

ANDRESSA FERNANDA ROSA DE LIMA

Controle Passivo de Vibrações de Sistemas Não-lineares Empregando Ligas com Memória de Forma



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- L732c Lima, Andressa Fernanda Rosa de, 1991-
2015 Controle passivo de vibrações de sistemas não-lineares empregando
ligas com memória de forma / Andressa Fernanda Rosa de Lima. - 2015.
83 f. : il.
- Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Coorientador: Romes Antônio Borges.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Vibração - Teses. 3. Ligas com
efeito de memória - Teses. 4. Sistemas não lineares - Teses. I. Lima,
Antônio Marcos Gonçalves de, 1975- II. Borges, Romes Antônio, 1971-
III. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. IV. Título.

ANDRESSA FERNANDA ROSA DE LIMA

**CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES DE
SISTEMAS NÃO-LINEARES EMPREGANDO
LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA**

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibração

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Co-orientador: Prof. Dr. Romes Antônio Borges

UBERLÂNDIA – MG

2015

Aos meus pais Júlio e Adriana, a minha irmã,
Lara pelo apoio e incentivo na realização deste
trabalho e a Deus.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, **Júlio e Adriana**, pelo incentivo, suporte e amor.

À minha irmã, **Lara** por me incentivar a ser uma pessoa melhor a cada dia.

Ao professor **Antônio Marcos Gonçalves de Lima**, pela paciência, competência, dedicação e valiosos conselhos que possibilitaram o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Ao professor **Romes Antonio Borges**, pela dedicação, competência, paciência e confiança.

À banca examinadora pelas contribuições e sugestões.

Às minhas amigas **Karina Mayumi Tsuruta e Lorrane Pereira Ribeiro** pelo companheirismo e ajuda nos momentos mais difíceis.

A todos os colegas do laboratório LMest pelo incentivo, solidariedade e ajuda inestimável.

Ao meu grande amigo **João Paulo Santos**.

À CAPES pelo suporte financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Estruturas Inteligentes em Engenharia pela oportunidade de realização deste trabalho.

LIMA, A.F.R. **Controle Passivo de Vibrações de Sistemas Não-lineares Empregando Ligas com Memória de Forma.** 2015. 82f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia

RESUMO

Um dos principais problemas da engenharia é a busca por técnicas eficientes para o controle e redução de vibrações e ruídos de sistemas mecânicos. Neste contexto, várias técnicas de controle passivo de vibrações têm sido propostas como, por exemplo, o uso de materiais viscoelásticos (MVs) e o efeito pseudoelástico presente nas ligas com memória de forma (LMFs). No que diz respeito ao uso da LMFs, sabe-se que são materiais capazes de recuperarem as deformações plásticas induzidas por carregamentos mecânicos quando submetidas a um carregamento térmico. Essa característica é chamada de Efeito de Memória de Forma. Outra característica das LMFs é o chamado efeito pseudoelástico que representa o seu comportamento quando ela é submetida a ciclos de carregamentos mecânicos em uma condição de operação em que a temperatura é igual ou superior à temperatura final da fase Austenítica. Portanto, muitos pesquisadores têm utilizado esta característica das LMFs para controlar e atenuar as vibrações de sistemas dinâmicos. Este trabalho é dedicado à modelagem numérico-computacional do comportamento pseudoelástico de ligas com memória de forma para o controle passivo de vibrações de sistemas estruturais em grandes deslocamentos do tipo placas finas de interesse industrial. Após o cálculo das respostas no domínio do tempo do sistema, são discutidos os principais parâmetros de influência no que diz respeito à redução de amplitudes e ao surgimento de características não-lineares. A partir dos resultados pôde-se notar que as Ligas com Memória de Forma são capazes de reduzir as amplitudes de vibração em circunstâncias onde o sistema é aparentemente linear ou em casos onde o sistema apresenta não-linearidades. No entanto, em alguns casos foram observadas instabilidades no sistema.

Palavras Chave: Controle passivo, ligas com memória de forma, sistemas não-lineares, elementos finitos

LIMA, A.F.R., **Passive Control of Vibration of Non-Linear Systems Employing Shape Memory Alloys** 2015. 82f. M. Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

One of the major engineering problems is the search for efficient techniques for the control and reduction of vibrations and mechanical systems noise. In this context, several passive vibration control techniques have been proposed, for example, the use of viscoelastic material and the pseudoelastic effect present in shape memory alloys (SMAs). With regard to the use of SMAs, it is known materials that are able to recover the plastic deformation induced by mechanical loading when subjected to a thermal load. This characteristic is called the shape memory effect. Another feature of SMAs is called pseudoelastic effect that is its behavior when it is subjected to mechanical loading cycles in an operating condition in which the temperature is equal to or higher than the final temperature of the austenite phase. Therefore, many researchers have used this feature of SMAs to control and mitigate the vibrations of dynamical systems. This work is devoted to the numerical and computational modeling of the pseudoelastic behavior of shape memory alloys to the passive control systems structural vibrations in large displacements of the type thin plates of industrial interest. After the calculation of system responses in the time domain, are discussed the major parameters of influence as regards the reduction of the amplitudes and onset of non-linear characteristics. From the results it can be noted that the shape memory alloys are capable of reducing the vibration amplitudes under circumstances where the system is apparently linear or in cases where the system presents nonlinearities. However, in some cases they were observed instabilities in the system.

LISTA DE FIGURAS

Figuras	Página
Figura 1.1. Ponte sujeita a vibrações indesejáveis (extraído de Gerges, 2013).	2
Figura 1.2. Ilustração de um sistema de um grau de liberdade com a presença de força restauradora não-linear (adaptado de SAVI,2006).	3
Figura 1.3. Aplicação das LMF na indústria aeronáutica (LAGOUDAS, 2002).	6
Figura 1.4. Aplicações biomédicas de Ligas com Memória de Forma: (a) Stents de Nitinol (LAGOUDAS,2008); (b) aplicações ortodônticas (www.orthodontic-care.com) ; (c) aplicações ortopédicas visando acelerar o processo de cura (MACHADO; SAVI,2003).	7
Figura 2.1. Cinemática de deformação da placa retangular fina em grandes deslocamentos.	9
Figura 2.2. Representação esquemática do elemento finito de placa plana retangular.	12
Figura 2.3. Fluxograma do processo iterativo para a resolução da Eq. (2.25).	19
Figura 3.1. Ciclo de histerese associado ao efeito pseudoelástico (adaptado de Lagoudas et al. (2001)).	22
Figura 3.2. Representação esquemática de um ensaio DSC (adaptado de Lagoudas (2008)).	23
Figura 3.3. Diagrama tensão-deformação do efeito pseudoelástico obtido experimentalmente para diferentes temperaturas (adaptado de Lagoudas (2008)).	23
Figura 3.4. Diagrama tensão-deformação para o modelo simplificado de Lagoudas.	25
Figura 3.5. Diagrama tensão-deformação para o modelo simplificado de Lagoudas (GUARALDO-NETO,2012).	27
Figura 3.6. Diagrama tensão-deformação com ciclo incompleto de transformação de fase (adaptado de Lagoudas et al. (2001)).	28
Figura 3.7. Sistema de dois graus de liberdade contendo elemento de LMF.	30
Figura 3.8. Representação do acoplamento dos fios LMF à placa.	33
Figura 3.9. Representação de uma vista lateral da placa fina com fios discretos de LMF.	33
Figura 3.10. Representação da deformação sofrida pelo fio 1 de LMF devido à	34

deflexão transversal da placa.	
Figura 3.11.	Representação dos esforços impostos à placa fina pelos fios de LMFs. 36
Figura 3.12.	Fluxograma do processo iterativo para a resolução da Eq. (3.35). 39
Figura 4.1.	(a) Resposta da placa para $F_0 = 1 \text{ N}$ e $f = 42.57 \text{ Hz}$; (b) diagrama de fase para os sistemas sem com fios pseudoelásticos; (c) diagrama tensão-deformação. 42
Figura 4.2.	(a) Resposta do sistema para $F_0 = 20 \text{ N}$ e $f = 42.57 \text{ Hz}$. (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.16 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação. 43
Figura 4.3.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 40 \text{ N}$ e $f = 42.57 \text{ Hz}$; (b) resposta no intervalo de 0.05 a 0.15 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação. 44
Figura 4.4.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$ e $f = 42.57 \text{ Hz}$; (b) resposta no intervalo de 0.05 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação. 45
Figura 4.5.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 100 \text{ N}$ e $f = 42.57 \text{ Hz}$; (b) resposta no intervalo de 0.5 a 0.6 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação. 46
Figura 4.6.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 42.57 \text{ Hz}$ e $\theta_f = 45^\circ$; (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação. 48
Figura 4.7.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 42.57 \text{ Hz}$ e $\theta_f = 90^\circ$; (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação. 49
Figura 4.8.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 42.57 \text{ Hz}$ e diâmetro de 0.0012m; (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação. 50
Figura 4.9.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 20 \text{ Hz}$; (b); diagrama de fase; (c) curva integral; (d) diagrama tensão-deformação. 51
Figura 4.10.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 50 \text{ Hz}$; (b); diagrama de fase; (c) diagrama tensão-deformação. 52
Figura 4.11.	(a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 100 \text{ Hz}$; (b); diagrama de fase; (c) diagrama tensão-deformação. 53

Figura 4.12. (a) Resposta do sistema a uma excitação do tipo seno em varredura; 54
(b) Diagrama de tensão-deformação.

LISTA DE TABELAS

Tabelas	Página
Tabela 3.1. Dados da LMF utilizada por Lagoudas et al. (2001).	27
Tabela 4.1. Propriedades físicas e geométricas da placa fina.	40
Tabela 4.2. Propriedades físicas e geométricas dos fios de LMF (Lagoudas et al. (2001)).	41

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras latinas:

c : coeficiente de amortecimento viscoso linear

C : Coeficiente de influência de tensão

DSC : (*Differential Scannig Calorimeter*)

E_A : Módulo de elasticidade da fase puramente austenítica

E_M : Módulo de elasticidade da fase puramente martensítica

$f(t)$: Força externa

f_{nl} : força não-linear

f_{LMF} : vetor de carregamentos devido aos fios LMF

k : rigidez linear

k_{nl} : rigidez não-linear

k^f : deformação devido à deflexão

K_{LMF} : Matriz de rigidez devido aos fios LMF

$\mathbf{K}^{(e)}$: Matriz de rigidez elementar

$\mathbf{K}_{(e)}^L$: Componente linear da matriz de rigidez

$\Delta\mathbf{K}_{(e)}^{NL}$: Perturbação não-linear da matriz de rigidez

\mathbf{K}^t : Matriz tangente

\mathbf{M} : Matriz de massa global

$\mathbf{M}^{(e)}$: Matriz de massa elementar

m : massa

\mathbf{M}^f : Momento fletor

$\mathbf{N(x,y)}$: Matriz contendo as funções de forma

T_0 : Energia Cinética

\mathbf{T}^p : Esforço cortantes

\mathbf{U} : campo de deslocamentos do plano médio

U_0 : Energia potencial total

U_{def} : Energia potencial de deformação

U_{pot} : Energia potencial externa

$X(t)$: Vetor de graus de liberdade mecânicos globais

Letras gregas:

β, γ : Parâmetros de Newmark

δ : Operador variacional

ε : vetor de deformações de Green-Lagrange

ε^m : deformações de superfície

ε^c : deformações de acoplamento

θ_f : ângulo de fixação dos fios

θ_x : Rotação em torno do eixo x

θ_y : Rotação em torno do eixo y

Λ : Máxima deformação de transformação

ρ : Densidade volumétrica

ω : Frequência de excitação

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS	8
2.1. Relações cinemáticas e deformações	8
2.2. Formulação variacional	11
2.3. Discretização em elementos finitos	12
2.4. Resolução e expressão da matriz tangente	16
CAPÍTULO III – MODELAGEM DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS INCORPORANDO LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA.....	20
3.1. Modelagem do efeito pseudoelástico	20
3.1.1. <i>Modelo simplificado de Lagoudas</i>	21
3.1.2. <i>Determinação da resposta tensão-deformação das LMFs</i>	22
3.1.3. <i>Ciclo completo de transformação de fase</i>	25
3.1.4. <i>Ciclo incompleto de transformação de fase</i>	28
3.2. Modelagem do efeito pseudoelástico aplicado a sistemas discretos e contínuos	30
3.2.1. <i>Sistema de dois graus de liberdade contendo elemento LMF</i>	30
3.2.2. <i>Aplicação de fios discretos de LMF à uma placa fina em grandes deslocamentos</i>	32
3.3. Resolução numérica das equações do movimento da placa fios com fios de LMF.....	38
CAPÍTULO IV – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	40
4.1. Definição das propriedades físicas e geométricas do sistema	40
4.1.1. <i>Variação da amplitude de excitação</i>	42
4.1.2. <i>Variação do ângulo de fixação dos fios</i>	47
4.1.3. <i>Variação do diâmetro dos fios</i>	50
4.1.4. <i>Variação da frequência de excitação</i>	51
4.1.5. <i>Aplicação de diferentes tipos de excitação dinâmica</i>	53
CAPÍTULO V – CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	55
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58

ANEXO A	63
---------------	----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

No contexto dos novos desenvolvimentos em vários domínios da atividade produtiva, nota-se a constante busca pela durabilidade, confiabilidade, segurança e conforto de máquinas e equipamentos impulsionados pela modernização de processos e produtos industriais (Koçer, 2010). Neste contexto, durante as fases de concepção inicial, de análise e de projeto de sistemas mecânicos quando estes são submetidos a perturbações dinâmicas e/ou estáticas, procedimentos de modelagem numérico-computacionais são comumente empregados para predizer os níveis de vibrações de tais sistemas. Este problema pode ser agravado em virtude da tendência de realização de estruturas cada vez mais extensas e leves e de aumento considerável da velocidade de operação de máquinas e equipamentos. Por exemplo, o ruído dentro de aeronaves e veículos automotivos tem sido a maior causa do desconforto de passageiros e usuários, e este problema tem-se agravado cada vez mais com o uso progressivo de sistemas estruturais finos e moderadamente finos como placas e cascas em fuselagens e asas, os quais tendem a amplificar os problemas de vibração e ruído dessas estruturas. Como resultado, o problema das falhas induzidas por vibrações excessivas pode ser agravado. A Fig. 1.1 mostra a estrutura de uma ponte sujeita a vibrações indesejáveis.



Figura 1.1 – Ponte sujeita a vibrações indesejáveis (extraído de Gerges, 2013).

Outro aspecto importante que deve ser considerado no tocante ao estudo de estruturas finas e moderadamente finas submetidas a perturbações mecânicas, são os fenômenos não-lineares que são muitas vezes frequentes neste tipo de sistema, sendo o comportamento linear de tal sorte, uma exceção. Neste contexto, a característica potencialmente imprevisível de um sistema dinâmico não-linear pode levá-lo com mais facilidade a uma falha catastrófica. Por exemplo, na indústria aeronáutica, os movimentos não-lineares podem ter graves consequências sobre a vida útil de peças e componentes estruturais como fuselagens e asas. Já na indústria automobilística, os sistemas de freio e suspensão do motor possuem inherentemente um comportamento não-linear.

Neste sentido, o esforço em buscar técnicas de modelagem de sistemas estruturais esbeltos e leves a aplicação de técnicas de controle das vibrações resultantes tem-se intensificado nas duas últimas décadas, sendo constantemente impulsionado pela crescente exigência de modernização de processos e aperfeiçoamento dos produtos industriais gerados, no que diz respeito à sua competitividade no mercado, durabilidade, confiabilidade, segurança e conforto.

Não-linearidades são muito comuns em estruturas de engenharia. Mesmo quando a modelagem destes sistemas adota uma abordagem linear, diversos fatores podem levar ao surgimento de fenômenos não-lineares. Além disso, as não-linearidades podem ser consideradas de diversas maneiras em um sistema dinâmico. Elas podem ter origem geométrica, no comportamento do material, podem estar associadas à presença de forças não-lineares, ou ainda, devido a condições de contorno. No que diz respeito às não-linearidades geométricas elas estão associadas ao movimento, podendo ser causadas por grandes rotações e deslocamentos (SAVI, 2006). Elas estão associadas à energia de deformação e consequentemente à magnitude do deslocamento imposto ao sistema, podendo ser de natureza

local ou global. Nos dois casos o comportamento não-linear pode se manifestar como resultado do deslocamento aplicado.

As não-linearidades locais aparecem em pontos particulares da estrutura e a relação entre esforço e deslocamento é normalmente modelada por um polinômio de ordem dois ou três. Um exemplo clássico é o oscilador de Duffing ilustrado na Fig. 1.2. Neste sistema de um grau de liberdade, o termo não linear está associado a uma rigidez que assume comportamento linear para pequenos deslocamentos e não-linear à medida que os deslocamentos aumentam (SAVI, 2006).

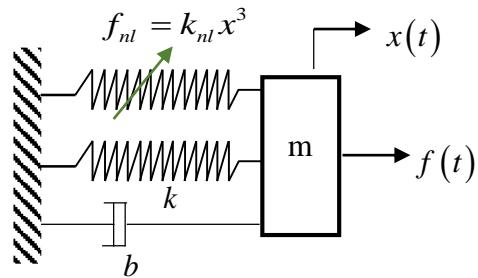


Figura 1.2. Ilustração de um sistema de um grau de liberdade com a presença de força restauradora não-linear (adaptado de SAVI,2006).

No que diz respeito às não linearidades geométricas globais, sabe-se que são geralmente causadas por grandes deslocamentos e têm origem na energia potencial de deformação da estrutura. Em geral, as formulações matemáticas consideram as relações de deformação e deslocamento como sendo lineares. No entanto, quando estas deformações se tornam maiores devido ao processo de carregamento, esta consideração já não fornece bons resultados, sendo necessária a utilização de teorias que levam em consideração as relações não-lineares (ZIENKIEWICKZ; TAYLOR, 2000).

É importante destacar que além do reconhecimento do tipo de não-linearidade presente em um sistema dinâmico, é importante conhecer as ferramentas a serem empregadas na análise de tais sistemas. Por exemplo, em Worden e Thomlinson (2001) são mostradas algumas características inerentes a sistemas não-lineares como a não aplicação do princípio da superposição e o fato de poderem ocorrer distorções harmônicas que devem ser analisadas tanto no que diz respeito ao deslocamento, velocidade e aceleração. Em Savi (2006) e Thompson e Stewart (1986) são mostrados, respectivamente, ferramentas para o reconhecimento de possíveis não-linearidades de um sistema e as possíveis conclusões e

interpretações que podem ser obtidas através de análises qualitativas de curvas integrais, trajetórias, órbitas e diagramas de fase.

Juntamente com o estudo do comportamento vibratório de sistemas dinâmicos não-lineares, os estudos de técnicas de controle de tais vibrações têm se tornado um dos principais interesses da engenharia mecânica. De uma forma geral, as técnicas de controle de vibrações e ruídos podem ser divididas nas seguintes classes:

- Técnicas de controle ativo: Esse tipo de controle envolve a utilização de conjunto de sensores (deformação, aceleração, velocidade etc.) e atuadores (força, deformação etc.) e algoritmos de controle. Exemplos deste tipo de aplicação podem ser encontrados em Preumont e Seto (2008).
- Técnicas de controle semi-ativo: Em que ocorrem alterações controladas dos componentes do sistema. Neste tipo de controle são utilizados componentes sensíveis às condições do ambiente tais como temperatura, campos magnéticos e elétricos. Como exemplo pode-se citar um amortecedor que têm a sua viscosidade alterada em função de um campo magnético (Preumont, 2004).
- Técnicas de controle passivo: Envolve modificações de componentes estruturais tais como massa, rigidez e amortecimento. Como exemplo, pode-se citar o uso de absorvedor dinâmico de vibrações e a utilização de dispositivos dissipadores de energia como materiais viscoelásticos e Ligas com Memória de Forma (LMF). (MEAD,1998; GUARALDO-NETO,2012)

Dentre as técnicas de controle passivo de vibrações e ruído de sistemas mecânicos, neste trabalho tem-se um interesse especial pelas ligas com memória de forma (LMF), uma vez que possuem características interessantes do ponto de vista de dissipaçāo de energia em virtude de seu comportamento pseudoelástico associado a ciclos de histereses (GUARALDO-NETO,2012). Entretanto, para a sua adequada utilização se faz necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de representar adequadamente o comportamento dinâmico deste material em função de fatores ambientais e operacionais. Neste sentido, em Paiva e Savi (2006) é mostrado uma revisão de inúmeros modelos constitutivos para ligas com memória de forma: O modelo Polinomial, que têm a vantagem de mostrar respostas qualitativamente

coerentes. No entanto, não considera a fase de martensita maclada, onde não há aplicação de carregamento e a temperatura é mantida abaixo da temperatura final da fase martensítica; modelos com variáveis internas que descrevem a fração volumétrica de martensita presente no material; e os modelos com restrições internas baseados originalmente no modelo de Fremond, que assume que a energia potencial global é o somatório ponderado das energias de cada fase e os pesos são as frações volumétricas das fases austenítica e martensita.

No sentido de aplicação das Ligas com Memória de Forma visando o controle de vibrações de sistemas mecânicos, Thomson et al. (1995) realiza um procedimento experimental acoplando fios de LMF mostrando que este material é eficiente em aumentar o amortecimento estrutural passivo de uma viga. Baz et. al. (1990) demonstra numericamente e experimentalmente a possibilidade de realização do controle ativo de vibração de uma viga utilizando as Ligas com Memória de Forma na forma de atuadores. Em Nagaya e Takeda (1987) é realizado um controle ativo da vibração de um eixo suportado por molas de LMF que têm a sua rigidez alterada através da aplicação de calor fazendo com que ocorra um deslocamento da velocidade crítica do eixo e evitando assim, que ele entre em ressonância. Em Corbi (2003) as Ligas com Memória de Forma são utilizadas em um dispositivo acoplado a uma estrutura vertical de múltiplos graus de liberdade submetida às forças horizontais e verticais. Demonstrou-se numericamente que este material pode ser inserido neste tipo de sistema atuando como um isolador de vibrações.

Ghandi e Chapuis (2002) propõem a utilização de fios de LMF pré-tensionados para aumentar o amortecimento inerente de uma viga engastada-livre. O efeito pseudoelástico é caracterizado pelo método do módulo complexo. Foram analisadas as influências de parâmetros como área da seção transversal, comprimento e ângulo dos fios. Já em Guaraldo Neto (2012) são empregados fios pré-tensionados juntamente com camada de material viscoelástico visando aumentar o amortecimento passivo de estruturas. E Salichs et. al. (2001) demonstra experimentalmente a grande capacidade de dissipação de energia das LMF devido a histerese que é obtida pelo efeito pseudoelástico presente nestas ligas, aplicando estes materiais como dispositivo passivo para controle de vibrações em edifícios.

No sentido de utilização das LMFs como componente de dispositivos dissipadores de energia, podem ser citados os trabalhos de Savi et.al. (2011), em que é demonstrado numericamente que a substituição de uma mola por um componente com propriedades pseudoelásticas atenua as vibrações de um sistema de um grau de liberdade e, quando inserido em um sistema com dois graus de liberdade apresenta vantagens com relação a Absorvedores

Dinâmicos de Vibração comuns pois possuem características adaptativas, ou seja, são capazes de variar o seu módulo de elasticidade tornando-se assim um Absorvedor Dinâmico de Vibrações Adaptativo.

As propriedades singulares das Ligas com Memória de Forma têm promovido a investigação das suas aplicações em diferentes campos do conhecimento como, por exemplo: aplicações aeroespaciais em que utiliza-se o Efeito de Memória de Forma que geralmente são utilizados com o objetivo de alterar a geometria do sistema em que ela é inserida, substituindo diversos componentes (hidráulicos e eletromecânicos) por apenas um elemento de LMF como mostra a Fig. 1.1 (LAGOUDAS, 2008);) aplicações biomédicas (Fig. 1.4): os efeitos de memória de forma e pseudoelástico associados à biocompatibilidade das Ligas com Memória de Forma tornaram esses materiais como boas alternativas para aplicações em áreas da saúde em dispositivos que tornam os procedimentos menos invasivos. Pode-se citar como exemplos a aplicação de fios de LMF em aparelhos ortodônticos com a utilização do efeito pseudoelástico; aplicações cardiovasculares em que são utilizados *stents* de Nitinol; e aplicados em fraturas visando acelerar o processo de cura, explorando o efeito pseudoelástico (LAGOUDAS,2008; MACHADO; SAVI,2003)

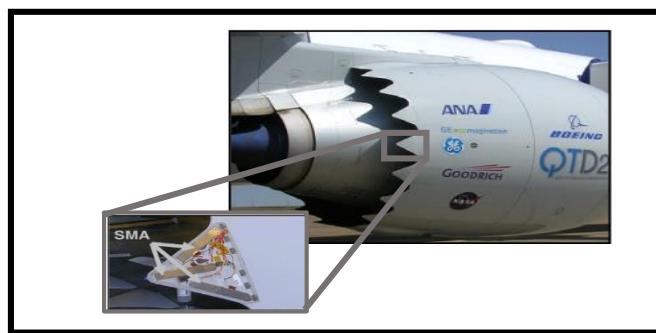


Figura 1.3. Aplicação das LMF na indústria aeronáutica (LAGOUDAS, 2008)

A partir do que foi exposto, este trabalho tem como objetivo o estudo numérico-computacional do efeito pseudoelástico presente nas ligas com memória de forma para a atenuação das vibrações não-lineares de sistemas estruturais do tipo placas finas em grandes deslocamentos.

Além deste capítulo introdutório, o presente trabalho de dissertação é composto ainda por mais quatro capítulos que estão organizados da seguinte maneira:

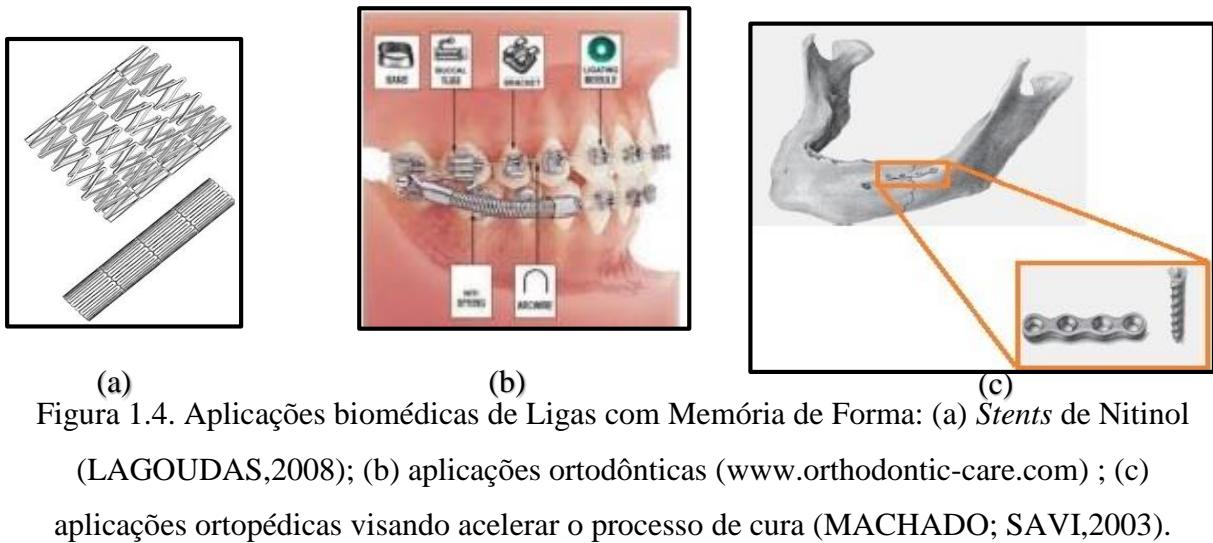


Figura 1.4. Aplicações biomédicas de Ligas com Memória de Forma: (a) *Stents* de Nitinol (LAGOUDAS,2008); (b) aplicações ortodônticas (www.orthodontic-care.com) ; (c) aplicações ortopédicas visando acelerar o processo de cura (MACHADO; SAVI,2003).

O capítulo II trata da modelagem por elementos finitos de placas finas em grandes deslocamentos e rotações moderadas. É mostrado o desenvolvimento da formulação variacional do tensor de Green-Lagrange para a obtenção das matrizes de rigidez do sistema não-linear que serão posteriormente usadas para a resolução das equações do movimento deste tipo de estrutura.

O capítulo III é dedicado à formulação matemática do efeito pseudoelástico das LMFs via emprego do modelo simplificado de Lagoudas et. al (2001). Além disto, é mostrada a capacidade de dissipação de energia vibratória de um sistema de dois graus de liberdade e o acoplamento entre fios discretos de LMFs à placa fina em grandes deslocamentos.

No capítulo IV são apresentados os resultados das simulações numéricas da placa contendo os fios discretos de LMF para verificar a eficiência do efeito pseudoelástico das LMFs para a atenuação das vibrações não-lineares. São também investigados a influência de alguns parâmetros geométricos dos fios e das condições do carregamento externo na eficiência dos fios de LMF.

No capítulo V são mostradas as conclusões gerais bem como as propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

Modelagem por Elementos Finitos de Placas Finas em Grandes Deslocamentos

Placas finas são estruturas frequentemente utilizadas na concepção de sistemas mecânicos tais como carcaças de automóveis, asas e fuselagens de aeronaves, etc. Entretanto, em função do tipo de carregamento e das condições de contorno e propriedades geométricas, elas podem apresentar comportamento dinâmico não-linear. Portanto, como são muito úteis no meio industrial, faz-se necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos que visem predizer o comportamento dinâmico não-linear de tais estruturas. Neste capítulo é apresentada a modelagem em elementos finitos de uma placa fina em grandes deslocamentos, bem como o método de resolução no domínio do tempo das equações do movimento não-lineares do sistema.

2.1 Relações cinemáticas e deformações

Nesta seção é apresentada a formulação por elementos finitos de uma placa plana retangular fina em grandes deslocamentos partindo-se dos desenvolvimentos originais propostos por Zienkiewicz e Taylor (2000) e implementada por Gerges (2013). Nestas formulações é adotada a teoria de placas finas de Kirchhoff, semelhante à teoria de Euler-Bernoulli para vigas, no entanto, considera-se uma segunda dimensão na modelagem. Para esta formulação são adotadas as seguintes hipóteses:

- (i) A placa é modelada de acordo com a teoria de placas finas de Kirchhoff;

- (ii) A espessura da placa é pequena de tal forma que as deformações cisalhantes transversais $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ são negligenciadas;
- (iii) O plano médio da placa é inicialmente plano;
- (iv) Todos os materiais envolvidos são considerados homogêneos e isotrópicos.

A Fig. 2.1 ilustra a cinemática de deformação de um corte perpendicular ao eixo x realizado em uma placa retangular de dimensões a e b e espessura t . Na mesma figura são indicados o deslocamento transversal, w , e o deslocamento axial u na direção do eixo x .

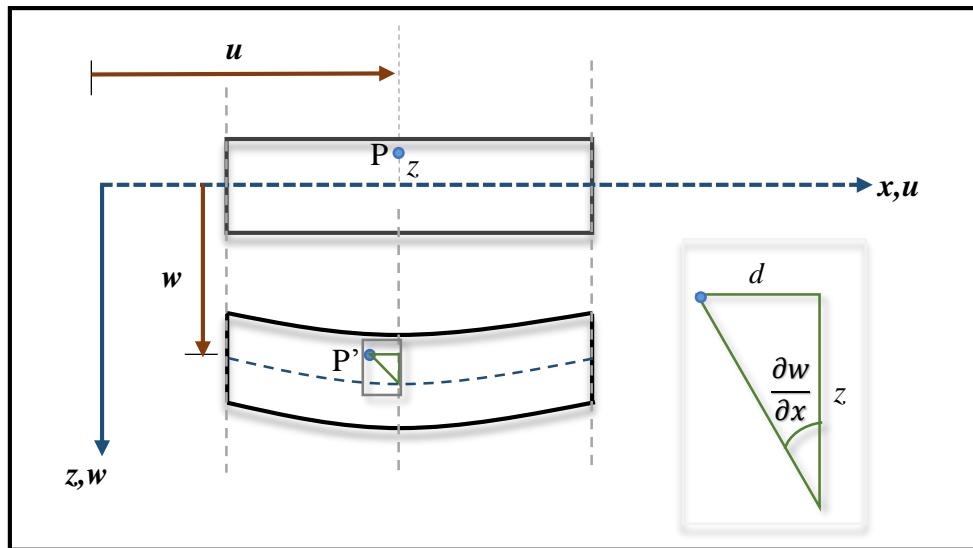


Figura 2.1. Cinemática de deformação da placa retangular fina em grandes deslocamentos

A partir da figura, também pode-se extrair as equações dos campos de deslocamentos referentes ao plano da placa e deslocamento transversal. Para isto, considera-se um ponto \mathbf{P} localizado à uma distância z do plano médio da placa que após sofrer flexão desloca-se paralelamente ao mesmo. Ainda segundo a teoria de Kirchhoff, as seções normais ao plano médio indeformado permanecem normais e planas após a flexão e suas rotações são dadas em função do deslocamento transversal (LIU; QUEK,2003; LOGAN,2007).

A relação entre a distância z e o deslocamento devido à flexão \mathbf{d} , extraída do triângulo ilustrado na figura, é dada por:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{d}{z} \quad (2.1)$$

Considerando que as rotações das seções são pequenas, o deslocamento do ponto **P** é finalmente expresso pela equação (2.2).

$$u_P = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2)$$

Este mesmo procedimento é realizado para a obtenção da expressão do campo de deslocamentos v , na direção y .

Após a obtenção das equações de u e v , os deslocamentos podem ser escritos na seguinte forma (GERGES,2013; ZIENKIEWICZ; TAYLOR,2000):

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_x(x, y, t) \\ w_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

onde $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ são os campos de deslocamentos relativos ao plano da placa e $w(x, y, t)$ é o campo de deslocamentos transversal. As relações entre deformações e deslocamentos são obtidas pelo tensor de segunda ordem de Green-Lagrange como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{U} \nabla \mathbf{U}^T \quad (2.4)$$

A partir das hipóteses de pequenas deformações e de rotações moderadas, pode-se reescrever o tensor de Green-Lagrange sob a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^m} - z \underbrace{\begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{k}^f} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_x^2 \\ w_y^2 \\ 2w_x w_y \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^c} \quad (2.5)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^f = z\boldsymbol{k}^f$ representam, respectivamente, as deformações de membrana e flexão, e $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ é o vetor das deformações não-lineares que traduz o acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão no plano médio. Além disso, ele não aparece na modelagem linear de placas finas tal que os efeitos de flexão e membrana podem ser resolvidos separadamente. Entretanto, para o caso não-linear, isto não é mais possível sendo necessário considerar o acoplamento (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

2.2. Formulação variacional

Aplicando os princípios variacionais da mecânica, pode-se formular o princípio do trabalho virtual da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_0 + T_0) dt = 0 \quad (2.6)$$

onde $U_0 = U_{pot} + U_{def} = U_{pot} + (1/2) \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{S} dV$ representa a energia potencial total igual a soma das energias potenciais de deformação e das forças externas, $T_0 = (1/2) \int_V \rho \dot{\mathbf{U}} \dot{\mathbf{U}} dV$ é a energia cinética. \mathbf{S} é o tensor de segunda ordem de Piolla-Kirchhoff. Desta forma, a Eq. (2.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^m + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^c)^T \mathbf{S} dV + \int_V (\delta\boldsymbol{k}^f)^T \mathbf{S}_z dV - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (2.7)$$

onde $\delta\Pi_{ext}$ representa o trabalho virtual associado à energia potencial.

As tensões generalizadas \mathbf{M}^f (momento fletor) e \mathbf{T}^e (esforço cortante) podem ser definidas como segue,

$$\mathbf{M}^f = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{S} dz, \quad \mathbf{T}^e = - \int_{-h/2}^{+h/2} z \mathbf{S} dz \quad (2.8)$$

e o princípio do trabalho virtual (2.7) assume a seguinte forma:

$$\delta\Pi = \int_S (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^m + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^c)^T \boldsymbol{T}^e dS + \int_V (\delta\boldsymbol{k}^f)^T \boldsymbol{M}^f dS - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (2.9)$$

É importante salientar que o material da placa é elástico, isotrópico e homogêneo caracterizado por um módulo de elasticidade longitudinal, E , e um coeficiente de Poisson, ν . Portanto, a Eq. (2.9) assume a seguinte forma:

$$\delta\Pi = \int_S (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^m + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^c)^T \boldsymbol{D}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^c) dS + \int_S (\delta\boldsymbol{k}^f)^T \boldsymbol{D}^f \boldsymbol{k}^f dS - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (2.10)$$

onde $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{T}^e \\ \boldsymbol{M}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^c \\ \boldsymbol{k}^f \end{Bmatrix}$, $\boldsymbol{D}^m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D}^f = \frac{h^2}{12} \boldsymbol{D}^m$.

2.3 Discretização por elementos finitos

Nesta seção será dada ênfase ao processo de obtenção das matrizes elementares da placa fina em grandes deslocamentos. Para tanto, o elemento finito mostrado na Fig. 2.2 formado por quatro nós e cinco graus de liberdade por nó será utilizado.

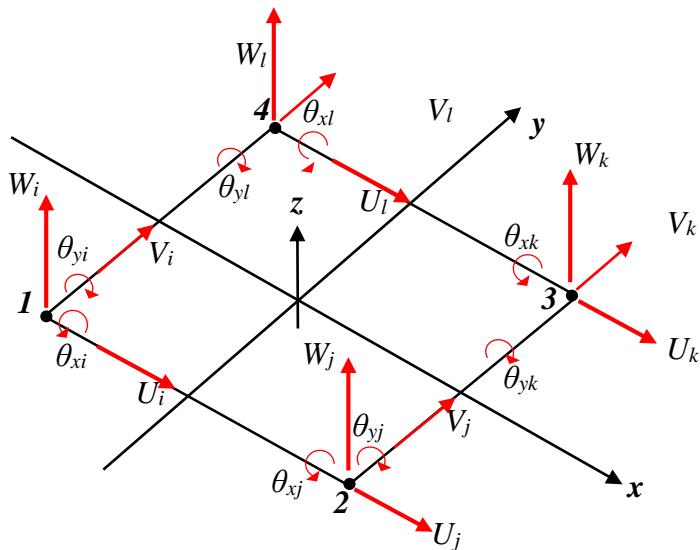


Figura 2.2. Representação esquemática do elemento finito de placa plana retangular.

A discretização dos campos de deslocamentos do elemento de placa é baseada no trabalho original de Gérges (2013). Os deslocamentos axiais $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ são interpolados por polinômios de primeiro grau, e o deslocamento transversal $w(x, y, t)$ por um polinômio cúbico de tal forma que a aproximação por elementos finitos pode ser escrita da forma:

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}^w & \mathbf{N}^{\theta_x} & \mathbf{N}^{\theta_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

ou ainda sob a seguinte forma:

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{X}(t) \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{N}(x, y)$ é a matriz contendo as funções de interpolação, \mathbf{N}^w , \mathbf{N}^{θ_x} e \mathbf{N}^{θ_y} são as funções de interpolação para o deslocamento transversal e as rotações e $\mathbf{X}(t) = [U \ V \ W \ \theta_x \ \theta_y]^T$ designa o vetor dos graus de liberdade mecânicos nodais. As funções de forma bem como os polinômios utilizados são mostrados em anexo (Anexo A).

Portanto, substituindo a Eq. (2.12) na expressão (2.5), as três componentes do tensor de Green-Lagrange podem ser escritas como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_x \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^m} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \tilde{U} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} w_x & 0 \\ 0 & w_y \\ w_y & w_x \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{nl}(\tilde{W})} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x^W & \mathbf{N}_x^{\theta_x} & \mathbf{N}_x^{\theta_y} \\ \mathbf{N}_y^W & \mathbf{N}_y^{\theta_x} & \mathbf{N}_y^{\theta_y} \\ \mathbf{N}_{xy}^W & \mathbf{N}_{xy}^{\theta_x} & \mathbf{N}_{xy}^{\theta_y} \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}}_{\tilde{W}} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{k}^f = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{xx}^W & \mathbf{N}_{xx}^{\theta_x} & \mathbf{N}_{xx}^{\theta_y} \\ \mathbf{N}_{yy}^W & \mathbf{N}_{yy}^{\theta_x} & \mathbf{N}_{yy}^{\theta_y} \\ \mathbf{N}_{xy}^W & \mathbf{N}_{xy}^{\theta_x} & \mathbf{N}_{xy}^{\theta_y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^f} \underbrace{\begin{bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}}_{\tilde{W}} \quad (2.15)$$

O termo $\mathbf{H}(\tilde{W})$ na Eq. (2.14) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{H}(\tilde{W}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x^W & \mathbf{N}_x^{\theta_x} & \mathbf{N}_x^{\theta_y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_y^W & \mathbf{N}_y^{\theta_x} & \mathbf{N}_y^{\theta_y} \\ \mathbf{N}_y^W & \mathbf{N}_y^{\theta_x} & \mathbf{N}_y^{\theta_y} & \mathbf{N}_x^W & \mathbf{N}_x^{\theta_x} & \mathbf{N}_x^{\theta_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ \theta_x & 0 \\ \theta_y & 0 \\ 0 & W \\ 0 & \theta_x \\ 0 & \theta_y \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Desta forma, o tensor de Gree-Lagrange e sua forma variacional são expressos como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} - z \mathbf{B}^f \tilde{W} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}^m \delta \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{B}^{nl}(\tilde{W}) \delta \tilde{W} - z \mathbf{B}^f \delta \tilde{W} \end{aligned} \quad (2.17)$$

e a forma discreta dos trabalhos virtuais de deformações (2.10) assume a seguinte forma,

$$\delta \Pi_{def} = \int_S (\mathbf{B}^m \delta \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{B}^{nl}(\tilde{W}) \delta \tilde{W})^T \mathbf{D}^m \left(\mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{W}) \tilde{W} \right) dS + \int_S (\mathbf{B}^f \delta \tilde{W})^T \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \tilde{W} dS \quad (2.18)$$

ou ainda sobre a seguinte forma matricial:

$$\delta \Pi_{def} = \delta \mathbf{X}^T \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nLT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nLT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} \mathbf{X} dS \quad (2.19)$$

ou ainda,

$$\delta \Pi_{def} = \delta \mathbf{X}^T \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{X} \quad (2.20)$$

onde:

$$\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{W}}) = \underbrace{\int_S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} dS}_{\mathbf{K}^l} + \underbrace{\int_S \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nLT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nLT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \end{bmatrix} dS}_{\Delta \mathbf{K}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})} \quad (2.21)$$

Na Eq. (2.21), o termo \mathbf{K}^l é o termo linear da rigidez representando a modelagem dos problemas de flexão e membrana desacoplados, e o temo $\Delta \mathbf{K}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})$ designa o termo não-linear fazendo aparecer o acoplamento desses efeitos. Além disso, é importante salientar que o problema não-linear aparece como uma perturbação (ou modificação) do problema linear; esta forma de modelagem oferece uma grande vantagem para a introdução, por exemplo, de técnicas de redução de modelos conforme detalhado por De Lima et al. (2015).

A partir da expressão da energia cinética para o elemento finito de placa, que é dada pela expressão seguinte, pode-se obter a matriz de massa elementar.

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} dV \quad (2.22)$$

ou ainda sob a seguinte forma:

$$T_0 = \dot{\mathbf{X}}^T \left[\frac{1}{2} \rho z \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS \right] \dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}} \quad (2.23)$$

Utilizando as matrizes elementares de massa e rigidez definidas conforme as equações (2.19) e (2.21), e utilizando procedimentos padrões de montagem de matrizes levando-se em conta a conectividade de nós, obtém-se as equações do movimento do sistema não-linear no domínio do tempo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{U}}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{W}}} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta \mathbf{K}_1 \\ \Delta \mathbf{K}_1^T & \Delta \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{W}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\tilde{\mathbf{v}}} \\ \mathbf{F}^{\tilde{\mathbf{w}}} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

que pode ser colocada ainda sob a seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \underbrace{\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{X}}_{f_{nl}} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

2.4 Resolução e expressão da matriz tangente

A resolução da Eq. (2.25) depende geralmente da natureza da força externa aplicada ao sistema, além da presença da força não-linear. Para a resolução de sistemas com estas características são muito utilizados os chamados métodos de perturbação. Dentre estes métodos destacam-se: os métodos de expansão (*straightforward*), balanço harmônico e método da média (BORGES, 2008). No entanto, apesar da grande utilidade destes métodos, eles não se adequam a sistemas de grandes dimensões (GERGES, 2013). Neste sentido, será utilizado neste trabalho o método de integração temporal de Newmark juntamente com o método de Newton-Raphson conforme as etapas descritas na Fig. 2.3, onde se faz necessária a definição da matriz de rigidez tangente ou o gradiente espacial da força não-linear (GERGES, 2013).

A minimização da Eq. (2.25) via esquema iterativo leva à definição do seguinte termo:

$$d\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{K}' d\mathbf{X} \quad (2.26)$$

onde o termo \mathbf{K}^t é a matriz de rigidez tangente que representa o gradiente espacial da força não-linear, $\mathbf{f}_{nl}(X) = [f_{\tilde{U}} \quad f_{\tilde{W}}]^T$:

$$\mathbf{K}^t = \begin{bmatrix} \partial f_{\tilde{U}} / \partial \tilde{U} & \partial f_{\tilde{U}} / \partial \tilde{W} \\ \partial f_{\tilde{W}} / \partial \tilde{U} & \partial f_{\tilde{W}} / \partial \tilde{W} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

1 – Desenvolvimento do termo $df_{nl}(X)$

$$df_{nl}(X) = df_{\tilde{U}}(X) + df_{\tilde{W}}(X) \quad (2.28)$$

2 – Desenvolvimento do termo $df_{\tilde{U}}(X)$

$$df_{\tilde{U}}(X) = d \left(\int_S \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} dS + \int_S \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl} (\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} dS \right) \quad (2.29)$$

ou,

$$df_{\tilde{U}}(X) = \int_S \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m d\tilde{\mathbf{U}} dS + \int_S \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl} (\tilde{\mathbf{W}}) d\tilde{\mathbf{W}} dS \quad (2.30)$$

3 – Desenvolvimento do termo $df_{\tilde{W}}(X)$

$$df_{\tilde{W}}(X) = d \left(\int_S \mathbf{B}^{nlT} (\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} dS + \int_S \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT} (\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl} (\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{B}^{fT} (\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \right) \tilde{\mathbf{W}} dS \right) \quad (2.31)$$

ou,

$$df_{\tilde{W}}(X) = \int_S \left(\mathbf{B}^{nlT} (\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m d\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} d\tilde{\mathbf{W}} + \mathbf{B}^{nlT} (\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl} (\tilde{\mathbf{W}}) d\tilde{\mathbf{W}} \right) dS \quad (2.32)$$

$$\text{onde } \mathbf{T}^m = \begin{bmatrix} T_x^m & T_{xy}^m \\ T_{xy}^m & T_y^m \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x^w & \mathbf{N}_x^{\theta_x} & \mathbf{N}_x^{\theta_y} \\ \mathbf{N}_y^w & \mathbf{N}_y^{\theta_x} & \mathbf{N}_y^{\theta_y} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a partir das expressões (2.32), (2.28) e (2.30) obtém-se aa seguinte equação,

$$d\mathbf{f}_{nl}(X) = \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} + \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tilde{\mathbf{U}} \\ d\tilde{\mathbf{W}} \end{Bmatrix} dS \quad (2.33)$$

onde, finalmente encontra-se a expressão da matriz de rigidez tangente:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^t = & \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} dS + \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \end{bmatrix} dS \\ & \dots + \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nlT}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} \end{bmatrix} dS \end{aligned} \quad (2.34)$$

ou,

$$\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \Delta \mathbf{K}^t(\tilde{\mathbf{W}}) \quad (2.35)$$

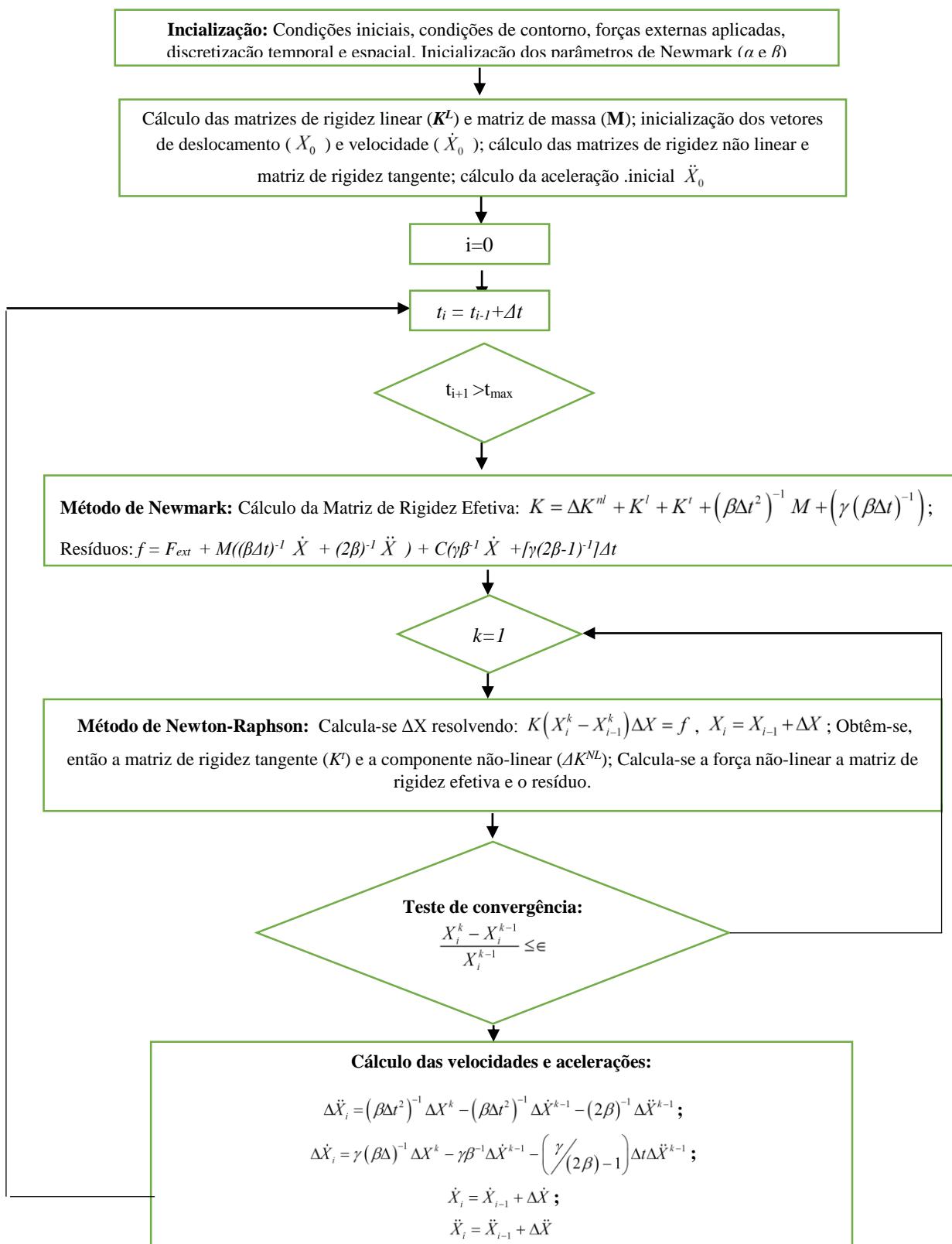


Figura 2.3 – Fluxograma do processo iterativo para a resolução da Eq. (2.25)

CAPÍTULO III

Modelagem de Placas Finas em Grandes Deslocamentos Incorporando Ligas com Memória de Forma

Neste capítulo será apresentada a modelagem por elementos finitos de placas finas em grandes deslocamentos contendo fios de Ligas com Memória de Forma para o controle passivo de vibrações não-lineares. Primeiramente será apresentado a caracterização das Ligas com Memória de Forma (LMFs) e a técnica de modelagem do comportamento pseudoelástico das LMFs a partir dos desenvolvimentos originais propostos por Lagoudas et al. (2001). Além disso, ênfase será dada à modelagem de sistemas discretos contendo absorvedores dinâmicos pseudoelásticos e por fim, será mostrada a modelagem de placas finas em grandes deslocamentos contendo fios LMF.

3.1 Modelagem do efeito pseudoelástico das LMFs

Devido à capacidade das LMFs em dissipar energia de sistemas dinâmicos quando submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos, em virtude de seu comportamento pseudoelástico, esses materiais são utilizados no controle passivo de vibração e ruído de sistemas mecânicos. Nesse sentido, a necessidade por modelos matemáticos que sejam capazes de representar o comportamento pseudoelástico das LMFs e as respectivas transformações de fase, vem estimulando, ao longo dos anos, inúmeros pesquisadores.

Os modelos constitutivos que descrevem o efeito pseudoelástico das LMFs podem ser divididos em duas grandes classes, a saber: (i) a primeira, refere-se aos modelos baseados na termomecânica do contínuo, que compreende um conjunto de parâmetros físicos utilizados que devem ser obtidos através de processos de caracterização das LMFs e que antecedem a

sua utilização em alguma estrutura. Como exemplo, podem ser citados os trabalhos realizados por Tanaka (1986), Sato e Tanaka (1986), Liang e Rogers (1990), Brinson (1993), Lagoudas et al. (1996), Bo e Lagoudas (1999), entre outros; (ii) o segundo grupo se refere ao dos modelos empíricos, baseados em sistemas de identificação. Estes modelos, utilizados para determinar ciclos de histerese de materiais, incluindo as LMFs, são bastante utilizados no controle não linear de estruturas inteligentes, uma vez que os parâmetros dos modelos são determinados em tempo real (*on line*) devido aos sinais de entrada e saída obtidos do sistema físico (LAGOUDAS et al., 2001, PAIVA; SAVI, 2005).

Com o intuito de utilizar um modelo constitutivo que represente o mais fielmente possível o comportamento pseudoelástico das LMFs quando submetidas a carregamentos mecânicos cíclicos para uma condição isotérmica de operação, e com baixo custo computacional de implementação, neste trabalho optou-se pelo modelo fenomenológico simplificado proposto por Lagoudas et al. (2001), como será detalhado na seção seguinte.

3.1.1. Modelo simplificado de Lagoudas

O modelo simplificado de Lagoudas et al. (2001) é caracterizado por ser dependente da deformação e do histórico dos carregamentos para caracterizar as transformações direta e reversa que ocorrem nas LMFs, além de representar os ciclos de carregamentos incompletos. Assumindo que tanto a deformação de transformação quanto a tensão variam linearmente, este modelo apresenta um conjunto de equações lineares que permite a determinação da resposta pseudoelástica de uma LMF quando submetida a carregamentos mecânicos cíclicos.

Através da combinação das repostas pseudoelásticas das LMFs, experimentalmente obtidas para diferentes temperaturas de operação, e as temperaturas de transição, obtidas para uma condição nula de carregamento, obtida via utilização de um DSC (*Differential Scanning Calorimetry*) (LAGOUDAS et al., 2001), é possível determinar os parâmetros do material necessários para a construção do ciclo de histerese mostrado na Fig. 3.1, que é utilizado como base para a formulação do modelo simplificado de Lagoudas et al. (2001).

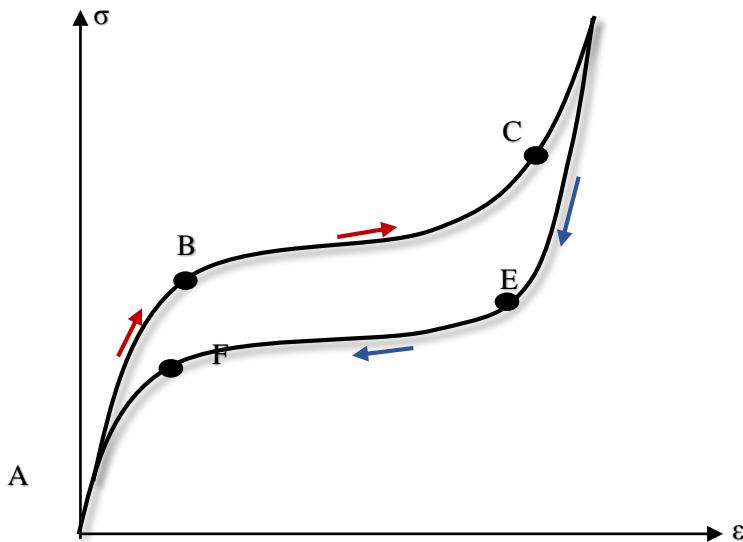


Figura 3.1 – Ciclo de histerese associado ao efeito pseudoelástico (adaptado de Lagoudas, 2008)

3.1.2. Determinação da resposta tensão-deformação das LMFs

Através de testes termomecânicos relativamente simples, é possível determinar os parâmetros do material que constituem o modelo simplificado do efeito pseudoelástico proposto por Lagoudas et al. (2001). O processo de determinação dos parâmetros a serem utilizados pelo modelo simplificado de Lagoudas é feito em duas etapas, a saber:

- Etapa 1: determinação das temperaturas de transição para uma condição de tensão nula. Nesta etapa, é utilizado um fragmento de LMF cuidadosamente extraído do corpo de prova para a realização de uma análise térmica *DSC (Differential Scanning Calorimeter)*. Esta análise permite determinar as temperaturas de transição A_{f0} , A_{s0} , M_{s0} e M_{f0} (indicadas na Fig. 3.2) do material para uma condição de carregamento nulo. Além disso, esta análise é baseada no princípio da variação de calor latente aplicado durante o tratamento térmico de aquecimento e resfriamento do fragmento de LMF. A fim de garantir um fluxo de calor constante no fragmento de LMF, notam-se regiões de picos que caracterizam os comportamentos endotérmico e exotérmico do material durante as transformações direta e reversa de fase, respectivamente. O

encontro das retas tangentes de cada região de pico permite determinar as temperaturas de transição de fase (LAGOUDAS, 2008).

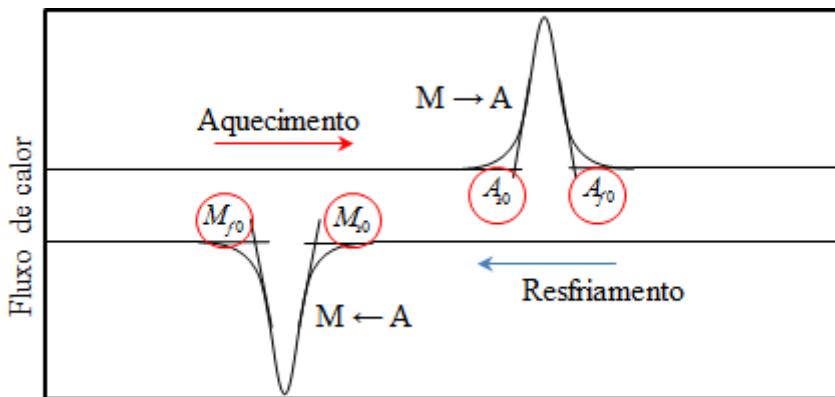


Figura 3.2 - Representação esquemática de um ensaio *DSC* (adaptado de Lagoudas (2008)).

- Etapa 2: nesta fase, é realizado um ensaio mecânico monotônico do corpo de prova, que consiste em submetê-lo a um ciclo de carregamento e descarregamento, capaz de induzir transformação total de fase ao material, em temperaturas de operação superiores à temperatura final de austenita, determinada previamente na Etapa 1. Os resultados obtidos a partir desta etapa permitem determinar os módulos de elasticidade das fases austenita e martensita, E_A e E_M , respectivamente, e a deformação máxima induzida durante a transformação de fase do material, denominada de máxima deformação de transformação, Λ . Exemplos desses resultados são apresentados na Fig. 3.3.

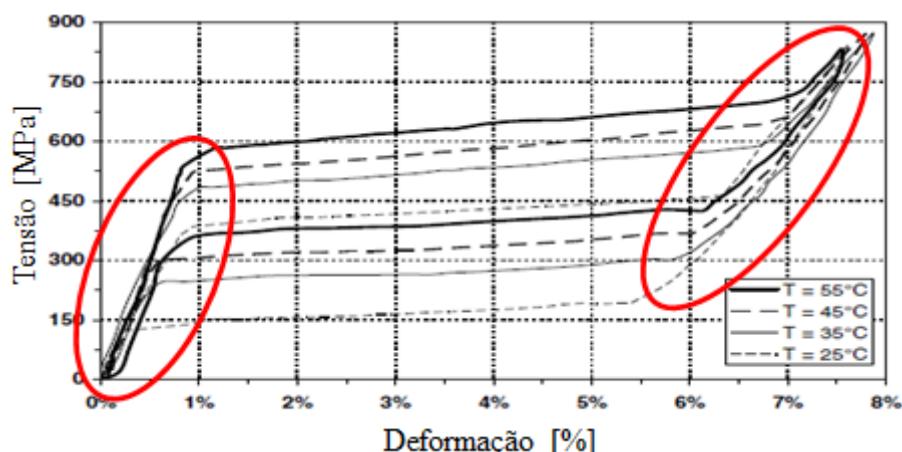


Figura 3.3 - Diagrama tensão-deformação do efeito pseudoelástico obtido experimentalmente para diferentes temperaturas (adaptado de Lagoudas (2008)).

Dessa forma, a partir dos resultados das Etapas 1 e 2, e utilizando-se a seguinte expressão que calcula as tensões na LMF em função das temperaturas de transição,

$$\sigma = C(T - T_x) \quad (3.1)$$

e a equação constitutiva para as LMFs,

$$\sigma = E_x(\varepsilon - \varepsilon^t) \quad (3.2)$$

pode-se determinar as deformações e as tensões em cada temperatura de transição.

Nas expressões anteriores, T denota a temperatura de operação do material, C é o coeficiente de influência de tensão, E_x é o módulo de elasticidade do material em uma determinada região do diagrama tensão-deformação, T_x são as temperaturas de transição determinadas na Etapa 1, ε^t é a deformação de transformação gerada durante as transformações de fase direta e reversa, e ε é a deformação total induzida ao material.

Dessa forma, para cada ponto de transição do ciclo de histerese apresentado na Fig. 3.1, pode-se calcular a tensão e a deformação como segue:

Ponto 1: início da transformação de fase direta austenita-martensita.

$$\sigma_{Ms} = C(T - M_{s0}) \quad (3.3a)$$

$$\varepsilon_{Ms} = \frac{C(T - M_{s0})}{E_A} \quad (3.3b)$$

Ponto 2: conclusão da transformação de fase direta austenita-martensita.

$$\sigma_{Mf} = C(T - M_{f0}) \quad (3.4a)$$

$$\varepsilon_{Mf} = \Lambda + \frac{C(T - M_{f0})}{E_M} \quad (3.4b)$$

Ponto 3: início da transformação de fase reversa martensita-austenita:

$$\sigma_{As} = C(T - A_{s0}) \quad (3.5a)$$

$$\varepsilon_{As} = \Lambda + \frac{C(T - A_{s0})}{E_M} \quad (3.5b)$$

Ponto 4: conclusão da transformação de fase reversa martensita-austenita.

$$\sigma_{As} = C(T - A_{f0}) \quad (3.6a)$$

$$\varepsilon_{Af} = \frac{C(T - A_{f0})}{E_A} \quad (3.6b)$$

3.1.3 Ciclo completo de transformação de fase

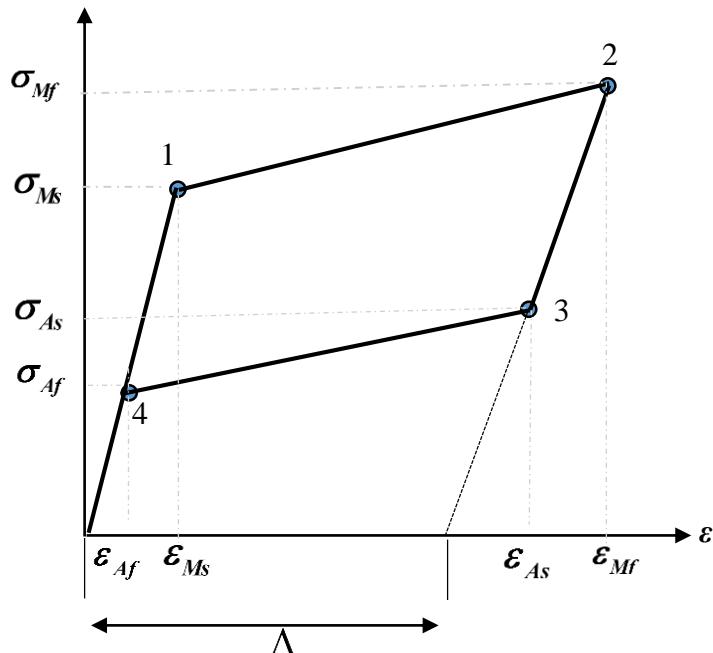


Figura 3.4 - Diagrama tensão-deformação proposto pelo modelo simplificado de Lagoudas, 2001 (Adaptado de Lagoudas et al. (2001)).

Como pretende-se acoplar fios LMF como dispositivos dissipadores de energia à modelagem em elementos finitos da placa, é necessário que o ciclo de histerese, responsável pelo amortecimento, seja representado matematicamente. Sendo assim, o modelo simplificado

de Lagoudas et al. (2001) propõe que as relações entre a tensão e a deformação sejam lineares tanto nas regiões em que ocorrem transformações de fase quanto nas regiões onde o material apresenta comportamento elástico.

Para o caso em que a aplicação de carregamento leve às transformações de fase incompletas, os fios são levados a apresentar um ciclo completo de carregamento composto por quatro regiões, como ilustrado na Fig. 3.4.

A modelagem de cada uma destas regiões, considera um caso uniaxial hipotético em que a LMF esteja inicialmente no seu estado puramente austenítico e sem a presença de qualquer deformação de transformação. A região linear elástica (4-1) é regida pelas seguintes equações:

$$\varepsilon^t = 0 \quad (3.7a)$$

$$\sigma = E_A(\varepsilon) \quad (3.7b)$$

Para níveis de tensão superiores a σ_{Ms} entre os pontos 1 e 2, o material é induzido a uma transformação direta de fase, austenita-martensita, na qual a deformação de transformação e a tensão variam linearmente até que seja atingido seu valor máximo, Λ . Dessa forma, tem-se:

$$\varepsilon^t = \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{Ms}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{Ms}} \right) \quad (3.8a)$$

$$\sigma = \sigma_{Ms} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}) \quad (3.8b)$$

Finalizada a transformação direta, inicia-se o regime linear de descarregamento (2-3) com o material apresentando uma estrutura cristalina puramente martensítica. Para esta região são válidas as seguintes equações:

$$\varepsilon^t = \Lambda \quad (3.9a)$$

$$\sigma = \sigma_{Mf} + E_M (\varepsilon - \varepsilon_{Mf}) \quad (3.9b)$$

Ao final do descarregamento, no ponto 3, inicia-se a transformação reversa, até que seja atingido o ponto 4, no qual o material se encontra novamente em seu estado puramente austenítico. Para esta região, são aplicadas as seguintes equações:

$$\varepsilon' = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon_{As} - \varepsilon}{\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Af}} \right) \quad (3.10a)$$

$$\sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon'}{\Lambda} (\sigma_{As} - \sigma_{Af}) \quad (3.10b)$$

A partir dos dados da Tab. 3.1, e utilizando as Eqs.(3.7) a (3.10), pode-se construir o diagrama tensão-deformação apresentado na Fig. 3.5.

Tabela 3.1 - Dados da LMF utilizada por Lagoudas et al. (2001).

$E_A = 70 \times 10^9$ [Pa]	$M_{f0} = 274$ [K]
$E_M = 30 \times 10^9$ [Pa]	$M_{s0} = 292$ [K]
$C = 7 \times 10^6$ [Pa/°C]	$A_{s0} = 296$ [K]
$\Lambda = 0,05$	$A_{f0} = 315$ [K]

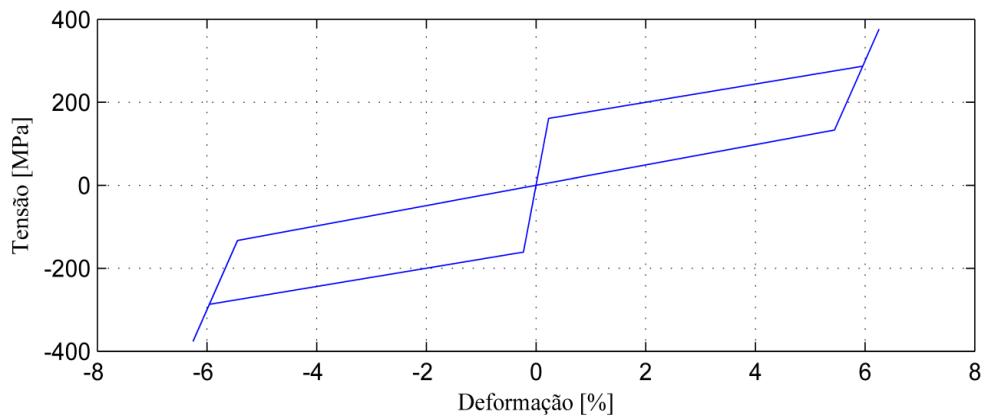


Figura 3.5 - Diagrama tensão-deformação para o modelo simplificado de Lagoudas (GUARALDO-NETO,2012).

3.1.4. Ciclo incompleto de transformação de fase

As equações (3.7) a (3.10) são utilizadas para a modelagem do comportamento pseudoelástico de uma LMF quando submetida a carregamentos mecânicos cíclicos que induzem transformações de fase completa. No entanto, dependendo da solicitação imposta à

LMF, ciclos incompletos de transformação de fase são formados (*minor loop cycles*) e as equações propostas anteriormente devem ser modificadas para levar em conta este comportamento de transformação incompleto, como ilustrado na Fig. 3.5.

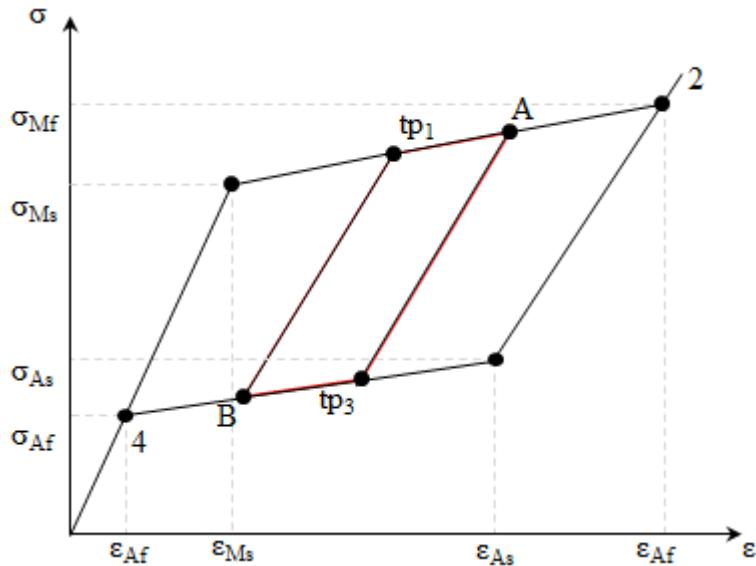


Figura 3.6 - Diagrama tensão-deformação com ciclo incompleto de transformação de fase
(adaptado de Lagoudas et al. (2001)).

Admitindo que o material inicialmente esteja em seu estado puramente austenítico e sem qualquer deformação de transformação, o processo de carregamento é linear como descrito anteriormente. No entanto, à medida que o material é carregado na região de transformação direta, este pode ser descarregado antes de atingir o ponto 2, iniciando um processo de descarregamento linear até atingir a região de transformação reversa, como pode ser observado pela região A-tp3. As equações, que modelam este comportamento, são expressas como segue:

$$E_R = \frac{E_M E_A}{\left[\frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (E_A - E_M) + E_M \right]} \quad (3.11a)$$

$$\sigma = \sigma_{\max} + E_R (\varepsilon - \varepsilon_{\max}) \quad (3.11b)$$

onde σ_{\max} , ε_{\max} e ε_{\max}^t , são, respectivamente, a tensão, a deformação e a deformação de transformação do ponto A (onde se inicia a transformação incompleta de fase).

A deformação e a tensão do ponto tp3 são calculadas a partir das seguintes expressões:

$$\varepsilon_{tp3} = \varepsilon_{Af} + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Af}) \quad (3.12a)$$

$$\sigma_{tp3} = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (\sigma_{As} - \sigma_{Af}) \quad (3.12b)$$

Terminado o descarregamento linear, o material se encontra na região de transformação reversa. Continuando o descarregamento até o ponto 4, ele retorna às condições iniciais, ou a transformação é novamente interrompida no ponto B, e ele passa a ser carregado linearmente até o ponto tp1. As equações que modelam a região de transformação reversa são dadas por:

$$\varepsilon' = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon}{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon_{Af}} \right) \quad (3.13a)$$

$$\sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{tp3} - \sigma_{Af}) \quad (3.13b)$$

Para a região (B-tp1), tem-se:

$$E_F = \frac{E_M E_A}{\left[\frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (E_A - E_M) + E_A \right]} \quad (3.14a)$$

$$\sigma = \sigma_{\min} + E_F (\varepsilon - \varepsilon_{\min}) \quad (3.14b)$$

onde σ_{\min} , ε_{\min} e ε_{\min}^t representam, respectivamente, a tensão, a deformação e a deformação de transformação do ponto B, cuja tensão e a deformação são calculados pelas expressões:

$$\varepsilon_{tp1} = \varepsilon_{Ms} + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{Ms}) \quad (3.15a)$$

$$\sigma_{tp1} = \sigma_{Ms} + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}) \quad (3.15b)$$

Prosseguindo o carregamento, o material se encontra na região de transformação direta, na qual ele pode atingir o ponto 2, ou interromper o ciclo em um novo ponto. As equações desta região são dadas como:

$$\varepsilon' = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{tp1}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{tp1}} \right) \quad (3.16a)$$

$$\sigma = \sigma_{tp1} + \frac{\varepsilon'}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{tp1}) \quad (3.16b)$$

Assim como feito anteriormente, com as equações modificadas do modelo simplificado e utilizando os parâmetros da Tab. 3.1 é possível determinar o comportamento da LMF para uma condição na qual a transformação de fase não é completa

3.2. Modelagem do efeito pseudoelástico aplicado a sistemas discretos e contínuos

Nesta seção é realizada a modelagem incorporando o elemento LMF em um sistema discreto de dois graus de liberdade (Guaraldo Neto, 2012) e acoplando fios de LMF à uma placa modelada por elementos finitos.

3.2.1. Sistema de dois graus de liberdade contendo elemento LMF

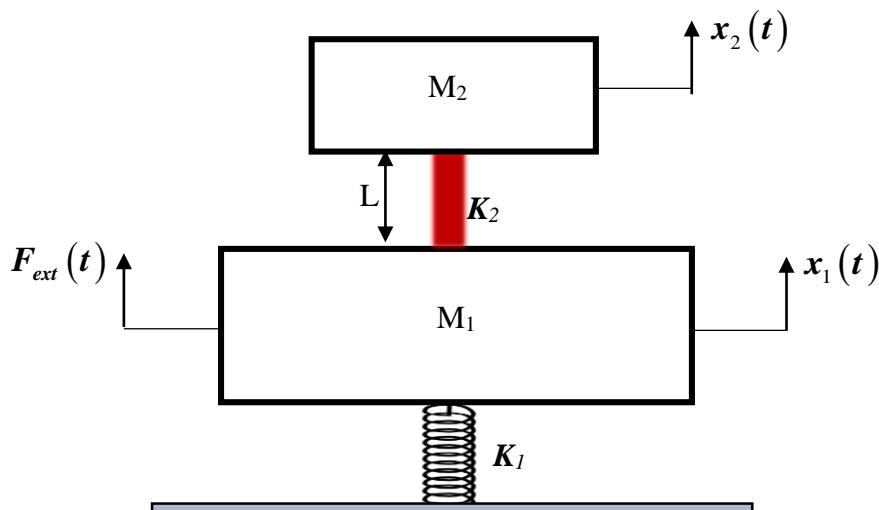


Figura 3.7 – Sistema de dois graus de liberdade contendo elemento de LMF

O sistema modelado é composto por uma estrutura primária (EP) que sofre uma excitação externa $F_{ext} = F_0 \sin(\omega t)$, e uma estrutura secundária (ES) acoplada a um elemento pseudoelástico que possui comprimento L_{LMF} e área da seção transversal A_{SMA} , que atua como absorvedor dinâmico de vibrações, conforme ilustrado na Fig. 3.7.

Para obter as equações do movimento do sistema, foram consideradas as equações que representam o modelo constitutivo da LMF mostrados na seção anterior. Neste sentido, considerando que o elemento de LMF está sendo inicialmente tracionada, a força exercida sobre ele pode ser calculada como mostrado a seguir:

$$-F_{LMF} = \sigma A_{LMF} \quad (3.17)$$

Combinando as equações (3.2) e (3.17) obtém-se a seguinte relação:

$$F_{LMF} = E_{LMF} (\varepsilon^t) A_{LMF} \left(\frac{x_2(t) - x_1(t)}{L_{LMF}} - \varepsilon^t \right) \quad (3.18)$$

Aplicando a segunda lei de Newton ao sistema ilustrado na Fig. 3.7 e levando-se em consideração a Eq. (3.18), obtém-se a seguinte equação do movimento:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext} - E_{LMF} (\varepsilon^t) A_{LMF} \varepsilon^t \\ -E_{LMF} (\varepsilon^t) A_{LMF} \varepsilon^t \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

onde $K_2 = (E_{LMF} A_{LMF}) / L_{LMF}$.

A equação do movimento do sistema é não-linear, devido ao módulo de elasticidade ser dependente da deformação de transformação, ε^t . Sendo assim, utilizou-se um processo de linearização do sistema de equações do movimento, através das equações propostas pelo modelo simplificado de Lagoudas et. al. (2001). Neste processo, proposto para sistemas de um grau de liberdade por Oliveira (2008) e posteriormente aplicado em sistemas de dois graus de liberdade em Guaraldo Neto (2012), o movimento é regido por uma equação diferencial linear em cada uma das regiões do diagrama de tensão-deformação, sendo a equação determinada por qual região o elemento LMF se encontra.

Para a região onde o comportamento é elástico têm-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{min} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{min} \\ -\sigma_{min} A_{LMF} + K_2 L_{LMF} \varepsilon_{min} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Na região de transformação direta:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{tp1} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp1} \\ -\sigma_{tp1} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp1} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Região de descarregamento elástico:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{max} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{max} \\ -\sigma_{max} A_{LMF} + K_2 L_{LMF} \varepsilon_{max} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Região de transformação inversa:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{tp3} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp3} \\ -\sigma_{tp3} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp3} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

3.2.2. Aplicação de fios discretos de LMF à uma placa fina em grandes deslocamentos

Como já foi exposto anteriormente, as ligas com memória de forma vêm sendo bastante utilizadas como alternativa para aumento de amortecimento passivo de sistemas mecânicos além de aumentar o amortecimento estrutural, devido ao seu grande poder de dissipação de energia.

Neste trabalho, serão utilizados fios discretos pré-tensionados de Ligas com Memória de Forma e simetricamente fixados na direção de maior comprimento da placa. A Fig. 3.8 ilustra como os fios pré-tensionados são acoplados à placa. A Fig 3.9 exibe a vista lateral deste sistema de onde são extraídas as relações geométricas dos fios.

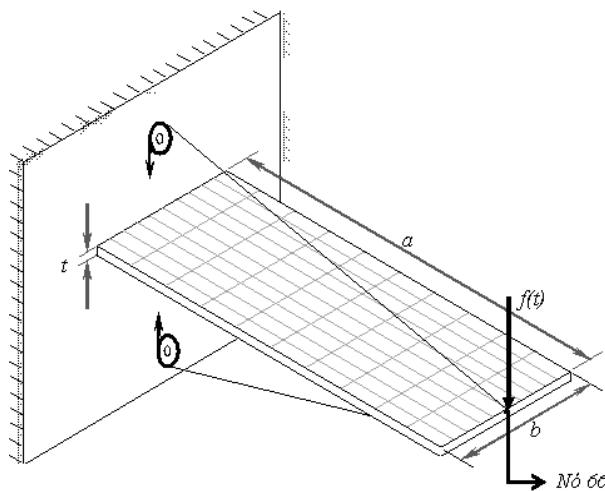


Figura 3.8 – Representação do acoplamento dos fios LMF à placa.

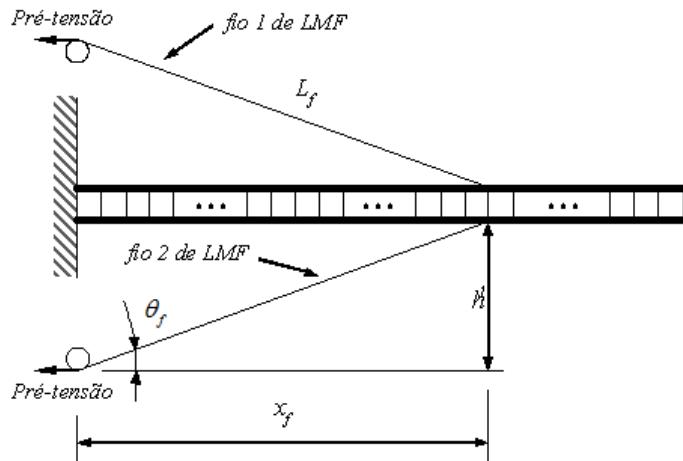


Figura 3.9 - Representação de uma vista lateral da placa fina com fios discretos de LMF.

Através da figura anterior, podem-se obter as seguintes relações para os fios de LMFs:

$$L_f^2 = x_f^2 + h_f^2 \quad (3.24a)$$

$$\theta_f = \tan^{-1} \left(\frac{h_f}{x_f} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{h_f}{L_f} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{x_f}{L_f} \right) \quad (3.24b)$$

onde L_f é o comprimento dos fios pré-tensionados, h_f é a altura de fixação dos fios, θ_f representa o ângulo entre o fio e a placa e x_f é a distância entre o engaste do fio e a sua posição. $L_f = L_f^0 + \Delta L_f^{PT}$ é o comprimento dos fios pré-tensionados, e L_f^0 e ΔL_f^{PT} representam, respectivamente, o comprimento do fio não deformado e a variação do comprimento do fio devido à pré-tensão.

A influência dos fios LMF no comportamento dinâmico da placa é mostrada na Fig. 3.10. Nela pode-se observar como os fios se comportam devido à flexão da placa e a rotação no ponto onde o fio é acoplado.

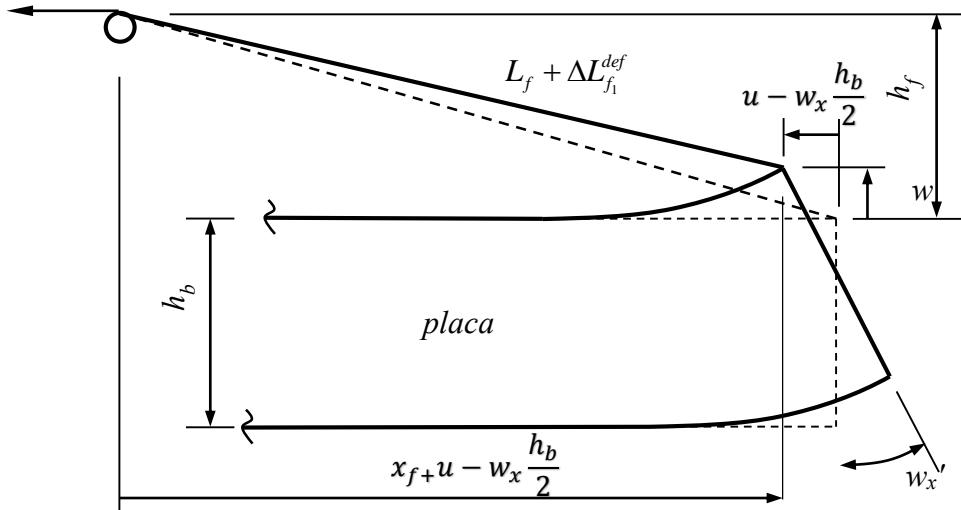


Figura 3.10 - Representação da deformação sofrida pelo fio 1 de LMF devido à deflexão transversal da placa.

Da figura anterior, podem-se obter as seguintes relações geométricas para a condição de deformação dos fios 1 e 2 de LMFs:

$$(L_f + \Delta L_{f1}^{def})^2 = \left(x_f + u - w_x \frac{h_b}{2} \right)^2 + (h_f - w)^2 \quad (3.25a)$$

$$(L_f + \Delta L_{f2}^{def})^2 = \left(x_f + u + w_x \frac{h_b}{2} \right)^2 + (h_f + w)^2 \quad (3.25b)$$

onde as grandezas x_f , u , w e w_x são tomadas em relação à posição na placa (nó da placa discretizada) na qual são fixados os fios de LMFs. ΔL_{f1}^{def} e ΔL_{f2}^{def} representam, respectivamente, as variações de comprimento sofridas pelos fios 1 e 2 devidas à deflexão da placa. Subtraindo a relação (3.24a) das Eqs. (3.25) e negligenciando os termos quadráticos, chega-se às seguintes relações,

$$\Delta L_{f_1}^{def} = \frac{x_f}{L_f} u - \frac{h_b}{2} \frac{x_f}{L_f} w_x - \frac{h_f}{L_f} w \quad (3.26a)$$

$$\Delta L_{f_2}^{def} = \frac{x_f}{L_f} u + \frac{h_b}{2} \frac{x_f}{L_f} w_x + \frac{h_f}{L_f} w \quad (3.26b)$$

que combinadas com a expressão (3.24b), permite determinar as deformações normais sofridas pelos fios de LMFs devidas à deflexão da placa fina:

$$\varepsilon_{f_1}^{def} = \frac{\Delta L_{f_1}^{def}}{L_f} = \left[\frac{\cos \theta_f}{L_f} \left(u - \frac{h_b}{2} w_x \right) - \frac{\sin \theta_f}{L_f} w \right] \quad (3.27a)$$

$$\varepsilon_{f_2}^{def} = \frac{\Delta L_{f_2}^{def}}{L_f} = \left[\frac{\cos \theta_f}{L_f} \left(u + \frac{h_b}{2} w_x \right) + \frac{\sin \theta_f}{L_f} w \right] \quad (3.27b)$$

A partir das expressões anteriores é possível calcular a tensão total atuante nos fios de LMF levando-se em conta a região do diagrama tensão-deformação em que se encontra a liga de memória de forma de acordo com a Figura 3.1:

$$\sigma_{f_j}^T = E_{reg}^j \varepsilon_{f_j}^T + \sigma_{reg}^j = E_{reg}^j \left(\varepsilon_{f_j}^{def} + \varepsilon_f^{PT} \right) + \sigma_{reg}^j \quad j=1,2 \quad (3.28)$$

onde E_{reg}^j é o módulo longitudinal do fio j de LMF calculado de acordo com a inclinação da reta do diagrama tensão-deformação, $\sigma_{reg}^j = \sigma_p^j - E_{reg}^j \varepsilon_p^j$ é a tensão associada à região do diagrama tensão-deformação para o fio j , e o subscrito $p = [\max, tp3, \min, tp1]$ caracteriza a região do diagrama tensão-deformação na qual se encontra a LMF (ver Fig. 3.4). $\varepsilon_f^{PT} = \Delta L_f^{PT} / L_f^0$ é a deformação devida à pré-tensão nos fios.

Considerando a Eq. (3.28), a força exercida nos fios de LMFs é dada como segue:

$$F_{f_j}^T = A_f \sigma_{f_j}^T = A_f \left(E_{reg}^j \varepsilon_{f_j}^T + \sigma_{reg}^j \right) \quad j=1,2 \quad (3.29)$$

Combinando as relações (3.27) e (3.29), chega-se às expressões das forças nos fios:

$$\mathbf{F}_{f_j}^T = \mathbf{A}_f E_{reg}^j \left(\varepsilon_{f_j}^{def} + \varepsilon_f^{PT} \right) + \mathbf{A}_f \boldsymbol{\sigma}_{reg}^j \quad j=1,2 \quad (3.30)$$

Uma vez determinado os esforços nos fios de LMFs, pode-se utilizar o sistema equipolente de forças apresentado na Fig. 3.11 para identificar os esforços impostos à placa pelos fios de LMFs. Esses esforços serão considerados na modelagem por elementos finitos como um vetor de carregamentos externos aplicados no nó nd da placa, correspondente à aplicação dos fios. A partir da Fig. 3.9, pode-se obter o seguinte vetor dos carregamentos a nível nodal:

$$\mathbf{f}_{LMF}^{nd}(t) = \begin{pmatrix} N_f^u \\ N_f^v \\ N_f^w \\ N_f^{w_x} \\ N_f^{w_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{f_1}^T \cos \theta_f - F_{f_2}^T \cos \theta_f \\ 0 \\ F_{f_1}^T \sin \theta_f - F_{f_2}^T \sin \theta_f \\ \frac{h_b}{2} (F_{f_1}^T \cos \theta_f - F_{f_2}^T \cos \theta_f) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

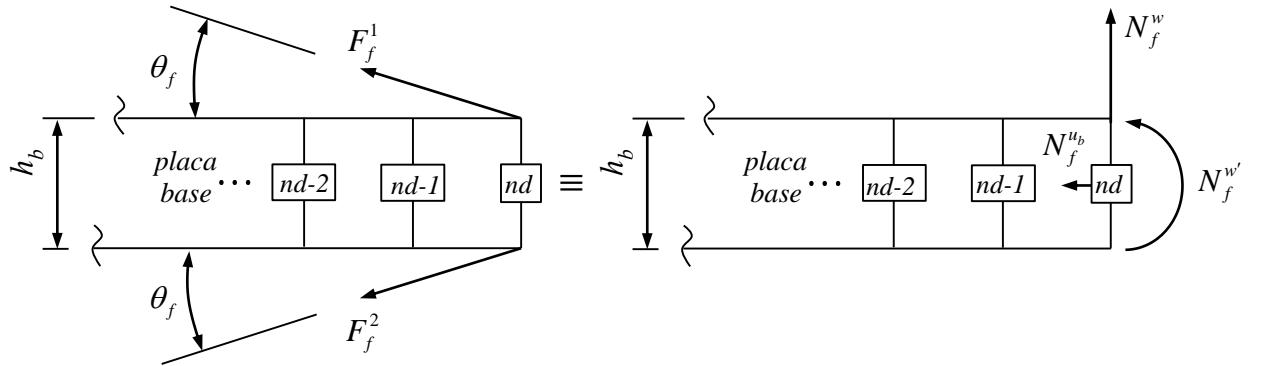


Figura 3.11 – Representação dos esforços impostos à placa fina pelos fios de LMFs.

Combinando as relações (3.27) com a expressão (3.30) pode-se obter as expressões das forças para os fios 1 e 2 de LMF. Em seguida, as duas expressões resultantes, $F_{f_1}^T$ e $F_{f_2}^T$, são introduzidas na relação (3.30), que após algumas manipulações matemáticas, fornece o seguinte vetor dos carregamentos nodal:

$$\mathbf{f}_{LMF}^{nd}(t) = \mathbf{K}_{LMF}^{nd} \mathbf{X}_{(e)}^{nd}(t) + \tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^{nd}(t) \quad (3.32)$$

onde $\mathbf{X}_{(e)}^{nd}(t) = [u^{nd}(t) \quad v^{nd}(t) \quad w^{nd}(t) \quad w_x^{nd}(t) \quad w_y^{nd}(t)]^T$ representa o vetor dos graus de liberdade do nó nd onde é aplicado os fios, e \mathbf{K}_{LMF}^{nd} e $\tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^{nd}(t)$ assumem, respectivamente, as formas:

$$\mathbf{K}_{LMF}^{nd} = \begin{bmatrix} k_1 \cos^2 \theta_f & 0 & \frac{-k_2}{2} \sin 2\theta_f & \frac{-hk_2}{2} \cos^2 \theta_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_2}{2} \sin 2\theta_f & 0 & \frac{k_1}{2} \sin^2 \theta_f & \frac{-hk_1}{4} \sin 2\theta_f & 0 \\ \frac{-hk_2}{2} \cos^2 \theta_f & 0 & \frac{-hk_1}{4} \sin 2\theta_f & -\frac{hk_1}{4} \cos^2 \theta_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^{nd}(t) = \begin{Bmatrix} -A_f(S_f^1 + S_f^2) \cos \theta_f \\ 0 \\ A_f(S_f^1 - S_f^2) \cos \theta_f \\ \frac{h}{2} A_f(S_f^1 - S_f^2) \cos \theta_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.33b)$$

onde $k_1 = \frac{A_f}{L_f} (E_{reg}^1 + E_{reg}^2)$, $k_2 = \frac{A_f}{L_f} (E_{reg}^1 - E_{reg}^2)$, $S_f^1 = E_{reg}^1 \varepsilon_f^{PT} + \sigma_{reg}^1$ e $S_f^2 = E_{reg}^2 \varepsilon_f^{PT} + \sigma_{reg}^2$.

Uma vez determinado o vetor dos esforços nodal devido aos fios de LMFs, este deve ser expandido nos graus de liberdade globais do sistema para se determinar as equações do movimento a nível global. A expansão pode ser feita utilizando-se o conceito de *modificação estrutural diádica* (MAIA; SILVA, 1997), permitindo reescrever a Eq.(3.32) da forma:

$$\mathbf{f}_{LMF}(t) = -\mathbf{K}_{LMF} \mathbf{X}_{(e)}(t) + \tilde{\mathbf{f}}_{LMF}(t) \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{K}_{LMF} = \mathbf{I}_k^T \mathbf{K}_{LMF}^k \mathbf{I}_k$ e $\mathbf{f}_{LMF} = \mathbf{I}_k^T \tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^k$. \mathbf{I}_k designa as colunas da matriz identidade de ordem N correspondentes aos graus de liberdade de aplicação dos esforços.

Introduzindo o vetor dos carregamentos impostos à placa fina pelos fios de LMFs na Eq. (2.23), chega-se às equações do movimento a nível global da placa fina em grandes deslocamentos incorporando fios discretos de LMFs:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}(\mathbf{X}) + \mathbf{K}_{LMF}] \mathbf{X} = \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{f}}_{LMF} \quad (3.35)$$

3.3. Resolução numérica das equações do movimento da placa fios com fios de LMF

Para as simulações numéricas de placas finas em grandes deslocamentos contendo fios de LMF, todos os desenvolvimentos apresentados neste capítulo e no Capítulo 2 foram implementados em ambiente de programação Matlab® conforme o fluxograma mostrado na Fig. 3.12. As principais etapas são: (i) inicialização dos parâmetros geométricos dos fios e da placa fina com suas condições iniciais e imposição das condições de contorno e inicialização dos parâmetros de Newmark; (ii) inicialização dos parâmetros dos fios LMF (temperatura de operação e pré-tensão). Neste ponto, são calculadas as matrizes de massa e rigidezes, a força externa e não linear, a matriz K_{LMF} e o vetor de esforços f_{LMF} ; (iii) com o início do processo iterativo, realiza-se uma verificação para atualização do módulo de elasticidade e da tensão correspondente à região de transformação onde os fios se encontram e então são calculadas as matrizes de rigidezes e os esforços nos fios de LMF. Após estes cálculos e verificações inicia-se o processo de integração de Newmark calculando a matriz de rigidez efetiva e o resíduo. No entanto, a força não-linear não pode ser calculada diretamente. Por isso, é realizada uma aproximação da mesma através da matriz de rigidez tangente conforme desenvolvimentos apresentados no Capítulo 2. Como é realizada uma aproximação, outro processo iterativo se faz necessário para realizar as correções dos deslocamentos. Então, é usado o método de Newton-Raphson para resolução de sistemas não-lineares para a previsão do passo de deslocamentos. Com base nisto são calculados os deslocamentos no tempo i com base no deslocamento no tempo $i-1$. Este processo é realizado até que a variação do passo seja mínima; (iv) nesta etapa são calculadas as deformações nos fios com base nos deslocamentos obtidos; (v) por fim, são calculadas as acelerações e velocidades e em seguida as tensões nos fios.

É importante destacar que todo o processo de resolução da equação do movimento não-linear foi implementado em ambiente de programação Matlab.

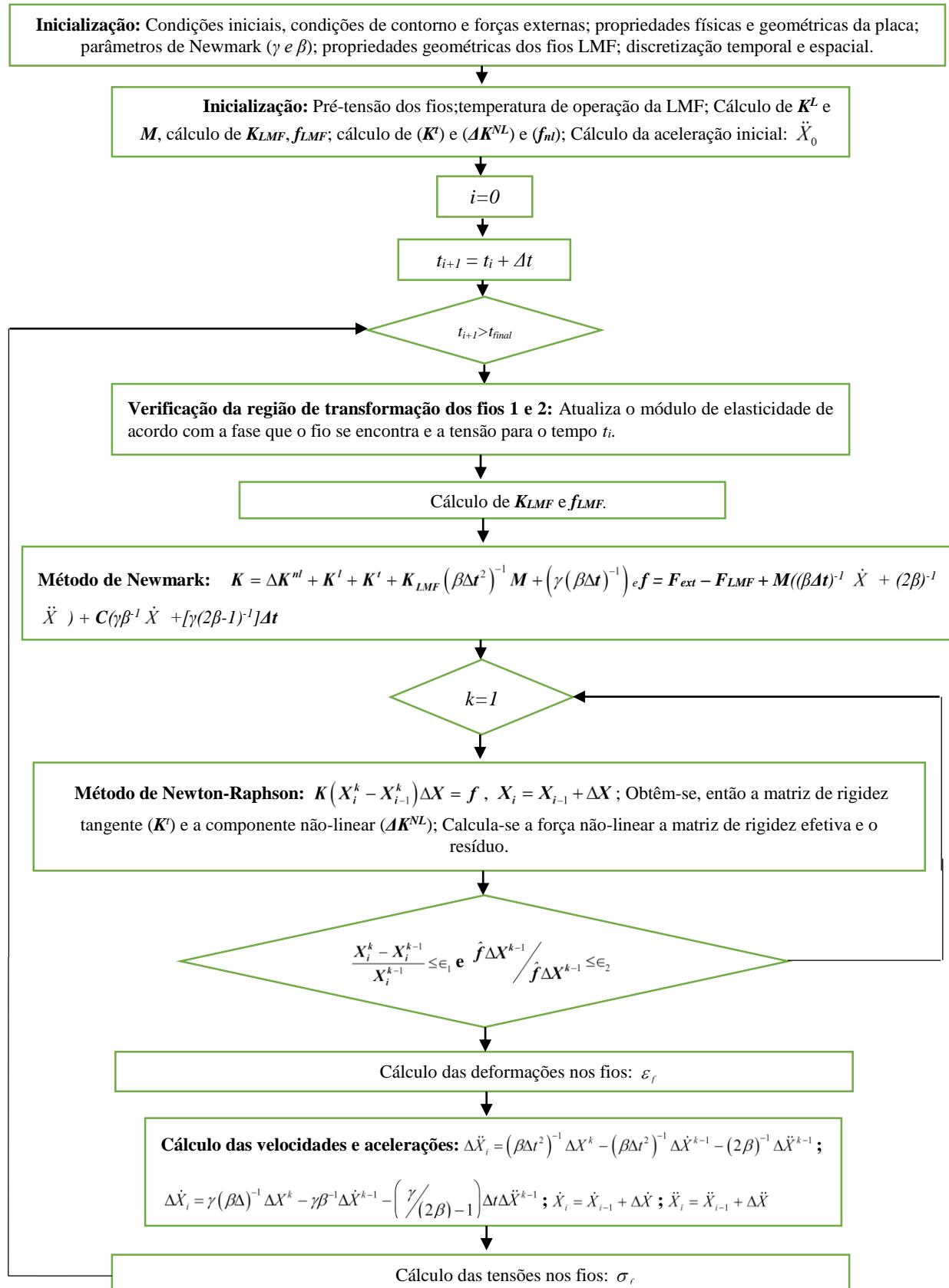


Figura 3.12 – Fluxograma do processo iterativo para a resolução da Eq. (3.35)

CAPÍTULO IV

Simulações Numéricas

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações numéricas de placas finas em grandes deslocamentos incorporando ligas com memória de forma. Neste sentido, será avaliada a capacidade de redução da amplitude das vibrações da placa fina via efeito pseudoelástico das ligas com memória de forma. Será também avaliada a eficiência das LMFs para diferentes carregamentos e para algumas configurações geométricas como diâmetro e posição angular dos fios.

4.1. Definição das propriedades físicas e geométricas do sistema.

A Fig. 3.7 ilustra a placa retangular fina acoplada a fios discretos pseudoelásticos utilizada nas simulações que seguem. A placa de espessura 0.002m e comprimento de 0.2m foi discretizada em 10×10 elementos finitos onde as propriedades físicas e geométricas estão definidas nas Tab. 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1. Propriedades físicas e geométricas da placa fina

<i>Comprimento - a [m]</i>	0.5
<i>Largura - b [m]</i>	0.2
<i>Espessura - t [m]</i>	0.002
<i>Módulo de Elasticidade - E [Mpa]</i>	2.1e11
<i>Coeficiente de Poisson - ν</i>	0.3
<i>Densidade Volumétrica - ρ [Kg/m³]</i>	7800

Tabela 4.2. Propriedades físicas e geométricas dos fios de LMF (Lagoudas et al. (2001))

<i>Ângulo de Fixação dos Fios</i>	19.1°	E_A [Pa]	70.0E9 [Pa]
<i>Comprimento do Fio [m]</i>	0.2	E_M [Pa]	30.0E9 [Pa]
<i>Diâmetro do fio [m]</i>	0.0011	$[M_{f0} M_{s0} A_{s0} A_{f0}] K$	[274 292 296 315]
<i>Temperatura de operação [K]</i>	315	A	0.05

Para a resolução da equação do movimento (3.34) que rege o comportamento de todo o sistema foi utilizado o procedimento numérico mostrado no fluxograma dado na Fig. 3.12. Para tanto, foi considerado nas simulações um intervalo de tempo de 0 a 1 segundo e o passo de tempo constante de 3×10^{-4} segundos sendo que o sistema encontra-se em repouso no início do procedimento numérico.

Os fios discretos pseudoelásticos utilizados como dissipadores de energia foram pré-tensionados com uma tensão inicial de 200MPa, garantindo assim, que a deformação permaneça dentro do ciclo de histerese (THOMSON et al., 1995). Além disso, eles foram fixados simetricamente na placa fina conforme mostrado na Fig. 3.7.

Com o objetivo de analisar a capacidade de dissipação de energia dos fios pseudoelásticos, foi aplicada ao sistema uma força externa, $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, onde a frequência de excitação está nas proximidades da primeira frequência natural da placa fina em balanço. Também foram avaliados diversos valores para a amplitude da excitação, F_0 , com o intuito de avaliar o comportamento dinâmico pseudoelástico dos fios de LMF e a eficiência na redução dos níveis de vibração da placa fina à medida em que os efeitos não-lineares tornam-se mais evidentes, conforme reportado no trabalho de Gerges (2013).

A Fig. 4.1a mostra as respostas dinâmicas da placa fina com e sem fios discretos pseudoelásticos para a uma frequência da excitação de $f = 42.57$ Hz e amplitude de 1 N. Nota-se claramente a eficiência dos fios na redução das amplitudes de vibração da placa fina no intervalo de tempo observado, conforme comprovado pelo diagrama de fase mostrado na Fig. 4.1b. Analisando o diagrama tensão-deformação mostrado na Fig. 4.1c, nota-se que as deformações sofridas pelos fios levam à uma dissipação de energia para a amplitude estudada, além de mostrar o comportamento do sistema em seu estado transiente. Com estes resultados pode-se concluir que para pequenas amplitudes de excitação o sistema apresenta um comportamento tipicamente linear em deslocamentos. Consequentemente, não são capazes de induzir grandes deformações nos fios pseudoelásticos.

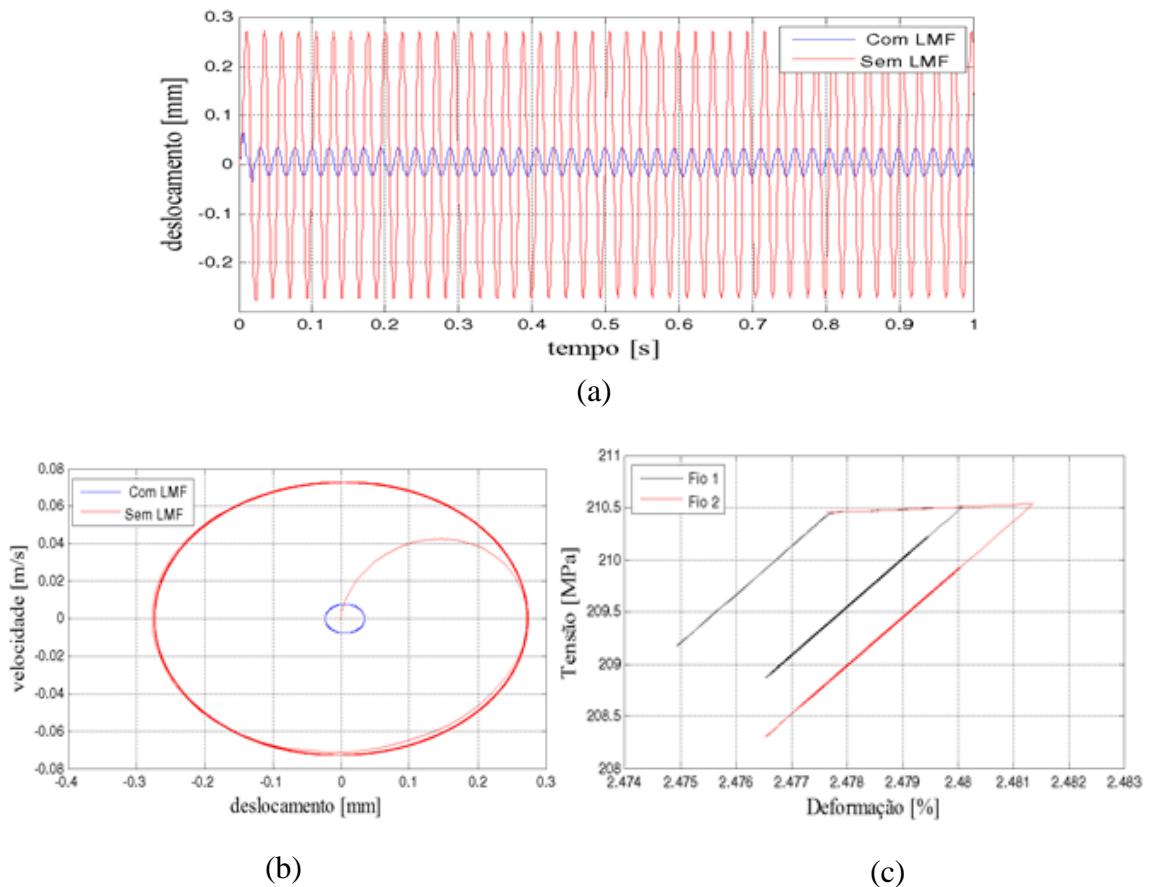


Figura 4.1. (a) Resposta da placa para $F_0 = 1$ N e $f = 42.57$ Hz; (b) diagrama de fase para os sistemas sem com fios pseudoelásticos; (c) diagrama tensão-deformação.

4.1.1. Variação da amplitude da excitação

A Fig.4.2a demonstra que mesmo aumentando a amplitude da excitação para $F_0 = 20$ N os fios de LMF são capazes de dissipar a energia vibratória do sistema. Além disso, nota-se que, com a aplicação de uma força de amplitude maior o sistema começa a apresentar não-linearidades em seu comportamento, conforme observado tanto na resposta no domínio do tempo (ver Fig. 4.2b) quanto no diagrama de fase do sistema onde nota-se a presença de subharmônicos (ver Fig. 4.2c).

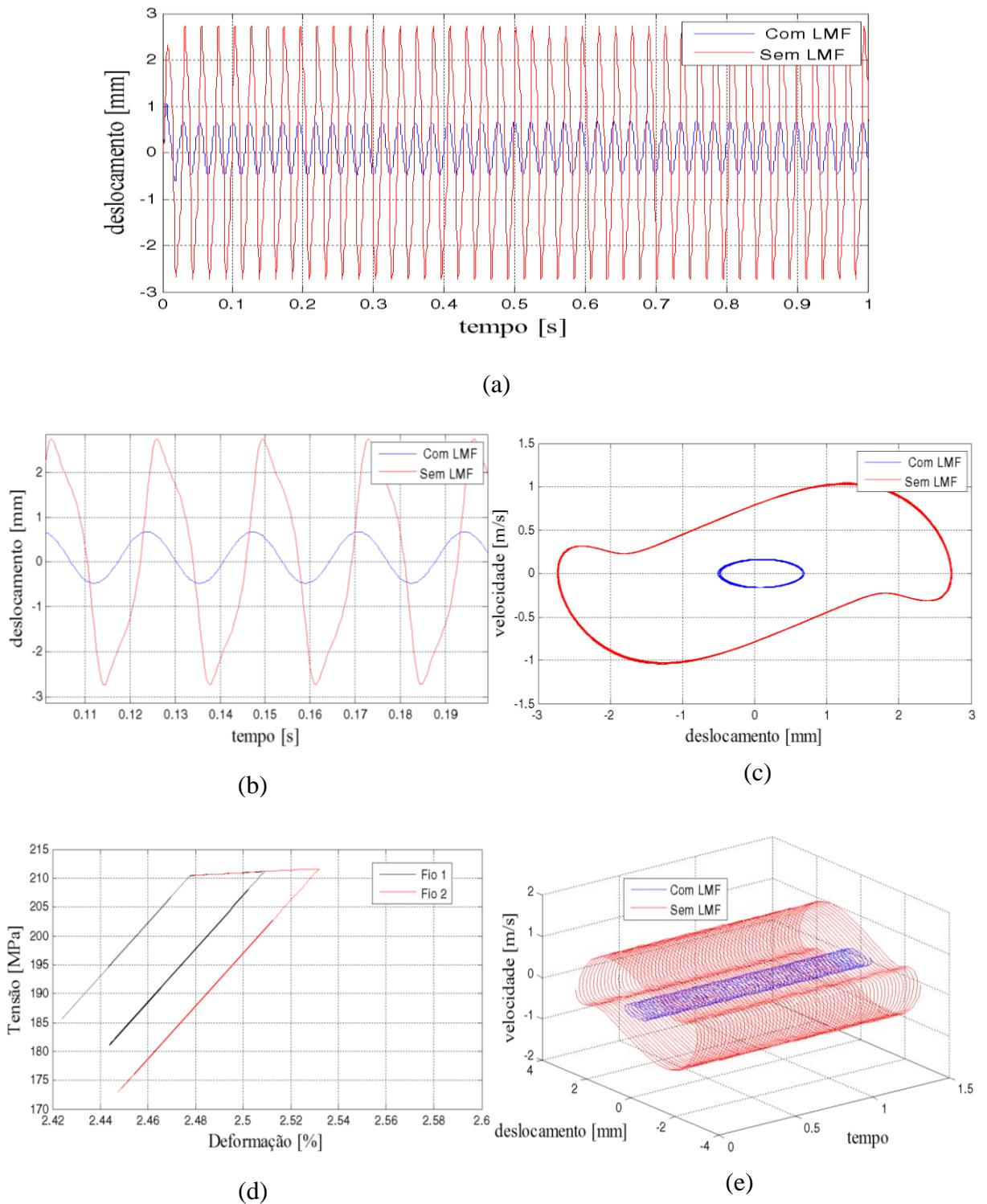


Figura 4.2. (a) Resposta do sistema para $F_0 = 20 \text{ N}$ e $f = 42.57 \text{ Hz}$. (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.16 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação.

Mantendo as condições de operação descritas na Tab. 4.2 e aumentando ainda mais a amplitude da excitação para 40 N, nota-se ainda uma redução significativa das amplitudes de vibração da placa em grandes deslocamentos como demonstrado pela Fig. 4.3a. Isso se deve à grande capacidade de deformação dos fios de LMF como mostrado pelo diagrama de histerese da Fig. 4.3d, onde nota-se uma deformação superior a 2.55%.

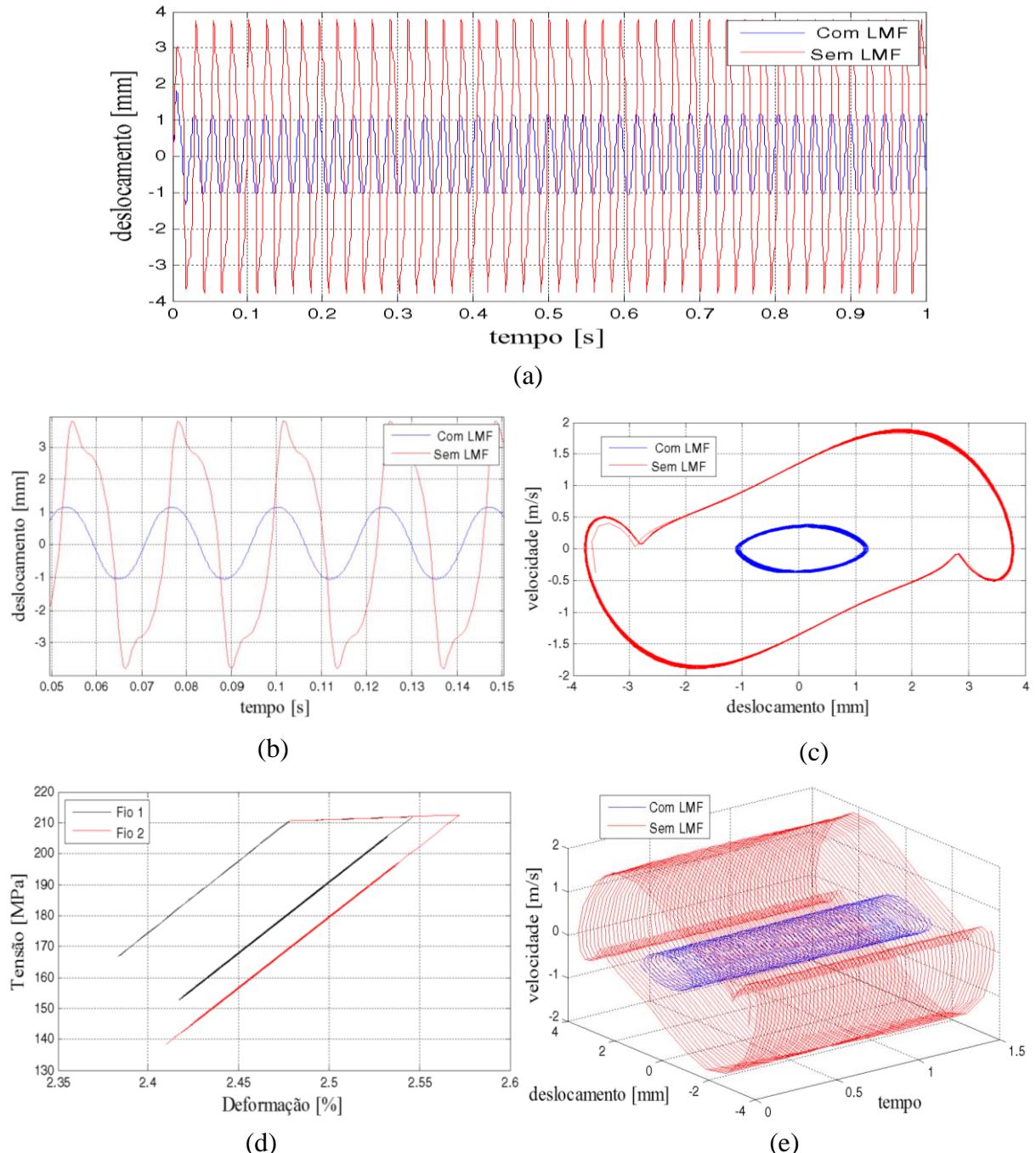
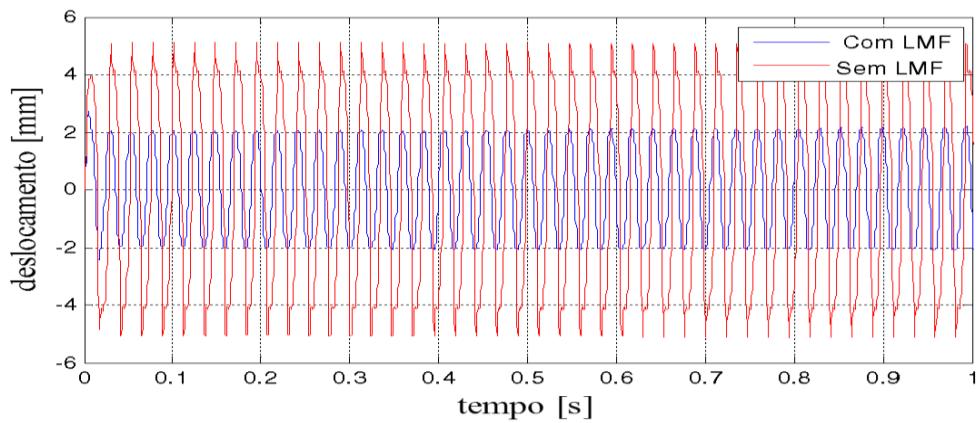
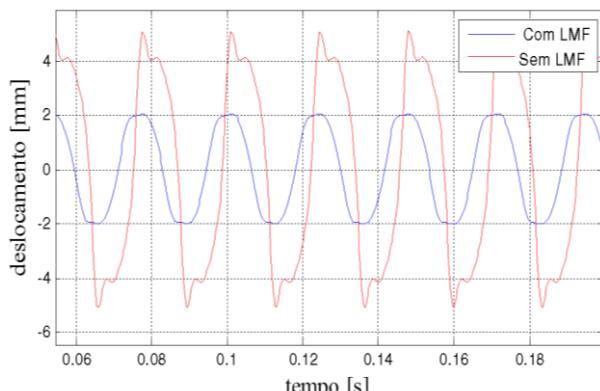


Figura 4.3. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 40$ N e $f = 42.57$ Hz; (b) resposta no intervalo de 0.05 a 0.15 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação.

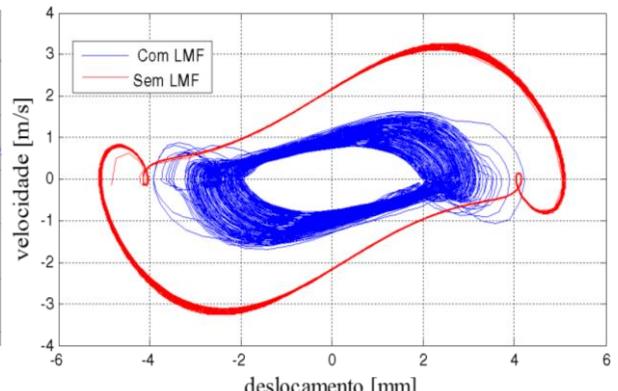
Para uma amplitude de $F_0 = 80$ N as características não-lineares ficam ainda mais evidentes conforme mostrado na Fig. 4.4. Em particular, a Fig. 4.4b mostra nitidamente que os subharmônicos, característica de sistemas não-lineares, ficam ainda mais evidentes se comparados com a resposta obtida para a amplitude de 40 N. Este comportamento também pode ser observado na Fig. 4.4c, no plano de fase do sistema. No que diz respeito à atenuação das amplitudes dos deslocamentos do sistema não-linear, nota-se que as mesmas foram reduzidas devido à dissipação de energia proporcionada pelos ciclos de histereses incompletos (*minor loops*) mostrados na Fig. 4.4e.



(a)



(b)



(c)

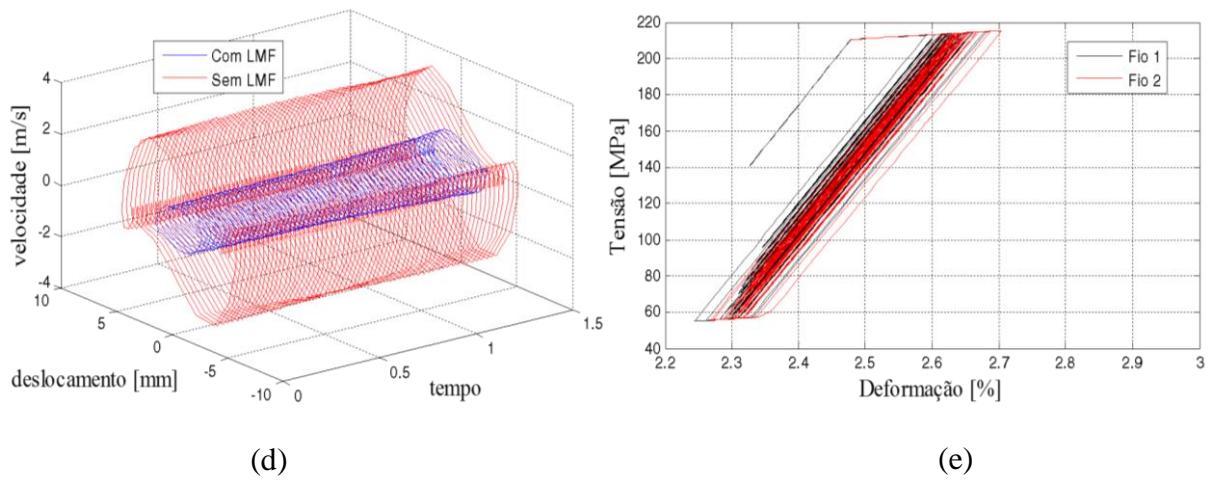
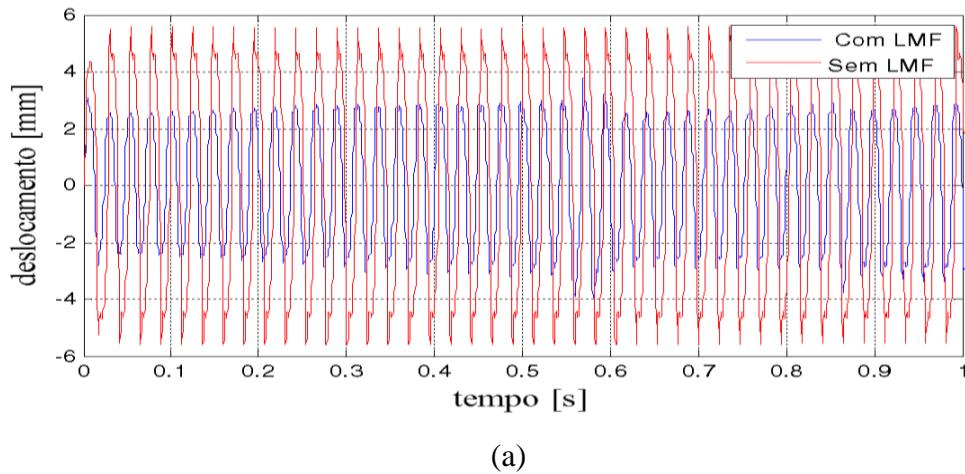


Figura 4.4. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 80$ N e $f = 42.57$ Hz; (b) resposta no intervalo de 0.05 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação.

A Fig. 4.5 abaixo demonstra que aplicando uma força senoidal com amplitude ainda maior de $F_0 = 100$ N há ainda uma redução das amplitudes dos deslocamentos devido à grande quantidade de ciclos de histereses incompletos dos fios de LMF. Além disso, nota-se as características não-lineares da resposta da placa fina conforme o plano de fase da Fig. 4.5c.



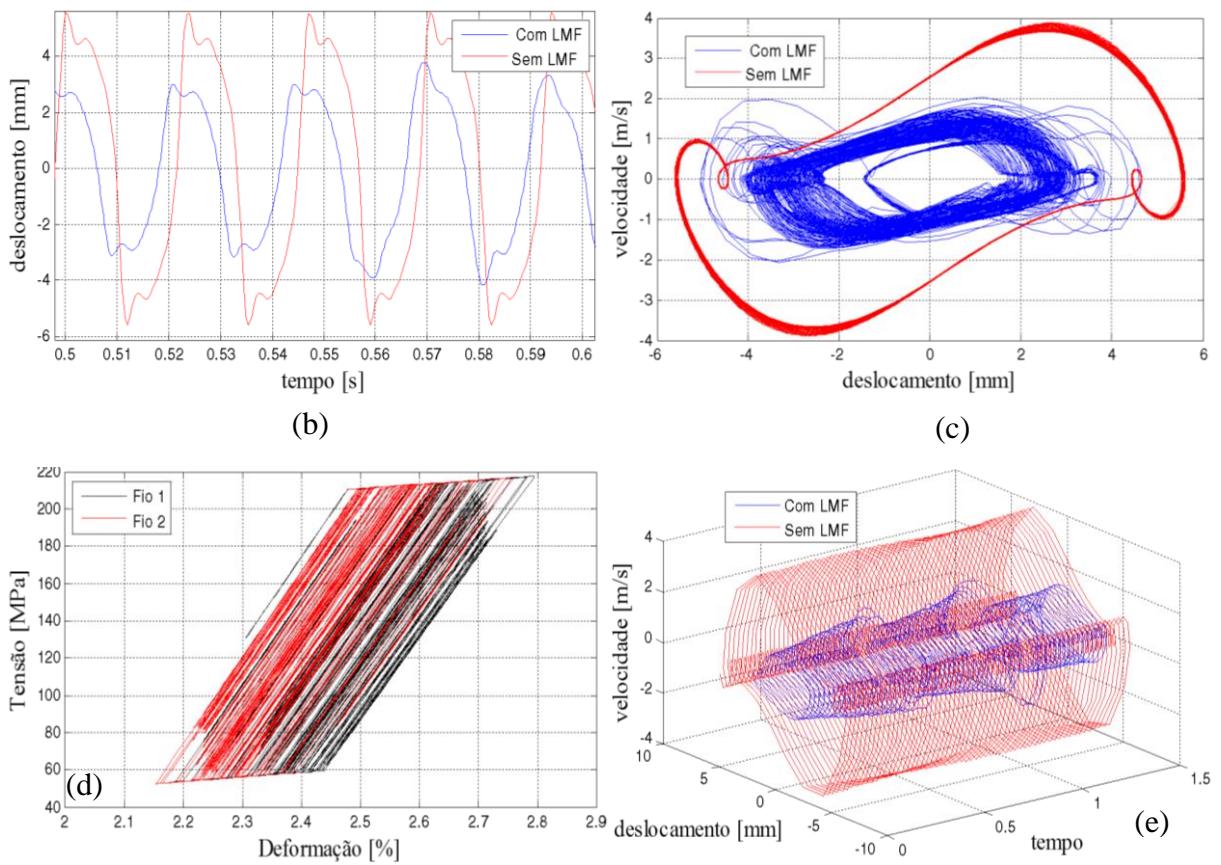


Figura 4.5. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 100$ N e $f = 42.57$ Hz; (b) resposta no intervalo de 0.5 a 0.6 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação.

4.1.2. Variação do ângulo de fixação do fio

Nesta seção, o objetivo é analisar como os fios de LMF se comportam quando há variações nas suas posições angulares de fixação quanto à sua capacidade de dissipação de energia e consequente redução das vibrações não-lineares da placa fina em grandes deslocamentos. A Fig. 4.6 demonstra que aumentando o ângulo de fixação dos fios para $\theta_f = 45^\circ$ e mantendo os parâmetros fixos $F_0 = 80$ N e $f = 42.57$ Hz (condições que apresentam não-linearidades), há uma redução significativa das amplitudes de vibração do sistema e pouca deformação nos fios como mostrado na Fig. 4.6d.

Para o caso em que os fios são fixados a 90° , observa-se uma redução das vibrações ainda maior se comparada com as configurações utilizando 19.1° e 45° conforme demonstrado na Fig. 4.7.

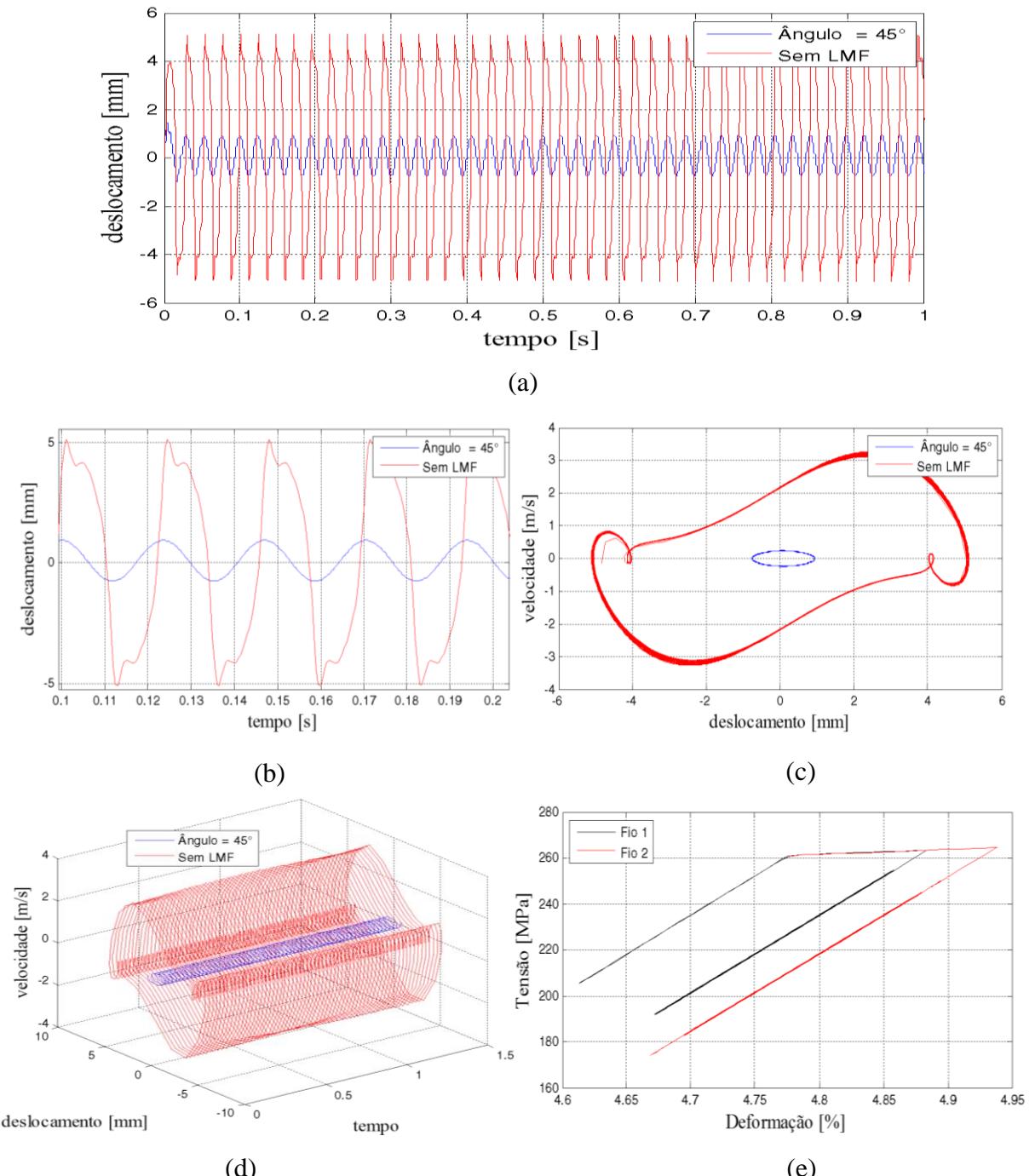


Figura 4.6. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 42.57 \text{ Hz}$ e $\theta_f = 45^\circ$; (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação.

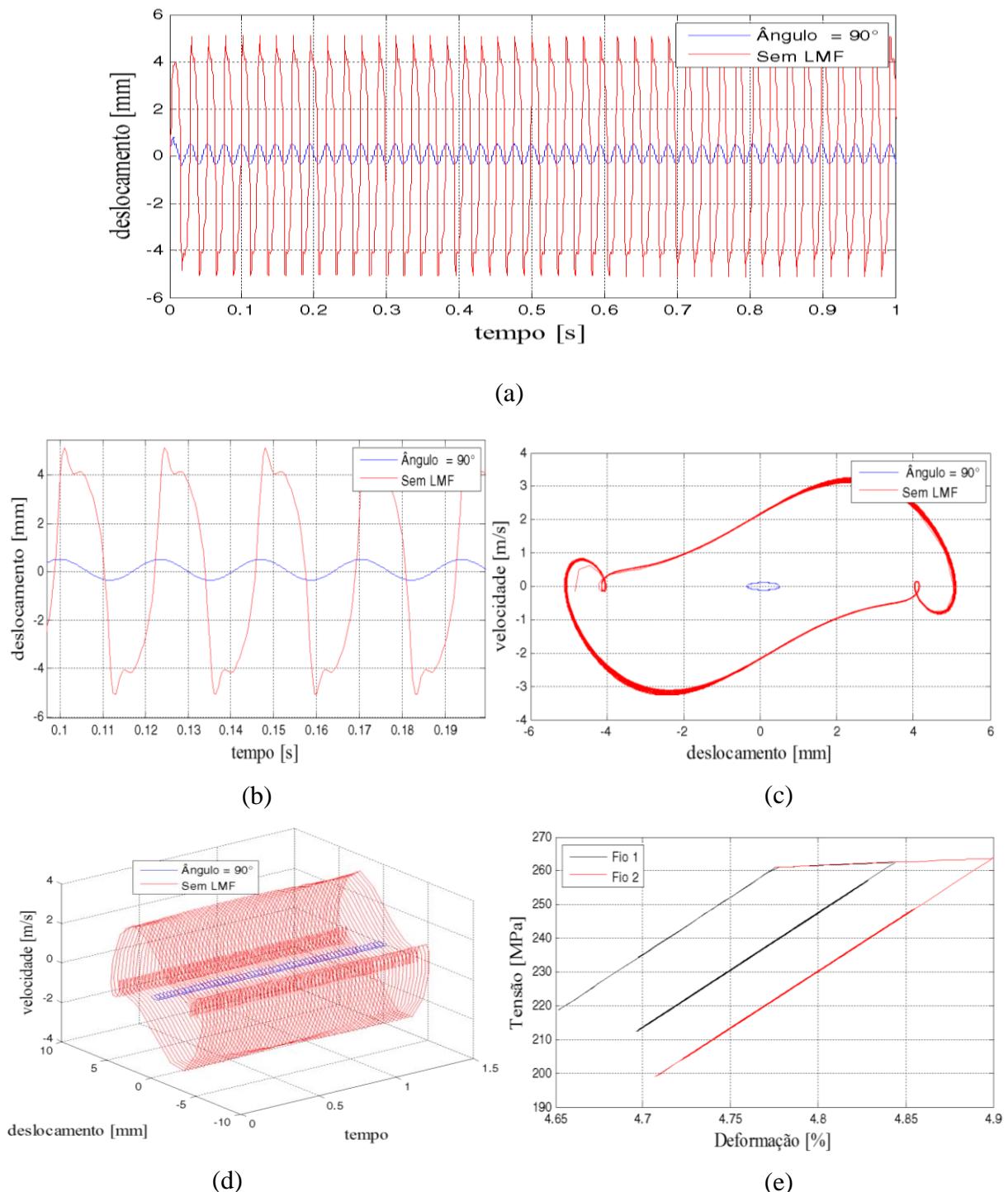


Figura 4.7. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 42.57 \text{ Hz}$ e $\theta_f = 90^\circ$; (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação.

4.1.3. Variação do diâmetro dos fios

Outro parâmetro que influe na eficiência dos fios de LMF é o seu diâmetro conforme demonstrado pelos resultados da Fig. 4.8 a seguir. Nota-se que aumentando o diâmetro dos fios de LMF há uma redução se comparada com o valor padrão mostrado na tab. 4.2.

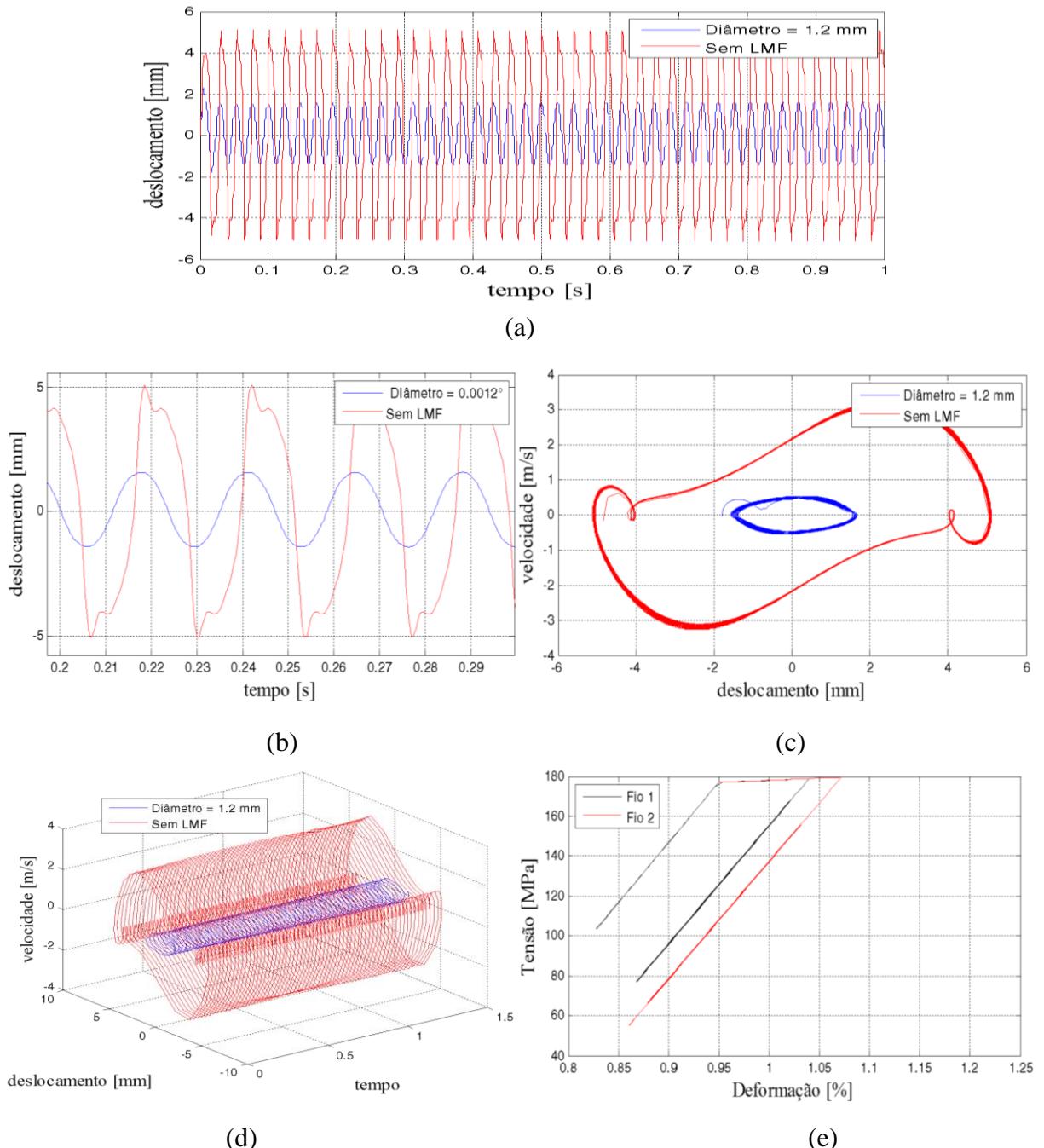
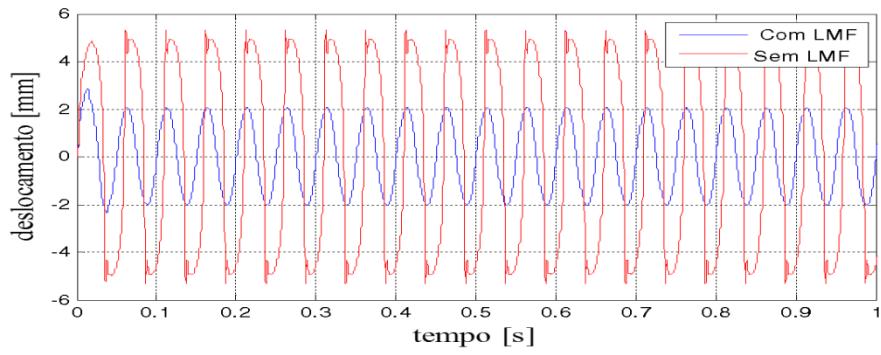


Figura 4.8. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 80$ N, $f = 42.57$ Hz e diâmetro de 0.0012m; (b) resposta no intervalo de 0.1 a 0.2 s; (c) diagrama de fase; (d) curva integral; (e) diagrama tensão-deformação.

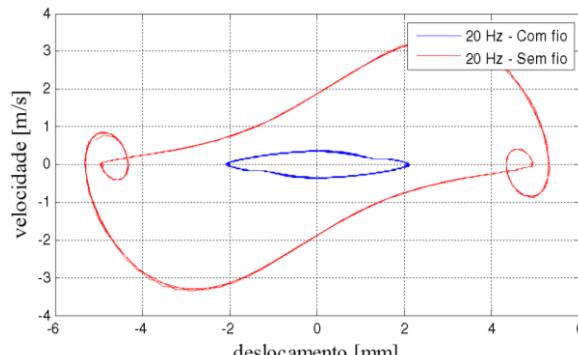
4.1.4. Variação da frequência de excitação

Outro parâmetro importante a ser analisando é a frequência da excitação externa, uma vez que influi significativamente na resposta dinâmica dos fios de LMF e da placa fina em grandes deslocamentos. Neste contexto, serão investigados os seguintes valores para a frequência da excitação dinâmica: 20, 50 e 100 Hz.

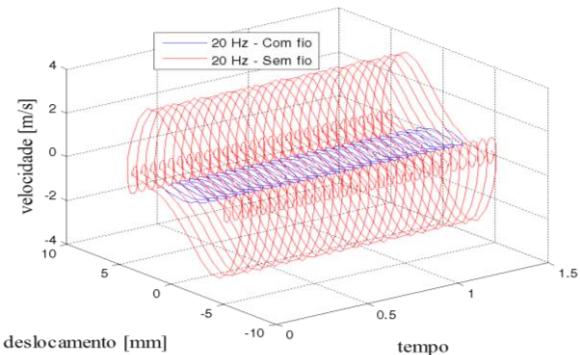
Para a amplitude da força de 80N (condição que leva a respostas não-lineares) e os parâmetros dos fios conforme apresentado na Tab. 4.2., nota-se pela análise da Fig. 4.10b que a frequência de 20 Hz leva ao surgimento de subharmônicos. No entanto, para a condição em que são aplicados os fios, a resposta é mais estável se comparado com os resultados ilustrados na Fig. 4.4b. Percebe-se ainda uma menor deformação dos fios e um número menor de ciclos incompletos conforme mostrados na Fig. 4.9c.



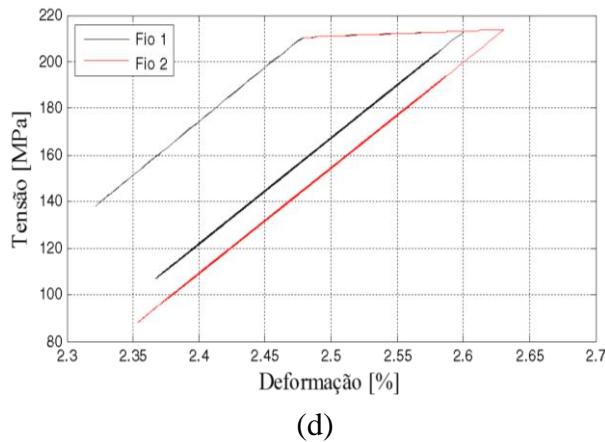
(a)



(b)



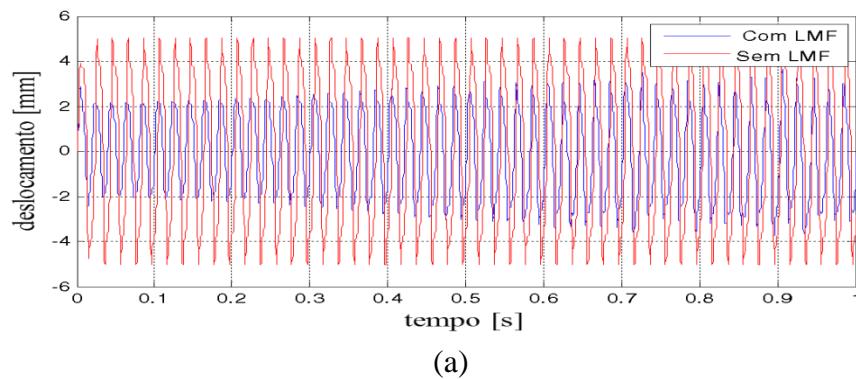
(c)



(d)

Figura 4.9. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 80$ N, $f = 20$ Hz; (b); diagrama de fase; (c) curva integral; (d) diagrama tensão-deformação.

Mesmo para valores maiores da frequência, 50 Hz, nota-se ainda uma redução das amplitudes dos deslocamentos da placa fina de 0 a 0.4 s. A partir deste intervalo até o instante estudado houve um pequeno aumento na amplitude. No entanto, os fios continuam a ser acionados e a deformação chega à ordem de 2.7% e há uma grande quantidade de ciclos incompletos. Comportamento semelhante é visto nas respostas obtidas para uma frequência de 100 Hz (ver Fig. 4.11). Assim como na resposta obtida para 50 Hz, o sistema é estável até aproximadamente 0.3 s e então começa a haver um aumento nas amplitudes de vibração. Os fios de LMF continuam a ser solicitados como ilustrado na Fig. 4.11c.



(a)

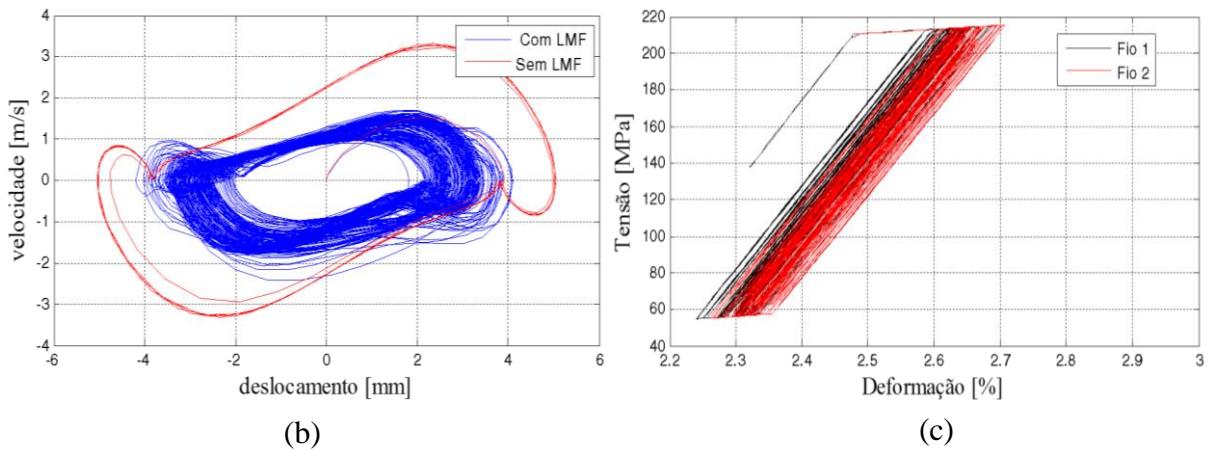


Figura 4.10. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 50 \text{ Hz}$; (b); diagrama de fase; (c) diagrama tensão-deformação.

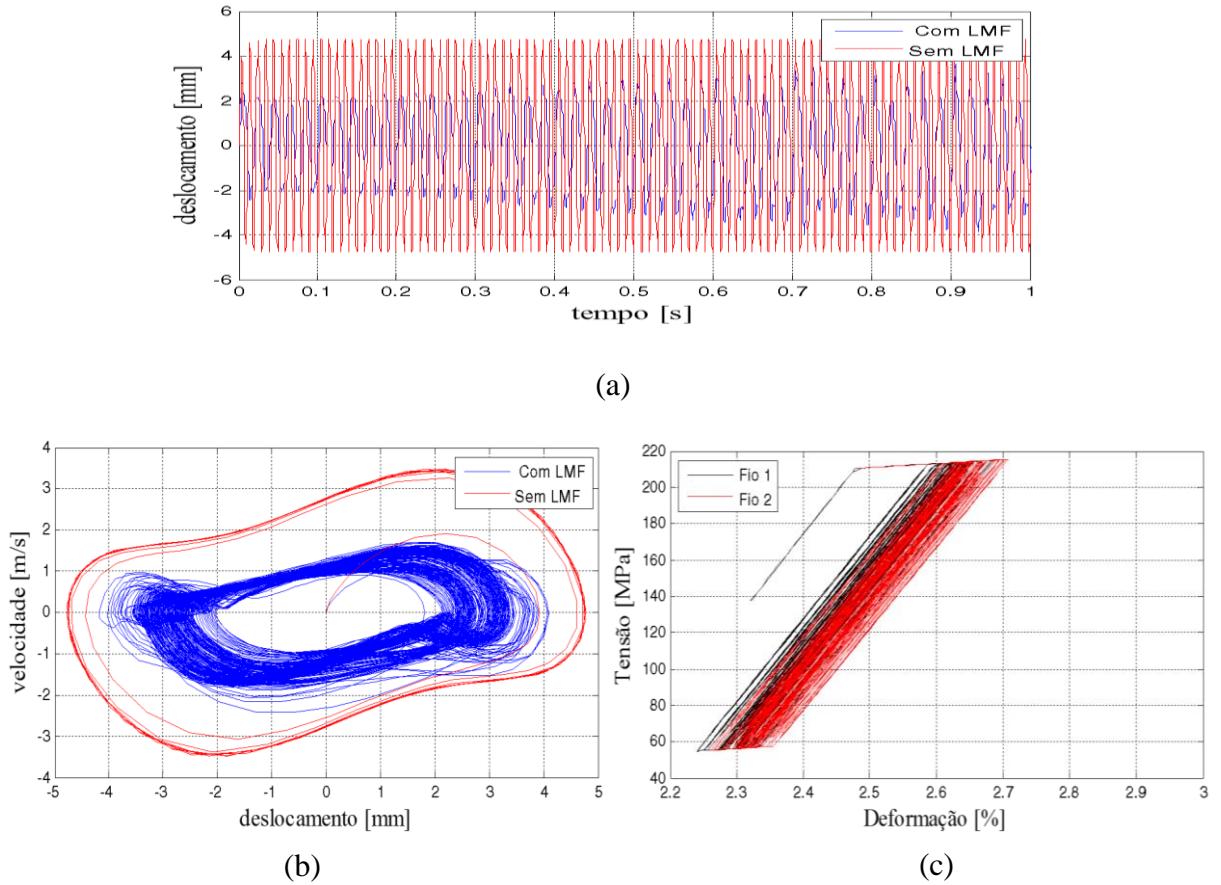


Figura 4.11. (a) Respostas do sistema para $F_0 = 80 \text{ N}$, $f = 100 \text{ Hz}$; (b); diagrama de fase; (c) diagrama tensão-deformação.

4.1.5. Aplicação de diferentes tipos de excitação dinâmica

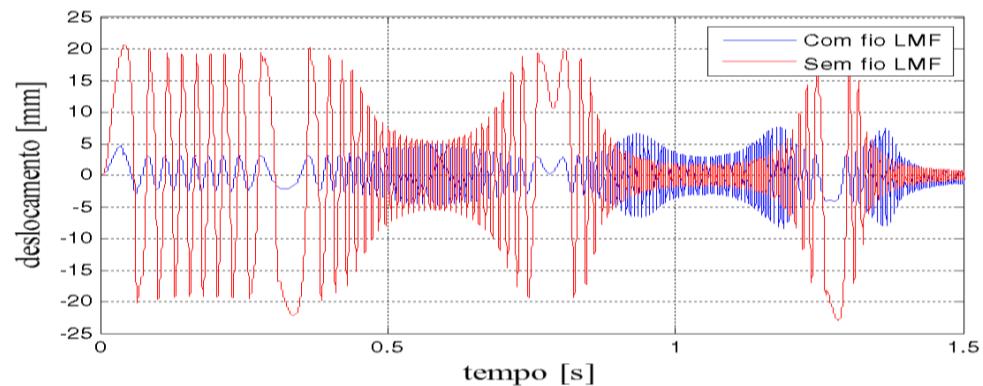
Os sistemas de engenharia podem estar submetidos a diferentes tipos de excitação externa dependendo das condições de operação. Neste sentido, nesta subseção é investigada a

resposta dinâmica da placa fina em grandes deslocamentos contendo fios de LMF para uma excitação do tipo senoidal com uma varredura em frequência.

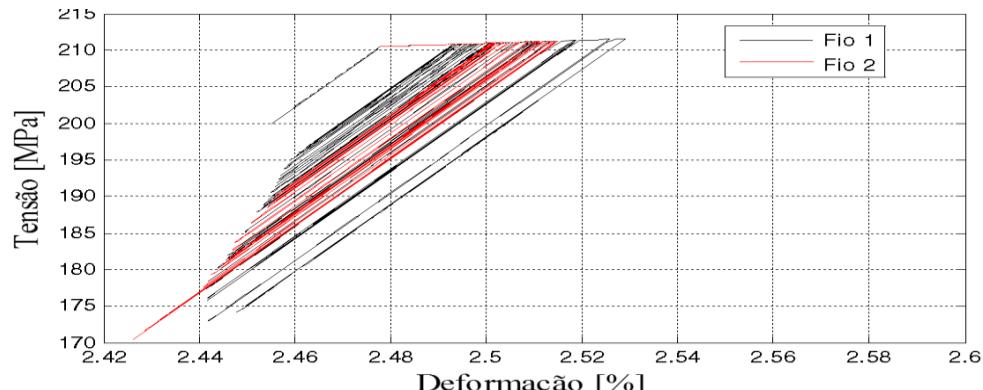
A força de frequência variável utilizada é expressa pela eq. (4.1):

$$F = 10 \operatorname{sen}(2\pi 30 \operatorname{sen}(2\pi t)t) \quad (4.1)$$

A Fig. 4.12a ilustra as respostas do sistema a uma excitação do tipo seno variável sem a aplicação dos fios LMF e com a utilização dos mesmos. Analisando as mesmas, nota-se que mesmo para este tipo de carregamento é observado uma dissipação de energia pelos fios de LMF e consequente redução das amplitudes de vibração do sistema.



(a)



(b)

Figura 4.12. (a) Resposta do sistema a uma excitação do tipo seno em varredura;
 (b) Diagrama de tensão-deformação

CAPÍTULO V

Conclusões Gerais e Sugestões de Trabalhos Futuros

Resumo e avaliação

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre a viabilidade do emprego do comportamento pseudoelástico presente nas ligas com memória de forma para o controle passivo das vibrações não-lineares de sistemas estruturais do tipo placa fina em grandes deslocamentos. Neste contexto, na modelagem da placa fina em grandes deslocamentos foi levado em consideração o acoplamento entre os efeitos de flexão e membrana do sistema diferentemente do caso linear onde esses efeitos são negligenciados. Isto leva à não-linearidades geométricas em grandes deslocamentos para placas finas e moderadamente finas.

No que diz respeito à modelagem das ligas com memória de forma para atenuar as vibrações não-lineares da placa fina em grandes deslocamentos quando sujeitas a excitações dinâmicas, a mesma foi feita via emprego das LMFs aplicadas sob a forma de fios discretos unidirecionais usando o modelo simplificado proposto por inicialmente por Lagoudas et. al. (2001) que admite que as relações entre tensão e deformação variam linearmente nas regiões de transformação de fase das LMFs.

Após desenvolver a formulação variacional correspondente à placa e a modelagem dos fios, as equações do movimento da placa fina em grandes deslocamentos contendo fios discretos de LMF foram resolvidas através do emprego do Método de Newmark juntamente com o método de Newton-Raphson.

Os resultados das inúmeras simulações numéricas realizadas demonstraram que:

1^a) à medida que a amplitude de excitação aumenta o efeito das não-linearidades geométricas se tornam mais evidentes tanto para o sistema sem qualquer tipo de amortecimento quanto para a placa amortecida pseudoelásticamente. Contudo, em todas as situações investigadas, os fios de LMF mostraram ser eficientes quanto à redução das amplitudes dos deslocamentos da placa fina, inclusive para os casos em que as não-linearidades se apresentam de forma acentuada em função do aumento da amplitude do esforço externo, conforme observado pela presença de subharmônicos e, consequentemente, distorções harmônicas na resposta temporal do sistema. Além disso, notou-se que quanto maior as deformações induzidas nos fios discretos de LMF, maior a sua capacidade de dissipação conforme demonstrado pela formação de ciclos de histerese completos e incompletos.

2^a) nos casos em que amplitude da força aplicada não leva ao surgimento de respostas não-lineares, os fios são menos solicitados, mas ainda assim são capazes de atenuar as amplitudes da resposta no tempo.

3^a) a frequência da excitação externa influencia significativamente no surgimento de respostas não-lineares da placa fina em grandes deslocamentos. No que diz respeito ao sistema não-linear sem qualquer amortecimento, as não-linearidades diminuem à medida que a frequência aumenta. E com a utilização das Ligas com Memória de Form, apesar da redução da amplitude, notou-se uma instabilidade nas respostas obtidas.

4^a) com relação à alteração dos parâmetros geométricos dos fios de LMF, pode-se concluir que: (a) mesmo variando o ângulo de posição dos fios de LMF, ainda assim eles dissipam energia do sistema vibratório. Isso significa que os fios de LMF podem ser utilizados em aplicações unidireccionais como fibras em placas compósitas por exemplo com o intuito de aumentar o amortecimento de tais sistemas e aumentar sua vida em fadiga induzida por vibrações; (b) um pequeno aumento no diâmetro dos fios de LMF resultou em uma diminuição da amplitude das vibrações não-lineares quando comparado com o sistema sem utilização de fios e se comparado com o valor utilizado como sendo nominal;

Por fim, pode-se concluir que o efeito pseudoelástico presente nas Ligas com Memória de Forma pode ser utilizado como uma boa alternativa para a redução das amplitudes de vibração de sistemas dinâmicos não-lineares sujeitos a excitações dinâmicas devido a sua grande capacidade de dissipação de energia.

Sugestões para trabalhos futuros

O presente trabalho de dissertação viabilizou o surgimento de algumas perspectivas dentre as quais podem ser citadas as seguintes:

1^a) Utilização de técnicas de redução de modelo, visando reduzir o esforço computacional empregado na resolução das equações do movimento do sistema não-linear acoplado a ligas com memória de forma;

2^a) obtenção das Respostas em Frequência do sistema não-linear com e sem aplicação de fios de LMF. Para tanto, pode-se empregar o método da média ou de perturbação para a resolução dos sistemas no domínio da frequência;

3^a) emprego de técnicas de otimização da estrutura acoplada aos fios de LMF com a presença de incertezas paramétricas com vistas à obtenção de um projeto robusto do sistema não-linear amortecido pseudoelasticamente;

4^a) inclusão do efeito do autoaquecimento na modelagem do efeito pseudoelástico dos fios de LMF, uma vez que o modelo adotado considera que os fios estão sempre em condições isotérmicas em temperaturas igual ou superior à temperatura final da austenita.

5^a) Aprimoramento da modelagem do efeito pseudoelástico estudado, incluindo componentes não-lineares.

6^a) Realização de planejamento experimental visando comparar os resultados obtidos pela modelagem numérica com o resultado experimental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATHE,K.J., **Finite Element Procedures**. 1. ed. 1996. 1037p.

BAZ, A., IMAM, K., McCoy, J., Active Vibration Control of Flexible Beams Using Shape Memory Actuators. *Journal of Sound and Vibration*. v. 140, p. 437-456, 1990.

BO, Z. e LAGOUDAS, D. C. Thermomechanical Modeling of Polycrystalline SMAs Under Cyclic Loading, Part I-IV : Modeling of Minor Hysteresis Loops. **International Journal of Engineering Science**, v. 37, p. 1205–1249, jul. 1999

BORGES,R.A. **Contribuição ao Estudo dos Absorvedores de Vibração Não-Lineares**. 2008. 154 f. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia

BRINSON, L. C. One-dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermodynamical Derivation with Non-constant Material Functions. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. v. 4, p. 229-242, 1993.

CORBI, O., Shape Memory Alloys and Their Application in Structural Oscillations Attenuation. **Simulation Modelling: Practice and Theory**. v. 11, p. 387-402, 2003

DE LIMA, A.M.G., BOUHADDI, N., RADE, D.A., BELONSI., M.H., A Time-domain Finite Elemet Model Reduction Method for Viscoelastic Linear and Non-linear Systems. **Latin American Journal of Solids and Structures**. v. 1, p.1, 2015.

GERGES, Y., **Méthodes de Réduction de Modèles em Vibroacoustique Non-linéaire**. 2013. 162 f. Tese de Doutorado - Université de Franche – Comté.

GHANDI,F., CHAPUIS, G., Passive Damping Augmentation of Vibrating Beam Using Pseudoelastic Shape Memory Alloy Wires. **Journal of Sound and Vibration**. v. 250, p. 519-539, 2002.

GUARALDO-NETO, B. **Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas Dinâmicos Combinando Materiais Viscoelásticos e Materiais com Memória de Forma para o Controle Passivo de Vibrações e Ruídos**. 2012. 95f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia

KOÇER, B. **Vibration Fatigue Analysis of Structures under Broadband Excitation**. Master of Science in Mechanical Engineering Department, Middle East Technical University, 2010.

LAGOUDAS, D.C., **Shape Memory Alloys: Modelling and Engineering Applications**. Ed. Springer. 2008.

LAGOUDAS, D. C.; BO, Z.; QIDWAI, M. A. A Unified Thermodynamic Constitutive Model for SMA and Finite Element Analysis of Active Metal Matrix Composites **Mechanics of Composite Materials and Structures**. v. 3, p. 153-179, 1996

LAGOUDAS, D.C., MAYES, J.J., KHAN, M.M., Simplified Shape Memory Alloy (SMA) Material Model for Vibration Isolation. **Smart Structures and Material: Modeling, Signal Processing, and Control in Smart Structures**. Proceedings SPIE, v. 4326, n. 452, mar. 2001

LIANG, C.; ROGERS, C. One Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 1, p. 207- 234, abr. 1990.

LOGAN,D.L. **A First Course in Finite Element Method**. 4^aEd. Ed. Thomson.2007

LIU,G.R., QUEK, S.S. **The Finite Element Method: A practical course**. Butterworth-Heinemann.2003

MACHADO, L.G.; SAVI, M., Medical Applications of Shape Memory Alloys. **Brazilian Journal of Medical and Biological Research**. v. 36, p. 683-691, 2003.

MEAD, D.J., **Passive Vibration Control**. Ed. Wiley. 1988.

NAGAYA, K., TAKEDA, S., TSUKUI, Y., KUMAIDO, T., Active Control Method for Passing Trough Critical Speeds of Rotating Shafts by Changing Stiffness of the Supports with Use of Memory Metals. **Journal of Sound and Vibration**. v. 113, p. 307-115, 1987.

OLIVEIRA, B.A., **Desenvolvimento de um isolador pseudoelástico**.2008. 81f. Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília.

PAIVA, A., SAVI, M. A., An Overview of Constitutive Models for Shape Memory Alloys. **Mathematical Problems in Engineering**. v. 2006, p.1-30, out.2005.

PREUMONT,A. **Vibration Control of Active Structures: An Introduction**. 2^a Ed. Kluwer Academic Publishers, 2004.

PREUMONT, A. SETO, K., **Active Control of Structures**. Ed.Wiley, 2008

SALICHES, J., HOU, Z., NOORI, M., Vibration Suppression of Structures Using Passive Shape Memory Alloy Energy Dissipation Devices. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. v. 12, p. 671-680, out. 2001.

SATO, Y.; TANAKA, K. Estimation of energy dissipation in alloys due to stress-induced martensitic transformation. **Res Mechanica**. v. 23, 381-393, 1986.

SAVI,M.A., **Dinâmica Não-Linear e Caos**; Ed. E-papers, 2006

SAVI, M.A., PAULA, A.S., LAGOUDAS, D.C., Numerical Investigation of an Adaptative Vibration Absorber Using Shape Memory Alloys. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. v. 22, p. 67-80, 2011.

TANAKA, K. A Thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One-dimensional Tensile Behavior. **Res Mechanica**, v. 2, p. 59-72, 1986.

THOMSON, P., BALAS, G.J., LEO, P.H. The Use of Shape Memory Alloys for Passive Structural Damping. **Smart Material and Structure**. v.4, p. 36-42, 1995

THOMPSON, J.M.T., STEWART, H.B., **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Ed.Wiley, 1986.

WILLIAMS, K., CHIU, G.T.C., BERNHARD, R., Adaptative-Passive Absorbers Using Shape Memory Alloys. **Journal of Sound and Vibration**. v. 288, p.1131-1155, 2002.

WORDEN, K., TOMLISON.G.R, **Nonlinearity in Structural Dynamics: detection, identification and modelling.** IOP Publishing Ltd, 2001.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., 2000 **The Finite Element Method: Solid Mechanics,** Volume 2. 5. Ed. Butterworth-Heinemann.

ANEXO A

A.1 Polinômios interpoladores e funções de forma

A partir da seção 2.3 são citadas as funções de forma que são utilizadas para interpolar os deslocamentos e, a partir de suas derivadas, as deformações de flexão, membrana e acoplamento da placa.

Para a escolha do polinômio interpolador, primeiramente deve-se escolher o tipo de elemento utilizado. Neste trabalho, foi utilizado o elemento retangular com cinco graus de liberdade em cada nó $X(t) = [U \ V \ W \ \theta_x \ \theta_y]^T$. Os graus de liberdade U e V se referem aos deslocamentos nodais no plano da placa e W, θ_x e θ_y são os graus de liberdade relativos aos deslocamentos transversais.

Como mostrado na eq. (2.11), assume-se que os deslocamentos dentro do elemento podem ser interpolados utilizando-se funções de forma e deslocamentos nodais. Visando obter as funções de forma que interpolam os deslocamentos Um e V_n . ($n = i, j, k$ e l) são utilizados os seguintes polinômios de primeiro grau:

$$U = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad -1 \leq x \leq 1; \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (\text{A1})$$

$$V = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad -1 \leq x \leq 1; \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (\text{A2})$$

Que podem ser escritos matricialmente como:

$$U(x, y) = [1 \ x \ y \ xy] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad U(x, y) = [P(x, y)] \{C\} \quad (\text{A3})$$

Avaliando os polinômios nos quatro nós do elemento e fornecendo os valores dos deslocamentos, são obtidos os valores das constantes C. Como mostrado em (A4) e (A5)

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ U_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{U\} = [A]\{C\} \quad (\text{A4})$$

$$\{C\} = [A]^{-1} \{U\} \quad (\text{A5})$$

Associando (A5) e (A3), os deslocamentos são obtidos como mostrado pela seguinte expressão:

$$U(x, y) = [N(x, y)]\{U\} \quad (\text{A6})$$

Onde:

$$N(x, y) = [P(x, y)][A]^{-1} \quad (\text{A7})$$

A matriz dada em (A7) é a chamada matriz de funções de forma ou funções de interpolação. O mesmo procedimento pode ser adotado para a obtenção das funções de forma que interpolam o campo de deslocamento V.

As funções de forma que interpolam os deslocamentos no plano da placa são dadas pelas equações (A9) a (A12).

$$\mathbf{N} = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l]^T \quad (\text{A8})$$

Onde:

$$N_i = \frac{(x-1)(y-1)}{4} \quad (\text{A9})$$

$$N_j = -\frac{(x+1)(y-1)}{4} \quad (\text{A10})$$

$$N_k = \frac{(x+1)(y+1)}{4} \quad (\text{A11})$$

$$N_l = -\frac{(x-1)(y+1)}{4} \quad (\text{A12})$$

Para a aproximação dos deslocamentos transversais, adota-se o seguinte polinômio:

$$W(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}xy^3, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (\text{A13})$$

As rotações θ_x e θ_y são dependentes do deslocamento transversal. E, estão a W pelas seguintes derivadas:

$$\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \theta_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad (\text{A14})$$

O procedimento utilizado para a obtenção das funções de interpolação dos deslocamentos no plano da placa pode ser utilizado para os deslocamentos transversais. As funções obtidas são dadas como mostrado a seguir:

$$\mathbf{N}^w = \begin{bmatrix} N_i^w & N_j^w & N_k^w & N_l^w \end{bmatrix}^T \quad (\text{A15})$$

Onde:

$$N_i^w = -\frac{(x-1)(y-1)(x^2 + x + y^2 + y - 2)}{8} \quad (\text{A16})$$

$$N_j^w = \frac{(x+1)(y-1)(x^2 - x + y^2 + y - 2)}{8} \quad (\text{A17})$$

$$N_k^w = \frac{(x+1)(y+1)(-x^2 + x - y^2 + y + 2)}{8} \quad (\text{A18})$$

$$N_l^w = \frac{(x-1)(y+1)(x^2 + x + y^2 - y - 2)}{8} \quad (\text{A19})$$

- **Funções de forma para interpolação das rotações em torno do eixo x (θ_x):**

$$\mathbf{N}^{\theta_x} = \begin{bmatrix} N_i^{\theta_x} & N_j^{\theta_x} & N_k^{\theta_x} & N_l^{\theta_x} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A20})$$

$$N_i^{\theta_x} = -\frac{(x-1)(y-1)^2(y+1)}{8} \quad (\text{A21})$$

$$N_j^{\theta_x} = \frac{(x+1)(y-1)^2(y+1)}{8} \quad (\text{A22})$$

$$N_k^{\theta_x} = \frac{(x-1)(y-1)(y+1)^2}{8} \quad (\text{A23})$$

$$N_l^{\theta_x} = -\frac{(x-1)(y-1)(y+1)^2}{8} \quad (\text{A24})$$

- **Funções de forma para interpolação das rotações em torno do eixo y (θ_y):**

$$\mathbf{N}^{\theta_y} = \begin{bmatrix} N_i^{\theta_y} & N_j^{\theta_y} & N_k^{\theta_y} & N_l^{\theta_y} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A25})$$

$$N_i^{\theta_y} = \frac{(x-1)^2(x+1)(y-1)}{8} \quad (\text{A26})$$

$$N_j^{\theta_y} = \frac{(x-1)(x+1)^2(y-1)}{8} \quad (\text{A27})$$

$$N_k^{\theta_y} = -\frac{(x-1)(x+1)^2(y+1)}{8} \quad (\text{A28})$$

$$N_l^{\theta_y} = -\frac{(x-1)^2(x+1)(y+1)}{8} \quad (\text{A29})$$