

Andrade, João Rodrigo

**Métodos de fronteira imersa para corpos  
esbeltos: implementação e validação**

Uberlândia - Brasil

2015



Andrade, João Rodrigo

**Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos:  
implementação e validação**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia - Brasil

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

A553m      Andrade, João Rodrigo, 1990-  
2015          Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos: implementação e  
validação / João Rodrigo Andrade. - 2015.  
124 f. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Escoamento instável (Dinâmica dos fluidos) - Teses. I. Silveira Neto, Aristeu da, 1955-. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

---

CDU: 621

Andrade, João Rodrigo

## **Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos: implementação e validação**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Trabalho aprovado. Uberlândia - Brasil, 24 de agosto de 2015:

---

**Aristeu da Silveira Neto**  
Orientador

---

**Roney Leon Thompson**  
DEM - UFF

---

**Francisco José de Souza**  
FEMEC - UFU

---

**João Marcelo Vedovoto**  
FEMEC - UFU

Uberlândia - Brasil  
2015



*A Deus, minha família, namorada, amigos, colegas de trabalho e orientadores pelo apoio, força, incentivo, companheirismo e amizade. Sem eles nada disso seria possível.*



# Agradecimentos

É com muita satisfação que expresso aqui o mais profundo agradecimento a todos aqueles que tornaram a realização deste trabalho possível.

Muito especialmente, desejo agradecer ao meu orientador Prof. Aristeu Silveira Neto, por acreditar em mim, me mostrar o caminho da ciência, pela disponibilidade, atenção dispensada, paciência, dedicação e profissionalismo.

Ao meu co-orientador Prof. João Marcelo Vedovoto, que com grande paciência me ajudou e incentivou em todos os novos desafios para concluir meu trabalho.

À minha família, a qual amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo. Em particular, aos meus pais João de Andrade Júnior e Ana Maria Sartori Andrade pela base e estrutura necessária para completar este trabalho.

À minha namorada Paula Machado Silva, pelo incentivo, compreensão, encorajamento e companheirismo durante todo este período.

Aos meus amigos, em especial a Carlos Antônio Ribeiro, Felipe Arruda e Bruno Jacob pelo seu apoio e força.

Aos meus amigos e colegas do MFLAB, graduandos, técnicos, mestrandos, doutorandos, pesquisadores e professores, que de uma forma ou de outra me auxiliaram e apoiaram.

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este mestrado.

À CAPES, FAPEMIG, CNPq e PETROBRAS pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Finalmente, a todos que, mesmo indiretamente, fizeram parte de minha caminhada até essa nova conquista.



*"Science sans conscience n'est que ruine de l'âme".*

François Rabelais, 1540



# Resumo

A metodologia de fronteira imersa (FI) se presta a aplicar as condições de contorno em escoamentos sobre corpos imersos cuja malha computacional não seja alinhada com a geometria do obstáculo. Esta metodologia tem sido aplicada em simulações de escoamentos envolvendo a presença de corpos de geometria complexas e/ou em movimento. Apesar das grandes vantagens dos métodos de fronteira imersa, é mostrado no presente trabalho que algumas dificuldades e desafios são encontrados quando este é empregado, especialmente em escoamentos sobre corpos de geometria esbelta e quinas agudas. No presente trabalho, dois objetivos foram propostos. Primeiramente, avaliar a acurácia e eficiência dos métodos de FI em simulações sobre corpos com geometria altamente esbelta e irregular e implementar um método numérico capaz de satisfazer as condições de contorno dessas geometrais.

O estudo foi composto por quatro etapas: no primeiro capítulo, uma extensiva pesquisa bibliográfica foi conduzida para compreensão e conhecimento dos diferentes métodos de fronteira imersa; na segunda etapa, foi proposta uma modificação no método de Múltipla Imposição da Força; na terceira etapa, foi apresentado o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais; por fim, os métodos são implementados e testados para vários casos diferentes, o método de múltipla imposição da força foi validado para um escoamento sobre um cilindro circular, uma esfera e um perfil aerodinâmico NACA0012. O método de volumes fantasmas locais foi testado e validado para os casos de um escoamento de Poiseuille, escoamento sobre uma placa plana vertical e escoamento uniforme sobre um cilindro circular entre duas placas paralelas.

**Palavras-chaves:** Método da Fronteira Imersa. Corpo de geometria esbelta. Método da múltipla imposição da força. Método de volumes fantasmas locais.



# Abstract

The immersed boundary (IB) methods are used to enforce boundary conditions on surfaces not aligned with the computational mesh in a numerical simulation. This methodology has been used as a practical approach to model flow problems involving complex and/or moving bodies. Despite the great advantages of the immersed boundary methodology, it is shown in this work that some difficulties and challenges are posed when it is used to simulate the flow past sharp geometries. In present work, two main objectives are proposed: first, to assess the accuracy and efficiency of IB methods in simulations of flows past immersed bodies with highly sharp corners or thin plates. Secondly, we implement a numerical method which is able to satisfy these flow conditions. The study was composed of four stages: First, an extensive bibliographic review was conducted in order to know and understand the different immersed boundary methods; in the second stage it was presented modifications in Multi-Direct Forcing method; further on, it was presented a local directional ghost cell approach. Finally, the methods are implemented and tested for a number of problems, the modified multi-direct forcing approach was validated for a uniform flow past a circular cylinder, a sphere and an airfoil NACA0012. The local directional ghost cell approach was employed to calculate a Poiseuille flow, an impulsively started flow past a flat plate and uniform flow around a circular cylinder between two parallels walls.

**Key-words:** Imersed Boundary Method. Flow past sharp body. Multi-Direct Forcing. Local directional ghost cell approach.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Rotor de uma turbina industrial (VEDOVOTO et al., 2015). . . . .	25
Figura 2 – Pressão média no escoamento interno ao rotor de uma turbina industrial (VEDOVOTO et al., 2015). . . . .	26
Figura 3 – Escoamento sobre uma turbina eólica (Relatório de Projeto Petrobrás). . . . .	26
Figura 4 – Modelo numérico representativo de um perfil aerodinâmico NACA0012: (a) Malha irregular adaptada ao perfil; (b) Malha cartesiana sobreposta por um conjunto de pontos representando o perfil. . . . .	27
Figura 5 – Representação de uma malha bidimensional com variáveis genéricas. . . . .	37
Figura 6 – Volume de controle elementar utilizado na discretização das equações de transporte. . . . .	41
Figura 7 – Volume finito não-uniforme e representação das distâncias para interpolar um escalar qualquer. . . . .	41
Figura 8 – Representação dos volumes fantasmas para condição de contorno. . . . .	43
Figura 9 – Malhas estruturadas e não estruturadas adaptadas ao corpo (MITTAL; IACCARINO, 2005). . . . .	45
Figura 10 – Classificação dos diferentes tipos do método de fronteira imersa dado por Mittal e Iaccarino (2005). . . . .	47
Figura 11 – Disco elástico circular em movimento através de um canal com um bocal: são representados os campos de velocidade e posições do disco (HUANG et al., 2011) . . . . .	50
Figura 12 – Ilustração representativa dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da fronteira imersa, onde $\vec{x}$ posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano $\Omega$ e $\vec{X}$ posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano $\Gamma$ . . . . .	51
Figura 13 – Malha lagrangiana do rotor de uma turbina industrial (VEDOVOTO et al., 2015). . . . .	51
Figura 14 – Trem de pouso imerso em um domínio euleriano (VEDOVOTO, 2007). . . . .	52
Figura 15 – Malhas cartesianas sem e com refinamento local próximo à fronteira imersa (MITTAL; IACCARINO, 2005). . . . .	53
Figura 16 – Representação da região de distribuição da força de interface em uma fronteira imersa com geometria esbelta. Onde os termos $\vec{v}$ , $\vec{q}$ e $k$ representam, respectivamente, a velocidade vertical na face do volumes euleriano, o vetor partindo do ponto lagrangiano até o ponto de face da célula euleriana e o ponto lagrangiano. . . . .	57
Figura 17 – Evolução temporal de uma partícula em queda livre utilizando o <i>multi-direct-forcing</i> (WANG et al., 2008). . . . .	58

Figura 18 – Volume de controle em um ponto lagrangiano qualquer (OLIVEIRA, 2006). . . . .	63
Figura 19 – Processo de distribuição da força lagrangiana para os pontos eulerianos (OLIVEIRA, 2006). . . . .	63
Figura 20 – Esboço do esquema utilizado para determinar as células fantasmas $G$ , $X$ são os pontos necessários para o cálculo da força (TSENG; FERZIGER, 2003). . . . .	64
Figura 21 – Método <i>ghost cell</i> para fronteira imersa: $F_1$ , $F_2$ , $F_3$ and $F_4$ são pontos do fluido, $G$ é um ponto fantasma e $P_1$ , $P_2$ são pontos na fronteira que são usados no estêncil de extrapolação. . . . .	65
Figura 22 – Método cut-cell: volume próximo à interface imersa com forma modificada associado ao fluxo (figura a esquerda); 6 pontos para o estêncil de interpolação para determinação do fluxo na face noroeste (figura a direita). . . . .	66
Figura 23 – Geometria imersa em uma malha deslocada para volumes finitos. Interpolação do campo de velocidade euleriana para um ponto lagrangiano (VEDOVOTO, 2011). . . . .	69
Figura 24 – Ilustração da diferença entre os esquemas da função delta. Diagrama esquemático para a estratégia de interpolação: (a) função delta original; (b) função delta direcional. Onde os termos $\vec{v}$ , $\vec{q}$ , $k$ e $\vec{n}$ representam, respectivamente, a velocidade vertical na face do volumes euleriano, o vetor partindo do ponto lagrangiano até o ponto de face da célula euleriana, o ponto lagrangiano e o vetor normal à superfície. . . . .	70
Figura 25 – Corpos com geometria extremamente esbelta: (a) Quina; (b) placa plana (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007). . . . .	71
Figura 26 – Ilustração de uma função $f(x)$ contínua e derivável por partes estendida através da descontinuidade. Valores verdadeiros da função ( $\bullet$ ); valores fictícios em volumes fantasmas ( $\circ$ ). . . . .	73
Figura 27 – Definição dos volumes e pontos de velocidade ativos e inativos. Pontos ativos de pressão ( $\bullet$ ); pontos inativos de pressão ( $\circ$ ), pontos ativos de velocidade ( $\blacksquare$ ) e pontos inativos de velocidade ( $\square$ ) (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007). . . . .	76
Figura 28 – Reconstrução dos pontos de fronteira: (a) interpolação uni-direcional na direção $x$ ; (b) interpolação multi-direcional. São representados pontos inativos de velocidade ( $\square$ ), pontos ativos de velocidade ( $\blacksquare$ ) e pontos da superfície da fronteira imersa ( $\bullet$ ) (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007). . . . .	77
Figura 29 – Estêncil para cálculo dos termos $(u_x)_{i+1/2,j}$ , $(u_{xx})_{i+1/2,j}$ , $(u_y)_{i+1/2,j}$ e $(u_{yy})_{i+1/2,j}$ . Pontos irregulares são substituídos por pontos fantasmas com valores obtidos por extrapolação (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007). . . . .	79

Figura 30 – Cálculo da velocidade no centro do volume para pós-processamento do campo de velocidade. . . . .	81
Figura 31 – (a) - Malha lagrangiana imersa no domínio computacional; (b) campo de solução mostrando a velocidade resultante no domínio. Cálculos paralelizados foram empregados. Cada um dos blocos cartesianos desenhados é um subdomínio referente a um <i>CPU</i> distinto. . . . .	88
Figura 32 – Norma $L_2$ da solução manufaturada da componente horizontal de velocidade $u$ : (a) domínio euleriano; (b) domínio lagrangiano. . . . .	88
Figura 33 – Representação esquemática do escoamento laminar sobre um cilindro isolado. . . . .	89
Figura 34 – Linhas de corrente do escoamento em regime permanente sobre um cilindro circular para $Re = 40$ e nomenclatura empregada na Tab. 1: (a) <i>MDF</i> original; (eb) <i>MDF</i> direcional. . . . .	90
Figura 35 – Iso-contornos de vorticidade na região próxima ao cilindro circular para $Re = 40$ : (a) Kim et al. (2001); (c) <i>MDF</i> original; (e) <i>MDF</i> direcional. Para $Re = 100$ : (b) Kim et al. (2001); (d) <i>MDF</i> original; (f) <i>MDF</i> direcional. . . . .	91
Figura 36 – Linhas de corrente simétricas ao eixo central para um escoamento sobre uma esfera para $Re = 100$ : (a) Johnson e Patel (1999); (b) <i>MDF</i> original; (c) <i>MDF</i> direcional. . . . .	92
Figura 37 – Vista oblíqua das estruturas vorticais estacionárias do escoamento sobre uma esfera:(a) <i>MDF</i> original; (b) <i>MDF</i> direcional. . . . .	93
Figura 38 – Diagrama esquemático da região de interpolação no bordo de saída de um perfil aerodinâmico: (a) <i>MDF</i> original; (b) <i>MDF</i> direcional. Onde os termos $\vec{v}$ , $\vec{q}$ e $k$ representam, respectivamente, a velocidade vertical na face do volumes euleriano, o vetor partindo do ponto lagrangiano até o ponto de face da célula euleriana e o ponto lagrangiano. . . . .	94
Figura 39 – Vista do domínio de cálculo. (a) Características geométricas do domínio do caso; (b) Malha euleriana empregada . . . . .	95
Figura 40 – Comparação do coeficiente de sustentação entre resultados experimentais e numéricos. (a) $Re = 10^4$ ; (b) $Re = 10^5$ . . . . .	96
Figura 41 – Contornos de isovorticidade instantâneos nas proximidades do perfil aerodinâmico NACA0012 para $Re = 10^4$ . Ângulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ : (a) <i>MDF</i> original; (b) <i>IBM</i> direcional. Ângulo de ataque $\alpha = 15^\circ$ : (c) <i>MDF</i> original; (d) <i>IBM</i> direcional. . . . .	97
Figura 42 – Taxa de convergência espacial para o domínio euleriano. . . . .	101
Figura 43 – Linhas de correntes dos vórtices de Taylor-Green em decaimento sem fronteira imersa. . . . .	102

Figura 44 – Representação esquemática do escoamento de Poiseuille: laminar, viscoso e totalmente desenvolvido em um canal infinito. . . . .	102
Figura 45 – Campos de variáveis no escoamento de Poiseuille em regime permanente para $Re = 50$ . (a) Campo da componente horizontal da velocidade; (b) Campo de velocidade vertical; (c) Campo de pressão. . . . .	104
Figura 46 – Perfil da componente horizontal da velocidade em um plano $(x, y)$ distante $8\ m$ da entrada do canal para o escoamento de Poiseuille. . . .	104
Figura 47 – Representação esquemática: cavidade bidimensional com tampa deslizante.	105
Figura 48 – Comparação dos perfis da componente horizontal de velocidade $u$ na linha vertical no centro da cavidade $(x = 0, 5)$ para números de Reynolds $Re = 100$ , $Re = 1.000$ e $Re = 3.200$ . . . . .	106
Figura 49 – Linhas de corrente para o escoamento em uma cavidade com tampa deslizante para $Re = 1.000$ : (a) Ghia et al. (1982); (b) Presente trabalho. Para $Re = 3.200$ : (c) Ghia et al. (1982); (d) Presente trabalho. . . . .	107
Figura 50 – Representação esquemática do escoamento de Poiseuille: laminar, viscoso totalmente desenvolvido em um canal infinito, onde fronteira imersa age como placa plana. . . . .	108
Figura 51 – Detalhe evidenciando a relação de dimensões da malha lagrangiana em relação à malha euleriana. . . . .	108
Figura 52 – Campos de variáveis no escoamento de Poiseuille com fronteira imersa em regime permanente para $Re = 50$ . (a) Campo da componente horizontal da velocidade; (b) Campo de velocidade vertical; (c) Campo de pressão.	109
Figura 53 – Decaimento da pressão no escoamento de Poiseuille nos canais A e B detalhados na Fig. 50. . . . .	110
Figura 54 – Perfil da componente horizontal da velocidade em um plano $(x, y)$ distante $8\ m$ da entrada do canal para o escoamento de Poiseuille com presença de um corpo imerso representando uma placa plana de espessura infinitamente pequena. (a) Perfil de velocidade em toda a seção; (b) Perfil de velocidade aproximado na placa imersa. . . . .	111
Figura 55 – Perfil de pressão em dois planos $(x, y)$ a uma distância de 3 e 7 $m$ da entrada do domínio para o escoamento de Poiseuille com presença de um corpo imerso representando uma placa plana de espessura infinitamente pequena. . . . .	111

Figura 56 – Comparação entre os métodos de fronteira imersa de múltipla imposição da força e volumes fantasmas locais do perfil de pressão em dois planos $(x, y)$ a uma distância de 3 e 7 $m$ da entrada do domínio para o escoamento de Poiseuille com presença de um corpo imerso representando uma placa plana de espessura infinitamente pequena. (a) Perfil em todo o domínio na direção $x$ ; (b) vista aproximada na região da placa vertical (fronteira imersa). . . . .	113
Figura 57 – Representação esquemática do escoamento laminar sobre uma placa plana de comprimento $D$ e espessura infinitamente pequena. . . . .	113
Figura 58 – Comparação do perfil de velocidade normalizada no eixo horizontal de simetria a jusante da placa plana no tempo adimensional $tU_\infty/D = 1.0$ . . . . .	114
Figura 59 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, do campo instantâneo de vorticidade do escoamento com iso-contornos sobre uma placa plana para $Re = 126$ : (a) $tU_\infty/D = 0.1$ ; (b) $tU_\infty/D = 3.1$ ; (c) $tU_\infty/D = 9.2$ ; (d) $tU_\infty/D = 20.6$ . . . . .	115
Figura 60 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, do campo instantâneo de pressão iso-contornos do escoamento sobre uma placa plana para $Re = 126$ . (a) $tU_\infty/D = 0.1$ ; (b) $tU_\infty/D = 3.1$ ; (c) $tU_\infty/D = 9.2$ ; (d) $tU_\infty/D = 20.6$ . . . . .	116
Figura 61 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, das linhas de corrente do escoamento sobre uma placa plana para $Re = 126$ . (a) $tU_\infty/D = 0.1$ ; (b) $tU_\infty/D = 3.1$ ; (c) $tU_\infty/D = 9.2$ ; (d) $tU_\infty/D = 20.6$ . . . . .	116
Figura 62 – Comparação da evolução temporal do comprimento da bolha de recirculação $L$ para o escoamento sobre uma placa plana a $Re = 126$ . . . . .	117
Figura 63 – Comparação da distribuição de variáveis na superfície da placa plana no tempo adimensional $tU_\infty/D = 1.0$ . (a) Distribuição da pressão normalizada; (b) Distribuição da vorticidade normalizada. . . . .	118
Figura 64 – Perfil de pressão na linha horizontal central do domínio cortando o corpo imerso. . . . .	118
Figura 65 – Representação esquemática do escoamento laminar sobre um cilindro entre duas placas planas. . . . .	120
Figura 66 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, das linhas de corrente do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a $Re = 45$ . Relação $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho. . . . .	120
Figura 67 – Comparação do ponto de separação em função do comprimento $H/D$ , para $Re = 45$ , entre os resultados de Sintu e Sinhamahapatra (2010) e o presente trabalho. . . . .	121

Figura 68 – Comparação do comprimento da zona de recirculação, para $Re = 45$ , entre os resultados de Sintu e Sinhamahapatra (2010) e o presente trabalho. . . . .	122
Figura 69 – Visualização ampliada do campo de vorticidade do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a $Re = 45$ . Relação $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho. . .	122
Figura 70 – Visualização ampliada das linhas de corrente do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a $Re = 100$ . Relação $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho. . .	123
Figura 71 – Visualização ampliada do campo de vorticidade do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a $Re = 100$ . Relação $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho. . .	124

# Lista de tabelas

Tabela 1	–	Comparação das características de um escoamento permanente sobre um cilindro circular para $Re = 40$ : comprimento $L$ da zona de recirculação, posições $(a, b)$ do centro da recirculação e ângulo de separação $\theta$ (a nomenclatura é compreendida na Fig. 35). . . . .	90
Tabela 2	–	Comparação quantitativa de um escoamento em regime permanente sobre uma esfera a $Re = 100$ . . . . .	93
Tabela 3	–	Comparação quantitativa do escoamento de Poiseuille com fronteira imersa entre o resultado obtido pelo autor e a solução exata. . . . .	112



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO DIFERENCIAL</b>	<b>29</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelagem matemática</b>	<b>29</b>
2.1.1	Formulação euleriana	29
<b>2.2</b>	<b>Modelagem da turbulência</b>	<b>30</b>
2.2.1	Equações médias de Reynolds	31
2.2.2	Equações de Navier-Stokes filtradas	32
2.2.3	Modelagem sub-malha da turbulência	33
2.2.3.1	Modelo sub-malha de Smagorinsky	33
2.2.3.2	Modelagem dinâmica sub-malha	35
<b>2.3</b>	<b>Modelagem numérica</b>	<b>36</b>
2.3.1	Aproximações temporais e estabilidade numérica	37
2.3.2	Passo de tempo variável	38
2.3.3	Discretização espacial das equações de transporte	40
2.3.4	Acoplamento pressão-velocidade	42
<b>2.4</b>	<b>Condições de contorno</b>	<b>43</b>
2.4.1	Condição de contorno de parede sólida	44
2.4.2	Condição de contorno de Neumann	44
2.4.3	Condição de contorno de Robin	44
<b>3</b>	<b>MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano</b>	<b>50</b>
3.1.1	Acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano	53
<b>3.2</b>	<b>Relevância do método de fronteira imersa</b>	<b>54</b>
3.2.1	Geometrias complexas	54
3.2.2	Corpos em movimento	54
3.2.3	Número de operações por volume discretizado	55
3.2.4	Paralelização do domínio	55
3.2.5	Restrições do método	55
<b>3.3</b>	<b>Métodos de força discreta</b>	<b>57</b>
3.3.1	Métodos de imposição indireta da condição de contorno	57
3.3.1.1	Metodologia da múltipla imposição da força ( <i>Multi-Direct Forcing</i> )	58
3.3.1.2	Modelo Físico Virtual	61
3.3.2	Métodos de imposição direta da condição de contorno	62
3.3.2.1	Metodologia da fronteira imersa com volumes fantasmas ( <i>ghost-cell</i> )	63

3.3.2.2	Metodologia da fronteira imersa com volumes particionados ( <i>Cut-cell methods</i> ) . . . .	65
<b>4</b>	<b>PROPOSTA DE VARIAÇÃO DO MÉTODO DE MÚLTIPLA IM- POSIÇÃO DA FORÇA . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>4.1</b>	<b>Múltipla imposição da força com distribuição direcional . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1.1	Estratégias de interpolação e distribuição . . . . .	67
<b>5</b>	<b>FRONTEIRA IMERSA COM VOLUME FANTASMA LOCAL . . . .</b>	<b>71</b>
<b>5.1</b>	<b>Volume fantasma uni-dimensional . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>5.2</b>	<b>Classificação e definição dos volumes eulerianos . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>5.3</b>	<b>Pontos de velocidade vizinhos à fronteira imersa . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>5.4</b>	<b>Pontos de pressão vizinhos à fronteira imersa . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>6.1</b>	<b>Método da múltipla imposição da força com distribuição direcional</b>	<b>85</b>
6.1.1	Verificação da metodologia e da implementação do código computacional .	86
6.1.2	Escoamento sobre um cilindro circular plano . . . . .	88
6.1.3	Escoamento sobre uma esfera . . . . .	91
6.1.4	Escoamento sobre um perfil NACA0012 . . . . .	93
6.1.5	Conclusão . . . . .	98
<b>6.2</b>	<b>Fronteira Imersa com volume fantasma local . . . . .</b>	<b>98</b>
6.2.1	Verificação do domínio euleriano e da implementação do código computacional	99
6.2.2	Validação do domínio euleriano . . . . .	101
6.2.2.1	Escoamento de Poiseuille . . . . .	101
6.2.2.2	Escoamento em uma cavidade quadrada com tampa deslizante . . . . .	103
6.2.3	Escoamento de Poiseuille separado por uma placa . . . . .	107
6.2.4	Escoamento sobre um placa plana vertical . . . . .	112
6.2.5	Escoamento sobre um cilindro entre duas placas planas . . . . .	119
6.2.5.1	$Re = 45$ . . . . .	119
6.2.5.2	$Re = 100$ . . . . .	123
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>125</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>127</b>

# 1 Introdução

Nas soluções tecnológicas e desafios da mecânica dos fluidos computacional, uma grande proporção dos problemas convencionalmente enfrentados, tanto no âmbito industrial quanto no acadêmico, são estabelecidos em escoamentos sobre corpos de geometrias complexas, o que implica em um grande desafio do ponto de vista numérico. Por exemplo, na Fig. 1 é observada a geometria de um rotor de turbina industrial, um corpo altamente complexo. Na Fig. 2 pode-se notar o escoamento sobre o rotor ilustrado na Fig. 1, observa-se a complexidade do escoamento devido ao fato do rotor estar se movimentando ao longo do tempo. Na Fig. 3 é ilustrado um escoamento sobre uma turbina eólica, um outro caso de geometria complexa e móvel dentro do escoamento.

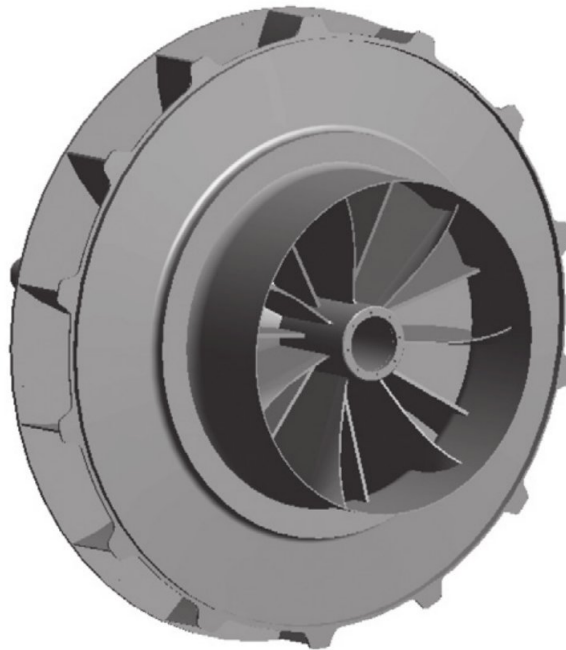


Figura 1 – Rotor de uma turbina industrial (VEDOVOTO et al., 2015).

Visando contornar esta dificuldade, diferentes estratégias e métodos numéricos foram criados para tratar e resolver este grupo de escoamentos. A mais utilizada atualmente na indústria e meio acadêmico e com já comprovada utilidade, eficiência e confiabilidade é o uso de malhas não estruturadas que são conformadas de acordo com as geometrias presentes no escoamento. Apesar das conhecidas vantagens, esse método exige certa experiência do usuário para construir uma malha eficiente e pode exigir um maior esforço computacional caso exista movimentação do corpo. Além disso, esse método pode conter considerável perda de qualidade caso a geometria envolvida seja fortemente irregular (VERZICCO et al., 2000). Outra possível solução, já bastante conhecida academicamente

Time: 4.858930

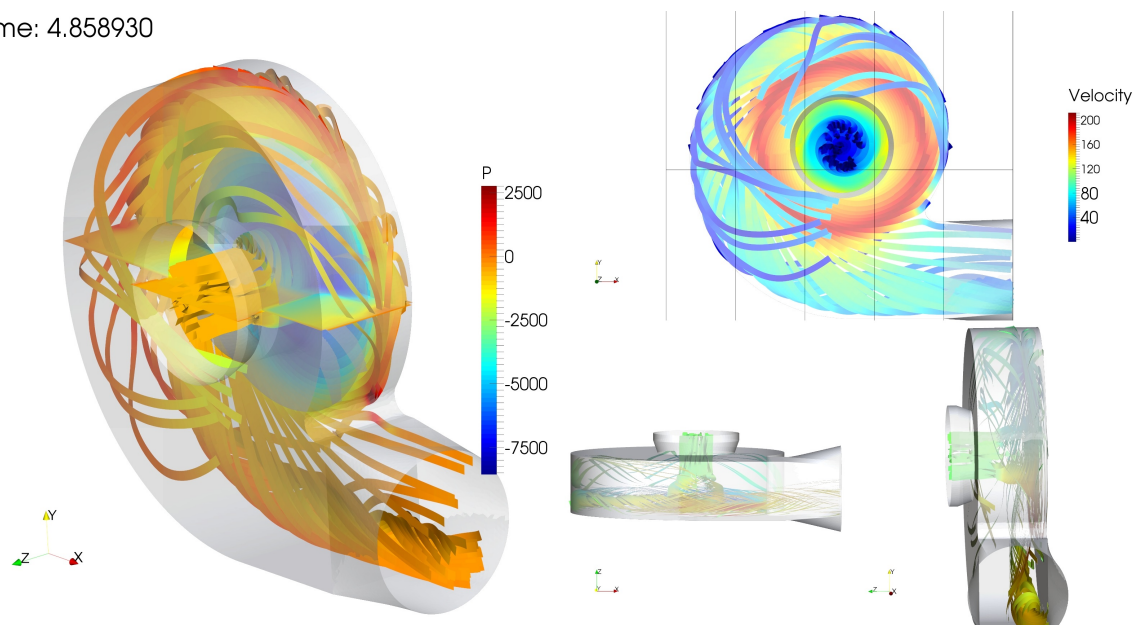


Figura 2 – Pressão média no escoamento interno ao rotor de uma turbina industrial (VEDOVOTO et al., 2015).

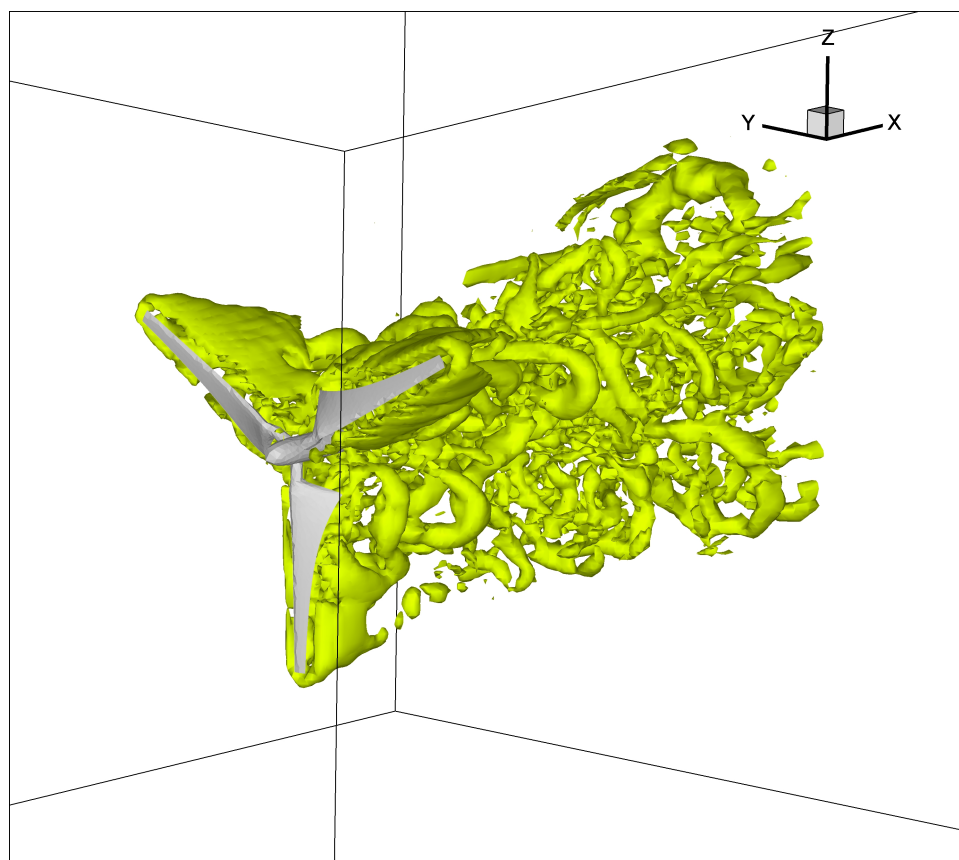
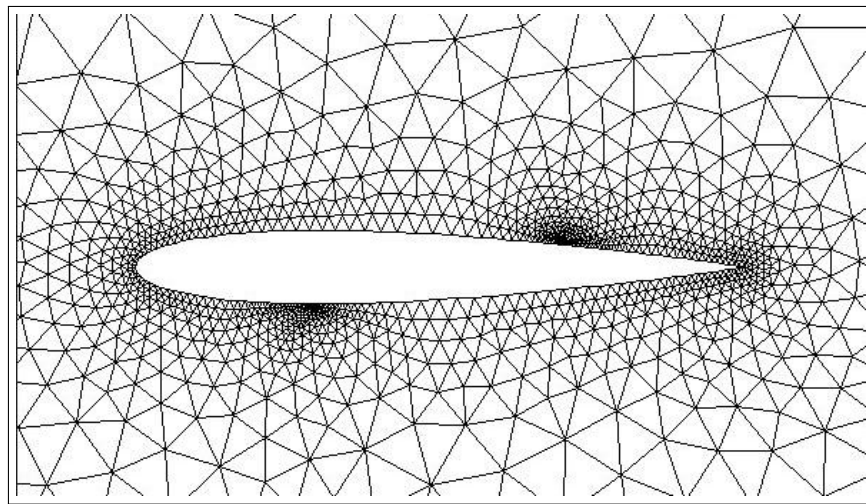
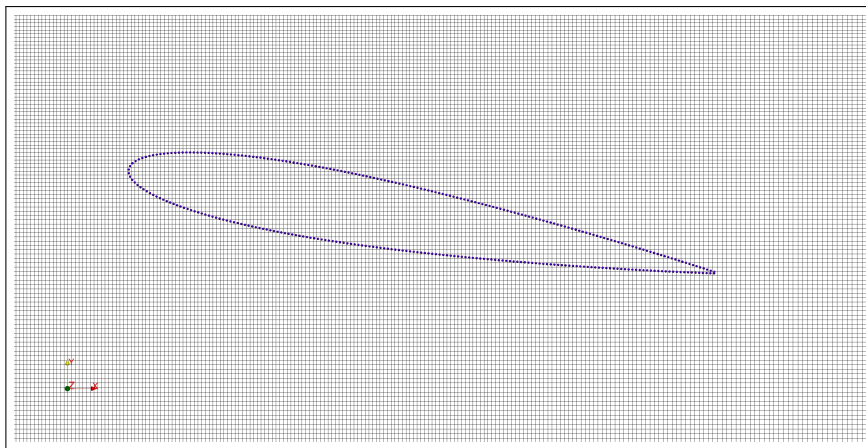


Figura 3 – Escoamento sobre uma turbina eólica (Relatório de Projeto Petrobrás).

mas pouco difundida na indústria, é a utilização de malhas cartesianas com aplicação do método de fronteira imersa, que de um ponto de vista prático são independentes da complexidade das geometrias envolvidas. Neste caso, a influência do corpo se dá através de termos fontes pontuais adicionados à equação que modela o balanço de quantidade de movimento linear do sistema estudado ou, então, através de alterações na estrutura da malha nas proximidades das fronteiras. A Fig. 4 ilustra a diferença básica entre um escoamento modelado por uma malha irregular conformada ao corpo imerso e por uma malha cartesiana aplicando o método de fronteira imersa.



(a)



(b)

Figura 4 – Modelo numérico representativo de um perfil aerodinâmico NACA0012: (a) Malha irregular adaptada ao perfil; (b) Malha cartesiana sobreposta por um conjunto de pontos representando o perfil.

Apesar de consideráveis vantagens, um problema geral dos métodos de fronteira imersa reside no fato de que em sua grande maioria eles não são adequados para tratar escoamentos que passam nas vizinhanças de interfaces esbeltas como, por exemplo, um perfil de aerofólio ou uma folha. Tendo em vista esse problema, um estudo bibliográfico foi

realizado para o devido conhecimento dos métodos existentes na literatura. Nessa linha buscou-se aqueles que se mostram mais adequados aos nossos objetivos: boa adaptatividade do método nos códigos já dispostos no MFLab e a resolução de escoamentos em torno de sólidos de geometria esbelta com a devida acurácia.

Este trabalho tem, portanto, como objetivo principal o estudo e discussão de diferentes abordagens das metodologias de fronteira imersa aplicadas a escoamentos incompressíveis. Foram utilizadas modificações no método de múltipla imposição da força visando o tratamento de geometrias esbeltas e, além disso, foi implementado o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais, um método que contorna o problema citado acima de maneira eficiente e robusta.

No que se refere à formulação diferencial foi realizado um estudo sobre a mecânica dos fluidos computacional, entendendo como essa poderosa ferramenta é útil para uma ampla gama de aplicações. Para isto foi utilizado o código computacional FLUIDS3D, desenvolvido no laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia, abordando todas as potencialidades que a ferramenta oferece, e um código de *CFD*, denominado IMERSGHOST, desenvolvido pelo próprio autor da presente dissertação. Dentre as diversas funcionalidades que os códigos oferecem, a principal estudada para o presente trabalho foi a simulação de escoamentos com a presença de corpos sólidos, o que é modelado através da metodologia da fronteira imersa.

## 2 Formulação diferencial

### 2.1 Modelagem matemática

As equações que modelam um escoamento transiente, isotérmico, tridimensional, newtoniano e incompressível são: equação do balanço de massa (continuidade) e equação do balanço de quantidade de movimento linear (Navier-Stokes). A implementação considerada no presente trabalho é feita em uma malha cartesiana cobrindo uma malha lagrangiana que representa o corpo imerso. À malha cartesiana é dada a nomeação de malha **euleriana**, pois seu equacionamento é realizado por meios de um abordagem **euleriana**, já a malha representando o sólido imerso é dado o nome de malha **lagrangiana**.

#### 2.1.1 Formulação euleriana

Visando a modelagem do escoamento de interesse, consideram-se a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes com o termo de força de interface  $f_i$ , que confere ao escoamento a presença do sólido imerso, este termo trata a velocidade nas regiões de interesse a fim de respeitar as condições impostas nos locais de contato fluido-sólido. O balanço de massa (equação da continuidade) é descrito em notação indicial pela Eq. 2.1:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.1)$$

Já para um escoamento incompressível é dado por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.2)$$

O balanço de quantidade de movimento linear, em notação indicial, é dado por:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad (2.3)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $u_i$  é a componente  $i$  do vetor velocidade,  $\tau_{ij}$  representa as componentes do tensor das tensões viscosas e  $f_i$  é a componente  $i$  do termo fonte, onde o método da fronteira imersa é dado pelo campo de forças que descreve a presença da geometria complexa. Em fluidos newtonianos, sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido, o tensor é modelado com o modelo de Stokes das tensões viscosas (Eq. 2.4):

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (2.4)$$

A Eq. 2.3 pode, então, ser escrita na forma:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i. \quad (2.5)$$

As menores estruturas turbilhonares existentes na maioria dos escoamentos possuem dimensões muito pequenas, pois o número de Reynolds alcança valores muito altos, suficientes para que o sistema entre em regime de turbulência. Desta maneira, os cálculos necessários para alcançar detalhes e características tão pequenas em um código de *CFD* requerem recursos bastante elevados o que impossibilita um aproveitamento eficaz dos custos computacionais. Visando contornar esses incômodos obstáculos, modelos de turbulência foram desenvolvidos, os quais serão apresentados nas seções seguintes.

## 2.2 Modelagem da turbulência

A multiplicidade de escalas representa o número de graus de liberdade ( $N_{gl}$ ) de um escoamento turbulento, o qual pode ser estimado a partir do número de Reynolds, por meio da Eq. 2.6 (SILVEIRA-NETO, 2002). É importante frisar que a multiplicidade de escalas é umas das características mais importantes do fenômeno da turbulência:

$$N_{gl} = Re^{9/4}. \quad (2.6)$$

Nota-se que a Eq. 2.6 mostra que o número de graus de liberdade aumenta com uma potência do número de Reynolds.

A chamada Simulação Numérica Direta, do inglês *Direct Numerical Simulation*, ou *DNS*, é um modelo representativo da turbulência nas equações de Navier-Stokes. Representa a resolução integral das equações, de tal forma que todos os graus de liberdade ou todo o espectro de energia associado ao escoamento é calculado. Para a maioria das aplicações reais não é possível utilizar *DNS* por questões de custo computacional. Desta maneira, surgiu a idéia de separação ou decomposição das escalas da turbulência.

O processo de decomposição das escalas deu origem a dois possíveis tratamentos estatísticos para as equações de transporte (SILVEIRA-NETO, 2002):

- Equações médias de Reynolds (1884), para as quais as escalas da turbulência são separadas nas escalas relativas ao comportamento médio e nas escalas relativas às flutuações em relação a esta média;
- Equações de Navier-Stokes filtradas (SMAGORINSKY, 1963), para as quais as escalas da turbulência são separadas em dois grupos: o grupo das grandes escalas e o grupo das pequenas escalas ou escalas sub-malha.

Nas seções a seguir serão assumidas simplificações nas equações de Navier-Stokes para o desenvolvimento matemático. As equações para um escoamento incompressível assumem as formas seguintes:

$$\frac{\partial (u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho} f_i, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.8)$$

### 2.2.1 Equações médias de Reynolds

Nas equações médias de Reynolds separam-se uma função qualquer  $f(\vec{x}, t)$ , a sua parte média temporal  $\langle f(\vec{x}, t) \rangle$  e sua parte flutuante  $f'(\vec{x}, t)$ .

$$f(\vec{x}, t) = \langle f(\vec{x}, t) \rangle + f'(\vec{x}, t). \quad (2.9)$$

Partindo da equação da continuidade (Eq. 2.8), aplicando o operador média sobre esta equação e utilizando a propriedade comutativa entre este operador e o operador derivada parcial, tem-se a continuidade para as médias das componentes da velocidade:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0. \quad (2.10)$$

Da mesma forma, partindo da equação da quantidade de movimento (Eq. 2.7), aplicando o operador média sobre esta equação e utilizando-se de propriedades matemáticas, tem-se a Eq. 2.11 (SILVEIRA-NETO, 2002):

$$\frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Observa-se que esta equação não pode ser resolvida como está, uma vez que no termo não linear aparece a média do produto de duas variáveis desconhecidas. É feita então a decomposição de escalas, usando a Eq. 2.9, onde a função  $f(\vec{x}, t)$  é a velocidade  $u_i(\vec{x}, t)$ :

$$u_i(\vec{x}, t) = \langle u_i(\vec{x}, t) \rangle + u_i'(\vec{x}, t). \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq. 2.12 na Eq. 2.11 tem-se:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (2.13)$$

Uma consequência desse processo de decomposição de escalas e da transformação das equações originais em equações médias, é o aparecimento de um tensor adicional  $\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ , o chamado tensor de Reynolds. Transpondo o tensor de Reynolds para o segundo membro da equação e agrupando-o com o tensor viscoso:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \langle u'_i u'_j \rangle \right]. \quad (2.14)$$

Com estas novas incógnitas, faz-se necessário modelar este tensor. Porém, no presente trabalho, não serão utilizadas as equações médias de Reynolds, e elas foram aqui citadas apenas para expor um caminho para solução de escoamentos turbulentos. Para modelar a turbulência será utilizada a simulação das grandes escalas, apresentada na próxima subseção.

### 2.2.2 Equações de Navier-Stokes filtradas

Nas equações de Navier-Stokes filtradas separa-se uma função qualquer genérica  $f(\vec{x}, t)$  em parte filtrada  $\bar{f}(\vec{x}, t)$  e na sua parte flutuante  $f'(\vec{x}, t)$ :

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t). \quad (2.15)$$

A parte filtrada  $\bar{f}(\vec{x}, t)$  é dada por:

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}', \quad (2.16)$$

havendo diversas funções filtro adotadas na literatura, onde a mais comum é a função filtro por volume:

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} 1/\Delta & |\vec{x}| \geq \Delta/2 \\ 0 & |\vec{x}| \leq \Delta/2 \end{cases}, \quad (2.17)$$

em que  $\Delta$  é o tamanho característico do filtro, o qual caracteriza a frequência de corte da filtragem.

De forma análoga à Eq. 2.11, observa-se que esta equação não pode ser resolvida para a variável filtrada, uma vez que no termo não linear aparece o produto filtrado e não o produto das variáveis filtradas. Define-se então o tensor global sub-malha da turbulência:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (2.18)$$

Substituindo-se a Eq. 2.18 na Eq. 2.11, tem-se:

$$\frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right]. \quad (2.19)$$

O tensor  $\tau_{ij}$  é modelado com a hipótese de Boussinesq para a viscosidade turbulenta, o que será apresentado na próxima subseção.

### 2.2.3 Modelagem sub-malha da turbulência

Boussinesq (1877) propôs o conceito de viscosidade turbulenta para o tensor de Reynolds sub-malha, estabelecendo uma analogia com o modelo de Stokes para as tensões viscosas moleculares. Ele também propôs expressar o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta:

$$\tau_{ij} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (2.20)$$

em que a viscosidade cinemática turbulenta  $\nu_t$  deve ser modelada. São diversas as formas para se modelar esta viscosidade. No presente trabalho serão utilizadas duas modelagens bastante difundidas: o clássico modelo sub-malha de Smagorinsky, e o modelo sub-malha dinâmico de Germano et al. (1991).

#### 2.2.3.1 Modelo sub-malha de Smagorinsky

A modelagem de Smagorinsky é baseada na hipótese de equilíbrio local para as pequenas escalas (produção de energia cinética turbulenta é igual a sua dissipação). A viscosidade turbulenta pode ser expressa em função do tensor taxa de deformação  $S_{ij}$ , da escala de comprimento  $\Delta$  e de uma constante  $C_s$ , conhecida como constante de Smagorinsky:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}. \quad (2.21)$$

O tensor taxa de deformação  $S_{ij}$  é dado por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.22)$$

e a escala de comprimento  $\Delta$  é geralmente calculado em função da malha de discretização:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}, \quad (2.23)$$

onde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  são os comprimentos do volume da malha nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O termo  $S_{ij}S_{ij}$  pode ser expresso por  $\|S_{ij}\|^2$ .

Para escoamentos com turbulência homogênea e isotrópica, a constante de Smagorinsky foi determinada analiticamente por Lilly (1992), e o valor encontrado foi  $C_s = 0,18$ . Porém na prática esta constante pode ser calibrada para valores entre 0,05 e 0,30, uma vez que, ela pode ser variada dependendo do comportamento do escoamento turbulento. Um tratamento especial deve ser dado em posições próximas a paredes, regiões onde a dissipação da turbulência é maior, e a turbulência se torna menos homogênea e isotrópica. Como consequência, a constante de Smagorinsky deve ser menor. Uma forma de resolver este problema é a utilização de uma função que amortiza o valor da viscosidade em regiões de parede.

Vandriest (1956) apresenta uma função de amortecimento, a qual pode ser aplicada à constante de Smagorinsky. Esta função é dada por:

$$C_s = C_{so} \left(1 - e^{-d^+/A^2}\right), \quad (2.24)$$

onde  $d^+ = du_\tau/\nu$  representa a distância relativa,  $d$  é a distância do volume euleriano analisado até a parede mais próxima,  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  é a velocidade de cisalhamento,  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento.  $A^+ = 25$  é uma constante determinada por Ferziger e Peric (1996) e  $C_s$  é a constante de Smagorinsky, geralmente limitada em  $0,05 \leq C_s \leq 0,3$ . O código computacional FLUIDS3D, utilizado no presente trabalho, possui a opção de usar esta função de amortecimento nas paredes do domínio computacional. Esta função de amortecimento foi implementada de tal forma a também amortecer a viscosidade turbulenta próxima às paredes da fronteira imersa. As variáveis são calculadas da seguinte forma:  $d$  é a distância do centro do volume euleriano ao centro do volume lagrangiano mais próximo, e a tensão  $\tau_w$  é calculada a partir do vetor velocidade  $(u, v, w)$  do volume euleriano onde o centro do volume lagrangiano está contido, sendo esse volume lagrangiano o mais próximo do volume euleriano analisado.

Para o cálculo de  $\tau_w$  e necessário projetar o vetor velocidade  $(u, v, w)$  na direção normal da fronteira imersa. Pela algebra linear pode-se dizer que o vetor projetado  $(u_{Proj}, v_{Proj}, w_{Proj})$  é dado por:

$$\begin{bmatrix} u_{Proj} \\ v_{Proj} \\ w_{Proj} \end{bmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

onde  $(n_x, n_y, n_z)$  são as componentes do vetor unitário normal à superfície lagrangiana nas três direções.

E finalmente  $\tau_w$  é calculado pela Eq. 2.26:

$$\tau_w = \mu \frac{\sqrt{u_{Proj}^2 + v_{Proj}^2 + w_{Proj}^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad (2.26)$$

sendo  $(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$  o quadrado das arestas do volume euleriano onde o centro do volume lagrangiano está contido.

Um novo modelo foi proposto, onde a constante de Smagorinsky passa a ser uma função deformada dinamicamente, dependendo da posição e característica do escoamento local. O modelo é chamado sub-malha dinâmico (GERMANO et al., 1991).

### 2.2.3.2 Modelagem dinâmica sub-malha

Germano et al. (1991) propuseram um novo modelo sub-malha baseado na proposta de Smagorinsky, onde a equação do balanço de quantidade de movimento linear é filtrada duas vezes, permitindo que a função de proporcionalidade do modelo se ajuste automaticamente.

O primeiro filtro utiliza as dimensões da malha para calcular o seu comprimento característico, como no modelo de Smagorinsky. O segundo filtro utiliza múltiplos das dimensões da malha para determinar o comprimento característico desse último filtro.

Partindo da equação filtrada com base no comprimento  $\Delta$  da malha (Eq. 2.11), utiliza-se o tensor global de Germano  $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  e obtém-se a Eq. 2.19.

Continuando, aplica-se uma segunda filtragem na Eq. 2.19, com comprimento característico  $\hat{\Delta} > \Delta$ , sendo este novo comprimento múltiplo de  $\Delta$ , geralmente  $\hat{\Delta} = 2\Delta$ . Definindo um tensor para teste  $T_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j$ , obtém-se:

$$\frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) - T_{ij} \right]. \quad (2.27)$$

Subtraindo a Eq. 2.27 da Eq. 2.19 filtrada com o comprimento característico  $\hat{\Delta}$ , chega-se ao tensor de Leonard global, ou a identidade de Germano:

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}. \quad (2.28)$$

Conhecido o tensor de Leonard global, a função para determinar o coeficiente dinâmico possui a seguinte forma:

$$c(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}, \quad (2.29)$$

sendo o tensor  $M_{ij}$  definido por:

$$M_{ij} = \hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij} - \hat{\Delta}^2 \overline{|\bar{S}| \bar{S}_{ij}} \quad (2.30)$$

O cálculo do coeficiente dinâmico depende de grandezas já calculadas e de um duplo processo de filtragem.

Uma vez definidas as equações do meio fluido contínuo, incluindo a modelagem para fechamento da turbulência, deve-se agora formular o último termo das equações de Navier-Stokes o termo fonte, neste caso particular a força da fronteira imersa proveniente da metodologia de fronteira imersa que será apresentada na seção 3.

## 2.3 Modelagem numérica

No presente trabalho foram utilizados dois códigos distintos:

- FLUIDS3D

Algoritmo implementado em FORTRAN de resolução das equações de Navier-Stokes empregando o método dos volumes finitos com malha cartesiana. Apresenta variáveis escalares centradas e variáveis vetoriais deslocadas. Com esse código resolve-se o escoamento na sua forma tridimensional, utilizando as equações de transporte nas formas conservativas. A discretização do termo difusivo é feita empregando o Esquema de Diferenças Centradas ou *Central Difference Scheme (CDS)* e o termo advectivo é discretizado pelo método *CUBISTA* (ALVES et al., 2003). Uma aproximação totalmente implícita é adotada. Os sistemas lineares resultantes são resolvidos utilizando o solver de sistemas lineares MSIP - Modified Strongly Implicit Procedure (SCHNEIDER; ZEDAN, 1981) para as componentes de velocidade. A equação para correção de pressão é resolvida pelo método da projeção baseado na técnica do passo fracionado, resultando em uma equação de Poisson.

Apresenta o método de fronteira imersa de **múltipla imposição da força** (seção 3.3.1.1) para o cálculo de escoamentos sobre corpos sólidos.

- IMERSGHOST

Algoritmo implementado em MATLAB de resolução das equações de Navier-Stokes desenvolvido pelo próprio autor. Emprega o método dos volumes finitos com malha cartesiana. Apresenta variáveis escalares centradas e variáveis vetoriais deslocadas, este código resolve o escoamento na sua forma bidimensional, utilizando as equações de transporte nas formas não conservativas. As discretizações dos termos difusivo e

advectivo são feitas com Esquema de Diferenças Centradas (*CDS*). Uma aproximação totalmente explícita é adotada, utilizando o método de Euler de primeira ordem como integrador temporal. A equação de correção de pressão é resolvida pelo método da projeção baseado na técnica do passo fracionado, resultando em uma equação de Poisson.

Apresenta o método de fronteira imersa com **volumes fantasmas locais** (seção 5) para o cálculo de escoamentos sobre corpos sólidos.

O esquema com variáveis vetoriais deslocadas dispensa interpolações adicionais, uma vez que a variável já está na face do volume, aumentando a estabilidade numérica no acoplamento pressão-velocidade (FERZIGER; PERIC, 1996). A Fig. 5 apresenta um diagrama mostrando o tipo de malha utilizada, onde  $e$  representa um escalar genérico,  $u$  e  $v$  representam vetores genéricos em uma malha bidimensional.

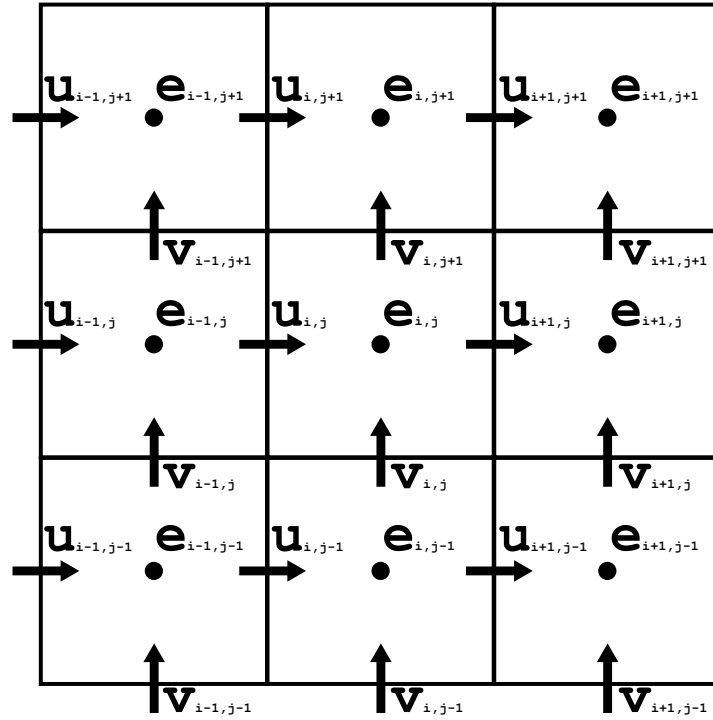


Figura 5 – Representação de uma malha bidimensional com variáveis genéricas.

Em escoamentos transientes, as equações de transporte devem ser integradas no tempo. Buscando a estabilidade da solução numérica, é necessário fazer a escolha de um procedimento adequado para o avanço temporal, o que será discutido na próxima subseção.

### 2.3.1 Aproximações temporais e estabilidade numérica

Nas simulações das grandes escalas, o tamanho do passo de tempo pode ser muito pequeno quando é necessário capturar as pequenas escalas resolvidas do escoamento. Deste

modo, a forma de integração temporal deve ser escolhida com cautela. Esquemas explícitos apresentam problemas de estabilidade numérica quando utiliza-se critério *CFL* (*Courant Friedrich Lewy*) maiores do que a unidade. Visando restringir o tamanho do passo de tempo necessário para manter a estabilidade numérica, o seguinte critério de estabilidade pode ser definido:

$$\Delta t = C \left( \frac{1}{\Delta t_{adv} + \Delta t_{dif}} \right)^{-1}, \quad (2.31)$$

onde  $C$  é o fator, que pode ser assumido entre 0 e 1.  $\Delta t_{adv}$  e  $\Delta t_{dif}$  são, respectivamente, o tamanho máximo permitido do passo de tempo advectivo e difusivo, definidos por:

$$\Delta t_{adv} = \left( \frac{\Delta x}{|u|_{max}} + \frac{\Delta y}{|v|_{max}} + \frac{\Delta z}{|w|_{max}} \right), \quad (2.32)$$

$$\Delta t_{dif} = \left( \frac{\Delta x^2}{\nu} + \frac{\Delta y^2}{\nu} + \frac{\Delta z^2}{\nu} \right), \quad (2.33)$$

onde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  denotam, respectivamente, o comprimento da malha de discretização nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $|u|_{max}$ ,  $|v|_{max}$  e  $|w|_{max}$  são o máximo valor da norma da velocidade nas três direções coordenadas, e  $\nu$  representa a viscosidade cinemática.

A utilização de um esquema explícito para os termos advectivos e difusivos, resulta em um tamanho de passo de tempo da ordem  $O(\Delta x^2)$  (FERZIGER; PERIC, 1996). Esta limitação numérica não ocorre quando se utiliza discretização implícita ou semi-implícita. Apesar de possuir uma implementação mais complicada, estas duas metodologias apresentam uma estabilidade mais elevada. Com o tratamento implícito do termo difusivo, a restrição temporal de ordem  $O(\Delta x^2)$  se torna  $O(\Delta x)$  (VILLAR, 2007).

A escolha de tamanhos de passos de tempo variáveis ou constantes pode ter uma forte influência na estabilidade da solução numérica, o que será apresentado na próxima subseção.

### 2.3.2 Passo de tempo variável

Na solução de equações diferenciais parciais com diferentes escalas de tempo, a utilização de esquemas de passo de tempo variável é essencial para obter eficiência computacional e resultados acurados. Nas simulações realizadas no presente trabalho foi utilizado passo de tempo variável, e as equações serão apresentadas a seguir.

Wang (2005) apresenta uma formulação geral para o passo de tempo variável para equações diferenciais parciais dependentes do tempo. No seu trabalho um arranjo é

proposto, de tal maneira que toda equação diferencial possa ser temporalmente integrada no tempo utilizando esquemas semi-implícitos de segunda ordem:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \sum_{j=0}^2 \alpha_{j,n+1} U^{n+j} = \sum_{j=0}^1 \beta_{j,n+1} \zeta(U^{n+j}) + \sum_{j=0}^2 \theta_{j,n+1} \varepsilon(U^{n+j}), \quad (2.34)$$

onde  $\zeta(U^{n+j})$  e  $\varepsilon(U^{n+j})$  representam contribuições difusivas e respectivamente, representam as advectivas, sendo  $n+1$  o tempo atual. Os valores de  $\alpha_{j,n+1}$ ,  $\beta_{j,n+1}$  e  $\theta_{j,n+1}$  são definidos por:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,n+1} &= \frac{(2\gamma-1)\omega_{n+1}^2}{1+\omega_{n+1}}, \\ \alpha_{1,n+1} &= (2\gamma-1)\omega_{n+1} - 1, \\ \alpha_{2,n+1} &= \frac{1+2\gamma\omega_{n+1}}{1+\omega_{n+1}}, \\ \beta_{0,n+1} &= -\gamma\omega_{n+1}, \\ \beta_{1,n+1} &= 1 + \gamma\omega_{n+1}, \\ \theta_{0,n+1} &= \frac{c}{2}, \\ \theta_{1,n+1} &= 1 - \gamma - \left(1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}\right) \frac{c}{2}, \\ \theta_{2,n+1} &= \gamma + \frac{c}{2\omega_{n+1}}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo  $\omega_{n+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n}$  a razão entre dois passos de tempo consecutivo. Por exemplo, se o passo de tempo for mantido constante, a Eq. 2.34 se reduz a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) u^{n+1} - 2\gamma u^n + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) u^{n-1} \right] &= (\gamma-1) \zeta(u^n) - \gamma \zeta(u^{n-1}) + \\ &\left[ \left( \gamma + \frac{c}{2} \right) \varepsilon(u^{n+1}) + (1-\gamma-c) \varepsilon(u^n) + \frac{c}{2} \varepsilon(u^{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

O que difere das formas de integrar no tempo são os valores para as constantes  $\gamma$  e  $c$ . Alguns exemplos clássicos: Crank-Nicolson Adams-Bashfort ( $\gamma = 0,5$  e  $c = 0,0$ ), Adams-Bashfort Modificado ( $\gamma = 0,5$  e  $c = 0,125$ ), Crank-Nicolson Leap Frog ( $\gamma = 0,0$  e  $c = 1,0$ ) e SBDF ( $\gamma = 1,0$  e  $c = 0,0$ ).

Em Vedovoto (2011) o modelo acima é modificado para um esquema implícito. Então a Eq. 2.34 pode ser adaptada, como:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \sum_{j=0}^2 \alpha_{j,n+1} U^{n+j} = \sum_{j=0}^2 \theta_{j,n+1} [\zeta(U^{n+j}) + \varepsilon(U^{n+j})]. \quad (2.37)$$

Aplicando a equação obtida 2.37 na equação do balanço da quantidade de movimento (Eq. 2.27), obtém-se:

$$\frac{\alpha_2 (\rho u_i)^{n+1} + \alpha_1 (\rho u_i)^n + \alpha_0 (\rho u_i)^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \sum_{j=0}^2 (\theta_{j,n+1}) m_j, \quad (2.38)$$

onde  $\theta_{j,n+1}$ , com  $j = 0, 1, 2$  é definido pela Eq. 2.35, e

$$m_{k+1} = \left( \frac{\partial \tau_{i,j}^{n+k}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^{n+k} u_j^{n+k}}{\partial x_j} \right), \quad k = -1, 0, 1 \quad (2.39)$$

Feita a formulação para integração no tempo, a metodologia utilizada para a discretização espacial das equações de transporte será apresentada na próxima subseção.

### 2.3.3 Discretização espacial das equações de transporte

Como apresentado no início deste capítulo, os termos difusivos e advectivos das equações de transporte são calculados através do esquema de diferenças centradas. Para ilustrar a discretização de uma derivada usando este esquema abordado, é considerado um volume de controle com comprimentos  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ , mostrado na Fig. 6. As letras em maiúsculo ( $P$ ,  $E$ ,  $W$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $T$  e  $B$ ) representam, respectivamente, o centro dos volumes de controle analisado, leste, oeste, norte, sul, topo e fundo, e as letras em minúsculo ( $e$ ,  $w$ ,  $n$ ,  $s$ ,  $t$  e  $b$ ) representam, respectivamente, as faces leste, oeste, norte, sul, topo e fundo relativas ao ponto de referência  $P$ .

O termo advectivo da Eq. 2.39 no tempo  $k + 1$ , direção  $x$  e para  $i = 1$  e  $j = 1$ , pode ser aproximado, usando o método dos volumes finitos:

$$\frac{\partial uu^{k+1}}{\partial x} = [(uu)_e - (uu)_w] \Delta x \Delta y. \quad (2.40)$$

A estrutura adotada nos presentes códigos computacionais pode ser escolhida entre uniforme e não-uniforme. Então é necessário realizar interpolações ponderadas para discretizar qualquer derivada espacial. Para determinar o valor de qualquer propriedade escalar  $\theta$  em uma face  $e$ , a seguinte equação é usada para interpolação (FERZIGER; PERIC, 1996):

$$\theta_e = \theta_E \Lambda_e + \theta_P (1 - \Lambda_e), \quad (2.41)$$

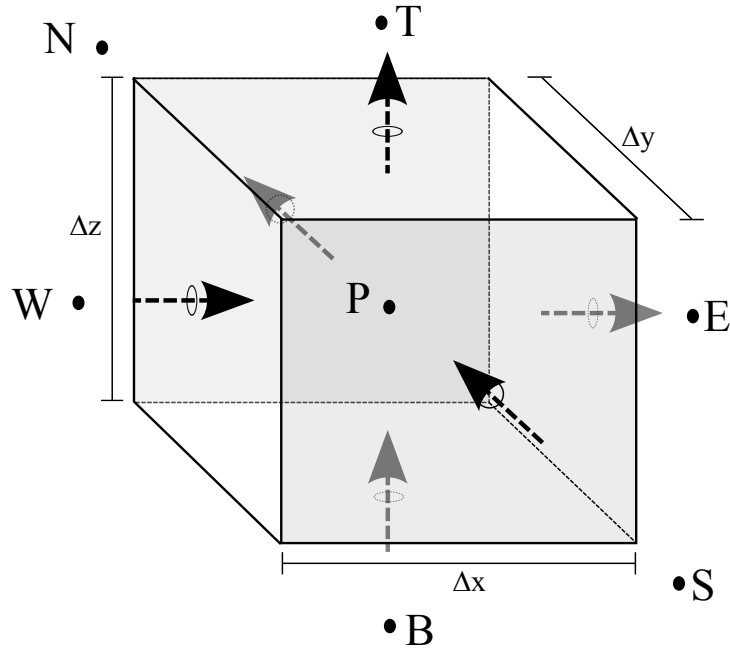


Figura 6 – Volume de controle elementar utilizado na discretização das equações de transporte.

onde,  $\Lambda_e = \delta x_e / \delta x_E$ , sendo  $\delta x_e$  a distância entre o ponto central  $P$  e a face  $e$ , e  $\delta x_E$  a distância entre o ponto central  $P$  e o ponto de centro do volume leste  $E$ , como pode ser visto na Fig. 7.

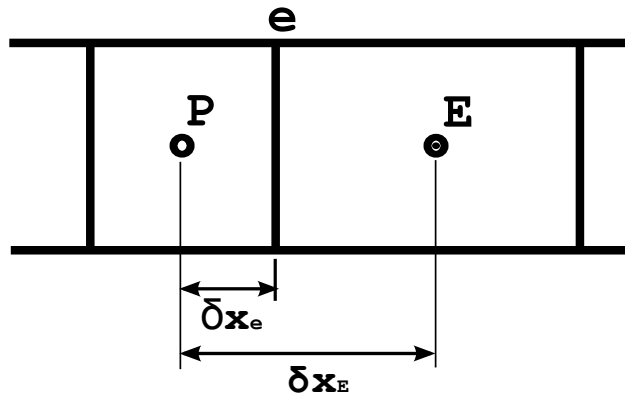


Figura 7 – Volume finito não-uniforme e representação das distâncias para interpolar um escalar qualquer.

A discretização do termo advectivo da equação de transporte muito influencia na acurácia e estabilidade do esquema numérico. Uma forma de contornar este problema é calcular o termo advectivo da seguinte forma:

$$(\rho uu)_e^{k+1} = (\rho uu)_{e,UDS}^{k+1} + [(\rho uu)_{e,CDS} - (\rho uu)_{e,UDS}]^k, \quad (2.42)$$

onde o termo com o índice  $UDS$  indica que o mesmo foi discretizado utilizando um esquema upwind (FERZIGER; PERIC, 1996), e  $CDS$  indica que o termo foi discretizado utilizando diferenças centradas. A variável em  $k + 1$  indica o tempo atual e  $k$  indica o tempo antecedente.

No presente trabalho, além do esquema  $CDS$ , foi também empregado o esquema de discretização do termo advectivo  $CUBISTA$ , informações sobre este método podem ser encontradas no trabalho de Alves et al. (2003).

### 2.3.4 Acoplamento pressão-velocidade

Uma vez que ambos os códigos usados no presente trabalho utilizam a metodologia do passo fracionado implícita, é necessário resolver uma equação de Poisson para a correção da pressão, a qual serve para corrigir os campos de velocidade e de pressão. Para obter esta equação, a Eq. 2.38 é reescrita, com a derivada da pressão no tempo  $n + 1$ :

$$\frac{\alpha_2 (\rho u_i)^{n+1} + \alpha_1 (\rho u_i)^n + \alpha_0 (\rho u_i)^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \sum_{j=0}^2 (\theta_{j,n+1}) m_j. \quad (2.43)$$

Subtraindo a Eq. 2.43 da Eq. 2.38, e definindo a flutuação da pressão entre dois passos de tempo como sendo  $p' = p^{n+1} - p^n$ , e rearranjando os termos obtém-se a Eq. 2.44:

$$\frac{\rho^{n+1} \alpha_2 (u_i^{*n+1} - u_i^{n+1})}{\Delta t} = \frac{\partial p'}{\partial x_i}, \quad (2.44)$$

onde  $u_i^{*n+1}$  representa o campo de velocidade estimada. Aplicando o divergente na Eq. 2.44, obtém-se:

$$\frac{\alpha_2}{\Delta t} \left( \frac{\partial u_i^{*n+1}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right), \quad (2.45)$$

Resolvendo o sistema linear gerado pela Eq. 2.45, deve-se por fim corrigir os campos de pressão e velocidade, através das Eqs. 2.46 e 2.47, respectivamente:

$$p^{n+1} = p' + p^n, \quad (2.46)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^{*n+1} - \left( \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho^{n+1}} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i}. \quad (2.47)$$

Apresentada a discretização das equações de transporte no tempo e espaço, a próxima subseção será apresentada a discretização das equações do domínio lagrangiano, onde será detalhada a metodologia da multi forçagem direta.

## 2.4 Condições de contorno

Um dos pontos críticos da simulação computacional de escoamentos internos e externos é a implementação adequada das condições de contorno. Isto ocorre devido à necessidade de truncar o domínio infinito ou semi-infinito, criando um contorno artificial onde condições aproximadas adicionais precisam ser impostas no lugar das equações de conservação, podendo gerar reflexões numéricas indesejadas.

No presente trabalho, as condições de contorno para o domínio euleriano são impostas através de volumes fantasmas, tanto para os termos de fluxo, quanto para os termos de pressão. Por exemplo:

$$\phi_{\Gamma} = \frac{1}{2} (\phi_{nb} + \phi_g), \quad (2.48)$$

onde  $\phi_{\Gamma}$  é o valor da variável  $\phi$  na fronteira,  $\phi_{nb}$  é o valor do volume interno ao domínio e próximo à fronteira e  $\phi_g$  é o valor no volume fantasma externo ao domínio. Dado que  $\phi_{nb}$  é atualizado a cada iteração,  $\phi_g$  também pode ser atualizado no início da próxima iteração de acordo com  $\phi_{nb}$ . A Fig. 8 representa a posição do volume fantasma em relação à fronteira do domínio.

Para casos em que tem-se derivadas como condições de contorno, a equação é modificada da seguinte forma:

$$\phi_g = \phi_{nb} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} \Delta l, \quad (2.49)$$

onde  $\Delta l$  é a distância entre os centros dos volumes.

As condições de contorno utilizadas no presente trabalho são descritas a seguir.

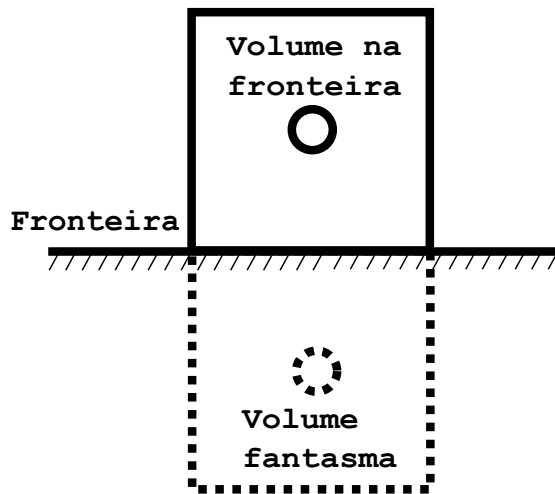


Figura 8 – Representação dos volumes fantasmas para condição de contorno.

### 2.4.1 Condição de contorno de parede sólida

Em paredes, a condição de não deslizamento pode ser reforçada para todas as componentes de velocidade, sua forma matemática é dada por:

$$u_i^g = 2u_{\Gamma,i} - u_{nb,i} \quad (2.50)$$

onde  $u_i^g$  é a componente  $i$  da velocidade no volume fantasma externo ao domínio,  $u_{\Gamma,i}$  é a componente  $i$  da velocidade conhecida na parede do domínio e  $u_{nb,i}$  é a componente  $i$  da velocidade no volume próximo à fronteira. A condição de pressão para paredes é setada como gradiente nulo  $\partial p / \partial n = 0$ . Essa condição de contorno da velocidade também é conhecida como condição de Dirichlet.

### 2.4.2 Condição de contorno de Neumann

A condição de contorno de Neumann especifica uma derivada imposta nas paredes do domínio, que pode representar, por exemplo, uma face de saída do escoamento.

$$\frac{\partial u_{\Gamma}}{\partial n} = C, \quad (2.51)$$

onde  $C$  é uma constante. Sua forma discretizada, para uma aproximação de primeira ordem, é dada por:

$$u_i^g = u_{nb,i} + \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma} \Delta x_i \quad (2.52)$$

onde  $\Delta x_i$  é o tamanho da aresta do volume euleriano.

### 2.4.3 Condição de contorno de Robin

A condição de Robin força a condição de contorno a respeitar uma combinação das condições de Dirichlet e Neumann. Esta condição representa uma superfície livre no escoamento, ou um balanço de uma dada informação que está sendo transportada pela fronteira. Sua forma matemática é dada por:

$$\frac{\partial u_{\Gamma}}{\partial n} + u_{\Gamma} = C. \quad (2.53)$$

### 3 Método da fronteira imersa

O método de fronteira imersa (*Immersed Boundary Method – IB*) surgiu como uma alternativa eficiente aos métodos cujas malhas se ajustam às fronteiras (*body-fitted*) para tratamento de problemas envolvendo geometrias complexas, móveis e deformáveis. As Figs. 9-a, 9-b e 9-c, respectivamente, ilustram três diferentes tipos de malhas que se ajustam às fronteiras do problema: malha regular estruturada, malha regular não estruturada e malha não estruturada, todas representam a mesma geometria.

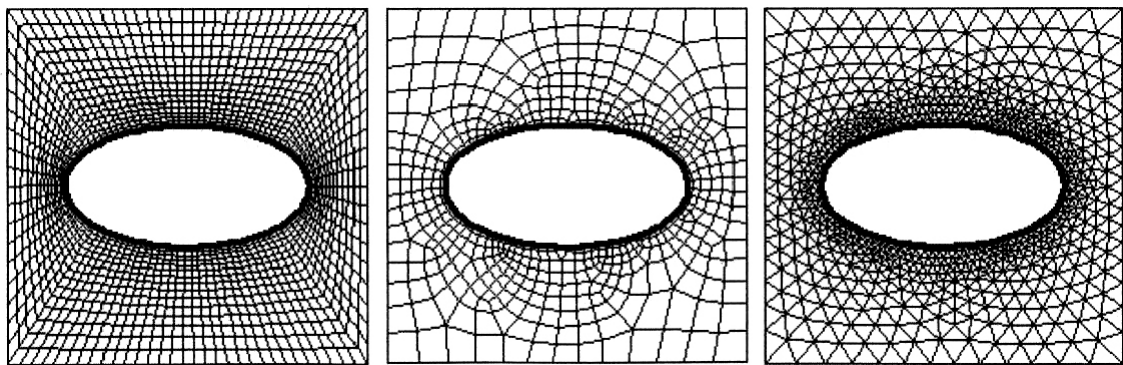


Figura 9 – Malhas estruturadas e não estruturadas adaptadas ao corpo (MITTAL; IACCARINO, 2005).

Originalmente no método de fronteira imersa o corpo é representado por um campo de forças que, de alguma forma, é inserido às equações do fluido, fazendo com que o corpo seja modelado indiretamente. O método foi desenvolvido por Peskin (1972) cuja motivação foi simular o escoamento de sangue em válvulas cardíacas.

Na metodologia da fronteira imersa utiliza-se uma malha independente para definir o corpo em meio fluido. Diversas vantagens e desvantagens podem ser citadas envolvendo cada um dos vários métodos para simulações com método da fronteira imersa e a escolha de cada um deles é ditada, principalmente, pela física do problema e a precisão numérica desejada. Uma dessas vantagens é, por exemplo, poder simular escoamentos sobre geometrias complexas, utilizando malha cartesiana para o domínio do fluido, sem grandes esforços para gerá-las. Um problema geral desses métodos reside no fato de que em sua grande maioria eles não são adequados para tratar escoamentos que passam nas vizinhanças de interfaces esbeltas como, por exemplo, um perfil de aerofólio ou uma folha. A principal característica que distingue e subclassifica cada um dos diferentes métodos de fronteira imersa é a forma com que a condição de contorno na fronteira é imposta sobre o escoamento, essa condição pode ser imposta de diversas maneiras como, por exemplo, a imposição

direta das propriedades nos pontos da malha cartesiana ou, então, forçando o escoamento através de um termo fonte na equação do balanço de quantidade de movimento linear.

Como dito acima, o difícil tratamento de geometrias agudas pelo método de fronteira imersa é um dos problemas mais limitantes dessa metodologia, pois não permite obter uma boa acurácia nos resultados de escoamentos sobre geometrias finas, ou seja, geometrias cuja espessura em uma direção é bastante reduzida em relação às outras. Tendo em vista esse problema, um estudo bibliográfico foi realizado para o devido conhecimento dos métodos existentes na literatura, tanto contínuos quanto discretos, e nessa linha buscou-se aqueles que se mostram mais aptos aos nossos objetivos: boa adaptatividade do método nos códigos já dispostos e a resolução de escoamentos em torno de sólidos de geometria esbelta com devida exatidão e precisão. Deve ser notado que várias revisões de excelente qualidade existem na literatura como, por exemplo, Oliveira (2006) e Mittal e Iaccarino (2005), mas elas não proporcionam uma sistematização com o nosso critério de escolha, logo, uma nova pesquisa foi realizada.

De acordo com Mittal e Iaccarino (2005) o termo *immersed boundary method*, em português método da fronteira imersa, foi usado pela primeira vez por Peskin (1972) na simulação de um mecanismo cardíaco associado ao escoamento sanguíneo no corpo humano, com o objetivo de desenvolver válvulas e corações artificiais. No método de fronteira imersa original (PESKIN, 1972; PESKIN, 1977), o corpo é representado por um campo de forças que é inserido às equações do fluido, fazendo com que o sólido seja modelado indiretamente. São criadas duas malhas independentes, uma malha lagrangiana a qual é utilizada para representar a fronteira e uma malha euleriana para as equações de transporte. O acoplamento da malha lagrangiana ao campo euleriano se dá através de um termo fonte de força interfacial, gerado sobre os pontos lagrangianos e distribuído para os volumes eulerianos próximo à fronteira (SILVA et al., 2003). Assim, uma das maiores vantagens desta metodologia é que ambas as malhas coexistem de forma independente da geometria do corpo imerso, logo é possível simular o escoamento sobre um corpo com qualquer geometria utilizando malha cartesiana retangular para representar o domínio euleriano. Para este método, além dos bons resultados já comprovados, existem fortes expectativas com relação ao tempo computacional, ao uso de memória e a uma maior facilidade para se gerar malhar, quando comparados aos métodos tradicionais (SILVA et al., 2003).

Em seu trabalho de revisão, Mittal e Iaccarino (2005) subdividiram os métodos conhecidos de fronteira imersa na seguinte classificação representada pela Fig. 10.

- **Métodos de força contínua:** O termo de força é incorporado na forma contínua das equações de Navier-Stokes, antes da discretização das equações. E ainda é possível separar esses métodos em subclasses.

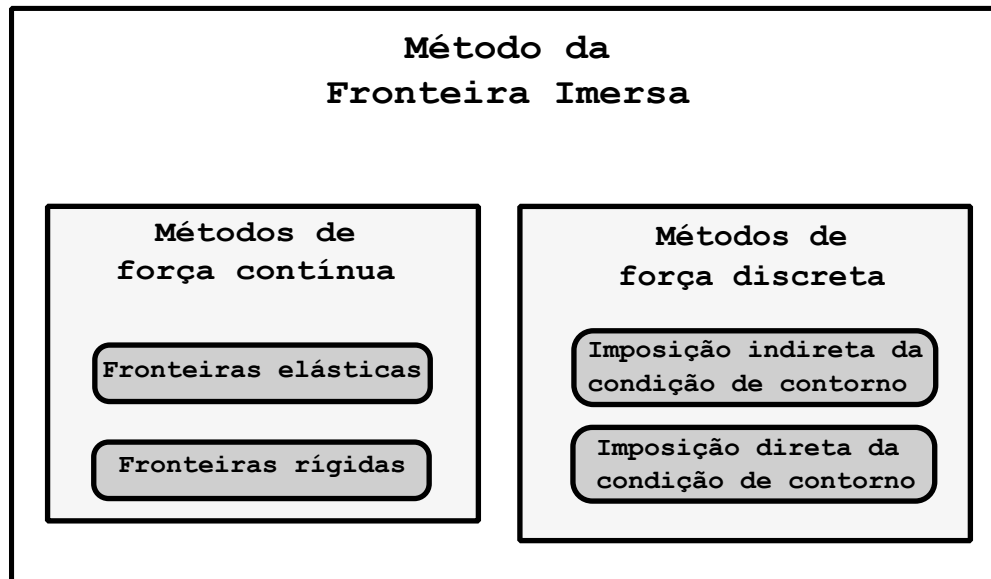


Figura 10 – Classificação dos diferentes tipos do método de fronteira imersa dado por Mittal e Iaccarino (2005).

- **Fronteiras elásticas:** Trabalho original de Peskin (1972). Os pontos lagrangianos representando a superfície imersa são representados por pontos ligados entre si por forças elásticas. A reação da fronteira é exercida de acordo com a taxa de deformação dos elementos pontuais.
- **Fronteiras rígidas:** Goldstein et al. (1993) desenvolveram um dos trabalhos mais clássicos nessa linha de fronteira imersa, onde foi proposto um modelo para determinação da densidade de força na fronteira, denominado *force feedback method*. Neste modelo são utilizadas constantes *ad-hoc* na formulação da força e assim busca-se encontrar uma força que ajuste a velocidade do fluido na fronteira à velocidade do corpo.
- **Métodos de força discreta:** Nessa família de métodos o termo de força é introduzido após a discretização das equações, o que pode ser feito de duas maneiras distintas, conforme mostrado abaixo:
  - **Imposição indireta da condição de contorno:** A imposição da condição de contorno é feita de maneira indireta, ou seja, deve-se obter uma força que, quando inserida nas equações de Navier-Stokes, leve à obtenção da condição de contorno especificada para a fronteira. Esta imposição é feita usando modelos simplificados de força para frenar o fluido. Mohd-Yusof (1997) propôs uma alternativa dessa subclasse de método, denominado *direct forcing method*. Nele o termo de força lagrangiano é calculado a partir da solução numérica do escoamento. Inicialmente resolvem-se numericamente somente as equações de Navier-Stokes e então calcula-se o termo de força com base nas equações de

movimento, utilizando para isto o campo estimado na solução numérica. O termo de força é calculado pela diferença entre o campo estimado e a condição de contorno desejada na fronteira. A grande vantagem desse método é o fato de que o cálculo da força é feito de maneira direta sem o uso de constantes. Verzicco et al. (2000) apresentaram a extensão do método proposto por Mohd-Yosuf para problemas com fronteiras móveis. Foi simulado o escoamento em uma câmara de combustão, onde a movimentação do pistão e do cilindro foi imposta através de uma equação de movimento harmônico. Os resultados foram comparados a medições experimentais e apresentaram um bom ajuste. Funções de interpolação de segunda ordem lineares e bilineares foram utilizadas para a velocidade. Silva et al. (2003) criaram o modelo denominado Modelo Físico Virtual (*Virtual Physical Model - VPM*), onde a força discreta sobre a interface é calculada dinamicamente através das equações de transporte da quantidade de movimento sobre uma partícula de fluido na interface. A força calculada é inserida como termo fonte nas equações de Navier-Stokes. Assim impõe-se, de maneira indireta, a condição de contorno desejada sobre a fronteira. O método tem a capacidade de se auto-ajustar ao escoamento uma vez que a força necessária para frear as partículas de fluido próximas a interface é calculada de maneira automática, sem a necessidade de uso de constantes *ad-hoc*.

Oliveira et al. (2004) utilizaram a metodologia na simulação de escoamentos sobre um cilindro de diâmetro variável no tempo. Arruda (2004), interessado em estudar um dispositivo de bombeamento sanguíneo, simulou o escoamento em uma geometria simplificada de um canal com uma cavidade com fundo móvel. Escoamentos complexos sobre múltiplos corpos foram estudados por Silva et al. (2003). Oliveira (2006) estudou escoamentos sobre aerofólios em movimento oscilatório de arfagem.

- **Imposição direta da condição de contorno:** A imposição da condição de contorno na interface é feita de maneira direta. O método consiste em impor a condição de contorno desejada na interface que, via de regra, não coincide com os pontos da malha. Dentre os métodos desta classe de fronteira imersa destacam-se: fronteira imersa com volumes fantasmas, fronteira imersa com volumes particionado e fronteira imersa com domínio aproximado.

Além da utilização nas equações de Navier-Stokes, o método de fronteira imersa já foi estendido para outros tipos de modelagem matemática de fluidos, como por exemplo Shu et al. (2007), em seu trabalho eles mostram um novo método de fronteira imersa com correção de velocidade por Lattice-Boltzmann, o qual é apresentado e validado simulando o escoamento em torno de um cilindro circular bidimensional. Neste trabalho, um novo conceito de fronteira imersa corrige a velocidade na camada limite, com o intuito de

aproximar o escoamento para a realidade física. A principal vantagem do novo método é a simplicidade do conceito e a fácil implementação, onde a convergência do cálculo numérico é mais rápida e mais estável do que nos métodos de fronteira imersa convencionais.

Lai et al. (2008) propõem um método de fronteira imersa para a simulação de interfaces bidimensionais de fluidos com surfactante insolúvel. As equações são escritas em uma formulação usual para a fronteira imersa, onde o contato do domínio euleriano com a interface lagrangiana é modelado através de uma função delta de Dirac. A força da fronteira imersa surge da tensão superficial a qual é afetada pela distribuição do surfactante ao longo da interface. Uma equação de transporte simplificada para o surfactante é proposta. O método envolve a solução numérica das equações de Navier-Stokes onde as forças interfaciais da fronteira imersa são calculadas no início de cada intervalo de tempo. Uma vez que o valor da velocidade e as configurações interfaciais são obtidos, a concentração de surfactante é atualizada usando a equação de transporte. Neste trabalho, uma nova discretização simétrica para a equação de concentração do surfactante é proposta, com a finalidade de garantir a conservação da massa do mesmo numericamente. O efeito do surfactante na deformação de uma gota em um escoamento cisalhante é investigada com detalhe.

Wang et al. (2009) propõem um modelo no qual juntamente com a fronteira imersa as equações que modelam transferência de energia térmica através de um esquema de fonte térmica direta. Neste, o campo de temperatura satisfaz a condição de contorno de temperatura imposta através do *multi-direct-heat*, um esquema de imposição de calor direta explícita de forma iterativa. Foi simulado o escoamento através de um sistema de tubos com temperatura constante e os resultados obtidos foram satisfatórios.

Doricio (2009), desenvolveu um método de Fronteira Imersa para estudo de escoamentos compressíveis, sendo que o escoamento foi modelado pelas equações de Euler bidimensionais, cuja finalidade era o estudo de aeroelasticidade computacional em uma seção típica de aerofólio bidimensional com movimentos torsional e vertical prescrito. Para validação do método foram realizadas comparações qualitativas e quantitativas com resultados computacionais e experimentais de escoamento ao redor de seções circulares e ao redor de uma seção de aerofólio NACA0012, onde o método representou bem a distribuição de pressão para números de Mach elevados, obtendo bons resultados no cálculo dos coeficientes aerodinâmicos.

Huang et al. (2011) propõem uma metodologia de fronteira imersa para problemas com interação fluido-estrutura flexível, sendo que o fluido também é modelado por um domínio euleriano e a estrutura flexível por variáveis lagrangianas, onde a fronteira é composta por duas partes: pontos de material maciço e pontos sem massa, formando um tipo de rede, onde os pontos materiais estão ligados por uma espécie de mola dura com amortecimento, sujeitos assim a forças elásticas. Foram realizadas simulações em três

dimensões modelando uma membrana esférica, onde os resultados convergiram quando comparados com resultados teóricos expressos pela lei de Skalak e pela lei de neo-Hookean para membranas deformáveis. A Fig. 11 apresenta um disco elástico transportado ao longo de um bocal.

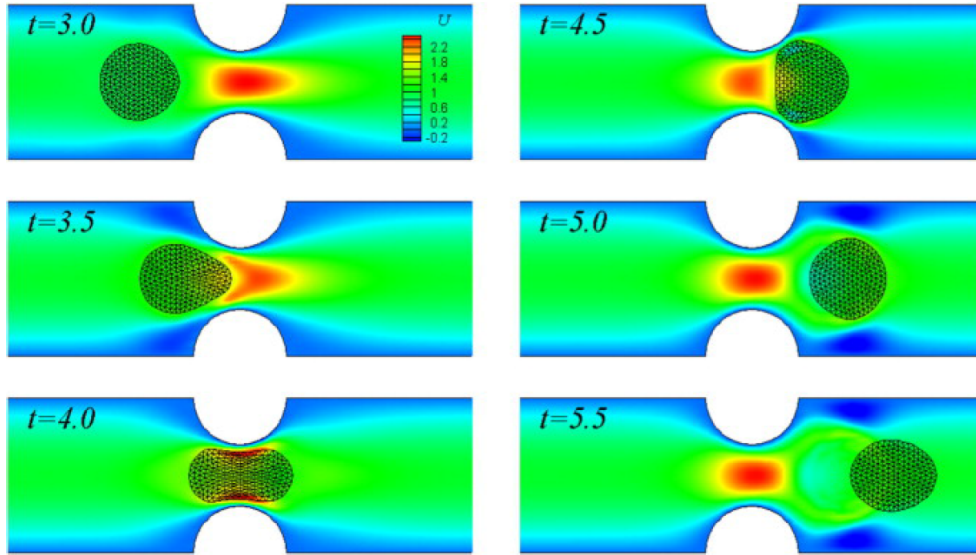


Figura 11 – Disco elástico circular em movimento através de um canal com um bocal: são representados os campos de velocidade e posições do disco (HUANG et al., 2011)

Ji et al. (2012) apresentam um novo método iterativo para o método de fronteira imersa, onde a força do corpo atualizada é incorporada nas iterações do *solver* da pressão. Este método também introduz uma melhoria na função distribuição de força da fronteira, que transfere a força do corpo a partir dos pontos discretos para a malha cartesiana nas vizinhanças do corpo. Neste trabalho para reduzir as necessidades computacionais para resolver uma simulação numérica direta, um modelo de parede para a camada limite é apresentado. A precisão e a capacidade do método do presente trabalho é verificada em simulação com duas e três dimensões, onde tais simulações numéricas variam de um escoamento laminar em torno de um cilindro e uma esfera para o escoamento turbulento em torno de um cilindro. O presente trabalho ainda apresenta uma discussão sobre as estratégias de distribuição da força da fronteira imersa.

### 3.1 Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano

O método da fronteira imersa trabalha simultaneamente com dois domínios de cálculo. Um, denominado euleriano  $\Omega$ , cartesiano e fixo, onde são resolvidas as equações para o fluido e o outro é denominado lagrangiano  $\Gamma$ , o qual representa a interface imersa no escoamento. No caso de escoamentos bidimensionais ele é representado por uma linha e no

caso tridimensional por uma superfície, na Fig. 12 pode-se notar a ilustração representativa dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa. Um exemplo de aplicação prática da malha lagrangiana é dado pela Fig. 13, nela nota-se a estrutura de uma turbina industrial composta de malha superficial com elementos triangulares.

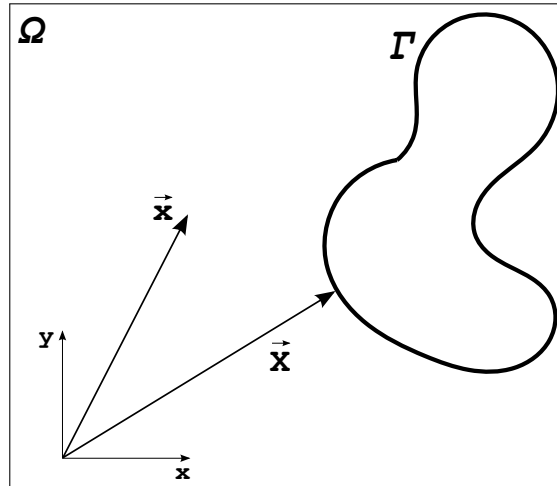


Figura 12 – Ilustração representativa dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da fronteira imersa, onde  $\vec{x}$  posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano  $\Omega$  e  $\vec{X}$  posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano  $\Gamma$ .

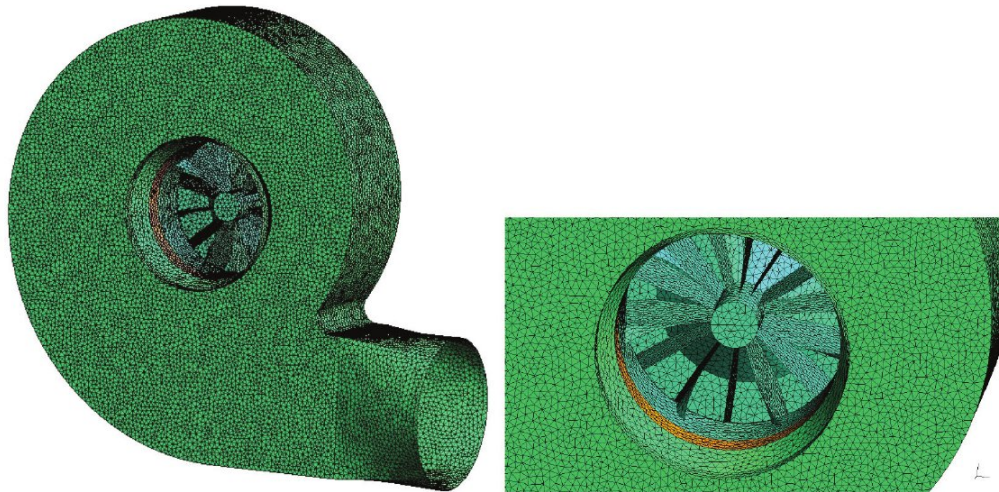


Figura 13 – Malha lagrangiana do rotor de uma turbina industrial (VEDOVOTO et al., 2015).

Dado que domínio lagrangiano é independente do domínio euleriano, consegue-se modelar e simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando domínios cartesianos para o fluido. No trabalho de Vedovoto (2007) é mostrada a capacidade de se importar qualquer geometria lagrangiana para o interior do domínio euleriano, como ilustra a Fig.

14, onde se visualiza um trem de pouso imerso em uma malha cartesiana. Outra vantagem a ser considerada é que, no caso de problemas de interação fluido-estrutura, a malha euleriana é fixa, não havendo necessidade de remalhagem. Mesmo com a estrutura se movendo, apenas a interface lagrangiana se move. O fato de se trabalhar sempre com um domínio cartesiano fixo é a principal vantagem apontada pelos pesquisadores quando a comparam com metodologias que utilizam malha não-estruturada, ou metodologias que precisam remalhar o domínio fluido (FADLUN et al., 2000; SILVA et al., 2003; MITTAL; IACCARINO, 2005).

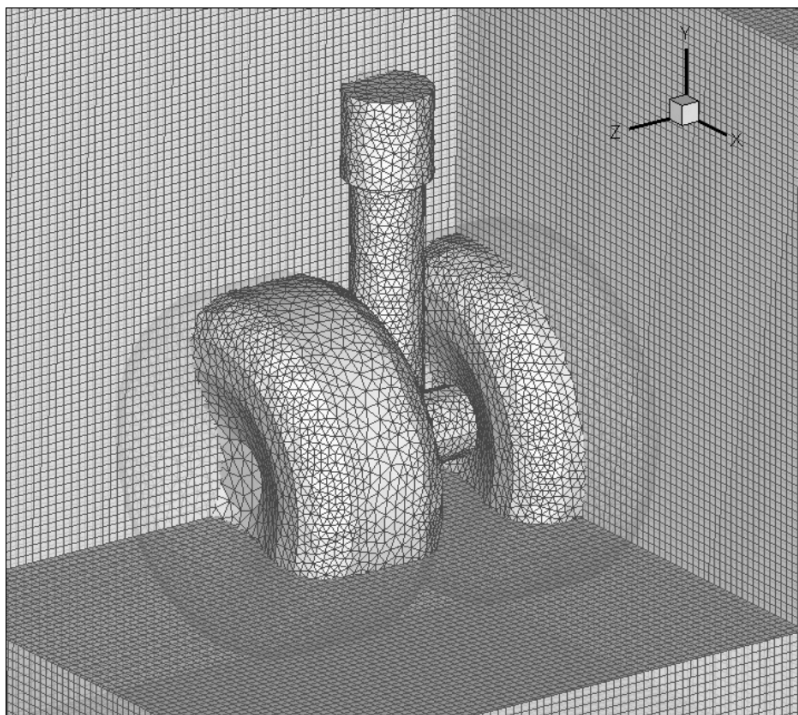


Figura 14 – Trem de pouso imerso em um domínio euleriano (VEDOVOTO, 2007).

Pode-se, portanto, afirmar que a criação de malha para um código que emprega o método da fronteira imersa é extremamente simples, primeiramente uma malha retangular cartesiana é criada cobrindo todo o domínio computacional, incluindo a fronteira imersa e, então, o corpo imerso é malhado de forma independente, mas com a restrição do tamanho do volumes de acordo com o método de fronteira imersa empregado como será explicado a seguir. Refinamento local é possível nas proximidades da fronteira, isto é feito subdividindo os volumes. Na Fig. 15 pode-se notar a mesma geometria representada na Fig. 9 pelo método de fronteira imersa, nela nota-se a presença de volumes internos ao corpo sólido. A Fig. 15-a representa uma malha cartesiana uniforme sem refinamento e a Fig. 15-b representa uma malha cartesiana com refinamento local.

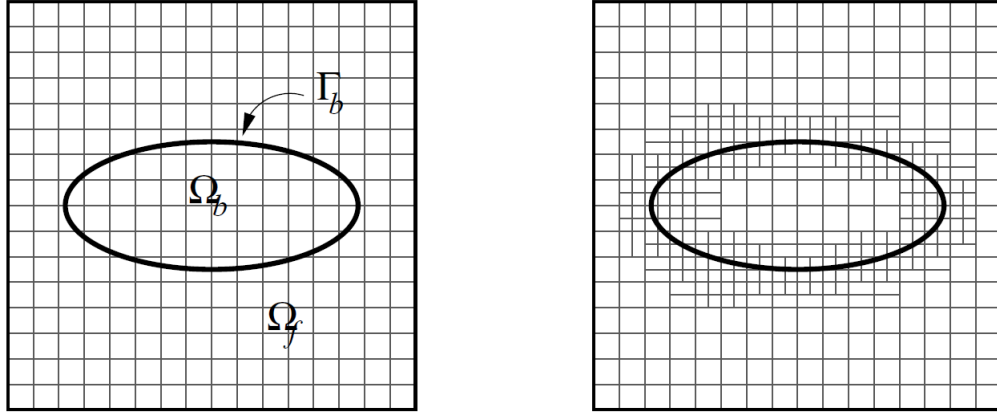


Figura 15 – Malhas cartesianas sem e com refinamento local próximo à fronteira imersa (MITTAL; IACCARINO, 2005).

### 3.1.1 Acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano

A implementação das condições de contorno através do uso de funções forçantes é o ponto principal do método da fronteira imersa. Este processo pode ser realizado de várias maneiras diferentes de acordo com o método de FI utilizado. A seguir este processo será detalhado para os diferentes tipos de métodos de fronteira imersa existentes na literatura.

Na Eq. 2.5 aparece o termo  $f_i$ , o qual pode ser considerado, fisicamente, como um termo que representa as forças de campo, como por exemplo, uma força eletromagnética ou uma força de contato. No caso da fronteira imersa, ele é o responsável por representar a interface imersa no domínio euleriano  $\Omega$ . Matematicamente ele é representado pela Eq. 3.1 (ENRIQUES-REMIGIO; SILVEIRA-NETO, 2007):

$$f_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X}, \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $F_i(\vec{X}, t)$  é a força lagrangiana definida no domínio  $\Gamma$ .

A Eq. 3.1 é correta para o caso em que a posição da variáveis na malha euleriana coincidem com os pontos da fronteira imersa (malha lagrangiana), o que não é possível em geometrias complexas. Várias técnicas diferentes são adotadas e de acordo com Tseng e Ferziger (2003) elas podem ser classificadas em dois grandes grupos: (a) esquemas que espalham a função forçagem nas vizinhanças da superfície imersa e (b) esquemas que produzem uma reconstrução local da solução baseados nos valores da fronteira. De fato, as duas abordagens são equivalentes, pois pode-se demonstrar que nos métodos da categoria (b), apesar de não ser imposta uma força extra na equação do balanço de quantidade de movimento linear diretamente, a alteração em seus termos discretizados representa a adição de uma força no escoamento.

## 3.2 Relevância do método de fronteira imersa

De acordo com Meül (2006), pode-se citar várias características do método de fronteira imersa quando comparado aos métodos tradicionais de malha adaptada ao corpo. Nos capítulos anteriores pode-se notar que a imposição das condições de contorno de um corpo com geometria complexa em um domínio com malha cartesiana não é algo trivial e exige grande complexidade matemática e numérica. Além de que, os efeitos do tratamento da fronteira e as propriedades de balanço e conservação das propriedades físicas estudadas no esquema numérico não são óbvias.

### 3.2.1 Geometrias complexas

Gerar uma malha estruturada de alta qualidade adaptada ao corpo de geometria complexa pode ser um trabalho bastante árduo uma vez que algoritmos de geração de malha não são eficazes para quinas esbeltas, furos na geometria ou formas irregulares. Então, obter uma malha com a qualidade desejada e requerida necessita de muita interação e experiência humana e o tempo total de geração de malha pode tomar cerca de 25% do tempo total de cálculo de acordo com Meül (2006). Malhas não estruturadas são melhores adaptadas aos escoamentos sobre corpos com formas complexas, mas necessitam de quantidade substancial extra de tempo de *CPU* e memória para construção e armazenamento dos dados, quando compara às malhas estruturadas.

Malhas cartesianas, no entanto, podem ser construídas de maneira bastante simples e rápida com um gerador automático de malha sem a mínima intervenção humana. De maneira oposta às malhas adaptadas a corpos, malhas cartesianas não são afetadas significativamente por corpos de geometria altamente complexas. Novas metodologias para refinamento local podem ainda melhorar a acurácia desses métodos e reduzir ainda mais tempo computacional e custo de armazenamento da malha.

### 3.2.2 Corpos em movimento

Para o caso de corpos em movimento no escoamento em estudo, tais como corpos deformando em interação fluido-estrutura ou corpos em queda livre, malhas adaptadas ao corpo devem ser recalculadas e refeitas a cada novo intervalo de tempo. Além disso, há a exigência da projeção da antiga solução na nova malha gerada. Estes dois passos não apenas aumentam significativamente o custo computacional como também deterioram a simplicidade, acurácia e estabilidade do *solver*.

Neste ponto, o método da fronteira imersa tem um fator bastante positivo, pois usando uma malha estacionária, não deformável e cartesiana, a aplicação para problemas com fronteiras em movimento tornam-se bastante simples uma vez que não há a necessidade de reconstrução da malha a cada passo de tempo. Isso significa que cálculos empregando

fronteira imersa podem ser mais rápidos e robustos que métodos de *CFD* baseados em malhas conformadas ao corpo imerso. Especialmente em procedimentos iterativos de engenharia como otimização de forma onde múltiplos cálculos devem ser feitos, limitando o tempo para solução.

### 3.2.3 Número de operações por volume discretizado

Outra vantagem das malhas cartesianas a respeito das malhas conformes ao corpo imerso é que o número de operações por número de volumes da malha podem ser significativamente menores, este fato é verdadeiro tanto para malhas estruturadas quanto para malhas não estruturadas.

Se uma malha curvilínea estruturada adaptada ao corpo é utilizada, há duas maneiras para proceder quando há o cálculo de fluxos ou de variáveis do escoamento nas células. Uma é delas é transformar as coordenadas físicas em coordenadas computacionais via transformação de coordenadas e, então, resolver nesse domínio (transformadas) e por fim voltar às coordenadas físicas. A outra maneira é não utilizar o domínio computacional, mas sim avaliar os fluxos nas direções  $x, y$  e  $z$  nas faces do volume que não estão alinhadas com as direções principais, requerendo assim rotação local. Malhas cartesianas não sofrem esta operação extra, uma vez que as coordenadas físicas já estão alinhadas com as direções principais dos volumes.

Já, quando comparamos as malhas cartesianas e as malhas não estruturadas: pode-se aumentar a velocidade computacional aplicando técnicas como o método *multigrid*, que também pode ser aplicado a malhas não estruturadas, mas de maneira expressivamente mais complexa.

### 3.2.4 Paralelização do domínio

Técnicas de paralelização do domínio podem ser aplicadas tanto a malhas cartesianas quanto malhas não estruturadas, porém para malhas cartesianas este processo é significativamente mais simples e envolve menos processos. Além de que, técnicas como *multigrid* que diminuem significativamente o tempo de cálculo podem ser aplicadas com mais facilidade quando o domínio está paralelizado.

### 3.2.5 Restrições do método

Apesar das grandes vantagens dos métodos de fronteira imersa, há, porém, desvantagens que devem ser levadas em consideração. Já foi mencionado anteriormente que o tratamento das condições de contorno não são evidentes e requerem métodos complexos de interpolação, outro problema se baseia que o tamanho da malha (número de pontos ou células no domínio) aumenta consideravelmente mais com o aumento do número de

Reynolds em uma malha cartesiana uniforme do que uma malha conformada ao corpo. Isto vem do fato que o alinhamento entre os volumes da malha do escoamento e as superfícies do corpo resultam em um melhor controle da qualidade da resolução da camada limite, enquanto que este não é o caso das malhas cartesianas. Foi mostrado por Mittal e Iaccarino (2005) que a razão:

$$\text{grid size ratio} = \frac{\text{size of cartesian grid}}{\text{size of bodyfitted grid}}, \quad (3.2)$$

cresce com  $Re^{1.0}$  para corpos  $2D$  e  $Re^{1.5}$  para corpos  $3D$ . Consequentemente, com o aumento do número de Reynolds, a malha cartesiana crescerá mais rápido que a malha deformada. O problema pode ser aliviado devido ao fato de alguns pontos estarem localizados dentro da fronteira imersa, onde o escoamento não necessita, obrigatoriamente, ser resolvido (dependendo do método de fronteira imersa aplicado). Nos métodos em que há a necessidade de se resolver o campo interno de velocidade no interior da fronteira imersa, surge ainda um problema que pode ser influente para alguns tipos de geometrias, onde a presença do escoamento complementar (escoamento interno à fronteira imersa) gera recirculações que deterioram a qualidade dos resultados como, por exemplo, em casos onde há a necessidade de uma boa qualidade de simulação na camada limite.

Outro problema, já citado anteriormente, é a fragilidade de grande parte dos métodos de fronteira imersa a corpos que possuem quinas esbeltas ou planos bastante finos, pois alguns métodos de interpolação não são adequados para estes tipos de geometrias, e. g., métodos que espalham a função de forçagem em regiões não pontuais. Na Fig. 16 pode-se ver a região de interpolação e distribuição da velocidade e força, respectivamente, em corpo com geometria esbelta e aguda, nela nota-se que a região de distribuição de um ponto lagrangiano da superfície superior do corpo atinge regiões que estão abaixo da superfície inferior do corpo.

Diferenças finitas e volumes finitos tradicionais não podem ser aplicados a funções descontínuas uma vez que a expansão de Taylor não é válida para tais problemas e o cálculo de fluxos nas faces das células são funções contínuas, mas caso a função seja suave por partes, ela pode ser tratada com técnicas de saltos (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007), que é o caso de um campo de velocidade em um escoamento com a presença de fronteira imersa, logo para tratar casos com geometrias esbeltas, os métodos mais indicados são aqueles com saltos na descontinuidade, dessa maneira pode-se considerar o salto de pressão presente nas fronteiras de um sólido imerso.

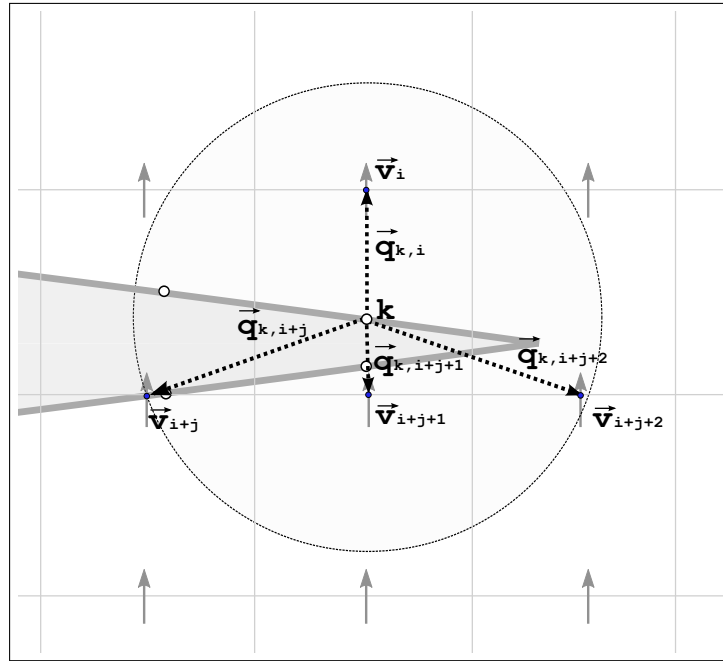


Figura 16 – Representação da região de distribuição da força de interface em uma fronteira imersa com geometria esbelta. Onde os termos  $\vec{v}$ ,  $\vec{q}$  e  $k$  representam, respectivamente, a velocidade vertical na face do volumes euleriano, o vetor partindo do ponto lagrangiano até o ponto de face da célula euleriana e o ponto lagrangiano.

### 3.3 Métodos de força discreta

Aqui não serão comentados particularmente os métodos de solução para métodos de força contínua, com classificação representada pela Fig. 10, apenas aqueles de força discreta devido à sua grande gama de aplicação e importância no presente trabalho. Como dito anteriormente e representado na Fig. 10, esses métodos são classificados em métodos de imposição direta e indireta da condição de contorno. A seguir os métodos específicos de fronteira imersa mais abrangentes na literatura e mais estudados são explicados detalhadamente.

#### 3.3.1 Métodos de imposição indireta da condição de contorno

Os métodos de imposição indireta da condição de contorno apresentam grande importância dentre os métodos de fronteira imersa. Dois métodos são considerados de grande importância no presente trabalho devido à sua vasta aplicação nos algoritmos implementados no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia, são eles: metodologia da múltipla imposição da força e modelo físico virtual. Ambos são explicados a seguir.

### 3.3.1.1 Metodologia da múltipla imposição da força (*Multi-Direct Forcing*)

Wang et al. (2008) propõem um procedimento denominado de múltipla imposição da força (*multi-direct forcing MDF*), o qual utiliza um processo iterativo, baseado no modelo de Mohd-Yusof (1997), para melhorar o cálculo da força. Em seu trabalho, os autores utilizaram diferenças-finitas de quarta ordem para simular sedimentação de particulados. Ao realizar este procedimento de maneira iterativa, a geometria é bem caracterizada em todos os passos de tempo, garantindo as características físicas do modelo numérico e se mostrando bastante eficiente ao tratar problemas transientes, como pode ser visto na Fig. 17 que mostra a evolução temporal de uma partícula em queda livre.

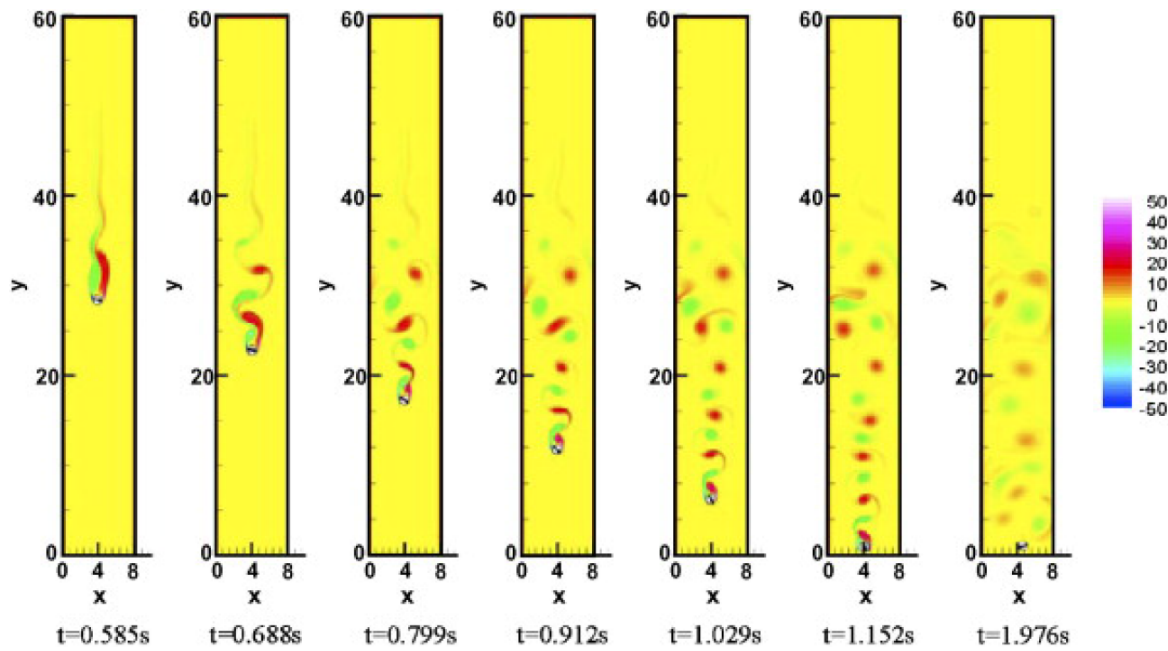


Figura 17 – Evolução temporal de uma partícula em queda livre utilizando o *multi-direct-forcing* (WANG et al., 2008).

Sua aplicação é baseada nos seguintes passos: as propriedades do fluido nos pontos eulerianos próximos à(s) fronteira(s) são interpoladas nas coordenadas dos pontos lagrangianos, então calcula-se a força nestes mesmo pontos baseado nas condições ali impostas e por fim esta força é distribuída nos pontos eulerianos da vizinhança. Assim, o termo de força é calculado pela diferença entre o campo estimado e a condição de contorno desejada na fronteira. Ao realizar este procedimento de maneira iterativa a geometria é bem caracterizada em todos os passos de tempo, garantindo as características físicas do modelo numérico.

As equações de Navier-Stokes são resolvidas em todo o domínio de cálculo ( $\Omega_b \cup \Omega_f$ ). Estas equações podem ser escritas na forma indicial para escoamentos isotérmicos e

incompressíveis, como:

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.4)$$

onde  $\rho$  e  $\mu$  são respectivamente a massa específica e a viscosidade dinâmica, propriedades que caracterizam o fluido. As características do escoamento são representadas por:  $p$ , o campo de pressão,  $u_i$  as componentes do vetor velocidade e  $f_i$  as componentes do campo de força que atuam sobre o escoamento. Para o método em questão, o responsável por informar ao escoamento sobre presença da interface sólida é termo euleriano de força  $f_i$ , dessa forma ele é não nulo apenas nos pontos eulerianos nas vizinhanças da interface. A representação matemática desse comportamento singular do campo de forças é feita com o auxílio da função delta de Dirac ( $\delta$ ):

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma_b} \vec{F}(\vec{x}_k, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) d\vec{x}_k, \quad (3.5)$$

onde  $\vec{F}(\vec{x}_k, t)$  é a força lagrangiana, calculada sobre os pontos da interface. O índice  $k$  denota uma variável lagrangiana. O cálculo da força lagrangiana é feito da seguinte maneira, inicialmente calcula-se o campo de força euleriano através da Eq. 3.6.

$$f_i = \rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Como a Eq. 3.6 foi desenvolvida a partir da hipótese do contínuo e o domínio  $\Gamma$  (sólido imerso) está contido em  $\Omega_f$  (fluido), pode-se definir a força lagrangiana através da Eq. 3.7:

$$F_i = \rho \left[ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_j)}{\partial X_j} \right] + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right], \quad (3.7)$$

onde as variáveis maiúsculas dizem respeito ao domínio lagrangiano.

Discretizando a derivada temporal da Eq. 3.7 através de um esquema de Euler explícito (WANG2008), obtém-se:

$$F_i(X_i, t) = \rho \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (3.8)$$

onde  $\Delta t$  é o intervalo discreto de tempo,  $F_i(X_i, t)$  é o termo de força lagrangiana no passo de tempo atual e o termo  $RHS_i$  é dado por:

$$RHS_i = \rho \frac{\partial (U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right]. \quad (3.9)$$

O método *Direct Force* em um único ciclo consiste em somar e subtrair um parâmetro adicional no operador discretizado do tempo (WANG et al., 2008), ou seja:

$$F_i(X_i, t) = \rho \frac{U_{i,\Gamma}^{t+\Delta t} - U_i^t + U_i^* - U_i^*}{\Delta t} + R H S_i^t, \quad (3.10)$$

onde  $U_{i,\Gamma}^{t+\Delta t}$  é a velocidade conhecida na fronteira no passo de tempo atual.

Então, a partir do princípio da superposição:

$$\frac{U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + R H S_i^t = 0, \quad (3.11)$$

$$F_i(X_i, t) = \rho \frac{U_{i,\Gamma}^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}. \quad (3.12)$$

As equações 3.11 e 3.12 estão definidas no domínio lagrangiano, porém elas são resolvida no domínio euleriano, onde elas também são válidas. Desta forma, consegue-se obter o parâmetro temporário  $u^*$ .

$$\rho \frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} + r h s_i^t = 0. \quad (3.13)$$

Fazendo uma analogia com relação ao método preditor-corretor, este parâmetro temporário ( $u^*$ ) pode ser entendido como um campo de velocidade predita, ou estimada. Em um segundo passo (passo corretor), faz-se a “correção” do campo  $u^*$ , ou seja, na Eq. 3.14 é onde o campo de velocidade euleriano recebe a informação do campo de força:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t \cdot f_i, \quad (3.14)$$

Por fim, a metodologia de *direct force*, método no qual o *multi-direct forcing* foi inspirado, com variação no termo de força tem sistematicamente o seguinte algoritmo.

1.

$$u_i^* = u_i^i - \Delta t \cdot r h s_i^t, \quad (3.15)$$

2.

$$U_i^* (X_i, t) = I (u_i^*, x_i, X_i), \quad (3.16)$$

3.

$$F_i(X_i, t) = \frac{U_{i,\Gamma}^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (3.17)$$

4.

$$f_i (x_i, t) = D (\Delta F_i, x_i, X_i), \quad (3.18)$$

5.

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t \cdot f_i(x_i, t), \quad (3.19)$$

onde  $I(u_i^*, x_i, X_i)$  é uma função de interpolação e  $D(\Delta F_i, x_i, X_i)$  é uma função de distribuição. Quando é aplicada a metodologia do *multi-direct forcing*, tem-se que a Eq. 3.19 é modificada da seguinte maneira:

$$u_i^{it} = u_i^{t+\Delta t}, \quad (3.20)$$

onde  $it$  é o número da iteração. Assim, o campo de velocidade é novamente interpolado, antes de avançar para o próximo passo de tempo. Então, obtém-se um novo campo de força. O procedimento é repetido de  $it = 1$  até  $it = N_{it}$ , onde  $N_{it}$  é o número total de iterações, o objetivo dessa ciclagem é que a velocidade na fronteira seja a mais próxima da imposta.

$$U_{FI} - U_i^{it} = 0. \quad (3.21)$$

Na literatura pode-se encontrar diversos critérios para finalizar esse processo iterativo. Para o presente trabalho, a Eq. 3.22 é calculada como critério de convergência, se ela é obtida então continua-se os cálculos com a Eq. 3.23, caso contrário retorna-se à Eq. 3.15.

$$\max |\vec{F}_{p+1}(\vec{x}, t) - \vec{F}_p(\vec{x}, t)| < \varepsilon, \quad (3.22)$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante estipulada de baixo valor.

$$\vec{u}(\vec{x}_k, t)^{n+1} = \vec{u}_{p+1}^*(\vec{x}_k, t). \quad (3.23)$$

### 3.3.1.2 Modelo Físico Virtual

O modelo denominado Modelo Físico Virtual (*Virtual Physical Model - VPM*), proposto por Silva et al. (2003), é um modelo de força discreta com imposição indireta da condição de contorno. A força sobre a interface é calculada dinamicamente através das equações do transporte da quantidade de movimento linear sobre uma partícula de fluido na interface. A força calculada é inserida como termo fonte nas equações de Navier-Stokes. Assim impõe-se, de maneira indireta, a condição de contorno desejada sobre a fronteira. O método tem a capacidade de se auto-ajustar ao escoamento uma vez que a força necessária para frear as partículas de fluido próximas à interface é calculada de maneira automática, sem a necessidade do uso de constantes *ad-hoc*.

Este método apresenta bons resultados nas simulações de diferentes casos. Oliveira et al. (2004) utilizaram a metodologia na simulação de escoamentos sobre um cilindro de diâmetro variável no tempo. Arruda (2004), interessado em estudar um dispositivo de bombeamento sanguíneo, simulou o escoamento em uma geometria simplificada de um canal com uma cavidade com fundo móvel. Escoamentos complexos sobre múltiplos

corpos foram estudados por Oliveira et al. (2004). Problemas envolvendo interação fluido-estrutura a baixos números de Reynolds foram abordados por Vilaça et al. (2005) que estudaram partículas em queda livre e Remigio (2005) aplicou IB/VPM no estudo da movimentação, induzida pelo escoamento, de válvulas cardíacas. Campregher (2005) estendeu a metodologia para problemas tridimensionais, visando também o estudo de problemas de interação fluido-estrutura. Oliveira et al. (2005) mostraram que a metodologia é apropriada para o estudo de problemas a altos números de Reynolds.

O modelo *VPM* avalia dinamicamente a força que o fluido exerce sobre a superfície sólida imersa no escoamento. A força lagrangiana  $\vec{F}(\vec{x}_k, t)$  é avaliada através de um balanço de quantidade de movimento sobre uma partícula de fluido que se encontra junto à interface sólido-fluido, levando em consideração todos os termos da equação de Navier-Stokes. Desta forma pode-se expressar a densidade de força lagrangiana por:

$$\vec{F}(\vec{x}_k, t) = \vec{F}_{acel}(\vec{x}_k, t) + \vec{F}_{iner}(\vec{x}_k, t) + \vec{F}_{visc}(\vec{x}_k, t) + \vec{F}_{pres}(\vec{x}_k, t). \quad (3.24)$$

Os termos do lado direito da Eq. 3.24 são aqui respectivamente denominados por:

- força de aceleração -  $\vec{F}_{acel}(\vec{x}_k, t)$ ;
- força inercia -  $\vec{F}_{iner}(\vec{x}_k, t)$ ;
- força viscosa -  $\vec{F}_{visc}(\vec{x}_k, t)$ ;
- força de pressão -  $\vec{F}_{pres}(\vec{x}_k, t)$ .

Como se pode ver não existem constantes a serem ajustadas no *VPM*. É um modelo de base puramente física, pois a determinação da força lagrangiana é feita apenas utilizando um balanço de quantidade de movimento linear nos volumes de controle centrados nos pontos lagrangianos da interface, como ilustra a Fig. 18.

Uma vez calculada a força necessária para impor a condição de contorno desejada sobre a interface, deve-se acoplar o domínio lagrangiano com o euleriano, fazendo com que a força da interface seja conhecida em pontos apropriados da malha euleriana, como ilustra a Fig.19.

### 3.3.2 Métodos de imposição direta da condição de contorno

Os métodos de fronteira imersa com imposição direta da condição de contorno apresentam características que suprem deficiências apresentadas pelos métodos de imposição indireta. Devido a este fato, eles possuem grande importância e devem ser estudados

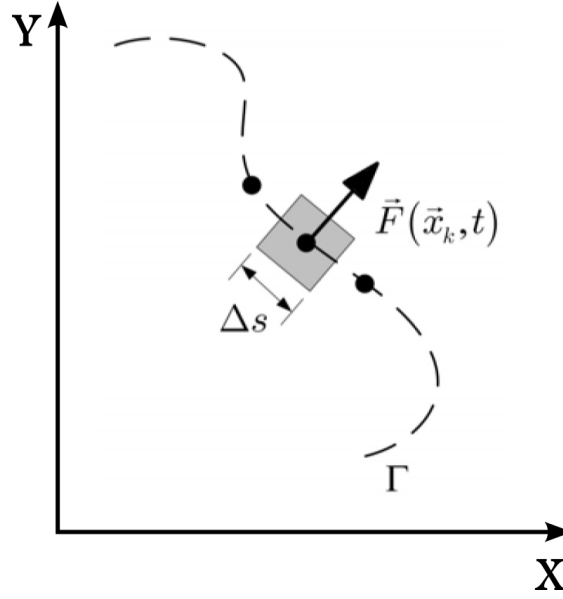


Figura 18 – Volume de controle em um ponto lagrangiano qualquer (OLIVEIRA, 2006).

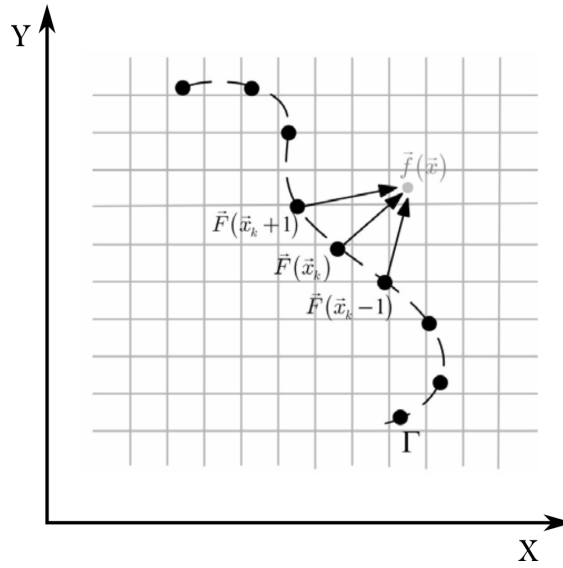


Figura 19 – Processo de distribuição da força lagrangiana para os pontos eulerianos (OLIVEIRA, 2006).

detalhadamente. Dois métodos são considerados de grande importância no presente trabalho devido às suas características, são eles: metodologia da fronteira imersa com volumes fantasmas e volumes particionados. Ambos são explicados a seguir.

### 3.3.2.1 Metodologia da fronteira imersa com volumes fantasmas (*ghost-cell*)

O método de fronteira imersa com volumes fantasmas consiste em alterar as velocidades dos pontos da malha euleriana que se encontram dentro da fronteira, vide Figs.

20 e 21. Para isso, determina-se os pontos eulerianos que se localizam nas vizinhanças da interface, dentro e fora do sólido. Após esse procedimento, uma interpolação é utilizada para determinar a velocidade dos pontos do interior (células fantasmas) baseado na velocidade dos pontos lagrangianos e nas velocidades do fluido nas proximidades da fronteira.

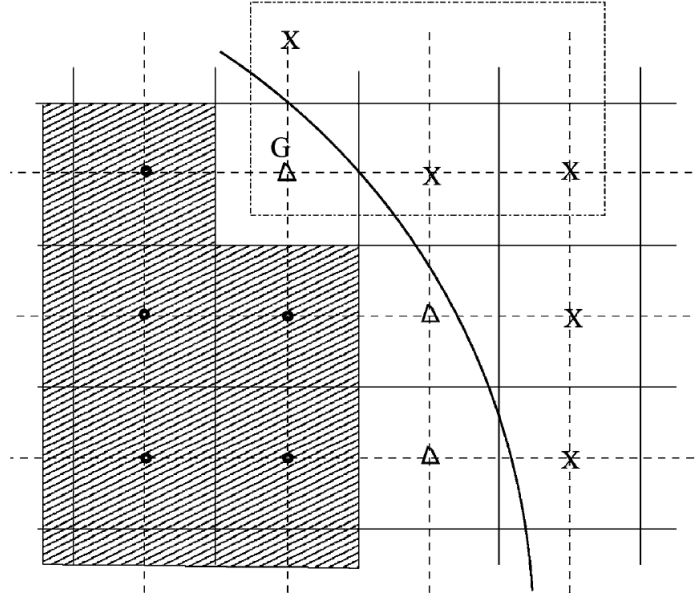


Figura 20 – Esboço do esquema utilizado para determinar as células fantasmas  $G$ ,  $X$  são os pontos necessários para o cálculo da força (TSENG; FERZIGER, 2003).

Especialmente para altos valores de número de Reynolds, resolver as equações do fluido dentro do corpo sólido (domínio euleriano interno à fronteira imersa), pode aumentar consideravelmente o tempo requerido de *CPU* para fazer os cálculos. Para evitar isso, os volumes fantasmas são definidos apenas dentro dos corpos, de tal forma que esses volumes sempre estarão distanciados alguns volumes de pelo menos uma célula do escoamento, dependendo do método de discretização. A Fig. 21 ilustra o posicionamento dos volumes fantasmas e os volumes de fluido próximos à fronteira imersa. Os valores das variáveis nos pontos fantasmas são extrapolados para com os dados dos volumes vizinhos à fronteira e os pontos da própria fronteira. Vários métodos para construir o esquema de extrapolação podem ser encontrados na literatura. Um bastante simples é o esquema bi-linear para duas dimensões e tri-linear em três direções dado por:

$$\phi = C_1xy + C_2x + C_3y + C_4, \quad (3.25)$$

onde  $\phi$  é uma variável genérica e  $C_1$  até  $C_4$  são coeficientes determinados na avaliação de  $\phi$  nos pontos de propriedades conhecidas. Dependendo das características do escoamento como o número de Reynolds, pode ser atrativo aplicar funções de maior ordem de convergência utilizando mais volumes de fluido e volumes fantasmas na extrapolação.

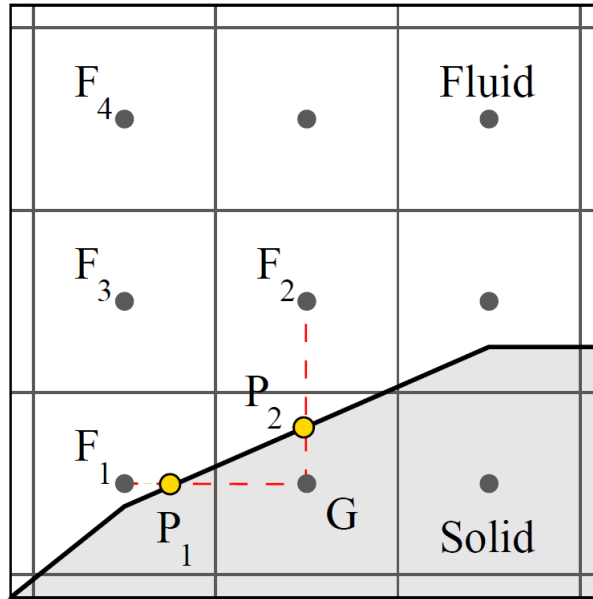


Figura 21 – Método *ghost cell* para fronteira imersa:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  and  $F_4$  são pontos do fluido,  $G$  é um ponto fantasma e  $P_1$ ,  $P_2$  são pontos na fronteira que são usados no estêncil de extrapolação.

A variável genérica pode então ser facilmente avaliada nos pontos fantasmas, resolvendo a Eq. 3.25 juntamente com o domínio de fluido e assim, resolvendo o sistema. Este método vem sendo aplicado com bastante sucesso com diferentes funções de interpolação por autores, como Tseng e Ferziger (2003), Fadlun et al. (2000) e Verzicco et al. (2000), já citados anteriormente na introdução deste capítulo.

### 3.3.2.2 Metodologia da fronteira imersa com volumes particionados (*Cut-cell methods*)

O método de volumes particionados foi primeiramente introduzido por Clarke et al. (1986) para escoamentos invíscidos e possui aplicações tanto para malhas colocalizadas tanto para malhas deslocadas. A principal razão para adoção do método dos volumes particionados se baseia no fato de que esses métodos garantem naturalmente uma conservação ou balanço fechado das propriedades do sistema como massa, quantidade de movimento e outros. Para garantir as propriedades do método de volumes finitos nas células vizinhas à fronteira, os volumes que são cortados pelo corpo sólido deverão ter sua geometria reavaliada de tal maneira que a face do volume coincida com o plano da fronteira imersa. Este procedimento é feito cortando e separando a porção "sólida" da célula e desconsiderando a mesma. Dependendo da geometria e o critério de repartição, um novo volume pode ser criado ou a parte externa da célula reformada pode ser incorporada à uma célula vizinha. Este procedimento é feito para prevenir a criação de volumes relativamente muito menores que os volumes que o cercam, o que levaria a erros na solução e instabilidades numéricas. Este método pode ser melhor ilustrado na Fig. 22.

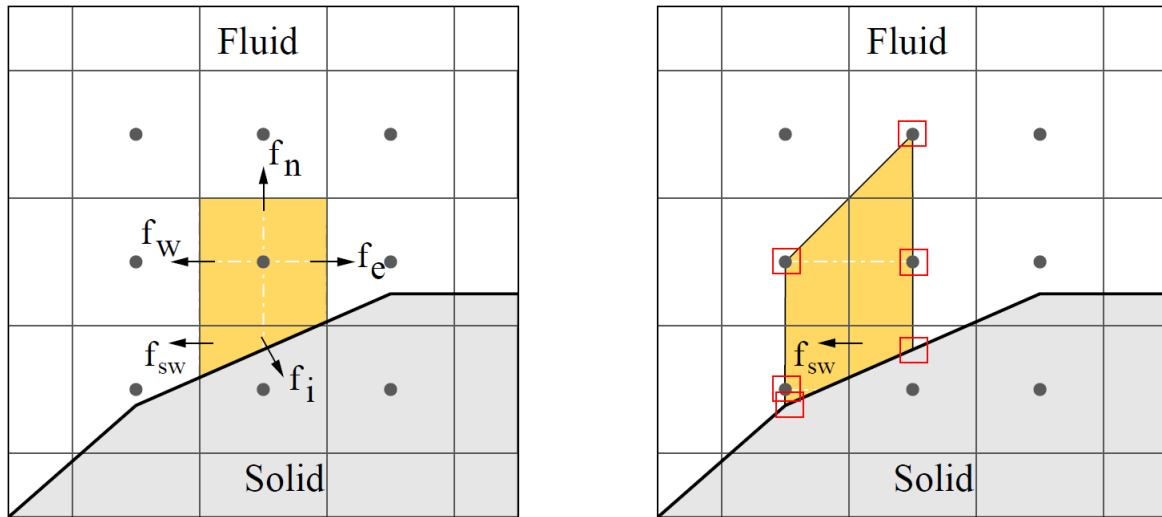


Figura 22 – Método cut-cell: volume próximo à interface imersa com forma modificada associado ao fluxo (figura a esquerda); 6 pontos para o estêncil de interpolação para determinação do fluxo na face noroeste (figura a direita).

O próximo passo do método é formular uma expressão que aproxima o fluxo de massa, convecção, advecção assim como gradiente de pressão em cada uma das faces do novo volume formado, procedimentos bastante parecidos com aqueles realizados nas condições de contorno em malhas não estruturadas.

A maior parte das aplicações desta metodologia foi utilizada em escoamentos 2D, pois há uma inerente dificuldade de aplicá-lo a escoamentos 3D devido ao grande número de possibilidades de reformulação geométrica existentes.

## 4 Proposta de variação do método de múltipla imposição da força

### 4.1 Múltipla imposição da força com distribuição direcional

No presente trabalho foi desenvolvida uma variação do modelo de múltipla imposição da força, baseando-se nas operações de interpolação e extrapolação. No método original essas funções conectam as informações entre as malhas lagrangiana e euleriana, tanto no domínio de fluido ( $\Omega_f$ ) quanto no domínio sólido ( $\Omega_b$ ). Na modificação proposta, essas funções de comunicação tratarão apenas os termos presentes no domínio do fluido, ou seja, os termos no interior do corpo sólido não são considerados e, portanto, o método é focado apenas no domínio de fluido. O termo fonte que representa a força de corpo é derivada da equação do balanço de quantidade de movimento linear ajustando a velocidade na fronteira (pontos lagrangianos) para as velocidade conhecidas aplicando a função direcional delta de Dirac. Em trabalhos recentes, diversos autores aplicaram estratégias similares, Zhang e Zheng (2007) trabalharam com estratégia similar em escoamentos laminares, Cristallo e Verzicco (2006) simularam escoamentos turbulentos com a metodologia *LES* e Ji et al. (2012) trabalharam também com escoamentos turbulento ao redor de um cilindro. Na próxima seção, a modelagem matemática e computacional relevante para o desenvolvimento deste método é apresentada. Apesar das funções de interpolação e de distribuição representarem operações diferentes, na sequencia deste trabalho as duas funções serão referidas apenas como funções de interpolação.

Na estrutura numérica dos métodos de fronteira imersa de imposição indireta das condições de contorno, o termo de pressão é resolvido tanto na região interna quanto externa da fronteira imersa de maneira geral. Como já descrito na seção 3.2.5, um inconveniente desses métodos é que, de acordo com Ji et al. (2012), esta continuidade dos campos de pressão interior e exterior pode nos conduzir a graves problemas e resultados espúrios quando corpos de geometrias esbeltas são tratados. Então, a metodologia desenvolvida neste capítulo é objetivada a tratar objetos com geometria altamente irregular e esbelta.

#### 4.1.1 Estratégias de interpolação e distribuição

A fim de modelar a comunicação entre as malhas lagrangiana e euleriana, são introduzidas as duas funções  $I(\phi)$  e  $D(\Phi)$  que representam as funções de interpolação e distribuição, respectivamente. Por conveniência,  $\phi$  minúsculo representa a variável no domínio do fluido  $\Omega_f$ , por exemplo  $u$ ,  $p$ ,  $f$ , e  $\Phi$  maiúsculo indica as variáveis nos pontos de fronteira imersa  $\Gamma$  (domínio lagrangiano), tais como  $U_k$ ,  $F$ . É importante entender

que as funções de interpolação projetam um campo físico do campo euleriano para o campo lagrangiano. Por sua vez, a função de distribuição mapeia o campo físico da malha lagrangiana da fronteira imersa de volta ao campo euleriano da malha cartesiana (JI et al., 2012).

As funções originais de interpolação e distribuição do método *multi-direct forcing* para comunicação entre as malhas lagrangiana e euleriana são dadas pelas Eqs. 4.1 e 4.2, respectivamente.

$$\vec{\Phi}(\vec{X}_k, t) = I(\vec{\phi}, \vec{X}_k, t) = \sum_{\vec{x} \in \Omega} \vec{\phi}(\vec{x}, t) \delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) \Delta V_i, \quad (4.1)$$

$$\vec{\phi}(\vec{x}, t) = D(\vec{\Phi}, \vec{x}, t) = \sum_{\Omega_\Gamma} \vec{\Phi}(\vec{X}_k, t) \delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) \Delta A_k \Delta S_k, \quad (4.2)$$

onde,  $\Omega$  representa o conjunto de elementos cartesianos tanto dentro quanto fora da fronteira imersa,  $\Gamma$  representa os pontos lagrangianos ao redor da fronteira imersa,  $\Delta V_i$  é o volume de controle onde os pontos lagrangianos  $k$  estão dentro,  $\delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k)$  é a função peso de ponderação, neste trabalho foi empregada a função chapéu (*hat*) (VEDOVOTO, 2011), que apresenta uma segunda ordem de convergência espacial, com a vantagem de requerer apenas um volume distanciado de um célula computacional ao redor do ponto lagrangiano e tem a forma dada pela Eq. 4.3. A Fig. 23 ilustra a região que a função delta alcança.

$$\delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) = \prod \frac{\varphi[(\vec{x} - \vec{X}_k)/\Delta x_i]}{\Delta x_i}, \quad (4.3)$$

onde,

$$\varphi = \begin{cases} |1 - r| & \text{if } r \leq 1 \\ 0 & \text{if } r > 1, \end{cases} \quad (4.4)$$

e  $r$  é a distância normalizada entre os pontos euleriano e lagrangiano.

Para a estratégia de interpolação direcional, apenas a parte externa do volume tangente à fronteira imersa é utilizada. Essas funções são similares às funções originais de interpolação (Figs. 4.1 e 4.2), exceto pelo termo fator de renormalização  $N_f$  que é aplicado e a região atingida pela função delta de Dirac discretizada retorna à ponderação original. As variáveis  $\vec{\Phi}(\vec{X}_k, t)$  e  $\vec{\phi}(\vec{x}, t)$  na malha cartesiana são calculadas apenas fora da fronteira imersa da forma:

$$\vec{\Phi}(\vec{X}_k, t) = I_d(\vec{\phi}, \vec{X}_k, t) = \sum_{\vec{x} \in \Omega_f} \frac{1}{N_f} \vec{\phi}(\vec{x}, t) \delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) \Delta V_i, \quad (4.5)$$

$$\vec{\phi}(\vec{x}, t) = D_d(\vec{\Phi}, \vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{N_f} \vec{\Phi}(\vec{X}_k, t) \delta_{h_f}(\vec{x} - \vec{X}_k) \Delta A_k * \Delta S_k, \quad (4.6)$$

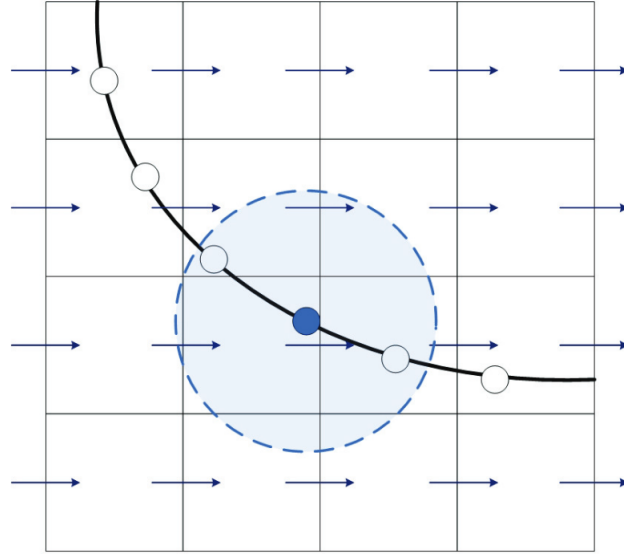


Figura 23 – Geometria imersa em uma malha deslocada para volumes finitos. Interpolação do campo de velocidade euleriano para um ponto lagrangiano (VEDOVOTO, 2011).

e

$$N_f = \sum_{\vec{x} \in \Omega_f} \delta_{h_f}(\vec{x} - \vec{X}_k). \quad (4.7)$$

Aqui,  $\Omega_f$  representa o conjunto de pontos cartesianos apenas no domínio de fluido, do lado externo à fronteira imersa,  $\delta_{h_f}$  representa a porção externa da função discreta de Dirac,  $I_d$  e  $D_d$  representam as funções direcionais de interpolação e distribuição, respectivamente. A diferença entre as estratégias de distribuição e interpolação é melhor compreendida na Fig. 24.

De acordo com Ji et al. (2012), que usaram estratégia similar, deve ser notado que se a soma de  $N_f$  for feita sobre todo o domínio cartesiano, o fator de renormalização será  $N_f = 1$  e a fronteira imersa direcional será revertida na fronteira imersa original. O propósito de introduzir o termo  $N_f$  é garantir que as forças de corpo no volume discreto  $\Delta V_i$  sejam totalmente transferidos para o campo cartesiano (JI et al., 2012). Essas funções de interpolação são aplicadas tanto para o campo de velocidade quanto para o campo de força de corpo, então as Eqs. 4.5 e 4.6 se tornam:

$$\vec{U}(\vec{X}_k, t) = I_d(\vec{u}, \vec{X}_k, t) = \sum_{\vec{x} \in \Omega_f} \frac{1}{N_f} \vec{u}(\vec{x}, t) \delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) \Delta V_i, \quad (4.8)$$

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = D_d(\vec{F}, \vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} \frac{1}{N_f} \vec{F}(\vec{X}_k, t) \delta_{h_f}(\vec{x} - \vec{X}_k) \Delta A_k \Delta S_k. \quad (4.9)$$

O algoritmo para este método é similar à seção 3.3.1.1, especificamente as Eqs. 3.15-3.19, mas com modificações nos termos de interpolação e distribuição das Eqs. 3.16 e

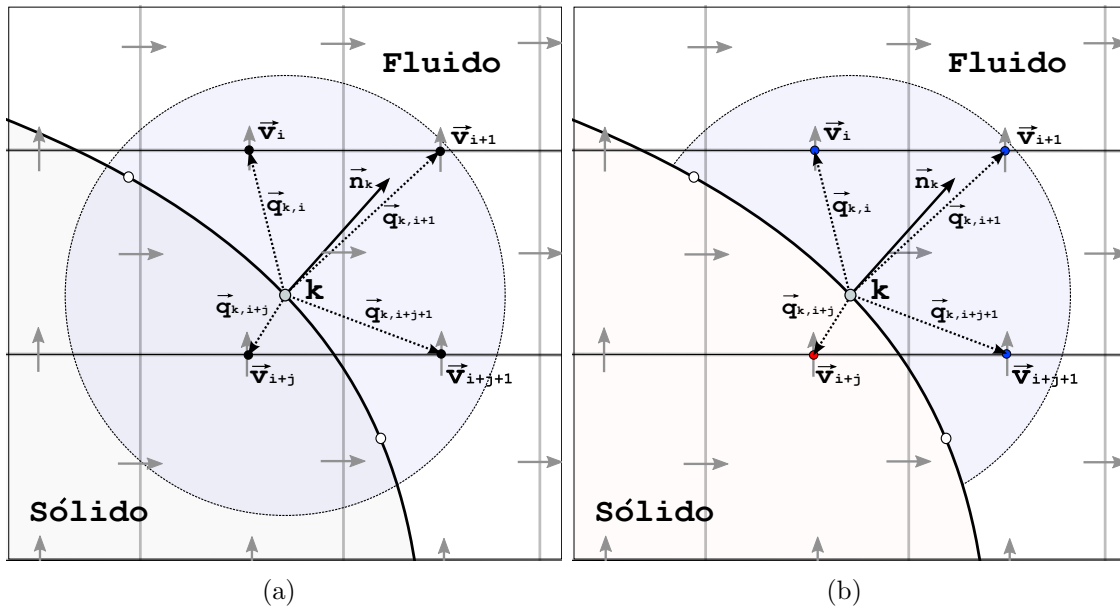


Figura 24 – Ilustração da diferença entre os esquemas da função delta. Diagrama esquemático para a estratégia de interpolação: (a) função delta original; (b) função delta direcional. Onde os termos  $\vec{v}$ ,  $\vec{q}$ ,  $k$  e  $\vec{n}$  representam, respectivamente, a velocidade vertical na face do volumes euleriano, o vetor partindo do ponto lagrangiano até o ponto de face da célula euleriana, o ponto lagrangiano e o vetor normal à superfície.

3.18, respectivamente. Os resultados do método discutido neste capítulo são mostrados na seção 6.1.

## 5 Fronteira imersa com volume fantasma local

Neste capítulo é apresentado um método que permite resolver o problema de geometrias altamente esbeltas, como o bordo de saída de um aerofólio ou uma placa plana de espessura bastante pequena. A principal idéia do método apresentado se baseia no uso de volumes fantasmas locais obtidos por extrapolação unidimensional realizada na direção da discretização do termo. Essas extrapolações são utilizadas para o cálculo das derivadas nos volumes próximos à fronteira imersa que não possuem um conjunto completo de volumes vizinhos para aplicar os esquemas numéricos de discretização dos termos da equação de Navier-Stokes. Este método é inspirado e baseado no trabalho de Berthelsen e Faltinsen (2007).

Sejam as geometrias esbeltas com quinas agudas ilustradas na Fig. 25, para resolução do campo de velocidade em torno dos corpos imersos, deve-se tratar as equações de transporte de tal forma que a região de fluido tangenciando uma face do corpo seja independente da região tangenciando outra face, ou seja, considerando a pequena espessura das geometrias, ocorre um comportamento similar a uma descontinuidade do campo de velocidade e pressão. Devido a este fato, apenas métodos em que o campo de solução possui um salto descontinuo são capazes de tratar este tipo de escoamento de maneira eficaz.

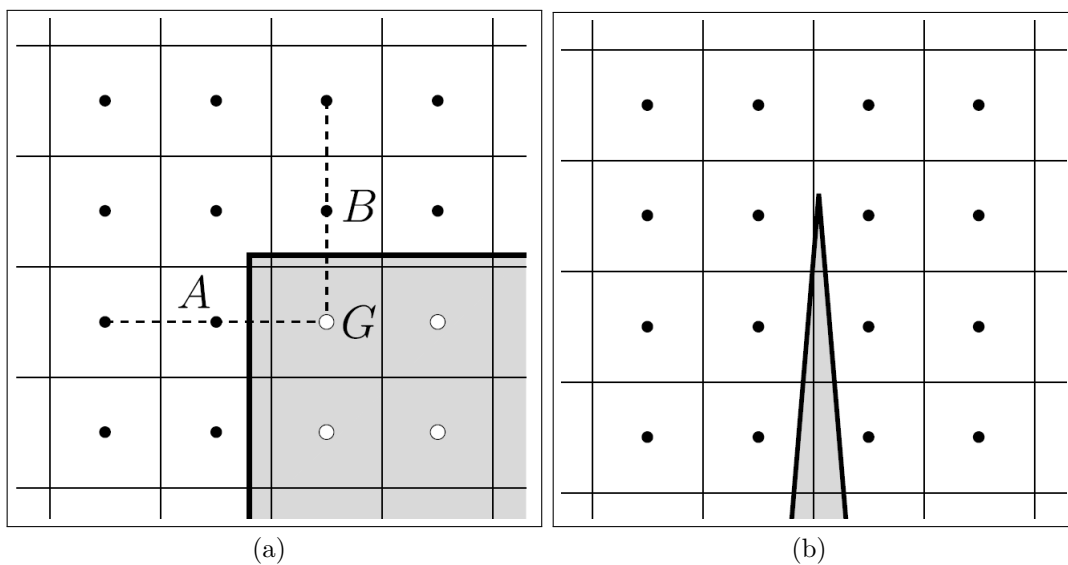


Figura 25 – Corpos com geometria extremamente esbelta: (a) Quina; (b) placa plana (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007).

O presente método se diferencia dos métodos de volumes fantasmas tradicionais apresentados anteriormente principalmente na forma em que as células fantasmas são extrapoladas e atualizadas. Nos métodos clássicos de fronteira imersa com volumes fantasmas, os volumes eulerianos no interior do corpo imerso são utilizados para aplicação da condição de contorno e seus fluxos são impostos a fim de satisfazer os escoamento, já no método de volumes fantasmas locais, estas células internas não são diretamente utilizadas, apenas suas coordenadas são tidas como referências para operações de extrapolação, como será visto a seguir. Os volumes fantasmas são atualizados de tal maneira que o campo de velocidade satisfaz tanto a fronteira imersa quanto a restrição de incompressibilidade no final de cada passo de tempo. Também é apresentado uma estratégia de Berthelsen e Faltinsen (2007) para evitar instabilidades numéricas devido a volumes cujos centros são bastante próximos à fronteira imersa sem reduzir a acurácia do método, este problema é explicado detalhadamente na próxima seção.

## 5.1 Volume fantasma uni-dimensional

De acordo com Berthelsen e Faltinsen (2007), de maneira geral, os métodos de discretização de equações diferenciais não podem ser aplicados diretamente (sem tratamentos especiais) a funções descontínuas ou que não sejam suaves devido ao fato da expansão de Taylor não ser apropriada para estes problemas. Mas, desde que a função seja contínua e suave por partes, é possível aplicar técnicas de saltos na função e adequar o problema de tal maneira que essas funções possam ser resolvidas numericamente com considerável acurácia. Para ilustrar o problema, considere uma função qualquer uni-dimensional  $f(x)$  com  $x \in [x_{min}, x_{max}]$ , analítica em todos os pontos, exceto no ponto  $x = x_\alpha$  ( $x_{min} < x_\alpha < x_{max}$ ),

$$f(x) = \begin{cases} f^-(x) & \text{se } x_{min} \leq x \leq x_\alpha \\ f^+(x) & \text{se } x_\alpha < x \leq x_{max}. \end{cases} \quad (5.1)$$

O domínio computacional  $[x_{min}, x_{max}]$  pode ser discretizado em  $N + 1$  volumes ou pontos em uma malha uniformemente espaçada de  $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$ . As coordenadas dos nós da malha são definidas em  $x_i = x_{min} + i\Delta x$  para  $0 \leq i \leq N$  e  $f_i$  denota  $f(x_i)$ . Então, para qualquer região contínua e derivável (suave)  $x_l < x_i < x_r$  pode-se escrever a aproximação numérica para a  $n$ -ésima derivada de  $f(x_i)$  como:

$$f_i^{(n)} = \mathcal{L}^{(n)}(f_l, f_{l+1}, \dots, f_i, \dots, f_{r-1}, f_r) + \mathcal{O}(\Delta x^p), \quad (5.2)$$

onde  $\mathcal{L}$  denota o operador derivada discreta (numérica) e  $p$  é a ordem da taxa de convergência da aproximação numérica.

A interface é localizada na posição  $x_\alpha = x_j + a\Delta x$  onde  $0 \leq a < 1$  e  $i \leq j < r$  de tal maneira que as células  $x_j$  e  $x_{j+1}$  são separadas pela interface. A aproximação discreta (Eq. 5.2) não pode mais ser aplicada pois há uma descontinuidade neste intervalo. No entanto, uma vez que  $f(x)$  é analítica e derivável por partes, pode-se estender os dois diferentes domínios através da interface com volumes fictícios. A Fig. 26 ilustra esse procedimento, onde é mostrada uma função descontínua discretizada com seus pontos fantasmas obtidos por extrapolação polinomial.

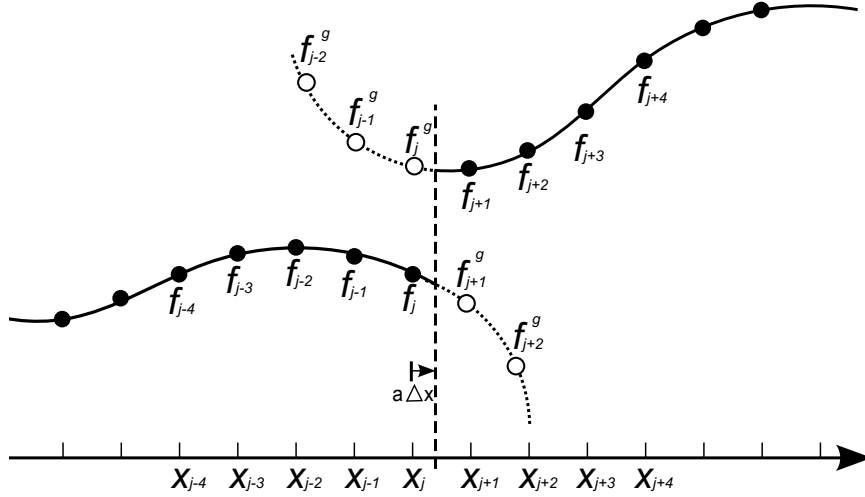


Figura 26 – Ilustração de uma função  $f(x)$  contínua e derivável por partes estendida através da descontinuidade. Valores verdadeiros da função ( $\bullet$ ); valores fictícios em volumes fantasmas ( $\circ$ ).

Consequentemente, o operador derivada discreta  $\mathcal{L}$  desta função pode ser escrito da seguinte forma:

$$f_i^{(n)} = \mathcal{L}^{(n)}(f_l, f_{l+1}, \dots, f_i, \dots, f_j, f_{j+1}^g, \dots, f_{r-1}^g, f_r^g) + \mathcal{O}(\Delta x^p), \quad (5.3)$$

onde os valores da função  $f_{j+1}, \dots, f_r$  são substituídos por valores de volumes fantasmas  $f_{j+1}^g, \dots, f_r^g$ . Os volumes fantasmas podem ser determinados com diferentes tipos de funções de interpolação e extrapolação, por exemplo, uma função polinômio de Lagrange de  $n$ -ésima ordem,  $p_q(x)$ , para os pontos  $x_{j-q+1}, \dots, x_j$  e  $x_\alpha$ , onde:

$$p_q(x) = \left( \sum_{s=j-q+1}^j \beta_s(x) f_s \right) + \beta_\alpha(x) f_\alpha^-, \quad (5.4)$$

$$\beta_s(s) = \left( \prod_{t=j-q+1, t \neq s}^j \frac{x - x_t}{x_s - x_t} \right) \frac{x - x_\alpha}{x_s - x_\alpha}, \quad (5.5)$$

com

$$\beta_\alpha(x) = \prod_{t=j-q+1}^j \frac{x - x_t}{x_\alpha - x_t}, \quad (5.6)$$

e

$$f_\alpha^- = \lim_{x \rightarrow x_\alpha^-} f(x). \quad (5.7)$$

O polinômio  $p_q(x)$  aproxima  $f(x)$  pela esquerda de  $x_\alpha$ , e gera uma extensão suave de  $f^-(x)$  em  $x_{j+1}, \dots, x_r$  com erro de truncamento  $\mathcal{O}(\Delta x^{q+1})$ . O erro introduzido pela célula fantasma na aproximação numérica de  $f_i^{(n)}$  é de  $\mathcal{O}(\Delta x^{q+1-n})$  desde que a  $n$ -ésima derivada do operador  $\mathcal{L}^{(n)}$  envolva uma divisão por  $\Delta x^n$ . A ordem de acurácia do método abordado é, então,  $\bar{p} = \min(p, q+1-n)$ , então, a acurácia local do esquema numérico de discretização empregado é preservada se  $q \geq p+n+1$ .

O polinômio de aproximação (Eq. 5.4) pode apresentar algumas dificuldades e instabilidades quando o ponto  $x_\alpha$  está muito próximo de  $x_j$ , pois pode-se haver o comportamento  $|x_j - x_\alpha| \rightarrow 0$  e  $\beta_j \rightarrow \infty$ . De acordo com Berthelsen e Faltinsen (2007), este comportamento se deve ao comportamento singular de  $\beta_j$  e  $\beta_\alpha$  quando  $|x_j - x_\alpha| \rightarrow 0$ . Para evitar este comportamento desfavorável, Berthelsen e Faltinsen (2007) sugerem introduzir um ponto imagem definido como:

$$x_\gamma = x_j - \max(0, \epsilon - a)\Delta x = x_\alpha - \max(a, \epsilon)\Delta x, \quad (5.8)$$

onde  $\epsilon$  é predefinido positivo e constante escolhido de tal modo que  $a \geq \epsilon$ , dessa forma, a Eq. 5.4 não apresenta comportamento singular. Então,  $f(x_\gamma)$  é reconstruído através do polinômio de Lagrange e os pontos vizinhos.

$$f_\gamma = p_q(x_\gamma) = \sum_{s=j-q}^j \left( \prod_{t=j-q, t \neq s}^j \frac{x_\gamma - x_t}{x_s - x_t} \right) f_s. \quad (5.9)$$

Os volumes fantasmas podem ser atualizados pelo polinômio de  $n$ -ésima ordem ajustado para os pontos  $x_{j-q+1}, \dots, x_\gamma$  e  $x_\alpha$ .

$$p_q(x) = \left( \sum_{s=j-q+1}^{j-1} \beta_s(x) f_s \right) + \beta_\alpha(x) f_\alpha^- + \beta_\gamma(x) f_\gamma, \quad (5.10)$$

onde:

$$\beta_s(s) = \left( \prod_{t=j-q+1, t \neq s}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_s - x_t} \right) \frac{(x - x_\alpha)}{(x_s - x_\alpha)} \frac{(x - x_\gamma)}{(x_s - x_\gamma)}, \quad (5.11)$$

$$\beta_\alpha(x) = \left( \prod_{t=j-q+1}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_\alpha - x_t} \right) \frac{x - x_\gamma}{x_\alpha - x_\gamma}, \quad (5.12)$$

e

$$\beta_\gamma(x) = \left( \prod_{t=j-q+1}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_\gamma - x_t} \right) \frac{x - x_\alpha}{x_\gamma - x_\alpha}. \quad (5.13)$$

De acordo com Berthelsen e Faltinsen (2007), desta maneira, como será mostrado adiante, nenhum dos denominadores nos coeficiente  $\beta$  será menor que  $\epsilon$  quando  $\epsilon \leq 0.5$  e desta forma a acurácia do método de células fantasmas é conservado.

## 5.2 Classificação e definição dos volumes eulerianos

A fim de ter uma descrição prática da fronteira imersa, inicialmente a superfície do corpo imerso é representada de forma discreta através de pontos que modelam a superfície. A distância entre esses pontos deve ser suficientemente pequena para que todas as curvas e quinas possam ser representadas de forma eficaz. No presente trabalho, essa discretização se deu de forma computacional com arquivos numéricos de extensão *STereoLithography* ou também conhecido como *.stl*. Deve-se notar que neste método, nenhum cálculo é realizado nos pontos lagrangianos e estes são empregados apenas como referencia da geometria do corpo imerso. Logo, outras formas de estrutura de dados que não envolvem pontos discretos para representação da fronteira imersa também podem ser utilizadas desde que sejam capazes de representar todos os detalhes da geometria.

Os volumes eulerianos no entorno do corpo imerso devem ser classificados de forma a atender todos os requisitos do método, essa classificação aborda os seguintes tipos de volume:

- Células inativas ou sólidas;
- Células ativas ou de fluido.
  - Células regulares;
  - Células irregulares.

A classificação é feita da seguinte forma: volumes nos quais o centro está no interior da fronteira imersa são considerados **inativos**, enquanto aqueles que estão no exterior da fronteira imersa são considerados **ativos**. Dentre as células ativas, estas podem ser classificadas como **regulares** e **irregulares**. São **irregulares** as células cortadas pela superfície da fronteira imersa ou então se, ao menos, um de seus volumes vizinhos é cortado,

caso contrário esta célula é **regular**. Além da classificação das células, considerando o método de volumes deslocados aplicado no presente trabalho, deve-se também classificar os pontos de velocidade (faces), esses pontos são considerados ativos se e somente se os dois volumes vizinhos daquela face são ativos e não há fronteira imersa separando seus dois centros, a Fig. 27 ilustra uma malha cartesiana contendo todos os tipos de volumes: **regular**, **irregular** e **inativo**. As faces de velocidade inativas externas à fronteira imersa são chamadas de faces de fronteira ou pontos de fronteira.

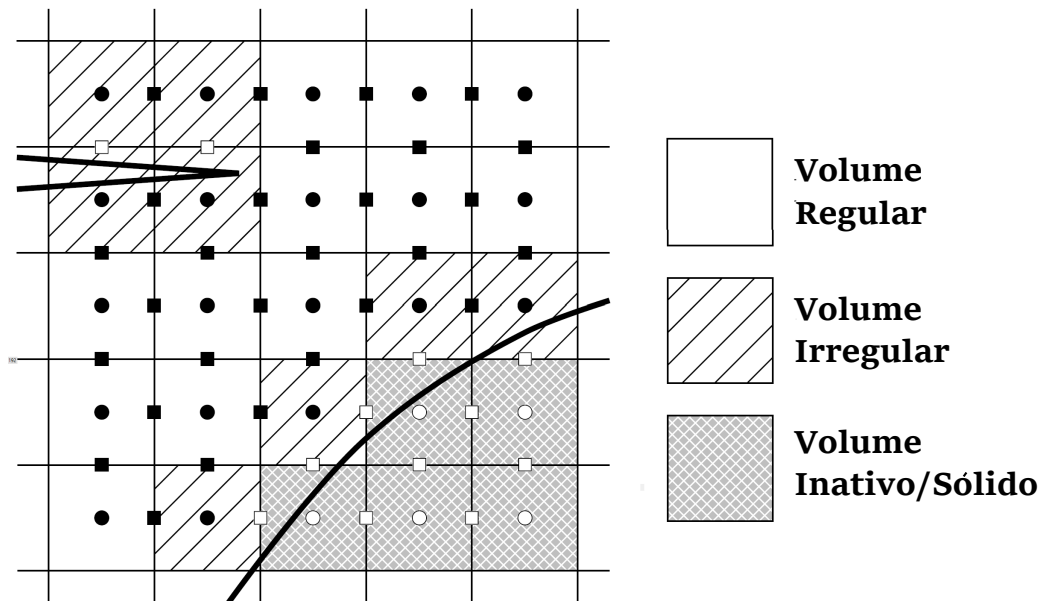


Figura 27 – Definição dos volumes e pontos de velocidade ativos e inativos. Pontos ativos de pressão ( $\bullet$ ); pontos inativos de pressão ( $\circ$ ), pontos ativos de velocidade ( $\blacksquare$ ) e pontos inativos de velocidade ( $\square$ ) (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007).

### 5.3 Pontos de velocidade vizinhos à fronteira imersa

A equação do transporte de quantidade de movimento linear é resolvida apenas nos volumes ativos, ilustrados na Fig. 27. Já os pontos de velocidade inativos que estão localizados fora da fronteira imersa (pontos de fronteira) possuem velocidade imposta através de uma função de interpolação unidimensional considerando seus pontos vizinhos ativos e a condição de não deslizamento na fronteira imersa de velocidade conhecida, essas velocidades não podem ser calculadas devido à impossibilidade de se extrair um gradiente de pressão de suas vizinhanças, pois não se têm pontos ativos de pressão suficientemente, este procedimento é ilustrado na Fig. 28. Este processo é similar ao trabalho de Fadlun et al. (2000), mas os métodos são distintos devido à existência de pontos de velocidade ativos adjacentes à fronteira imersa. Apesar dos diferentes métodos numéricos para resolução das

equações de transporte de quantidade de movimento linear, no presente trabalho aplicou-se uma função interpolação uni-dimensional de terceiro grau, de forma similar a Berthelsen e Faltinsen (2007). De acordo com a Fig. 28, seja o ponto  $x_{i+1/2,j}$  um ponto de fronteira e  $u_{i+1/2,j}$  sua velocidade obtida por interpolação, a função uni-dimensional que define o valor da velocidade neste ponto é dada por:

$$u_{i+1/2} = \sum_{s=i-2}^j \left( \prod_{t=i-2, t \neq s}^j \frac{x_{i+1/2} - x_{t-1/2}}{x_{s-1/2} - x_{t-1/2}} \right) \frac{x_{i+1/2} - x_{\Gamma}}{x_{s-1/2} - x_{\Gamma}} u_{s-1/2} + \prod_{t=i-2}^j \frac{x_{i+1/2} - x_{t-1/2}}{x_{\Gamma} - x_{t-1/2}} u_{\Gamma} \quad (5.14)$$

o sub-índice  $j$  foi omitido por simplificação,  $u_{\Gamma}$  é a velocidade na parede do sólido na posição  $x_{\Gamma}$ , e  $\{u_{i-1/2}, u_{i-3/2}, u_{i-5/2}\}$  são os valores oriundos dos pontos vizinhos  $\{x_{i-1/2}, x_{i-3/2}, x_{i-5/2}\}$ , respectivamente.

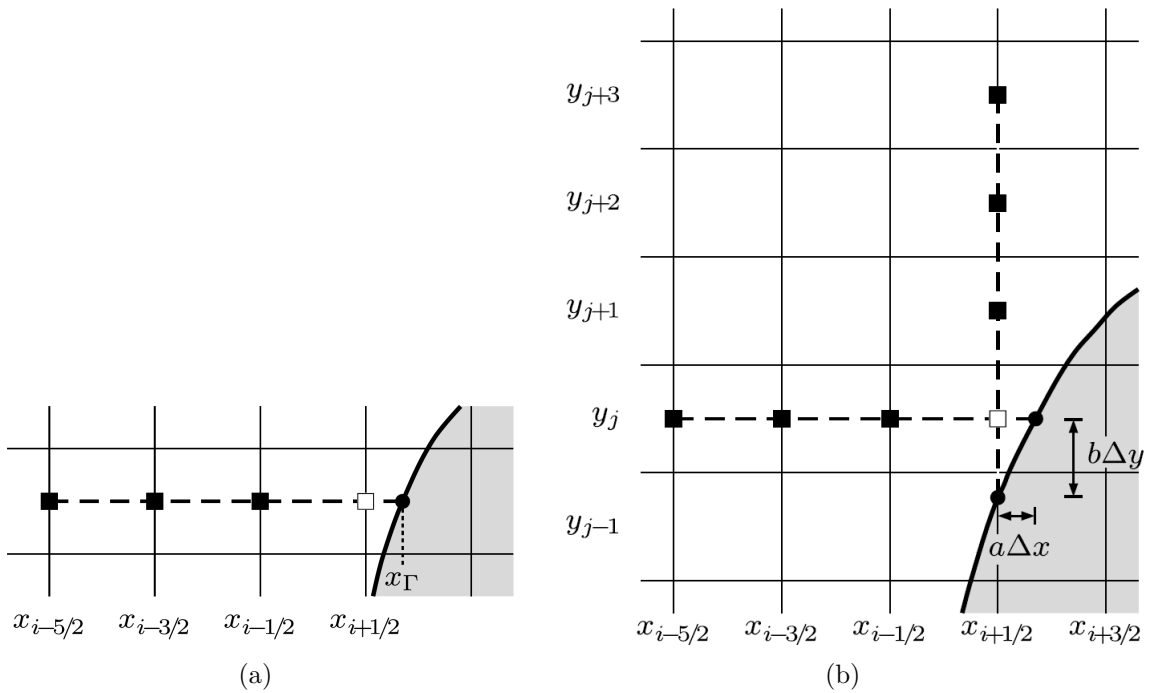


Figura 28 – Reconstrução dos pontos de fronteira: (a) interpolação uni-direcional na direção  $x$ ; (b) interpolação multi-direcional. São representados pontos inativos de velocidade ( $\square$ ), pontos ativos de velocidade ( $\blacksquare$ ) e pontos da superfície da fronteira imersa ( $\bullet$ ) (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007).

De acordo com Berthelsen e Faltinsen (2007) e Tremblay e Friedrich (2000), se um ponto pode ser interpolado por mais de uma direção, cada uma das direções recebe um peso representado por um coeficiente multiplicador:

$$u_{i+1/2,j} = \gamma_x u_{i+1/2,j}^x + \gamma_y u_{i+1/2,j}^y, \quad (5.15)$$

onde os coeficiente de peso são calculados da forma:

$$\gamma_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{a\Delta x}{b\Delta y}\right)^2}, \quad (5.16)$$

e

$$\gamma_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{b\Delta y}{a\Delta x}\right)^2}, \quad (5.17)$$

onde as distâncias entre a superfície imersa e o ponto de fronteira nas direções  $x$  e  $y$  são  $a\Delta x$  e  $b\Delta y$ , respectivamente (Fig. 28-b). Desta forma, o ponto de superfície mais próxima será responsável pela maior influência sobre o valor interpolado.

O presente método de fronteira imersa é implementado no código IMERSGHOST e como já abordado anteriormente, os esquemas de discretização dos termos advectivo e difusivo da equação de Navier-Stokes abordados no presente código é o de diferenças centradas, pode-se definir o conjunto de faces em torno do ponto de velocidade  $u_{i+1/2,j}$ , necessários para o cálculo de suas derivadas por  $\mathbb{D}_{xy}$ :

$$\mathbb{D}_{xy} = \left\{ u_{i-1/2,j}, u_{i+1/2,j}, u_{i+3/2,j}, u_{i+1/2,j+1}, u_{i+1/2,j-1}, v_{i,j+1/2}, v_{i-1,j+1/2}, v_{i,j-1/2}, v_{i-1,j-1/2} \right\}. \quad (5.18)$$

A Fig. 29 ilustra um caso onde há a impossibilidade do cálculo da derivada no ponto de velocidade  $(x_{i+1/2}, y_j)$  devido à falta de pontos ativos de velocidade suficientes em sua vizinhança, pois estes pertencem ao interior da fronteira imersa e são inativo. Então, uma aproximação numérica deve ser aplicada para a obtenção das derivadas  $(u_x)_{i+1/2,j}$ ,  $(u_{xx})_{i+1/2,j}$ ,  $(u_y)_{i+1/2,j}$  e  $(u_{yy})_{i+1/2,j}$ . Esta aproximação é realizada seguindo o procedimento descrito acima, ou seja, o uso de funções de interpolação polinomial empregando volumes fantasmas, como ilustrado na Fig. 26. Similarmente à Eq. 5.18, um novo conjunto de faces  $\mathbb{D}_{xy}^g$  é, então, escolhido para o cálculo dos termos de derivadas:

$$\mathbb{D}_{xy}^g = \left\{ u_{i-1/2,j}^g, u_{i+1/2,j}^g, u_{i+3/2,j}^g, u_{i+1/2,j+1}^g, u_{i+1/2,j-1}^g, v_{i,j+1/2}^g, v_{i-1,j+1/2}^g, v_{i,j-1/2}^g, v_{i-1,j-1/2}^g \right\}, \quad (5.19)$$

Pode-se aplicar o mesmo procedimento para calcular as derivadas da velocidade vertical em  $(x_i, y_{j-1/2})$ . Na Eq. 5.19 os pontos fantasma  $u_{i+3/2,j}^g, u_{i+1/2,j+1}^g$  e  $v_{i,j+1/2}^g$  são obtidos por extrapolação nas direções  $x$  e  $y$  com seus respectivos coeficiente de ponderação (Eq. 5.15). Deve-se salientar que a Eq. 2.5 discretizada continua inalterada, desde que os termos referentes aos pontos inativos sejam substituídos por valores fantasmas extrapolados.

Resumidamente, o procedimento descrito acima pode ser descrito pelos dois passos seguintes, para o cálculo do termo de derivada  $(u_{xx})_{i+1/2,j}$  na face  $(x_{i+1/2}, y_j)$  ilustrada na Fig. 26:

1. Cálculo do ponto de velocidade fantasma da face  $(x_{i+1/2}, y_j)$ . Considere  $\mathcal{J}$  como um operador interpolação polinomial linear de Lagrange de terceiro grau dado pela Eq 5.4, logo a velocidade fantasma é dada por:

$$u_{i+1/2,j+1}^g = \mathcal{J} \left( u_\Gamma, u_{i+1/2,j}, u_{i+1/2,j-1}, u_{i+1/2,j-2} \right). \quad (5.20)$$

onde  $u_\Gamma$  é a velocidade da fronteira.

2. Cálculo do termo  $(u_{yy})_{i+1/2,j}$  empregando o volume fantasma calculado:

$$(u_{xx})_{i+1/2,j} = \frac{u_{i+1/2,j-1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1}^g}{\Delta y^2}. \quad (5.21)$$

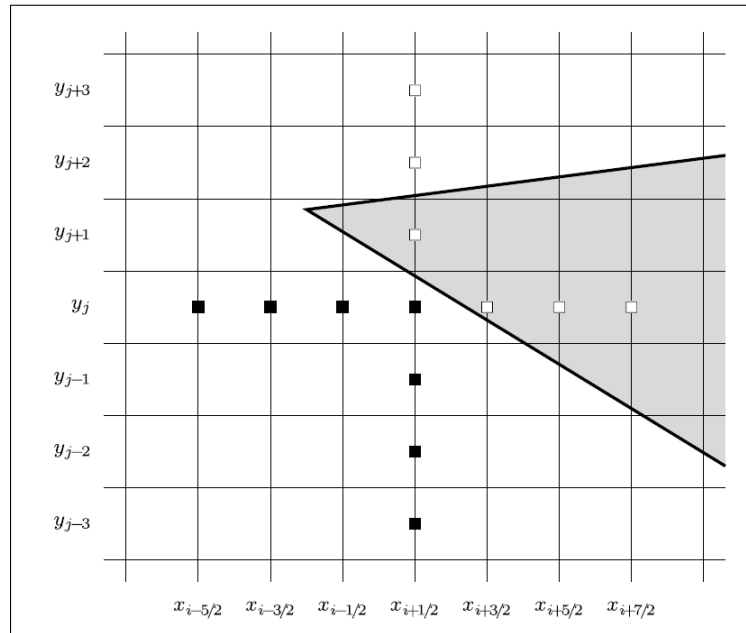


Figura 29 – Estêncil para cálculo dos termos  $(u_x)_{i+1/2,j}$ ,  $(u_{xx})_{i+1/2,j}$ ,  $(u_y)_{i+1/2,j}$  e  $(u_{yy})_{i+1/2,j}$ . Pontos irregulares são substituídos por pontos fantasmas com valores obtidos por extrapolação (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2007).

No código computacional IMERSGHOST, como já comentado, a discretização temporal é feita de maneira explícita empregando o esquema de Euler de primeira ordem. Caso o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais seja aplicado a um esquema implícito de discretização temporal, a matriz coeficiente deverá ser modificada a fim de obedecer as restrições impostas pelo método.

Como já discutido anteriormente e de acordo com Berthelsen e Faltinsen (2007), a acurácia da discretização próxima à fronteira imersa depende da acurácia da função de interpolação das células fantasmas e da ordem de discretização espacial do método envolvido. Para preservar, pelo menos, a segunda ordem do método de diferenças centradas é necessário aplicar uma função cúbica na extrapolação para obtenção dos valores fantasma; no presente trabalho o polinômio de Lagrange de terceiro grau é empregado. Caso não seja possível aplicar um polinômio de terceiro grau por questões geométricas, um polinômio de ordem menor é utilizado, não comprometendo o método devido ao fato desta limitação ocorrer apenas em poucos pontos da malha.

De acordo com Berthelsen e Faltinsen (2007), pontos de velocidade muito próximos à fronteira imersa estão sujeitos à instabilidade numéricas devido ao comportamento singular dos coeficientes do polinômio de Lagrange. Considerando a componente  $x$  da equação de quantidade de movimento, a distância da fronteira será, pelo menos, de meia célula o que limita o problema de instabilidade apenas ao termo discretizado na direção  $y$ . Então, se a distância da fronteira imersa na direção  $y$  é muito pequena comparada ao comprimento do volume euleriano, o esquema de extrapolação deve ser modificado como descrito na seção 5.1. Similarmente, este é apenas um problema para discretização na dimensão  $x$  quando se está resolvendo a componente de velocidade vertical  $v$ .

Para critérios de pós-processamento, a velocidade no ponto central de um volume irregular não pode ser dada simplesmente por uma média aritmética (Eq. 5.22). Neste caso, um polinômio de Lagrange de primeiro grau (Eq. 5.23) é aplicado envolvendo o ponto da superfície da fronteira imersa e o ponto de velocidade daquela célula. A Fig. 30 ilustra esse procedimento, nela pode-se notar o cálculo da componente horizontal de velocidade  $u$  no centro de um volume cortado pela fronteira imersa, baseado na velocidade da fronteira imersa e na velocidade da face leste daquele volume.

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}}{2}, \quad (5.22)$$

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j} - u_{\Gamma}}{x_{i+1/2} - x_{\Gamma}} (x_i - x_{\Gamma}) + u_{\Gamma}. \quad (5.23)$$

## 5.4 Pontos de pressão vizinhos à fronteira imersa

A fim de avançar a solução para o tempo  $t^{n+1}$  com um campo de velocidade com divergente nulo, é necessário resolver a equação de Poisson para a correção da pressão respeitando a restrição de incompressibilidade (Eqs. 5.24, 5.25 e 5.26).

$$\frac{\partial u_k^{n+1}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.24)$$

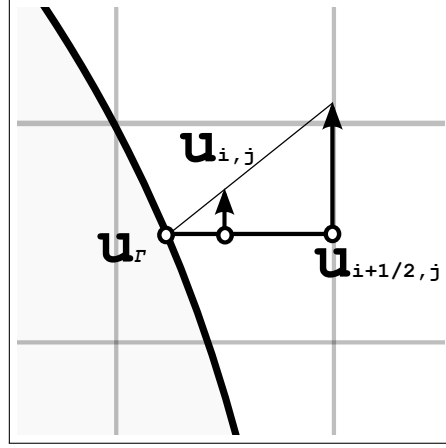


Figura 30 – Cálculo da velocidade no centro do volume para pós-processamento do campo de velocidade.

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{p'_{i+1,j} - 2p'_{i,j} + p'_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p'_{i,j+1} - 2p'_{i,j} + p'_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \quad (5.26)$$

Para um arranjo com malha deslocada aplica-se aqui o método dos passos fracionados (KIM; MOIN, 1985) onde cada passo, predictor e corretor, é realizado apenas uma vez. A Eq. 5.26 descreve a equação do método aplicado aos volumes distantes da fronteira imersa. Caso o volume em questão contenha um ponto irregular de pressão, cuidados especiais devem ser tomados a fim de satisfazer a condição de conservação de massa, restrição dada pelas Eqs. 5.24 e 5.25. Da mesma forma como a discretização da equação da velocidade foi modificada, a equação da pressão deve receber o mesmo tratamento, onde os pontos inativos presentes no termo de derivada serão substituídos por valores fantasmas provenientes de uma função de extrapolação ou interpolação, da condição conhecida na parede da fronteira imersa e dos volumes vizinhos àquele ponto. Nota-se que neste caso os valores aproximados dos pontos fantasmas podem ser obtidos por interpolação ou extrapolação dependendo de sua posição em relação à fronteira. Por conveniência, adota-se no presente trabalho apenas o termo "interpolação" por questões de simplicidade.

Considere um ponto de velocidade inativo localizado em  $x_{i+1/2,j}$  e seja  $\mathcal{I}$  um esquema de interpolação que recupera o valor fictício que satisfaça a condição de não deslizamento:

$$u_{i+1/2,j}^{n+1,g} = \mathcal{I}(u^{n+1}). \quad (5.27)$$

Pode-se particionar o termo de interpolação  $\mathcal{I}$  em duas partes,  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$ ,

$$u_{i+1/2,j}^{n+1,g} = \mathcal{I}(u^{n+1}) = \mathcal{I}\left(u^* - \Delta t \frac{\partial p'}{\partial x}\right) = \mathcal{I}_1(u^*) - \mathcal{I}_2\left(\Delta t \frac{\partial p'}{\partial x}\right), \quad (5.28)$$

ou

$$u_{i+1/2,j}^{n+1,g} = u_{i+1/2,j}^{*,g} - \Delta t \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_{i+1/2,j}^g, \quad (5.29)$$

em que

$$p' = p^n - p^{n+1}, \quad (5.30)$$

onde  $u_{i+1/2,j}^{*,g}$  pode ser interpretado como uma velocidade predita fantasma e  $\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_{i+1/2,j}^g$  é considerado um gradiente da correção da pressão fantasma. É conveniente trabalhar desta forma, com um termo fantasma do gradiente de pressão, pois na condição de não deslizamento na parede do corpo imerso, é conhecido que o gradiente de pressão na parede é nulo, além da condição de velocidade conhecida (condição de *Dirichlet*)  $u_\Gamma^* = u_\Gamma^{n+1}$ . Dessa forma os operadores interpolação  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  podem ser calculados como já descrito anteriormente. O gradiente de velocidade em um ponto de velocidade ativo pode ser aproximado por um estêncil de diferenças centradas usando os valores de pressão dos volumes vizinhos da face em questão, dessa forma,  $\mathcal{I}_2$  pode ser substituído por  $\hat{\mathcal{I}}_2$ :

$$\mathcal{I}_2\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) = \hat{\mathcal{I}}_2(p'), \quad (5.31)$$

por fim, o termo de variação de pressão fantasma  $p'_{i+1/2,j}^g$  é dado por:

$$p'_{i+1/2,j}^g = p'_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_{i+1/2,j}^g. \quad (5.32)$$

Finalmente, a equação de Poisson para correção da pressão é modificada da seguinte forma, a fim de respeitar as condições de restrição para volumes irregulares:

$$\frac{p'_{i+1,j}^g - 2p'_{i,j} + p'_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p'_{i,j+1} - 2p'_{i,j} + p'_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{u_{i+1/2,j}^{*,g} - u_{i-1/2,j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^* - v_{i,j-1/2}^*}{\Delta y} \right), \quad (5.33)$$

onde a restrição:

$$p'_{i+1,j}^g - p'_{i,j} - \Delta x \hat{\mathcal{I}}_2(p') = 0, \quad (5.34)$$

é imposta ao sistema. A escolha do estêncil  $\mathcal{I} \{ \}$  depende da localização da fronteira imersa. Se a velocidade inativa está no lado externo da fronteira, este é considerado um ponto de fronteira e, então, esta velocidade é tratada por uma combinação ponderada de polinômio de Lagrange unidimensional (Eq. 5.15). Caso a fronteira separe o ponto de velocidade inativo do centro de sua célula, então seu valor fictício é obtido estendendo a solução além da fronteira como descrito na seção 5.1. Por exemplo, aplicando um polinômio de Lagrange quadrático para reconstruir a solução na direção  $x$  tem-se:

$$\mathcal{I}(u^*) = \frac{2}{a(a-1)}u_{\Gamma}^{n+1} + \frac{2(a+1)}{a}u_{i-1/2,j}^* - \frac{a-1}{a+1}u_{i-3/2,j}^*, \quad (5.35)$$

e

$$\mathcal{I}(p') = \frac{2}{a(a+1)}\frac{\partial p'}{\partial x_{\Gamma}} + \frac{2(a-1)}{a}\left(\frac{p'_{i,j} - p'_{i-1,j}}{\Delta x}\right) - \frac{a-1}{a+1}\left(\frac{p'_{i-1,j} - p'_{i-2,j}}{\Delta x}\right), \quad (5.36)$$

onde  $a\Delta x$  é a distância entre  $x_{i-1/2,j}$  e a fronteira imersa.

$$\mathcal{I}(u^{n+1}) = \mathcal{I}_1(u^*) + \hat{\mathcal{I}}_2(p'), \quad (5.37)$$

$$\mathcal{I}(u^{n+1}) = \frac{2}{a(a-1)}u_{\Gamma}^{n+1} + \frac{2(a+1)}{a}u_{i-1/2,j}^{n+1} - \frac{a-1}{a+1}u_{i-3/2,j}^{n+1}, \quad (5.38)$$

onde  $(\partial p / \partial x)_{\Gamma} = (\partial p' / \partial x)_{\Gamma}$ .

Este método de fronteira imersa é verificado e testado no capítulo 6.2.



## 6 Resultados

### 6.1 Método da múltipla imposição da força com distribuição direcional

Neste capítulo são realizados os testes para verificação do algoritmo empregado e validação do método de fronteira imersa de múltipla forçagem direta com modificação direcional no termo de interpolação (seção 4.1). Este método foi implementado e testado no código FLUIDS3D, descrito no seção 2.3. Inicialmente, para verificação do algoritmo implementado, foi realizada a verificação do código. Para isso foi aplicado o método das soluções manufaturadas de tal forma que os domínio euleriano e lagrangiano são totalmente verificados (VEDOVOTO, 2011). Após a verificação, a validação do código é realizada em três diferentes casos que foram testados e comparados com resultados provenientes da literatura. Os casos são:

- Escoamento bidimensional sobre um cilindro estacionário com números de Reynolds  $Re = 40$  e  $Re = 100$ ;
- Escoamento tridimensional sobre uma esfera com número de Reynolds  $Re = 100$
- Escoamento bidimensional sobre um perfil aerodinâmico estacionário para ângulo de ataque variando entre  $0^\circ$  e  $15^\circ$ . O perfil aerodinâmico empregado é o NACA0012 (*National Advisory Committee for Aeronautics*).

Foi adotado o critério número de Reynolds para estabelecimento e comparação dos casos simulados. Este número adimensional é dado pela equação:

$$Re = \frac{UD}{\mu}, \quad (6.1)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds,  $U$  é a velocidade característica do escoamento,  $D$  é o comprimento característico do escoamento e  $\mu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Para o terceiro caso, escoamento sobre um perfil aerodinâmico, apesar de ser empregada uma simulação bidimensional, houve a necessidade de adicionar um tratamento especial para considerar os efeitos da turbulência no escoamento, como visto na seção 2.2. A metodologia empregada foi Simulação das Grandes Escalas (*LES*) com o modelo submalha de Smagorinsky dinâmico (GERMANO et al., 1991) para o cálculo da viscosidade turbulenta. Um esquema semi-implícito é adotado para todos os casos calculados nesta

seção. O esquema de diferenças centradas é empregado ( *CDS*) para o termo difusivo e o esquema *CUBISTA* de Alves et al. (2003) é aplicado ao termo advectivo da equação de Navier-Stokes.

Todos os casos calculados são comparados entre o método original de múltipla imposição da força (seção 3.3.1.1), o método de múltipla imposição da força modificado direcionalmente (seção 4.1) e resultados provenientes da literatura. Na apresentação dos resultados, o método de múltipla imposição da força e sua modificação proposta serão referenciados como ***MDF original*** e ***MDF direcional***, respectivamente.

Os resultados da simulação sobre um cilindro são comparados com os resultados de Kim et al. (2001) e Kravchenko e Moin (2000), o caso simulado do escoamento sobre uma esfera é comparado com o trabalho de Johnson e Patel (1999) e Kim e Choi (2002) e os resultados da simulação do escoamento sobre um aerofólio são comparados com os resultados de Akbari e Price (2003) e Yeminici (2013).

### 6.1.1 Verificação da metodologia e da implementação do código computacional

A verificação será feita utilizando-se a técnica das soluções manufaturadas (VILLAR, 2007). Uma solução manufaturada, ou sintetizada, para as equações de Navier-Stokes, consiste em determinar termos fontes a partir de uma dada solução analítica proposta para os campos de velocidade e de pressão e estes termos são, então, somados às equações de Navier-Stokes. Existem soluções manufaturadas de várias formas, para problemas bidimensionais (TAYLOR; GREEN, 1937), tridimensionais (CANUTO et al., 2007) e com propriedades físicas variáveis (NOS, 2007). O recurso do método de soluções manufaturadas está, progressivamente, sendo uma metodologia mais aceita como um método confiável de verificação de códigos.

Aplicando o método das soluções manufaturadas, têm-se a solução analítica válida em todo domínio de cálculo e para todo tempo. Dessa forma pode-se, então, comparar os resultados numéricos e analíticos dos campos de velocidade e de pressão, quantificando os erros de cálculo. A partir desta técnica pode-se verificar novas metodologias, bem como corrigir erros de implementação do algoritmo propostos e do código computacional desenvolvido. Para a verificação do método proposto na seção 4.1, aplica-se a solução analítica descrita nas Eqs. 6.2-6.5 (VEDOVOTO, 2011).

A verificação presente nesta seção é objetivada apenas à análise da implementação da fronteira imersa com múltipla imposição da força com a modificação proposta (seção 4.1), pois tanto o domínio euleriano do código FLUIDS3D quanto o método original de múltipla imposição da força já possuem verificações de acordo com o trabalho de Vedovoto

(2011). As soluções analíticas propostas são:

$$u_e = \sin^2 (\alpha_s \pi x + \beta_s \pi y + \gamma_s \pi z + \delta_s t) , \quad (6.2)$$

$$v_e = -\cos^2 (\alpha_s \pi x + \beta_s \pi y + \gamma_s \pi z + \delta_s t) , \quad (6.3)$$

$$w_e = \frac{\alpha_s}{\gamma_s} \cos^2 (\alpha_s \pi x + \beta_s \pi y + \gamma_s \pi z + \delta_s t) + \frac{\beta_s}{\gamma_s} \cos^2 (\alpha_s \pi x + \beta_s \pi y + \gamma_s \pi z + \delta_s t) , \quad (6.4)$$

$$p_e = \cos (\alpha_s \pi x + \beta_s \pi y + \gamma_s \pi z + \delta_s t) . \quad (6.5)$$

O subscrito  $e$  denota as soluções manufaturadas propostas para as variáveis primárias, ou seja, as três componentes de velocidade e a pressão;  $t$  representa o tempo decorrido. Pode-se observar que, se o divergente das Eqs. 6.2-6.4 é calculado, a condição de incompressibilidade é verificada (VEDOVOTO, 2011).

O domínio computacional considerado no presente estudo é um cubo com dimensões  $1 \times 1 \times 1$ , nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O passo temporal é controlado considerando um coeficiente  $CFL$  menor que 0.01 para eliminar erros decorrentes do método de integração temporal. Os parâmetros  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  e  $\gamma_s$  são definidos todos iguais a 2, e  $\delta_s = 1$ . Os valores constantes de densidade e viscosidade são definidos como 1 e 0.01, respectivamente.

Uma esfera de raio 0.25  $m$ , com superfície discretizada por triângulos, representa a fronteira imersa e é posicionada no centro do cubo (posição  $x = y = z = 0.5 \text{ m}$ ). A Fig. 31 mostra o corpo imerso e sua localização no interior do domínio.

O procedimento para avaliação da taxa de decaimento do erro em função do número de volumes utilizados é descrita no trabalho de Vedovoto (2011). Partindo de uma malha com  $128^3$  células, o número de volumes é diminuído pela metade três vezes, resultando em quatro diferentes malhas.

Os resultados provenientes das simulações estão ilustrados na Fig. 32, onde é mostrada a variação do erro representado pela norma  $L_2$  em função do número de volumes da malha empregada. A taxa de convergência é estimada aplicando o operador norma  $L_2$  (VEDOVOTO, 2011). Pode-se notar na Fig. 32 que o algoritmo empregado mostrou-se com uma taxa de convergência de segunda ordem tanto para a velocidade quanto para as outras variáveis estudadas nos domínios lagrangiano e euleriano. Este é um resultado importante, uma vez que ele demonstra que a modificação proposta pelo autor está de acordo com os métodos numéricos aplicados.

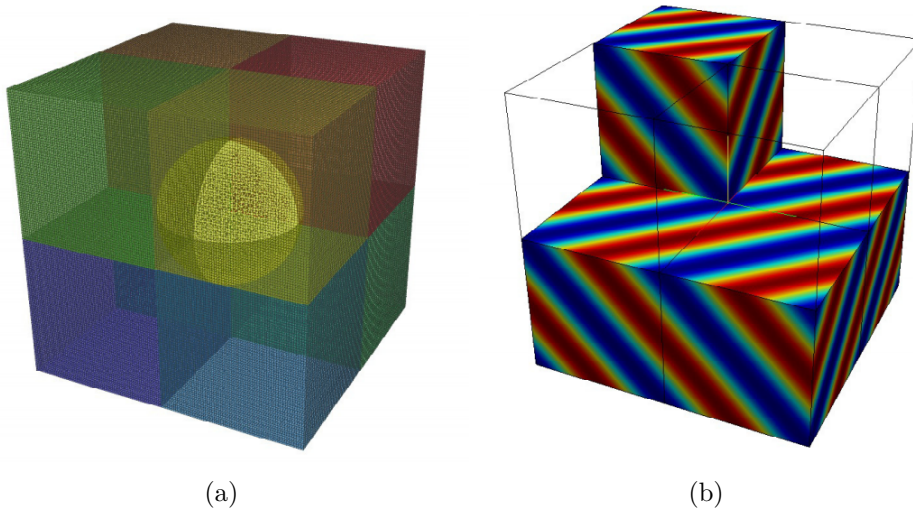


Figura 31 – (a) - Malha lagrangiana imersa no domínio computacional; (b) campo de solução mostrando a velocidade resultante no domínio. Cálculos paralelizados foram empregados. Cada um dos blocos cartesianos desenhados é um subdomínio referente a um *CPU* distinto.

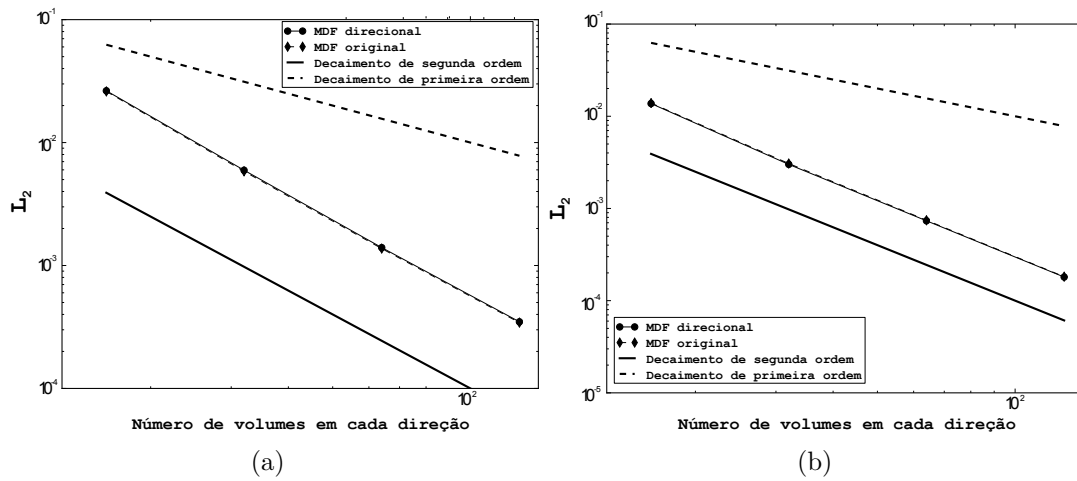


Figura 32 – Norma  $L_2$  da solução manufaturada da componente horizontal de velocidade  $u$ : (a) domínio euleriano; (b) domínio lagrangiano.

### 6.1.2 Escoamento sobre um cilindro circular plano

O escoamento bidimensional sobre um cilindro circular, problema bastante estudado na literatura, foi calculado para fins de validação do método proposto no presente trabalho. Este caso tem sido investigado experimentalmente e numericamente por muitos anos e é fortemente documentado (COUTANCEAU; BOUARD, 1977; CALHOUN, 2002; LE et al., 2006; LINNICK; FASEL, 2005).

Neste estudo, um domínio com a relação  $W/D = 35$ ,  $L/D = 50$  foi adotado, onde  $L$  é o comprimento horizontal do domínio,  $W$  é o comprimento vertical e  $D$  é o diâmetro

do cilindro. Para as simulações com números de Reynolds  $Re = 40$  e  $Re = 100$ , uma malha computacional com 714.100 volumes foi utilizada. O tamanho do passo de tempo foi determinado baseado no valor de 0.25 para  $CFL$ . O número total de pontos na malha lagrangiana é determinado de acordo com a sugestão de Uhlmann (2005), onde é recomendado que as áreas das superfícies das células lagrangianas sejam iguais aos volumes eulerianos em suas vizinhanças. A condição de contorno de dirichlet ( $u/u_\infty = 1; v = 0$ ) é aplicada considerando a injeção de fluido na entrada do domínio, a condição de dirichlet também é aplicada na superfície do cilindro ( $u = 0, v = 0$ ) representando a condição de não deslizamento e, por fim, a condição de contorno de Robin é adotada na saída do domínio, representado condição livre de saída. A Fig. 33 representa sua configuração bidimensional.

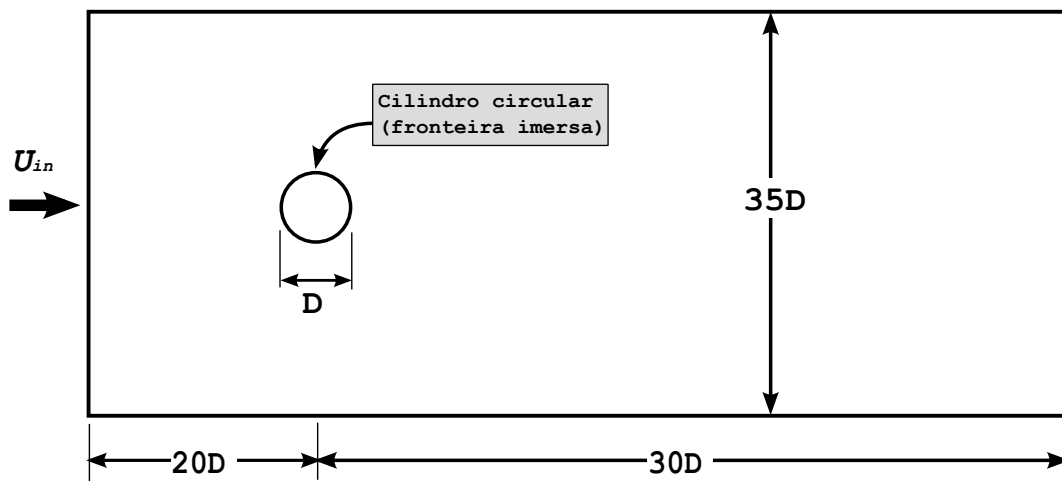


Figura 33 – Representação esquemática do escoamento laminar sobre um cilindro isolado.

A Fig. 34 mostra a comparação das linhas de corrente nas vizinhanças do cilindro entre o método original de múltipla imposição da força e a modificação proposta no presente trabalho para número de Reynolds de 40, após o regime permanente ser atingido. Nota-se grande semelhança entre os resultados, mostrando que para um corpo rombudo, tal como o cilindro circular, o direcionamento da função de interpolação não modificada de forma significativa as linhas de corrente em torno do corpo. O comprimento normalizado da zona de recirculação ( $L/D$ ), a posição de seu centro ( $a/D, b/D$ ), o ângulo de separação do escoamento ( $\theta$ ) e o coeficiente de arrasto  $C_D$  são dados na Tab. 1, onde são comparados com valores experimentais e outros resultados numéricos. Os resultados apresentam grande semelhança com a literatura.

Nas análises quantitativas do escoamento, é possível extrair o coeficiente de arrasto em função do tempo, este coeficiente é definido como:

$$C_D(t) = \frac{F_D(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \quad (6.6)$$

onde  $F_D(t)$  é a força de arrasto.

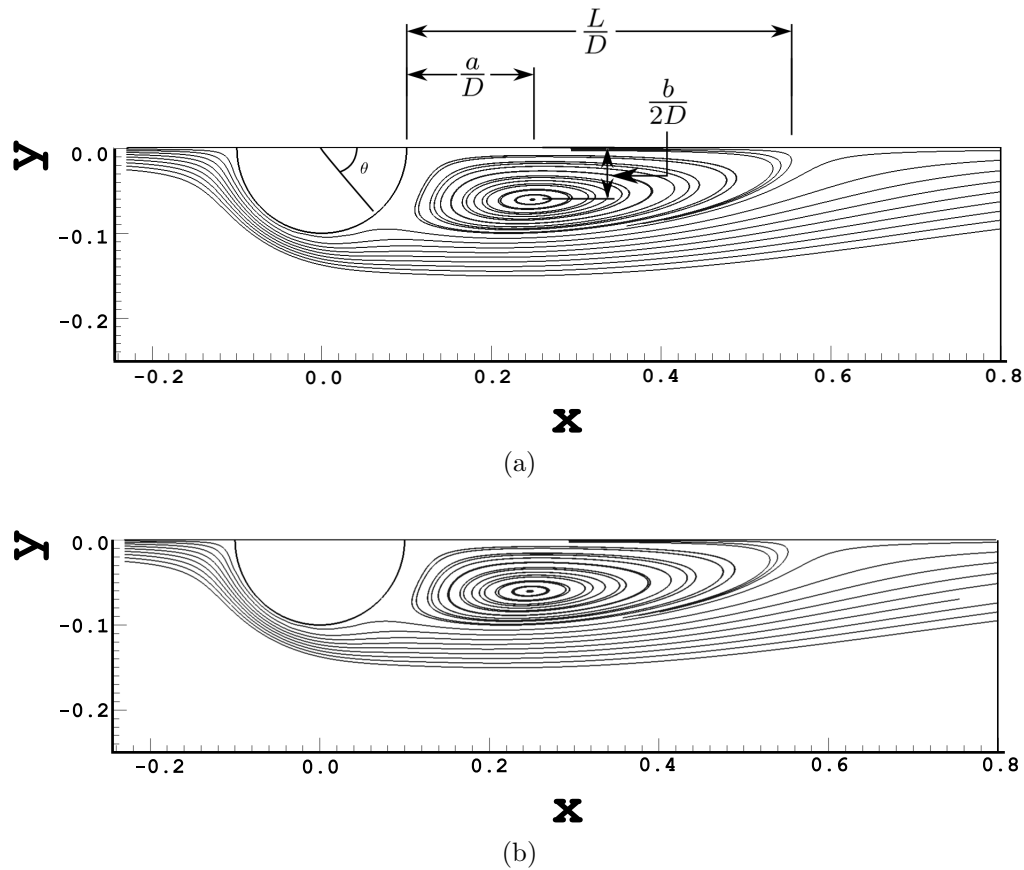


Figura 34 – Linhas de corrente do escoamento em regime permanente sobre um cilindro circular para  $Re = 40$  e nomenclatura empregada na Tab. 1: (a) *MDF* original; (eb) *MDF* direcional.

Tabela 1 – Comparação das características de um escoamento permanente sobre um cilindro circular para  $Re = 40$ : comprimento  $L$  da zona de recirculação, posições  $(a, b)$  do centro da recirculação e ângulo de separação  $\theta$  (a nomenclatura é compreendida na Fig. 35).

	$L/D$	$a/D$	$b/D$	$\theta$	$C_D$
Coutanceau e Bouard (1977)	2.13	0.76	0.59	53.5	1.53
Calhoun (2002)	2.18	-	-	54.2	1.52
Le et al. (2006)	2.22	-	-	53.6	-
Linnick e Fasel (2005)	2.28	0.72	0.60	53.6	-
Russel e Wang (2003)	2.29	-	-	53.1	1.51
Xu e Wang (2006)	2.21	-	-	53.5	1.54
Herfjord (1996)	2.25	0.71	0.60	51.2	-
<i>MDF</i> original	2.25	0.75	0.60	54.0	1.56
<i>MDF</i> direcional	2.28	0.77	0.60	55.0	1.55

A Fig. 35 ilustra os contornos de iso-vorticidade para números de Reynolds  $Re = 40$  e  $Re = 100$ . As comparações são feitas entre o modelo original de múltipla imposição da força, o modelo direcional proposto pelo autor e resultados do trabalho de Kim et al. (2001). A concordância dos resultados é evidente, o escoamento é simétrico em torno do eixo horizontal do escoamento para  $Re = 40$ , instabilidades e emissão de vórtices ocorrem para  $Re = 100$ , indicando que o campo de vorticidade é bem capturado pelo presente método de fronteira imersa.

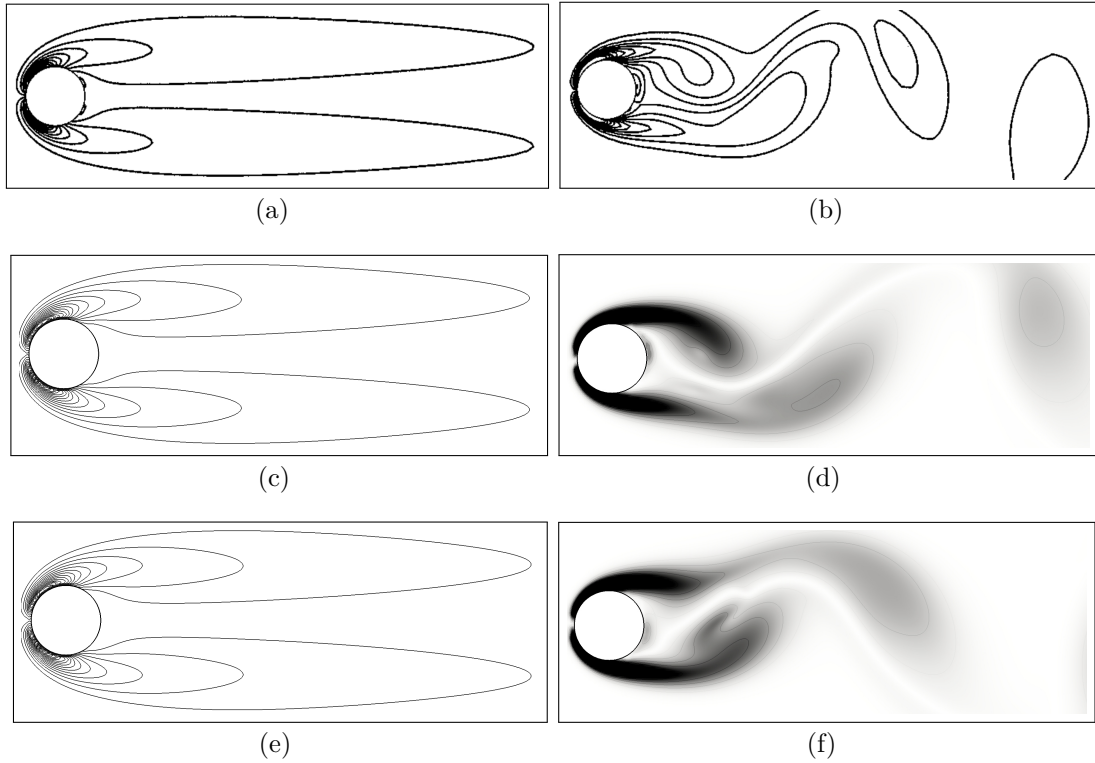


Figura 35 – Iso-contornos de vorticidade na região próxima ao cilindro circular para  $Re = 40$ : (a) Kim et al. (2001); (c) *MDF* original; (e) *MDF* direcional. Para  $Re = 100$ : (b) Kim et al. (2001); (d) *MDF* original; (f) *MDF* direcional.

### 6.1.3 Escoamento sobre uma esfera

A fim de reforçar a verificação do método de múltipla imposição da força modificado, foi calculado o escoamento tridimensional sobre uma esfera, um caso bastante estudado na literatura (JOHNSON; PATEL, 1999). O domínio adotado possui dimensões de  $25D \times 10D \times 10D$  nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, onde  $D$  é o diâmetro da esfera. Para as simulações com número de Reynolds  $Re = 100$ , uma malha computacional de 4.224.100 volumes foi empregada. O passo de tempo foi determinado com base em um valor de *CFL* de 0,25. Na superfície da esfera, a condição de não deslizamento foi aplicada; aplicou-se a condição de Dirichlet na entrada do escoamento ( $u/u_\infty = 1; v = 0; w = 0$ ) e condição de Robin para as demais faces, considerando-as como campos distantes.

As linhas de corrente no plano  $(x, y)$  para o regime estacionário são mostradas na Fig. 36. O escoamento possui ponto de separação (descolamento) na superfície da esfera em um ângulo  $\theta$  e as linhas de corrente se reencontram para a formação de uma bolha fechada de recirculação e um vórtice toroidal. Pode-se notar grande semelhança qualitativa entre os escoamentos.

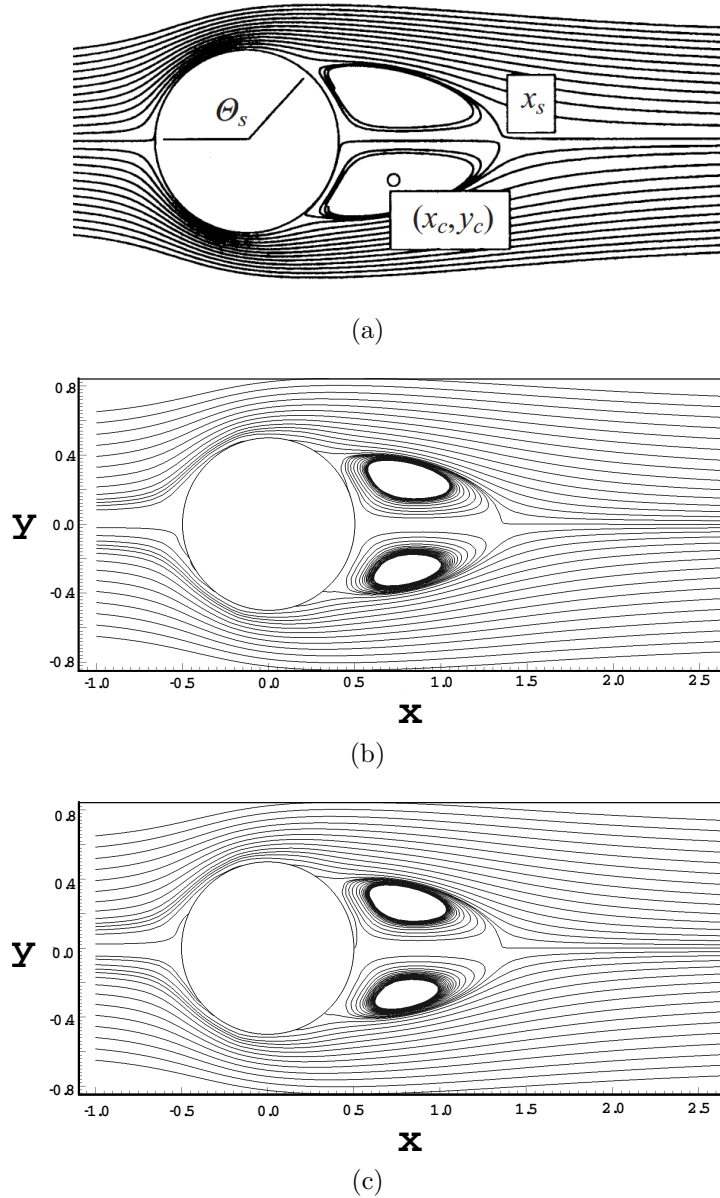


Figura 36 – Linhas de corrente simétricas ao eixo central para um escoamento sobre uma esfera para  $Re = 100$ : (a) Johnson e Patel (1999); (b) *MDF* original; (c) *MDF* direcional.

Os resultados numéricos de Johnson e Patel (1999) fornecem dados para comparação qualitativa e quantitativa com o presente resultado. A Tab. 2 mostra a comparação quantitativa dos dados geométricos do campo de velocidade e o coeficiente de arrasto. Pode-se notar que há boa concordância entre os resultados, porém para o método apresentado

*MDF* direcional, notou-se que em todas as variáveis geométricas apresentadas na Tab. 2 há uma superestimação dos resultados, este comportamento deve-se ao fato de que modificando a função de interpolação e extrapolação do termo de forçagem do método de múltipla imposição da força para agir apenas no exterior da fronteira imersa, há uma leve mudança na posição do centro de aplicação da força de cada ponto lagrangiano e dessa forma a geometria descrita pela forçagem do método é levemente modificada, aparentando uma forma de dilatação do corpo.

Tabela 2 – Comparação quantitativa de um escoamento em regime permanente sobre uma esfera a  $Re = 100$ .

	$x_c(m)$	$y_c(m)$	$x_S(m)$	$\theta_S(o)$	$C_D$
Johnson e Patel (1999)	0.72	0.26	1.23	126	1.085
<i>MDF</i> original	0.75	0.25	1.25	125	1.092
<i>MDF</i> direcional	0.78	0.28	1.29	128	1.089

A Fig. 37 mostra uma vista em perspectiva dos contornos de isovorticidade de cada um dos métodos testados: múltipla imposição da força original e sua modificação proposta. As vistas oblíquas ajudam na compreensão das estruturas tridimensionais estacionárias formadas a jusante da esfera. Para os dois casos, qualitativamente as estruturas são bastante similares, reforçando a comprovação de que a nova modificação não adiciona perda de qualidade e acurácia aos resultados de escoamentos sobre corpos rombudos.

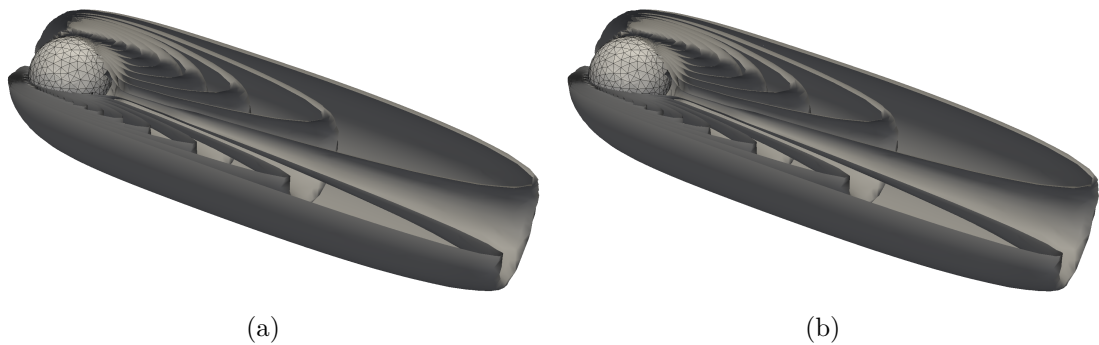


Figura 37 – Vista oblíqua das estruturas vorticais estacionárias do escoamento sobre uma esfera: (a) *MDF* original; (b) *MDF* direcional.

#### 6.1.4 Escoamento sobre um perfil NACA0012

Nesta seção são apresentados resultados de um escoamento transiente em duas dimensões sobre um perfil aerodinâmico NACA0012. O perfil em questão foi escolhido devido à sua esbeltez no bordo de saída, o que permite testar e verificar de forma rigorosa o presente método de acordo com as limitações dos métodos de fronteira imersa apresentadas

na seção 3.2.5. A Fig. 38 ilustra a diferença entre a estratégia original de interpolação e a estratégia proposta pelo autor (seção 4.1) no bordo de fuga de um aerofólio.

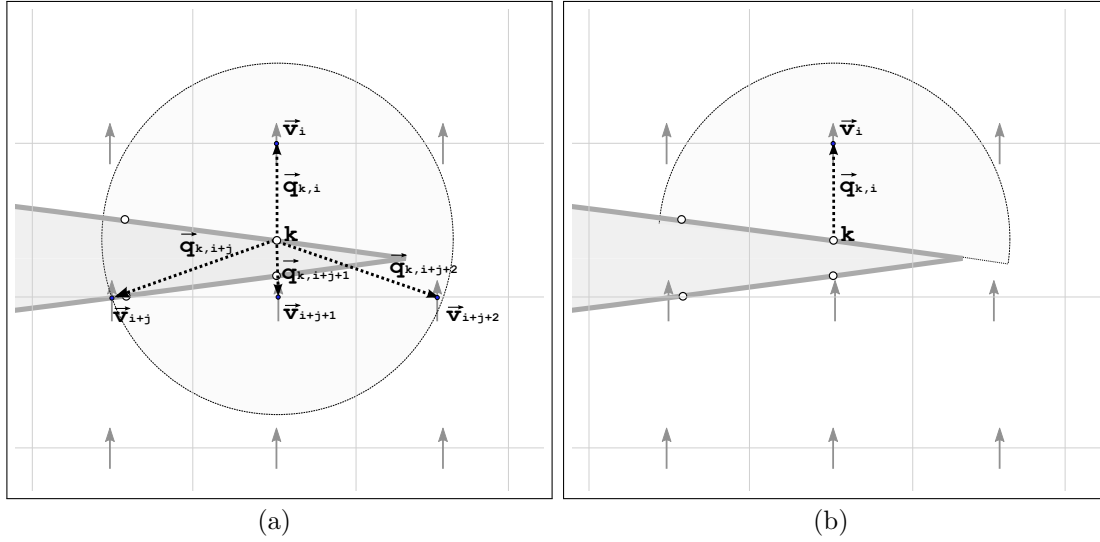


Figura 38 – Diagrama esquemático da região de interpolação no bordo de saída de um perfil aerodinâmico: (a) *MDF* original; (b) *MDF* direcional. Onde os termos  $\vec{v}$ ,  $\vec{q}$  e  $k$  representam, respectivamente, a velocidade vertical na face do volumes euleriano, o vetor partindo do ponto lagrangiano até o ponto de face da célula euleriana e o ponto lagrangiano.

As simulações foram realizadas em uma malha bidimensional. O domínio de cálculo possui dimensões de  $9C$  de comprimento e altura de  $5C$ , onde  $C$  é a extensão da corda do aerofólio. Uma malha cartesiana estruturada não uniforme contendo 522.000 volumes com três regiões de refinamento por estiramento foi utilizada, como pode ser observado na Fig. 39, onde na região *I* há um refinamento sucessivo da malha no sentido do eixo  $x$ . Na região *II* a malha possui volumes de tamanhos constantes e na região *III* as células possuem seus tamanhos aumentando de acordo com a aproximação do fim do domínio. O corpo imerso é posicionado a uma distância de  $3.3C$  da borda esquerda do domínio e no eixo horizontal central (altura de  $2.5C$ ).

Um perfil de velocidade constante e uniforme é imposto na entrada do domínio (face esquerda), de tal forma que o fluido é direcionado da esquerda para a direita do domínio. Condição de Neumann foi imposta para o campo de velocidade em todas as outras faces. Na superfície do aerofólio, a condição de não-deslizamento é aplicada. O passo de tempo é controlado impondo um *CFL* de 0.25. A modelagem da turbulência é feita aplicando o modelo dinâmico de Smagorinsky (*LES*) com números de Reynolds  $Re = 10^4$  e  $Re = 10^5$ . Comparações foram feitas com os resultados de Akbari e Price (2003) realizando-se variações no ângulo de ataque do perfil aerodinâmico. Em seu trabalho, Akbari e Price (2003) constataram que o ângulo de ataque no qual o perfil perde sua

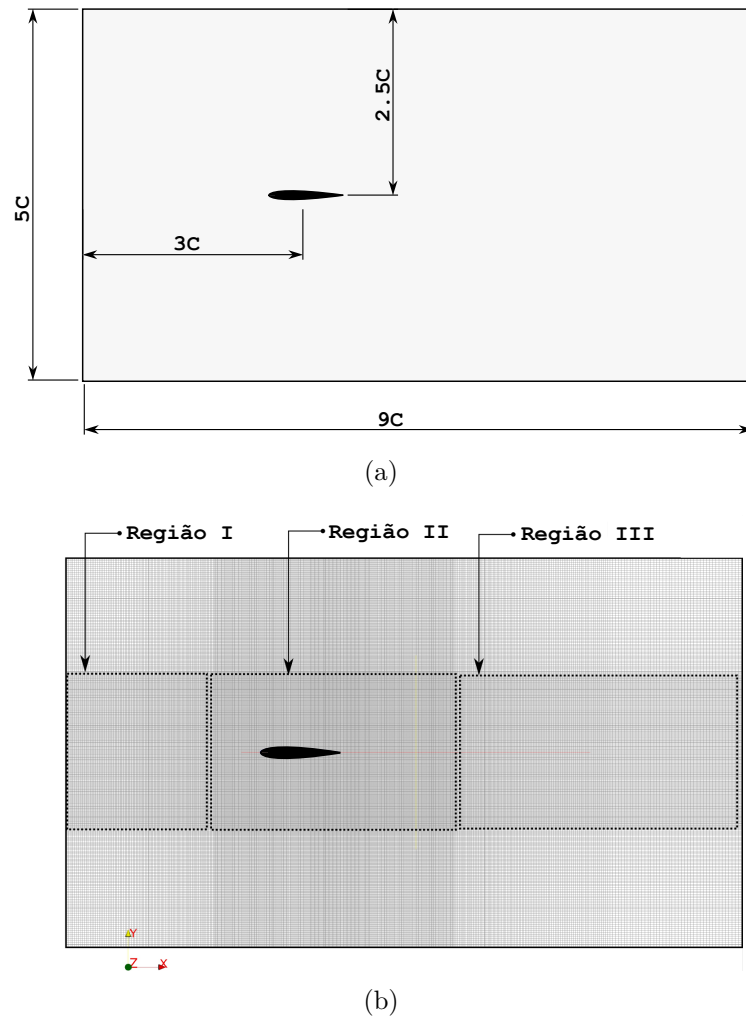


Figura 39 – Vista do domínio de cálculo. (a) Características geométricas do domínio do caso; (b) Malha euleriana empregada

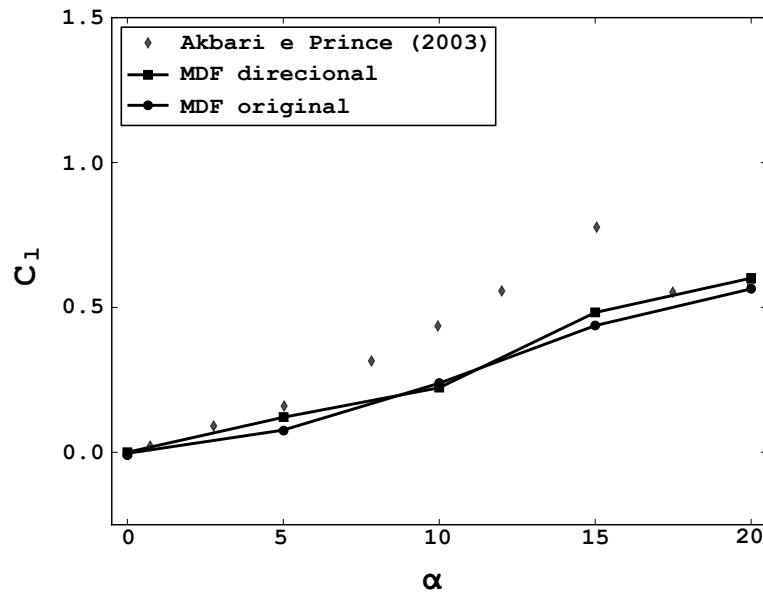
sustentabilidade e ocorre o fenômeno de estol (*stall*) é de  $\alpha \approx 15^\circ$  para um número de Reynolds  $Re = 10^4$ .

A Fig. 40 mostra o coeficiente de sustentação ( $C_l$ ), dado pela Eq. 6.7, versus o ângulo de ataque para ambos os casos  $Re = 10^4$  e  $Re = 10^5$ . Os cálculos foram feitos durante 100s físicos. Para  $Re = 10^4$  (Fig. 40-a) pode-se notar que tanto o método *MDF* original quanto o método *MDF* direcional não demonstraram boa concordância com os resultados esperados para ângulos acima de  $5^\circ$ . Quando comparados entre eles, o método *MDF* direcional apresentou resultados mais próximos à literatura que o método *MDF* original. Para  $Re = 10^5$  (Fig. 40-b) há ausência de concordância para todos os ângulos de ataque. Estes resultados discordantes da literatura são provenientes de duas fragilidades dos métodos de fronteira imersa com função de distribuição do termo de força, são elas: as recirculações internas ao corpo imerso que deterioram a qualidade dos resultados na camada limite do corpo e o fato do bordo de saída do aerofólio ser um perfil esbelto,

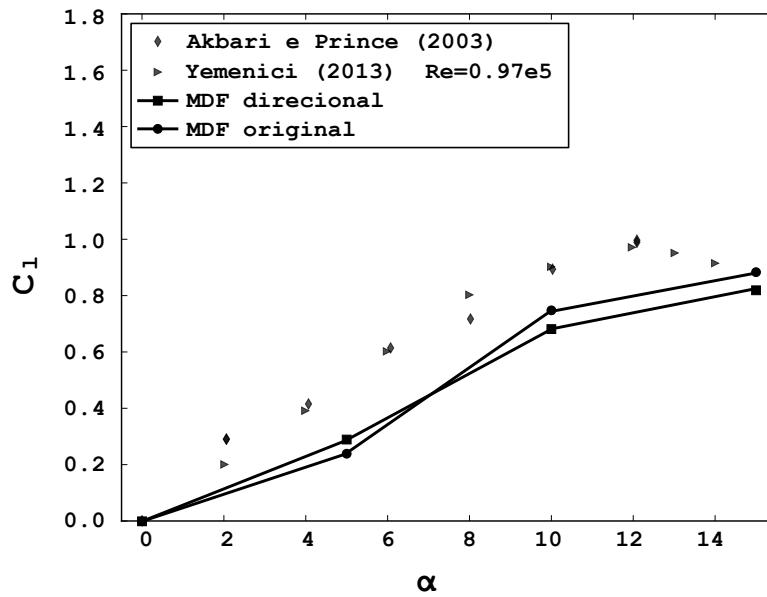
conduzindo o campo de velocidade e pressão do escoamento a um comportamento quase descontínuo, com saltos de valores, nessa região. Além disso, pode-se notar que esses efeitos aumentam com o incremento do número de Reynolds.

$$C_l(t) = \frac{F_l(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \quad (6.7)$$

respectivamente, onde  $F_l(t)$  é a força de sustentação.



(a)



(b)

Figura 40 – Comparação do coeficiente de sustentação entre resultados experimentais e numéricos. (a)  $Re = 10^4$ ; (b)  $Re = 10^5$ .

A Fig. 41 mostra contornos de iso-vorticidade instantâneos nas proximidades do aerofólio para ambos os métodos testados (*MDF* original e direcional) para os ângulos de ataque  $\alpha = 5^\circ$  e  $\alpha = 15^\circ$  e número de Reynolds  $Re = 10^4$ . Nas Figs. 41-a e 41-c pode-se notar a presença de estruturas vorticiais dentro e fora da fronteira imersa quando aplicado o método original de múltipla imposição da força, essas estruturas não podem ser consideradas como físicas, uma vez que há um descolamento da camada limite a um ângulo de ataque bastante inferior àqueles deduzidos por outros autores na literatura. De acordo com Akbari e Price (2003) esse ângulo é de  $\alpha \approx 15^\circ$  para um número de Reynolds  $Re = 10^4$ . De acordo com as Figs. 41-b e 41-d, esse comportamento é atenuado para o método *MDF* modificado, devido ao tratamento especial de seus termos de interpolação e extrapolação.

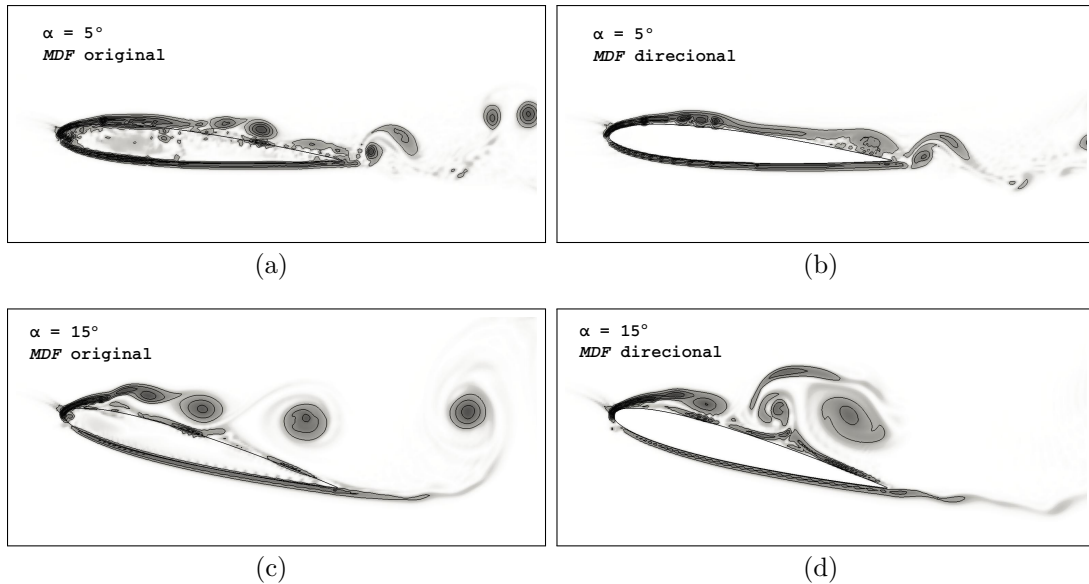


Figura 41 – Contornos de isovorticidade instantâneos nas proximidades do perfil aerodinâmico NACA0012 para  $Re = 10^4$ . Ângulo de ataque  $\alpha = 5^\circ$ : (a) *MDF* original; (b) *IBM* direcional. Ângulo de ataque  $\alpha = 15^\circ$ : (c) *MDF* original; (d) *IBM* direcional.

Pode-se também notar, ainda na Fig. 41, que no método *MDF* original os volumes internos à fronteira imersa são mais afetados pelo escoamento em sua proximidade que no *MDF* direcional. Este fato deve-se à aplicação da função *delta* (Eqs. 4.8 e 4.9) discretizada utilizada neste caso, pois devido ao direcionamento da função de interpolação modificada, a influência do termo de forçagem aumenta o desacoplamento entre os escoamentos interno e externo. Como um ponto negativo, a distribuição direcional faz com que a força aplicada pelo método de fronteira imersa de múltipla forçagem direcional seja mais concentrada em um menor conjunto de volumes eulerianos, criando novas recirculações não físicas no domínio de fluido acima e abaixo das superfícies superior e inferior do aerofólio, respectivamente.

### 6.1.5 Conclusão

Os resultados numéricos para o método original de múltipla imposição da força e sua modificação proposta na seção 4.1 apresentaram bons resultados para corpos rombudos (cilindro e esfera). Tanto as linhas de corrente quanto os resultados quantitativos, como o coeficiente de arrasto, estão de acordo com os resultados apresentados na literatura e pode-se então considerar esses métodos como indicados para esse tipo de simulações. Já para casos com geometrias esbeltas (perfil aerodinâmico), os resultados do método iterativo de múltipla imposição da força utilizando uma estratégia de interpolação direcional mostrou um leve progresso em relação ao método *MDF* original, mas ainda não é considerada uma boa metodologia para tratar corpos com esse tipo de geometria.

Esquemas mais acurados para tratar corpos esbeltos podem ser encontrados dentre os métodos de imposição direta da condição de contorno, como por exemplo, o método tratado no capítulo 5. Seus resultados são apresentados na seção 6.2. Conclui-se então que os métodos ditos "difusos", como o de múltipla imposição da força, não são capazes de tratar com acurácia escoamentos sobre geometrias com quinas agudas ou esbeltas, pois mesmo quando suas funções de interpolação e distribuição são modificadas, esses métodos ainda apresentam uma solução contínua no espaço e por isso não são adequados para tratar descontinuidades em suas soluções.

## 6.2 Fronteira Imersa com volume fantasma local

Para a verificação e a validação do método de fronteira imersa com volume fantasma local (capítulo 5), empregou-se o código computacional IMERSGHOST desenvolvido pelo próprio autor e descrito na seção 2.3. Considerando o fato de ser um código novo e desenvolvido especialmente para os testes do método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais, foi necessária, além da verificação do modelo de fronteira imersa implementado, a verificação e validação do algoritmo computacional para o domínio euleriano.

Inicialmente, para verificação do algoritmo implementado, foi realizada a verificação do código numérico desenvolvido. Para isso o método das soluções manufaturadas para problemas bidimensionais de Taylor e Green (1937) é aplicado de tal forma que o domínio euleriano é totalmente verificado. Em seguida, validou-se a implementação das soluções das equações de Navier-Stokes do presente código com dois casos diferentes: escoamento de Poiseuille e escoamento em uma cavidade com tampa deslizante. Com as equações para o meio fluido verificadas e validadas, testou-se três diferentes casos empregando cálculos com fronteira imersa: escoamento de Poiseuille com dois canais paralelos, escoamento sobre uma placa plana vertical e escoamento sobre um cilindro dentro de um canal plano. Todos os casos estudados são comparados com resultados provenientes da literatura. Os resultados da simulação sobre uma placa horizontal são comparados com os resultados

da solução exata do escoamento de Poiseuille, o caso simulado do escoamento sobre uma placa plana vertical é comparado com os trabalhos de Berthelsen e Faltinsen (2007), Koumoutsakos e Shiels (1996) e Tanji e Honji (1971) e os resultados da simulação do escoamento sobre um cilindro entre duas placas planas são comparados com os resultados de Sintu e Sinhamahapatra (2010).

### 6.2.1 Verificação do domínio euleriano e da implementação do código computacional

O método de soluções manufaturadas, de maneira geral, é descrito na seção 6.1.1. O algoritmo computacional bidimensional descrito nessa seção foi verificado com as equações de (TAYLOR; GREEN, 1937), onde as seguintes soluções são propostas:

$$u_e = \sin x \cdot \cos y \cdot F(t), \quad (6.8)$$

$$v_e = -\cos x \cdot \sin y \cdot F(t), \quad (6.9)$$

onde  $u_e$  e  $v_e$  são, respectivamente, as componentes horizontal e vertical da velocidade exata da solução e  $F(t)$  é uma função dada por:

$$F(t) = e^{-2\nu t}, \quad (6.10)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido e  $t$  é o tempo.

O campo de pressão  $p$  é obtido substituindo as velocidades exatas nas equações do balanço de quantidade de movimento linear e é dado por:

$$p = \frac{\rho}{4} (\cos 2x + \cos 2y) F^2(t). \quad (6.11)$$

A função corrente da solução dos vórtices de Taylor-Green, que satisfaz a equação  $\mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$  para a velocidade do escoamento  $\mathbf{v}$ , é:

$$\boldsymbol{\psi} = \sin x \cdot \sin y \cdot F(t). \quad (6.12)$$

Similarmente, a vorticidade, que satisfaz  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ , é dada por:

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \sin x \cdot \sin y \cdot F(t). \quad (6.13)$$

Deve ser observado que o divergente do campo de velocidade analítico (Eq. 6.14) é nulo, ou seja, a solução proposta (Eqs. 6.8 e 6.9) satisfaz à equação da continuidade:

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y} = 0. \quad (6.14)$$

Os termos fonte a serem somados às equações da quantidade de movimento linear são dados por:

$$f_{x,e} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + \frac{\partial u_e u_e}{\partial x} + \frac{\partial u_e v_e}{\partial y} + \frac{\partial P_e}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \right), \quad (6.15)$$

$$f_{y,e} = \frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{\partial v_e v_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e u_e}{\partial y} + \frac{\partial P_e}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_e}{\partial y^2} \right), \quad (6.16)$$

onde  $f_{x,e}$  e  $f_{y,e}$  são os termos fonte a serem somados ao lado direito das equações de Navier-Stokes.

As derivadas que compõem as Eqs. 6.15 e 6.16, são obtidas analiticamente a partir das Eqs. 6.8, 6.9 e 6.11. Desta forma, quando se resolve numericamente as equações de Navier-Stokes com estes termos fonte, o resultado deve seguir a mesma evolução que as soluções analíticas, a menos de erros numéricos promovidos, por exemplo, pelas discretizações temporais e espaciais (MARIANO, 2011).

A solução proposta por Taylor e Green (1937) (Eqs. 6.8, 6.9 e 6.11) foi escolhida, pois apresenta como vantagem que os termos dados pelas Eqs. 6.15 e 6.16 são nulos, como pode ser verificado efetuando-se suas derivadas.

O domínio de cálculo é um quadrado de comprimento  $L_x = L_y = 2\pi$ . As condições de contorno são periódicas em todas as direções e a condição inicial é dada pelas Eqs. 6.8 e 6.9 em  $t = 0.0$  s. Dada a condição inicial, a solução evolui com o passar do tempo e pode ser comparada com a solução analítica. No presente trabalho adotou-se como medida do erro a norma  $L_2$ , dada pela Eq. 6.17:

$$L_2(\phi) = \sqrt{\frac{\sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} (\phi_{e,ij} - \phi_{ij})^2}{N_x N_y}}, \quad (6.17)$$

onde  $\phi_e$  é a variável analítica, dada por uma das Eqs. 6.8, 6.9 ou 6.11,  $\phi_{ij}$  é a variável calculada numericamente no volume  $ij$ ,  $N_x$  e  $N_y$  são o número de volumes da discretização do domínio nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Aqui objetiva-se determinar a taxa de convergência numérica e a precisão da implementação do domínio euleriano como forma de garantir que os testes envolvendo a fronteira imersa não apresentem problemas devidos a erros de implementação. O gráfico da Fig. 42 mostra a convergência do erro em função da malha empregada, ele foi construído

dobrando-se, em cada direção, o número de volumes eulerianos ( $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$ ,  $128 \times 128$  e  $256 \times 256$ ). O passo de tempo utilizado é da ordem de  $10^{-6}$  de tal maneira que o erro gerado pela discretização temporal possa ser minimizado. Nota-se que a taxa de convergência 2 é obtida, como esperado.

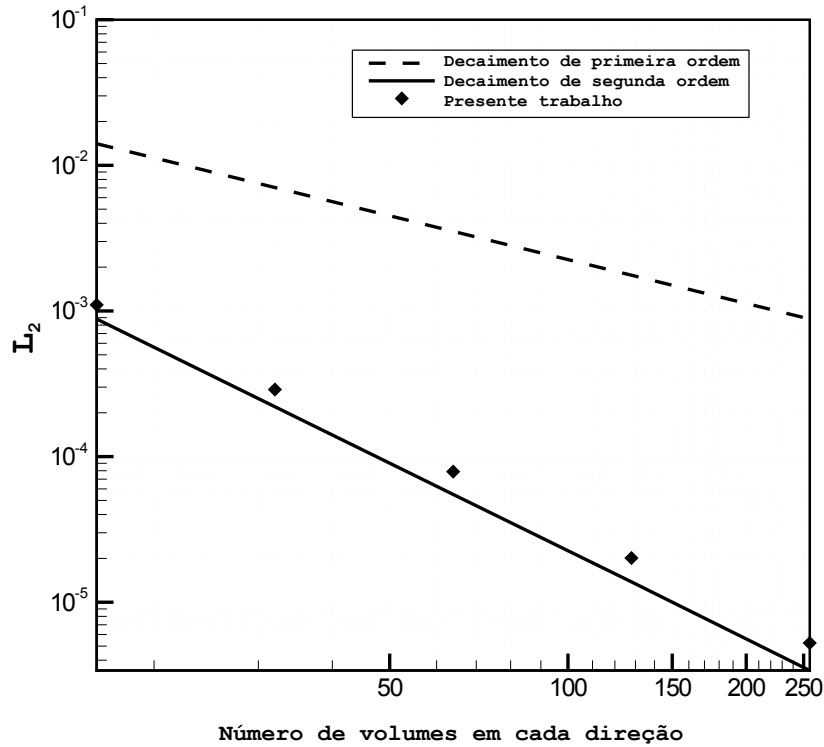


Figura 42 – Taxa de convergência espacial para o domínio euleriano.

A Fig. 43, através das linhas representativas, mostra as linhas de corrente induzidas no escoamento. Essas linhas tem forma definida pela Eq. 6.12. Observa-se quatro vórtices equidistantemente separados, um resultado que condiz com o esperado.

## 6.2.2 Validação do domínio euleriano

### 6.2.2.1 Escoamento de Poiseuille

O escoamento de Poiseuille é um caso bastante conhecido na literatura para escoamentos em uma dimensão quando plenamente desenvolvido e escoamentos em duas dimensões quando há a região de entrada no canal. Sua geometria é basicamente composta de um canal, formado por duas placa infinitas, paralelas entre elas e com velocidade de fronteira nula. As placas são fixas no espaço e a distância entre elas (largura do canal) é denotada por  $H$ . Neste trabalho, o sistema de coordenadas adotado é escolhido de tal forma que a parede inferior coincide com o plano  $(x, y)$  e a coordenada  $y$  é direcionada em direção à placa superior. O escoamento é impulsionado por um gradiente de pressão  $\partial P / \partial x$  que o fornece energia suficiente para superar as perdas viscosas. O escoamento é

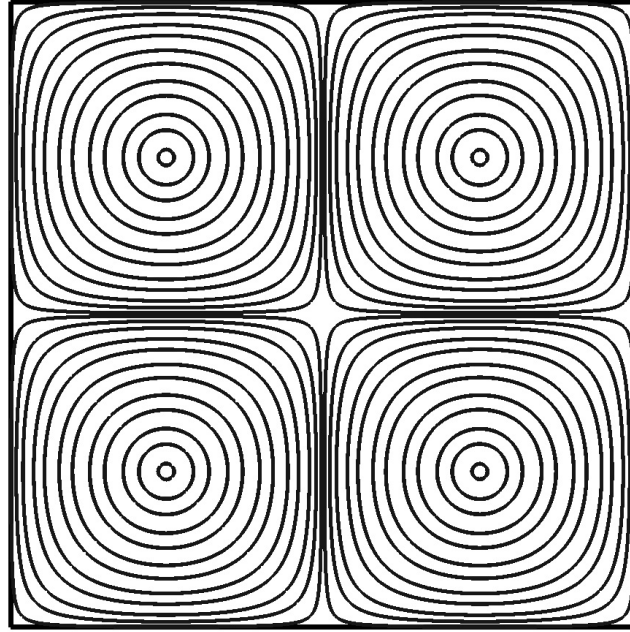


Figura 43 – Linhas de correntes dos vórtices de Taylor-Green em decaimento sem fronteira imersa.

assumido como laminar, permanente, incompressível, isotérmico e horizontal. A Fig. 44 representa sua configuração bidimensional.

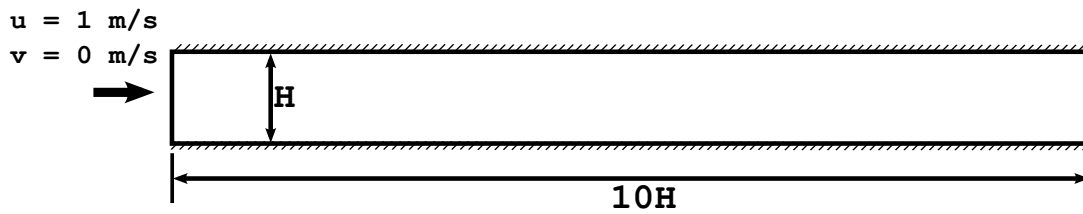


Figura 44 – Representação esquemática do escoamento de Poiseuille: laminar, viscoso e totalmente desenvolvido em um canal infinito.

O escoamento de Poiseuille pode ser descrito pelas equações de Navier-Stokes para sistemas bidimensionais (Eqs. 6.18-6.20). Portanto, dado que o escoamento possui características especiais, essas equações podem ser simplificadas. As derivações podem ser descritas a partir das equações de Navier-Stokes em duas dimensões  $x$  e  $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (6.20)$$

A equação da energia não necessita ser considerada, uma vez que o escoamento é isotérmico, então deve-se calcular o sistema com três variáveis:  $u$ ,  $v$  e  $p$ . A suposição de escoamento permanente nos leva à eliminação das derivadas temporais das equações, pois elas são todas nulas. Além disso, uma vez que as placas (paredes) do escoamento são de extensão infinita, as linhas de corrente são consideradas paralelas e horizontais e a componente  $v$  da velocidade pode ser desconsiderada. Como condições de contorno, foi imposto não deslizamento nas extremidades superior e inferior do escoamento, na face de entrada do domínio foi imposta componente horizontal da velocidade constante e na face de saída considerou-se condição livre. Baseado nessas afirmações, a solução para o escoamento de Poiseuille, já desenvolvido, é dado pela Eq. 6.21:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) (y^2 - Hy). \quad (6.21)$$

No teste numérico realizado considerou-se o domínio com dimensões  $1H \times 10H$ , onde  $H$  é a altura do canal. O perfil de velocidade foi imposto na entrada como horizontal, uniforme e de intensidade  $u = 1 \text{ m/s}$  com  $Re = 50$  baseado na altura  $H$  do canal, assim o decaimento da pressão é obtido como parâmetro de saída do escoamento e deve ser usado como parâmetro de entrada para a solução exata do escoamento (Eq. 6.21). A malha computacional empregada possui 100.000 volumes ( $1.000 \times 100$ ).

A Fig. 45 ilustra o comportamento das variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$  obtidas após o regime se tornar permanente, pode-se notar que todas as variáveis se comportam de acordo com o esperado, ou seja, a componente horizontal de velocidade é máxima no eixo central do canal, a velocidade vertical torna-se nula após o fim da interferência da zona de entrada e a pressão decai de forma linear ao longo do canal.

A Fig. 46 descreve o comportamento da velocidade horizontal em um plano  $(x, y)$  a uma distância de  $8 \text{ m}$  da entrada do canal, distância considerada segura para comparações sem a influência da condição de entrada. Duas curvas podem ser notadas na figura, a primeira descreve a função da solução exata desse problema e a segunda descreve o resultado obtido na simulação realizada, nota-se a grande semelhança entre os perfis parabólicos e a validação do domínio euleriano do presente código.

#### 6.2.2.2 Escoamento em uma cavidade quadrada com tampa deslizante

Ainda com o objetivo de validar o algoritmo do código IMERSGHOST, sem a presença de fronteira imersa, estudou-se outro caso bastante conhecido na literatura, o escoamento bidimensional em uma cavidade quadrada com tampa deslizante, representado pela Fig. 47. Este problema é bastante aplicado para avaliação de métodos numérico e

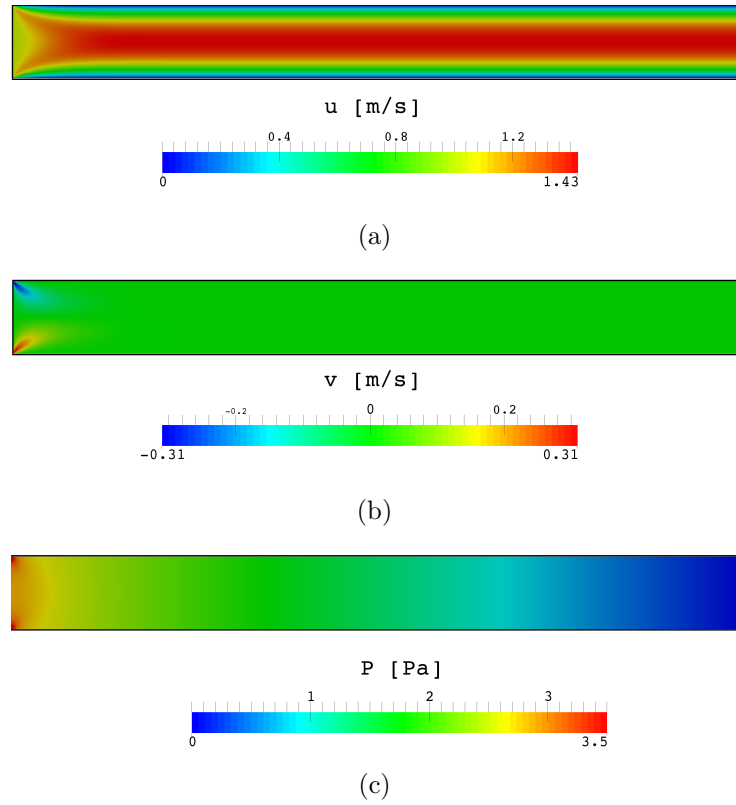


Figura 45 – Campos de variáveis no escoamento de Poiseuille em regime permanente para  $Re = 50$ . (a) Campo da componente horizontal da velocidade; (b) Campo de velocidade vertical; (c) Campo de pressão.

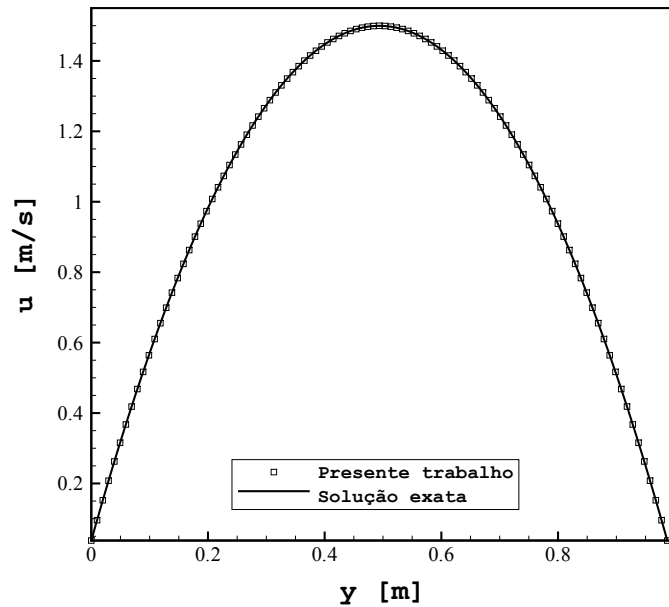


Figura 46 – Perfil da componente horizontal da velocidade em um plano  $(x, y)$  distante 8  $m$  da entrada do canal para o escoamento de Poiseuille.

validação de algoritmos que resolvem as equações de Navier-Stokes (BOTELLA; PEYRET, 1998).

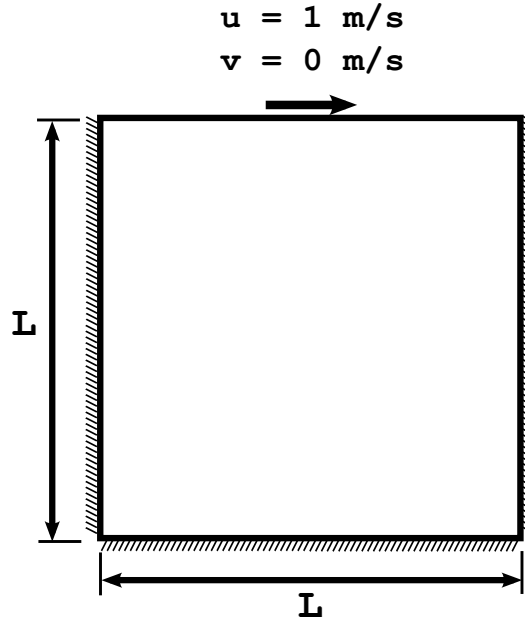


Figura 47 – Representação esquemática: cavidade bidimensional com tampa deslizante.

O escoamento considerado é bidimensional, incompressível, isortérmico e pode ser representado pelas equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (6.24)$$

A partir do modelo matemático são definidas as condições iniciais e condições de contorno para o problema. As condições iniciais definem o primeiro instante do escoamento e deve-se impor um campo de velocidade com divergente nulo que respeite as restrições de incompressibilidade e continuidade. Para o presente caso adotou-se um campo com componentes de velocidade nula nas três direções. Para as condições de contorno foi considerado que todas as paredes são sólidas, nesse sentido, pela hipótese de não deslizamento, a velocidade nas paredes laterais e na parede inferior devem ser nulas. Porém a velocidade na parede superior, por sua vez, é considerada com velocidade não nula com  $u = 1$  e  $v = 0$  m/s. Nos testes realizados, foram abordados três diferentes números de Reynolds para o escoamento  $Re = 100$ ,  $Re = 1.000$  e  $Re = 3.200$  com malhas de  $128 \times 128$ ,  $164 \times 164$

e  $256 \times 256$  volumes, respectivamente. O objetivo foi comparar e analisar os resultados obtidos com resultados de Ghia et al. (1982).

Na Fig. 48 foram realizadas comparações a partir do perfil da componente horizontal de velocidade  $u$ , na linha vertical do centro da cavidade ( $x = 0,5$ ). Nota-se grande similaridade entre os resultados comparados. Contudo, apesar do bom resultado, uma perda de qualidade é notada para maiores números de Reynolds ( $Re = 3.200$ ), este fato deve-se à falta de modelagem para turbulência do presente código, à bidimensionalidade do algoritmo empregado e também ao erro proveniente do método de integração temporal aplicado, método de Euler de primeira ordem.

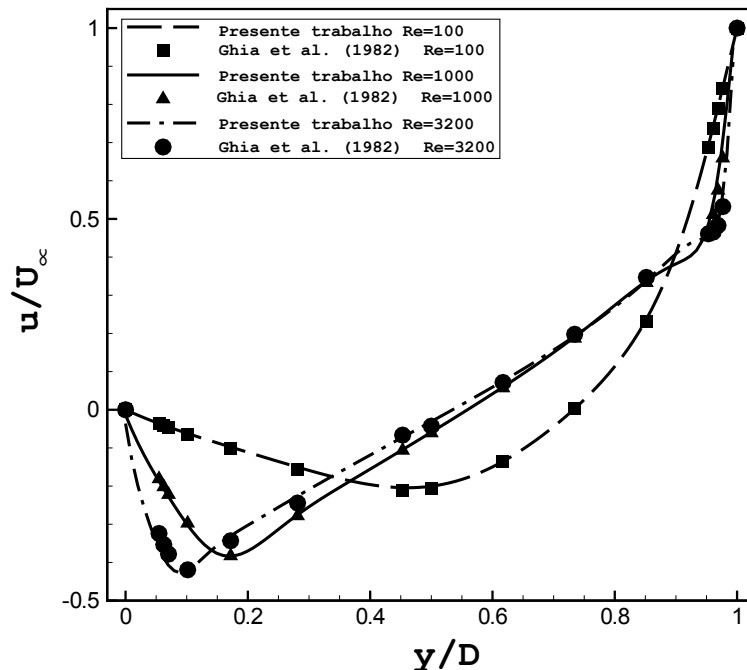


Figura 48 – Comparação dos perfis da componente horizontal de velocidade  $u$  na linha vertical no centro da cavidade ( $x = 0,5$ ) para números de Reynolds  $Re = 100$ ,  $Re = 1.000$  e  $Re = 3.200$ .

A Fig. 49 apresenta comparações qualitativas entre os resultados obtidos com o presente código computacional e os resultados do trabalho de Ghia et al. (1982), pode-se observar linhas de corrente para dois valores de número de Reynolds,  $Re = 1.000$  e  $Re = 3.200$ .

Nota-se na Fig. 49 a grande semelhanças entre os trabalhos comparados, tanto a quantidade de vórtices quanto suas posições são qualitativamente próximas, mostrando que tanto o termo difusivo quanto o termo advectivo do código descrito pelo autor estão se comportando de acordo com o esperado. Pode-se verificar que com o aumento do número de Reynolds de 1.000 para 3.200, na região superior esquerda da cavidade surge uma nova recirculação e os vórtices na região superior da cavidade têm seus tamanhos incrementados devido a uma maior influência do termo advectivo no escoamento, como

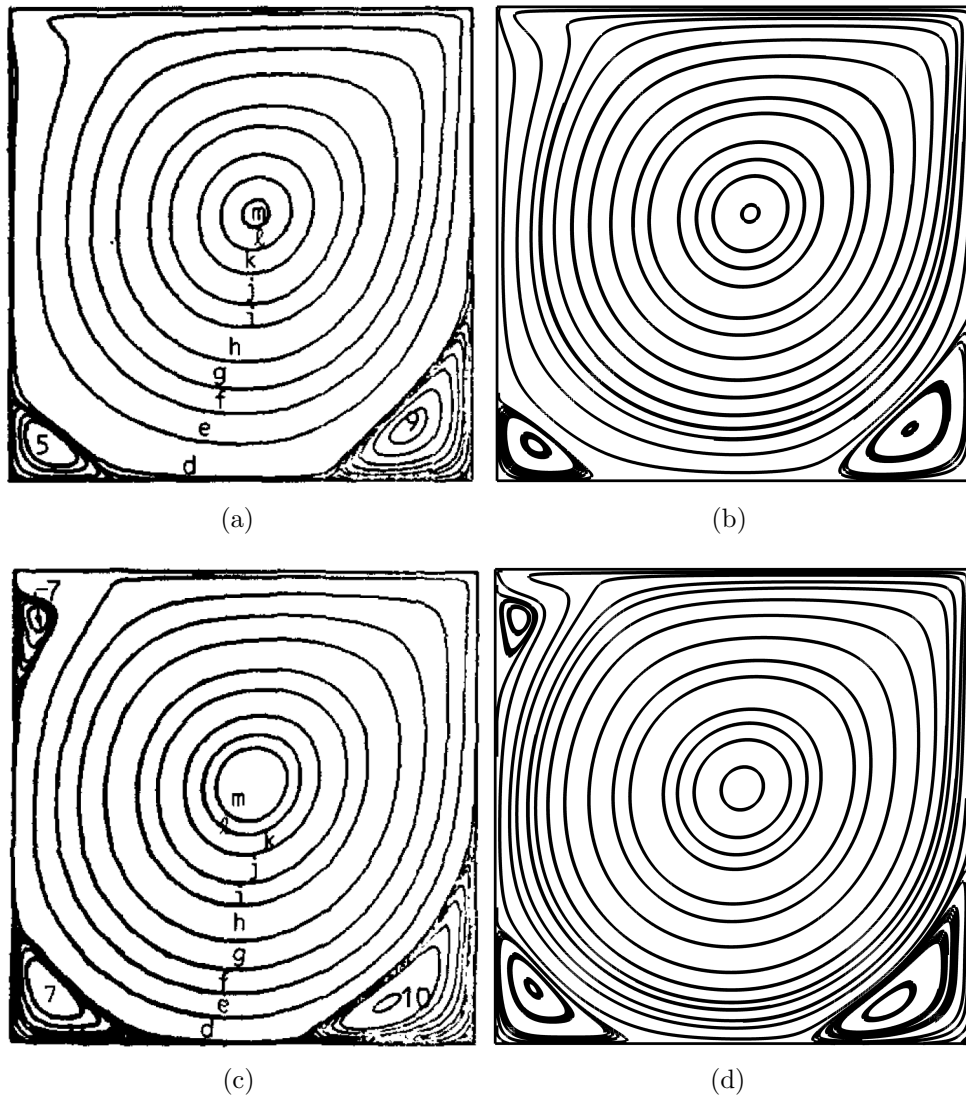


Figura 49 – Linhas de corrente para o escoamento em uma cavidade com tampa deslizante para  $Re = 1.000$ : (a) Ghia et al. (1982); (b) Presente trabalho. Para  $Re = 3.200$ : (c) Ghia et al. (1982); (d) Presente trabalho.

o esperado. Portanto, é possível afirmar que o domínio euleriano do código verificado e validado está de acordo com o comportamento esperado para todos os casos testados, o que confirma a confiança na veracidade dos resultados computados nas seções a seguir, com escoamentos sobre corpos imersos.

### 6.2.3 Escoamento de Poiseuille separado por uma placa

Trata-se novamente nesta seção, similarmente à seção 6.2.2.1, o escoamento de Poiseuille. Mas são considerados dois canais, divididos por uma placa plana representada por uma fronteira imersa. Esses canais não são simétricos e possuem espessuras distintas. As equações para este caso são exatamente as mesmas descritas na seção 6.2.2.1. Com

as equações que modelam o sistema (Eqs. 6.18, 6.19 e 6.20) e a solução do campo da componente horizontal da velocidade (Eq. 6.21), deseja-se agora testar a solução do perfil de velocidade empregando o método da fronteira imersa com volumes fantasmas locais. Para esta finalidade, um corpo imerso é introduzido paralelamente às faces superior e inferior do domínio e a uma distância de  $H/3$  da face inferior, dessa forma evita-se a coincidência da placa representada pela fronteira imersa e os volumes eulerianos representando o domínio de fluido do escoamento. A representação do escoamento é dada pela Fig. 50, onde observa-se o domínio computacional com dimensões  $1H \times 10H$  e a placa horizontal posicionada a uma altura de  $y = H/3$ .

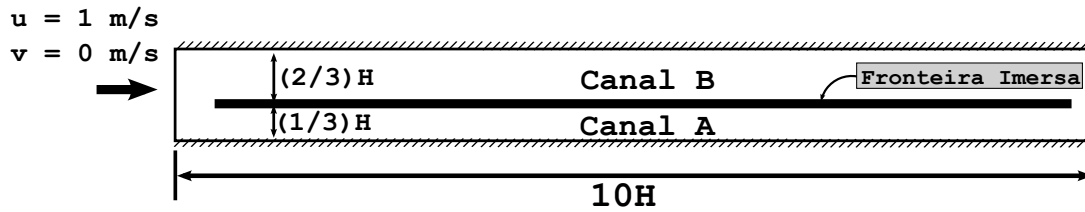


Figura 50 – Representação esquemática do escoamento de Poiseuille: laminar, viscoso totalmente desenvolvido em um canal infinito, onde fronteira imersa age como placa plana.

Para representar a fronteira imersa como uma placa de espessura infinitamente pequena, a malha gerada é constituída de tal forma que sua altura representa  $1/20$  a dimensão de um volume euleriano, como pode ser notado na Fig. 51, onde vê-se uma aproximação do detalhe das malhas no local em destaque.

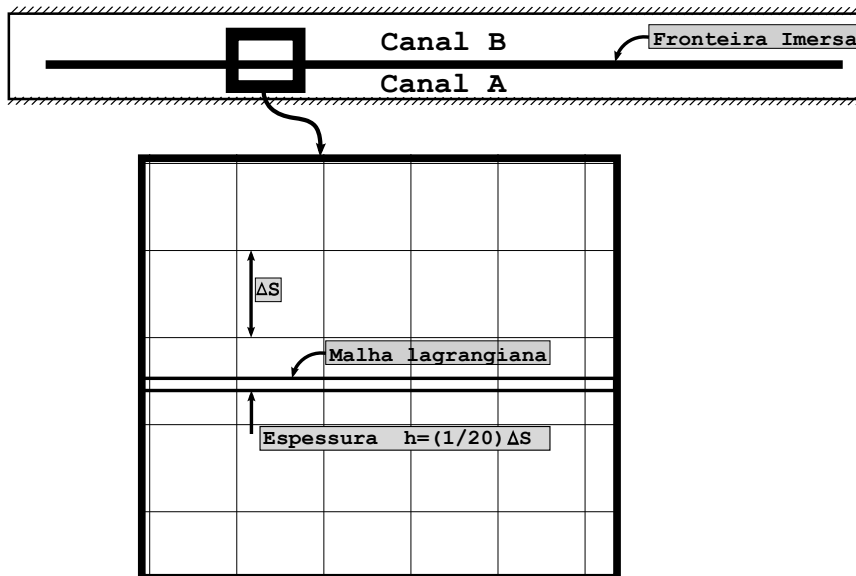


Figura 51 – Detalhe evidenciando a relação de dimensões da malha lagrangiana em relação à malha euleriana.

A solução exata (Eq. 6.21) será utilizada para computar o erro numérico presente na solução do escoamento com fronteira imersa fantasma local. Como condições de contorno, foi imposto não deslizamento nas extremidades superior e inferior do escoamento, na face de entrada do domínio foi imposta velocidade horizontal constante e na face de saída considerou-se condição livre. Na fronteira imersa, aplicou-se a condição de Dirichlet considerando a hipótese de não-deslizamento das moléculas de fluido naquela região.

No teste numérico realizado considerou-se o domínio com dimensões  $1H \times 10H$ , o perfil de velocidade foi imposto na entrada como horizontal, uniforme e de intensidade  $u = 1 \text{ m/s}$  com  $Re = 50$  baseado na altura  $H$  do canal. Assim o decaimento da pressão é obtido como parâmetro de saída do escoamento e deve ser usado como parâmetro de entrada para a solução exata do escoamento (Eq. 6.21). A malha computacional empregada é uniforme e possui 100.000 volumes ( $1.000 \times 100$ ).

A Fig. 52 ilustra o comportamento das variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$  obtidas após o regime se tornar permanente, pode-se notar que todas as variáveis agem de acordo com o esperado, ou seja, a velocidade horizontal é máxima no eixo central de cada canal, a velocidade vertical torna-se nula após o fim da interferência da zona de entrada e a pressão decai de forma linear ao longo do canal.

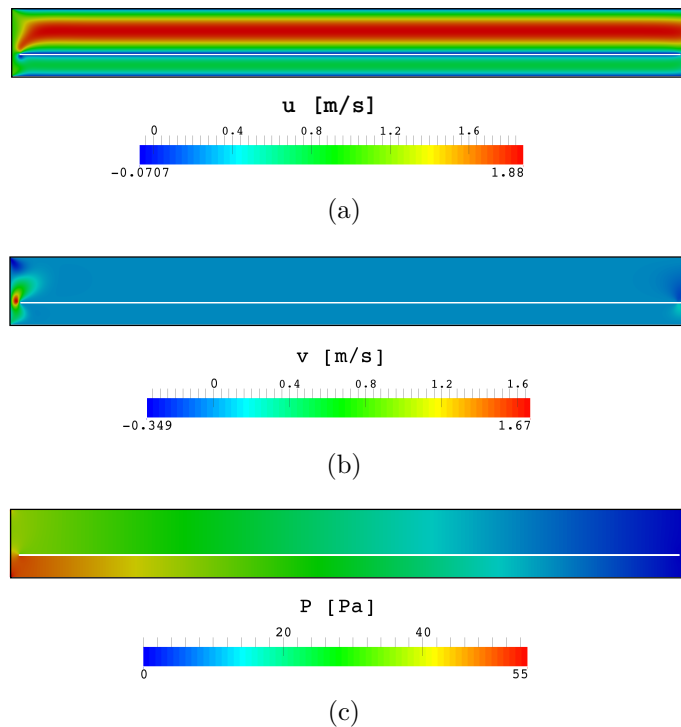


Figura 52 – Campos de variáveis no escoamento de Poiseuille com fronteira imersa em regime permanente para  $Re = 50$ . (a) Campo da componente horizontal da velocidade; (b) Campo de velocidade vertical; (c) Campo de pressão.

Nota-se, ainda na Fig. 52, que o decaimento de pressão no canal de menor espessura

é maior, pois na saída de ambos os canais a pressão é uniforme, no entanto, na entrada do domínio o canal A possui uma maior elevação de pressão devido à maior restrição do escoamento em sua entrada.

Os perfis de pressão no eixo horizontal central dos canais A e B são observados na Fig. 53. Nota-se nesta figura que no final do domínio o nível de pressão é exatamente o mesmo para ambos os canais, como já foi evidenciado na Fig. 52.

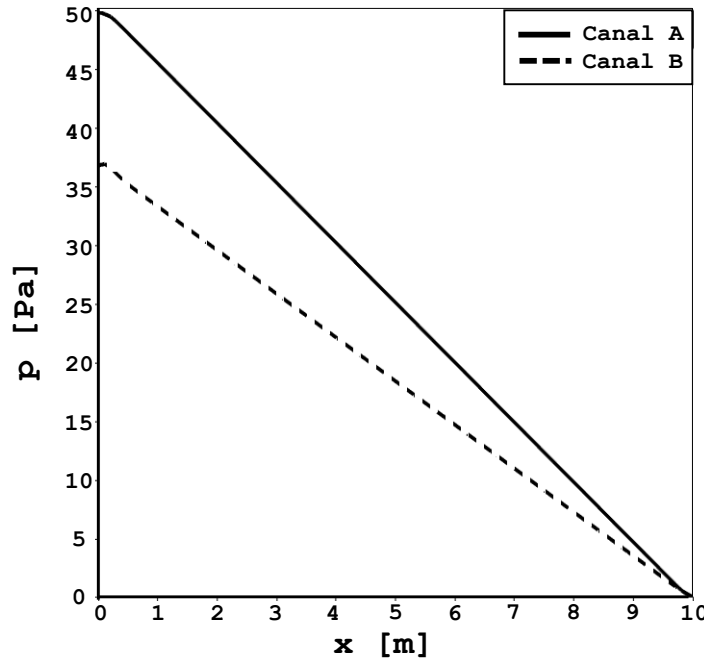


Figura 53 – Decaimento da pressão no escoamento de Poiseuille nos canais A e B detalhados na Fig. 50.

A Fig. 54 descreve o comportamento da velocidade horizontal em um plano  $(x, y)$  a uma distância de 8 m da entrada do canal, distância considerada segura para comparações sem a influência da condição de entrada. Há duas curvas nesta figura, a primeira descreve a solução exata desse problema (Eq. 6.21) e a outra é obtida como resposta da simulação realizada, nota-se a grande semelhança entre os perfis parabólicos e a validação do código com presença da fronteira. A grande motivação para a implementação do método de fronteira imersa de volumes fantasmas locais é a sua capacidade de tratar descontinuidades no campo de velocidade e pressão, uma necessidade básica para tratar escoamentos sobre corpos com geometrias esbeltas ou quinas agudas, com foco nessa característica pode-se notar a descontinuidade na derivada do perfil de velocidade nas vizinhanças da placa da Fig. 54, esse resultado mostra que corpos com espessuras bastante finas podem ser tratados pelo método aqui apresentado. Nota-se também na Fig. 54-b uma aproximação do perfil na região da fronteira imersa. Outra demonstração da capacidade de tratar descontinuidades no campo das soluções das variáveis do problema é dada na Fig. 55, nela é mostrada

o perfil de pressão no planos  $(x, y)$  a uma distância de 3 e 7 m da entrada do domínio, nota-se que, como esperado, não há variação de pressão dentro de um mesmo canal, mas na interface entre os dois escoamentos há uma grande descontinuidade em seu campo, característica possível devido ao método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais.

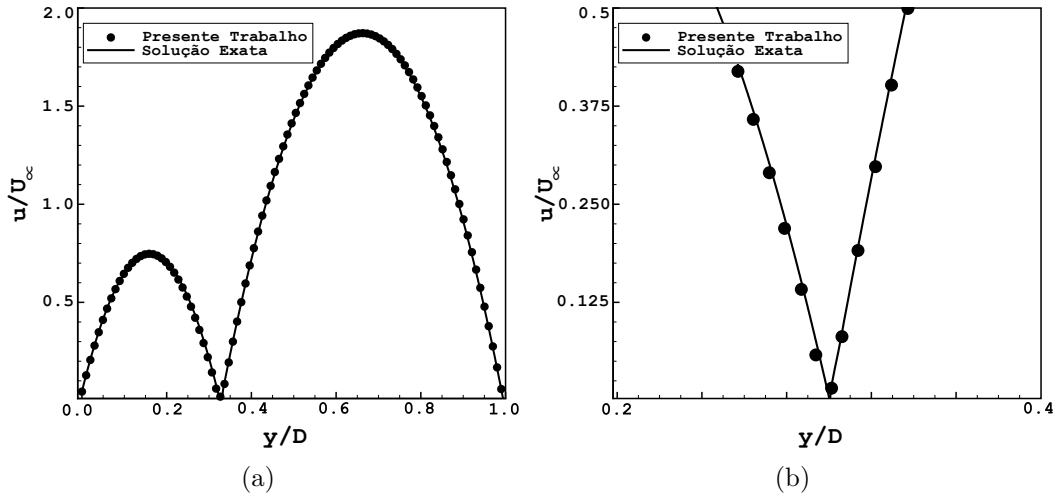


Figura 54 – Perfil da componente horizontal da velocidade em um plano  $(x, y)$  distante 8 m da entrada do canal para o escoamento de Poiseuille com presença de um corpo imerso representando uma placa plana de espessura infinitamente pequena. (a) Perfil de velocidade em toda a seção; (b) Perfil de velocidade aproximado na placa imersa.

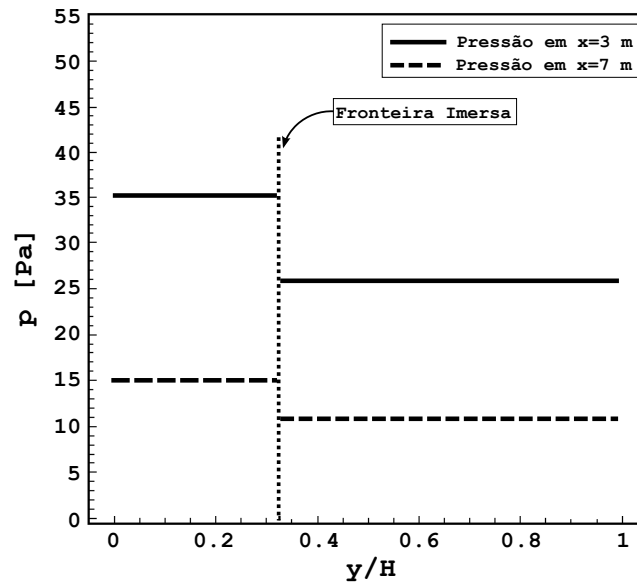


Figura 55 – Perfil de pressão em dois planos  $(x, y)$  a uma distância de 3 e 7 m da entrada do domínio para o escoamento de Poiseuille com presença de um corpo imerso representando uma placa plana de espessura infinitamente pequena.

A Tab. 3 compara quantitativamente os resultados apresentados com a solução exata do escoamento de Poiseuille. Nela é comparada a velocidade máxima e a tensão cisalhante na parede da placa plana vertical que divide os dois escoamentos. Pode-se notar que os erros são baixos e são atribuídos a uma combinação do método de discretização das equações de Navier-Stokes, ao fato do polinômio considerado para o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais (seção 5) ser de terceiro grau, o que pode acarretar uma interpolação com comportamento levemente diferente do real perfil da camada limite de um escoamento sobre uma placa plana e também ao fato da placa representada pela fronteira imersa não possuir espessura nula, como foi considerado para o cálculo exato da solução.

	Valor exato	Valor calculado	Erro relativo
Velocidade máxima ( $m/s$ )			
Canal A	0.7536	0.7458	1.0 %
Canal B	1.8732	1.8678	0.3 %
Tensão cisalhante na parede ( $N/m^2$ )			
Canal A	8.518	8.408	1.29 %
Canal B	12.424	12.312	0.87 %

Tabela 3 – Comparação quantitativa do escoamento de Poiseuille com fronteira imersa entre o resultado obtido pelo autor e a solução exata.

A fim de comparar o presente resultado com o método de múltipla imposição da força, um método de imposição indireta e difusa das condições de contorno, realizou-se também a simulação do caso do escoamento de Poiseuille separado por uma placa plana para este método. A Fig. 56 mostra a comparação entre os métodos apresentados para os perfis de pressão no planos  $(x, y)$  a uma distância de 3 e 7  $m$  da entrada do domínio, similar à Fig. 55. Nota-se irregularidade no perfil de pressão do método *MDF* nas proximidades da placa plana, este comportamento deve-se à interferência de um domínio (canal) sobre o outro em métodos de distribuição da força. Este comportamento é responsável, por exemplo, pelos resultados incorretos registrados na seção 6.1.4, onde foi constatada a geração de vórtices não físicos e descolamento prematuro da camada limite no perfil NACA0012.

#### 6.2.4 Escoamento sobre um placa plana vertical

Nesta seção, o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais é aplicado para simular o escoamento sobre uma placa plana em posição vertical de comprimento  $D$  e espessura infinitamente pequena, com tratamento de malha realizado da mesma forma da

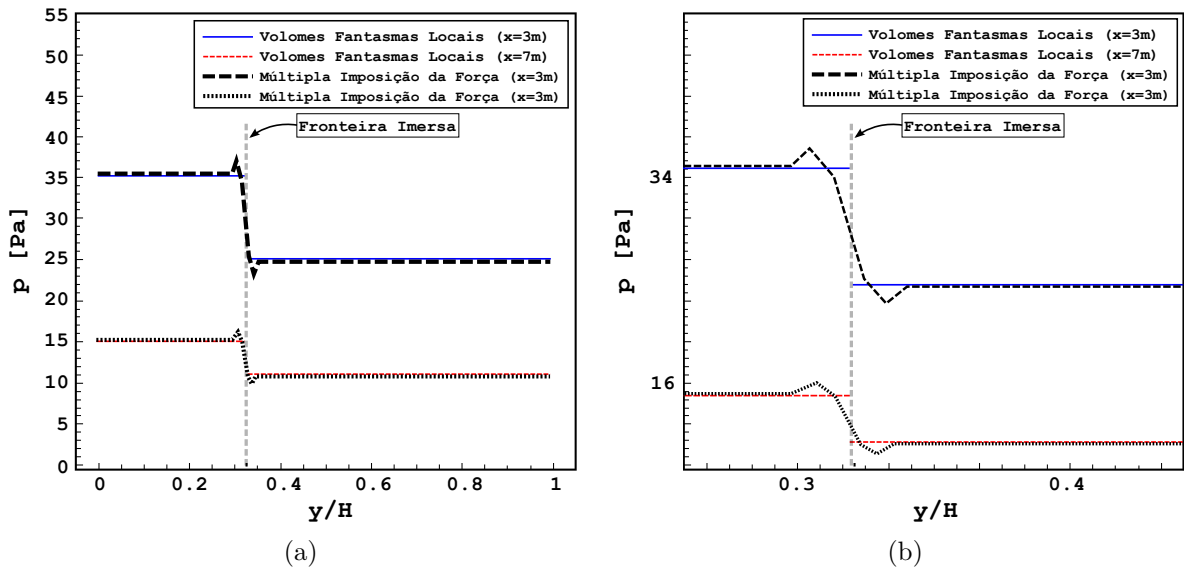


Figura 56 – Comparação entre os métodos de fronteira imersa de múltipla imposição da força e volumes fantasmas locais do perfil de pressão em dois planos  $(x, y)$  a uma distância de 3 e 7  $m$  da entrada do domínio para o escoamento de Poiseuille com presença de um corpo imerso representando uma placa plana de espessura infinitamente pequena. (a) Perfil em todo o domínio na direção  $x$ ; (b) vista aproximada na região da placa vertical (fronteira imersa).

seção 6.2.3 e evidenciado na Fig. 51. O esquema de configuração do escoamento é ilustrado na Fig. 57, onde é ilustrada a placa vertical posicionada no domínio numérico.

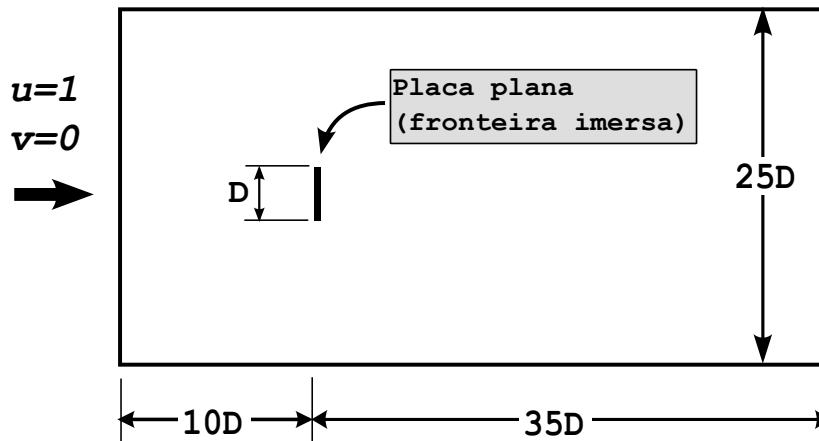


Figura 57 – Representação esquemática do escoamento laminar sobre uma placa plana de comprimento  $D$  e espessura infinitamente pequena.

A performance do método é apresentada para um número de Reynolds  $Re = 126$  baseado no comprimento vertical da placa e na velocidade imposta no perfil de entrada  $u = 1$   $m/s$ . Nesse escoamento, após determinado intervalo de tempo, instabilidades laminares são geradas. Devido a este fator, as comparações realizadas são relativas a uma evolução

temporal.

O domínio computacional pode ser descrito da seguinte maneira: a placa é localizada na posição  $(x, y) = (0, 0)$ . Um escoamento uniforme de velocidade horizontal  $u = 1 \text{ m/s}$  é imposto na posição  $x = -10D$ , as dimensões do domínio são  $25D \times 45D$ , representando a altura e o comprimento nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. A malha empregada possui 1.125.000 volumes cartesianos. As condições de contorno nas faces superior e inferior do domínio são tratadas como condição livre, a saída do domínio também é tida como condição livre e com pressão nula. A condição inicial é escoamento uniforme sem perturbações.

Nas análises quantitativas do escoamento, é possível extrair o coeficiente de arrasto em função do tempo, este coeficiente é definido como:

$$C_D(t) = \frac{F_D(t)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 D}, \quad (6.25)$$

onde  $F_D(t)$  é a força de arrasto.

A Fig. 58 mostra a comparação do perfil da componente horizontal da velocidade no eixo horizontal de simetria a jusante da placa plana no tempo adimensional  $tU_\infty/D = 1.0$ . A comparação foi feita com o trabalho de Berthelsen e Faltinsen (2007) e pode-se notar que as duas curvas estão bastante próximas, com boa semelhança na posição da zona de recirculação no eixo  $x$ , definida como a região com velocidade negativa.

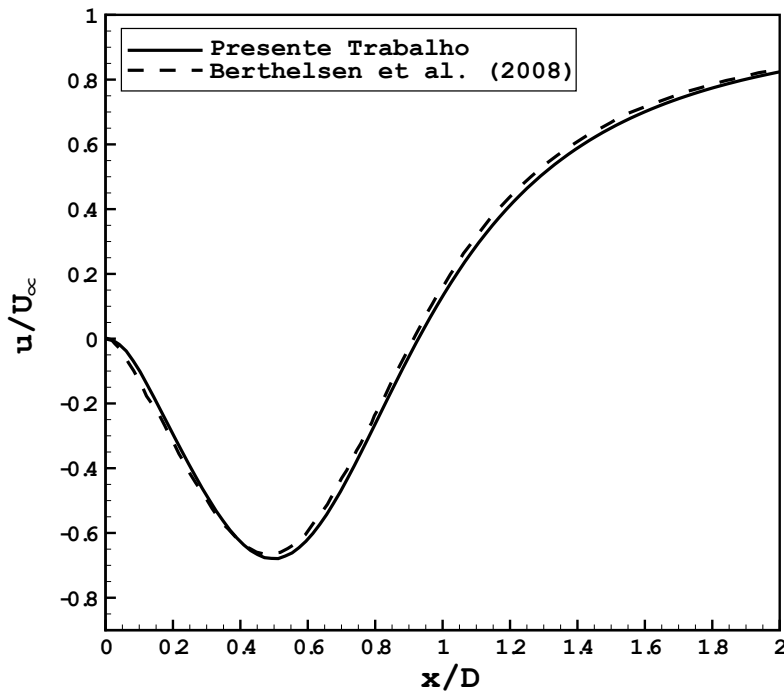


Figura 58 – Comparação do perfil de velocidade normalizada no eixo horizontal de simetria a jusante da placa plana no tempo adimensional  $tU_\infty/D = 1.0$ .

Como já dito anteriormente neste capítulo, o presente escoamento possui carácter transitório com o seguinte desenvolvimento temporal: inicialmente, por um breve intervalo, o fluido contorna a placa de forma laminar e sem descolamento, em seguida ocorre o descolamento nas extremidades superior e inferior da placa de forma simétrica gerando duas recirculações que se desenvolvem e aumentam seu tamanho em função do tempo e por fim, devido à dispersividade do método *CDS* e à não linearidade das equações, há a geração de instabilidades que eliminam a simetria instantânea do escoamento e produz desprendimento de vórtices. As Figs. 59, 60 e 61 ilustram a avanço temporal como descrito acima. São representados os campos instantâneos de vorticidade, pressão e linhas de corrente, respectivamente, para os instantes adimensionais  $tU_\infty/D = 0.1, 3.1, 9.2$  e  $20.6$ .

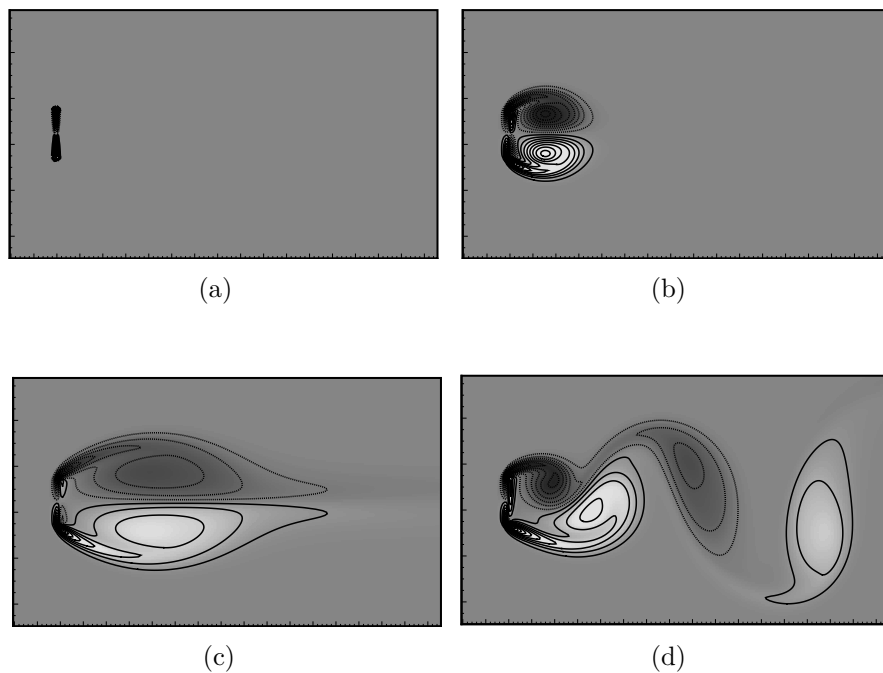


Figura 59 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, do campo instantâneo de vorticidade do escoamento com iso-contornos sobre uma placa plana para  $Re = 126$ : (a)  $tU_\infty/D = 0.1$ ; (b)  $tU_\infty/D = 3.1$ ; (c)  $tU_\infty/D = 9.2$ ; (d)  $tU_\infty/D = 20.6$ .

Dada a característica transiente do escoamento, pode-se definir o avanço temporal do comprimento da bolha de recirculação computando a distância do ponto de recolamento do escoamento pelo tempo adimensional, esse comportamento é apresentado na Fig. 62, o resultado do presente trabalho está de acordo com o resultado experimental de Tanji e Honji (1971) até, aproximadamente, o tempo adimensional de  $tU_\infty/D = 4$ , após esse instante o modelo numérico apresentado não predita corretamente esse avanço temporal, mas continua bastante próximo dos resultados numéricos de Berthelsen e Faltinsen (2007) e Koumoutsakos e Shiels (1996). De acordo com Koumoutsakos e Shiels (1996), essa discrepância entre os resultados numéricos e experimental pode ser correlacionado a efeitos

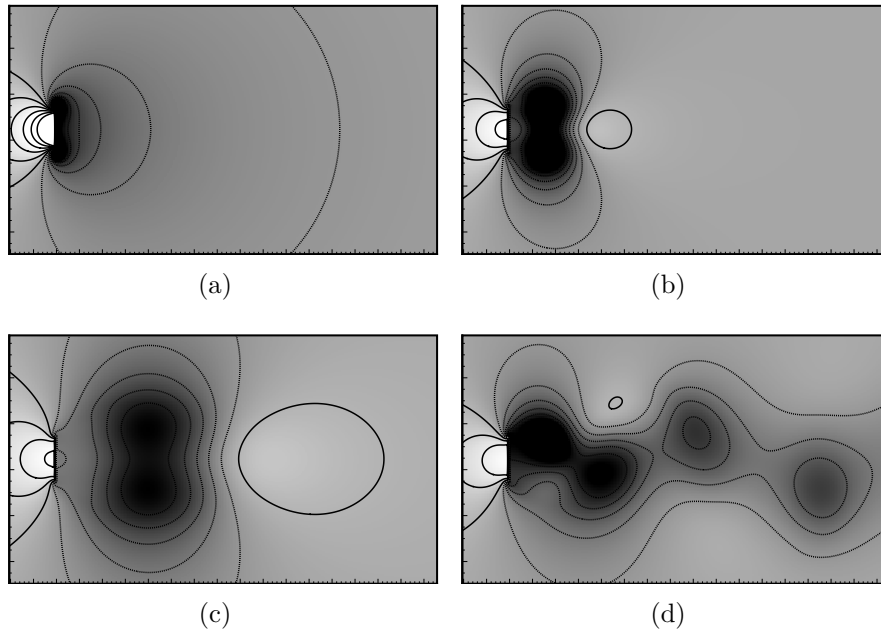


Figura 60 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, do campo instantâneo de pressão iso-contornos do escoamento sobre uma placa plana para  $Re = 126$ . (a)  $tU_\infty/D = 0.1$ ; (b)  $tU_\infty/D = 3.1$ ; (c)  $tU_\infty/D = 9.2$ ; (d)  $tU_\infty/D = 20.6$ .

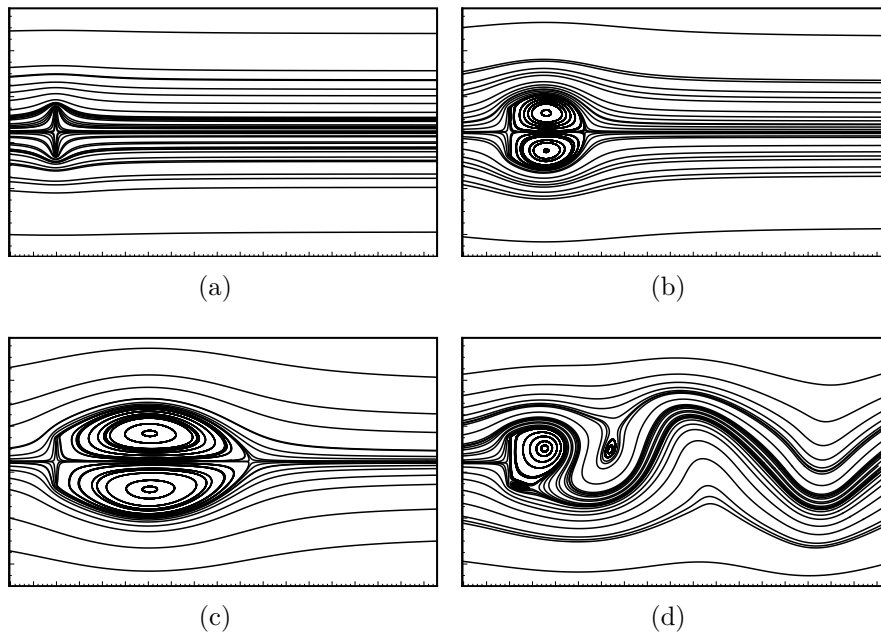


Figura 61 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, das linhas de corrente do escoamento sobre uma placa plana para  $Re = 126$ . (a)  $tU_\infty/D = 0.1$ ; (b)  $tU_\infty/D = 3.1$ ; (c)  $tU_\infty/D = 9.2$ ; (d)  $tU_\infty/D = 20.6$ .

tridimensionais e perda de simetria nos experimentos conduzidos.

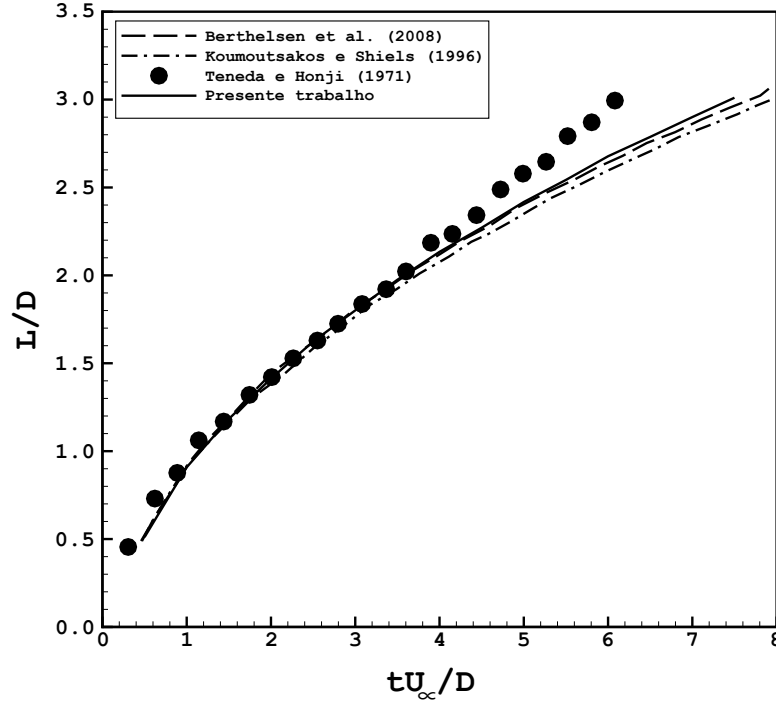


Figura 62 – Comparação da evolução temporal do comprimento da bolha de recirculação  $L$  para o escoamento sobre uma placa plana a  $Re = 126$ .

As Figs. 63-a e b mostram, respectivamente, a pressão normalizada ou coeficiente de pressão (Eq. 6.26) e a distribuição da vorticidade na superfície da placa a jusante e a montante no escoamento no tempo adimensional  $tU_\infty/D = 1.0$ , nota-se que nas bordas inferior e superior da placa há uma menor concordância entre os resultados do presente trabalho e de Berthelsen e Faltinsen (2007), este fato pode ser atribuído à malha empregada no escoamento, no trabalho de Berthelsen e Faltinsen (2007) foi utilizada malha adaptativa com alto nível de refinamento localizado nas proximidades da placa.

$$C_p = \frac{(p - p_\infty)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}, \quad (6.26)$$

onde  $C_p$  é o coeficiente de pressão normalizada e  $p_\infty$  é a pressão de referência dada por  $p_\infty = 0$ .

Para demonstrar o potencial do método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais para tratar descontinuidades nos campos das variáveis do escoamento, a Fig. 64 mostra o valor da pressão na linha horizontal central do escoamento em uma região próxima à placa, nesta figura é evidenciado o salto da pressão entre o escoamento a montante e a jusante da placa, este comportamento é possível devido à independência de uma região do escoamento em relação às regiões que estão separadas pela placa ou por um corpo esbelto, característica que não pode ser encontrada em método de fronteira imersa que não tratam a descontinuidade do campo de velocidade, como por exemplo, o método de

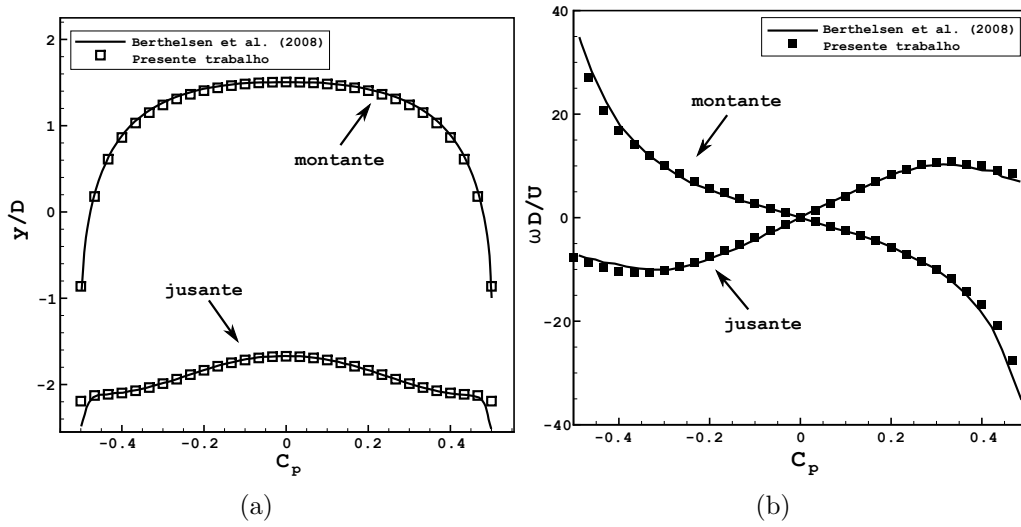


Figura 63 – Comparação da distribuição de variáveis na superfície da placa plana no tempo adimensional  $tU_\infty/D = 1.0$ . (a) Distribuição da pressão normalizada; (b) Distribuição da vorticidade normalizada.

múltipla imposição da força.

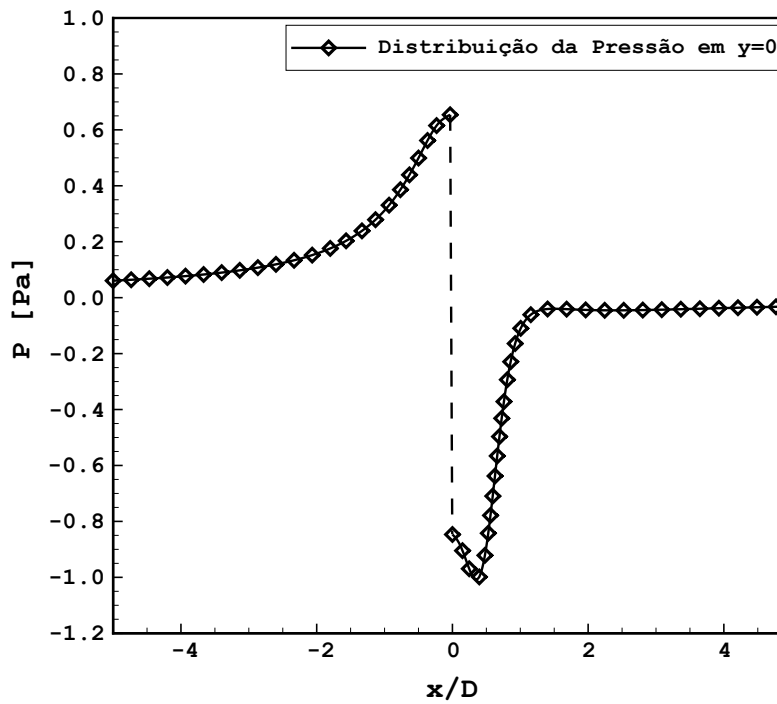


Figura 64 – Perfil de pressão na linha horizontal central do domínio cortando o corpo imerso.

### 6.2.5 Escoamento sobre um cilindro entre duas placas planas

Casos de cilindros próximos a superfícies sólidas são bastante comuns em aplicações práticas de mecânica dos fluidos. Há na literatura uma vasta quantidade de estudos envolvendo os fenômenos ocorrentes no escoamento sobre cilindros isolados, porém casos envolvendo paredes próximas a cilindros são mais escassos. A diferença na dinâmica do escoamentos entre cilindros isolados e cilindros próximos de superfícies é basicamente a influencia das paredes sobre o campo de velocidade e pressão, induzindo um novo comportamento para o fluido. De maneira geral, de acordo com Sintu e Sinhamahapatra (2010), a presença de uma parede sólida altera a estrutura dinâmica do escoamento em três fatores: (1) cisalhamento prévio no escoamento, restrição da passagem do fluido e consequente aumento de velocidade em relação a um cilindro isolado e interação dos vórtices produzidos pela parede com aqueles produzidos pelo cilindro. Consequentemente, modificações no escoamento podem ser notadas com a variação da distância da parede sólida do cilindro, ou seja, aumento da espessura do canal plano. Vários autores trabalharam na compreensão dos efeitos gerados nesse tipo de escoamento, entre eles pode-se citar Bearman e Zdravkovich (1978), Buresti e Lanciotti (1979) e Angrilli et al. (1982). De maneira resumida, os trabalho citados mostraram que a presença de paredes modifica as forças agindo sobre o cilindro e a frequência de desprendimento de vórtices (número de Strouhal).

No presente trabalho, foi simulado o escoamento bidimensional incompressível sobre um cilindro posicionado no centro de um canal composto de duas placas planas variando sua altura (distância entre as placas). Nesta simulação, o cilindro foi representado por uma fronteira imersa com volumes fantasmas locais, comparações são realizadas com o trabalho numérico de Sintu e Sinhamahapatra (2010), onde foi empregada uma simulação numérica em volumes finitos com malha não estruturada e volumes triangulares.

O diagrama esquemático do escoamento é ilustrado na Fig. 65. A condição de contorno na entrada do canal é um perfil parabólico para a velocidade horizontal, dado por  $u_{in} = u_o \left[ 1 - 4 \left( y/H \right)^2 \right]$  onde  $u_o$  e  $H$  são a velocidade no ponto médio do escoamento e a distância entre as placas planas, respectivamente. As simulações são realizadas para dois valores do número de Reynolds  $Re = 45$  e  $Re = 100$  baseados na velocidade  $u_o$  e no diâmetro  $D$  do cilindro. Para diferentes testes, também variou-se a relação da altura do canal pelo diâmetro do cilindro, relação nomeada de altura normalizada do canal ( $H/D$ ). As relações testadas foram  $H/D = 2, 3, 4$  e  $5$ . A malha computacional cartesiana é composta de 74.000 volumes quando  $H/D = 2$  e 148.000 volumes quando  $H/D = 4$ .

#### 6.2.5.1 $Re = 45$

O escoamento a  $Re = 45$  atinge regime permanente com o avanço temporal, não há emissão de vórtices e duas recirculações a jusante do cilindro são geradas. A Fig. 66

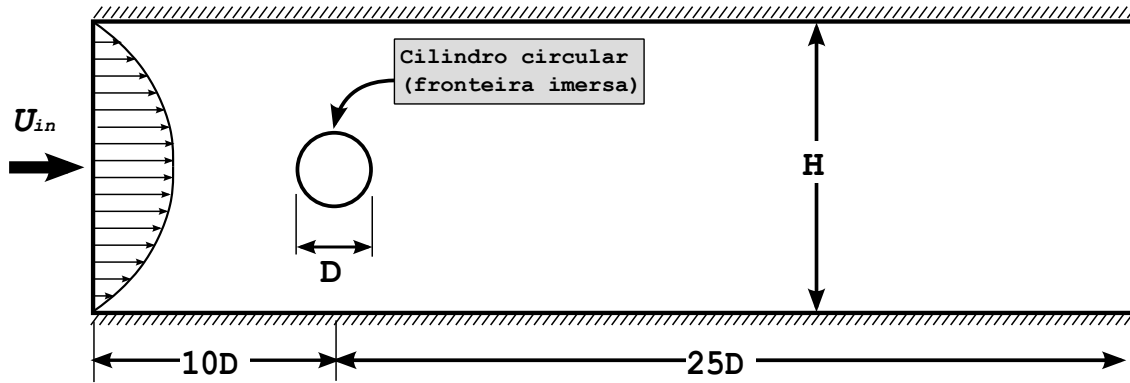


Figura 65 – Representação esquemática do escoamento laminar sobre um cilindro entre duas placas planas.

mostra as linhas de corrente do escoamento para  $Re = 45$  e para as duas relações de medida ( $H/D = 2$  e  $4$ ).

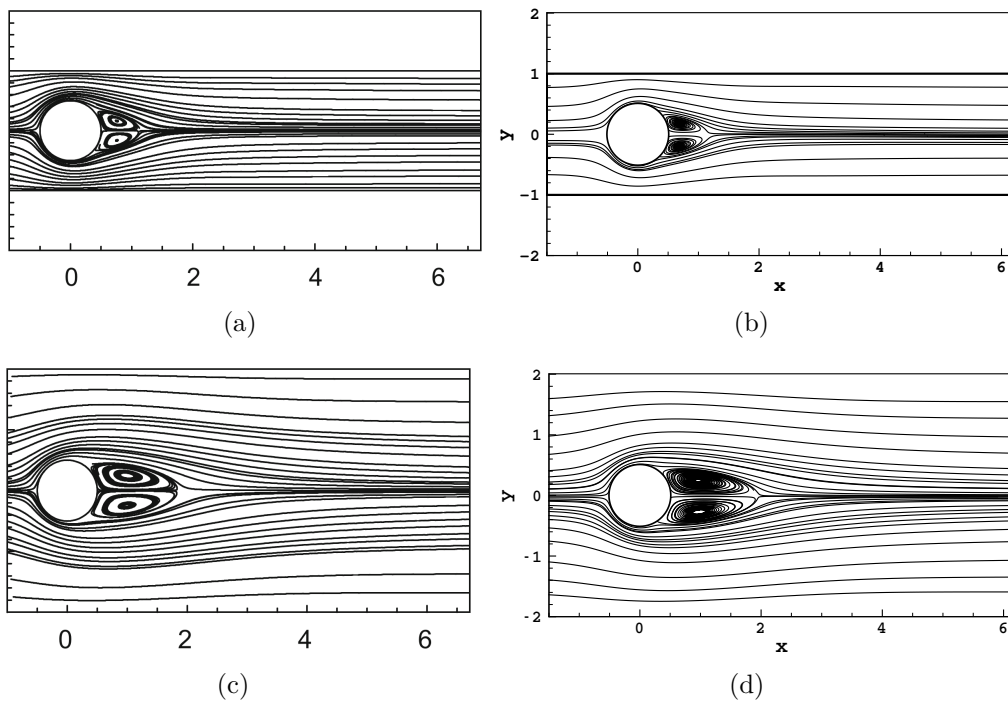


Figura 66 – Visualização ampliada, nas proximidades da fronteira imersa, das linhas de corrente do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a  $Re = 45$ . Relação  $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação  $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho.

Ainda na Fig. 66, comparações qualitativas entre os resultados do presente trabalho e os resultados de Sintu e Sinhamahapatra (2010) são realizadas. Pode-se observar que, para ambos, as recirculações são menores quando o cilindro está mais próximo das paredes e aumenta com o aumento da distância  $H/D$ . Esse fenômeno deve-se ao fato de que para

uma menor altura do canal, maior é a razão de bloqueio do escoamento e maior é a energia cinética do fluido próximo ao cilindro, como já explicado anteriormente, consequentemente as zonas de separação atrás do cilindro tornam-se menores.

A Fig. 67 mostra o comportamento do ponto de separação, em termos de ângulo medido em sentido horário a partir do ponto de estagnação na frente do cilindro, com o aumento da altura  $H/D$  do canal. Como já discutido, nota-se que a medida que a altura normalizada do canal aumenta o ângulo de separação diminui, fato explicado pela interferência da parede na dinâmica do escoamento sobre um cilindro circular.

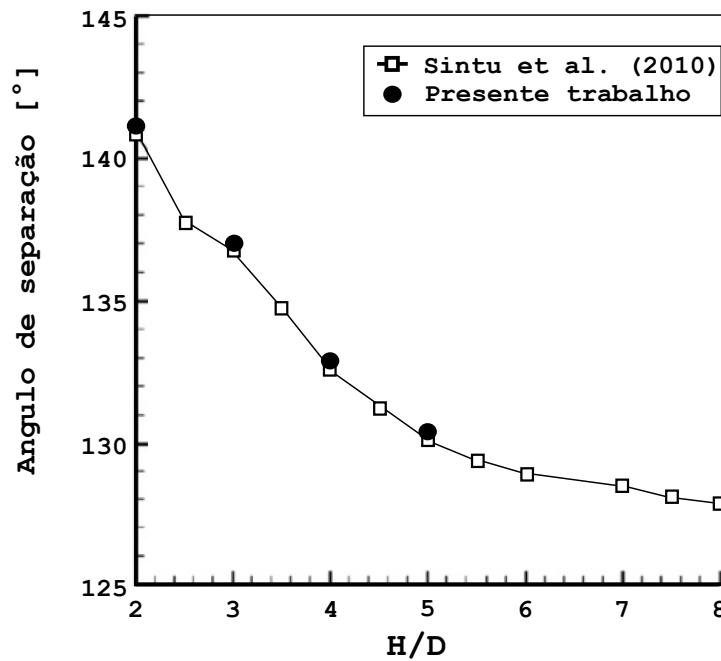


Figura 67 – Comparação do ponto de separação em função do comprimento  $H/D$ , para  $Re = 45$ , entre os resultados de Sintu e Sinhamahapatra (2010) e o presente trabalho.

A Fig. 68 mostra a variação do comprimento da zona de recirculação, medida realizada entre ponto central do cilindro até a região de reencontro das linhas de corrente no escoamento. O comprimento da recirculação observado aumenta de maneira aproximadamente linear com o aumento da altura  $H/D$  do canal. Esse comportamento colabora para o entendimento da influência da parede próxima ao cilindro e o bloqueio gerado ao escoamento.

O campo de vorticidade é mostrado na Fig. 69. Pode-se notar a partir de sua visualização que o escoamento tem um comportamento simétrico em relação ao eixo horizontal central, nota-se o comportamento evidenciado nas Figs. 66 e 67, onde a zona de recirculação diminui com a diminuição da altura normalizada do canal, pois com o aumento dessa altura a influência da superfície tende a diminuir.

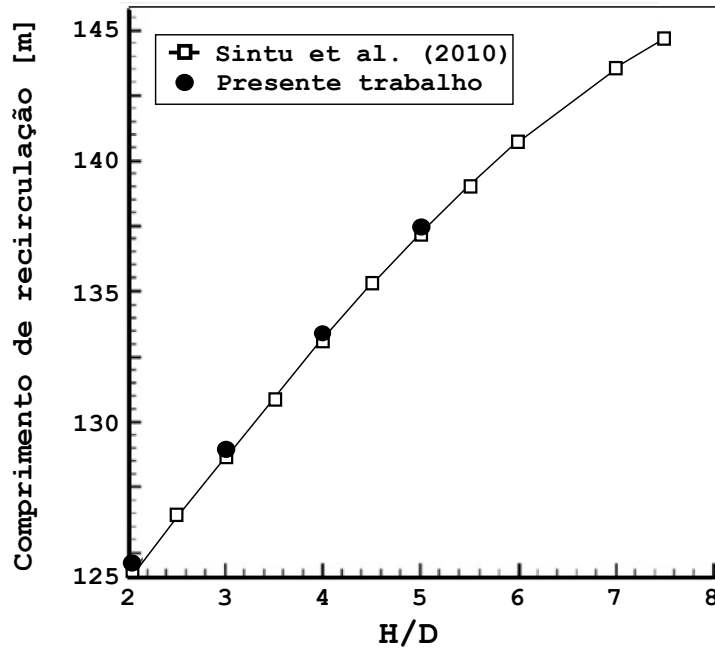


Figura 68 – Comparação do comprimento da zona de recirculação, para  $Re = 45$ , entre os resultados de Sintu e Sinhamahapatra (2010) e o presente trabalho.

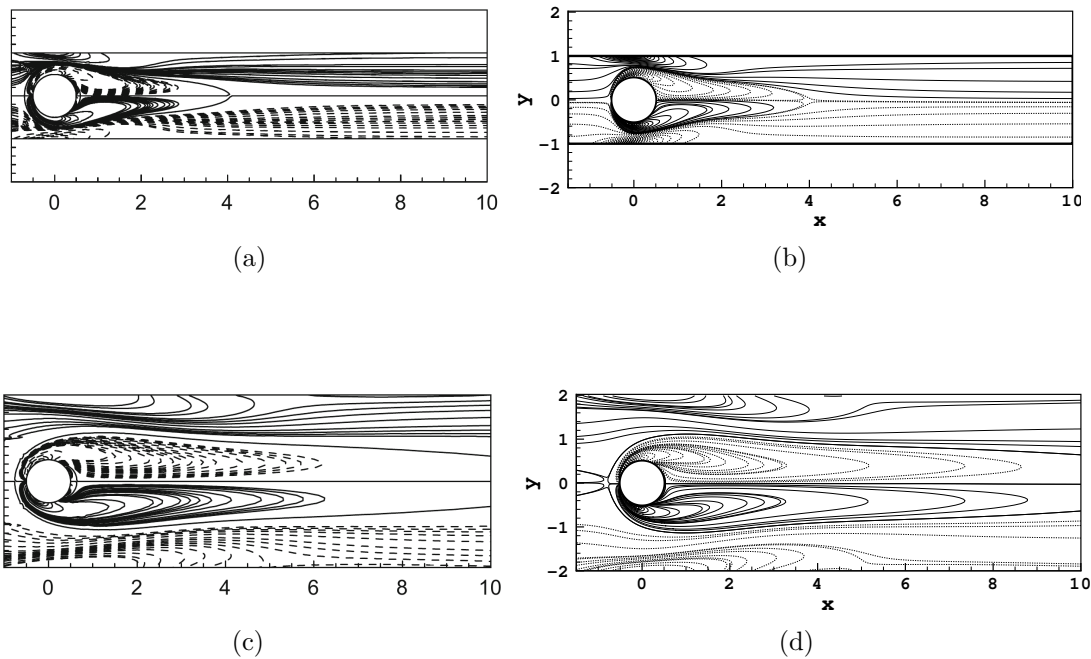


Figura 69 – Visualização ampliada do campo de vorticidade do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a  $Re = 45$ . Relação  $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação  $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho.

6.2.5.2  $Re = 100$ 

Nas simulações realizadas, o escoamento a  $Re = 100$  pode atingir tanto o regime permanente quanto permanecer em regime transiente com o avanço temporal, com dependência da altura normalizada do canal. A Fig. 70 mostra as linhas de corrente do escoamento para  $Re = 100$  e para as duas relações de medida ( $H/D = 2$  e  $H/D = 4$ ). Ainda na Fig. 70, comparações qualitativas entre os resultados do presente trabalho e os resultados de Sintu e Sinhamahapatra (2010) são realizadas, pode-se observar que, para ambos, o regime para uma distância normalizada  $H/D = 2$  é permanente e possui duas recirculações a jusante do cilindro, já para a altura normalizada  $H/D = 4$ , diminui-se a influência das paredes sobre o escoamento e instabilidades são geradas com emissão de vórtices e criação de esteira de Von Karman. Esse fenômeno deve-se ao fato de que para uma menor altura do canal, maior é a razão de bloqueio do escoamento e maior é a energia cinética do fluido próximo ao cilindro levando o ponto de descolamento para posições mais a montante do escoamento, conseqüentemente para menores alturas do canal o escoamento torna-se mais estável.

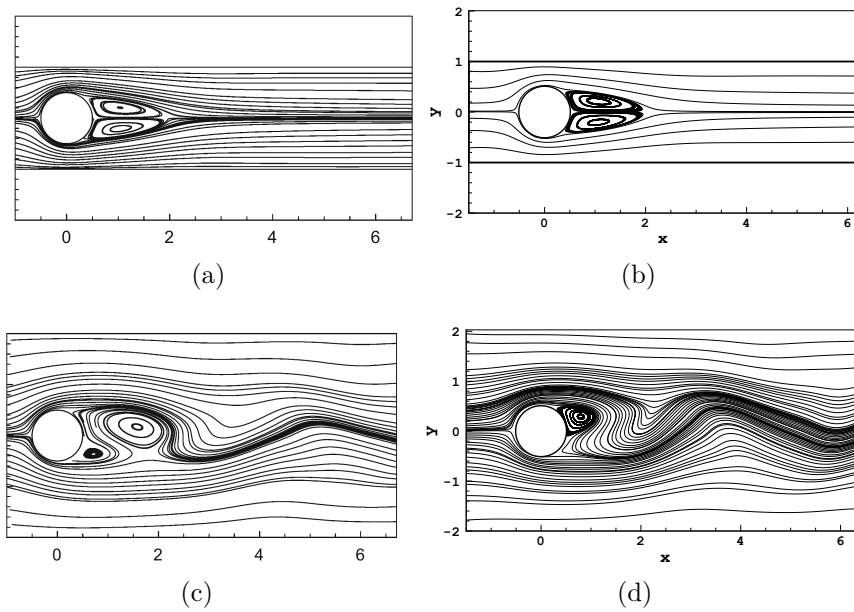


Figura 70 – Visualização ampliada das linhas de corrente do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a  $Re = 100$ . Relação  $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação  $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho.

O campo de vorticidade é mostrado na Fig. 69. Pode-se notar a partir de sua visualização que para  $H/D = 2$  o escoamento ainda tem um comportamento simétrico em relação ao eixo horizontal central, este fato está de acordo com os resultados de Rehimy et al. (2008) onde foi evidenciado que para uma altura normalizada de  $H/D = 2$  há geração de vórtices apenas para número de Reynolds maiores que 108.

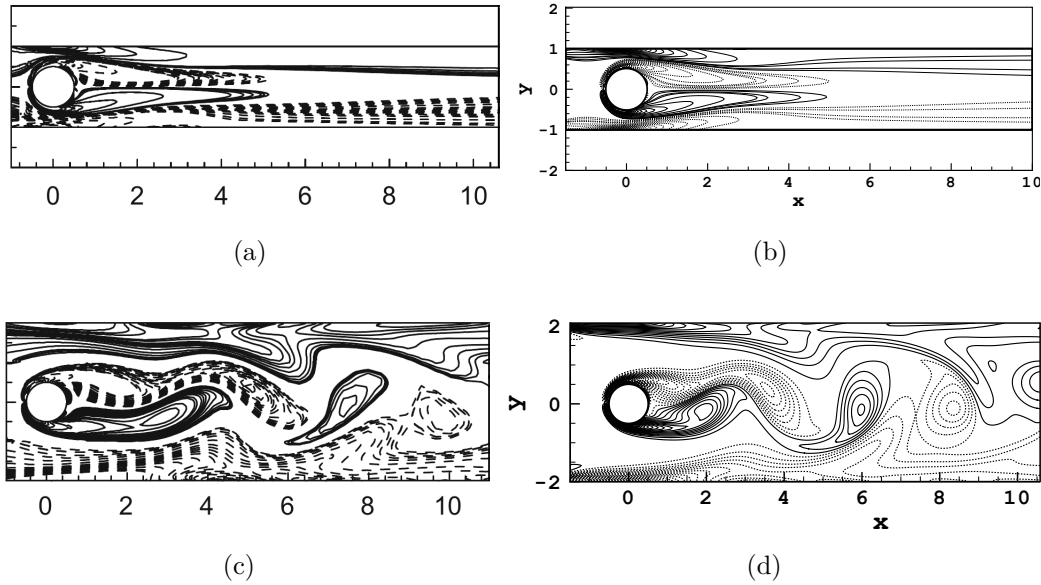


Figura 71 – Visualização ampliada do campo de vorticidade do escoamento sobre um cilindro circular entre duas placas planas a  $Re = 100$ . Relação  $H/D = 2$ : (a) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (b) presente trabalho. Relação  $H/D = 4$ : (c) Sintu e Sinhamahapatra (2010); (d) presente trabalho.

Pode-se afirmar que o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais alcançou acurácia suficiente nos cálculos de escoamentos sobre os corpos simulados, rombudos e esbeltos. Foi demonstrado grande eficiência para escoamentos sobre corpos esbeltos e agudos e, assim, superar as deficiências dos problemas encontrados no método de Múltipla Imposição da Força.

## 7 Conclusões e perspectivas

No presente trabalho apresentou-se a metodologia de fronteira imersa (FI) com foco na simulação de escoamentos sobre corpos de geometrias esbeltas e quinas agudas. A metodologia de fronteira imersa tem sido aplicada em simulações de escoamentos envolvendo a presença de corpos de geometria complexas e/ou em movimento. Mostrou-se que na literatura há várias subclassificações dos métodos de fronteira imersa baseadas na forma de aplicação da condição de contorno como, por exemplo, os métodos de imposição direta e indireta da condição de não deslizamento.

Apesar das grandes vantagens da metodologia, algumas dificuldades e desafios são levantados quando esta é empregada. Um problema particular tratado no presente trabalho foi o escoamento sobre corpos de geometria esbelta e quinas agudas, onde devido às propriedades de aplicação difusa e indireta da condição de contorno de alguns métodos de fronteira imersa, as condições do escoamento nas vizinhanças do corpo não são totalmente satisfeitas e, então, esses cálculos inacurados promovem a difusão de erros numéricos para todo o escoamento.

Foram propostos dois objetivos no presente trabalho. Avaliar a acurácia e eficiência dos métodos de FI em simulações sobre corpos com geometria esbelta e/ou irregular e implementar um método numérico capaz de satisfazer as condições de contorno dessas geometrias. O estudo foi composto por quatro etapas: no primeiro capítulo, uma extensiva pesquisa bibliográfica foi conduzida para compreensão e conhecimento dos diferentes métodos de fronteira imersa disponíveis na literatura e como esses métodos impõem as condições de contorno; na segunda etapa, foi proposta uma modificação no método de Múltipla Imposição da Força a fim de adaptá-lo ao tratamento de corpos esbeltos; na terceira etapa, foi apresentado o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais, onde os valores fantasmas são determinados localmente em cada um dos volumes irregulares da malha, possibilitando o tratamento de corpos esbeltos e quinas agudas; por fim, os métodos são implementados e testados para vários casos diferentes.

O método de múltipla imposição da força foi verificado, com o uso do método das soluções manufaturadas para um domínio tridimensional, e validado para o escoamento bidimensional sobre um cilindro circular isolado com números de Reynolds 40 e 100, o escoamento tridimensional sobre uma esfera a número de Reynolds 100 e o escoamento bidimensional sobre um perfil aerodinâmico NACA0012 aplicando a metodologia *LES* para fechamento da turbulência. O método de volumes fantasmas locais foi verificado, com das soluções bidimensionais dos vórtices de Taylor-Green, e validado para o caso do escoamento de Poiseuille separado por uma placa plana a número de Reynolds 50, o

escoamento bidimensional sobre uma placa plana vertical a número de Reynolds 126 e escoamento bidimensional uniforme sobre um cilindro circular entre duas placas paralelas com diferentes distâncias entre as placas planas e números de Reynolds 45 e 100.

Foi demonstrado que métodos de fronteira imersa com imposição difusa e indireta das condições de contorno não são apropriados para tratar escoamentos sobre corpos esbeltos e quinas agudas, mesmo quando suas funções de interpolação e distribuição são modificadas. Também, o presente trabalho mostrou que o método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais alcançou acurácia suficiente nos cálculos de escoamentos sobre esses corpos e demonstrou eficiência para superar as deficiências dos problemas encontrados no método de Múltipla Imposição da Força.

O presente trabalho sugere como perspectivas os seguintes possíveis encaminhamentos:

- Aplicar o método de fronteira imersa com volume fantasma local para as equações tridimensionais do balanço de quantidade de movimento linear com domínio paralelizado, malha adaptativa e com possibilidade de movimentação do corpo.
- Modificar, verificar e validar o método de volumes fantasmas locais para satisfazer as condições de contorno da equação do balanço de energia térmica.
- Modificar, verificar e validar o método de volumes fantasmas locais para satisfazer as condições de contorno de segunda e terceira espécies (Neumann e Robin).
- Estudar a interação do método de volumes fantasmas locais com metodologias de fechamento da turbulência nas regiões de parede.
- Estudo e aplicação de diferentes funções de interpolação e extrapolação, além do uso dos polinômios de Lagrange, no método de fronteira imersa com volumes fantasmas locais.

## Referências

- AKBARI, M.; PRICE, S. Simulation of dynamic stall for a naca 0012 airfoil using a vortex method. *Journal of Fluids and Structures.*, v. 17, n. 6, p. 855 - 874, 2003. 86, 94, 97
- ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 41, 47-75., 2003. 36, 42, 86
- ANGRILLI, F.; BERGAMASCHI, S.; COSSALTER, V. Investigation of wall induced modifications to vortex shedding from a circular cylinder. *Journal of Fluids Engineering*, v. 104, 518-522, 1982. 119
- ARRUDA, J. *Modelagem Matemática de Escoamentos Internos Forçados Utilizando o Método da Fronteira Imersa e o Modelo Físico Virtual*. Tese (Doutorado), 2004. 48, 61
- BEARMAN, P.; ZDRAVKOVICH, M. Flow around a circular cylinder near a plane boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 89, 33-47, 1978. 119
- BERTHELSEN, P. A.; FALTINSEN, O. M. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problem with irregular boundaries. 2007. 16, 56, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 80, 99, 114, 115, 117
- BOTELLA, O.; PEYRET, R. *Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow*. [S.l.: s.n.], 1998. 105
- BURESTI, G.; LANCIOTTI, A. Vortex shedding from smooth and roughened cylinders in cross-flow near a plane surface. *The Aeronautical Quarterly*, v. 30, 305-321, 1979. 119
- CALHOUN, D. A cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions. *J. Comput. Phys.*, v. 176 :231-275, 2002. 88, 90
- CAMPREGHER, R. *Modelagem Matemática Tridimensional para Problemas de Interação Fluido Estrutura*. Tese (Doutorado), 2005. 62
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 2007. 86
- CLARKE, D.; SALAS, M.; HASSAN, H. Euler calculations for multi-element airfoils using cartesian grids. *AIAA J.*, (24):112835, 1986. 65
- COUTANCEAU, M.; BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation part 1. steady flow. *J. Fluid Mech.*, v. 79:231-256, 1977. 88, 90
- CRISTALLO, A.; VERZICCO, R. Combined immersed boundary/large-eddy-simulations of incompressible three dimensional complex flows. *Flows, Turbulence and Combustion* 77, v. 77, 3-26, 2006. 67

- DORICIO, J. L. Estudo da aplicabilidade do método de fronteira imersa no cálculo das derivadas aerodinâmicas não estacionárias para análise de flutter com as equações de euler para fluxo compressível. *Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo.*, 2009. 49
- ENRIQUES-REMIGIO, S.; SILVEIRA-NETO, A. A new modeling of fluid-structure interaction problems through immersed boundary method/virtual psysical model (ibm/vpm). *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 19. Brasília: ABCM 1 CD-ROM*, 2007. 53
- FADLUN, E. A.; VERZICCO, R.; ORLANDI, P.; MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 161, 35-60., 2000. 52, 65, 76
- FERZIGER, J.; PERIC, M. [S.l.]: [S.l.]: Springer, 1996. 34, 37, 38, 40, 42
- GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, n. 3, p. 1760 – 1765, 1991. 33, 35, 85
- GHIA, U.; GUIA, K. N.; SHIN, C. T. High-re solutins for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computacional Physics*, v. 48, pp 384-411, 1982. 18, 106, 107
- GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling a no-slip flowboundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, v. 105, 354–366., 1993. 47
- HERFJORD, K. A study of two-dimensional separated flow by a combination of the finite element method and navier-stokes equations. *Dr. Ing.-Thesis, Norwegian Institute of Technology, Department of Marine Hydrodynamics, Trondheim, Norway*, 1996. 90
- HUANG, W.; CHANG, C. B.; SUNG, H. J. An improved penalty immersed boundary method for fluid flexible body interaction. *Journal of Computational Physics.*, 2011. 49
- JI, C.; MUNJIZA, a.; WILLIAMS, J. A novel iterative direct-forcing immersed boundary method and its finite volume applications. *Journal of Computational Physics*, v. 231, n. 4, p. 1797–1821, fev. 2012. ISSN 00219991. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999111006528>. 50, 67, 68, 69
- JOHNSON, T. A.; PATEL, V. C. Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 378, 19-70, 1999. 17, 86, 91, 92, 93
- KIM, D.; CHOI, H. Laminar flow past a sphere rotating in the streamwise direction. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 461, 365-386, 2002. 86
- KIM, J.; KIM, D.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, v. 171,132-150, 2001. 17, 86, 91
- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional step method to incompressible navier-stokes equations. *J. Comp. Phys.*, v. 59, pp. 308-323, 1985. 81
- KOUMOUTSAKOS, P.; SHIELS, D. Simulations of the viscous flow normal to an impulsively started and uniformly accelerated flat plate. *Journal of Fluid Mechanic*, v. 328 177–227, 1996. 99, 115

- KRAVCHENKO, A. G.; MOIN, P. Numerical studies of flow over a circular cylinder at  $Re=3900$ . *Physics of Fluids*, v. 12, 403, 2000. 86
- LAI, M. C.; TSENG, Y. H.; HUANG, H. An immersed boundary method for interfacial flows with insoluble surfactant. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 15, p. 7279 – 7293, 2008. 49
- LE, D. V.; KHOO, B. C.; PERAIRE, J. An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries. *J. Comput. Phys.*, v. 220:109-138, 2006. 88, 90
- LILLY, D. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 4, p. 633, 1992. 34
- LINNICK, M. N.; FASEL, H. F. A high-order immersed interface method for simulating unsteady compressible flows on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, v. 204:157-192, 2005. 88, 90
- MARIANO, F. P. Solução numérica das equações de navier-stokes usando uma hibridação das metodologias fronteira imersa e pseud-espectral de fourier. *Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia.*, 2011. 100
- MEÛL, R. vander. The immersed boundary method for the (2d) incompressible navier-stokes equations. *Tese de mestrado - Department of Aerospace Engineering - Delft University of Technology.*, 2006. 54
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, v. 37, 239-261, 2005. 15, 45, 46, 52, 53, 56
- MOHD-YUSOF, J. Combined immersed boundaries/bsplines methods for simulations of flows in complex geometries. *[S.l.]*, 1997. 47, 58
- NOS, R. L. Simulações de escoamentos tridimensionais bifásicos empregando métodos adaptativos e modelos de campo de fase. *Tese (Doutorado) | Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007*, R. L. 179 f., 2007. 86
- OLIVEIRA, J.; SILVA, A. Lima e; GUIMARÃES, G.; NETO, A. S. Simulação do escoamento a baixo reynolds sobre um cilindro de diâmetro variável usando mi/mfv. *In 10th Brazilian Congresso f Thermal Sciences and Engineering.*, v. 1, 2004. 48, 61, 62
- OLIVEIRA, J.; SILVA, A. Lima e; SILVEIRA-NETO, A. Numerical simulation of the high reynolds number flow over circular cylinders using the immersed boundary method. *18th International Congress of Mechanical Engineering.*, 2005. 62
- OLIVEIRA, J. E. S. *Modelagem matemática para otimização dinâmica de corpos imersos em escoamentos turbulentos*. Tese (Doutorado), 2006. 16, 46, 48, 63
- PESKIN, C. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, 252-271., 1972. 45, 46, 47
- PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. 1977. 46
- REMIGIO, S. *Simulação numérica bidimensional da iteração fluido-estrutura através do modelo físico virtual*. Tese (Doutorado), 2005. 62

- RUSSEL, D.; WANG, Z. A cartesian grid method for modeling multiple moving objects in 2d incompressible viscous flow. *J. Comput. Phys.*, v. 191:177-205., 2003. 90
- SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. *Numerical Heat Transfer*, v. 4, p. 1–19, 1981. 36
- SHU, C.; LIU, N.; CHEW, Y. A novel immersed boundary velocity correction lattice-boltzmann method and its application to simulate flow past a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, v. 226, n. 2, p. 1607 – 1622, 2007. 48
- SILVA, A. Lima e; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, 351-370., 2003. 46, 48, 52, 61
- SILVEIRA-NETO, A. A turbulência nos fluidos aplicada. [S.l.]: *Apostila da Disciplina Mecânica dos Fluidos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Uberlândia*, 2002., 2002. 30, 31
- SINTU, S.; SINHAMAHAPATRA, K. Flow past a circular cylinder between parallel walls at low reynolds numbers. *Ocean Engineering*, v. 37 757–769, 2010. 19, 20, 99, 119, 120, 121, 122, 123, 124
- SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations, i. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, p. 99–164, 1963. 30
- TANJI, S.; HONJI, H. Unsteady flow past a flat plate normal to the direction of motion. *J. Phys. Soc., Jpn.* 30 (1) 262–272, 1971. 99, 115
- TAYLOR, G.; GREEN, A. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings Royal Society London*, v. 158, p. 499 - 521, 1937. 86, 98, 99, 100
- TREMBLAY, F.; FRIEDRICH, R. An algorithm to treat flows bounded by arbitrarily shaped surfaces with cartesian meshes. in: *Proceedings of AGSTAB Conference, University of Stuttgart, Germany, 15–17th November.*, 2000. 77
- TSENG, Y.; FERZIGER, J. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, v. 192, 593-623., 2003. 16, 53, 64, 65
- UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, New York, v. 209, p. 448-476, 2005. 89
- VANDRIEST, E. R. On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 11, p. 1007 – 1011, 1956. 34
- VEDOVOTO, J. M. *Modelagem matemática de simulação numérica de escoamentos incompressíveis sobre geometrias complexas tridimensionais utilizando o método da fronteira imersa*. Tese (Doutorado), 2007. 15, 51, 52
- VEDOVOTO, J. M. *Mathematical and Numerical Modeling of Turbulent Reactive Flows using a Hybrid LES / PDF Methodology*. Tese (Doutorado), 2011. 16, 40, 68, 69, 85, 86, 87
- VEDOVOTO, J. M.; SERFATY, R.; NETO, A. S. Mathematical and numerical modeling of turbulence. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences*, v. 87(2): 1195-1232, 2015. 15, 25, 26, 51

- VERZICCO, T.; MOHD-YUSOF, J.; ORLANDI, P.; HAWORTH, D. Large eddy simulation in complex geometries using boundary body forces. *AIAA Journal*, v. 38, 427-433, 2000. 25, 48, 65
- VILAÇA, A. J.; OLIVEIRA, A.; SILVA, L. e; NETO, A. S. *Two-dimesional numerical simulation of free fall cylinder using IB/VPM*. Tese (Doutorado), 2005. 62
- VILLAR, M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. Tese (Doutorado), 2007. 38, 86
- WANG, Z. *Variable step size implicit explicit linear multistep methods for time dependent variables*. Tese (Doutorado), 2005. 38
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi direct forcing immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, 2008. 15, 58, 60
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K.; CEN, K. Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009. 49
- XU, S.; WANG, Z. An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries. *J. Comput. Phys.*, v. 216:454-493., 2006. 90
- YEMINICI, O. Experimental investigation of the flow field around naca0012 airfoil. *International Journal of Sciences*, v. 2, 2013. 86
- ZHANG, N.; ZHENG, Z. An improved direct-forcing immersed-boundary method for finite difference applications. *Journal of Computational Physics*., New York, v. 221, p. 250-268, 2007. 67