

SIDNEY RIBEIRO DA SILVEIRA

CONDUÇÃO DE CALOR ENVOLVENDO FONTE
MÓVEL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2015

SIDNEY RIBEIRO DA SILVEIRA

CONDUÇÃO DE CALOR ENVOLVENDO FONTE
MÓVEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

Uberlândia
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

S587c Silveira, Sidney Ribeiro da, 1984-
2015 Condução de calor envolvendo fonte móvel / Sidney Ribeiro da
 Silveira. - 2015.
 93 f. : il.

 Orientador: Gilmar Guimarães.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Inclui bibliografia.

 1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Condução - Teses. 3.
Problemas inversos (Equações diferenciais) - Teses. 4. Green, Funções
de - Teses. I. Guimarães, Gilmar. II. Universidade Federal de
Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III.
Título.

CDU: 621

À Gabriela, família e amigos.

Agradecimentos

À Gabriela, pelas boas ideias e companherismo.

À minha família, pela dedicação e incentivo.

Aos amigos do LTCM: Gabriela, Ana Paula, Fernando, Fábio, Alisson, Luis. Pelas boas ideias durante a concepção desta pesquisa.

Aos amigos da FEMEC: professores, técnicos-administrativos, LPM e agregados.

Ao Gilmar pela Orientação deste trabalho.

E às agências financiadoras CAPES e CNPq.

Ribeiro, S. S. **Condução de Calor Envolvendo Fonte Móvel**. 2015. 93f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Problemas envolvendo condução de calor podem ser observados em diversos aspectos e nas mais variadas formas, pode-se citar: O aquecimento de uma chapa em um processo de soldagem ou a condução de calor proveniente de um processo de furação ou corte. Assim, pretende-se, usando ferramentas de análise matemática e conceitos de engenharia e física estabelecer este comportamento térmico, através do cálculo de soluções analíticas 1D, 2D e 3D variando-se condições de contorno e aplicá-la a um processo de soldagem. A obtenção de soluções analíticas para este tipo de problema requerem procedimentos mais elaborados aos que são utilizados para problemas fixos, devido aos termos adicionais que surgem na equação governante. E desse modo, pretende-se contribuir com a literatura neste aspecto. O método proposto para resolver as equações diferenciais parciais será o método de funções de Green. É também objetivo deste trabalho desenvolver a verificação das soluções obtidas analiticamente, fazer comparações às soluções obtidas numericamente e aplicação a problemas inversos. Nesse caso, propõe-se a aplicação e o desenvolvimento da técnica TFBGF (*transfer function based Green's functions*) para estimativa de aporte térmico. O uso de solução analítica mostrou-se, após calculada e verificada, uma ferramenta robusta, de fácil implementação, e de baixo custo computacional quando aplicada a problemas diretos ou inversos em condução de calor por fontes móveis.

Palavras-chave: funções de Green, solução analítica, problema inverso, condução de calor

Ribeiro, S. S. **Heat Conduction Involving Moving Source**. 2015. 93p. Master's Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Problems involving heat conduction can be observed in many ways and in various forms, we can be mentioned: heating a slab in a welding process or heat conduction from a process of drilling or cutting. Thus, it is intended, using mathematical analysis tools and engineering concepts and physical establish this thermal behavior, by calculating 1D, 2D and 3D transient analytical solutions varying boundary conditions and apply it to a welding process. Obtaining analytical solutions to this problem require more elaborate procedures to those used for fixed problems because of the additional terms that arise in the governing equation. And so, we intend to contribute to the literature in this regard. The proposed method for solving partial differential equations will be the Green's functions method. It is also objective of this work to develop the verification of the solutions obtained analytically, making comparisons to the solutions obtained numerically and application in inverse problems. In this case, it is proposed to application and development of the TFBGF technique for heat source estimate. The use of analytical solution showed up after calculated and checks, a robust tool, easy to implement, and low computational cost when applied to direct or inverse problems of heat conduction by moving sources.

Keywords: Green's function, analytical solution, inverse problem, heat conduction

Lista de Figuras

3.1	Problema X11.	20
3.2	Problema X11Y11	25
3.3	Problema X11Y11Z11	27
3.4	Problema X11Y11Z11	30
4.1	Solução problema X11.	39
4.2	Fonte móvel de calor a uma velocidade $v = 0,001m/s$	40
4.3	Solução problema X13.	41
4.4	Gráfico do problema X13 com $v = 0,0005m/s$ na variável x	42
4.5	Solução problema X11Y11.	43
4.6	Solução problema X11Y11.	44
4.7	Solução problema X11Y11y11.	46
4.8	Solução problema X11Y11y11.	47
4.9	Comparativo entre a solução X10 e X11, $v = 0,0001m/s$, $t = 30s$	49
4.10	Diferença entre as soluções X10 e X11, $v = 0,0001m/s$, $t = 30s$	49
4.11	Aproximação da solução X11 sobre X10.	51
4.12	Aproximação da solução X11 sobre X10.	52
4.13	Comparativo entre a solução X10 e X13, $v = 0,0001m/s$, $t = 30s$	53
4.14	Diferenças absoluta e relativa entre as soluções X10 e X13.	54
4.15	Esquema para utilização do método.	55
4.16	Comparativo entre as soluções X11 e X11Y11.	56
4.17	Esquema metodológico para comparação.	57
4.18	Comparativo entre as soluções X11 e X11Y11Z11.	58
4.19	Esquema de comparação para o problema tridimensional.	59
4.20	Comportamento térmico das soluções X13 e X11Y11Z13 para $v = 0,0001m/s$ e $t = 30s$	60
4.21	Diferenças absoluta e relativa entre as soluções X13 e X11Y11Z13.	61
4.22	Comparação entre as soluções analítica e numérica para o problema X11.	63
4.23	Perfil de temperatura entre as soluções.	64
4.24	Diferença absoluta entre as soluções.	65
4.25	Comportamento térmico das soluções X11Y11 analítica e numérica para $v = 0,0001m/s$ e $t = 30s$	66
4.26	Comportamento térmico das soluções X11Y11Z11 analítica e numérica para $v = 0,0001m/s$ e $t = 30s$	67
5.1	Problema de soldagem	69

5.2	Problema de soldagem e pontos para cálculo de temperatura	71
5.3	Perfil de temperatura nos pontos descritos pela Tab.5.1.	72
5.4	Temperatura nos pontos ao longo do eixo $y = 0,02m$	72
5.5	Temperatura nos pontos ao longo do eixo $y = 0,07m$	73
5.6	Esquema que ilustra a operação descrita pela Eq.5.9	75
5.7	Ponto onde será realizada estimativa	78
5.8	Temperaturas para o ponto T24	78
5.9	Comportamento da resposta impulsiva	79
5.10	Comportamento da resposta impulsiva	80
5.11	Valores estimados para o termo de geração.	81
5.12	Comparativo entre estimativas.	82
5.13	Diferença absoluta entre as estimativas.	83
5.14	Temperaturas oriundas da geração simulada e estimada.	84
5.15	Diferença relativa entre temperaturas.	85
5.16	Ruído.	86
5.17	Temperatura adicionada de ruídos.	87
5.18	Estimativa de geração de calor.	88
5.19	Temperaturas oriundas da geração simulada e estimada.	89
5.20	Diferença relativa entre temperaturas.	89

Lista de Tabelas

3.1	Tipos e numeração das Condições de Contorno.	16
5.1	Posicionamento dos pontos de cálculo de temperatura.	71

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	4
2.1	Introdução	4
2.2	Condução de Calor por Fontes Móveis	4
3	Fundamentação Teórica	11
3.1	Introdução	11
3.2	Solução Geral 1D transiente	11
3.2.1	O Método de Funções de Green (FG)	14
3.3	Modelo Térmico 1D Transiente	18
3.3.1	Problema Térmico X11	19
3.4	Problema Térmico X13	22
3.5	Problema Térmico X11Y11	23
3.6	Problema Térmico X11Y11Z11	27
3.7	Problema Térmico X11Y11Z11 se movendo pelos 3 eixos (x,y,z)	30
3.8	Problema Térmico X11Y11Z13	33
4	Autovalores, Representação Gráfica, Verificação e Comparações	36
4.1	Autovalores	36
4.2	Representação Gráfica dos problemas X11, X13, X11Y11 e X11Y11Z11	38
4.2.1	Representação Gráfica do Problema X11	38
4.2.2	Representação Gráfica do Problema X13	40
4.2.3	Representação Gráfica X11Y11	42
4.2.4	Representação Gráfica X11Y11Z11	45
4.3	Verificação	48
4.3.1	Verificação, Problema Térmico X11	48
4.3.2	Verificação X13	53
4.3.3	Verificação X11Y11	55
4.3.4	Verificação X11Y11Z11	57
4.3.5	Verificação X11Y11Z13	59
4.4	Comparação com Método Numérico	62
4.4.1	Problema Térmico X11	62
4.4.2	Problema Térmico X13	64

4.4.3	Problema Térmico X11Y11	65
4.4.4	Problema Térmico X11Y11Z11	66
5	Aplicação e Problema Inverso	68
5.1	Aplicação	68
5.2	Problema Direto	70
5.3	Problema Inverso	73
5.3.1	Função de Transferência	74
5.3.2	Estimativa de Geração de Calor	77
6	Conclusão	91
	Referências Bibliográficas	92

Capítulo 1

Introdução

Problemas envolvendo condução de calor podem ser observados em diversos aspectos e nas mais variadas formas, pode-se citar dentre os mais variados casos: O aquecimento de uma chapa em um tratamento térmico, a condução de calor proveniente de um processo de furação ou corte, comportamento térmico durante um processo de soldagem ou o a geração de calor devido a processos de metabolismo celular. Neste último caso, trata-se de condução de calor em tecidos biológicos.

Nos casos, acima citados, pode-se observar a relevância no estudo de tal fenômeno, pois, sua melhor compreensão pode levar ao emprego e criação de novas técnicas de aplicação e análise.

A condução de calor através de um sólido se dá por meio de agitação molecular, devido a uma excitação interna ou externa. Dessa forma o estudo se dá por meio de análises do comportamento térmico variando-se materiais, geometrias, e formas de excitação que podem ser por um fluxo de calor externo, convecção térmica ou uma geração interna de calor.

Assim, pretende-se, usando ferramentas de análise matemática e conceitos de engenharia e física estabelecer este comportamento, através do cálculo do campo de temperatura que apresentará um sólido aquecido ou em processo de aquecimento. Neste caso, dizemos que esta análise é feita de forma direta, isto é, conhece-se previamente todas as variáveis que envolvem o fenômeno, restando apenas realizar o cálculo do campo de temperatura.

Outra forma de análise que pode ser empregada ao estudo de condução de calor é definida como problema inverso. Neste caso não se conhece todas as variáveis que causaram a mudança de temperatura, apenas se conhece a variação de temperatura e características do material, e assim pretende-se estimar a causa do fenômeno.

Variadas são as abordagens que podem ser realizadas neste contexto, envolvendo problemas direto ou inverso: Métodos numéricos, de otimização, estatísticos, imagens térmicas, e

métodos matemáticos para cálculo de soluções analíticas.

As soluções analíticas em condução de calor apresentam-se como uma forte e robusta ferramenta para o cálculo de temperatura em um problema direto ou inverso. As soluções analíticas tem esta força devido ao fato de não dependerem de aproximações, estimativas, erros de arredondamento ou truncamento, pois são exatas, de fácil implementação e apresentam baixo custo computacional.

A obtenção de soluções analíticas para o problema tratado neste trabalho requer procedimentos mais elaborados aos que são utilizados para problemas fixos, devido aos termos adicionais que surgem na equação governante. O método proposto para resolver as equações diferenciais parciais que juntamente com as condições de contorno modelam o problema será o método de funções de Green.

Desta forma o objetivo deste trabalho é a investigação, desenvolvimento de soluções analíticas e análise matemática de problemas envolvendo condução de calor em corpos aquecidos por fontes móveis de calor, ou fontes fixas de calor aquecendo sólidos móveis. É também objetivo deste trabalho desenvolver a verificação das soluções obtidas analiticamente usando soluções de problemas de geometrias finitas ou semi-infinitas, a fim de garantir a confiabilidade e segurança das soluções calculadas.

Outro objetivo é o uso das soluções analíticas na aplicação à problemas inversos. Nesse caso, propõe-se a aplicação e o desenvolvimento da técnica TFBGF (*transfer function based Green's functions*). Pretende-se empregá-la a problemas de soldagem, para obtenção do aporte térmico durante o processo.

A importância das análises realizadas neste trabalho residem na melhor compreensão dos fenômenos de condução de calor por fontes móveis e geração de contribuições bibliográficas, visto que não existem muitos trabalhos publicados envolvendo soluções analíticas neste sentido.

Este trabalho apresenta-se estruturado da seguinte forma:

- No segundo capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica envolvendo os principais trabalhos que abordam de forma variada o problema de condução de calor em sólidos móveis.
- O terceiro capítulo apresenta a metodologia e análise do desenvolvimento do cálculo das soluções analíticas em problemas móveis variando-se condições de contorno e geometrias.
- No quarto capítulo apresenta-se as representações gráficas, verificações das soluções analíticas obtidas no terceiro capítulo e comparação das soluções analíticas com métodos

numéricos.

- O quinto capítulo apresenta a aplicação da solução 3D em um problema móvel de soldagem, abordagem de problema inverso com detalhamento e aplicação da técnica TFBGF. A conclusão deste trabalho é apresentada no sexto capítulo, juntamente com propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo uma revisão bibliográfica de trabalhos em condução de calor envolvendo fontes móveis com diversas abordagens: analítica, numérica, híbrida, inversa e conceito de verificação intrínseca. Utilizando diferentes combinações de condições de contornos, condições iniciais e sistemas de coordenadas são exemplificadas por variadas aplicações.

2.2 Condução de Calor por Fontes Móveis

Fourier (1822, p.354-365) em *Théorie Analytique de la Chaleur*, apresentou o primeiro texto publicado com a intenção de investigar o fenômeno de condução de calor em um sólido. A importância deste texto se dá pela introdução à interpretação e representação matemática do que o autor classificou como calor, através de análise de séries trigonométricas, que posteriormente foram batizadas de séries de Fourier em sua homenagem, dando início décadas depois ao ramo da matemática Análise de Fourier, tornando-se então o texto fonte padrão de pesquisas em condução de calor.

Rosenthal (1935) apresentou em seu texto o processo de obtenção de solução analítica em condução de calor envolvendo processos de soldagem e corte, onde o fluxo de calor envolvido no processo se move a uma velocidade constante na direção positiva de um dos eixos cartesianos. Rosenthal usou a hipótese para cálculo da equação diferencial de difusão como regime quase estacionário. As soluções são obtidas por meio de aproximações em séries utilizando diferentes tipos de geometrias e fontes de calor.

Um método rápido e inovador para o cálculo de condução e convecção em um sistema bifásico transiente de partículas em uma chama de alta temperatura ou corrente de plasma

foi proposto por H.E.Lee (1989). Em seu trabalho H.E.Lee (1989) propôs a solução para esse problema por um método numérico, que o autor considerou como rápido e inovador. O método consiste em simplificações da equação governante e condições de contorno do problema por funções denominadas pelo autor como *trial functions*, e então foram implementadas as equações para solução pelo método Runge-Kutta de quarta ordem e assim determinar os perfis de temperatura para estas condições.

Özişik (1993) apresentou em *Heat Conduction* várias ferramentas matemáticas para abordagem do problema de condução de calor, que são: Métodos numéricos e abordagem a problemas inversos, como estimativa de um fluxo de calor desconhecido. Dentre estas ferramentas, destaca-se o método que sugere mudanças de variáveis que serão utilizado neste trabalho, que se propõe resolver o problema em termos da movimentação do sólido sob uma geração pontual interna de calor.

Primeiramente Özişik (1993) abordou a interpretação clássica do problema onde o sólido se move a uma velocidade constante sob os eixos coordenados mediante uma geração interna pontual e fixa de calor, e então foram propostas mudanças de variáveis a fim de eliminar os termos referentes à velocidade da equação governante e levá-los para as condições de contorno. A solução do problema, entretanto não foi apresentada.

Outro método numérico para solução de temperatura em um problema bidimensional envolvendo fonte móvel em soldagem, foi apresentado por Nehad (1995). O autor apresentou em seu trabalho o detalhamento do procedimento de soldagem por *plasma arc welding* (PAW) do tipo AISI 304, onde foi modelado o fenômeno com mudança de fase e propriedades termofísicas variando com a temperatura. O método numérico usado para a realização das simulações foi o método de volumes finitos utilizando o método *up-wind* para os termos convectivos. Foi apresentada uma análise do comportamento térmico nesta situação usando variações de propriedades térmicas, espessura da região a ser soldada, velocidade e passo de tempo.

Wei *et al.* (1996) apresentou uma solução analítica para um problema de condução de calor através de um laser de alta potência fazendo um trabalho de soldagem sob um sólido se movendo através da coordenada X no sentido positivo do eixo. Wei *et al.* (1996) usou o método de separação de variáveis e um sistema de coordenadas cilíndricas para solução analítica do problema e também mostrou uma análise do comportamento térmico durante este processo sob uma cavidade idealizada como um parabolóide de revolução, sólido de dimensões infinitas para as coordenadas X,Y e semi-infinita para Z, fluxo de calor na forma de uma distribuição Gaussiana, condição de contorno de isolamento térmico na superfície Z e hipótese de processo quase estático. Foi quantificado as características de solidificação e

mostrado resultados para diferentes parâmetros de soldagem.

Outra análise semelhante foi mostrada por Solana e J.L.Ocana (1997) onde foi detalhado e contruído um modelo tridimensional quase estático de soldagem por um laser onde o sólido se movimentava a uma velocidade constante através do eixo X. O balanço energético levou em consideração os efeitos de evaporação e perda por ablação. O modelo apresentado ofereceu uma descrição completa do campo de temperatura, densidade eletrônica, o grau de ionização e absorção, coeficiente dentro do plasma, e a profundidade de penetração máxima para um determinado conjunto de parâmetros do laser, como a energia, o raio de focagem e oscilação. Solana e J.L.Ocana (1997) obtiveram em seu trabalho concordância com os resultados experimentais para uma ampla gama de potências de laser e espessuras de chapas.

Modelos matemáticos do processo de soldagem *Gas Metal Arc Welding* (GMAW) foram propostos por I.S.Kim e A.Basu (1998), que podem ser usados para prever parâmetros do processo de soldagem. Foi considerado um modelo de geometria bidimensional, simétrico e determinada geometria para o cordão de solda e velocidade de soldagem. O modelo matemático usado pelos autores leva em consideração quatro forças motrizes para a ferramenta de soldagem: eletromagnética, flutuabilidade, tensão superficial e forças de arrasto. As condições de contorno consideradas foram: Convecção térmica nas faces laterais radiação térmica na face oposta à exposta ao fluxo de calor, também foi considerado um fluxo de calor modelado como uma distribuição Gaussiana

O *software* PHOENICS foi usado por I.S.Kim e A.Basu (1998) para resolver as equações que descrevem o problema, com código baseado no algoritmo SAMPLE. Os resultados mostraram que as forças de tensão magnética e de superfície, e também as gotas de metal fundido apresentaram influência na formação da geometria do cordão de solda.

M.A.Wahab, M.J.Painter e M.H.Davies (1998) apresentaram em seu trabalho uma abordagem numérica baseada em elementos finitos para solução de um problema de soldagem considerando geometrias bidimensional e tridimensional. Os autores apresentaram como objetivo do trabalho a geração de novos conhecimentos e melhoramento dos métodos computacionais para cálculo térmico na região de solda e estimativas de profundidade de penetração da solda, geometria, banho de fusão, velocidade de resfriamento. Segundo os autores, a precisão dos tempos de refrigeração previstos, penetrações de solda e o comprimentos das poças de solda são comparados com os valores obtidos experimentalmente para soldas *bead-on-plate* e apresentou uma boa concordância com dos dados experimentais para uma gama de condições de soldagem

Nguyen *et al.* (1999) apresentaram em seu artigo o cálculo analítico para condução de calor em um processo de soldagem, onde a ferramenta de soldagem se move a uma velocidade

constante durante o processo. O problema foi considerado com geometria semi-infinita, fluxo de calor semi-elipsoidal com distribuição Gaussiana, e sem efeito de convecção térmica na superfície de soldagem. O método de solução usado por Nguyen *et al.* (1999) foi integrar o termo de fluxo de calor em uma região onde o ponto de fluxo de calor esta atuando em um certo intervalo de tempo, satisfazendo a equação governante do problema. A fim de comparar a solução obtida analiticamente com uma situação real, foi preparado um experimento para obtenção do comportamento térmico usando as mesmas hipóteses usadas no método analítico. Observou-se pelas comparações, que os resultados obtidos analiticamente foram satisfatórios.

Uma abordagem matemática sobre o uso do método de funções de Green foi dada por D.Cole e H.Y.Yen (2001) em seu trabalho. Os autores trouxeram uma abordagem matemática conceitual e de análise em variadas combinações de condições de contorno, sistema de numeração para funções de Green, normas, cálculo e análise de autovalores e autofunções além de trazer tabelados os autovalores e autofunções de diversos casos de combinações de condições de contorno, convergência de séries, abordagem sobre geração volumétrica interna de calor e, fluxo de calor.

Outra abordagem numérica foi usada por X.K.Zhu e Y.J.Chao (2002), a fim de realizar uma análise térmica e termo-mecânica tridimensional não linear usando o método numérico de elementos finitos para simular a soldagem em uma placa de alumínio. Os autores investigaram o efeito de cada propriedade do material, que depende da temperatura, simulando a soldagem de uma placa de alumínio usando três conjuntos de propriedades. Após detalhar o método de modelagem e discretização das equações governantes e condições de contorno, observaram que limite de elasticidade e o módulo de Young apresentam efeitos significativos depois da soldagem.

Dentre os métodos clássicos para solução de problemas em condução de calor envolvendo fontes móveis em procedimentos de soldagem, abordamos o trabalho de D.S.Nagesh e G.L.Datta (2002) que investigou a geometria do cordão de solda e sua penetração. Vários parâmetros afetam estas características, dentre eles os autores destacam: Taxa de alimentação no eletrodo, corrente, tensão e velocidade e também a condutividade térmica. Os autores usavam um método diferente ao abordado nos demais trabalhos citados. O uso de redes neurais artificiais para modelar o processo de soldagem a arco foi explorada neste trabalho. A rede neural, *back-propagation*, foi usada para associar as variáveis do processo de soldagem com as características da geometria do cordão e penetração. Essas redes apresentaram boa concordância com os dados de treinamento e produziram generalização satisfatória. Segundo os autores, uma rede neural pode ser eficazmente implementada para estimar o cordão de solda, penetração e parâmetros geométricos. Os resultados apresentados pelos autores

mostram uma pequena diferença percentual entre os valores estimados e experimentais.

A resposta de temperatura durante um processo de soldagem por fonte móvel, *tungsten gas arc*, foi proposta por W.Zhang *et al.* (2003) de forma numérica considerando um sólido de geometria tridimensional em coordenadas retangulares exposto a um fluxo de calor e convecção térmica em sua superfície, temperatura ambiente nas demais superfícies de soldagem e velocidade constante. O autor detalhou o procedimento para modelagem matemática do problema juntamente com as condições de contorno. Volumes finitos através de uma malha retangular foram usados. Após realizar todos os cálculos de discretização da equação governante e condições de contorno pelo método de volumes finitos e detalhar a implementação, W.Zhang *et al.* (2003) comparou seus dados obtidos experimentalmente, e concluiu o que a modelagem usada apresentou dados muito próximos aos reais.

Uma solução analítica para o problema da condução térmica transiente com o movimento do corpo sólido foi desenvolvido por Beck e McMasters (2004) para um paralelepípedo ortotrópico. Os autores propuseram uma análise matemática envolvendo transformações de variáveis para eliminar as condições de fluxo e a dependência ortotrópica. Usam-se dois tipos de funções de Green: uma proveniente do método de transformada Laplace e outro do método de separação de variáveis. O método de solução usado é poderoso porque incorpora verificação interna dos resultados numéricos através da variação do tempo de partição entre os componentes curtos e longos. Um exemplo foi dado para uma caso multi-dimensional que envolve ambas as condições de fluxo de calor e de contorno de temperatura prescritos.

Beck *et al.* (2006) apresentaram em seu trabalho uma abordagem sobre verificação intrínseca. Segundo os autores, a verificação de códigos numéricos que fornecem soluções em transferência de calor, obtidos por diversos métodos, é muito importante. Verificar estas soluções consiste em comparar seus valores com soluções exatas, mas também existem outras formas de verificação intrínseca que usam, pelo menos, duas soluções analíticas independentes exatas para obter valores numéricos precisos. Três tipos diferentes de verificação intrínseca para problemas transientes foram apresentados com abordagem matemática e exemplos de aplicações

J.Kidawa-Kukla (2008) apresentou o desenvolvimento de uma solução analítica para o problema de condução de calor em uma placa submetida a uma fonte de calor que está em movimento. A fonte de calor se move sob uma trajetória elíptica, sempre sob a placa. Uma solução exata para o problema de uma forma analítica foi obtida aplicando o modo de funções de Green. Exemplos de resultados de cálculos numéricos para determinar a distribuição da temperatura na placa foram apresentados.

Soluções analíticas em regime transiente com fluxo de calor em um dos contornos e multi-

dimensional é apresentada por Beck *et al.* (2010) em *Heat Conduction Using Green's Functions* que aborda o problema de um sólido móvel se movendo a uma velocidade constante sob o plano, aquecido por um fluxo de calor. Neste texto é proposto também pelo autor mudanças de variáveis para que o termo referente a movimentação do sólido seja levado para os contornos e possa aplicar o método de funções de Green para buscar soluções analíticas. O texto apresenta desenvolvimento teórico e exemplo de aplicação unidimensional sob um sólido se movendo com geometria semi-infinita.

O problema de condução de calor em um cilindro foi analisado por Chen (2010) em seu trabalho. Usando o sistema de coordenadas cilíndricas foi abordado um método de funções de Green híbrido. O método proposto combina a transformada de Laplace aplicada a função de Green do problema e o método numérico *e-algorithm* para acelerar a convergência das séries da solução. O autor apresentou seis exemplos divididos em unidimensional, bidimensional e tridimensional, onde se descreve o problema, a função de Green que caracteriza o problema, a solução pelo método proposto e gráficos ilustrando a solução obtida para alguns tempos e posições. Conclui-se que o método híbrido demonstrou sucesso na investigação deste tipo de problema, não apresentando oscilações numéricas.

Kim (2011) fez uma análise numérica de alguns problemas de condução de calor expostos a fontes móveis. Este tipo de problema, denominado parabólico, é observado em vários ramos de engenharia e segundo Kim (2011) e pode ser analisado com êxito usando o método numérico de elementos finitos implementando uma malha adaptativa para lidar com o problema onde a fonte de calor está em movimento. A técnica apresentada permite o uso de pequenos elementos em áreas de grandes taxas de variação de tempo e mudança de temperatura. Os autores mostram que um regime de malha adaptativa é eficaz na localização de oscilações devido a gradientes de continuidade agudas na solução, além do método superar em quase 3% o método tradicional de elementos finitos.

Mohammad *et al.* (2013) apresentou em seu texto uma análise da distribuição de temperatura aplicando os métodos que foram descritos por Beck *et al.* (2010) e Özışık (1993). Soldagem por fricção é definido pelos autores como um processo de soldagem relativamente moderno, que não só fornece as vantagens oferecidas por métodos de soldagem de fusão, mas também melhora as propriedades mecânicas. Os autores descreveu todo o processo de soldagem detalhadamente, é iniciado o procedimento de cálculo da solução analítica transiente baseada no método de funções de Green, considerando a ferramenta de soldagem como uma fonte de calor circular movendo-se em uma placa retangular finita com a superfície de refrigeração e as condições iniciais não uniformes e de fronteira não homogênea. A abordagem da solução pelo autor, é dada de forma completa é clara e finaliza comparando a solução obtida

com dados obtidos de análises numéricas utilizando as mesmas condições, os resultados foram considerados, pelos autores, satisfatórios.

Neste contexto este trabalho pretende contribuir apresetando soluções analíticas em condução de calor com fontes móveis, transientes e multi-dimensionais com variados tipos de condições de contorno, e uma análise matemática sobre o método de solução.

As soluções analíticas representam uma importante ferramenta para a solução de problemas de engenharia, uma vez que podem ser usadas para a validação de soluções aproximadas, facilitam a análise e o entendimento de problemas físicos Fernandes (2009), possibilitando fornecer informações precisas sobre o comportamento das distribuições de temperatura e fluxo de calor que podem ser difíceis de perceber a partir das soluções numéricas. Contudo existe uma grande dificuldade matemática na obtenção de soluções analíticas envolvendo interpretação e cálculo de um problema térmico, como sugere Fernandes (2009) “a complexidade de um modelo térmico, do ponto de vista de obtenção de soluções analíticas, normalmente encontra-se em problemas multidimensionais transientes submetidos a não homogeneidades como condições de contorno de fluxo prescrito, geração de calor ou condições de contorno como temperatura variando com o tempo.”

Assim, embora os procedimentos de funções de Green estejam estabelecidos na literatura, este trabalho pretende gerar contribuições abordando de forma analítica os problemas de condução de calor 1D, 2D e 3D transientes envolvendo uma fonte móvel. Será apresentado a metodologia de solução, a análise matemática que envolve as transformações nas equações governantes, condições de contorno e verificação das soluções.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

3.1 Introdução

Nesta seção apresenta-se uma abordagem metodológica de análise matemática e física envolvendo problemas de condução de calor aquecidos por fontes móveis. Inicialmente apresenta-se o procedimento para um problema unidimensional e em seguida serão abordados os problemas bi e tridimensionais. Em todos os casos as soluções analíticas foram obtidas usando o método de funções de Green.

3.2 Solução Geral 1D transiente

O fenômeno físico de condução de calor em um sólido móvel qualquer é descrito por:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (3.1)$$

onde v é a velocidade em que o sólido se movimenta pela direção negativa através do eixo coordenado x .

De forma geral, as condições de contorno de primeiro tipo podem ser dadas por:

$$T(0, t) = T_{x1}, \quad (3.2)$$

$$T(L, t) = T_{x2}, \quad (3.3)$$

já as condições de contorno de segundo e terceiro tipos são dadas por:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_{x1}[T_{\infty} - T(0, t)] + q_{x1}, \quad (3.4)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_{x2}[T(L, t) - T_{\infty}] - q_{x2}, \quad (3.5)$$

sujeito à uma condição inicial:

$$T(x, 0) = F(x). \quad (3.6)$$

Para aplicação do método de funções de Green sugere-se uma mudança de variável adequada para aplicar o método, isso devido ao termo:

$$\rho c_p v \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.7)$$

presente na Eq.(3.1)

Desta forma utilizando a relação, dada pela Eq.(3.8), definida por J.Tusek, J.Tomc e M.Radkovic (2002) como *Liouville transformation*:

$$\exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right), \quad (3.8)$$

teremos um novo problema, porém agora na variável W , assim a resposta de temperatura do problema será calculada fazendo:

$$T(x, t) = W(x, t) \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right). \quad (3.9)$$

Mas para realizarmos a mudança para a nova variável W primeiramente, a partir da Eq.(3.9) calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial x} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) + W \frac{v}{2\alpha} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{v}{2\alpha} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{v}{2\alpha} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) + W \frac{v^2}{4\alpha} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial W}{\partial t} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) - W \frac{v^2}{4\alpha} \exp \left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo na Eq.(3.1) teremos:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}\right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2\frac{\partial W}{\partial x} \frac{v}{2\alpha} + W \frac{v^2}{4\alpha}\right) = \\ \frac{1}{\alpha} \left\{ \exp\left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} - W \frac{v^2}{4\alpha}\right) + \right. \\ \left. v \left[\exp\left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{v}{2\alpha}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Após simplificações obtém-se:

$$k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (3.12)$$

que é o problema auxiliar na variável W . Note a ausência do termo dependente da velocidade na Eq. (3.12).

Assim, da mesma forma substitui-se as Eqs. (3.10) nas Eqs.(3.2 - 3.6) e obtém-se para as condições de contorno de primeiro tipo:

$$W(0, t) = T(0, t) \exp\left(\frac{v^2t}{4\alpha}\right), \quad (3.13)$$

$$W(L, t) = T(L, t) \exp\left(-\frac{vL}{2\alpha} + \frac{v^2t}{4\alpha}\right), \quad (3.14)$$

os contornos de segundo e terceiro tipo serão:

$$-k \left[\exp\left(\frac{-v^2t}{4\alpha}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{v}{2\alpha}\right) \right] \Big|_{x=0} + h_{x1} W \exp\left(\frac{-v^2t}{4\alpha}\right) = h_{x1} T_\infty + q_{x1} \quad (3.15)$$

simplificando:

$$-k \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} + W|_{x=0} \left(\frac{-kv}{2\alpha} + h_{x1}\right) = \exp\left(\frac{v^2t}{4\alpha}\right) (h_{x1} T_\infty + q_{x1}), \quad (3.16)$$

de forma análoga para o contorno em $x = L$:

$$k \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=L} + W|_{x=L} \left(\frac{kv}{2\alpha} + h_{x1}\right) = \exp\left(\frac{-v^2t}{4\alpha} + \frac{v^2t}{4\alpha}\right) (h_{x2} T_\infty + q_{x2}), \quad (3.17)$$

A condição inicial é também obtida da Eq. (3.10) e tem a forma:

$$W(x, 0) = F(x) \exp\left(-\frac{vx}{2\alpha}\right). \quad (3.18)$$

Nota-se que, condições de contorno de segundo tipo se transformam em condições de

contornos de terceiro tipo, enquanto contornos de primeiro e segundo tipos permanecem inalterados, isso ocorre devido aos termos:

$$W|_{x=0} \left(\frac{-kv}{2\alpha} + h_{x1} \right), \quad (3.19a)$$

$$W|_{x=L} \left(\frac{kv}{2\alpha} + h_{x1} \right), \quad (3.19b)$$

que são definidos como coeficiente de transferência de calor por convecção efetivo, segundo Beck *et al.* (2010).

Abordaremos a partir de agora o método de cálculo analítico através de funções de Green para o problema na variável auxiliar W

3.2.1 O Método de Funções de Green (FG)

O nome funções de Green é atribuído em homenagem ao matemático e físico inglês *George Green* (1773 - 1841) que em seus estudos desenvolveu um método poderoso para obtenção de soluções analíticas em problemas transientes, quase estáticos e lineares em condução de calor, (BECK *et al.*, 2010).

O método também pode ser aplicado a problemas de convecção ou vários outros que possam ser descritos pelo mesmo tipo de equação diferencial, e desta forma possui algumas vantagens em seu uso, como:

- Variação espacial e distribuição de temperatura inicial.
- Condições de contornos variando com o tempo e espaço.
- Termo de geração de energia variando com o espaço.

Sem perda de generalidade considere o problema na variável T :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k}g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.20)$$

o termo $g(x, t)$ refere-se a geração de calor.

Sob a condição de contorno geral:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} + hT = f(x, t) \quad (3.21)$$

e a condição inicial:

$$T(x, 0) = F(x). \quad (3.22)$$

De forma geral a solução para este problema utilizando FG é:

$$T(x, t) = \underbrace{\int_{x'=0}^L G(x, t|x', \tau) F(x') dx'}_A \quad (3.23)$$

$$+ \underbrace{\frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L g G(x, t|x', \tau) dx' d\tau}_B \quad (3.24)$$

$$+ \underbrace{\alpha \int_{\tau=0}^t \frac{hT}{k} G(x, t|x', \tau) d\tau}_C \quad (3.25)$$

Onde A, B e C são as integrais referentes à condição inicial, termo de geração e condição de contorno respectivamente, G é a FG característica do problema, dependente das condições de contorno, e que é obtida usando métodos de separação de variáveis ou transformada de Laplace.

Obsevando a existência de um grande número de soluções analíticas em condução de calor em regime transiente, devido ao fato de várias possibilidades de combinações de condição de contorno, foi proposto por Beck *et al.* (2010) um sistema de numeração a fim de facilitar a identificação e organização dos diversos problemas que possam ser tratados.

Este sistema de numeração é composto de uma letra e dois números, que respectivamente simbolizam a direção no eixo cartesiano e os tipos de condições de contornos naquela direção, isto é, as letras X, Y e Z referenciam as coordenadas x, y e z respectivamente. Assim partindo da equação da difusão:

$$k \nabla^2 T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.26)$$

que pode estar sujeita a seis condições de contorno distintas, tem-se

A primeira condição de contorno possível é chamada de condição tipo zero ou condição natural, isto é, quando se trata de geometria infinita em uma ou mais direções.

O número 1 representa a condição de temperatura prescrita ou de Dirichlet,

$$T(r_i, t) = f_i(r, t), \quad (3.27)$$

Condição de fluxo prescrito de calor ou Neumann, é representada pelo número 2.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{r_i} = f_i(r, t), \quad (3.28)$$

E condição de contorno de convecção ou Robin, pelo número 3.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{r_i} + h_i T|_{r_i} = f_i(r, t), \quad (3.29)$$

O número 4 representa problema de condição de contorno de quarto tipo, sem convecção,

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{r_i} = f_i(r, t) - (\rho c_p b)_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_i \quad (3.30)$$

Condição de quinto tipo, com convecção é representado pelo número 5.

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{r_i} = h_i T_i = f_i(r, t) - (\rho c_p b)_i \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_i \quad (3.31)$$

nas condições de contorno de quarto e quinto tipos o termo $(\rho c_p b)_i$ representa uma camada fina na superfície i onde b é a sua espessura.

As condições de contorno podem ser sintetizadas com sua respectiva numeração conforme a seguinte tabela:

Tabela 3.1: Tipos e numeração das Condições de Contorno.

Notação	Nome do contorno	Descrição
0	Tipo zero	Sem efeito físico (infinito)
1	Dirichlet	Temperatura prescrita
2	Neumann	Fluxo de calor prescrito
3	Robin	Convecção
4	Quarto tipo (Carlaw)	Filme fino, sem convecção
5	Quinto tipo (Jaeger)	Filme fino, com convecção

Podemos exemplificar o sistema de numeração com um problema X21. Nesse caso em $x = 0$ tem-se condição de contorno de um fluxo de calor prescrito, e em $x = L$ a condição de contorno temperatura prescrita. Para problemas de duas ou três dimensões o raciocínio segue de forma análoga.

Para problemas multi dimensionais, a FG é o produto das FGs características de cada

dimensão. Por exemplo para um problema bidimensional com condições de contorno de segundo e terceiro tipo na direção x e primeiro tipo na direção y , teremos:

$$G(x, y, t|x', y', \tau) = G_{X23}(x, t|x', \tau)G_{Y11}(y, t|y', \tau), \quad (3.32)$$

o que é outra grande vantagem na utilização no método de FG.

Assim, a solução da Eq. (3.20) na variável auxiliar W é dada por:

$$W(x, t) = W_{in}(x, t) + W_{cc1}(x, t) + W_{cc2,3}(x, t), \quad (3.33)$$

onde cada parcela é referente a condição inicial, condição de contorno de primeiro tipo e condição contorno de segundo e terceiro tipo respectivamente. O termo de condição inicial é dado por:

$$W_{in}(x, t) = \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0) \exp\left(-\frac{vx'}{2\alpha}\right) F(x') dx', \quad (3.34)$$

para a condição de contorno de primeiro tipo W é calculado por:

$$W_{cc1}(0, t) = \alpha \int_{\tau=0}^t \frac{\partial}{\partial x'} G_{1-}(x, t|0, \tau) T_{x1}(\tau) \exp\left(\frac{V^2\tau}{4\alpha}\right) d\tau \quad (3.35)$$

$$- \alpha \int_{\tau=0}^t \frac{\partial}{\partial x'} G_{-1}(x, t|L, \tau) T_{x2}(\tau) \exp\left(\frac{vL}{2\alpha} + \frac{v^2\tau}{4\alpha}\right) d\tau, \quad (3.36)$$

já para as condições de contorno de segundo e terceiro tipo:

$$W_{cc2,3}(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t G_{(2,3)-}(x, t|0, \tau) \exp\left(\frac{v^2t}{4\alpha}\right) d\tau \quad (3.37)$$

$$+ \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t G_{-(2,3)}(x, t|L, \tau) \exp\left(\frac{vL}{2\alpha} + \frac{v^2t}{4\alpha}\right) d\tau. \quad (3.38)$$

nas Eqs. (3.35 - 3.37) “-” pode ser preenchido com qualquer tipo de condição de contorno dado pela Tab.(3.1)

As funções de Green para o problema W são obtidas facilmente em Beck *et al.* (2010) apêndice X, e dependem das condições de contorno específicas do problema a ser tratado.

Na seção seguinte abordaremos a metodologia de solução do problema de condução de

calor aquecido por uma fonte móvel.

3.3 Modelo Térmico 1D Transiente

Inicialmente apresenta-se um problema 1D transiente de comprimento L onde as temperaturas em seus contornos são conhecidas, e são $T(0, t) = T(L, t) = 0$ e à condição inicial $T(x, 0) = 0$. Em uma posição qualquer $x = P_x$, $0 < P < L$, é inserido uma geração de calor pontual constante $g_p(x) = \text{constante}$ se movendo ao longo da direção positiva do eixo x a uma velocidade $v = \text{constante}$. Este tipo problema é referenciado por Beck *et al.* (2010) como X11.

Para tratarmos este caso propõe-se mais uma mudança de variável, devido a dificuldade de interpretação geométrica do problema, pois o termo de geração se move juntamente com o sólido. A intenção é então fixar a geração em algum ponto do sólido, enquanto o mesmo se move na direção do eixo x . Para isso, faz-se uma mudança de coordenada no problema:

$$\xi = x - vt, \quad (3.39)$$

fazendo o termo de geração pontual interno ao sólido uma função delta de Dirac, assim tem-se:

$$g_p(x) = g_p(x)\delta(x - vt), \quad (3.40)$$

note que o termo de geração depende apenas da posição em que é colocado, isto é, depende apenas de uma coordenada x , para o caso unidimensional. Para um caso n -dimensional tem-se:

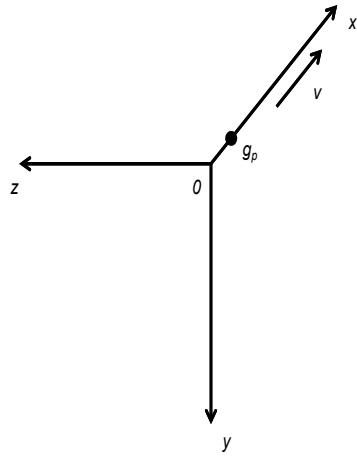
$$g(r_j) = g(r_j) \prod_{i=1}^{\infty} \delta_i(r_j - P_{r_j}), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.41)$$

Introduzindo a nova variável ξ para o problema unidimensional obtem-se:

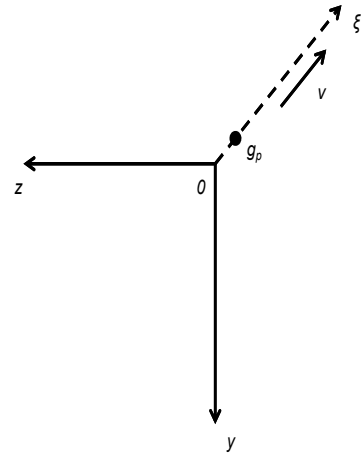
$$g_p(x) = g_p(x)\delta(\xi - P_\xi), \quad (3.42)$$

onde P_ξ é o ponto onde se deseja fixar o termo de geração, note que $0 \leq P_\xi \leq L$, mas para condições de contorno de primeiro tipo tem-se $0 < P_\xi < L$

Desta forma, o eixo x , de fixo passa a se movimentar na direção negativa a partir da origem, enquanto o termo de geração se fixa em um ponto P_ξ dado. Graficamente podemos representar a operação realizada obsevando as Fig. (3.3 - 3.3)



(a) Fonte de calor se movendo juntamente com o eixo x



(b) Fonte de calor fixa sobre o eixo ξ móvel

A seguir apresentam-se exemplos de soluções unidimensional, bidimensional e tridimensional com contornos de primeiro e terceiro tipo.

3.3.1 Problema Térmico X11

Apreseta-se nessa seção a solução do problema térmico unidimensional de comprimento L com condições de contorno de primeiro tipo. Considera-se aqui as propriedades k, α , o termo de geração $g_p(x)$ e a velocidade v sendo constantes.

Pode-se resolver um problema do tipo X11 onde as temperaturas inicial e dos contornos são nulas. A Fig (3.1) descreve esquematicamente o problema



Figura 3.1: Problema X11.

Desse modo a equação na variável W que modela este caso é dado por:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k} g_p \delta(\xi - P_\xi) \exp\left(\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (3.43)$$

sob as condições de contorno:

$$W(0, t) = 0, \quad (3.44)$$

$$W(L, t) = 0, \quad (3.45)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, 0) = 0. \quad (3.46)$$

No termo referente a geração de calor na Eq.(3.43) aparece a parcela $\delta(\xi - P_\xi) \exp\left(\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}\right)$ devido a mudança de variável $T \rightarrow W$ e a consideração de uma geração de calor pontual com variação espacial sendo uma função delta de Dirac.

Assim a solução por funções de Green para o problema é dada por:

$$W(\xi, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^L G_{\xi 11}(\xi, t | \xi', \tau) g_p \delta(\xi' - P_\xi) \exp\left(\frac{v\xi'}{2\alpha} - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}\right) d\xi' d\tau. \quad (3.47)$$

Neste caso, como as condições de contorno de primeiro tipo e inicial são zero, então a integral referente à condição inicial é nula, restando apenas a integral do termo de geração. A mesma hipótese será considerada para os demais casos.

A função de Green característica do problema pode ser facilmente encontrada em (BECK

et al., 2010, p.584) e tem a forma:

$$G_{\xi 11}(\xi, t|\xi', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right) \text{sen}\left(\frac{m \pi \xi}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m \pi \xi'}{L}\right), \quad (3.48)$$

Substituindo a Eq. (3.48) na Eq. (3.47) e usando a propriedade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta(x - a) dx = F(a), \quad (3.49)$$

resta calcular:

$$\begin{aligned} W(\xi, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right) \text{sen}\left(\frac{m \pi \xi}{L}\right) \\ &\quad \times \text{sen}\left(\frac{m \pi P}{L}\right) g_p \exp\left(\frac{v P_{\xi}}{2\alpha} - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Então:

$$W(\xi, t) = \frac{\alpha}{K} \frac{2}{L} g_p \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_{\xi}) \exp\left(\frac{v P_{\xi}}{2\alpha}\right) \underbrace{\exp(-\beta_m^2 \alpha t) \int_{\tau=0}^t \exp\left(\beta_m^2 \alpha \tau - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}\right) d\tau}_A \quad (3.51)$$

onde $\beta_m = \frac{m \pi}{L}$ e fazendo $B = \left(\beta_m^2 \alpha - \frac{v^2}{4\alpha}\right)$, a integral A é resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\tau=0}^t \exp\left(\beta_m^2 \alpha \tau - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}\right) d\tau &= \int_{t=0}^{\tau} \exp(\tau B) d\tau \\ &= \frac{\exp(\tau B)}{B} \Big|_{\tau=0}^t \\ &= \frac{\exp(B\tau - 1)}{B} \\ &= \frac{\exp\left(\beta_m^2 \alpha t - \frac{v^2 t}{4\alpha}\right) - 1}{\beta_m^2 \alpha - \frac{v^2}{4\alpha}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Deste modo a solução para o problema é dada por:

$$T(\xi, t) = \exp\left(\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}\right) \left\{ \frac{2\alpha g_p}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi P_\xi}{L}\right) \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{vP_\xi}{2\alpha}\right) \left[\frac{\exp\left(\frac{-v^2t}{4\alpha}\right) - \exp\left(\frac{-m^2\pi^2\alpha t}{L^2}\right)}{\frac{m^2\pi^2\alpha}{L^2} - \frac{v^2}{4\alpha}} \right] \right\}. \quad (3.53)$$

3.4 Problema Térmico X13

Nesta seção apresenta-se a solução do problema térmico *X13*, este problema possui condições de contorno de primeiro e terceiro tipos, em $x = 0$ e $x = L$ respectivamente. Também será considerado um termo de geração seguindo as mesmas características apresentadas no problema $\xi 11$.

Desse modo a equação na variável W que modela este caso é dado por:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k} g_p \delta(\xi - P_\xi) \exp\left(\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (3.54)$$

sujeito às condições de contorno:

$$W(0, t) = 0, \quad (3.55)$$

$$k \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L} + W(L, t) \left(h + \frac{kv}{2\alpha} \right) = h W_\infty e^{\frac{-vL}{2\alpha} + \frac{v^2t}{4\alpha}}, \quad (3.56)$$

onde

$$h_{eff} = h + \frac{kv}{2\alpha} \quad (3.57)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, 0) = 0. \quad (3.58)$$

Assim solução para o problema é proposta da seguinte maneira

$$W(\xi, t) = W_{g_p}(\xi, t) + W_{cc13}(\xi, t) \quad (3.59)$$

Desse modo por FG a solução toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 W(\xi, t) = & \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^L G(\xi, t|\xi', \tau) g_p \delta(\xi' - P_\xi) e^{\frac{v\xi'}{2\alpha} - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} d\xi' d\tau \\
 & + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^L G(\xi, t|\xi', \tau) h W_\infty e^{\frac{-vL}{2\alpha} + \frac{v^2t}{4\alpha}} d\xi' d\tau
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

A FG para o problema X13 é facilmente obtida em Beck *et al.* (2010) e é dada pela equação seguinte:

$$G_{\xi 13}(\xi, t|\xi', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \left(\frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \right) \tag{3.61}$$

onde $-B = \beta_m \cot(\beta_m)$, $B = \frac{hL}{k}$ e $u = \alpha(t - \tau)$

Após realizar as integrações com relação a ξ' e τ a solução para o problema é dada por:

$$\begin{aligned}
 T(\xi, t) = & e^{\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}} \left\{ \frac{2\alpha g_p}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \left(\frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \right) e^{\frac{vP_\xi}{2\alpha}} \left(\frac{e^{\frac{-v^2t}{4\alpha}} - e^{-\beta_m^2 \alpha t}}{\beta_m^2 \alpha - \frac{v^2}{4\alpha}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2\alpha h W_\infty}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \left(\frac{\beta_m^2 + B^2}{\beta_m^2 + B^2 + B} \right) e^{\frac{-vL}{2\alpha}} \left(\frac{e^{\frac{v^2t}{4\alpha}} - e^{-\beta_m^2 \alpha t}}{\beta_m^2 \alpha + \frac{v^2}{4\alpha}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

3.5 Problema Térmico X11Y11

considera-se um problema bidimensional de dimensões L_1 e L_2 com geração interna se movendo a uma velocidade constante na direção negativa do eixo x . Consideram as mesmas hipóteses do problema $\xi 11$ a equação que modela o problema é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g_L}{k}(x, y) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - v \frac{\partial T}{\partial x} \right) \tag{3.63}$$

Considere também uma geração interna na forma:

$$g_L(x, y) = g_L \delta(x - vt) \delta(y - 0), \tag{3.64}$$

note que, nesse caso o termo de geração depende de um par ordenado (x, y) que é a posição no plano onde será colocado a geração, note também que o termo de geração é multiplicado

por duas funções delta de Dirac, onde a segunda não depende da velocidade, isto é, este sólido é modelado para se mover apenas na direção do eixo x . Caso desejasse uma movimentação em ambas as direção a Eq.(3.64) tomaria a forma:

$$g_L(x, y) = g_L \delta(x - v_x t) \delta(y - v_y t), \quad (3.65)$$

onde v_x e v_y são as velocidades nas direções x e y respectivamente.

Para resolvermos este problema usaremos a metodologia análoga à anteriormente usada, isto é, usaremos as variáveis auxiliares ξ e W que são respectivamente:

$$\xi = x - vt \quad (3.66)$$

$$\exp\left(\frac{vx}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}\right) \quad (3.67)$$

Note a Eq.(3.67) dependente apenas de x mesmo para um problema bidimensional. Isto se deve ao fato da movimentação ocorrer apenas sob o eixo x . Para em um caso tridimensional com movimentação nos três eixos, a seguinte equação para mudança de variável seria aplicada

$$\exp\left(\frac{v_x x}{2\alpha} - \frac{v_x^2 t}{4\alpha}\right) \exp\left(\frac{v_y y}{2\alpha} - \frac{v_y^2 t}{4\alpha}\right) \exp\left(\frac{v_z z}{2\alpha} - \frac{v_z^2 t}{4\alpha}\right) \quad (3.68)$$

onde: v_x, v_y e v_z são respectivamente as velocidades de movimentação sob os três eixos coordenados x, y, z .

Desta forma efetuando operações algébricas análogas às realizadas ao problema unidimensional, obtem-se o problema auxiliar

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{g_L}{k} \delta(\xi - P_x) \delta(y - P_y) e^{\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (3.69)$$

sob as condições de contorno:

$$W(0, y, t) = W(L_1, y, t) = 0 \quad (3.70)$$

$$W(\xi, 0, t) = W(\xi, L_2, t) = 0 \quad (3.71)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, y, 0) = 0 \quad (3.72)$$

Graficamente pode-se ilustrar o problema da seguinte forma:

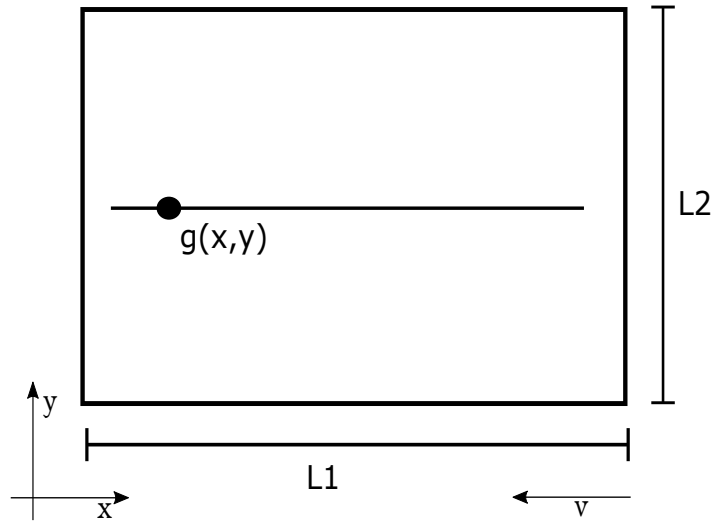


Figura 3.2: Problema X11Y11

A solução por FG para o problema é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W(\xi, y, t) = & \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} G_{\xi 11 Y 11}(\xi, y, t | \xi', y', \tau) \\ & \times \frac{\alpha}{k} g_L \delta(\xi' - P_\xi) \delta(y - P_y) e^{\frac{v\xi'}{2\alpha} - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} dy' d\xi' d\tau \end{aligned} \quad (3.73)$$

Onde $G_{\xi 11 Y 11}$ é a função de Green para o problema, e é calculada efetuando o produto das funções de Green nas direções ξ e y , que podem ser encontradas em (BECK *et al.*, 2010), então:

$$G_{\xi 11}(\xi, t) = \frac{2}{L_1} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \quad (3.74)$$

e

$$G_{Y11}(y, t) = \frac{2}{L_2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 u} \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \quad (3.75)$$

onde $\beta_m = \frac{m\pi}{L_1}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{L_2}$ e $u = \alpha(t - \tau)$

Assim efetuando o produto das Eqs.(3.74-3.75) tem-se a FG característica do problema.

$$G_{\xi 11 Y 11}(\xi, y, t) = \frac{4}{L_1 L_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \quad (3.76)$$

Assim

$$\begin{aligned} W(\xi, y, t) &= \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \frac{4}{L_1 L_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \\ &\quad \times \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \frac{\alpha}{k} g_L \delta(\xi - P_x) \delta(y - P_y) e^{\frac{v\xi'}{2\alpha} - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} dy' d\xi' d\tau \end{aligned} \quad (3.77)$$

usando o fato que $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta(x - a) dx = F(a)$, tem-se

$$\begin{aligned} W(\xi, y, t) &= \frac{4\alpha g_L}{L_1 L_2 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n P_y) \\ &\quad \times e^{\frac{vP_\xi}{2\alpha}} \underbrace{\int_{\tau=0}^t e^{-\beta_m^2 u - \beta_n^2 u - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} d\tau}_A \end{aligned} \quad (3.78)$$

resolvendo a integral indicada por A

$$\begin{aligned} \int_{\tau=0}^t e^{-\beta_m^2 u - \beta_n^2 u - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} d\tau &= e^{-\beta_m^2 \alpha t - \beta_n^2 \alpha t} \int_{\tau=0}^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau + \beta_n^2 \alpha \tau - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} d\tau \\ &= e^{-\alpha t B^2} \int_{\tau=0}^t e^{B^2 \alpha \tau - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} d\tau \\ &= e^{-\alpha t B^2} \frac{e^{B^2 \alpha t - \frac{v^2 t}{4\alpha}} - 1}{B^2 \alpha + \frac{v^2}{4\alpha}} \\ &= \frac{e^{-\frac{v^2 t}{4\alpha}} - e^{-B^2 \alpha t}}{B^2 \alpha + \frac{v^2}{4\alpha}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

onde $B^2 = \beta_m^2 + \beta_n^2$

Assim a solução do problema na variável T é:

$$T(\xi, y, t) = e^{\frac{v\xi}{2a} - \frac{v^2 t}{4\alpha}} \left\{ \frac{4\alpha g_L}{L_1 L_2 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n P_y) \right. \\ \left. \times e^{\frac{v P_\xi}{2\alpha}} \left(\frac{e^{-\frac{v^2 t}{4\alpha}} - e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2)\alpha t}}{(\beta_m^2 + \beta_n^2)\alpha + \frac{v^2}{4\alpha}} \right) \right\} \quad (3.80)$$

3.6 Problema Térmico X11Y11Z11

Nesta seção será abordado o problema térmico tridimensional de condução de calor por uma fonte fixa de calor em uma posição (P_x, P_y, P_z) determinada, em um sólido que se movimenta a uma velocidade constante através do eixo x negativo.

Considera-se então um cubo de dimensões $L_1 = L_2 = L_3$ e uma geração interna, $g_s(x, y, z) = \text{constante}$, sob a condição de contorno de temperatura prescrita em todas as faces, sendo a temperatura inicial também nula, a Fig. (3.3) ilustra o problema.

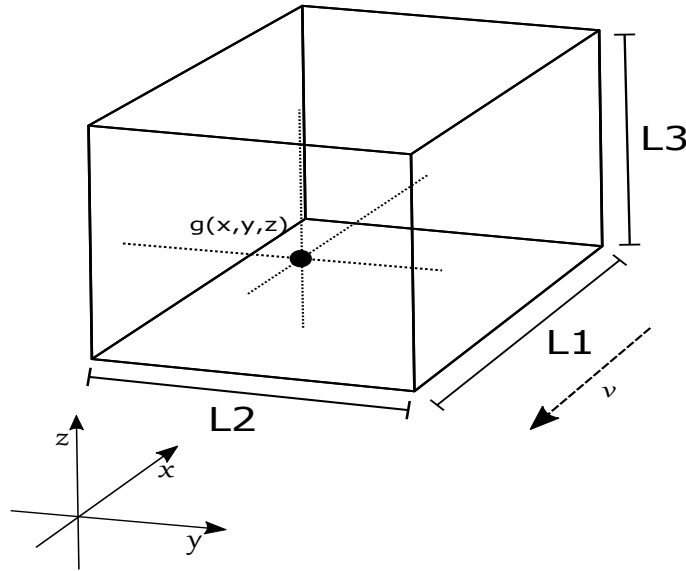


Figura 3.3: Problema X11Y11Z11

A equação governante que descreve o problema é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g_s}{k}(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - v \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.81)$$

sob as condições de contorno:

$$T(0, y, z, t) = T(L_1, y, z, t) = 0 \quad (3.82)$$

$$T(x, 0, z, t) = T(x, L_2, z, t) = 0 \quad (3.83)$$

$$T(x, y, 0, t) = T(x, y, L_3, t) = 0 \quad (3.84)$$

$$(3.85)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = 0 \quad (3.86)$$

Neste caso também será considerado o termo de geração interna como uma função Delta de Dirac, assim:

$$g_s(x, y, z) = g_s \delta(x - vt) \delta(y - 0) \delta(z - 0) \quad (3.87)$$

pode-se observar o uso dos índices p , L e s respectivamente para o termo de geração nos casos unidimensional, bidimensional e tridimensional e significam *point*, *line* e *surface* segundo Özişik (1993). De forma análoga tem-se

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{g}{k} \delta(\xi - P_\xi) \delta(y - P_y) \delta(z - P_z) \exp \left(\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.88)$$

sujeito às condições de contorno

$$W(0, y, z, t) = W(L_1, y, z, t) = 0 \quad (3.89)$$

$$W(\xi, 0, z, t) = W(\xi, L_2, z, t) = 0 \quad (3.90)$$

$$W(\xi, y, 0, t) = W(\xi, y, L_3, t) = 0 \quad (3.91)$$

$$(3.92)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, y, z, 0) = 0 \quad (3.93)$$

Então, a solução por FG é proposta por

$$\begin{aligned} W(\xi, y, z, t) = & \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} e^{-\beta_i^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \\ & \times \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \text{sen}(\beta_i z) \text{sen}(\beta_i z') \\ & \times \frac{\alpha}{k} g_s \delta(\xi - P_x) \delta(y - P_y) \delta(z - P_z) e^{\frac{v \xi'}{2\alpha} - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}} dz' dy' d\xi' d\tau \end{aligned} \quad (3.94)$$

onde: $\beta_m = \frac{m\pi}{L_1}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{L_2}$, $\beta_i = \frac{i\pi}{L_3}$ e $u = \alpha(t - \tau)$.

usando a propriedade $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta(x - a) = F(a)$, tem-se

$$\begin{aligned} W(\xi, y, z, t) = & \frac{8\alpha g}{L_1 L_2 L_3 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n P_y) \\ & \times \text{sen}(\beta_i z) \text{sen}(\beta_i P_z) e^{\frac{v P_\xi}{2\alpha}} \underbrace{\int_{\tau=0}^t e^{-\beta_m^2 u - \beta_n^2 u - \beta_i^2 u - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}} d\tau}_A \end{aligned} \quad (3.95)$$

resolvendo a integral indicada por A

$$\begin{aligned} \int_{\tau=0}^t e^{-\beta_m^2 u - \beta_n^2 u - \beta_i^2 u - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}} d\tau &= e^{-\beta_m^2 \alpha t - \beta_n^2 \alpha t - \beta_i^2 \alpha t} \int_{\tau=0}^t e^{\beta_m^2 \alpha \tau + \beta_n^2 \alpha \tau + \beta_i^2 \alpha \tau - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}} d\tau \\ &= e^{-\alpha t B^2} \int_{\tau=0}^t e^{B^2 \alpha \tau - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}} d\tau \\ &= e^{-\alpha t B^2} \frac{e^{B^2 \alpha t - \frac{v^2 t}{4\alpha}} - 1}{B^2 \alpha + \frac{v^2}{4\alpha}} \\ &= \frac{e^{-\frac{v^2 t}{4\alpha}} - e^{-B^2 \alpha t}}{B^2 \alpha + \frac{v^2}{4\alpha}} \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde $B^2 = \beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_i^2$

Assim a solução do problema na variável original é dada por

$$\begin{aligned}
T(\xi, y, z, t) = e^{\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}} & \left\{ \frac{8\alpha g_s}{L_1 L_2 L_3 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n P_y) \right. \\
& \times \text{sen}(\beta_n z) \text{sen}(\beta_n P_z) e^{\frac{v P_\xi}{2\alpha}} \left. \left(\frac{e^{-\frac{v^2 t}{4\alpha}} - e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_i^2)^2 \alpha t}}{(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_i^2)^2 \alpha + \frac{v^2}{4\alpha}} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (3.97)$$

3.7 Problema Térmico X11Y11Z11 se movendo pelos 3 eixos (x,y,z)

Nesta seção será abordado a solução tridimensional para o problema de condução de calor em um sólido móvel com movimentação através dos três eixos coordenados (x, y, z) as condições de contorno são as mesmas usadas na seção anterior, isto é, todas as faces mantidas a temperatura constante igual a zero, sendo também nula a condição inicial.

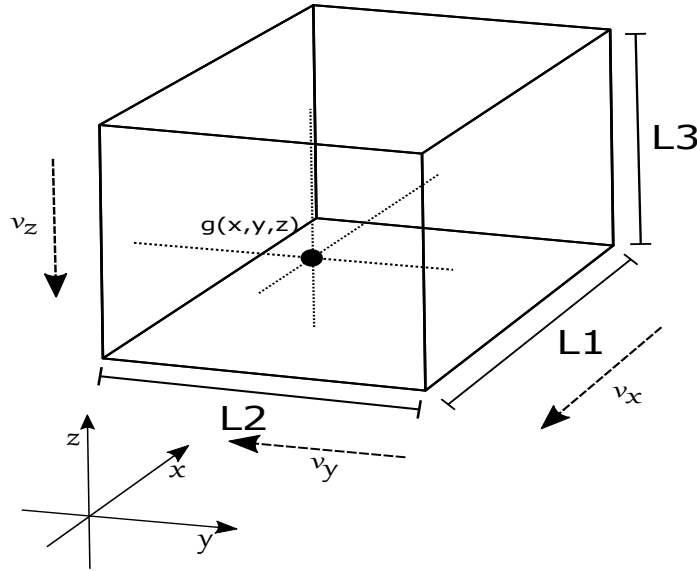


Figura 3.4: Problema X11Y11Z11

A equação governante neste caso é:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g_s}{k}(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - v_x \frac{\partial T}{\partial x} - v_y \frac{\partial T}{\partial y} - v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.98)$$

Note que no lado direito da Eq. (3.98) tem-se os termos dependentes da velocidade nas direções y e z , note que se $v_y = v_z = 0$, temos o mesmo problema resolvido na seção anterior.

As condições de contorno utilizadas são

$$T(0, y, z, t) = T(L_1, y, z, t) = 0 \quad (3.99)$$

$$T(x, 0, z, t) = T(x, L_2, z, t) = 0 \quad (3.100)$$

$$T(x, y, 0, t) = T(x, y, L_3, t) = 0 \quad (3.101)$$

$$(3.102)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = 0 \quad (3.103)$$

Considere o termo de geração interna como uma função Delta de Dirac, desta forma:

$$g_s(x, y, z) = g\delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t) \quad (3.104)$$

note que neste caso, movimentação pelos três eixos, a função delta de Dirac depende da velocidade para todas as direções.

Analogamente:

$$T(x, y, z, t) = W(x, y, z, t) \exp\left(\frac{v_x x}{2\alpha} - \frac{v_x^2 t}{4\alpha}\right) \exp\left(\frac{v_y y}{2\alpha} - \frac{v_y^2 t}{4\alpha}\right) \exp\left(\frac{v_z z}{2\alpha} - \frac{v_z^2 t}{4\alpha}\right) \quad (3.105)$$

Onde as novas coordenadas móveis são definidas por:

$$\xi = x - v_x t \quad (3.106a)$$

$$\gamma = y - v_y t \quad (3.106b)$$

$$\zeta = z - v_z t \quad (3.106c)$$

Usando as relações para mudanças de variáveis descritas pelas Eqs. (3.106a-3.106c) e Eq.(3.105) aplicadas a equação governante e às condições de contorno e inicial tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + \frac{g_s}{k} \delta(\xi - P_\xi) \delta(\gamma - P_\gamma) \delta(\zeta - P_\zeta) \\ \times \exp \left(\frac{v_\xi \xi + v_\gamma \gamma + v_\zeta \zeta}{2\alpha} - \frac{t(v_\xi^2 + v_\gamma^2 + v_\zeta^2)}{4\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Sob as condições de contorno:

$$W(0, \gamma, \zeta, t) = W(L_1, \gamma, \zeta, t) = 0 \quad (3.108)$$

$$W(\xi, 0, \zeta, t) = W(\xi, L_2, \zeta, t) = 0 \quad (3.109)$$

$$W(\xi, \gamma, 0, t) = W(\xi, \gamma, L_3, t) = 0 \quad (3.110)$$

$$(3.111)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, \gamma, \zeta, 0) = 0 \quad (3.112)$$

A FG para o problema $X_{11}Y_{11}Z_{11}$ é obtida através do produto das FG's relativas às direções coordenadas x, y, z . a FG relativa ao problema do tipo 11 tem a forma:

$$G_{X_{11}}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} \text{sen}(\beta_m x) \text{sen}(\beta_m x') \quad (3.113)$$

onde $\beta_m = \frac{m\pi}{L}$ e $u = \alpha(t - \tau)$

Como para as demais dimensões tem-se a mesma FG, então a FG $G_{X_{11}Y_{11}Z_{11}}(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ será:

$$\begin{aligned} G_{X_{11}Y_{11}Z_{11}}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} e^{-\beta_p^2 u} \\ \times \text{sen}(\beta_m x) \text{sen}(\beta_m x') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \\ \times \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \end{aligned} \quad (3.114)$$

Logo

$$\begin{aligned}
W(\xi, \gamma, \zeta, t) = & \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{\gamma'=0}^{L_2} \int_{\zeta'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} e^{-\beta_p^2 u} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \\
& \times \text{sen}(\beta_n \gamma) \text{sen}(\beta_n \gamma') \text{sen}(\beta_p \zeta) \text{sen}(\beta_p \zeta') \\
& \times \frac{\alpha}{k} g_s \delta(\xi - P_\xi) \delta(\gamma - P_\gamma) \delta(\zeta - P_\zeta) e^{\frac{v_\xi \xi' + v_\gamma \gamma' + v_\zeta \zeta'}{2\alpha} - \frac{\tau(v_\xi^2 + v_\gamma^2 + v_\zeta^2)}{4\alpha}} d\zeta' d\gamma' d\xi' d\tau
\end{aligned} \tag{3.115}$$

onde: $\beta_m = \frac{m\pi}{L_1}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{L_2}$, $\beta_p = \frac{p\pi}{L_3}$ e $u = \alpha(t - \tau)$.

E analogamente obtem-se

$$\begin{aligned}
T(\xi, \gamma, \zeta, t) = & e^{\frac{v_\xi \xi + v_\gamma \gamma + v_\zeta \zeta}{2\alpha} - \frac{t(v_\xi^2 + v_\gamma^2 + v_\zeta^2)}{4\alpha}} \left\{ \frac{8\alpha g_s}{L_1 L_2 L_3 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n \gamma) \right. \\
& \times \text{sen}(\beta_n P_\gamma) \text{sen}(\beta_p \zeta) \text{sen}(\beta_p P_\zeta) e^{\frac{v_\xi P_\xi + v_\gamma P_\gamma + v_\zeta P_\zeta}{2\alpha}} \left(\frac{e^{\frac{-V^2 t}{4\alpha}} - e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)^2 \alpha t}}{(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)^2 \alpha + \frac{V^2}{4\alpha}} \right) \Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.116}$$

onde $V = v_\xi + v_\gamma + v_\zeta$

Visando uma maior aplicação dessas soluções apresenta-se a seguir uma fonte móvel sendo aplicada a superfície $z = L_3$ exposta a um meio convectivo.

3.8 Problema Térmico X11Y11Z13

Apresenta-se o problema térmico tridimensional de condução de calor em um sólido móvel com contorno de convecção térmica na face $z = W$. As demais faces são mantidas à temperatura prescrita constante igual a zero, e a movimentação do sólido ocorre apenas na direção do eixo x .

A equação governante para este caso nas variáveis W e ξ é dada por:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{g}{k} \delta(\xi - P_\xi) \delta(y - P_y) \delta(z - P_z) \exp\left(\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.117}$$

Sob as condições de contorno:

$$W(0, y, z, t) = W(L_1, y, z, t) = 0 \tag{3.118}$$

$$W(\xi, 0, z, t) = W(\xi, L_2, z, t) = 0 \quad (3.119)$$

$$W(\xi, y, 0, t) = 0 \quad (3.120)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, y, z, 0) = 0 \quad (3.121)$$

A condição de contorno para $z = L_3$ é dada por:

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_3} = h(T(L_3, t) - t_\infty) \quad (3.122)$$

aplicando as mudanças de variáveis tem-se:

$$k \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=L_3} + W(L_3, t) \left(h + \frac{kv}{2\alpha} \right) = hW_\infty e^{\frac{-vL_3}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}} \quad (3.123)$$

onde

$$h + \frac{kv}{2\alpha} = h_{eff} \quad (3.124)$$

h_{eff} é o fluxo de calor por convecção efetivo, segundo Beck *et al.* (2010). Assim a Eq.(3.123) é a condição de contorno para $z = L_3$.

A função de Green para o problema é dada pelo produto das funções de Green nas três direções. Assim, para as direções x e y temos as mesmas expressões descritas na seção anterior. Já a função de Green para a direção z segundo Beck *et al.* (2010) é dada por:

$$G_{z13}(z, t|z', \tau) = \frac{2}{L_3} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\beta_p^2 u} \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \quad (3.125)$$

E portanto:

$$\begin{aligned} G_{x11y11z13}(x, y, z, t|x', y', z', \tau) &= \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} e^{-\beta_p^2 u} \\ &\times \text{sen}(\beta_m x) \text{sen}(\beta_m x') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \\ &\times \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Onde: $\beta_m = \frac{m\pi}{L_1}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{L_2}$, $-B = \beta_p \cot(\beta_p)$, $B = \frac{hL_3}{k}$ e $u = \alpha(t - \tau)$. Então, obtem-se por FG:

$$\begin{aligned}
W(\xi, y, z, t) &= \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} e^{-\beta_p^2 u} \\
&\times \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \\
&\times \frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \frac{\alpha}{k} g_s \delta(\xi - P_\xi) \delta(y - P_y) \delta(z - P_z) e^{\frac{v\xi'}{2\alpha} - \frac{v^2 \tau}{4\alpha}} dz' dy' d\xi' d\tau \\
&+ \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 u} e^{-\beta_n^2 u} e^{-\beta_p^2 u} \\
&\times \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \\
&\times \frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} h W_\infty e^{\frac{-vL_3}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}} dz' dy' d\xi' d\tau
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Usando as técnicas de integração anteriormente apresentadas para as duas quádruplas de integrais teremos a solução do problema dada por:

$$\begin{aligned}
T(\xi, y, z, t) &= e^{\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}} \left\{ \frac{8\alpha g_s}{L_1 L_2 L_3 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n P_y) \right. \\
&\times \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p P_z) \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) e^{\frac{vP_\xi}{2\alpha}} \left(\frac{e^{\frac{-v^2 t}{4\alpha}} - e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha t}}{(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha - \frac{v^2 t}{4\alpha}} \right) \\
&+ \frac{8\alpha h W_\infty}{L_1 L_2 L_3 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_p z) e^{\frac{-vL_3}{2\alpha}} \\
&\times \left(\frac{e^{\frac{-v^2 t}{4\alpha}} - e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha t}}{(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha - \frac{v^2 t}{4\alpha}} \right) \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) \left(\frac{1 - \cos(\beta_m L_1)}{\beta_m} \right) \\
&\times \left(\frac{1 - \cos(\beta_n L_2)}{\beta_n} \right) \left(\frac{1 - \cos(\beta_p L_3)}{\beta_p} \right) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Apresentam-se no próximo capítulo a implementação das soluções descritas neste capítulo, o detalhamento do cálculo dos autovalores para o problema $X11Y11Z13$, verificação das soluções e comparações com soluções numéricas.

Capítulo 4

Autovalores, Representação Gráfica, Verificação e Comparações

Neste capítulo apresenta-se a metodologia para o cálculo dos autovalores dos problemas apresentados no capítulo 3, as representações gráficas das soluções analíticas para todos os problemas térmicos apresentados, verificação das soluções, comparações entre as soluções obtidas analiticamente e numericamente.

4.1 Autovalores

Soluções analíticas calculadas por meio de FG dependem do cálculo de autovalores, autofunções e normas. que são definidas pela característica do problema. Mostra-se nesta seção a metodologia utilizada para o cálculo dos autovalores para os problemas mostrados no Capítulo 3.

Observa-se que, para o problema unidimensional com condição de contorno de primeiro tipo, o autovalor associado é:

$$\beta_m = \frac{m\pi x}{L}, \tag{4.1}$$

onde $0 \leq x \leq L$ e $m = 1, 2, 3, \dots$

Para os problemas bidimensionais e tridimensionais que possuam mesmas condições de

contorno, de primeiro tipo, os autovalores associados para cada direção são:

$$\beta_m = \frac{m\pi r_i}{L_i}, \quad (4.2)$$

onde $0 \leq r_i \leq L_i$, $L = i = 1, 2, 3, \dots$ e $r = x, y, z, \dots$

Como dito anteriormente, as FG's para problemas bidimensionais e tridimensionais são o produto de FG's unidimensionais, assim, se tratamos de um problema do tipo $X11$ ou $X11Y11Z11$ a FG dependerá dos mesmos autovalores em sua solução analítica. Note que os autovalores nestes casos são calculados de maneira direta, apenas variando-se m , x e L .

Já para problemas com condições de contorno de terceiro tipo, como é o caso dos problemas $X13$ e $X11Y11Z13$ abordados no Capítulo 3, os autovalores são raízes de uma equação transcendental da forma:

$$-B = \beta_p \cot(\beta_p) \quad (4.3)$$

onde $B = \frac{hL}{k}$.

Calcular os autovalores, β_p para este caso, consiste em buscar por valores que satisfaçam a equação transcendental Eq.(4.3). Isto é, teremos que calcular as raízes da equação Eq.(4.3).

Diversos métodos se aplicam a esta tarefa: Método da bisecção, Newton Rhapson, Método da secante e o método de intersecção assintótica. Este último consiste em buscar por intersecções gráficas entre o lado direito e esquerdo da Eq.(4.3), onde cada intersecção é um autovalor β_p . Este método é interessante, pois segundo Oliveira (2015) “métodos iterativos tentem a perder o primeiro autovalor”.

Para a aplicação que será desenvolvida neste trabalho usaremos uma aproximação apresentada por Beck *et al.* (2010), pois, como mostra o comparativo realizado por Fernandes (2009) esta aproximação para esta aplicação não possui problemas de cálculo dos autovalores β_p .

Assim, os autovalores β_p serão calculados, segundo Beck *et al.*, da seguinte maneira:

Para $-1 \leq B < \infty$, $m = 1$ e $-1 \leq B < -0,6$:

$$\beta_1 \approx \left\{ 3 \left[1 + B - \frac{1}{5} (1 + B)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Para $m = 1, 2, 3, \dots$, $-1 \leq B < 5$, exceto para $m = 1$ e $-1 \leq B < -0,6$:

$$\beta_m \approx \frac{\pi}{2}(2m-1) \left(1 + \frac{3}{2(B+3)} \left\{ \left[1 + \frac{16B(B+3)}{3(2m-1)^2\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \right) \quad (4.5)$$

para $B > 5$ e $m = 1, 2, 3, \dots$:

$$\beta_m \approx m\pi - \left(A + \frac{3m\pi}{2B} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(A - \frac{3m\pi}{2B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.6)$$

onde

$$A \approx \left[\left(\frac{3m\pi}{2B} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{B} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

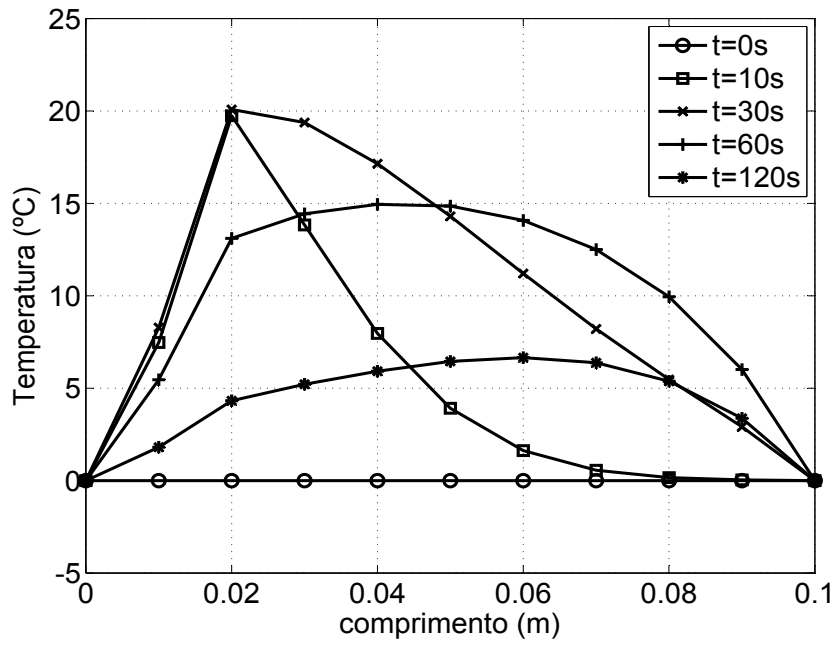
4.2 Representação Gráfica dos problemas X11, X13, X11Y11 e X11Y11Z11

4.2.1 Representação Gráfica do Problema X11

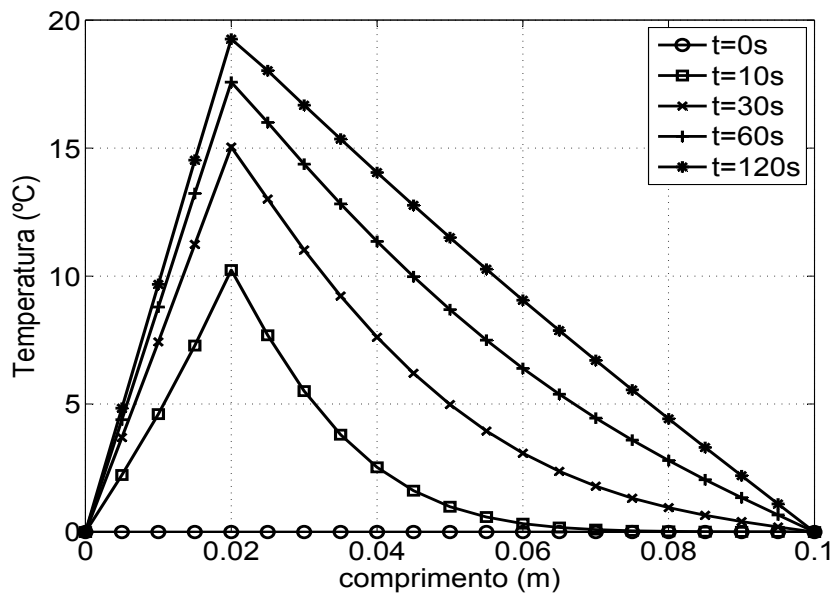
A solução do problema X11, é então, implementada no *software* MATLAB e calculada numericamente para valores de x , P_x , t . Os dados referentes as propriedades térmicas, tempo, comprimento, termo de geração de calor e fixação da fonte de geração serão dados hipotéticos, mas, em um caso real basta ajustar o modelo implementado.

Desse modo, usaremos os seguintes valores:

- $L = 0,1m$.
- $v = 0,001ms^{-1}$.
- $k = 80,2Wm^{-1}K^{-1}$.
- $\alpha = 23,1 \times 10^{-6}m^2s^{-1}$.
- $g_p(x) = 1 \times 10^5Wm^{-3}$
- $P_x = 0,02m$



(a)



(b)

Figura 4.1: (a) Fonte móvel de calor a uma velocidade $v = 0,001 \text{ m/s}$; (b) Fonte de calor fixa no ponto $P_\xi = 0,02 \text{ m}$ e $v = 0 \text{ m/s}$.

A Fig.(4.1(a)) ilustra graficamente a solução analítica para o problema unidimensional dado pela Eq. (3.53), observa-se o comportamento térmico devido a geração de calor fixada na posição P_ξ . Note o efeito causado pela velocidade de movimentação do sólido ao longo de do eixo ξ negativo, e o comportamento térmico usando a mesma solução com velocidade nula, Fig. (4.1(b)), neste caso o problema móvel recai ao caso de um problema fixo.

Nota-se que a solução mostrada nas Figs. 4.1(a)-(b) estão na variável ξ , o problema pode também ser representado na variável original, x , para isso basta lembrarmos que $\xi = x - vt$. Assim, efetuando a mudança inversa de variável retornamos à variável x . Desse modo, a Fig.(4.2) representa a solução dada pela Eq.(3.53) na variável x .

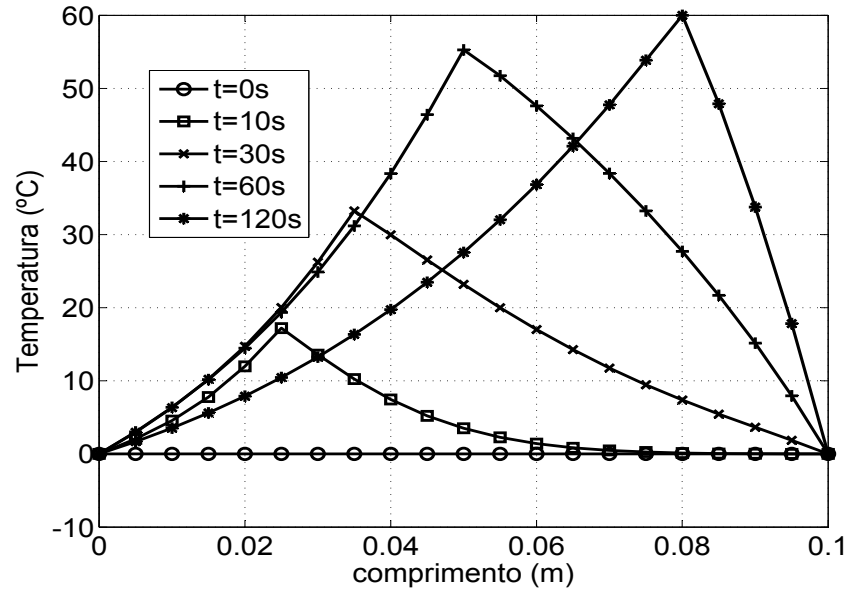
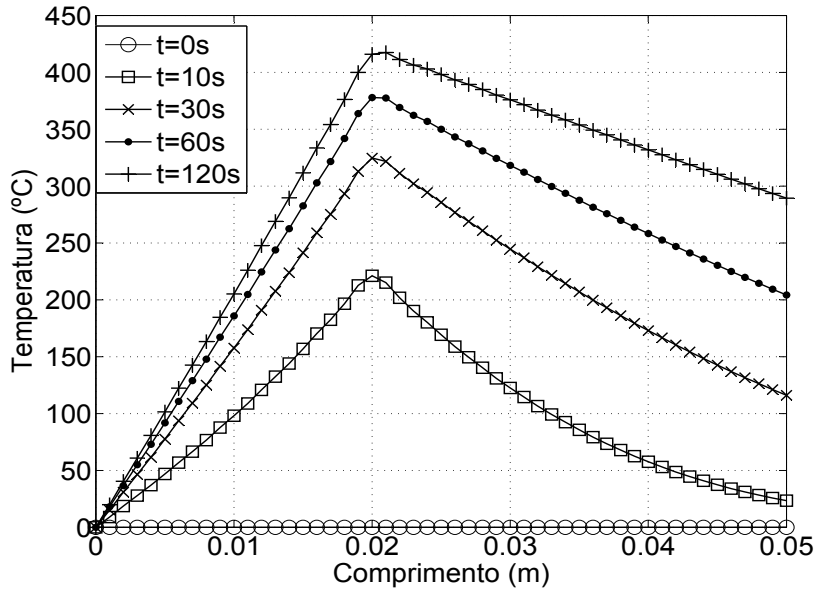


Figura 4.2: Fonte móvel de calor a uma velocidade $v = 0,001m/s$

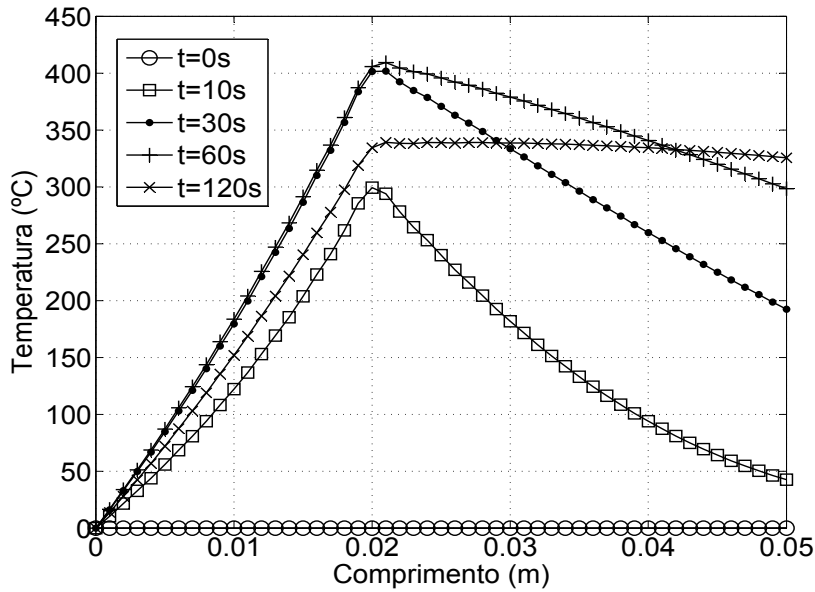
4.2.2 Representação Gráfica do Problema X13

Mostra-se a representação gráfica do problema X13, as propriedades térmicas usadas serão as mesmas anteriormente empregadas com exceção apenas da dimensão que passará a ter o valor $L = 0,05m$. Será também considerado nessa análise o coeficiente hipotético de convecção térmica no valor de $h = 5Wm^{-2}K^{-1}$. O gráfico será apresentado da mesma forma que foi mostrado na seção anterior. A solução analítica que estes gráficos representam é dada

pela Eq. (3.62) desenvolvida, no capítulo 3.



(a)



(b)

Figura 4.3: (a) Gráfico do problema X13 com $v = 0 \text{ m/s}$ na variável ξ ; (b) Gráfico do problema X13 com $v = 0,0005 \text{ m/s}$ na variável ξ ;

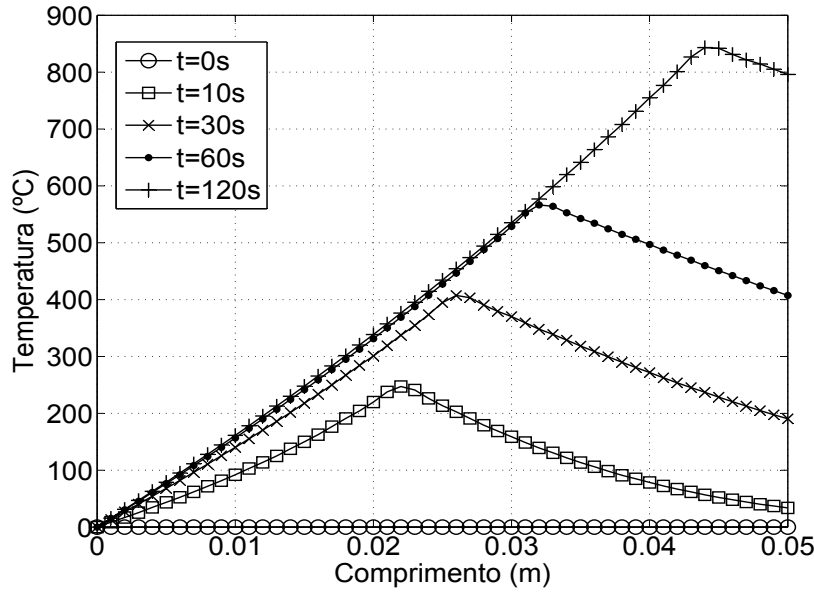
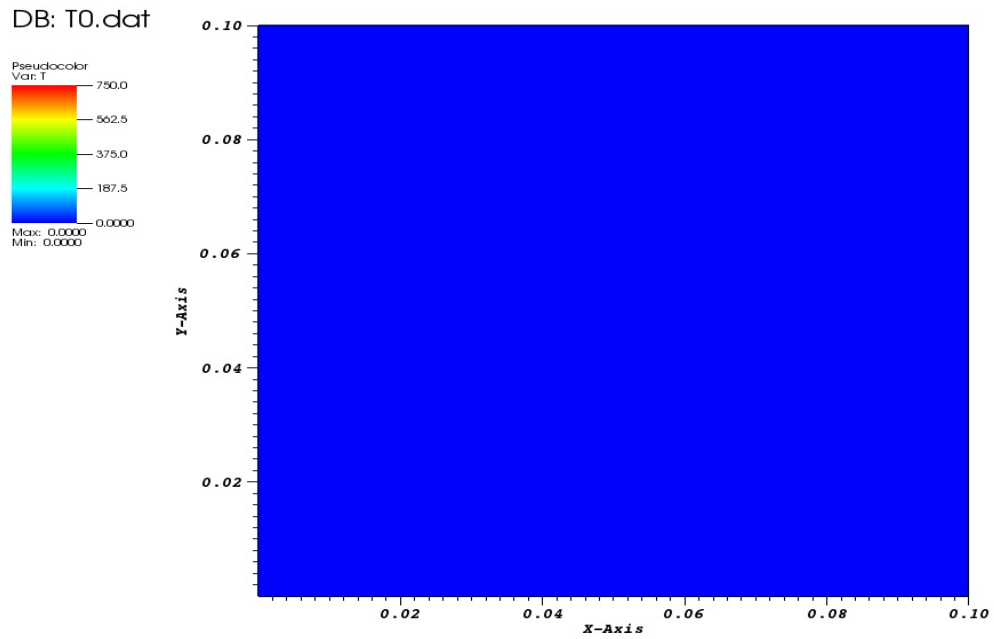


Figura 4.4: Gráfico do problema X13 com $v = 0,0005m/s$ na variável x

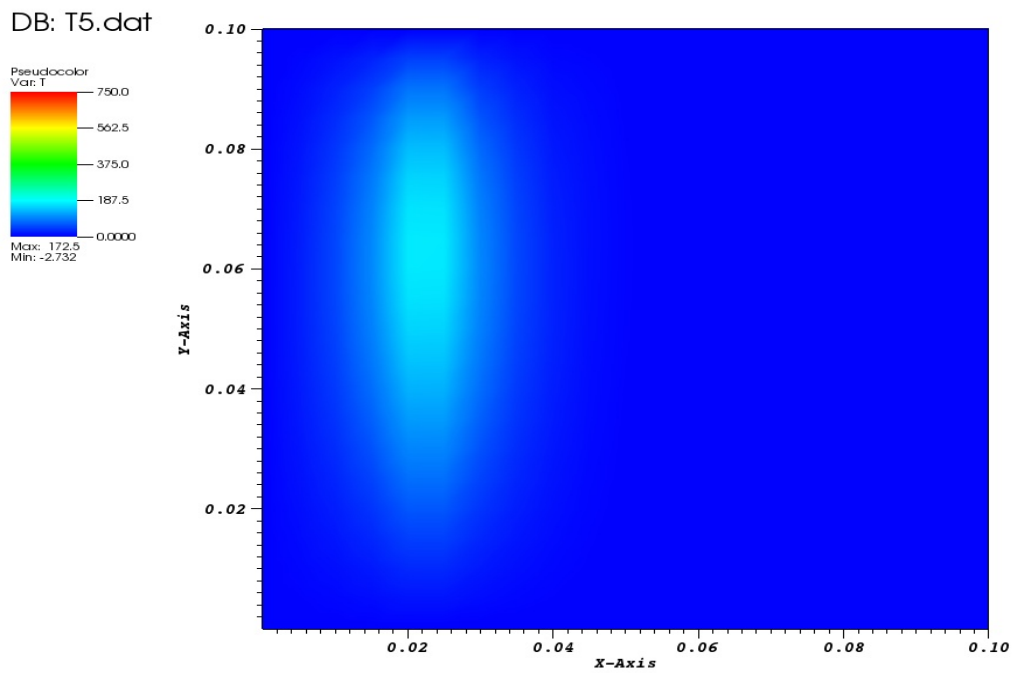
Note o comportamento térmico apresentado nas Figs.4.3-4.4, o efeito causado pelo contorno de terceiro tipo em $x = L$, e também o efeito da mudança de variável pelas Figs. 4.3(b)-4.4.

4.2.3 Representação Gráfica X11Y11

Nesta seção apresenta-se a representação gráfica para o problema térmico X11Y11 calculado no capítulo 3. A solução, que é dada pela Eq.(3.80), será implementada utilizando a mesma metodologia e dados anteriormente usados. Contudo para o caso bidimensional as dimensões consideradas serão $L_1 = L_2 = 0,1m$, e $g_L(x,y)$ localizada nas coordenadas $P_x = 0,02m$ e $P_y = 0,05m$



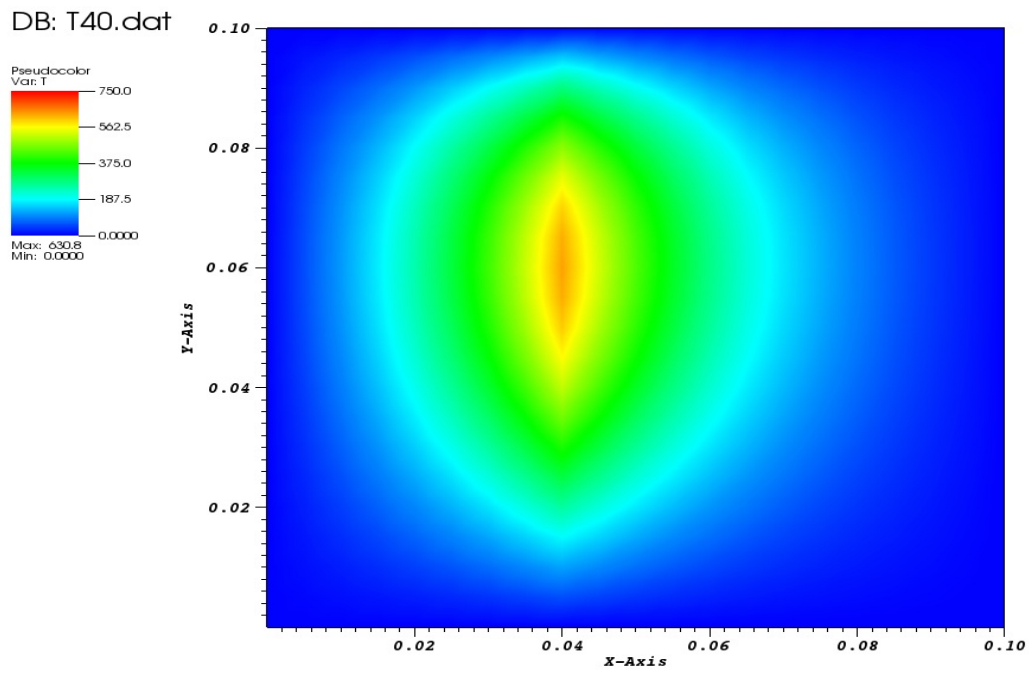
(a)



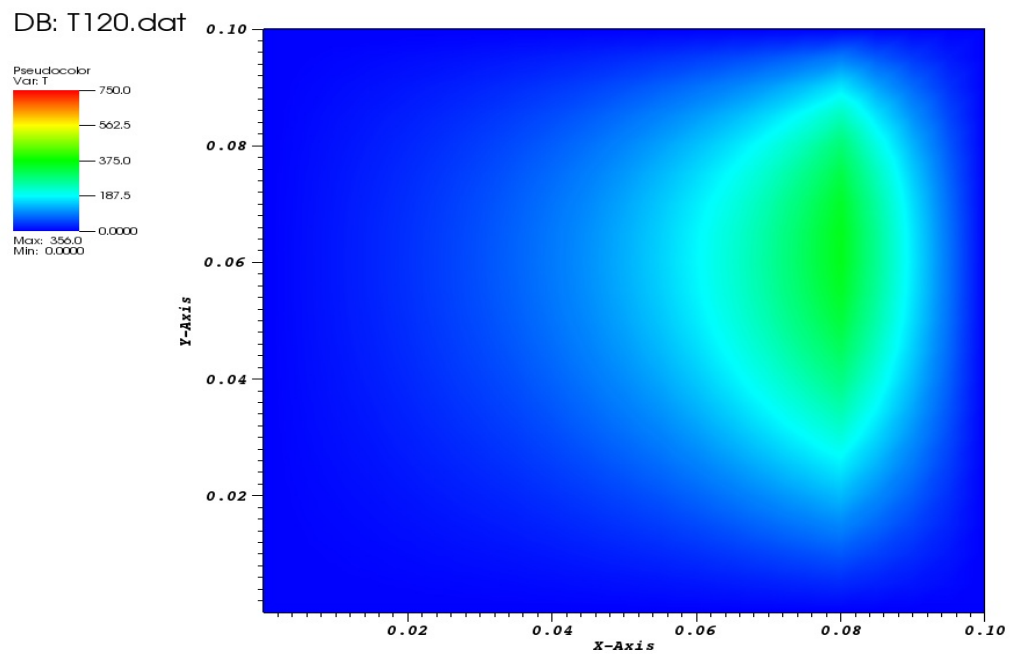
(b)

Figura 4.5: (a) Temperaturas quando $t = 0s$; (b) Temperaturas quando $t = 5s$;

Observa-se pelas Figs. 4.5(a)-4.6(b) o efeito térmico causado pela movimentação do termo



(a)



(b)

Figura 4.6: (a) Temperaturas quando $t = 40s$; (b) Temperaturas quando $t = 120s$;

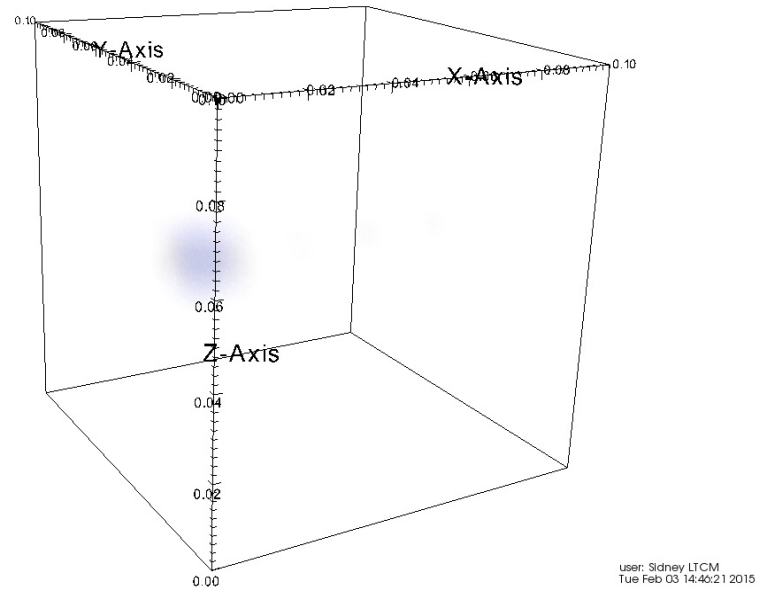
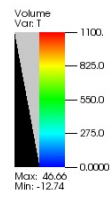
de geração de calor, destacado por alguns tempos. Neste caso apresentou-se os gráficos na variável x .

O problema X11Y11Z13 será apresentado graficamente no capítulo 5.

4.2.4 Representação Gráfica X11Y11Z11

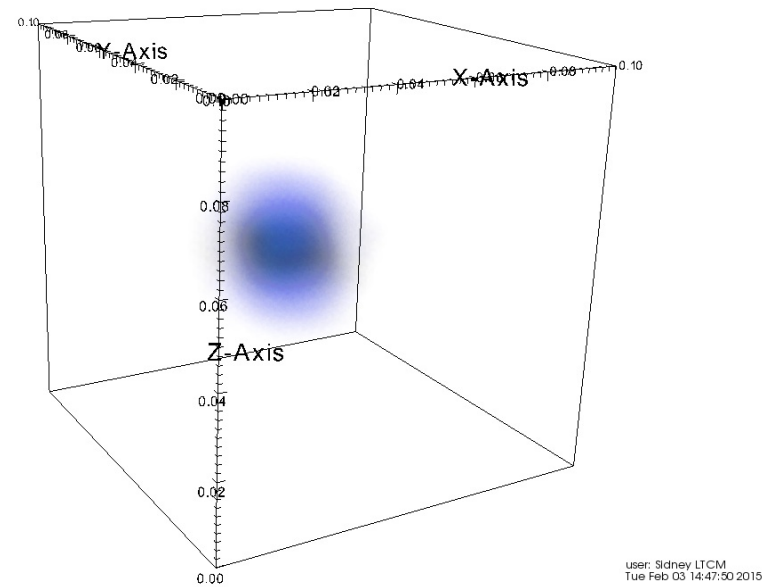
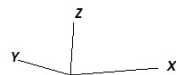
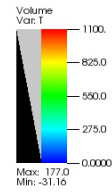
A representação gráfica para o problema térmico X11Y11Y11, que é dada pela Eq.(3.97), será implementada utilizando a mesma metodologia. Contudo para o caso tridimensional as dimensões consideradas serão $L_1 = L_2 = L_3 = 0,1m$, e $g_s(x, y, z)$ localizada nas coordenadas $P_x = 0,02m$, $P_y = 0,05m$ e $P_z = 0,05m$

DB: T1.dat



(a)

DB: T11.dat

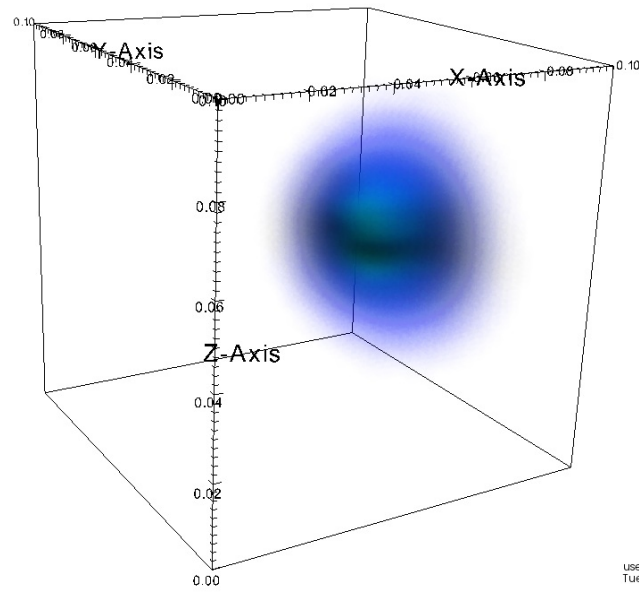
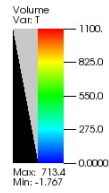


(b)

Figura 4.7: (a) Temperaturas quando $t = 1s$; (b) Temperaturas quando $t = 11s$;

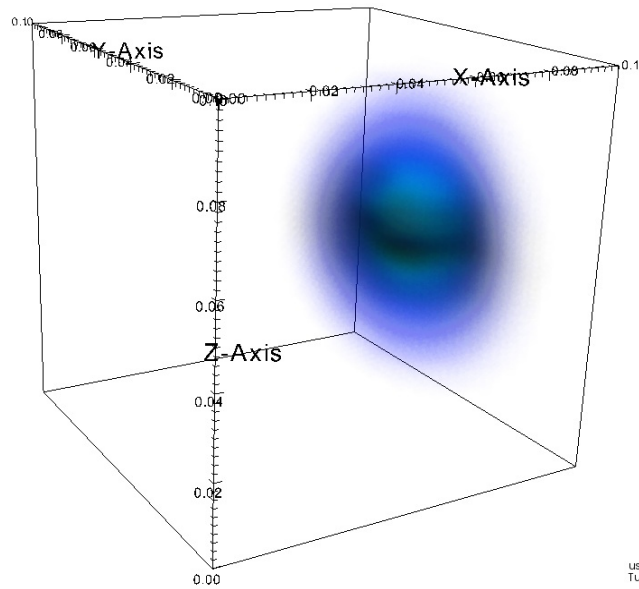
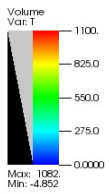
As Figs. 4.7(a)-(b) descrevem o movimento e efeito térmico do termo de geração desde

DB: T25.dat



(a)

DB: T31.dat



(b)

Figura 4.8: (a) Temperaturas quando $t = 25s$; (b) Temperaturas quando $t = 31s$;

a posição inicial onde $t = 1s$, Fig. (4.8(a)), até o instante final de simulação $t = 31s$, Fig. (4.8(b)).

4.3 Verificação

Pode-se, conceituar verificação intrínseca, segundo Beck *et al.* (2006) como a comparação de valores numéricos encontrados entre uma solução exata e a solução que se deseja verificar. Gera-se estas soluções exatas através da utilização de soluções manufaturadas, encontradas em literatura ou soluções para geometrias básicas com condições de contorno simplificadas.

Para realizar uma verificação Beck *et al.* (2006) apresenta diversos métodos como: *time-partitioning intrinsic verification*, *steady state heat conduction solutions*, *complementary transient solution*, *using one-dimensional solution*. Para realizar as verificações apresentadas nas próximas seções iremos fazer a comparação das soluções obtidas no capítulo 3 com uma solução unidimensional X10.

A solução do problema tipo X10 foi escolhida pois possui geometria simples, é semi-infinito, e condição de contorno de primeiro tipo, que também consideramos simples e não possui somatórios, logo, não depende de convergência e truncamento de séries. A metodologia utilizada então será a comparação entre os valores numéricos apresentados pela solução X10 e as soluções calculadas.

A solução do problema X10 pode ser facilmente calculada ou encontrada em (BECK *et al.*, 2010), e tem a forma:

$$T(\xi, t) = \frac{2\alpha g_p}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi P_{\xi}}{L}\right) \left(\frac{1 - \exp\left(\frac{-m^2\pi^2\alpha t}{L^2}\right)}{\frac{m^2\pi^2\alpha}{L^2} + \frac{v^2}{4\alpha}} \right) \quad (4.8)$$

Segue-se, nas proximas seções, a verificação das soluções calculadas.

4.3.1 Verificação, Problema Térmico X11

Apresenta-se a comparação da solução X10 com a solução X11, dada pela Eq.(3.53).

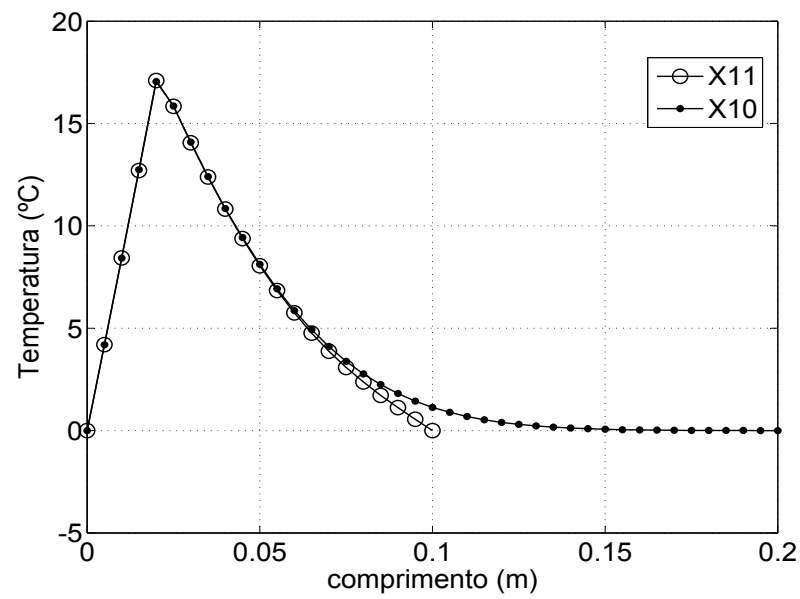


Figura 4.9: Comparativo entre a solução $X10$ e $X11$, $v = 0,0001m/s$, $t = 30s$

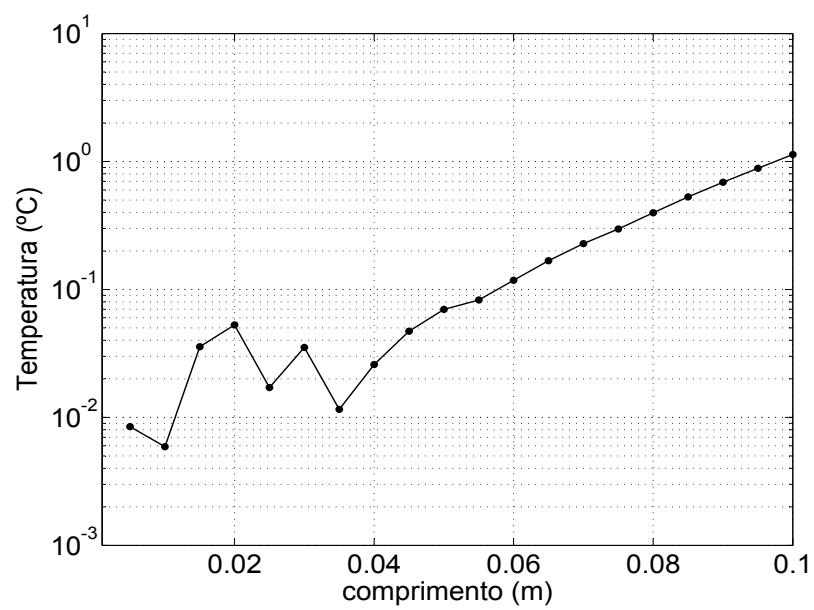


Figura 4.10: Diferença entre as soluções $X10$ e $X11$, $v = 0,0001m/s$, $t = 30s$

Observa-se pela Fig. (4.10) que a diferença absoluta máxima entre as soluções, em $0 \leq x \leq L$, $L = 0,05m$, não ultrapassa $10^{-10}C$ e percentualmente 0,5%. Assim os dois problemas se configurados de forma compatível apresentam soluções equivalentes para o intervalo citado.

Outra forma de se verificar esta solução é comparando-a com outro problema de mesma natureza, porém fixo.

$$W(\xi, t) = \frac{2\alpha g_p}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \exp(-\beta_m^2 \alpha t)}{\beta_m^2 \alpha} \right) \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \quad (4.9)$$

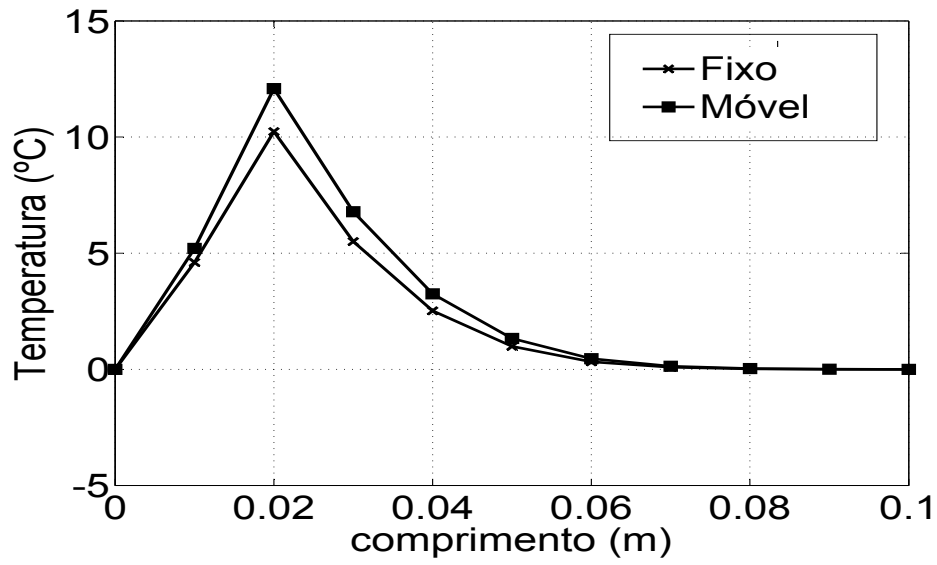
Observa-se que a solução apresentada pela Eq.(4.9) é algebricamente idêntica à solução do problema móvel dado pela Eq.(3.53), com exceção apenas dos termos dependentes da velocidade v .

Assim, nota-se que a Eq.(3.53) se torna igual a solução Eq.(4.9) quando fazemos $v \rightarrow 0$. Observa-se a aproximação da solução Eq.(3.53) sobre a Eq.(4.9). De forma algébrica esta afirmação é o mesmo que dizer:

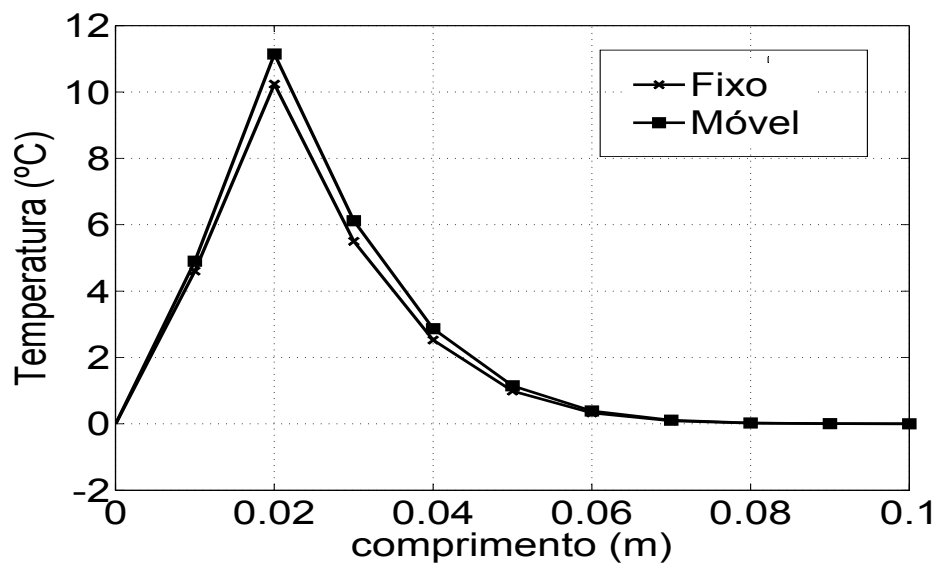
$$W_{X11f} = \lim_{v \rightarrow 0} W_{X11m} \quad (4.10)$$

onde os índices m e f são móvel e fixo respectivamente.

Assim a solução W_{X11m} é verificada de acordo com a solução conhecida W_{X11f} . Então apresenta-se graficamente a aproximação da solução $X11_f$ sobre $X11_m$ para $t = 20s$ variando-se a velocidade.

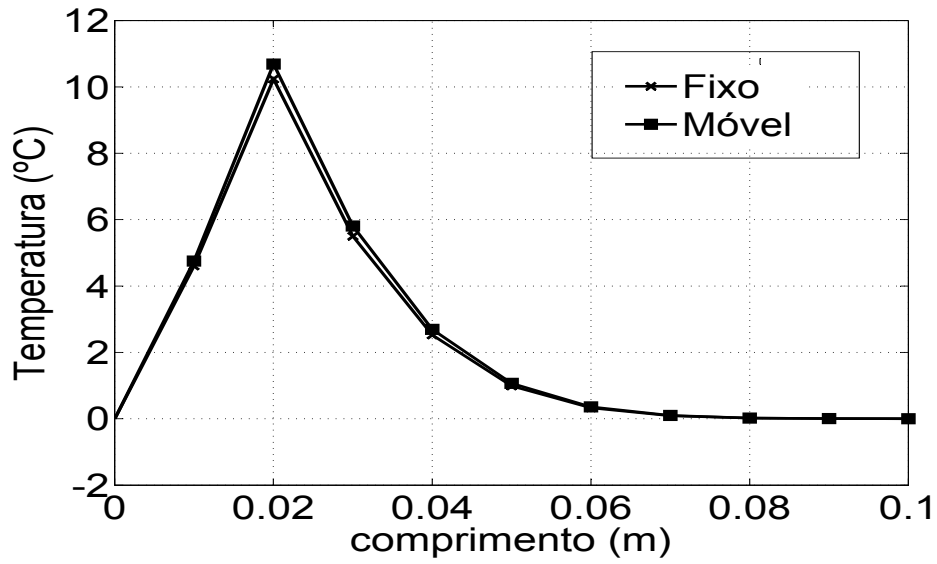


(a)

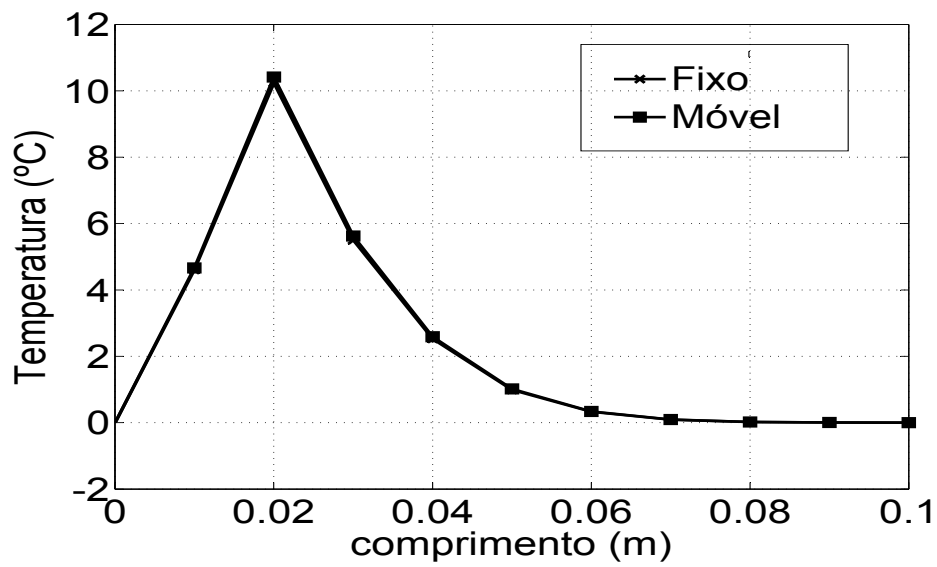


(b)

Figura 4.11: (a) Quando $v = 0,0002m/s$; (b) Quando $v = 0,0001m/s$;



(a)



(b)

Figura 4.12: (a) Quando $v = 0,00005 \text{ m/s}$; (b) Quando $v = 0,00002 \text{ m/s}$;

Graficamente visualiza-se esta aproximação. Nota-se na Fig.(4.12(b)) que as soluções são idênticas quando $v = 0,00002m/s$.

4.3.2 Verificação X13

Verifica-se a solução $X13$, dada pela Eq.(3.62), de maneira análoga à realizada na subseção 4.3.1.

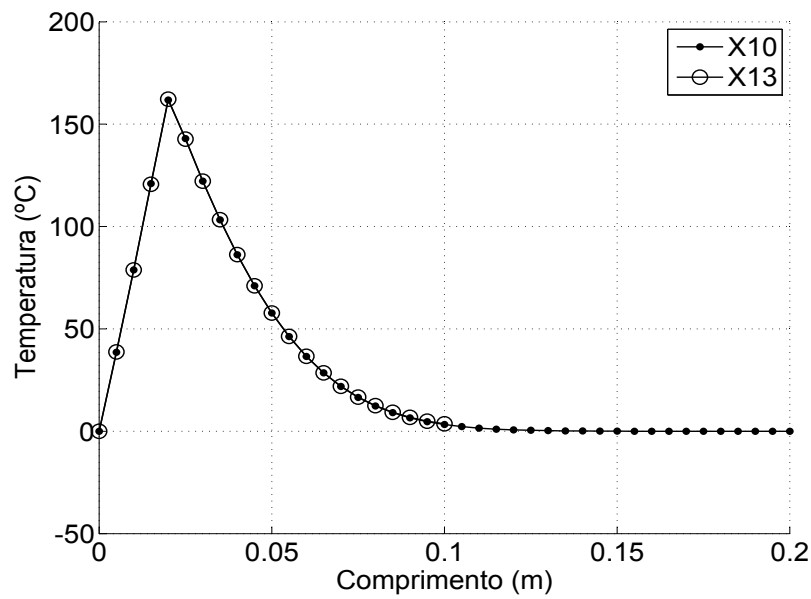
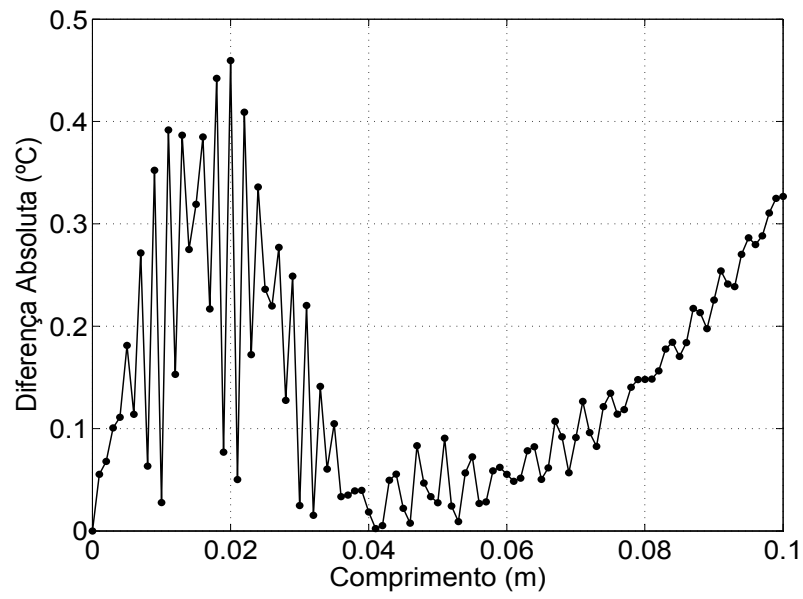
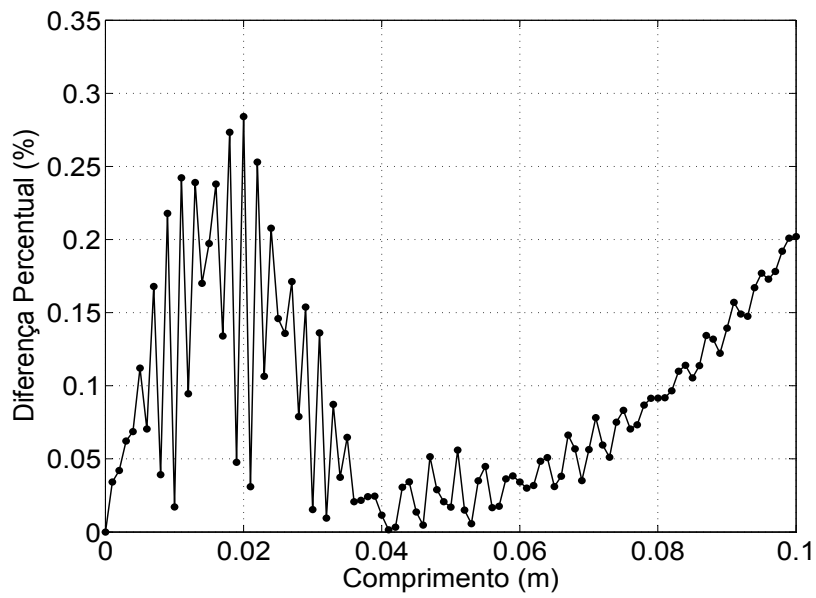


Figura 4.13: Comparativo entre a solução $X10$ e $X13$, $v = 0,0001m/s$, $t = 30s$



(a)



(b)

Figura 4.14: (a) Diferença absoluta ; (b) Diferença percentual;

Observa-se pelo comparativo entre as duas soluções, Fig (4.13), que o comportamento térmico é semelhante. Analisando o grupo de gráficos, Fig (4.14), nota-se que as diferenças máximas absolutas e percentuais entre as soluções, são $0,45^{\circ}C$, e $0,28\%$ respectivamente. Assim, considera-se as soluções compatíveis e verificadas.

4.3.3 Verificação X11Y11

Verifica-se o problema bidimensional X11Y11 reduzindo-o a um problema unidimensional, conforme Beck *et al.* (2006), e assim, compara-o com a solução do problema X11. Para isso, faz-se $L_2 \rightarrow \infty$, dessa forma os termos dependentes de L_2 tenderão a zero. Isso implica, matematicamente, a não influência dos termos dependentes de L_2 , e fisicamente significa que o problema passará a não ter mais influência dos contornos $y = 0$ e $y = L_2$, isto é, haverá difusão de calor apenas na direção do eixo x , e dessa forma o problema bidimensional pode ser comparado a um problema unidimensional.

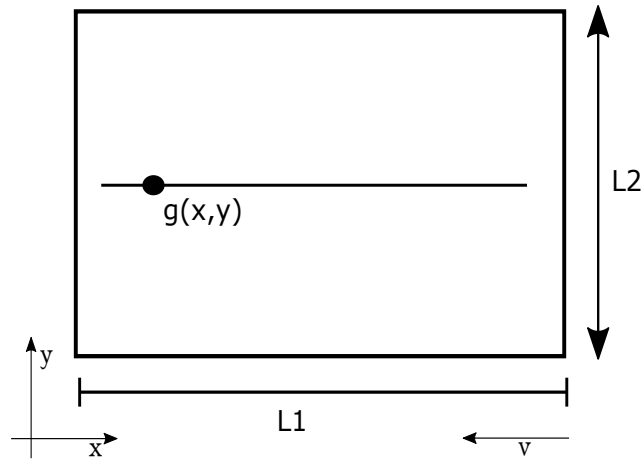
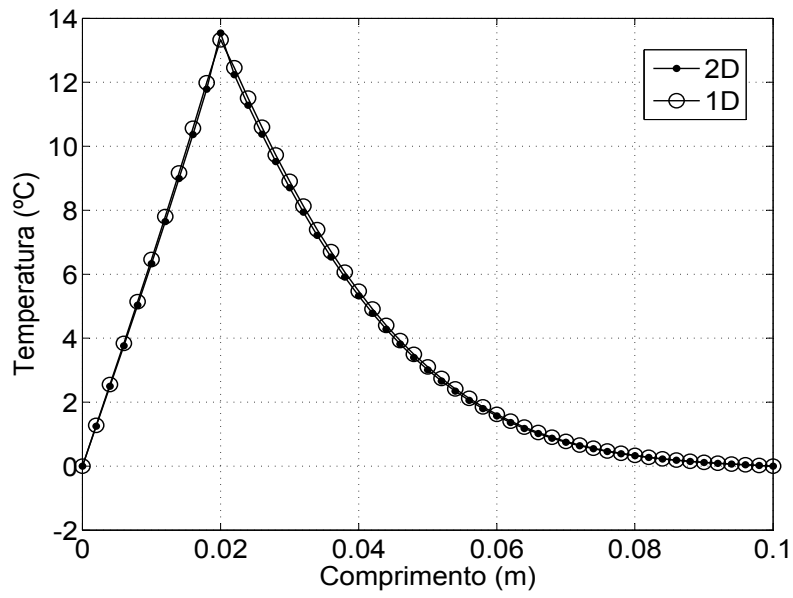


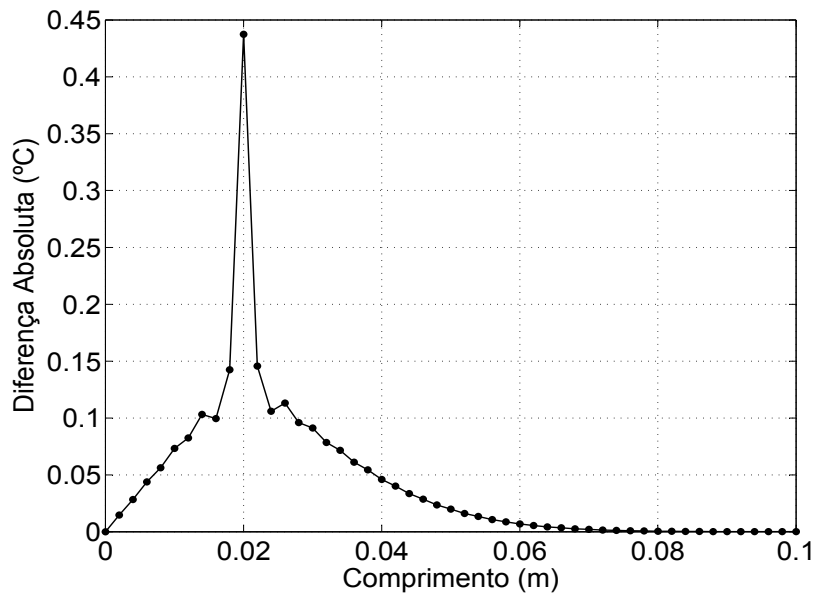
Figura 4.15: Esquema para utilização do método.

Esquemáticamente, a Fig. (4.15) ilustra o método.

Observa-se pela Fig. (4.16(a)) que as soluções tem o comportamento semelhante, nestas condições, evidenciamos a diferença máxima entre as duas soluções, que são, $0,45^{\circ}C$ e demais diferenças inferiores a $0,15^{\circ}C$. Desta forma, analogamente aos casos anteriores, considera-se validada a solução bidimensional através da comparação com uma solução unidimensional.



(a)



(b)

Figura 4.16: (a) Comparativo entre as soluções X11 e X11Y11 para $t = 30s$ e $v = 0,0001m/s$; (b) Diferença absoluta entre as soluções para $t = 30s$ e $v = 0,0001m/s$.

4.3.4 Verificação X11Y11Z11

Verifica-se o problema tridimensional usando a metodologia empregada ao caso bidimensional. Assim além de fazermos $L_2 \rightarrow \infty$, faz-se também $L_3 \rightarrow \infty$. Dessa forma, os contornos nas direções y e z passarão a não influenciar na solução do problema, tanto fisicamente quanto matematicamente.

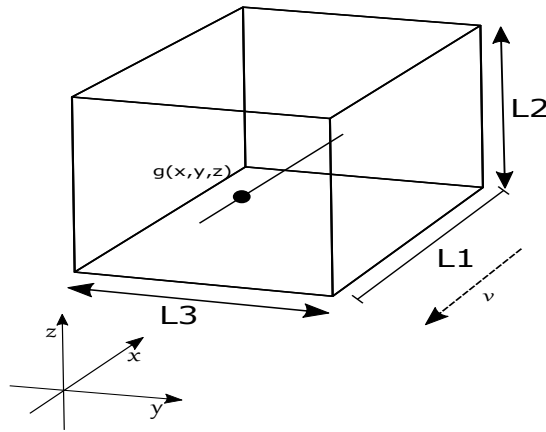
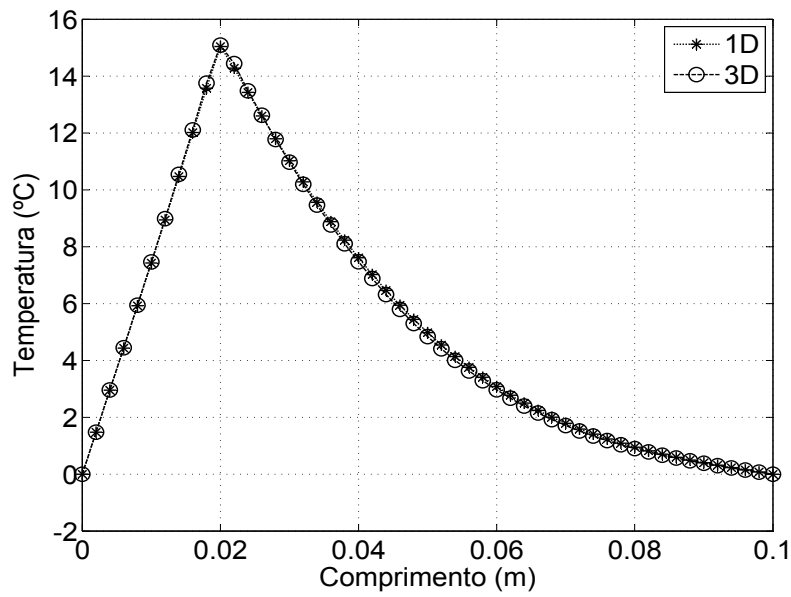
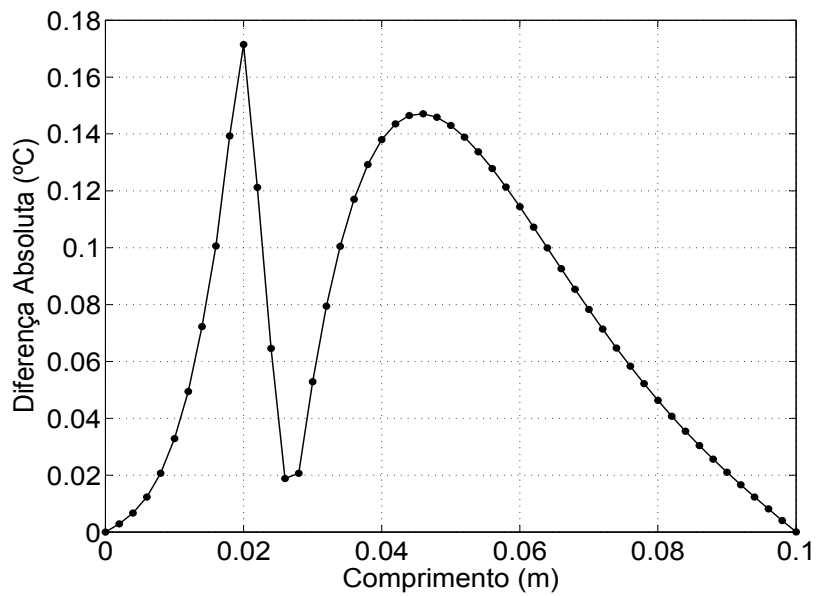


Figura 4.17: Esquema metodológico para comparação.

A Fig.(4.17), ilustra o método aplicado a uma geometria tridimensional.



(a)



(b)

Figura 4.18: (a) Comportamento térmico das soluções $X11$ e $X11Y11Z11$ para $t = 30s$ e $v = 0,0001m/s$; (b) Diferença absoluta entre as soluções $X11$ e $X11Y11Z11$ para $t = 30s$ e $v = 0,0001m/s$.

Observa-se pela Fig. (4.18(a)) o mesmo comportamento térmico entre as soluções quando configurados de forma similar, a diferença absoluta máxima apresentada é $0,17^\circ C$, que percentualmente é menor que 1%. Assim considera-se verificada a solução tridimensional.

A verificação da solução do problema $X11Y11Z11$ utilizando movimentação pelos três eixos, x , y e z , segue-se de forma análoga a desenvolvida nesta seção. Basta fazermos, além destas condições, $v_y \rightarrow 0$ e $v_z \rightarrow 0$. Dessa forma obtém-se, algebricamente, a solução apresentada nesta seção. E consequentemente verificada.

4.3.5 Verificação $X11Y11Z13$

Observa-se que, para o caso com convecção térmica na superfície $z = L_3$ a comparação deverá ser feita usando a solução $X13$, pois se realizarmos um procedimento análogo ao da seção anterior não será levado em consideração os termos dependentes do contorno de convecção na solução.

Assim, faz-se $L_1 \rightarrow \infty$, $L_3 \rightarrow \infty$, e então, compara-se o problema tridimensional com o problema unidimensional $X13$ dado pela Eq. (3.62).

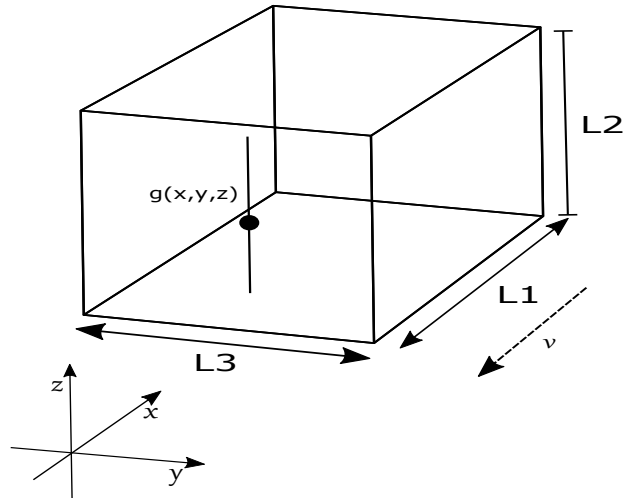


Figura 4.19: Esquema de comparação para o problema tridimensional.

Os gráficos a seguir ilustram o comportamento térmico entre as duas soluções.

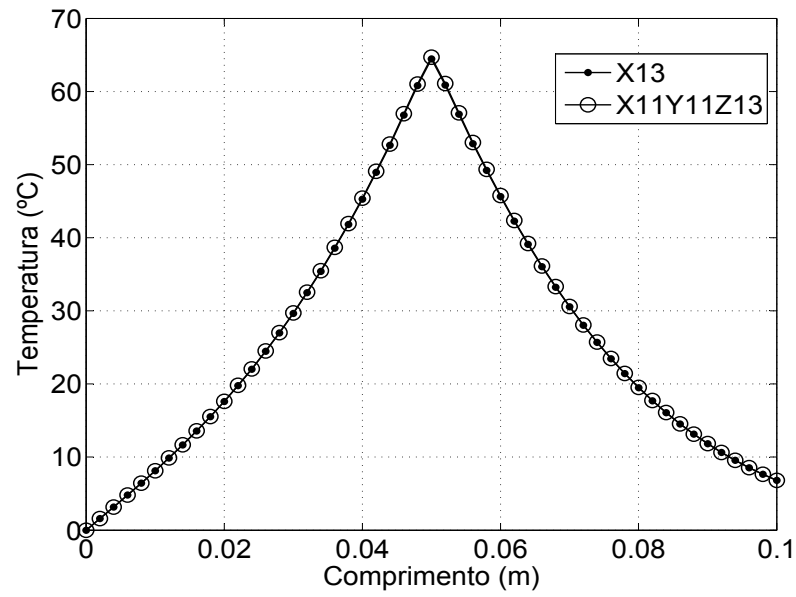
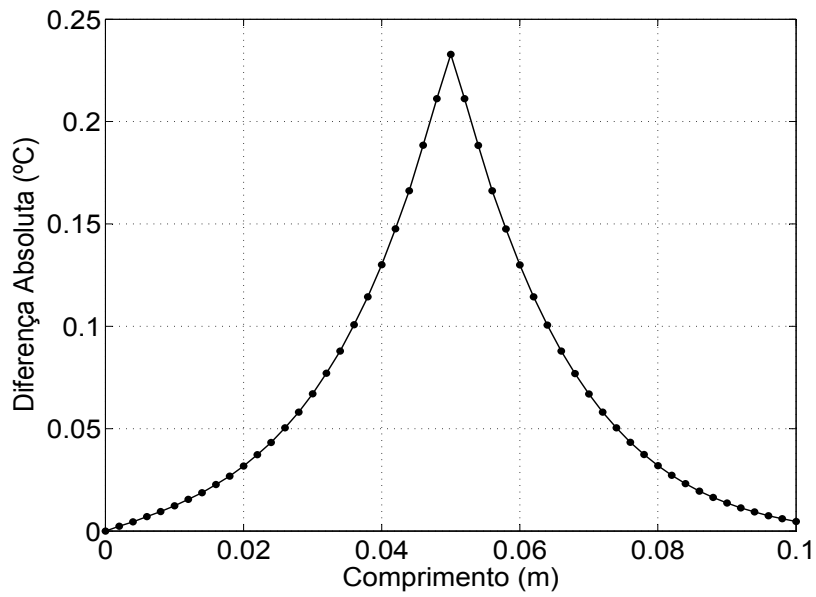
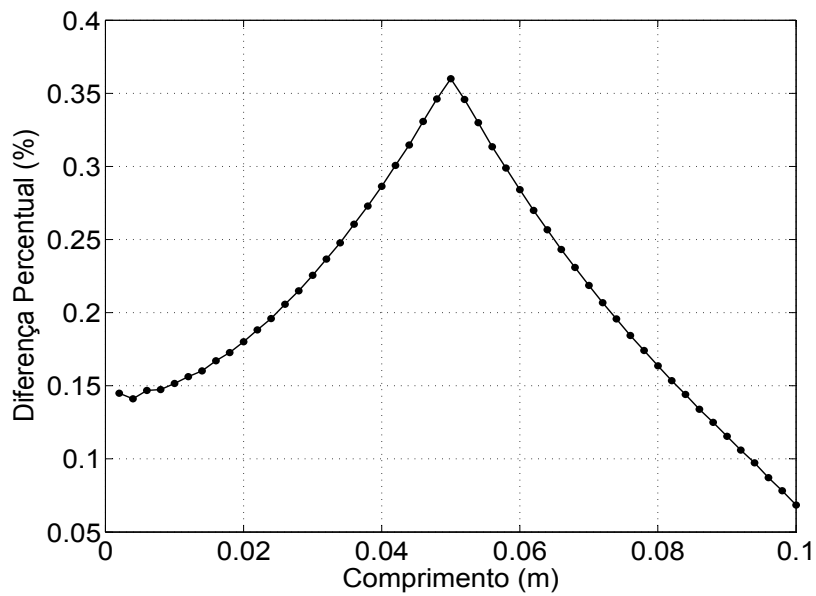


Figura 4.20: Comportamento térmico das soluções X13 e X11Y11Z13 para $v = 0,0001m/s$ e $t = 30s$

Observa-se pela Fig. (4.20), que o comportamento térmico entre as duas soluções é semelhante.



(a)



(b)

Figura 4.21: (a) Diferença absoluta ; (b) Diferença percentual;

A Fig. (4.21(a)) apresenta a diferença absoluta entre as duas soluções, nota-se que a

diferença máxima apresentada é $0,23^{\circ}C$, sendo um percentual máximo de $0,35\%$. Dessa forma, os problemas se configurados de forma análoga apresentam as mesmas respostas de temperatura, assim, considera-se o problema tridimensional verificado.

Nesse sentido outra análise que pode ser empregada ao problema $X11Y11Z13$, é a comparação com o problema $X11$, onde, se fizermos $L_2 \rightarrow \infty$ e $L_3 \rightarrow \infty$, obteremos os mesmos resultados apresentados na comparação dos problemas $X11Y11Z11$ e $X11$, realizado na seção anterior, pois a condição de contorno de convecção térmica não apresentaria influência sobre o problema.

4.4 Comparação com Método Numérico

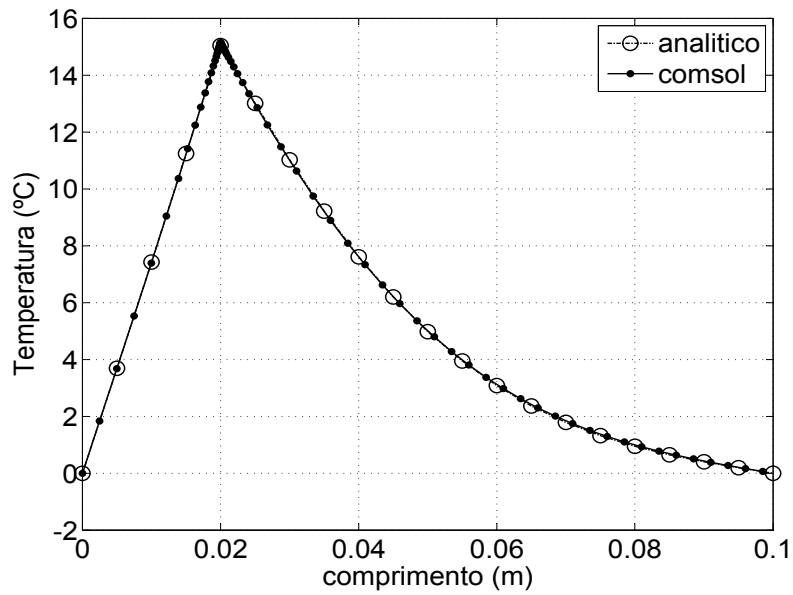
Apresenta-se nesta seção a comparações das respostas de temperatura obtidas por métodos numéricos e soluções analíticas usando as mesmas configurações de condições de contorno, iniciais e propriedades termofísicas.

As soluções numéricas serão calculadas pelo *software* comercial COMSOL que usa o método de elementos finitos para resolver as equações diferenciais.

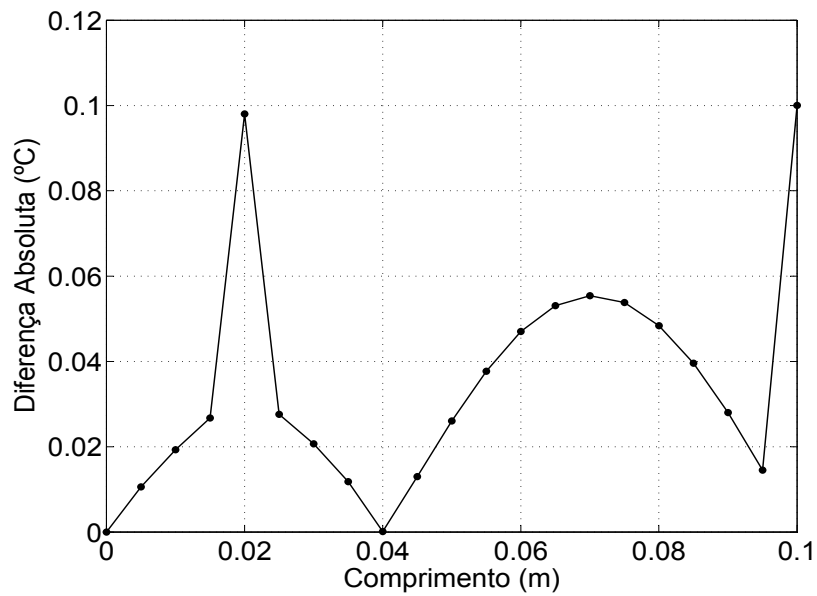
As etapas para resolver um problema usando o *software* COMSOL consiste nos seguintes passos: Determinação da dimensão do problema, dependência ou não dependência temporal, desenho e dimensionamento da geometria, determinação de condições de contorno e inicial, ajuste de malha e impressão dos resultados. A seguir apresentam-se as comparações realizadas para cada solução analítica calculada.

4.4.1 Problema Térmico X11

Apresenta-se a comparação do problema unidimensional $X11$ resolvido por método analítico e numérico.



(a)



(b)

Figura 4.22: (a) Perfis de temperatura obtidos ; (b) Diferença absoluta entre as soluções;

Pode-se observar pela Fig. (4.22(a)) que o comportamento térmico apresentado pelas

duas soluções são semelhantes, nota-se uma diferença máxima entre as soluções de $0,1^{\circ}\text{C}$, como mostra a Fig.(4.22(b)), o que corresponde a um percentual máximo de $0,6\%$.

4.4.2 Problema Térmico X13

Mostra-se a comparação entre as soluções, analítica e numérica para o problema unidimensional X13.

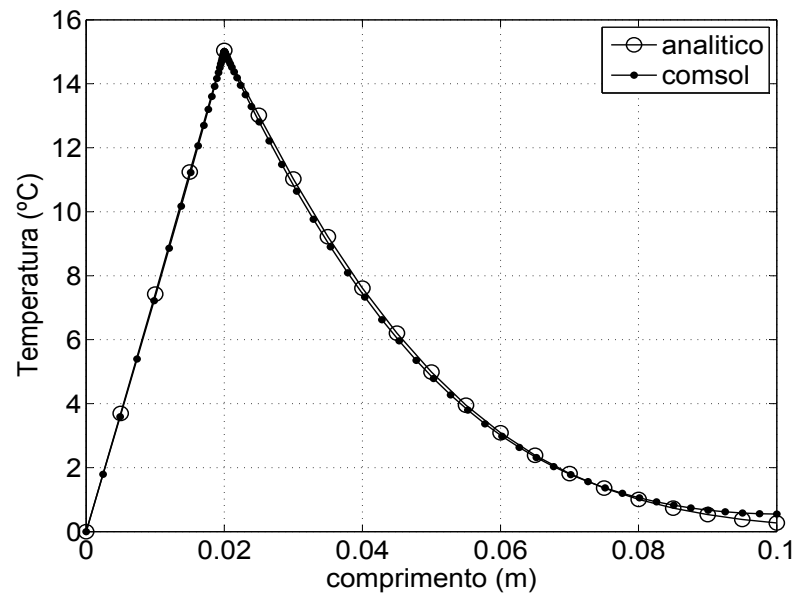


Figura 4.23: Perfil de temperatura entre as soluções.

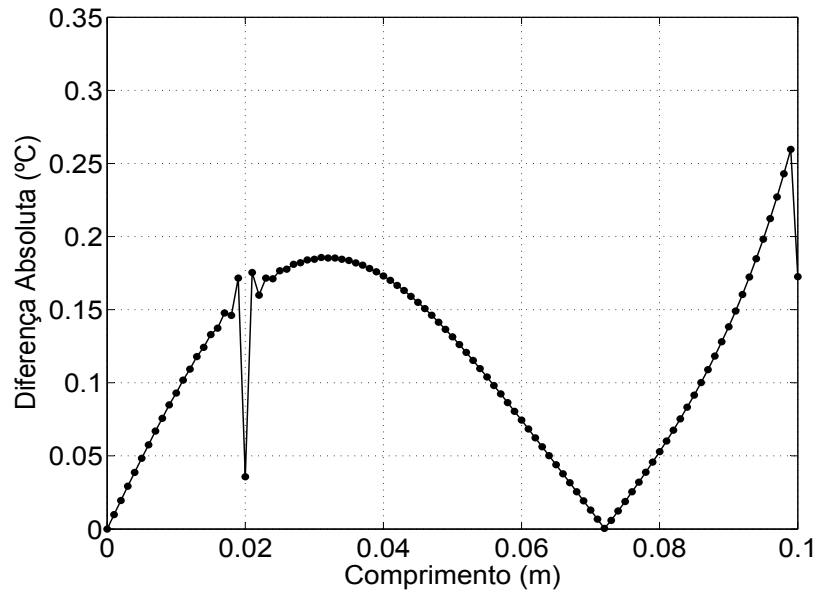


Figura 4.24: Diferença absoluta entre as soluções.

Pode-se observar, de forma análoga, pelas Figs. (4.23-4.24) o comportamento semelhante entre as soluções. E apresenta-se uma diferença máxima de $0,25^{\circ}C$ o que percentualmente é 1%.

4.4.3 Problema Térmico X11Y11

Apresenta-se a comparação da solução bidimensional analítica e numérica para o problema X11Y11. A comparação será feita com as temperaturas calculadas ao longo do eixo x deslocado $0,05m$ no eixo y positivo. O gráfico a seguir ilustra esta comparação.

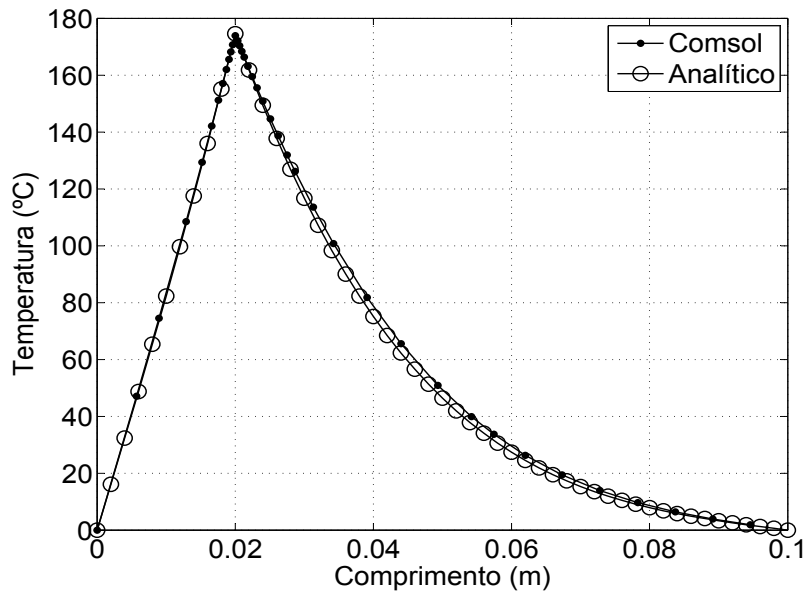


Figura 4.25: Comportamento térmico das soluções X11Y11 analítica e numérica para $v = 0,0001m/s$ e $t = 30s$

Observa-se, analisando a Fig.(4.25), que ambas soluções, analítica e numérica, apresentam resultados similares, onde a diferença máxima apresentada é de $1,5^{\circ}C$, o que percentualmente representa $0,83\%$.

4.4.4 Problema Térmico X11Y11Z11

Apresenta-se a comparação entre os problemas tridimensionais segundo metodologia apresentada por Mohammad *et al.* (2013), assim, realiza-se uma comparação entre solução analítica e numérica fazendo um corte na geometria, desta forma é observada a distribuição de temperatura nas duas geometrias ao longo do eixo x e fixa-se os demais eixos y e z em $0,05m$ para ambos os casos.

Assim, segue-se a comparação entre as duas soluções, analítica e numérica:

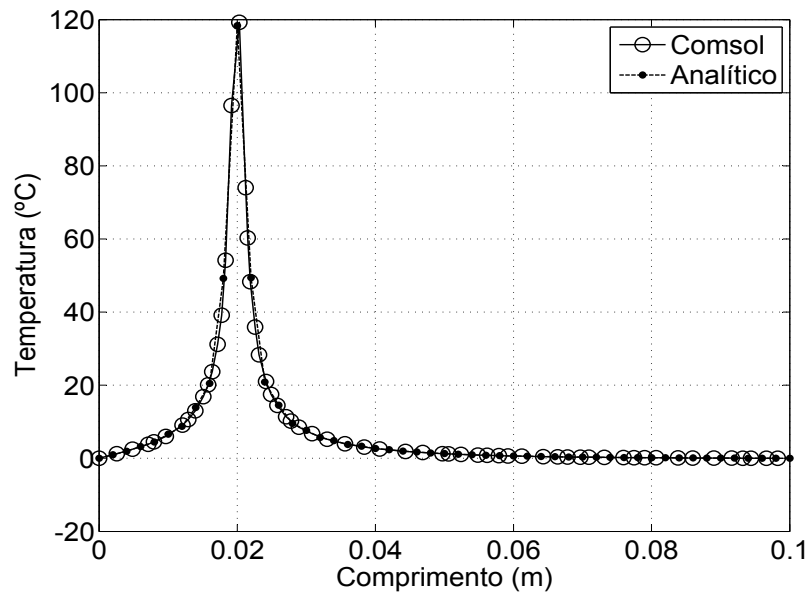


Figura 4.26: Comportamento térmico das soluções X11Y11Z11 analítica e numérica para $v = 0,0001\text{m/s}$ e $t = 30\text{s}$

Nota-se, pela Fig.(4.26) o comportamento similar entre as soluções calculadas pelo método analítico e numérico, a diferença máxima observada é de $0,5^{\circ}\text{C}$ o que corresponde a um percentual máximo de $0,45\%$.

Capítulo 5

Aplicação e Problema Inverso

Apresenta-se neste capítulo uma aplicação prática para a solução analítica obtida no Capítulo.3, e, também será feita a abordagem sobre problema inverso, onde, será mostrado a estimativa do valor numérico do termo de geração de calor.

5.1 Aplicação

Uma importante aplicação em engenharia onde uma fonte móvel de calor está presente é apresentada por um processo de soldagem. Na maioria destes processos, o problema térmico resultante é tridimensional e transiente.

Embora existam vários trabalhos numéricos na literatura que tratam da solução desses problemas, soluções analíticas são muito importantes não só para a solução do problema térmico, mas para a construção de modelos para obtenção do aporte de calor na placa a ser soldada, que na prática é desconhecido e representa uma variável importante no processo.

Nesse caso, considera-se um placa metálica de alumínio 6065-*T5*, que possui as seguintes propriedades termofísicas: $k = 166 W m^{-1} K^{-1}$, $\alpha = 5,224 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$ e dimensões $L_1 = L_2 = 0,10m$ e $L_3 = 0,006m$.

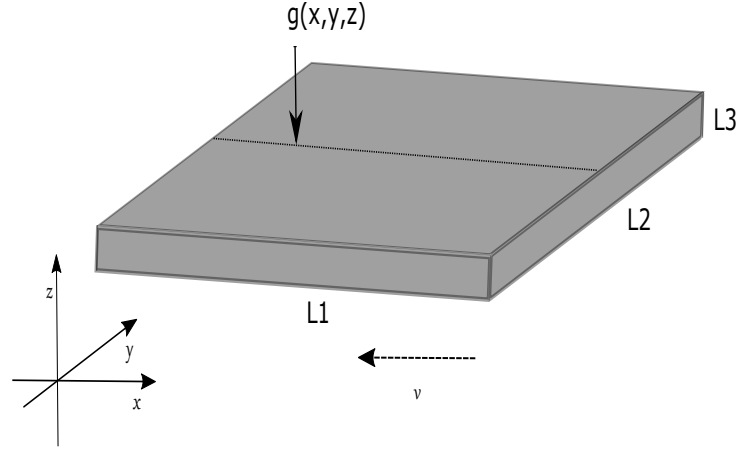


Figura 5.1: Problema de soldagem

A Fig. (5.1) representa uma placa de alumínio sujeita a uma geração de calor constante por um arco elétrico que gera um calor superficial total e constante de $g(x, y, z, t) = 400Wm^{-3}$, posicionada inicialmente nas coordenadas $(0,02, 0,05, L_3)$, e se movendo a uma velocidade constante $v = 0,0001ms^{-1}$ na direção do eixo x , sob um coeficiente de convecção térmica $h = 20Wm^{-2}K^{-1}$ e temperatura inicial de $T_o(x, y, z) = 0^\circ C$.

Modela-se este problema da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{g}{k} \delta(\xi - P_\xi) \delta(y - P_y) \delta(z - P_z) \exp\left(\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2 t}{4\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.1)$$

Sob as condições de contorno:

$$W(0, y, z, t) = W(L_1, y, z, t) = 0 \quad (5.2)$$

$$W(\xi, 0, z, t) = W(\xi, L_2, z, t) = 0 \quad (5.3)$$

$$W(\xi, y, 0, t) = 0 \quad (5.4)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, y, z, 0) = 0 \quad (5.5)$$

A condição de contorno para $z = L_3$ é dada por:

$$k \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=L_3} + W(L_3, t) \left(h + \frac{kv}{2\alpha} \right) = hW_\infty e^{\frac{-vL_3}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}} \quad (5.6)$$

onde

$$h + \frac{kv}{2\alpha} = h_{eff} \quad (5.7)$$

h_{eff} é o coeficiente efetivo de convecção de calor, conforme Beck e McMasters (2004).

Nota-se que o problema dado pela Eq.(5.1), juntamente com as condições de contorno estão dadas nas variáveis auxiliares W e ξ .

Assim, a solução analítica para o problema é dada por:

$$\begin{aligned} T(\xi, y, z, t) = e^{\frac{v\xi}{2\alpha} - \frac{v^2t}{4\alpha}} & \left\{ \frac{8\alpha g_s}{L_1 L_2 L_3 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n P_y) \right. \\ & \times \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p P_z) \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) e^{\frac{vP_\xi}{2\alpha}} \left(\frac{e^{\frac{-v^2t}{4\alpha}} - e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha t}}{(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha - \frac{v^2t}{4\alpha}} \right) \\ & + \frac{8\alpha h W_\infty}{L_1 L_2 L_3 k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_p z) e^{\frac{-vL_3}{2\alpha}} \\ & \times \left(\frac{e^{\frac{-v^2t}{4\alpha}} - e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha t}}{(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha - \frac{v^2t}{4\alpha}} \right) \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) \left(\frac{1 - \cos(\beta_m L_1)}{\beta_m} \right) \\ & \times \left(\frac{1 - \cos(\beta_n L_2)}{\beta_n} \right) \left(\frac{1 - \cos(\beta_p L_3)}{\beta_p} \right) \Big\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

O processo de obtenção da solução da Eq.(5.8), foi detalhado no Capítulo 3

5.2 Problema Direto

Conhecendo-se a solução analítica, propriedades termofísicas e dimensões, a distribuição de temperatura para este problema é calculada em seis pontos distintos na superfície $z = L_3$ durante o tempo $t = 30s$. Pode-se analisar a temperatura para qualquer ponto na superfície

$z = L_3$ ou no interior da geometria, mas para esta análise destacaram-se os pontos como ilustrados na figura abaixo.

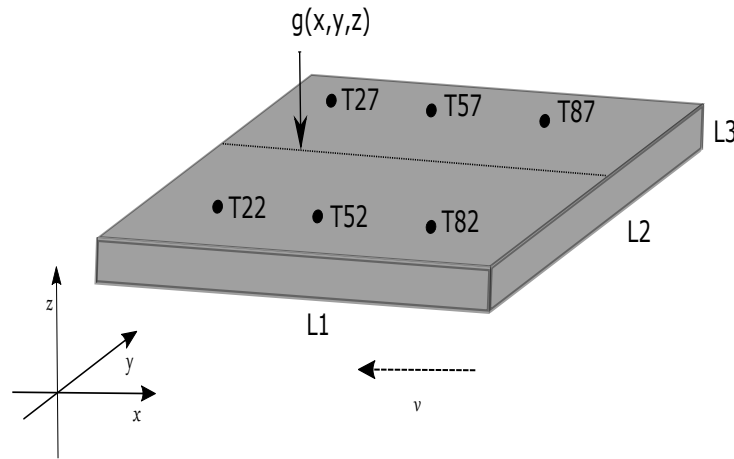


Figura 5.2: Problema de soldagem e pontos para cálculo de temperatura

As posições dos pontos mostrados na Fig.(5.2), são listados abaixo.

Tabela 5.1: Posicionamento dos pontos de cálculo de temperatura.

Ponto	coordenada x (m)	coordenada y (m)	coordenada z (m)
T22	0,02	0,02	0,006
T52	0,05	0,02	0,006
T82	0,08	0,02	0,006
T27	0,02	0,07	0,006
T57	0,05	0,07	0,006
T87	0,08	0,07	0,006

Dessa forma, a resposta de temperatura para cada ponto mostrado na Tab.(5.1) é dada pela solução da Eq. (5.8) implementada via *software* MATLAB, para o tempo $0 \leq t \leq 30$ segundos.

Os perfis de temperatura são ilustrados pelos gráficos abaixo:

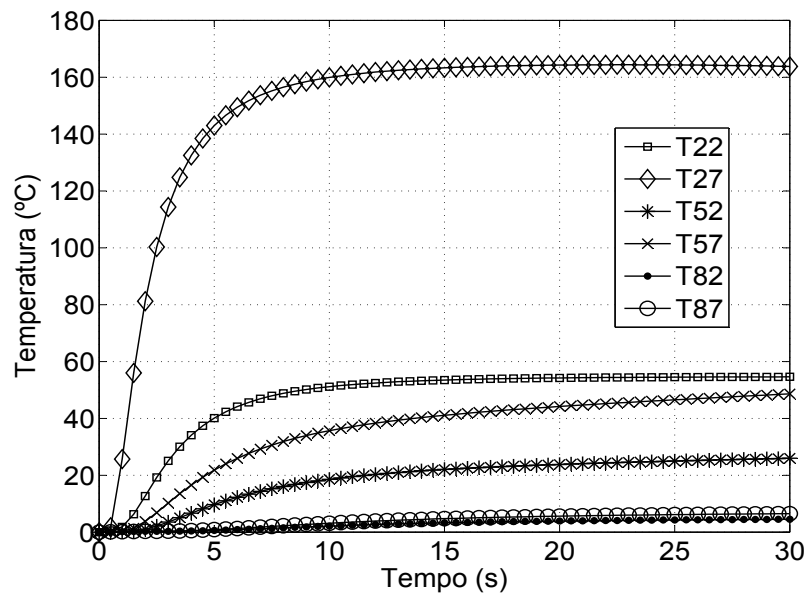


Figura 5.3: Perfil de temperatura nos pontos descritos pela Tab.5.1.

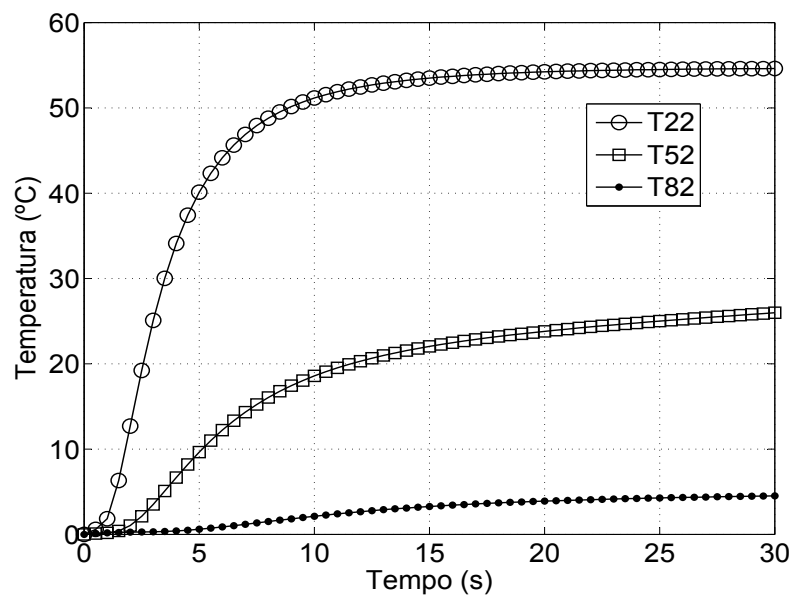


Figura 5.4: Temperatura nos pontos ao longo do eixo $y = 0,02m$.

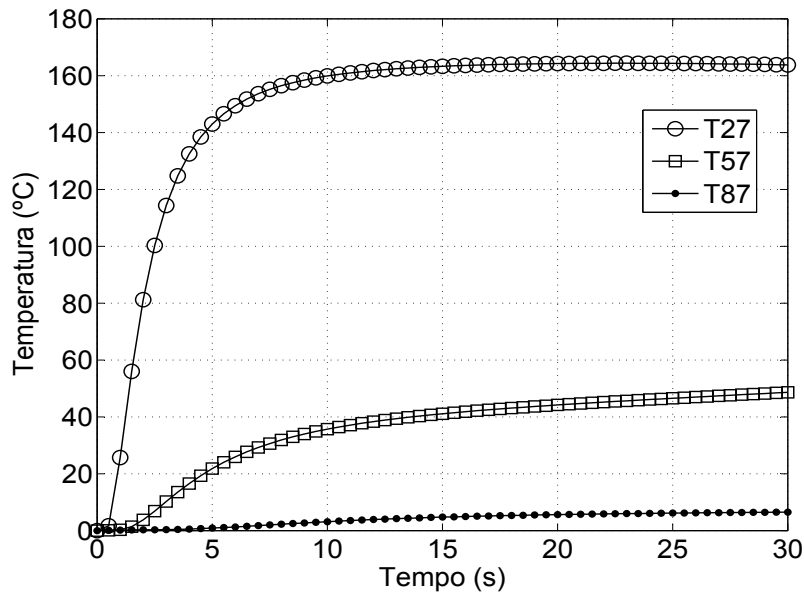


Figura 5.5: Temperatura nos pontos ao longo do eixo $y = 0,07m$.

A Fig.(5.3) ilustra os perfis de temperatura para todos os pontos indicados na Tab. (5.1), enquanto as Figs.(5.4-5.5) mostram os perfis de temperatura ao longo das linhas $y = 0,02m$ e $y = 0,07m$ respectivamente, nota-se que a Fig.(5.5) apresenta temperaturas mais altas em relação a Fig.(5.4) devido ao fato dos pontos usados para obtenção de temperatura, Fig.(5.4), estarem mais próximos ao local de aplicação do fluxo de calor.

5.3 Problema Inverso

Mostra-se nesta seção um abordagem de problema inverso que pode ser aplicada à solução analítica que foi desenvolvida neste trabalho. Propõe-se, realizar uma estimativa para o valor numérico do termo de geração de calor, para isso, usaremos a solução analítica que foi desenvolvida no Cap. 3, o método de função de transferência baseado em funções de Green (FERNANDES, 2013) e dados hipotéticos de temperatura que foram obtidos na seção anterior.

5.3.1 Função de Transferência

Nesta seção detalha-se o procedimento de identificação da função de transferência que é a ferramenta que será usada para realizar a estimativa do termo de geração de calor que originou as temperaturas no problema de soldagem, que foi abordado anteriormente.

Em sisemas dinâmicos três são as variáveis a serem estudadas, a excitação, a função tranferência e a resposta do sistema, desta forma os problemas são resolvidos conhecendo-se sempre duas variáveis e estimando a terceira: os problemas inversos são aqueles em que a partir do conhecimento do sistema e de sua resposta (efeito) estima-se a excitação (causa). É possível analisar problemas de condução de calor fazendo-se uma analogia aos sistemas dinâmicos. (FERNANDES, 2013)

Conhecendo então a FG que caracteriza o problema é possível identificar a resposta impulsiva do sistema, e portanto, sua função de transferência. A função de transferência é obtida aplicando a transformada de Laplace à resposta impulsiva.

Assim, como é conhecida a FG para o problema X11Y11Z13, sua solução, que é proposta pela Eq.(3.128) do Cap.3 e utilizando o Teorema da Convolução, que é dado por:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau \quad (5.9)$$

pode-se organizar a expressão dada pela Eq.(3.128) em termos do Teorema da Convolução, Eq. (5.9), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W(\xi, y, z, t) = & \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} G(\xi, y, z, t | \xi', y', z', t - \tau) g(\tau) \delta(\xi' - P_\xi) \\ & \times \delta(y' - P_y) \delta(z' - P_z) e^{\frac{v\xi'}{2\alpha} - \frac{v^2\tau}{4\alpha}} dz' dy' d\xi' d\tau \end{aligned} \quad (5.10)$$

note que a solução dada pela Eq.(5.10) não foi ainda transformada para a variável T , esta operação será realizada posteriormente.

Substituindo a FG característica ao problema X11Y11Z13 e reorganizando os termos na Eq.(5.10) temos:

$$\begin{aligned}
W(\xi, y, z, t) = & \int_{\tau=0}^t g(\tau) e^{\frac{-v^2\tau}{2\alpha}} \left(\frac{\alpha}{k} \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha(t-\tau)} \right. \\
& \times \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \delta(\xi' - P_\xi) \\
& \times \delta(y' - P_y) \delta(z' - P_z) e^{\frac{v\xi'}{2\alpha}} \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) \left. \right) d\xi' dy' dz' d\tau
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Observe que a Eq.(5.11) é dada pelo produto de termos que são dependentes de τ e o do atraso $t - \tau$, o que caracteriza o Teorema da Convolução Eq.(5.9). Esquemáticamente pode-se ilustrar a operação dada pela Eq.(5.11) da seguinte forma:

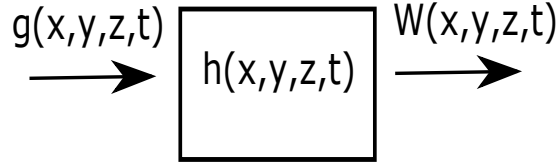


Figura 5.6: Esquema que ilustra a operação descrita pela Eq.5.9

A Fig. (5.6) representa esquematicamente o sistema dado pela Eq.(5.11), onde a resposta de temperatura é obtida pela excitação de um sistema, $h(x, u, z, t)$, por um termo $g(x, y, z, t)$. O termo $h(x, y, z, t)$ é denominado Resposta Impulsiva. (FERNANDES, 2013).

Conhecendo as temperaturas hipotéticas, $W(x, y, z, t)$, pode-se determinar, com manipulações algébricas, a resposta impulsiva deste sistema. Para isso, na Eq.(5.11) considera-se o termo referente a geração de calor igual a uma função delta de Dirac, isto é, $g(x, y, z, \tau) e^{\frac{-v^2\tau}{2\alpha}} = \delta(\tau)$. Assim tem-se que:

$$\begin{aligned}
W(\xi, y, z, t) &= \int_{\tau=0}^t \delta(\tau) \left(\frac{\alpha}{k} \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha(t-\tau)} \right. \\
&\quad \times \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \delta(\xi' - P_\xi) \\
&\quad \times \delta(y' - P_y) \delta(z' - P_z) e^{\frac{v \xi'}{2\alpha}} \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) \left. \right) d\xi' dy' dz' d\tau \\
&= \delta(t) * \left(\frac{\alpha}{k} \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha t} \right. \\
&\quad \times \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \delta(\xi' - P_\xi) \\
&\quad \times \delta(y' - P_y) \delta(z' - P_z) e^{\frac{v \xi'}{2\alpha}} \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) \left. \right) d\xi' dy' dz'
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Note que a Eq.(5.12) está em termos da propriedade da convolução, isto é, $\delta * h = h$. Assim identifica-se facilmente a resposta impulsiva, que é dada por:

$$\begin{aligned}
h(\xi, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_{\xi'=0}^{L_1} \int_{y'=0}^{L_2} \int_{z'=0}^{L_3} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha t} \\
&\quad \times \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m \xi') \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n y') \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p z') \delta(\xi' - P_\xi) \\
&\quad \times \delta(y' - P_y) \delta(z' - P_z) e^{\frac{v \xi'}{2\alpha}} \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right) d\xi' dy' dz'
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Resolvendo as integrais espaciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
h(\xi, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \frac{8}{L_1 L_2 L_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-(\beta_m^2 + \beta_n^2 + \beta_p^2)\alpha t} \\
&\quad \times \text{sen}(\beta_m \xi) \text{sen}(\beta_m P_\xi) \text{sen}(\beta_n y) \text{sen}(\beta_n P_y) \text{sen}(\beta_p z) \text{sen}(\beta_p P_z) \\
&\quad \times e^{\frac{v P_\xi}{2\alpha}} \left(\frac{\beta_p^2 + B^2}{\beta_p^2 + B^2 + B} \right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Assim, calcula-se o termo de geração realizando a operação:

$$T(x, y, z, t) = g(x, y, z, t) * h(x, y, z, t) \tag{5.15}$$

Dentre as várias formas de se realizar este cálculo, optou-se por levar o problema para o domínio da frequência, isto é, aplicando a transformada de Laplace na Eq.(5.15) possibilita converter a operação convolução em um produto no domínio da frequência, pois segundo o teorema da convolução, vale a seguinte propriedade:

$$\mathcal{L}[g(t) * h(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \cdot \mathcal{L}[h(t)]. \quad (5.16)$$

Assim, transformando a Eq.(5.15) para o domínio da frequência e fazendo-se valer da propriedade, Eq.(5.16), tem-se:

$$T(s) = g(s) \cdot h(s) \Rightarrow g(s) = \frac{T(s)}{h(s)} \quad (5.17)$$

Numericamente, esta operação será realizada no *software* MATLAB usando as funções: *fft* e *ifft*, que respectivamente aplicam a transformada rápida de Fourier e sua inversa às funções T , g e h . Usa-se sem problemas a transformada rápida de Fourier neste caso, pois, sabe-se que a transformada de Laplace é um caso particular da transformada de Fourier.

Desta forma pretende-se, na próxima seção, estimar o valor numérico para o termo de geração que foi utilizado no problema de soldagem, descrito na seção 5.1

5.3.2 Estimativa de Geração de Calor

Nesta seção pretende-se realizar a estimativa do termo de geração de calor. Para isso serão consideradas as temperaturas calculadas no problema direto, estas temperaturas substituirão os dados colhidos experimentalmente, conseqüentemente, sem erros inerentes aos dados experimentais. Então, usa-se as temperaturas calculadas como (hipotéticas), usaremos a resposta impulsiva analítica previamente calculada para estimar a geração de calor.

As propriedades térmicas e demais hipóteses serão as mesmas consideradas anteriormente e o tempo de simulação 10s, com variação $dt = 0,1s$

Assim, estima-se o termo de geração para o ponto T24, pois este ponto apresenta maior sensibilidade, pois está mais próximo do termo de geração, e que possui coordenadas T24(0,02m 0,04m 0,

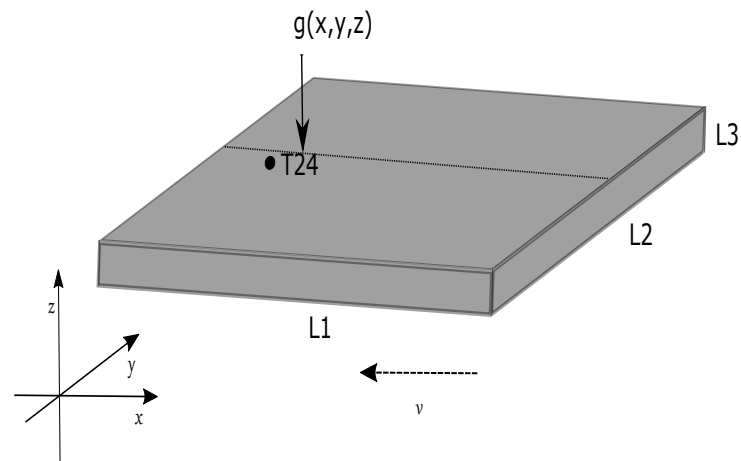


Figura 5.7: Ponto onde será realizada estimativa

A Fig. (5.7) ilustra a localização do ponto onde será estimada a geração de calor.

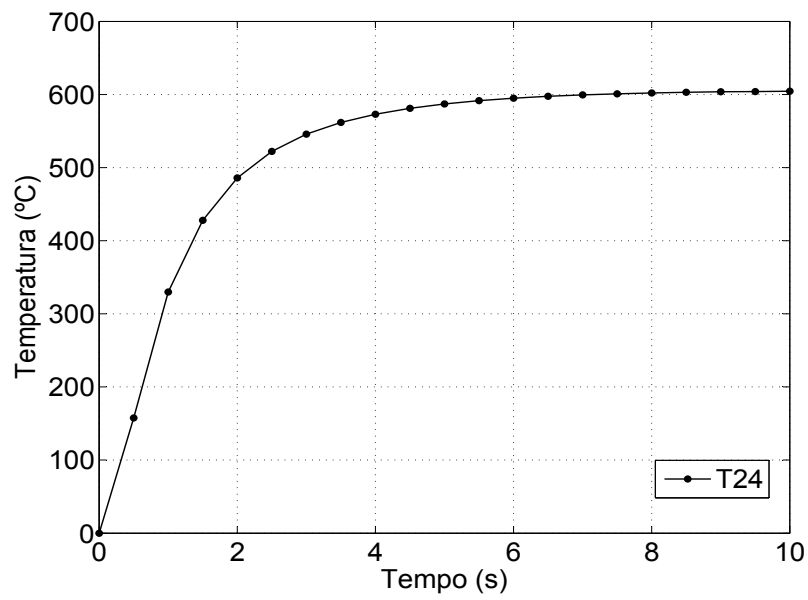


Figura 5.8: Temperaturas para o ponto T24

Enquanto a Fig.(5.8) mostra as temperaturas calculadas para o ponto T24 (Fig.5.7) de forma direta, isto é, usando a solução dada pela Eq. (5.8), estas temperaturas serão utilizadas como hipoteticamente experimentais para realizarmos a estimativa de geração de calor.

Nestas condições a resposta impulsiva dada pela Eq.(5.14) apresenta a seguinte representação gráfica:

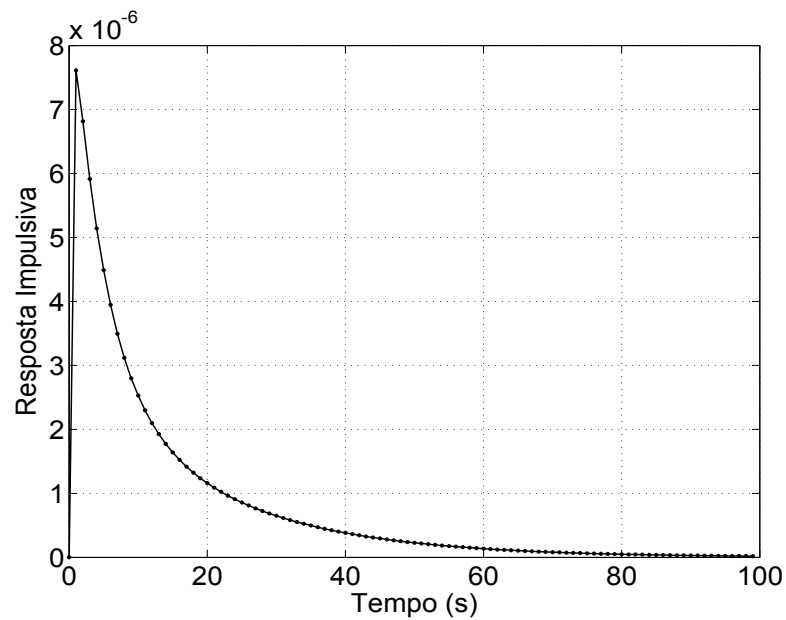


Figura 5.9: Comportamento da resposta impulsiva

Aplicando uma correção à resposta impulsiva sugerida por (FERNANDES, 2013), apresenta-se a resposta impulsiva a ser utilizada na estimativa do termo de geração.

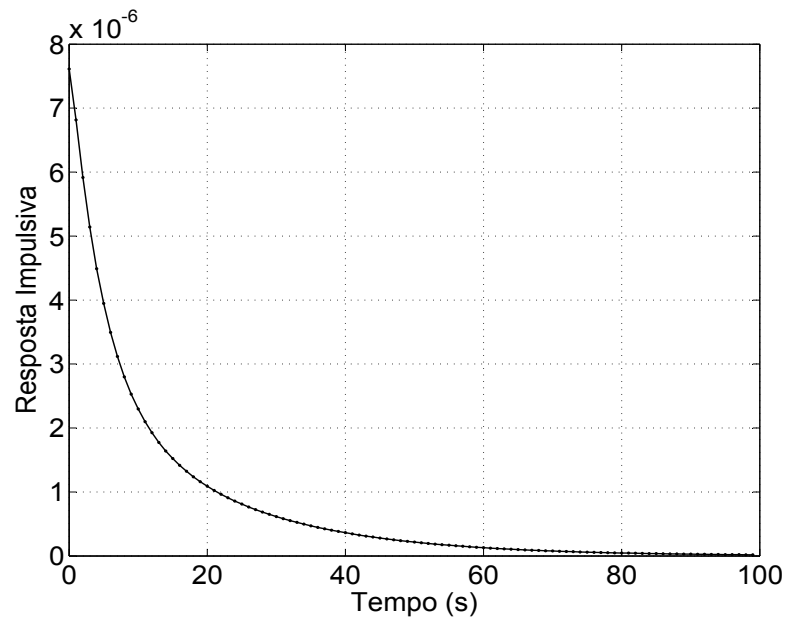


Figura 5.10: Comportamento da resposta impulsiva

Note que na Fig.(5.10), a resposta impulsiva possui comportamento decrescente a partir de seu valor máximo.

Conhecendo então os valores de temperatura e da resposta impulsiva, pode-se aplicar a transformada rápida de Fourier, usando a função de MATLAB *fft*, e a relação descrita pela Eq.(5.17), assim tem-se os valores de geração estimados, restando apenas aplicar a transformada inversa *ifft* para apresentarmos os valores estimados no domínio do tempo.

Dessa forma, realizando estas operações temos o seguinte comportamento do termo de geração estimado:

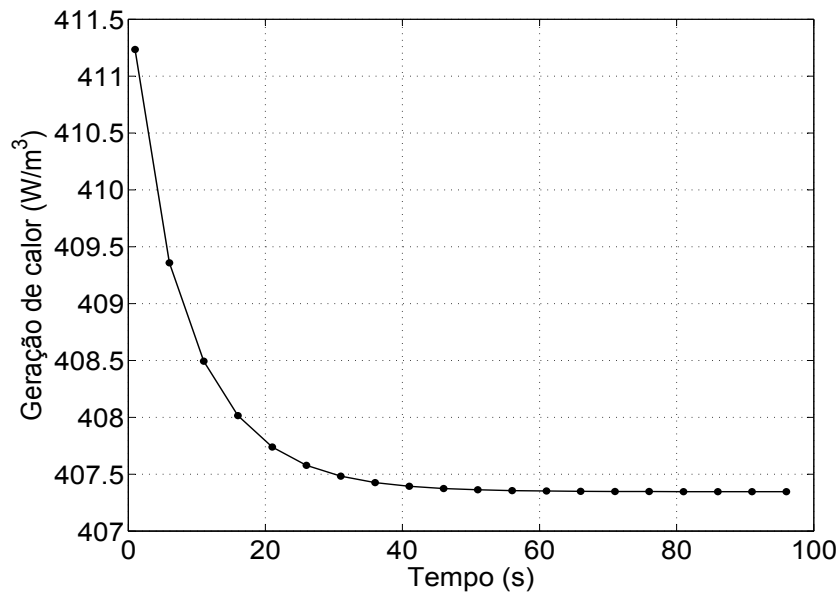


Figura 5.11: Valores estimados para o termo de geração.

Observa-se que a potência total gerada pode ser obtida através da integração do termo de geração no tempo, nesse caso basta considerar a área sob a curva para ambos os casos

Aplicando a função *trapz* do MATLAB, que realiza uma integração numérica a ambas curvas encontra-se uma diferença percentual de 1,27% o que representa uma boa aproximação ao valor real utilizado.

Observa-se também que o valor máximo estimado apresenta diferença percentual de 2,27% em relação ao valor de geração simulado. A diferença percentual média entre os valores estimados e simulados é de 2,25%.

Outro método de estimativa apresentado por (FERNANDES, 2013) é a deconvolução, neste caso não há necessidade de aplicar a transformada de Laplace à resposta impulsiva, aplicarmos a deconvolução na Eq.(5.15).

Assim, utilizando a função de MATLAB *deconv*, que realiza uma deconvolução numérica, apresentam-se os valores estimados para este caso:

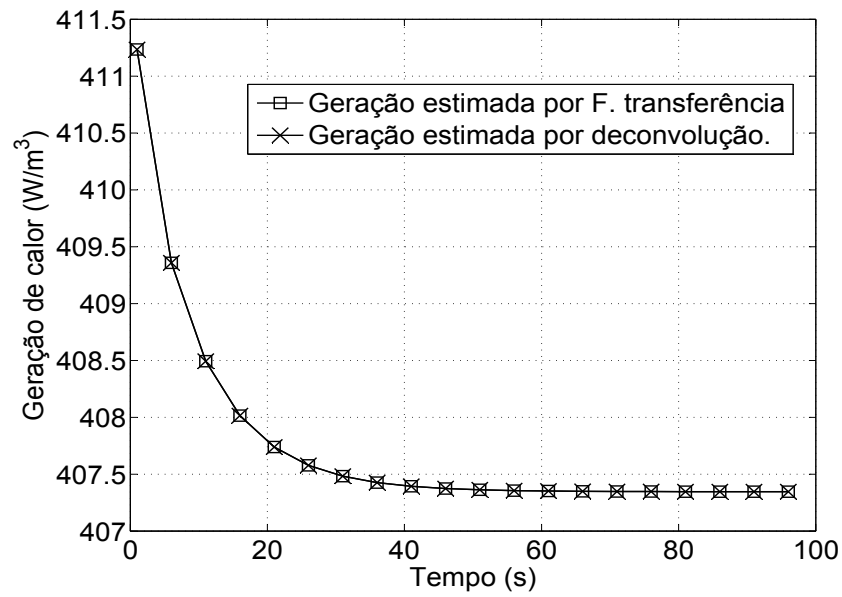


Figura 5.12: Comparativo entre estimativas.

A Fig.(5.12) apresenta o comportamento do termo de geração estimado pela deconvolução numérica realizada pela função *devonv*.

Desse modo, comparam-se os valores encontrados pelo método da função de transferência e deconvolução.

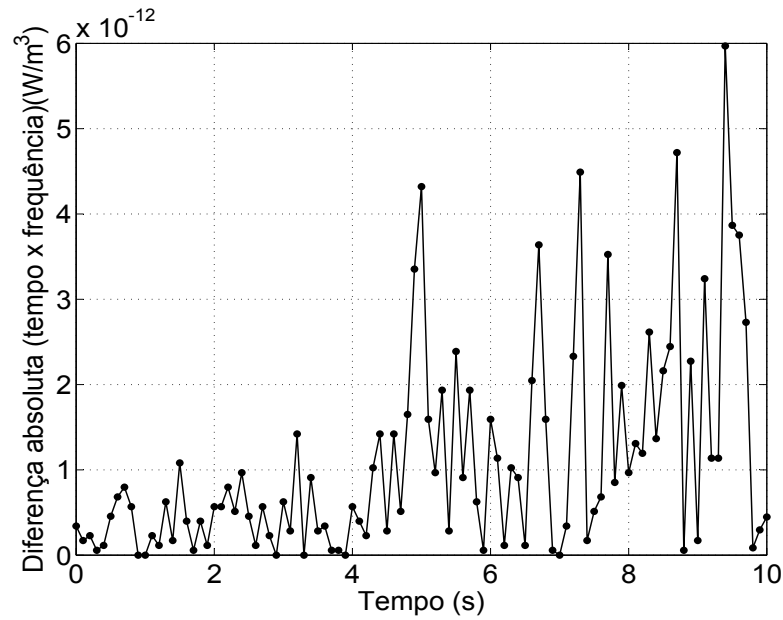


Figura 5.13: Diferença absoluta entre as estimativas.

A Fig.(5.12) apresenta o comportamento da estimativa realizada por ambos métodos. Note que, ambos métodos apresentam comportamento igual, onde a diferença absoluta máxima apresentada entre as duas estimativas é de 6×10^{-12} , como pode ser observado pela Fig. (5.13).

Realizado a estimativa para o termo de geração, espera-se que ao recalculas as temperaturas usando os valores estimados obtenham-se valores semelhantes aos gerados de forma simulada. Desta forma apresenta-se as temperaturas calculadas para o ponto T24 usando os valores estimados para o termo de geração, que foram apresentados na Fig.(5.11)

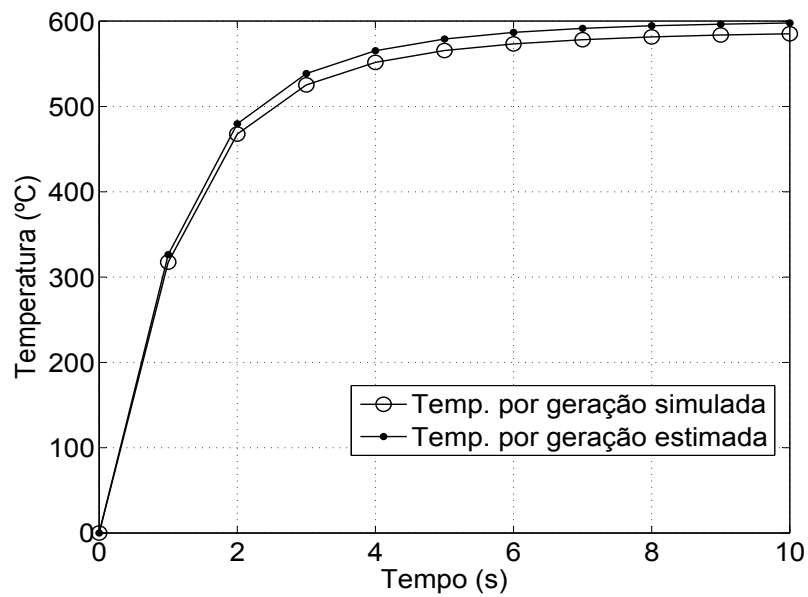


Figura 5.14: Temperaturas oriundas da geração simulada e estimada.

A Fig.(5.14) apresenta as temperaturas geradas pelos termos de geração simulado e estimado. Observe o comportamento semelhante entre as duas soluções, a máxima diferença percentual relativa entre as soluções é de 2,8%, o que representa uma boa aproximação, como pode ser observado pela Fig.(5.15).

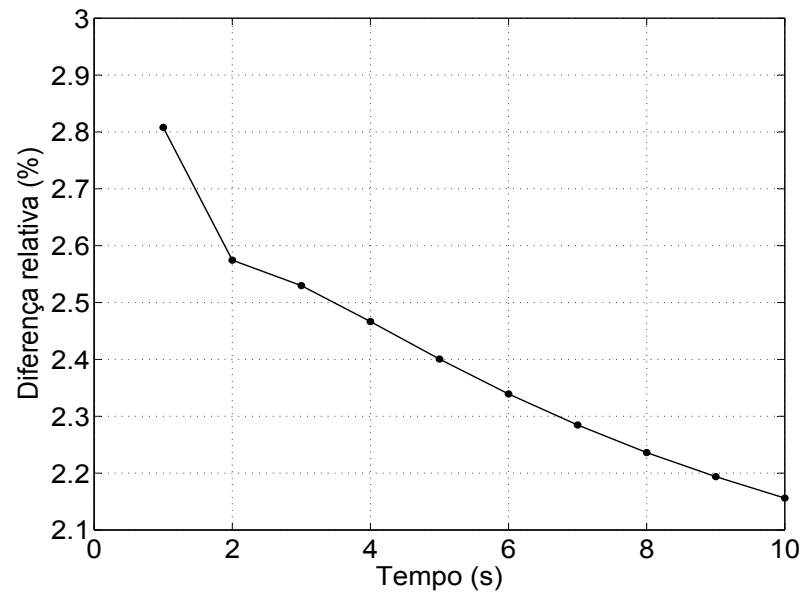


Figura 5.15: Diferença relativa entre temperaturas.

A seguir propõe-se a adição de ruído às temperaturas calculadas no problema direto para o ponto T24. O objetivo é aproximar a técnica empregada a uma situação real, onde as temperaturas medidas em uma amostra sofrem o efeito de ruídos provenientes de diversas fontes. Assim, adiciona-se um ruído aleatório de amplitude $0,2^{\circ}C$, o que é usualmente observado experimentalmente. A Fig (5.17) ilustra o ruído.

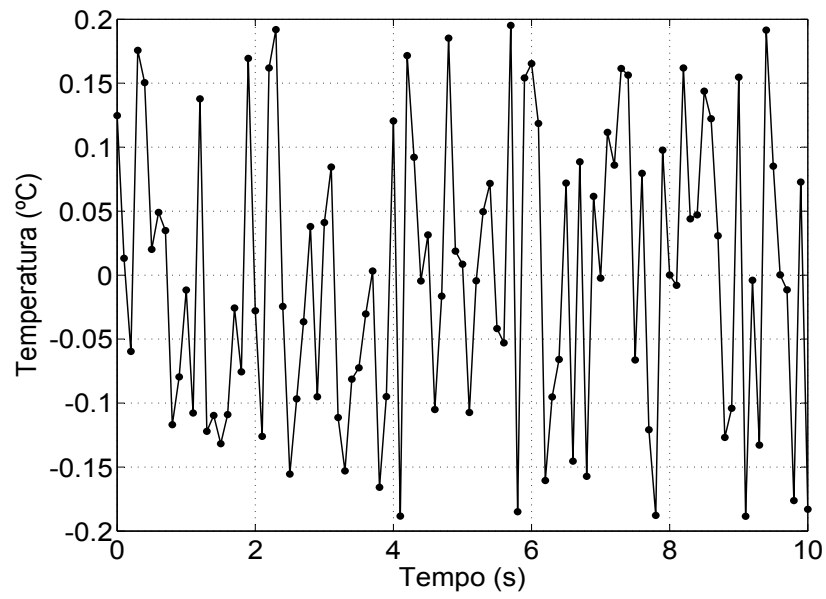


Figura 5.16: Ruído.

Assim, o ruído apresentado pela Fig. (5.17) adicionado à temperatura apresenta o seguinte efeito:

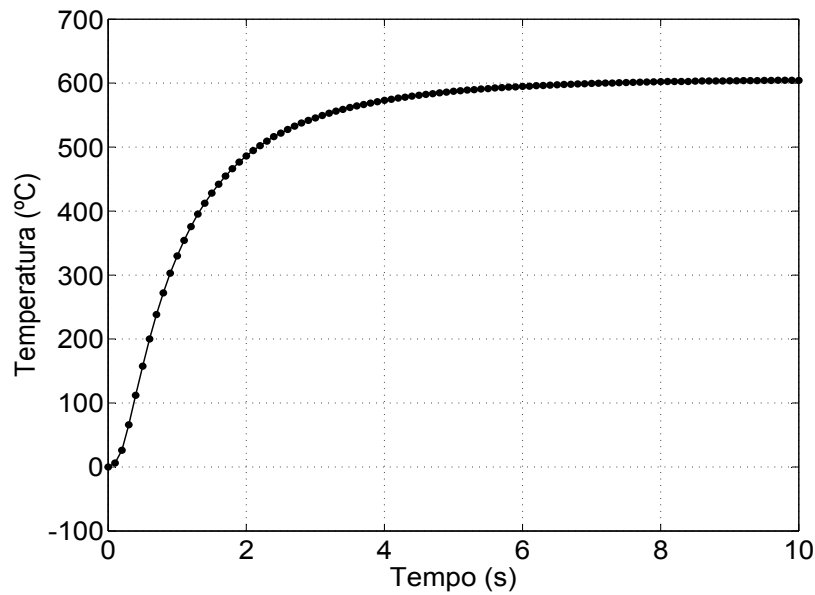


Figura 5.17: Temperatura adicionada de ruídos.

Dessa forma, aplica-se o método da função transferência baseada em funções de Green considerando a temperatura com ruídos e a resposta impulsiva mostrada na Fig.(5.10). Note que a resposta impulsiva considerada será a mesma para qualquer tipo de geração de calor ou temperatura, pois ela não é dependente destes fatores. Isto é, na analogia feita à sistemas dinâmicos, a resposta impulsiva não depende do par *entrada* e *saída*.

A Fig. (5.18) apresenta o comportamento dos valores estimados para o termo de geração. Usando a função *trapz* do MATLAB, pensando no mesmo argumento usado anteriormente, a diferença percentual entre as áreas abaixo das curvas 0,01% maior ao valor estimado quando considera-se a temperatura sem ruído. O que representa, neste caso, a irrelevância da presença de ruídos.

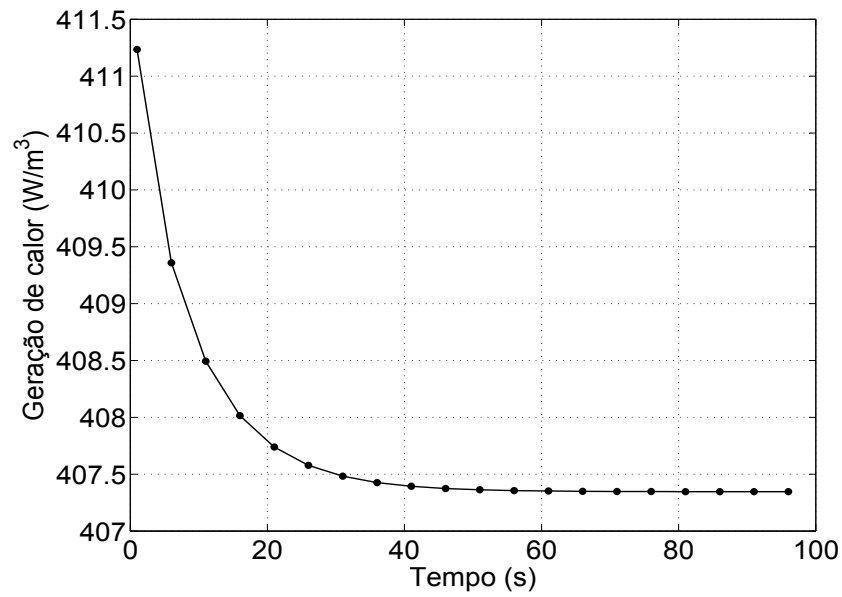


Figura 5.18: Estimativa de geração de calor.

A Fig.(5.19) apresenta as temperaturas calculadas usando o termo de geração estimado, que foi apresentado pela Fig.(5.18).

Assim, espera-se que as temperaturas calculadas estejam próximas às calculadas no caso anterior (sem ruídos). As Figs (5.19 - 5.20) apresentam os valores gerados.

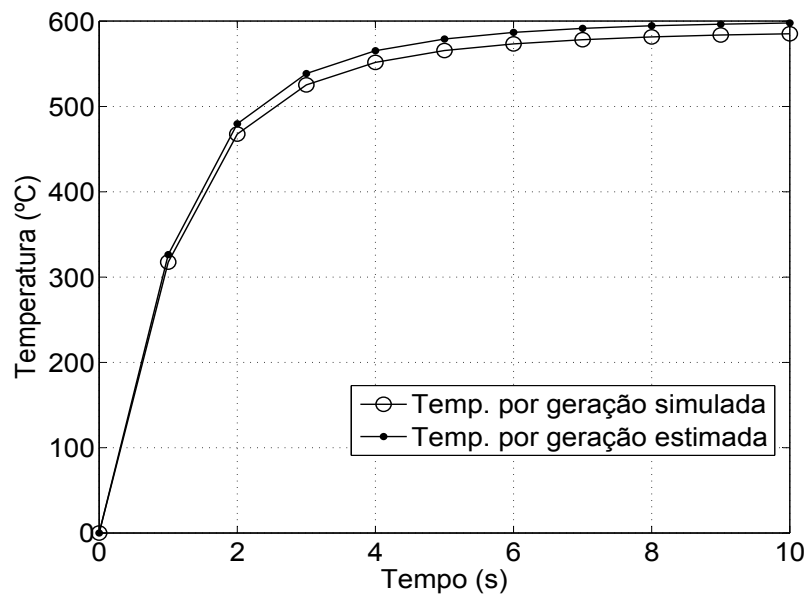


Figura 5.19: Temperaturas oriundas da geração simulada e estimada.

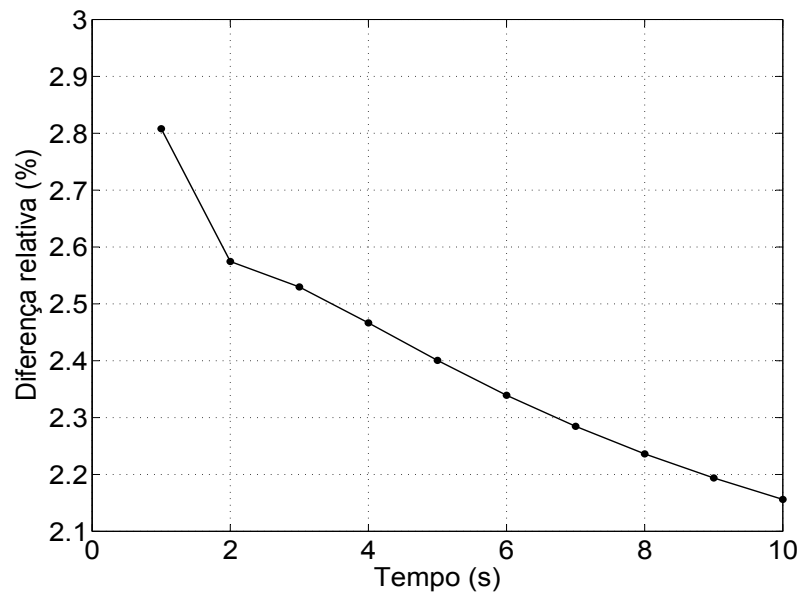


Figura 5.20: Diferença relativa entre temperaturas.

Nota-se, observando os gráficos, que como esperado as temperaturas calculadas considerando uma geração estimada proveniente de dados de temperatura com ruídos, foram praticamente idênticas. Isto é, um ruído aleatório de amplitude $0,2^{\circ}C$ não influenciou o processo de estimativa apresentado.

Observa-se pelos resultados apresentados que a técnica usada para estimativa do termo de geração apresentou resultados satisfatórios quando comparadas as temperaturas geradas pelo termo de geração simulado e estimado.

Capítulo 6

Conclusão

Propôs-se neste trabalho a análise e desenvolvimento de soluções analíticas de problemas de condução de calor por fontes móveis usando o método de funções de Green. Dessa forma foram calculadas e verificadas diversas soluções analíticas para problemas uni, bi e tridimensionais com variados tipos de condições de contorno.

Também foram comparadas as soluções analíticas obtidas em variadas geometrias com as soluções encontradas de forma numérica. E então, mostrou-se que os resultados obtidos foram satisfatórios, isto é, foram as mesmas respostas de temperatura obtidas de forma analítica e numérica, quando os problemas são configurados de forma análoga.

Assim, possuindo a solução analítica pôde-se mostrar sua robustez, facilidade de implementação em *software* de cálculo e baixo custo computacional. Tendo em vista que em um modelo tridimensional, usando a solução desenvolvida neste trabalho, pode-se calcular a temperatura para qualquer tempo, velocidade e posição da geometria de forma rápida.

Escolheu-se então a aplicação em um problema de soldagem devido ao fato que este problema trata-se de uma fonte móvel aquecendo uma superfície ao longo do tempo e espaço. Usando um modelo e propriedades termofísicas hipotéticas, mostrou-se a eficiência da solução analítica em calcular a temperatura para qualquer condição pré estabelecida.

Outra aplicação é em problema inverso. Assim, usou-se a técnica TFBGF (*transfer function based in green's functions*) para estimar o aporte térmico durante um processo de soldagem. Desta forma, foram usados os valores de temperatura calculados pelo problema direto e aplicando a técnica observou-se resultados satisfatórios na estimativa.

Propõe-se, para trabalhos futuros, a aplicação das soluções analíticas obtidas neste trabalho em tecidos biológicos considerando um corpo multicamada, isto é, composto por várias camadas de propriedades termofísicas distintas. Também é proposta a aplicação da técnica de problema inverso, TFBGF, a este tipo de problema.

Referências Bibliográficas

BECK, J.; MCMASTERS, R. Solutions for mult-dimensional transient heat conduction with solid body motion. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004.

BECK, J. V. *et al.* *Heat Conduction Using Green's Functions*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2010. (Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences). ISBN 9781439813546.

BECK, J. V. *et al.* Intrinsic verification methods in linear heat conduction. *Heat and Mass Transfer*, 2006.

CHEN, T.-M. Numerical solution of hyperbolic heat conduction problems in the cylindrical coordinate system by the hybrid green's function method. *Heat and Mass Transfer*, 2010.

D.COLE, K.; H.Y.YEN, D. Green's functions, temperature and heat flux in rectangle. *Heat and Mass Transfer*, 2001.

D.S.NAGESH; G.L.DATTA. Prediction of weld bead geometry and penetration in shielded metal-arc welding using neural network. *Journal of materials processing technology*, 2002.

FERNANDES, A. P. *Funções de Green: soluções analíticas aplicadas a problemas inversos em condução de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009. Disponível em: <<http://www.bdtu.ufu.br>>.

FERNANDES, A. P. *Função transferência analítica aplicada à solução de problema inverso em condução de calor*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

FOURIER, J. *Théorie analytique de la chaleur*. [S.l.: s.n.], 1822.

H.E.LEE. A method of solving the moving boundary heat transfer problem in plasma sprayed particles. *J.Phys,D.Appl.Phys*, 1989.

I.S.KIM; A.BASU. A mathematical model of heat transfer and fluid flow in the gas metal arc welding process. *Journal of materials processing technology*, 1998.

J.KIDAWA-KUKLA. Temperature distribution in a rectangular plate heated by a moving heat source. *Heat and Mass Transfer*, 2008.

J.TUSEK; J.TOMC; M.RADKOVIC. New approach to determination of maximum temperatures in welding using travelling heat sources. *Science and Technology of Welding and Joining*, v. 7, n. 1, 2002.

KIM, C.-K. Adaptive finite element solution for the heat conduction with a moving heat source. *Journal Of Mechanical Science and Tecnology*, 2011.

M.A.WAHAB; M.J.PAINTER; M.H.DAVIES. The prediction of temperature distribution and weld pool geometry in the gas metal arc welding process. *Journa of materials processing technology*, 1998.

MOHAMMAD, H. *et al.* Tridimensional transient analytical solution based on green's function to temperature field in friction stir welding. *Applied Mathematical Modeling*, 2013.

NEHAD, A.-K. Enthalpy technique for solution of stefan problems: Aplication to the keyhole plasma arc welding processes involving moving heat source. *Heat Mass Transfer*, 1995.

NGUYEN, N. *et al.* Analytical solutions for transient temperature for semi-infinite body subjected to 3d moving heat source. *Welding Journal*, 1999.

OLIVEIRA, G. C. *Solução analítica em condução de calor multicamada: aplicação em ferramentas revestidas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

ÖZIŞIK, M. N. *Heat Conduction*. Nova Iorque, NY: Wiley, 1993. (Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471532569.

ROSENTHAL, D. Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting. 1935.

SOLANA, P.; J.L.OCANA. A mathematical model for penetration laser welding as a free-boundary problem. *J.Phys,D.Appl.Phys*, 1997.

WEI, P. *et al.* Tree-dimensional analytical temperature field and its aplication to solidification characteristics in high or lower power density beam welding. *Heat and Mass Transfer*, 1996.

W.ZHANG *et al.* Modeling of heat transfer and fluid flow during gas tungsten arc spot welding of low carbon steel. *Journal of Applied Physics*, 2003.

X.K.ZHU; Y.J.CHAO. Effects of temperature-dependent material properties on welding simulation. *Computers & Structures*, 2002.