solução das equações do fluido e a malha lagrangiana para descrever a interface sólida. Devido à independência das malhas é possível a representação de geometrias complexas e móveis (Figura 2.1). A malha euleriana é fixa, sendo tratada como se todo o domínio, incluindo-se o sólido, estivesse ocupado somente por fluido. O escoamento é então modelado e resolvido pelas equações de Navier-Stokes em todos os pontos da malha, mesmo para aqueles pontos que, à princípio, fazem parte do corpo sólido. As informações sobre a interface fluido/sólido no domínio de cálculo

são passadas à malha euleriana via adição de um termo fonte de força às equações de Navier-Stokes (OLIVEIRA, 2006). Este termo faz o papel de uma força de corpo que representa as condições de contorno do escoamento (GOLDSTEIN, 1993).

No presente trabalho, o termo fonte é calculado através do Modelo Físico Virtual (LIMA e SILVA et al., 2003), o qual é baseado na segunda lei de Newton e permite a modelagem da condição de não deslizamento sobre a interface imersa.

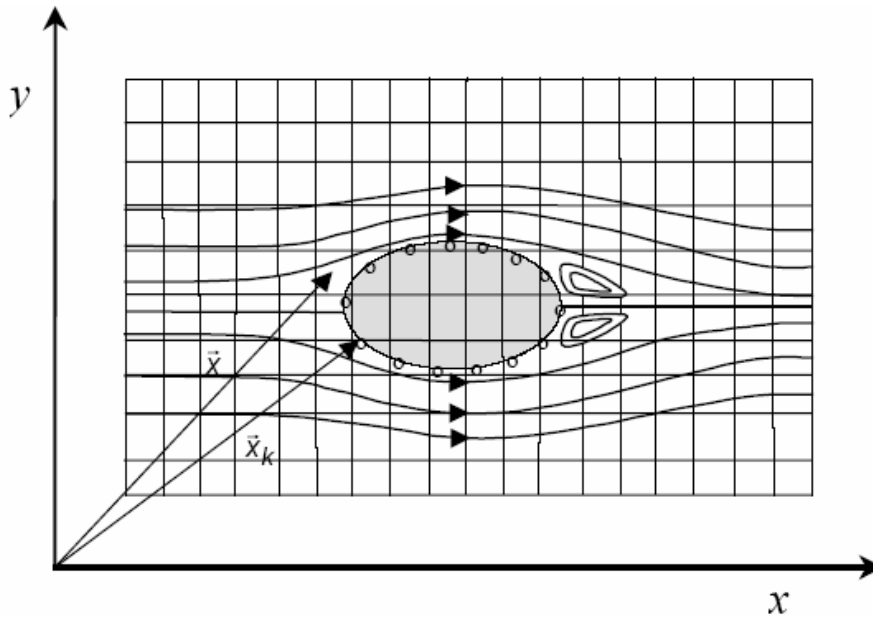


Figura 2.1: Malha euleriana retangular e malha lagrangina elíptica (LIMA E SILVA et al., 2002).

2.1.1 Modelo Matemático para o Fluido

A modelagem do domínio fluido é feita como se ele fosse ocupado inteiramente por fluido, onde as equações que regem o escoamento são a equação do balanço da quantidade de movimento linear e a equação da conservação da massa, as quais estão aqui apresentadas na sua forma tensorial:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

onde $\frac{\partial p}{\partial x_l} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_l}$; p^* é a pressão estática em $[\text{N/m}^2]$; u_l é a velocidade na direção l em $[\text{m/s}]$; $f_l = \frac{f_l^*}{\rho}$; f_l^* é o termo fonte de força em $[\text{N/m}^3]$; ρ é a massa específica; ν é a viscosidade cinemática em $[\text{m}^2/\text{s}]$; x_l é a componente espacial (x, y) e t é o tempo em $[\text{s}]$.

O termo fonte f_l é definido em todo domínio de cálculo, mas apresenta valores diferentes de zero somente nos pontos eulerianos que coincidam com a geometria imersa, tal que o campo euleriano “sinta” a presença da interface sólida. Este campo de força euleriano deve ser calculado a partir do campo de força lagrangiano $F_l(\vec{x}_k, t)$. A seguinte definição é dada:

$$f_l(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_l(\vec{x}_k, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{x}_k \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{x}_k \end{cases} \quad (2.3)$$

onde \vec{x}_k é a posição de uma partícula no fluido e \vec{x}_k a posição de um ponto sobre a interface sólida.

Esta definição leva a um campo $f_l(\vec{x}, t)$ descontínuo, o que pode ser resolvido numericamente apenas quando houver coincidência dos pontos que compõem a interface com algum dos pontos que compõem o domínio fluido. Caso não haja coincidência, o que, para geometrias complexas é muito freqüente, deve-se distribuir a função $f_l(\vec{x}, t)$ sobre a sua vizinhança. Para tanto, faz-se uso de uma função distribuição, como por exemplo, a função $D_{ij}(\vec{x}_k - \vec{x})$ proposta por Unverdi e Tryggvason (1992), e transcrita aqui pela Eq. (2.4).

$$D_{ij}(\vec{x}_k) = \frac{f_l[(x_k - x_l)/h] f_l[(y_k - y_j)/h]}{h^2}, \quad (2.4)$$

$$f_{(r)} = \begin{cases} f_1(r) & \text{se } \|r\| \leq 1 \\ \frac{1}{2} - f_1(2-r) & \text{se } 1 < \|r\| < 2, \\ 0 & \text{se } \|r\| \geq 2 \end{cases} \quad (2.5)$$

onde:

$$f_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8},$$

$$r = \frac{x_k - x_i}{h} \text{ ou } r = \frac{y_k - y_j}{h},$$

sendo h o tamanho da malha euleriana e (x_i, y_j) as coordenadas do ponto \bar{x} do fluido. Esta função D_{ij} é ilustrada na Figura 2.2 abaixo. Ela tem uma forma similar à uma gaussiana e atende à propriedade de integral unitária quando integrada no intervalo $[-\infty, \infty]$. Esta propriedade é importante para garantir conservatividade.

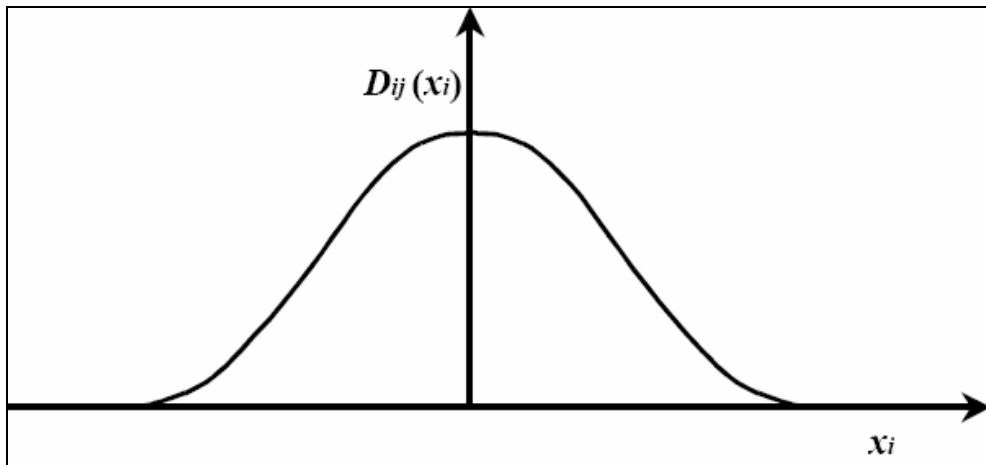


Figura 2.2: Função distribuição do tipo gaussiana proposta por Uverdi e Triggvason (1992).

O campo de força euleriano $f_l(\bar{x}, t)$ (euleriano) é nulo em todo domínio, exceto quando se aproxima da interface imersa, onde ele passa a modelar virtualmente a presença da membrana imersa, simulando a presença de um corpo. Com isso não é necessário fazer uma adaptação da malha euleriana para localizar a interface (LIMA e SILVA, 2002). Uma vez calculado o campo de força lagrangiano $F_l(\bar{x}_k, t)$, este pode ser distribuído e, assim, transmitir a informação da presença da geometria para a malha euleriana. Isto pode ser visualizado na Figura 2.3.

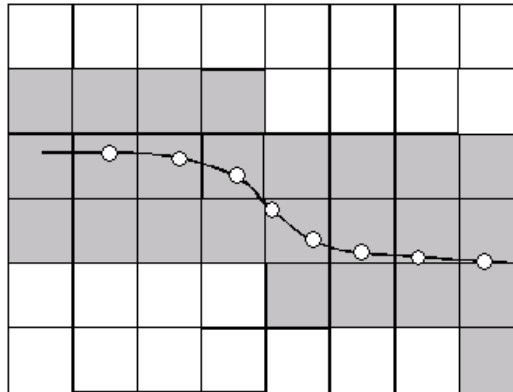


Figura 2.3: Células eulerianas onde a força lagrangiana é distribuída (cor cinza).

2.1.2 Modelo Matemático para a Interface Imersa

O campo de força lagrangiano é calculado através do Modelo Físico Virtual (Virtual Physical Model) o qual foi proposto por Lima e Silva et al. (2003), para o qual não é necessário o uso de constantes *ad-hoc*, como proposto por outros autores (PESKIN, 1977; GOLDSTEIN, 1993).

A força lagrangiana $F_l(\vec{x}_k, t)$ é avaliada através de um balanço de quantidade de movimento sobre uma partícula de fluido que se encontra junto à interface sólido-fluido, Eq. (2.6), levando-se em consideração todos os termos das equações de Navier-Stokes.

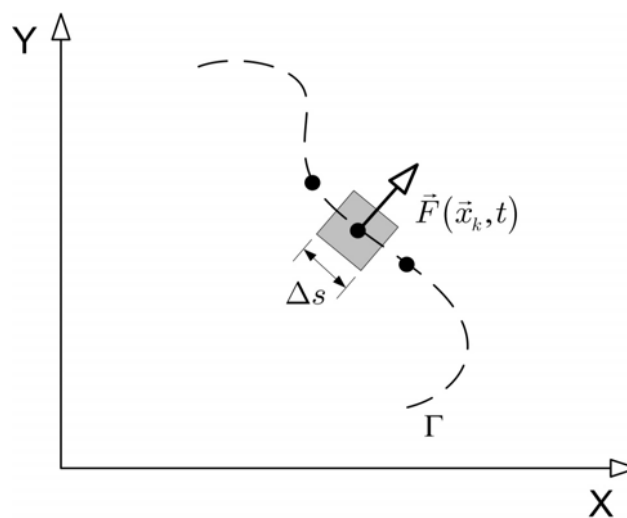


Figura 2.4: Volume de controle sobre um ponto lagrangiano

$$F_l(\bar{x}_k, t) = \frac{\partial u_l}{\partial t}(\bar{x}_k, t) + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_l u_j)(\bar{x}_k, t) + \frac{\partial p}{\partial x_l}(\bar{x}_k, t) - \nu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_j}(\bar{x}_k, t) \quad (2.6)$$

Os termos do lado direito da Eq. (2.6) são denominados, respectivamente de:

$$F_l^{acel} = \frac{\partial u_l}{\partial t} \text{ - força de aceleração,}$$

$$F_l^{inert} = \frac{\partial(u_l u_j)}{\partial x_j} \text{ - força inercial,}$$

$$F_l^{visc} = -\nu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_j} \text{ - força viscosa,}$$

$$F_l^{press} = \frac{\partial p}{\partial x_l} \text{ - força de pressão.}$$

Estes termos são calculados nos pontos da interface (lagrangianos) com o auxílio dos campos de pressão e velocidade calculados na malha euleriana, através de interpolações. Existem diferentes maneiras de se fazer essas interpolações, Lima e Silva (2002) propôs interpolações de Lagrange, Mhod-Yosof (1997) utilizou *B-Spline*.

No presente trabalho, considerando os casos particulares em que se pode ter coincidência das malhas lagrangianas e eulerianas e considerando a utilização do método pseudo-espectral de Fourier, as derivadas espaciais da Eq. (2.6) serão calculadas espectralmente. Será proposta uma forma alternativa para o acoplamento entre as malhas lagrangiana e euleriana no próximo capítulo de Métodos Numéricos.

2.2 Transformadas de Fourier

Diz-se que uma função $\bar{f}(\bar{x})$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, é integrável em todo domínio real (BRIGGS, 1995), se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(\bar{x})| dx < \infty. \quad (2.7)$$

Pode-se definir uma função $\widehat{f}(\vec{k})$ pela Eq (2.8):

$$\widehat{f}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(\vec{x}) e^{-i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} dx, \quad (2.8)$$

onde $-\infty < \vec{k} < \infty$ representa os números de onda e $i = \sqrt{-1}$.

A função $\widehat{f}(\vec{k})$ é a transformada de Fourier da função $\vec{f}(\vec{x})$. Pode-se dizer que $\widehat{f}(\vec{k})$ está definida no domínio espectral, ou domínio transformado.

Existe também a operação inversa, a qual transforma uma função que está no espaço de Fourier para o espaço físico, denominada transformada inversa de Fourier, apresentada pela Eq. (2.9):

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\vec{k}) e^{i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}. \quad (2.9)$$

Para interpretar fisicamente a transformada de Fourier, deve-se observar o cerne das Eqs. (2.8) e (2.9). Aplicando-se a fórmula de Euler, tem-se que:

$$e^{\pm i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} = \cos(2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}) \pm i \text{sen}(2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}). \quad (2.10)$$

Esta fórmula diz que, para um valor fixo de \vec{k} a equação acima consiste de ondas (senos e cossenos) com um número de onda \vec{k} , medido em unidades do inverso de \vec{x} (inverso de comprimento), ou seja, para um valor fixo de \vec{k} existe um número de onda por unidade de comprimento. A transformada inversa de Fourier (2.9) recupera uma função $\vec{f}(\vec{x})$ a partir da combinação dos modos de Fourier todos os números de onda. O modo associado com um número de onda particular \vec{k} tem um peso determinado por $\widehat{f}(\vec{k})$ em (2.8).

2.2.1 Propriedades da Transformada de Fourier

O objetivo de transformar uma função para o espaço espectral é que nele existem propriedades interessantes, principalmente para se trabalhar com equações diferenciais parciais (EDP). Normalmente, uma EDP no espaço físico é reduzida a uma equação diferencial ordinária (EDO) no espaço espectral. As principais propriedades do espaço espectral de Fourier são:

- Homogeneidade, Eq. (2.11):

$$\widehat{\alpha f(\vec{x})} = \alpha \widehat{f(\vec{x})}, \quad (2.11)$$

onde, α é uma constante.

- Aditividade:

A transformada da soma de duas funções é a soma das transformadas:

$$\widehat{f(\vec{x}) + g(\vec{x})} = \widehat{f(\vec{x})} + \widehat{g(\vec{x})}, \quad (2.12)$$

- Derivada

A transformada da derivada de uma função é dada por (2.13):

$$\widehat{\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}(\vec{x})} = (ik_i)^n \widehat{f(\vec{x})}, \quad (2.13)$$

onde n é a ordem da derivada.

- Produto de funções:

A transformada do produto de duas funções é um produto de convolução entre essas funções:

$$\widehat{f(\vec{x})g(\vec{x})}(\vec{k}) = \widehat{f(\vec{x})} * \widehat{g(\vec{x})}, \quad (2.14)$$

onde \vec{k} é o parâmetro de transformação do produto, \vec{r} é o parâmetro de transformação da função $f(\vec{x})$ e \vec{s} é o parâmetro de transformação da função $g(\vec{x})$. Este produto de convolução é dado por:

$$\left[\widehat{f}(\vec{r}) * \widehat{g}(\vec{s}) \right] (\vec{k}) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{f}(\vec{r}) \widehat{g}(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.15)$$

Esta propriedade é que justifica o uso do método pseudo-espectral, pois resolver a integral de convolução que aparece no termo não-linear das equações de Navier-Stokes é um procedimento muito caro computacionalmente. Esta metodologia será definida no capítulo de Métodos Numéricos.

2.3 Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço de Fourier

Depois de definida a transformada de Fourier e estabelecidas as suas propriedades de interesse, será feita a transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier. Também será mostrado o método da projeção, o qual desvincula o termo da pressão das equações e, além disso, será demonstrado como transformar as equações com termo-fonte imposto.

Reescreve-se aqui as equações de Navier-Stokes e da continuidade para escoamentos incompressíveis, com condições de contorno periódicas em todas as direções, Eqs. (2.16) e (2.17):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.17)$$

Transformando-se a equação da continuidade (2.17) para o espaço de Fourier,

$$\widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0, \quad (2.18)$$

e aplicando a propriedade da transformação de derivadas, dada por (2.13), tem-se:

$$ik_j \widehat{u}_j = 0. \quad (2.19)$$

Da geometria analítica sabe-se que se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então ambos devem ser ortogonais entre si. Portanto, da equação da continuidade transformada para o espaço de Fourier (2.19), tem-se que o vetor número de onda k_j é ortogonal à velocidade transformada \hat{u}_j .

A partir da conclusão do parágrafo anterior, define-se um plano π perpendicular ao vetor número de onda \vec{k} e, portanto, o vetor velocidade transformado, $\hat{V}(\vec{k}, t)$, pertence ao plano π , conforme ilustrado na Figura 2.5.

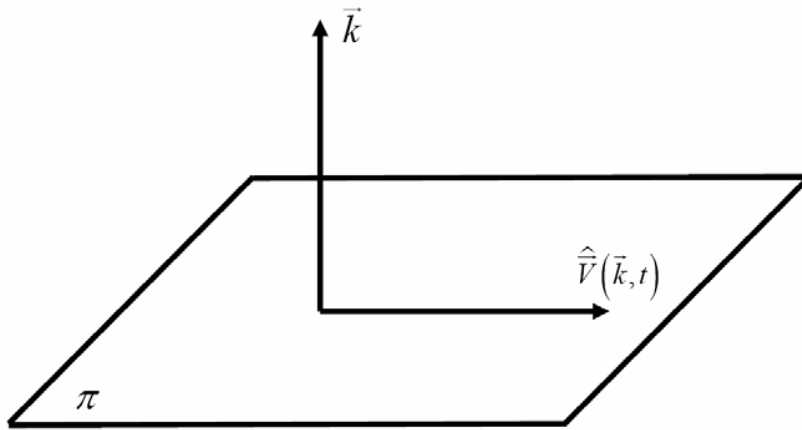


Figura 2.5: Definição do plano π (SILVEIRA-NETO, 2002).

Transformando a equação (2.16) para o espaço de Fourier, aplicando as propriedades definidas de (2.11) a (2.13), tem-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} = -ik_i \hat{p} - vk^2 \hat{u}_i, \quad (2.20)$$

onde k^2 é a norma ao quadrado do vetor número de onda, ou seja, $k^2 = k_j k_j$.

Observando separadamente cada um dos termos transformados em (2.20), tem-se:

- Termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear:

$$\frac{\partial \widehat{u_i u_j}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \hat{u}_j + \hat{u}_i \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t}, \quad (2.21)$$

tem-se de (2.19) que:

$$k_j \widehat{u}_j = 0. \quad (2.22)$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_j \widehat{u}_j) = k_j \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial t} \in \text{ao plano } \pi. \quad (2.23)$$

- Termo da difusão da quantidade de movimento linear:

$$v \frac{\partial^2 \widehat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} = -v k^2 \widehat{u}_i. \quad (2.24)$$

Este termo transformado também pertence ao plano π , pois k é um escalar.

- Gradiente da pressão

$$\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} = i k_i \widehat{p}. \quad (2.25)$$

Nota-se que a transformada da pressão é colinear ao vetor número de onda, sendo, portanto perpendicular ao plano π . A figura Figura 2.6 mostra os termos da equação de Navier-Stokes transformados sobre o plano π .

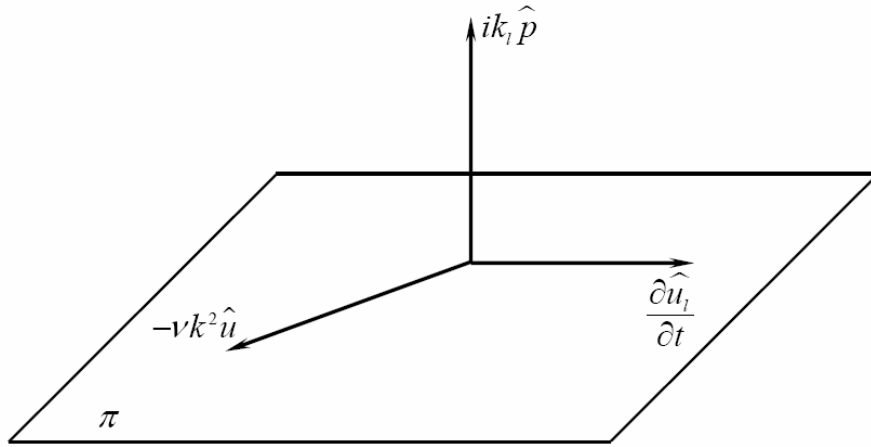


Figura 2.6: Termos da equação de Navier-Stokes definidos em relação ao plano π .

- Termo não-linear

$$\frac{\partial(\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} = ik_j \widehat{u_i u_j}. \quad (2.26)$$

No termo não-linear, Eq. (2.26), aparece a transformada do produto de duas funções que recai em uma integral de convolução, como definida em (2.15), ou seja:

$$\widehat{(u_i u_j)}(\vec{k}) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u_i}(\vec{r}) \widehat{u_j}(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.27)$$

onde $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$ fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda \vec{k} , \vec{r} e \vec{s} .

2.3.1 Método da Projeção

Com os termos definidos em (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26) tem-se que:

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \widehat{u_i}}{\partial t} + vk^2 \widehat{u_i} \right]}_{\in \pi} + \underbrace{\left[\frac{\partial(\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} + ik_i \widehat{p} \right]}_{\in \pi} = 0, \quad (2.28)$$

ou seja, sabendo-se que a soma do termo transiente com o termo viscoso pertence ao plano π , tem-se que a soma do termo não-linear com o gradiente de pressão também deve pertencer ao plano π , já que a soma dos quatro termos é nula. Isto se deve ao fato que, se a soma de dois vetores é nula, então os dois vetores devem ser colineares.

Não se sabe a priori, em que posição se encontra o termo não-linear transformado em relação ao plano π , então será definido o tensor projeção, Eq. (2.29):

$$\overline{\varrho}_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (2.29)$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.30)$$

é o delta de Kronecker.

O tensor projeção $\left(\overline{\varrho}\right)$ projeta qualquer vetor sobre o plano π (SILVEIRA-NETO, 2002). Para verificar esta propriedade, toma-se um vetor \vec{a} qualquer, e faz-se a projeção de \vec{a} utilizando-se o tensor $\overline{\varrho}$, obtendo-se o seguinte:

$$\overline{\varrho} \cdot \vec{a} = \varrho_{ij} a_j = a_j \delta_{ij} - a_j \frac{k_i k_j}{k^2} = a_i - a_j k_j \frac{k_i}{k^2} = a_i^p, \quad (2.31)$$

onde a_i^p é o vetor a_i projetado por $\overline{\varrho}$. Fazendo-se o produto escalar da projeção a_i^p pelo vetor número de onda k_i , tem-se:

$$a_i^p k_i = a_i k_i - a_j k_j \frac{k_i k_i}{k^2} = 0. \quad (2.32)$$

Assim, verifica-se que o tensor $\overline{\varrho}$ projeta um vetor \vec{a} qualquer no plano π . Retornando à transformada do termo não linear, é necessário que:

$$\left[\frac{\widehat{\partial(u_i u_j)}}{\partial x_j} + ik_i \widehat{p} \right] \in \pi \quad (2.33)$$

Como $ik_i \widehat{p}$ é ortogonal ao plano π estabelece-se a Eq. (2.34):

$$\left[\frac{\widehat{\partial(u_i u_j)}}{\partial x_j} + ik_i \widehat{p} \right] = \wp_{lm} \left[\frac{\widehat{\partial(u_m u_j)}}{\partial x_j} \right]. \quad (2.34)$$

Concluí-se, da Eq. (2.34), que a soma dos vetores transformados do gradiente de pressão e do termo não-linear transformados é a projeção do termo não-linear transformado sobre o plano π (Figura 2.7). Portanto, as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, assumem a seguinte forma, no espaço de Fourier:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i(\vec{k})}{\partial t} + \nu k^2 \widehat{u}_i(\vec{k}) = -ik_j \wp_{lm} \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.35)$$

Estas são as equações de Navier-Stokes no espaço de Fourier, as quais são independentes do campo de pressão transformado.

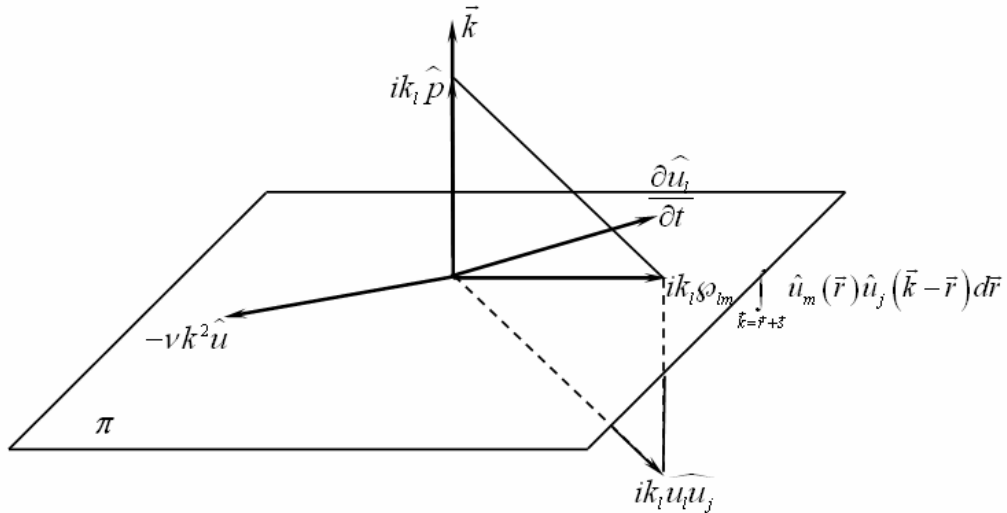


Figura 2.7: Projeção do termo não-linear sobre o plano π .

2.3.2 Recuperação do Campo de Pressão

As equações de Navier-Stokes no espaço de Fourier (2.35) não dependem do campo de pressão como acontece no espaço físico. Portanto, o método da projeção minimiza os cálculos para a resolução destas equações, já que não é necessário resolver o campo de pressão, o qual, normalmente, demanda o maior esforço computacional nas metodologias convencionais. No entanto é possível determinar o campo de pressão a partir da equação (2.34).

Isolando-se o termo de pressão transformado, tem-se que:

$$ik_l \hat{p}(\vec{k}) = \wp_{lm} \frac{\partial(\widehat{u_m u_j})}{\partial x_j}(\vec{k}) - I_{lm} \frac{\partial(\widehat{u_m u_j})}{\partial x_j}(\vec{k}). \quad (2.36)$$

Observa-se que o tensor identidade (I_{lm}) foi introduzido, por conveniência, sem alterar a Eq. (2.34). Substituindo as transformadas, tem-se:

$$ik_l \hat{p}(\vec{k}) = (\wp_{lm} - I_{lm}) ik_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.37)$$

Fazendo o produto escalar desta equação pelo vetor número de onda k_l , tem-se:

$$k^2 \hat{p}(\vec{k}) = (\wp_{lm} - I_{lm}) k_l k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.38)$$

Observando-se que:

$$(\wp_{lm} - I_{lm}) k_l = \left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} - I_{lm} \right) k_l = -k_m, \quad (2.39)$$

tem-se que:

$$k^2 \hat{p}(\vec{k}) = -k_m k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.40)$$

Assim,

$$\hat{p}(\vec{k}) = \frac{-k_m k_j}{k^2} \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.41)$$

de onde,

$$p(\vec{x}, t) = \left[\hat{p}(\vec{k}, t) \right]^{-1}. \quad (2.42)$$

A notação $[]^{-1}$ tem aqui o significado de transformada inversa de Fourier.

2.4 Transformação das Equações de Navier-Stokes com Termo-Fonte

Como já comentado, com o método pseudo-espectral resolve-se apenas escoamentos com condições de contorno periódicas. No presente trabalho, aplicar-se-á o método da Fronteira Imersa, o qual necessita de um termo fonte adicionado às equações de Navier-Stokes. Para isso transformando-se a equação (2.1) e aplicando-se as propriedades da Transformada de Fourier, tem-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} = -ik_l \hat{p} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{f}_i. \quad (2.43)$$

De maneira análoga à projeção o termo não-linear em (2.34), projeta-se a diferença entre o termo fonte e o termo não-linear, Eq. (2.44):

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i \right]}_{\in \pi} \Rightarrow \underbrace{\left[\frac{\partial (\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} - \hat{f}_i + ik_l \hat{p} \right]}_{\in \pi} = 0, \quad (2.44)$$

Utilizando o tensor projeção definido em (2.29), tem-se que:

$$\left[\frac{\partial(\widehat{u_i u_j})}{\partial x_j} + ik_l \widehat{p} - \widehat{f}_l \right] = \wp_{lm} \left[\frac{\partial(\widehat{u_m u_j})}{\partial x_j} - \widehat{f}_m \right]. \quad (2.45)$$

Concluí-se de (2.45) que a soma dos vetores transformados do gradiente de pressão, do termo não-linear e do termo fonte é a projeção da soma do termo não-linear e do termo fonte como pode ser visualizado na Figura 2.8.

Portanto as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis com termo fonte assumem a seguinte forma no espaço de Fourier:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i(\vec{k})}{\partial t} + \nu k^2 \widehat{u}_i(\vec{k}) = \wp_{lm} \widehat{f}_m - ik_j \wp_{lm} \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.46)$$

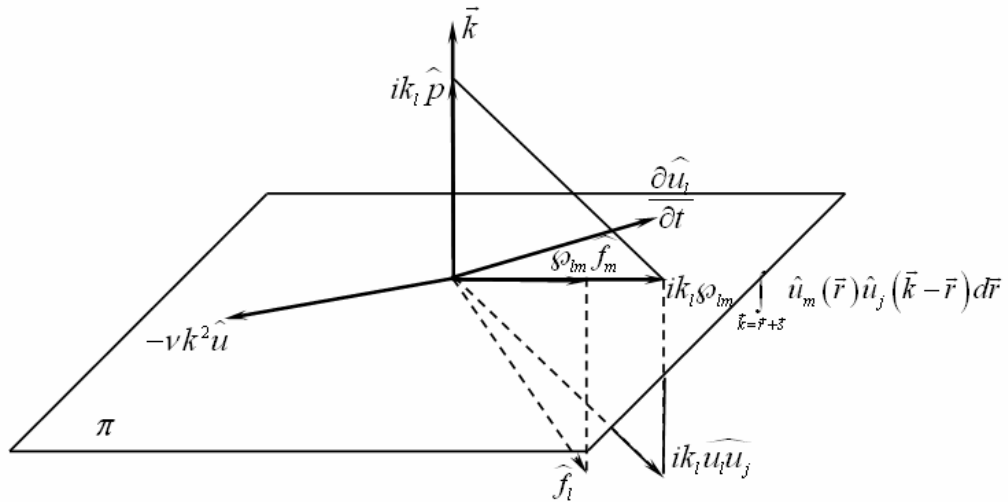


Figura 2.8: Projeção do termo fonte e do termo não-linear sobre o plano π .

Assim a Eq. (2.46) não depende do campo de pressão, porém pode-se obtê-lo no espaço de Fourier através da Eq. (2.47), similarmente ao que foi feito na Eq. (2.41):

$$\widehat{p}(\vec{k}) = - \left[i \frac{k_m}{k^2} \widehat{f}_m + \frac{k_m k_j}{k^2} \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (2.47)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Fourier à Eq. (2.47), obtêm-se o campo de pressão no espaço físico similarmente ao que foi feito na Eq. (2.42).

2.5 Acoplamento das malhas lagrangiana e euleriana no espaço de Fourier

No espaço de Fourier, o cálculo das derivadas necessárias para se computar a força lagrangiana não foi feito através do processo de interpolação, alternativamente, foi desenvolvida uma nova metodologia baseada nas propriedades das transformadas de Fourier e restringindo a casos em que haja coincidência dos pontos lagrangianos com os pontos eulerianos.

O primeiro passo é impor as condições do problema a ser modelado, para serem calculadas as derivadas necessárias que aparecem no cálculo da força lagrangiana. Isto deve ser feito no espaço físico, ou seja, é preciso transformar para o espaço físico os campos de velocidade \widehat{u}_l

$$u_l = \left[\widehat{u}_l \right]^{-1}. \quad (2.48)$$

No espaço físico impõem-se as condições do problema a ser analisado de acordo com:

$$u_l^F = \begin{cases} u_l & \text{se } \bar{x} \neq \bar{x}_k, \\ u_k & \text{se } \bar{x} = \bar{x}_k, \end{cases} \quad (2.49)$$

onde u_k são os pontos da superfície imersa e u_l^F é o campo de velocidade no espaço físico, o qual recebe as condições de contorno que modelarão o campo de força da fronteira imersa.

O próximo passo é transformar para o espaço espectral este campo u_l^F . Isto é feito, a fim de se calcular as derivadas necessárias para o cálculo da força lagrangiana, dada pela Eq. (2.50):

$$\widehat{F}_l(\vec{k}, t) = \frac{\partial \widehat{u}_l^F}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u}_l^F \widehat{u}_j^F)}{\partial x_j} + ik_l \widehat{p}^F - \nu k^2 \widehat{u}_l^F \quad (2.50)$$

onde, o sobrescrito F simboliza que os campos foram alterados pelas condições que modelam a fronteira imersa, de forma que a condição de não-deslizamento seja obedecida.

Na Eq (2.50) o termo de força advectiva, $\frac{\partial(\widehat{u_i^F u_j^F})}{\partial x_j}$ é calculado de forma pseudo-espectral, como será mostrado no próximo capítulo de Métodos Numéricos. O termo que representa a força de pressão, $ik_l \widehat{p^F}$, é calculado a partir da Eq. (2.47), para o cálculo da força dissipativa, não há nenhum procedimento especial, apenas se faz o produto $\nu k^2 \widehat{u_i^F}$.

Já o termo $\frac{\partial \widehat{u_i^F}}{\partial t}$, denominado termo de aceleração forçante, merece uma atenção especial. Ele é um termo com função numérica, necessário para estabilizar os cálculos do campo de força durante o processo transiente. Ele é calculado a partir do campo de velocidade euleriano e do campo modificado pelas condições da fronteira imersa, Eq. (2.51):

$$\frac{\partial \widehat{u_i^F}}{\partial t} = \frac{\widehat{u_i} - \widehat{u_i^F}}{\Delta t}. \quad (2.51)$$

Como será visto, no capítulo de Resultados, este termo tem grande influência na geração da força lagrangiana.

Uma vez modelada a força lagrangiana, ela deve ser transferida para o domínio euleriano. Para isso, leva-se o campo de força lagrangiano para o espaço físico, aplicando-se a transformada inversa de Fourier, Eq. (2.52):

$$F_i^F = \left[\widehat{F_i^F} \right]^{-1}. \quad (2.52)$$

O termo fonte euleriano é calculado como definido na Eq. (2.3) (ENRIQUEZ-REMIGIO, 2007), ou seja, ele é definido em todo o domínio euleriano, mas seu valor só é diferente de zero nos pontos eulerianos que coincidem com a fronteira imersa.

Depois de definido o termo fonte de força euleriano no espaço físico, deve-se levá-lo para o espaço de Fourier, obtendo-se $\widehat{f}_i(\vec{k}, t)$, o qual é usado na Eq. (2.46) para a solução das equações de Navier-Stokes no espaço espectral de Fourier.

Note que nesta modelagem de acoplamento entre os campos euleriano e lagrangiano no espaço de Fourier, apresentam-se duas equações descontínuas, Eqs. (2.3) e (2.49). Ambas devem ser tratadas de forma especial, quando trabalhadas numericamente.

Devido a descontinuidade dessas equações surge o fenômeno de Gibbs, o qual produz oscilações na solução do problema devido as altas frequências mal resolvidas.

Especificamente, no caso da Eq. (2.3), pode-se adotar duas abordagens: uma é resolvê-la utilizando a função distribuição, definida na Eq. (2.4); a outra forma é trabalhar com funções descontínuas no espaço de Fourier, utilizando-se filtros para amortecer as oscilações. Os esquemas de filtragem serão abordados no próximo capítulo.

CAPÍTULO III

MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo serão abordados três pontos principais, sendo que o primeiro é o método pseudo-espectral, que é uma metodologia utilizada quando se trabalha com os métodos espectrais. O segundo ponto é o processo de acoplamento entre os pontos eulerianos e lagrangianos e o terceiro é o conjunto de procedimentos necessários para o desenvolvimento de um código computacional pseudo-espectral, como, por exemplo, o cálculo dos números de onda, avanço temporal e a filtragem.

Foi desenvolvido um código computacional em FORTRAN 90 que resolve as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis utilizando o método pseudo-espectral de Fourier com as condições de contorno impostas através de um termo fonte utilizando o método da Fronteira Imersa.

3.1 DFT e FFT

Para trabalhar computacionalmente com a transformada de Fourier utiliza-se a versão discreta, denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT), definida na Eq. (3.1) (BRIGGS, 1995):

$$\hat{f}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}, \quad (3.1)$$

onde k é o número de onda, N é o número de pontos da malha, n fornece a posição x_n dos nós de colocação ($x_n = n\Delta x$) e $i = \sqrt{-1}$.

A Eq. (3.1) é a aproximação numérica da transformada de Fourier. Existe também a Transformada Inversa Discreta de Fourier, definida na Eq. (3.2):

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}_k e^{\frac{i2\pi kn}{N}}. \quad (3.2)$$

Deve-se notar que para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada para o espaço espectral deve ser periódica, ou seja:

$$\bar{f}(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{x} + L, t), \quad (3.3)$$

onde L é o comprimento de onda considerado. Esta propriedade limita o uso do método espectral de Fourier para problemas modelados por EDP's com condições de contorno periódicas.

Cooley e Tukey (1965) desenvolveram o algoritmo denominado Transformada Rápida de Fourier (FFT), o qual trabalha com o procedimento denominado rotação de bit, tornando o cálculo da DFT muito mais eficiente quando comparado com (3.1), pois o número de operações reduz de $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$. Esse custo computacional torna atrativa a utilização de métodos espectrais para resolver equações diferenciais parciais. Outra grande vantagem do método espectral é a precisão numérica, a qual será mostrada mais adiante através da resolução de problemas teste. Porém, para se conseguir atingir a melhor performance na utilização das FFTs é preciso usar 2^N número de pontos de colocação (onde N é um número inteiro). Além disto a malha deve ser regular e os pontos de colocação uniformemente espaçados.

Encontra-se disponíveis várias subrotinas para o uso da FFT (<http://www.fftw.org/benchfft/ffts.html>), as quais levam em conta diversos parâmetros, como por exemplo, trabalhar com dados reais ou complexos, número par ou ímpar de nós de colocação, simples ou dupla precisão, unidimensional, bidimensional ou tridimensional, serial ou paralelo, números de nós de colocação de potência 2, 3 ou 5 e em diversas linguagens de programação. Especificamente, para esse trabalho, foi utilizada uma versão da subrotina FFTPACK de Swarztrauber (1982), que pode ser encontrada em <http://www.netlib.org/fftpack/>. Ela é uma subrotina escrita em FORTRAN 77, porém foi

adaptada para o padrão FORTRAN 90. Ela tem dupla precisão, seu melhor desempenho ocorre para 2^N nós de colocação, onde N é um número inteiro. Foi utilizada a versão unidimensional, mesmo para os caso bidimensionais, pois a subrotina foi alterada (SOUZA, 2005) de forma a vetorizar a matriz 2D. A subrotina que calcula a transformada inversa de Fourier foi alterada (MOREIRA et al., 2006) de modo a produzir o resultado já normalizado. Um parâmetro muito importante a ser considerado é o cálculo dos números de onda (\vec{k}) , que são usados na resolução das equações transformadas. Para a FFTPACK os vetores número de onda são calculados da seguinte forma (POULTER, 2004):

$$\begin{aligned} k_{l(\eta)} &= \eta - 1 & 1 < \eta < \frac{N}{2} + 1 \\ k_{l(\eta)} &= \eta - 1 - N & \frac{N}{2} + 2 < \eta < N \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde, k_l é o vetor número de onda, N é o número de nós de colocação e η é a posição no vetor em uma direção do domínio. Caso outra subrotina que calcule a FFT for utilizada, deve-se observar como é cálculo dos números de onda da mesma, uma vez que este parâmetro é mudado para cada subrotina.

3.2 Tratamento do termo não-linear

Quando se trabalha com a resolução das equações de Navier-Stokes de forma espectral deve-se tratar o termo não-linear de forma apropriada, pois sua resolução passa por uma integral de convolução, já que trata-se da transformação do produto de dois campos. A resolução dessa integral, como já comentado, é inviável computacionalmente, portanto faz-se uso do método pseudo-espectral.

O termo não-linear pode ser tratado de diferentes formas (CANUTO et al. 1988) apesar de serem matematicamente idênticas, apresentam diferentes propriedades quando discretizadas. Estas formas são:

$$\text{Forma advectiva: } (\vec{\bar{v}} \cdot \vec{\bar{v}}) \vec{\bar{v}} \quad (3.5)$$

$$\text{Forma divergente: } \vec{\bar{v}} \cdot (\vec{\bar{v}} \vec{\bar{v}}) \quad (3.6)$$

$$\text{Forma skew-simétrica: } \frac{1}{2} \left[(\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \bar{V}) \right] \quad (3.7)$$

$$\text{Forma rotacional: } \frac{1}{2} \bar{\nabla} \cdot (\bar{V} \bar{V}) + \bar{\omega} \times \bar{V} \quad (3.8)$$

onde $\bar{\omega} = \bar{\nabla} \times \bar{V}$.

Estas expressões são algebricamente iguais, assumindo $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$. Porém quando discretizada, a forma rotacional é a menos cara, mas introduz oscilações nas altas frequências espaciais, a menos que o processo de *dealias* (CANUTO, 1988) seja usado. No entanto, este processo aumenta o custo do cálculo dos coeficientes de Fourier consideravelmente. A forma skew-simétrica é a mais estável e apresenta os melhores resultados, mas é cerca duas vezes mais cara computacionalmente que a rotacional. No entanto, este inconveniente pode ser resolvido. Observando as expressões acima, nota-se que a forma skew-simétrica é a média entre as formas advectiva e divergente. Portanto, a forma skew-simétrica pode ser simulada pela alternância entre as formas advectiva e divergente em sucessivos passos de tempo (ZANG, 1987). O algoritmo básico de um método pseudo-espectral com tratamento do termo não-linear na forma skew-simétrica alternada, utilizada nesse trabalho está descrito abaixo:

- 1) Primeiro traz-se o campo \hat{u}_i para o espaço físico, como condição inicial utiliza-se um campo que satisfaça a equação da continuidade;
- 2) Calcula-se o produto $u_i u_j$ no espaço físico;
- 3) Transforma-se o produto $u_i u_j$ para o espaço de Fourier $\hat{u}_i \hat{u}_j$;
- 4) Calcula-se a derivada de $\hat{u}_i \hat{u}_j$ no espaço de Fourier, ou seja, $ik_j \hat{u}_i \hat{u}_j$;
- 5) Avança-se no tempo e resolve-se as equações de Navier-Stokes;

Esta é a parte que trabalha com o termo não-linear na forma divergente. No próximo passo de tempo o termo não-linear será tratado na forma advectiva.

- 1) Calcula-se a derivada $ik_j \hat{u}_i$;
- 2) Faz-se a transformada inversa da derivada $ik_j \hat{u}_i$ e do campo de velocidade \hat{u}_j ;
- 3) Multiplica-se no espaço físico $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$;

4) Transforma-se o produto $u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}$ para o espaço de Fourier, obtendo-se $\widehat{u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}}$;

5) Resolve-se as equações de Navier-Stokes, avança-se no tempo e retorna-se ao cálculo do termo não-linear na forma conservativa.

Esta seqüência de passos é o tratamento do termo não-linear através da forma skew-simétrica alternada. Esta metodologia é mais barata computacionalmente do que resolver a integral de convolução. Além disso, segundo Souza (2005), ela é mais estável que as formas advectiva e divergente separadamente e mais barata que as formas rotacional com dealise e skew-simétrica convencional.

Os resultados dos diferentes tipos de tratamento do termo não-linear serão apresentados no capítulo de Resultados, através da resolução da equação de Burgers.

3.3 Metodologia de acoplamento entre os métodos pseudo-espectral e da fronteira imersa

O algoritmo pseudo-espectral utilizado para o cálculo de um escoamento com condições de contorno impostas através da fronteira imersa é basicamente como o descrito abaixo:

1) A partir de um campo de velocidade em um tempo n , u_l^n , gera-se um novo campo de velocidade modificado de forma a receber as condições para representar a interface, u_l^{nF} ;

2) Transforma para o espaço espectral o campo com as condições da fronteira imersa impostas, $\widehat{u_l^{nF}}$;

3) Devido à descontinuidade, que surge pela imposição da fronteira, precisa-se filtrar o campo $\widehat{u_l^{nF}}$;

4) Para de obter o termo fonte de força lagrangiano, $\widehat{F}^n(\vec{k}, t)$, deve-se calcular os termos do lado direito da equação (2.51), com o termo não-linear sendo calculado da mesma forma como descrito na sessão 3.2 (*Tratamento do termo não-linear*) e o gradiente de pressão como mostrado na sessão 2.3.2 (*Recuperação do termo de pressão*), e o termo viscoso de forma análoga a apresentada na sessão 2.3 (*Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço de Fourier*).

5) Leva-se $\widehat{F}^n(\vec{k}, t)$, para o espaço físico, obtendo-se $F^n(\vec{x}, t)$;

- 6) Utilizando a equação (2.3), obtêm-se o termo fonte de força euleriano: $f^n(\vec{x}, t)$, com valores diferentes de zero apenas nos pontos da interface;
- 7) Leva-se $f^n(\vec{x}, t)$ para o espaço espectral, $\widehat{f}^n(\vec{k}, t)$;
- 8) Filtra-se a função $\widehat{f}^n(\vec{k}, t)$;
- 9) Calcula-se o termo viscoso e o termo não-linear através do campo de velocidade euleriano, dado em 1;
- 10) Projeta o termo não-linear calculado em 9 e o termo fonte de força calculado em 8;
- 11) Soma-se o termo não-linear projetado, o termo fonte projetado e o termo viscoso, obtendo-se assim o lado direito no espaço de Fourier $(\widehat{RHS})^n$ da equação (3.10);
- 12) resolve-se as equações de Navier-Stokes obtendo-se u_i^{n+1} e retorna-se ao passo 1.

3.4 Avanço temporal

Analisaram-se diferentes métodos de avanço temporal de diferentes ordens de precisão, os resultados serão apresentados no próximo capítulo. Após esta análise utilizou-se o esquema de Adams-Bashforth de terceira ordem (3.9), na maior parte dos casos analisados nesse trabalho:

$$\widehat{u}_i^{n+1} = \widehat{u}_i^n + \Delta t \left(\frac{23}{12} \widehat{RHS}_i^n - \frac{16}{12} \widehat{RHS}_i^{n-1} + \frac{5}{12} \widehat{RHS}_i^{n-2} \right), \quad (3.9)$$

onde \widehat{RHS} é o lado direito da equação diferencial no espaço de Fourier com o termo não-linear tratado de forma pseudo-espectral, como descrito na sessão anterior:

$$\widehat{RHS}_i^n = -\nu k^2 \widehat{u}_i^n + \mathcal{L}_{lm} \left[\widehat{tnl}_m^n - \widehat{f}_m^n \right], \quad (3.10)$$

onde \widehat{tnl}_m é o termo não linear calculado de forma pseudo-espectral.

Observa-se que para utilizar este método é necessário avaliar o lado direito (\widehat{RHS}) em três passos de tempos anteriores, para isso é necessário utilizar um esquema de avanço

temporal de mesma ordem ou superior, que não precise dos passos de tempo anteriores. No presente trabalho os cálculos são inicializados com o esquema de Runge-Kutta de quarta ordem, dado por (3.11):

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \widehat{RHS}(\widehat{u}_l^n, t_n), \\
 K_2 &= \widehat{RHS}\left(\widehat{u}_l^n + \frac{1}{2}\Delta t K_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right), \\
 K_3 &= \widehat{RHS}\left(\widehat{u}_l^n + \frac{1}{2}\Delta t K_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right), \\
 K_4 &= \widehat{RHS}(\widehat{u}_l^n + \Delta t K_3, t_n + \Delta t), \\
 \widehat{u}_l^{n+1} &= \widehat{u}_l^n + \frac{1}{6}\Delta t(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

O método de Adams-Bashforth é mais econômico, quando comparado com Runge-Kutta de mesma ordem, em termos de tempo de processamento, porém é necessário sempre armazenar os três passos de tempo precedentes.

3.5 Processo de filtragem

Como descrito na sessão 3.3, nos passos 4 e 9 do algoritmo, filtra-se os campos de velocidade e o campo de força, respectivamente. Este procedimento de filtragem é necessário devido à descontinuidade que surge ao se impor condições que devem ser estabelecidas pelo termo forçante.

A descontinuidade gera o fenômeno de Gibbs (Figura 3.1, NAVARRA, 1994), prejudicando a convergência dos cálculos numéricos. Porém o uso do filtro faz com que a ordem de precisão numérica do método espectral diminua. O processo de filtragem é dado por:

$$\widehat{f}(\vec{k}, t)_{\text{filtrado}} = \sigma(\theta)\widehat{f}(\vec{k}, t) \tag{3.12}$$

onde $\sigma(\theta)$ é a função filtro que é apresentada abaixo.

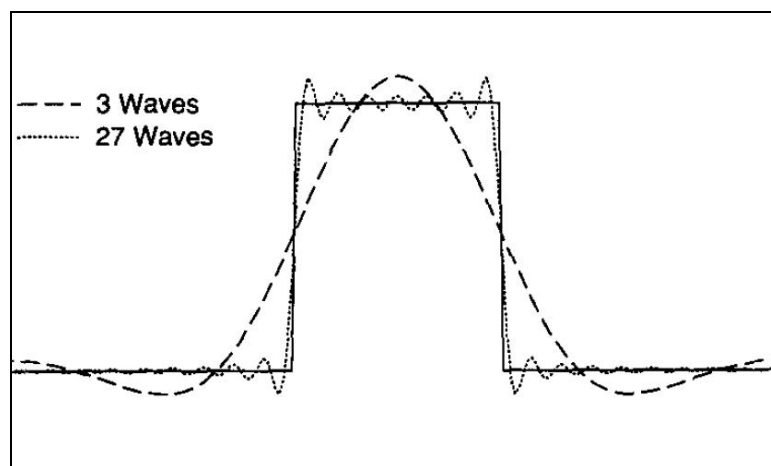


Figura 3.1: Exemplo do fenômeno de Gibbs em uma função do tipo onda quadrada (NAVARRA, 1994)

Kopriva (1986) propôs diferentes tipos de filtro para funções unidimensionais com descontinuidades, Figura 3.2.

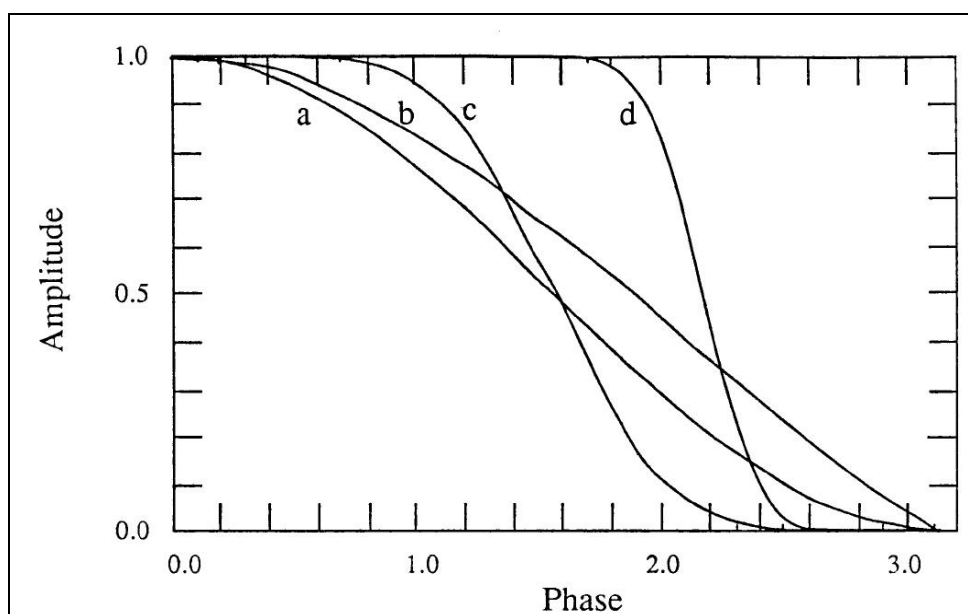


Figura 3.2: Tipos de filtro propostos por Kopriva (1986): (a) Raised Cosine, (b) Lanczos, (c) Sharpened Raised Cosine, (d) Cut-off

No presente trabalho fez-se o estudo de três tipos de filtros proposto por Kopriva (1986), estendidos para duas dimensões. A modelagem matemática desses filtros é dada abaixo.

- Filtro de *Lanczos* (Figura 3.3):

$$\sigma_{\eta\mu} = \frac{\sin \theta_\eta}{\theta_\eta} \frac{\sin \theta_\mu}{\theta_\mu} \quad (3.13)$$

onde,

$$\theta_\eta = \frac{Lk_\eta}{N} \quad (3.14)$$

η e μ são as posições da matriz $\sigma_{\eta\mu}$. L é o comprimento do domínio em uma direção, N é número de pontos discretizados do domínio em uma direção e k é o vetor número de onda em uma das direções do domínio.

- *Raised Cosine* (Figura 3.4):

$$\sigma_{\eta,\mu} = \frac{1}{4} (1 + \cos \theta_\eta) (1 + \cos \theta_\mu), \quad (3.15)$$

onde θ_η é dado por (3.14).

- *Sharpened Raised Cosine* (Figura 3.5):

$$\sigma(\theta) = \sigma_0^4 (35 - 84\sigma_0 + 70\sigma_0^2 - 20\sigma_0^3), \quad (3.16)$$

onde σ_0 é dado por (3.15).

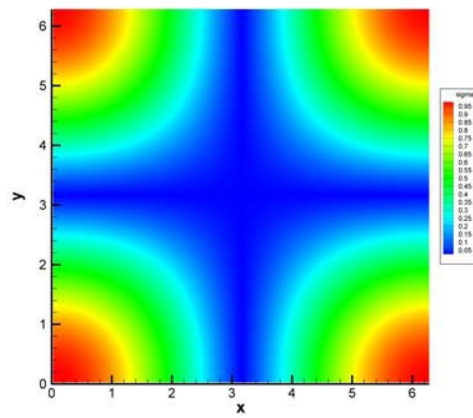


Figura 3.3: Filtro de Lanczos.

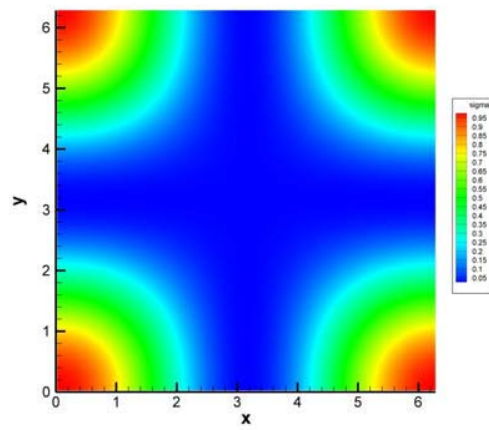


Figura 3.4: Filtro "Raised Cosine".

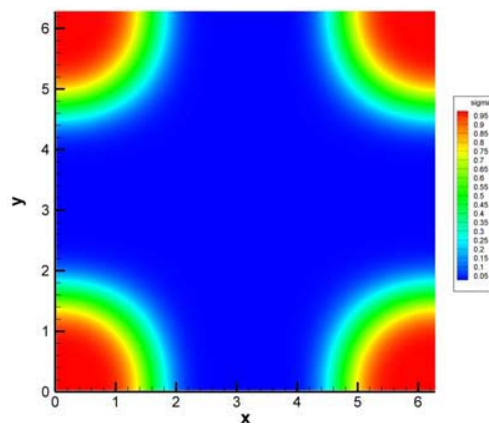


Figura 3.5: Filtro "Sharpened Raised Cosine".

Além de filtrar os campos oscilantes que surgem no processo de acoplamento entre os métodos pseudo-espectral e fronteira imersa, também se utilizou filtragem nas componentes de velocidade u e v eulerianas de tempos em tempos. Esse procedimento é realizado para que o erro que se acumula no decorrer das interações no tempo seja eliminado. Canuto (1988) comenta que o filtro “Raised Cosine” (também conhecido como janela de Von Hann), pode ser interpretado como um termo de viscosidade artificial de segunda ordem, com coeficiente dado pela Eq: (3.17):

$$\frac{\Delta x^2}{4\Delta t / N_f}, \quad (3.17)$$

onde Δx é o passo de discretização espacial, Δt é o passo de tempo e N_f é o número de passos de tempo entre as aplicações da filtragem.

A frequência de filtragem N_f é análoga para a seleção do tamanho da viscosidade artificial para o método das diferenças finitas. No caso dos outros filtros eles agem da mesma maneira que o filtro “Raised Cosine”, porém com um coeficiente de viscosidade diferente.

3.6 Zona de amortecimento

A zona de amortecimento (Buffer Zone ou Sponge Zone) é um procedimento numérico muito utilizado principalmente na fluido-acústica para minimizar a influência das condições de contorno nos campos de velocidade e pressão. Essa zona funciona como um sumidouro de vórtices (Figura 3.6).

A função amortecimento foi utilizada neste trabalho para minimizar as influências das condições de contorno periódicas, intrínsecas ao método pseudo-espectral de Fourier. Ela pode ser utilizada para estabilizar o escoamento externo à geometria imposta pelo campo de força, principalmente, para as simulações com número de Reynolds elevados.

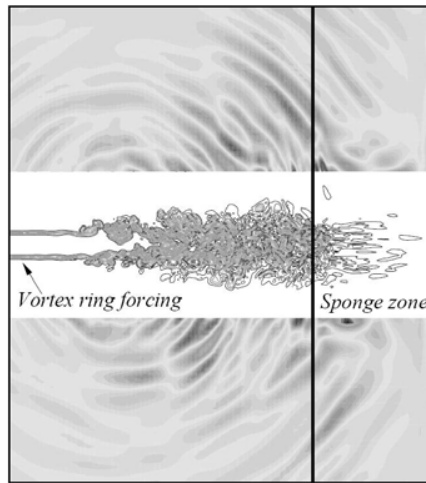


Figura 3.6: Jato simulado por Uzum (2003) mostrando a influência da zona de amortecimento.

A função amortecimento é dada por:

$$ZA = \phi(Q_t - Q_t), \quad (3.18)$$

onde Q é a solução do problema, ou seja, as velocidades u e v , Q_t é a solução alvo, ou seja, a solução que se pretende obter na zona de amortecimento, neste caso, como se quer as linhas de correntes alinhadas na saída do domínio, utilizou-se $Q_t = 0$, para que todos os vórtices fossem amortecidos, e ϕ é o parâmetro de estiramento dos vórtices, o qual deve ser ajustado de acordo com o problema, para que se possa atingir a solução alvo de maneira suave. Ele é dado por:

$$\phi_\eta = \beta \left(\frac{x_\eta - x_{za}}{x_f - x_{za}} \right)^\alpha, \quad (3.19)$$

onde α e β são constantes positivas, recomenda-se utilizar $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ (UZUM, 2003), x_{za} e x_f são, respectivamente, o início e o fim da zona de amortecimento e x_η é uma posição genérica no interior da zona de amortecimento.

Uma vez calculada, a função ZA , ela é imposta na Eq. (3.10), obtendo-se:

$$\widehat{RHS}_l^n = -\nu k^2 \widehat{u}_l^n + \wp_{lm} \left[\widehat{tnl}_m^n - \widehat{f}_m^n \right] - ZA_l. \quad (3.20)$$

No caso de se trabalhar com o método pseudo-espectral o cálculo de ZA é feito no espaço físico, o que torna a imposição da zona de amortecimento onerosa.

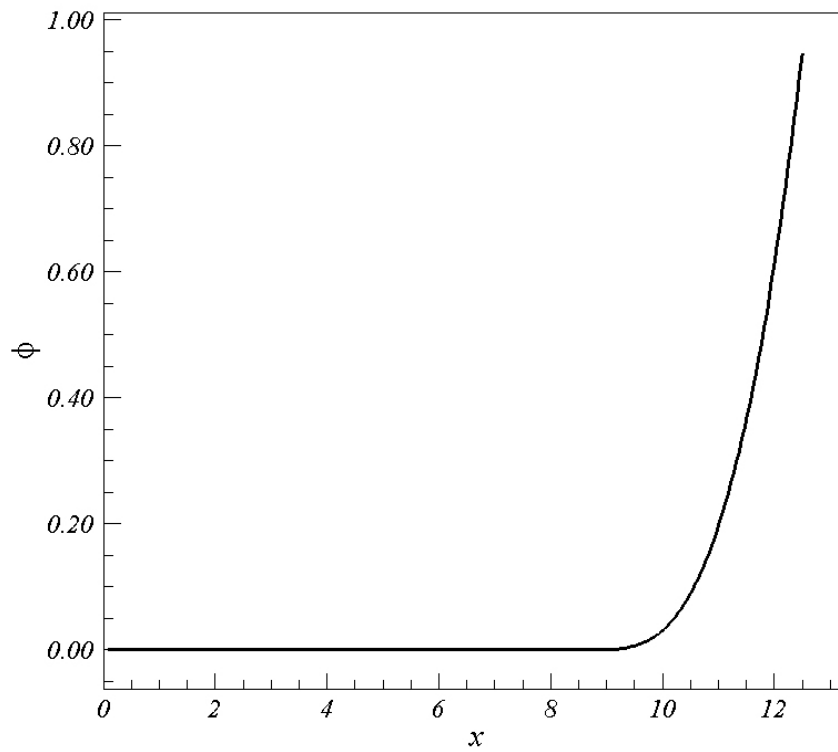


Figura 3.7: Função ϕ , com $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os três casos simulados para a validação do código pseudo-espectral acoplado com a metodologia da fronteira imersa. O primeiro caso é uma equação diferencial parcial não-linear unidimensional com condições de contorno periódicas denominada “Equação de Burgers” (BURGERS, 1948, apud SOUZA, 2005). Este caso serve para estudar e ajustar alguns parâmetros necessários para o código pseudo-espectral, como por exemplo, análise da influência de diferentes esquemas de avanço temporal e diferentes tratamentos do termo não-linear. O segundo caso teste são os “Vórtices de Taylor-Green” (TAYLOR e GREEN, 1937, apud SOUZA, 2005), o qual apresenta uma solução analítica, suave e periódica para as equações de Navier-Stokes bidimensionais. O terceiro caso teste foi o da “Cavidade com Tampa Deslizante” (BURGRAFF, 1966) caso teste clássico utilizado na mecânica de fluídos computacional. Os resultados do presente trabalho foram comparados com os de Ghia et al. (1982), estes autores utilizaram a formulação de vorticidade e função corrente para estudar a efetividade do acoplamento entre o método de multigrid e um solver fortemente implícito na obtenção de soluções numéricas para escoamentos a altos números de Reynolds com malhas refinadas, para realização dos testes, eles utilizaram como problema modelo o escoamento bidimensional, incompressível e em regime permanente. Apresentaram soluções para números de Reynolds entre 100 e 12.500. As malhas utilizadas foram de 129 x 129 para Reynolds até 5.000 e 257 x 257 para números de Reynolds acima deste valor, ambas com refinamentos uniformes próximo às paredes. Desde então, seus resultados são referências para qualquer estudo sobre cavidades bidimensionais e utilizados para comparações entre as diversas técnicas numéricas.

No presente trabalho foram simulados diferentes casos para a cavidade com tampa deslizante permitindo validar a metodologia desenvolvida, a qual simula problemas não-periódicos utilizando o método pseudo-espectral de Fourier quando auxiliada pela imposição das condições de contorno do problema através da metodologia da fronteira imersa.

4.1 Equação de Burgers

A equação de Burgers (BURGERS, 1948),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

Ela é uma equação importante na escala hierárquica das Equações de Navier-Stokes. Sua solução mostra um delicado balanço entre a os termos advectivo e difusivo. Ela é utilizada para modelagem simplificada da dinâmica de gases e para a acústica. Além disso, é uma das poucas equações diferenciais parciais não lineares que apresenta solução analítica (CANUTO, 1988). Devido a essas características foi o primeiro caso implementado para se testar o código pseudo-espectral.

Uma das soluções analíticas propostas para a Eq. (4.1) é apresentada por Canuto (1988), é ilustrada graficamente na Figura 4.1 e é dada por:

$$u(x,t) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x-ct, t+1)}{\phi(x-ct, t+1)}, \quad (4.2)$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{[-x-(2n+1)\pi]^2}{4\nu t}},$$

onde, ν é a viscosidade cinemática, x é a posição no eixo das abscissa, c é a velocidade de fase, t é o tempo e n é o contador do somatório.

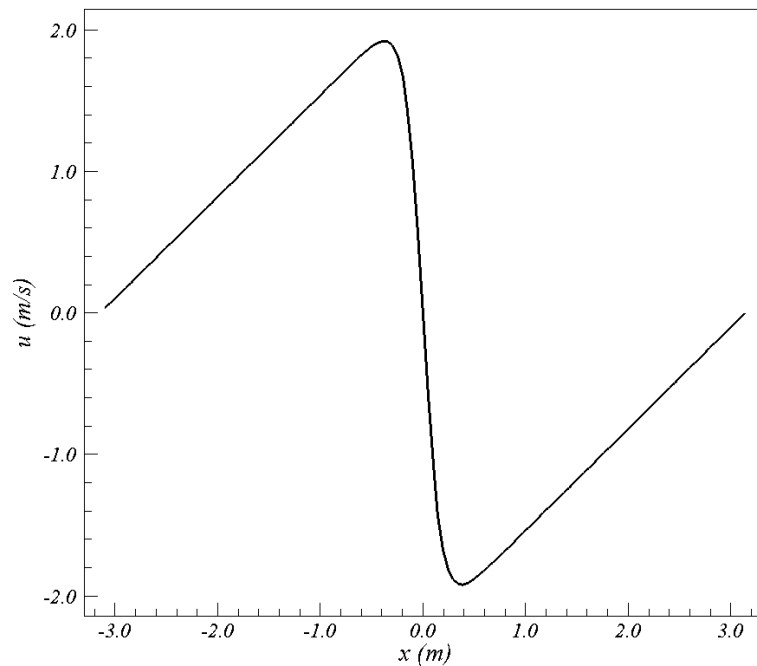


Figura 4.1: Condição inicial proposta por Canuto (1988) para a equação de Burgers, dada pela Eq. (4.2).

A condição inicial é dada pela Eq. (4.2) com $t=0$ s, como apresentado na Eq. (4.3).

$$u(x,0) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,1)}{\phi(x,1)}, \quad (4.3)$$

$$\phi(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-(2n+1)\pi]^2}{4\nu}},$$

4.1.1 Método de Avanço Temporal

A primeira análise feita serviu para testar a influência de diferentes métodos de avanço no tempo. Devido à alta ordem de discretização espacial dada pelo método pseudo-espectral, deve-se utilizar métodos de avanço temporal que permitam mantê-la.

A equação de Burgers foi resolvida de forma pseudo-espectral utilizando a forma skew-simétrica alternada, para o cálculo do termo advectivo, e com diferentes números de pontos de colocação (16, 32, 64 e 128) (MOREIRA et al., 2006). Utilizou-se diferentes esquemas de avanço temporal: primeira ordem (Euler), terceira ordem (Adams-Bashforth) e quarta ordem (Runge-Kutta). Para todos os casos foi utilizado $\Delta t = \pi/12800$, $\nu = 0,2$,

$c = 0$. É importante salientar que para a inicialização do esquema de Adams-Bashforth foi usado um Runge-Kutta de quarta ordem. Para iniciar o cálculo do somatório que aparece na solução analítica a variável n varia de -50 a 50, (SOUZA, 2005). Na Tabela 4.1 mostra-se uma comparação do máximo erro absoluto Eq. (4.4), entre os diferentes tipos de avanço temporal.

$$Erro_{abs} = \max |u_a - u_N|, \quad (4.4)$$

onde u_a é a solução analítica, u_N a solução numérica dada pelo código desenvolvido e $\max | |$ dá o máximo valor absoluto da diferença da solução analítica e da solução numérica.

Na Figura 4.2 é analisada a ordem de precisão efetiva com relação aos diferentes tipos de avanço temporal, observa-se que a ordem de precisão espacial atingida pela metodologia espectral é influenciada pelo ordem de precisão do esquema de avanço temporal.

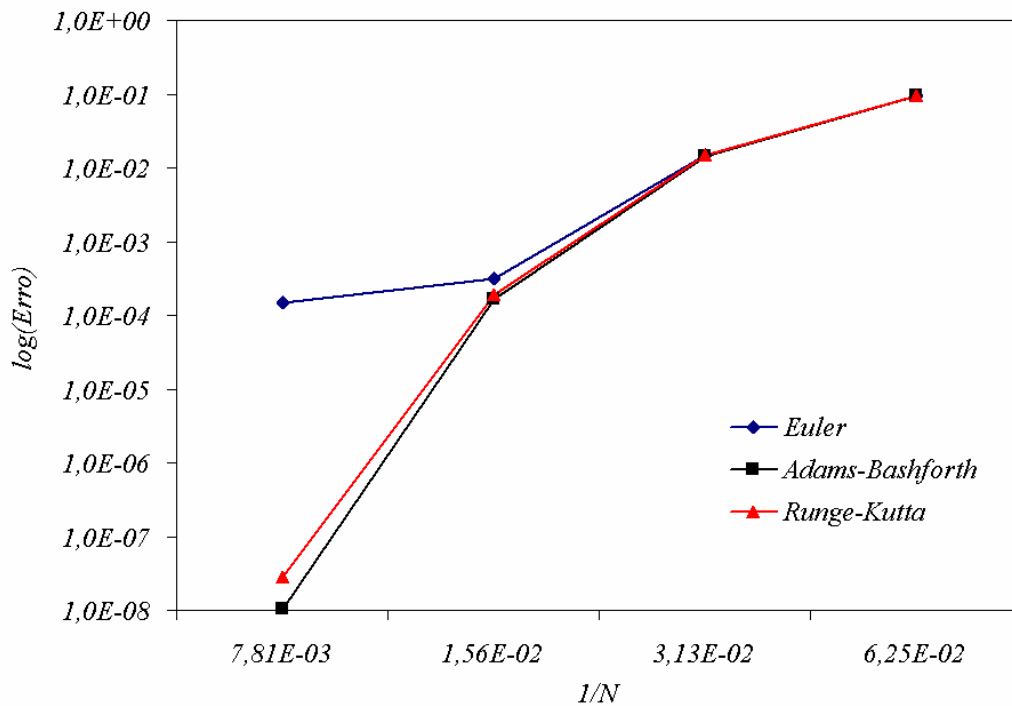


Figura 4.2: Ordem de precisão efetiva: $\log(\text{erro}) \times 1/N$, onde N é o número de nós de colocação.

Tabela 4.1: Comparação entre o erro absoluto para os diferentes esquema de avanço temporal.

Nós de colocação	Euler (1ª ordem)	Adams-Bashforth (3ª ordem)	Runge-Kutta (4ª ordem)
16	$9,520 \times 10^{-2}$	$9,396 \times 10^{-2}$	$9,52 \times 10^{-2}$
32	$1,496 \times 10^{-2}$	$1,433 \times 10^{-2}$	$1,48 \times 10^{-2}$
64	$3,160 \times 10^{-4}$	$1,662 \times 10^{-4}$	$1,92 \times 10^{-4}$
128	$1,460 \times 10^{-4}$	$1,044 \times 10^{-8}$	$2,81 \times 10^{-8}$

A partir dos resultados da Tabela 4.1 foi escolhido o método de Adams-Bashfort de terceira ordem para o avanço temporal do código pseudo-espectral inicializado com Runge-Kutta de quarta ordem. Este método foi utilizado por Souza (2005), uma vez que é mais rápido computacionalmente que o método de Runge-Kutta. A desvantagem é que ele necessita do armazenamento das informações relativas a três tempo anteriores.

4.1.2 Tratamento do termo não-linear

A segunda análise feita com a equação de Burgers foi sobre o tratamento aplicado ao termo não-linear. Utilizando os mesmos parâmetros anteriores e adotando o método de Adams-Bashforth de terceira ordem para o avanço temporal, foram testadas a forma advectiva, a divergente e a skew-simétrica alternada para o termo advectivo (MOREIRA et al., 2006).

Neste caso, por se tratar de uma equação unidimensional, é importante frisar que o termo não-linear na forma conservativa é alterado de uma constante igual a $\frac{1}{2}$, de modo a satisfazer a propriedade da regra da cadeia, isto é:

$$\frac{\partial uu}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.5)$$

ou seja,

$$\frac{\partial uu}{\partial x} = 2u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Portanto, da Eq. (4.6) chega-se que a forma advectiva é igual a metade da forma divergente, Eq. (4.7).

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial uu}{\partial x}. \quad (4.7)$$

Os resultados do presente trabalho foram comparados com os de Souza (2005). Canuto (1988) também apresenta resultados para essas mesmas simulações com um código espectral. A comparação entre esses resultados pode ser observada na Tabela 4.2.

Os resultados apresentados na Figura 4.3 mostram que a forma advectiva é mais precisa que a forma divergente, porém, como se pode observar na sessão de Método Numérico, para o tratamento do termo não-linear, seu cálculo demanda um custo computacional mais elevado que a forma divergente, justificando o uso da forma skew-simétrica alternada.

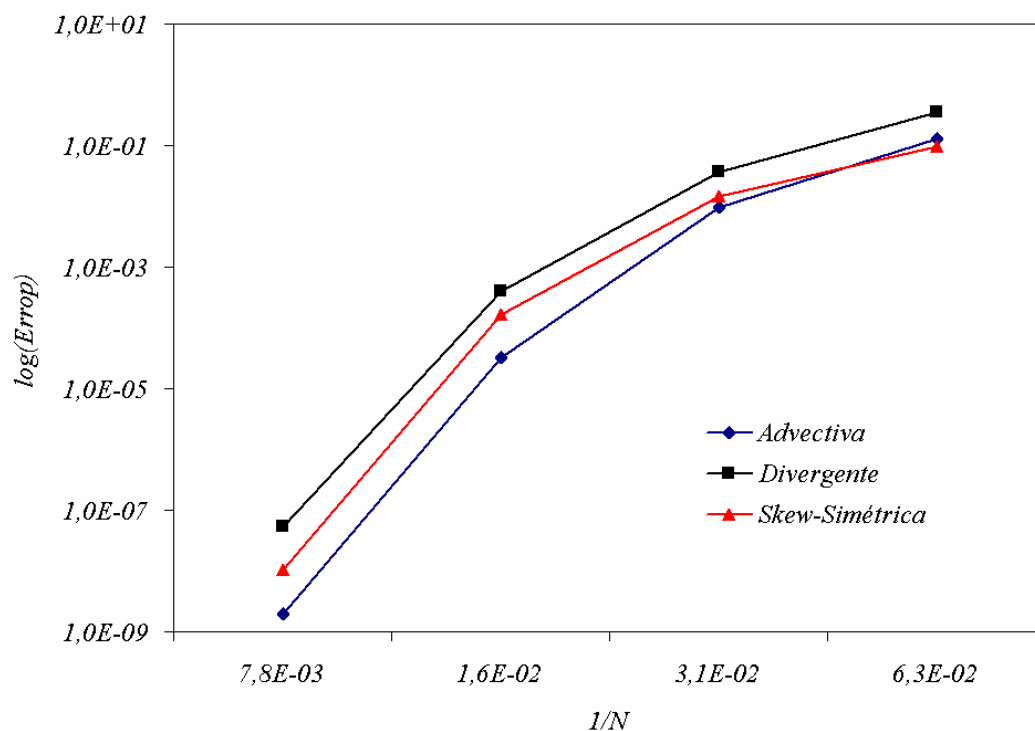


Figura 4.3: Ordem de precisão efetiva: $\log(\text{erro}) \times 1/N$, onde N é o número de nós de colocação.

Tabela 4.2: Comparação entre os erros absolutos de diferentes tratamentos do termo não-linear

N	Advectiva	Divergente	Skew-Simétrica	Fourier Espectral (SOUZA, 2005)	Fourier Espectral (CANUTO, 1986)
16	$1,29 \times 10^{-1}$	$3,57 \times 10^{-1}$	$9,40 \times 10^{-2}$	$1,29 \times 10^{-1}$	$2,1 \times 10^{-1}$
32	$9,73 \times 10^{-3}$	$3,68 \times 10^{-2}$	$1,43 \times 10^{-2}$	$9,74 \times 10^{-3}$	$2,5 \times 10^{-2}$
64	$3,25 \times 10^{-5}$	$4,03 \times 10^{-4}$	$1,66 \times 10^{-4}$	$3,26 \times 10^{-5}$	$3,6 \times 10^{-4}$
128	$1,99 \times 10^{-9}$	$5,31 \times 10^{-8}$	$1,04 \times 10^{-8}$	$1,99 \times 10^{-9}$	$6,1 \times 10^{-8}$

Na Figura 4.4 nota-se como a solução com o termo não-linear divergente é mais oscilante que as demais testadas para 16 nós de colocação.

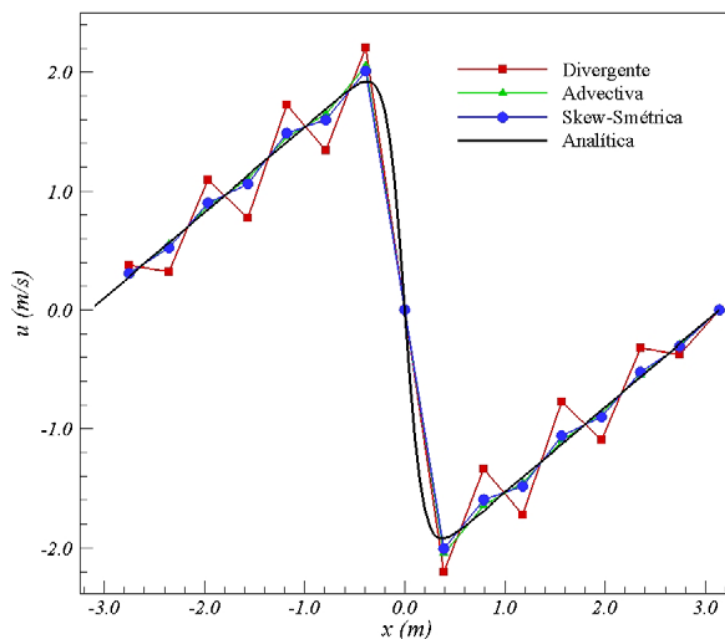


Figura 4.4: Solução da Equação de Burgers para diferentes formas do termo não-linear com 16 pontos de colocação.

Na Figura 4.5 mostra que, com o aumento do número dos nós de colocação, a solução aproxima-se da solução analítica muito rapidamente, não sendo mais possível observar diferenças para resolução superior a 64 nós.

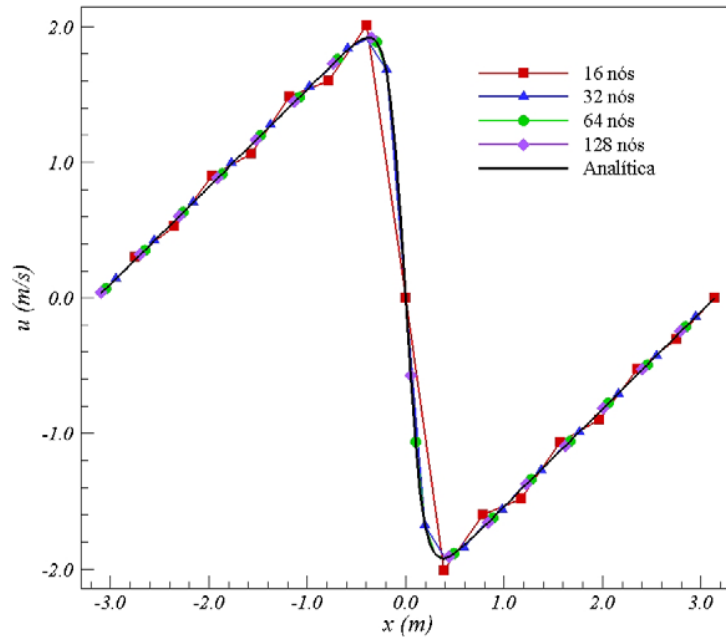


Figura 4.5: Solução da equação de Burgers na forma skew-simétrica alternada para diferentes nós de colocação.

Na resolução da equação de Burgers é importante ressaltar a capacidade do método espectral de capturar uma solução com fortes gradientes. Nota-se que com poucos pontos de colocação o fenômeno de Gibbs aparece, porém, sem nenhum processo de filtragem, é possível aproximar a solução numérica da analítica, apenas aumentando o número de pontos de colocação.

4.2 Vórtices de Taylor-Green

O segundo caso estudado são os denominados “Vórtices de Taylor-Green” (TAYLOR e GREEN, 1937). Eles apresentam uma solução analítica suave e com condições de contorno periódicas para as equações de Navier-Stokes. Este problema foi escolhido para validação do código pseudo-espectral bidimensional.

Dadas as equações analíticas para as componentes de velocidade (u e v) dependentes das coordenadas espaciais (x e y) e do tempo (t):

$$u = -U_{\infty} \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot e^{-2.t}, \quad (4.8)$$

$$v = U_{\infty} \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot e^{-2 \cdot t \cdot \nu}, \quad (4.9)$$

onde U_{∞} é a amplitude da velocidade do escoamento em [m/s], x a coordenada horizontal em [m], y a coordenada vertical em [m], t é o tempo em [s] e ν a viscosidade cinemática em [m²/s].

Pode-se observar que as Eqs. (4.8) e (4.9) satisfazem a equação da continuidade, como demonstrado abaixo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_{\infty} \cdot \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot e^{-2 \cdot \nu \cdot t}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -U_{\infty} \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot e^{-2 \cdot \nu \cdot t}. \quad (4.11)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.12)$$

Para a validação do algoritmo que permite determinar o campo de pressão, a partir das equações transformadas de Navier-Stokes, foi deduzida uma equação analítica para o campo de pressão a partir dos campos de velocidade conhecidos (MOREIRA et al., 2006), Eqs. (4.8) e (4.9). Para isso isola-se o termo da derivada de pressão das equações de Navier-Stokes, como mostrado nas Eqs. (4.13) e (4.14):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (4.14)$$

Integrando-se as Eqs. (4.13) e (4.14) e agrupando-as de forma conveniente, obtém-se a equação analítica para o campo de pressão:

$$p(x, y, t) = \frac{U_{\infty}}{4} [\cos(2x) + \cos(2y)] e^{4\nu t}. \quad (4.15)$$

Para a simulação dos vórtices de Taylor-Green em decaimento temporal, foram feitos três testes, variando-se o número de nós de colocação do domínio ($N_x \times N_y$), e observou-se a evolução do erro em função do tempo. O erro foi definido segundo Souza (2005) como a norma L_2 da componente de velocidade calculada u_N e sua solução analítica u_a :

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N_x} \frac{1}{N_y} \sum_{\eta=1}^{N_x} \sum_{\mu=1}^{N_y} \|u_N(x_\eta, y_\mu, t) - u_a(x_\eta, y_\mu, t)\|^2}. \quad (4.16)$$

As simulações foram feitas com 32x32, 64x64 e 128x128 nós de colocação. $U_\infty = 1,0 \text{ m/s}$ e $\nu = \pi/500 \text{ m}^2/\text{s}$. O passo de avanço temporal é de $\Delta t = 0,0005 \text{ s}$ utilizando o esquema de Adams-Bashforth de terceira ordem.

O problema foi adimensionalizado, utilizando como parâmetros de adimensionalização: $L^* = L/2\pi$, onde $L_x = 2\pi$ e $L_y = 2\pi$, $u^* = 2\pi u/\nu$ e $v^* = 2\pi v/\nu$ e $t^* = t\nu/4\pi^2$. Como condição inicial foram utilizadas as Eqs. (4.10) e (4.11) com $t=0$. Os resultados estão apresentados nas Figuras 4.6, 4.8 e 4.10. A comparação do erro em função do tempo para cada componente analisada está mostrada nas Figuras 4.7, 4.9 e 4.11.