

CARLOS EDUARDO FANTI

**RECONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES TRIDIMENSIONAIS
UTILIZANDO B-SPLINES COM PESO ASSOCIADO À
REDUÇÃO DO NÚMERO DE PONTOS DE CONTROLE**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2016

CARLOS EDUARDO FANTI

**RECONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO
B-SPLINES COM PESO ASSOCIADO À REDUÇÃO DO NÚMERO DE
PONTOS DE CONTROLE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: João Carlos Mendes Carvalho

UBERLÂNDIA – MG

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

F216m
2016 Fanti, Carlos Eduardo, 1988-
Reconstrução de superfícies tridimensionais utilizando B-splines
com peso associado à redução do número de pontos de controle / Carlos
Eduardo Fanti. - 2016.
125 f. : il.

Orientador: João Carlos Mendes Carvalho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Ajuste de curva - Teses.
3. Curvas em superfícies - Teses. 4. Engenharia - Superfícies - Teses.
I. Carvalho, João Carlos Mendes, 1954-. II. Universidade Federal de
Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
III. Título.

CDU: 621

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, que desde criança me ensinam e me incentivam a buscar meus sonhos.

Agradeço também aos meus irmãos, que estão sempre me apoiando e incentivando para buscar um futuro melhor.

Agradeço em especial minha esposa, que sempre esteve ao meu lado me apoiando e me dando forças para concluir meus trabalhos e vencer desafios.

Agradeço ao João Carlos pela orientação em toda minha vida acadêmica, sempre me dando conselhos, ensinando e me apoiando a crescer profissionalmente.

Agradeço ainda aos meus amigos, que estão sempre me apoiando na vida.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

À Faculdade de Engenharia Mecânica.

E a todos aqueles que me ajudaram e torcem pelo meu sucesso.

FANTI, C. E., **Reconstrução de Superfícies Tridimensionais Utilizando B-Splines com Peso Associado à Redução do Número de Pontos de Controle**. 2016. 125f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

RESUMO

A reconstrução de superfícies tridimensionais pode ser dividida em duas partes: leitura da superfície do objeto a ser reconstruído e aplicação de um algoritmo para reconstruir a superfície tridimensional. A primeira se refere à leitura do objeto para a obtenção da nuvem de pontos que representa a sua superfície que, em geral é constituída por milhares de pontos que se distribuem em torno da superfície real do objeto. Para esta etapa a dissertação apresenta um estudo realizado na leitura do laser de um digitalizador afim de criar uma nuvem de pontos baseada nas suas características de leitura. A segunda etapa da reconstrução é a aplicação do algoritmo de reconstrução da superfície que deve, a partir da nuvem de pontos, retirar informações da superfície, filtrando possíveis erros, para realizar a reconstrução da superfície. A dissertação apresenta uma metodologia que se baseia na divisão da nuvem em seções transversais, a cada seção é aplicada um método de redução de pontos baseado em definições de micro-regiões e o cálculo de centros de massas para cada uma destas, para então realizar uma seleção dos centros de massas mais prováveis a pertencerem ao perfil da seção transversal. Em seguida é realizado um pré-cálculo de parâmetros para possibilitar o melhor ajuste de uma B-Spline cúbica com peso a saber: cálculo dos pesos aplicados a cada ponto a ser ajustado, que é realizado em função do raio de uma circunferência formada a cada três pontos consecutivos; definição dos melhores pontos de início da curva para obtenção do melhor ajuste de curva; cálculo do vetor derivada no ponto de fechamento da curva para assim proporcionar um fechamento contínuo e a definição do melhor número de pontos de controle para o melhor ajuste de curva. Uma vez calculados todos os parâmetros é possível realizar o ajuste da curva B-Spline cúbica com peso pela aplicação de um ajuste com restrições de interpolação e derivada aos pontos de início e fim utilizando o método dos mínimos quadrados. Por fim é então possível realizar a interpolação das curvas ajustadas às seções transversais na direção longitudinal para obtenção de uma superfície bidirecional suave que melhor represente o objeto real.

Palavras-chave: Reconstrução de superfície. B-Spline com peso. Ajuste de curva. Digitalizador 3D.

FANTI, C. E., **Tridimensional Surface Reconstruction using weighted B-Spline associated to Control Points Reduction** 2016. 125p. Master Thesis, Federal University of Uberlandia, Uberlandia, Brazil.

ABSTRACT

The reconstruction of three-dimensional surfaces can be divided into two parts: obtaining the surface coordinates of the object to be reconstructed and the application of an algorithm to reconstruct the three-dimensional surface. The first one is to obtain a cloud of points representing the surface which generally consists of thousands of points distributed around the actual surface of the object. For this step the dissertation presents a study from a scanner's laser in order to create a cloud of points based on its reading features. The second stage of reconstruction consists in the application of the surface reconstruction algorithm that enable, from the cloud of points, to get the surface information by filtering out possible errors, to perform the surface reconstruction. This dissertation presents a methodology which is based on the division of the point cloud into cross sections, where in each section is applied a method for reducing the points based on definition of micro-regions and the calculation of their center of mass and then, performing a selection of the center of mass that can be considered as belonging the surface. Next parameters are obtained to allow the best fitting of a weighted cubic B-spline namely: calculation of the weights applied to each point to be adjusted, which is performed as a function of radius of a circle formed by three consecutive points; definition of the best starting points of the curve to obtain the best curve fitting; calculation of derived vector in the closing point of the curve so as to provide a continuous closing and the definition of the optimal number of control points for the best curve fitting. Once all parameters had been obtained is possible to perform the adjustment of the weighted cubic B-spline curve by applying an adjustment with interpolation and derived constraints from the beginning and end points using the least squares method. Finally, it is possible to perform interpolation of the adjusted curves to the cross sections in the longitudinal direction to obtain a smooth bi-directional surface that best represents the actual object.

Keywords: Surface reconstruction. Weighted B-Spline. Curve fitting. 3D Digitizer.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 -	Passos da reconstrução da superfície tridimensional de um manequim (HSIAO e CHEN, 2013)	4
Figura 2.2 -	Reconstrução de uma superfície de revolução a partir de uma nuvem de pontos utilizando B-Splines calculada pelo método SDM – Squared Distance Minimization (WANG et al., 2006)	4
Figura 2.3 -	A esquerda uma foto da estátua David de Michelangelo, a direita a renderização da digitalização da estátua com uma resolução de 1 mm e contendo 4 milhões de polígonos (LEVOY et al., 2000)	4
Figura 2.4 -	Digitalização e reconstrução do busto do presidente Barack Obama em dezembro de 2014 pelo grupo Smithsonian (GRUPO ALUTECH, 2014).....	5
Figura 2.5 -	Exemplos da aplicação dos métodos implícitos: (a) Planos tangentes (HOPPE, 1996); (b) RBF (OHTAKE et al., 2004); (c) MPU (OHTAKE et al., 2003); (d) MLS (DEY e SUN, 2005); (e) Poisson (KAZHDAN et al., 2006); (f) Graph Cuts (LEMPITSKY e BOYKOV, 2007).	8
Figura 2.6 -	Exemplos da aplicação do métodos baseados em Delaunay: (a) Power Crust (AMENTA et al., 2001) e (b) COCONE.(DEY et al., 2012).	10
Figura 2.7 -	Exemplos da aplicação dos métodos baseados em B-Splines: (a) Triangular B-Spline (HE e QIN, 2004) e (b) IBS (ROUHANI et al., 2015).	11
Figura 2.8 -	(a) Seções transversais e (b) imagem renderizada (KELS e DYN, 2011).	12
Figura 2.9 -	Imagem representativa do scanner da empresa Cyberware Inc e seu espaço de trabalho (LEVOY et al., 2000).	13
Figura 2.10 -	Scanner VISSCAN-3D projetado pelo GRACO-UnB (GINANI, 2008).	13
Figura 2.11 -	Hexagon Metrology (a) LEICA T-SCAN e (b) ROMER ABSOLUTE ARM.	14
Figura 2.12 -	3D SCANNER HD da empresa NextEngine.....	14
Figura 2.13 -	SURVEYOR ZS SERIES da empresa Laser Design Inc.....	14
Figura 3.1 -	Funções base de grau zero, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ (PIEGL; TILLER, 1997).	18
Figura 3.2 -	Funções base do primeiro grau, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ (PIEGL; TILLER, 1997).	19
Figura 3.3 -	Função base do segundo grau, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ (PIEGL; TILLER, 1997).	20
Figura 3.4 -	(a) Função base cúbica; (b) derivada das funções base cúbicas (PIEGL; TILLER, 1997).	22
Figura 3.5 -	$N_{i,3}$ e todas suas derivadas não nulas (PIEGL; TILLER, 1997).	22

Figura 3.6 -	Processo de unclamping da parte esquerda de uma curva quártica. (a) Curva “clamped”; (b) para $i=0$; P_{00} calculado; (c) $i=1$; P_{01} e P_{11} calculado; (d) $i=2$; P_{02} , P_{12} e P_{22} calculado (PIEGL; TILLER, 1997).	25
Figura 3.7 -	Curvas abertas; (a) Clamped; (b) Unclamped.	26
Figura 3.8 -	Exemplos de continuidades geométricas e paramétricas	27
Figura 3.9 -	Curvas fechadas; (a) Clamped C^0 com 9 Pontos de controle; (b) Unclamped C^2 com 11 Pontos de controle.	27
Figura 3.10 -	Wrapping nos pontos de controle (SHENE, 1998).	28
Figura 3.11 -	Wrapping nos nós (SHENE, 1998).	29
Figura 3.12 -	Exemplo de inserção de nó (PIEGL; TILLER, 1997).	31
Figura 3.13 -	Exemplo de remoção de nó, (PIEGL; TILLER, 1997).	33
Figura 3.14 -	Exemplo de diagrama de dispersão.	38
Figura 3.15 -	Superfície aberta: (a) Rede de pontos de controles; (b) Superfície (Piegl; Tiller, 2007).	44
Figura 3.16 -	Superfície fechada: (a) Rede de pontos de controles; (b) Superfície B-Spline (Rogers, 2001).	44
Figura 4.1 -	Curva de sensibilidade do laser LEUZE ELECTRONIC	48
Figura 4.2 -	Dispersão da leitura do digitalizador	49
Figura 4.3 -	Histograma da dispersão da leitura do digitalizador	49
Figura 4.4 -	Semelhança entre histograma e distribuição normal	50
Figura 4.5 -	Perfil no plano XY utilizado para criação da nuvem de pontos	51
Figura 4.6 -	Representação da alteração das coordenadas dos pontos via trigonometria	53
Figura 4.7 -	Nuvem de pontos criada: (a) Nuvem de pontos de objeto cônico gerada para aplicação da metodologia e; (b) Zoom em trecho evidenciando a dispersão dos pontos em uma seção transversal.	55
Figura 4.8 -	Calculo de centros de massa conforme resoluções: (a) 5Ra; (b) 8Ra e; (c) 10Ra. ..	57
Figura 4.9 -	Seleção de seções transversais com presença de espaços vazios: (a) Seleção errônea das seções; (b) Correção do método pela eliminação dos vazios.	59
Figura 4.10 -	Centros de massa calculados para uma seção.	61
Figura 4.11 -	Macro-regiões formadas por micro-regiões (FONSECA JR e CARVALHO, 2006).	62
Figura 4.12 -	Centros de massa selecionados pelo metodo de seleção	63
Figura 4.13 -	Lei dos senos aplicado a três pontos consecutivos.	64
Figura 4.14 -	Representação dos vetores v_1 e v_2	66
Figura 4.15 -	Representação do vetor unitário utilizado para o fechamento	66

Figura 4.16 - Erro de curvatura para região próxima ao início de uma curva B-Spline sem fechamento com continuidade C^{p-1}	67
Figura 4.17 - Curva B-Spline com ponto de início alterado passando pelo antigo ponto de início .	68
Figura 4.18 - Representação da direção de tangente ao ponto de início	68
Figura 4.19 - Tempo gasto para ajuste em função do número de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015).....	71
Figura 4.20 - Número de pontos de controle utilizado a cada calculo.	72
Figura 4.21 - Sequência de pontos a serem ajustados (FANTI e CARVALHO, 2015).....	73
Figura 4.22 - Erro de ajuste em função do número de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015).....	73
Figura 4.23 - Resultado da função de ponderação em função da porcentagem de número de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015).....	74
Figura 4.24 - Ajuste realizado com o número ótimo de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015).....	75
Figura 4.25 - Exemplo de bom e mal ajuste com relação a passar por um ponto que não deveria pertencer à curva.....	76
Figura 4.26 - Fluxograma representativo dos passos seguidos para o ajuste das curvas B-Splines, conforme a metodologia proposta.	79
Figura 4.27 - Superfície reconstruída sem alinhamento dos pontos de início	80
Figura 4.28 - Superfície reconstruída com alinhamento dos pontos de início	81
Figura 4.29 - Figura representando a superfície reconstruída com suas seções transversais e, em vermelho, exemplo da interpolação de seções longitudinais	82
Figura 4.30 - Superfície reconstruída pelo método das distâncias a partir da verificação dos pontos mais próximos a cada ponto da base.	83
Figura 4.31 - Superfície reconstruída pelo método das distâncias com aumento de número de pontos nas seções transversais.	84
Figura 4.32 - Superfície reconstruída pelo método das distâncias reduzido.	85
Figura 4.33 - Superfície reconstruída utilizando o método da ortogonalidade.....	86
Figura 4.34 - Representação de um plano longitudinal cortando a superfície	87
Figura 4.35 - Representação do ponto de referência com suas projeções internas a todas as seções transversais.	88
Figura 4.36 - Representação do cálculo para determinação da equação do ponto da curva.....	89
Figura 4.37 - Superfície reconstruída pelo método direto.....	90
Figura 4.38 - Superfície reconstruída pelo método iterativo.	91
Figura 4.39 - Superfície referência.....	92

<i>Figura 4.40 - Mapa de erro do método da rede de pontos de controle.....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 4.41 - Mapa de erro do método das distâncias com multiplicador 1x.....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 4.42 - Mapa de erro do método das distâncias com multiplicador de 10x.....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 4.43 - Mapa de erro do método das distâncias reduzido.....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 4.44 - Mapa de erro do método da ortogonalidade.....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 4.45 - Mapa de erro do método dos planos longitudinais - direto.....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 4.46 - Mapa de erro do método dos planos longitudinais - iterativo.</i>	<i>96</i>
<i>Figura 5.1 - Perfil utilizado para construir a nuvem de pontos cilíndrica.....</i>	<i>100</i>
<i>Figura 5.2 - Nuvem de pontos da superfície cilíndrica.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 5.3 - Superfície cilíndrica de referência.</i>	<i>101</i>
<i>Figura 5.4 - Superfícies cilíndricas reconstruídas à partir da nuvem de pontos pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido; e (d) Planos longitudinais: Iterativo.....</i>	<i>103</i>
<i>Figura 5.5 - Mapa de erro para as superfícies cilíndricas reconstruídas: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido; e (d) Planos longitudinais: Iterativo.</i>	<i>105</i>
<i>Figura 5.6 - Nuvem de pontos para a superfície cônica com excentricidade.</i>	<i>107</i>
<i>Figura 5.7 - Superfície de referência cônica com excentricidade.</i>	<i>107</i>
<i>Figura 5.8 - Superfícies cônicas com excentricidade reconstruídas à partir da nuvem de pontos pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido.</i>	<i>109</i>
<i>Figura 5.9 - Mapa de erro para as superfícies cônicas com excentricidade reconstruídas pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x e; (c) Distância reduzido.</i>	<i>111</i>
<i>Figura 5.10 - Perfil a ser revolucionado para criação do Peão.</i>	<i>112</i>
<i>Figura 5.11 - Nuvem de pontos criada a partir do perfil do Peão.</i>	<i>113</i>
<i>Figura 5.12 - Superfície referência do Peão.</i>	<i>113</i>
<i>Figura 5.13 - Superfícies reconstruídas à partir da nuvem de pontos do Peão pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido e; (d) Planos longitudinais - Iterativo.</i>	<i>114</i>
<i>Figura 5.14 - Mapa de erro para as superfícies do Peão reconstruídas pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido e; (d) Planos longitudinais - Iterativo.....</i>	<i>115</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ângulo dos planos longitudinais.
CCD	<i>Charge-Coupled Device</i>
CMOS	<i>Complementary Metal Oxide Semiconductor</i>
C^k	Continuidade paramétrica de ordem k .
$C(u)$	Curva paramétrica B-Spline.
$C^{(k)}(u)$	Derivada da curva paramétrica B-Spline.
CM	Centros de massa.
C_R	Ponto de referência dos planos longitudinais.
F	Função ponderação.
G^k	Continuidade geométrica de ordem k .
$nX_{regiões}$	Número de micro-regiões na direção X da seção transversal.
$nY_{regiões}$	Número de micro-regiões na direção Y da seção transversal.
$N_{i,p}$	Função base B-Spline de grau p .
$N_{i,p}^{(k)}$	Derivada da função base B-Spline de grau p .
P	Vetor de pontos de controle.
p	Grau da curva B-Spline.
Q	Pontos a serem ajustados.
Ra	Rugosidade media.
$S(u, v)$	Superfície paramétrica B-Spline.
up	Vetor paramétrico para cálculo dos pontos da curva B-Spline.
u	Nó.

U	Vetor de nós.
\bar{u}	Vetor paramétrico para ajuste da curva B-Spline.
V	Vetor de nós direção longitudinal.
w	Peso.
W	Matriz de pesos.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....	1
<i>INTRODUÇÃO.....</i>	<i>1</i>
CAPÍTULO II.....	3
<i>REVISÃO BIBLIOGRAFICA</i>	<i>3</i>
2.1. Introdução	3
2.2. Digitalização do objeto	5
2.3. Reconstrução de superfície digital	6
2.4. Digitalizadores.....	12
CAPÍTULO III.....	15
<i>AJUSTE DE CURVAS E SUPERFÍCIES UTILIZANDO B-SPLINES.....</i>	<i>15</i>
3.1. Introdução	15
3.2. B-Splines	16
3.2.1. Funções base B-Splines	17
3.2.2. Derivada das funções base B-Splines	20
3.2.3. Vetor de nós.....	23
3.2.4. Curva aberta ou fechada.....	25
3.2.5. As derivadas de uma curva B-Spline	29
3.3. Alteração geométrica de B-Splines	29
3.3.1. Inserção de nós.....	30
3.3.2. Remoção de nós.....	31
3.3.3. Elevação de grau	33
3.3.4. Redução de grau.....	35
3.4. Método dos mínimos quadrados	37
3.4.1. Caso discreto	37
3.4.2. Caso contínuo.....	40
3.4.3. Método dos mínimos quadrados aplicado à B-Spline.....	40
3.4.4. Método dos mínimos quadrados aplicado a B-Spline com restrição	42
3.5. Superfície	43
3.6. Conclusões.....	45
CAPÍTULO IV	46
<i>METODOLOGIA DESENVOLVIDA</i>	<i>46</i>
4.1. Criação da nuvem de pontos	46
4.1.1. Estudo da leitura do digitalizador.....	47
4.1.2. Criação da nuvem de pontos	51
4.2. Metodologia para redução da nuvem de pontos	55
4.2.1. Definição da resolução e das micros-regiões	56

4.2.2. Cálculo dos centros de massa	60
4.2.3. Seleção dos centros de massa	60
4.3. Pré-cálculo de parâmetros para o ajuste de curva <i>B-Spline</i>	63
4.3.1. Cálculo dos pesos aplicados a cada ponto ajustado	64
4.3.2. Cálculo do vetor de fechamento de curva	65
4.3.3. Cálculo do número de pontos de controle	69
4.3.4. Seleção do melhor ponto de início da curva	75
4.4. Ajuste de curva <i>B-Spline</i>	77
4.5. Cálculo dos pontos da superfície	79
4.5.1. Equação da superfície <i>B-Spline</i>	80
4.5.2. Interpolação dos pontos das seções transversais	81
4.5.3. Métodos baseados nos planos longitudinais	86
4.5.3.1. Método direto	87
4.5.3.2. Método iterativo	90
4.5.4. Determinação do erro de reconstrução	92
4.6. Conclusões	97
CAPÍTULO V	99
<i>SIMULAÇÕES</i>	99
5.1. Superfície cilíndrica	99
5.1.1. Criação da nuvem de pontos	99
5.2. Superfície cônica com excentricidade	106
5.3. Superfície complexa - Peão	112
5.4. Conclusões	116
CAPÍTULO VI	118
<i>CONCLUSÕES</i>	118
6.1. Conclusões	118
6.2. Sugestão para trabalhos futuros	119
<i>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</i>	120

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, as técnicas de digitalização e reconstrução de formas complexas de objetos tridimensionais têm apresentado um grande desenvolvimento. A velocidade e precisão das técnicas de digitalização se devem ao avanço nas áreas de física, engenharia elétrica, o desenvolvimento dos lasers, CCD's e as unidades de aquisição de dados de altas velocidades. Tais tecnologias têm permitido medir perfis com precisão na relação de 1 por 1.000 e taxas acima de 20.000 amostragens por segundo. Dependendo do objeto, milhares ou até milhões de amostragens podem ser adquiridas. O resultado consiste em uma “massa” de dados que requerem algoritmos eficientes e confiáveis que possam gerar modelos computacionais a partir destas amostragens. Estes dados formam, na realidade, uma nuvem de pontos, nem sempre organizados (CURLESS, 1997).

A reconstrução de superfícies precisas a partir desta nuvem de pontos desorganizados é um problema difícil, não completamente solucionado e muito problemático nos casos em que os dados estão incompletos, com ruídos e/ou esparsos. O objetivo da reconstrução consiste sempre em obter um modelo computacional de um objeto que se assemelhe o mais fielmente possível ao objeto real.

Apesar dos grandes avanços nesta área, a correta modelagem de superfícies fechadas ou de objetos de formas complexas não está completamente solucionada e ainda constitui uma área de muitas atividades de pesquisa. A aplicação de Splines e NURBS têm sido úteis na modelagem das superfícies.

A grande variedade da origem do objeto das quais os dados podem ser obtidos (fabricação, arquitetura, esculturas pré-históricas, etc.) implica que os dados possuem tantas propriedades diferentes que todas devem ser consideradas na solução do modelo. Vários métodos têm sido desenvolvidos na tentativa de criar uma representação regular e contínua de malha a partir da nuvem de pontos (MENCL, 2001). Sendo conhecida a superfície poligonal, várias outras técnicas podem ser usadas para o pós-processamento (suavização, texturização) e para a visualização do modelo 3D

(PATIAS, 2001), com diversos softwares comerciais disponíveis que permitem essa renderização e visualização.

A digitalização de perfis tridimensionais de objetos e sua reconstrução podem ser aplicadas em diversas áreas tais como na fabricação, na engenharia reversa, na inspeção, entre outros.

Um sistema industrial que permite a reconstrução de objetos tridimensionais pode ser dividido em um equipamento eletro-mecânico (normalmente scanners associados a um dispositivo mecânico de movimentação), que permite a leitura dos dados do objeto, e o software que permite o controle do scanner e a reconstrução do objeto a partir dos dados lidos.

Este projeto dá continuidade aos estudos realizados inicialmente com o apoio financeiro da FAPEMIG para o desenvolvimento de um sistema eletro-mecânico, denominado digitalizador de superfícies 3D, para a leitura das coordenadas da superfície de um objeto tridimensional, a validação da metodologia de leitura e reconstrução gráfica de superfícies tridimensionais a partir dos dados lidos, que está na fase final de desenvolvimento.

Essa dissertação tem como objetivo propor metodologias de reconstrução de superfícies a partir de uma nuvem de pontos, obtida por um digitalizador, utilizando B-Spline com peso. A reconstrução deve ser de forma automática, sem a interferência do operador, cuja função consiste em colocar a peça no digitalizador e definir a resolução requerida para cada eixo coordenado.

A reconstrução proposta utiliza B-Splines com peso para definir as seções transversais do objeto e, com o conhecimento dessas curvas, são propostos cinco métodos para obter as curvas longitudinais a partir da interpolação das seções transversais previamente obtidas. A reconstrução da superfície utilizando B-Splines bidirecionais a partir da rede de pontos de controle foi feita para comparação com os métodos propostos.

A reconstrução proposta considera, nesta etapa, superfícies que apresentam curvaturas suaves sem arestas e/ou mudanças bruscas de direção. Este estudo servirá como base para o estudo de objetos que possuem arestas e furos.

A dissertação é composta por seis capítulos: o primeiro a introdução ao projeto; o segundo a revisão bibliográfica onde é apresentado um breve estudo sobre as metodologias de reconstrução de superfícies atuais; em seguida um capítulo onde são apresentados os conceitos teóricos das curvas B-Splines assim como o ajuste de curvas e superfícies; o quarto capítulo apresenta a metodologia desenvolvida para a reconstrução de superfície; o quinto capítulo apresenta resultados das simulações aplicando a metodologia proposta; e por fim o sexto e último capítulo onde é concluída a dissertação com a proposição de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRAFICA

2.1. Introdução

A reconstrução de superfícies tridimensionais é uma técnica que vem evoluindo muito nos últimos anos. A melhoria da capacidade de processamento dos computadores, a melhoria da precisão dos sensores CCD's e CMOS, entre muitos outros desenvolvimentos tecnológicos vem potencializando o seu desenvolvimento (EVERETT, 1995).

É possível dividir a reconstrução de superfícies em duas partes: *digitalização do objeto*, onde é feita a leitura do objeto adquirindo os dados necessários para que seja possível a construção de uma superfície digitalizada, e a *reconstrução da superfície digital*, onde é aplicada alguma metodologia para transformar os dados adquiridos na superfície digitalizada que representa o objeto.

A digitalização de perfis tridimensionais de objetos e sua reconstrução podem ser aplicadas em diversas áreas tais como na fabricação (fundição, estereolitografia, etc.), na engenharia reversa (reconstrução de componentes de máquinas que não possuem desenhos), no projeto colaborativo (permitindo a interação entre o modelo real e o modelo virtual), na inspeção (permitindo verificar se o objeto está conforme o projetado), simulação virtual (efeitos especiais no cinema, jogos), na cópia de peças disponíveis em museus, na medicina (reconstrução de partes do corpo humano), na exploração científica e no mercado de consumo (CURLISS, 1997).

As Figs. 2.1 a 2.4 apresentam alguns exemplos de aplicação de reconstrução digital de superfícies.

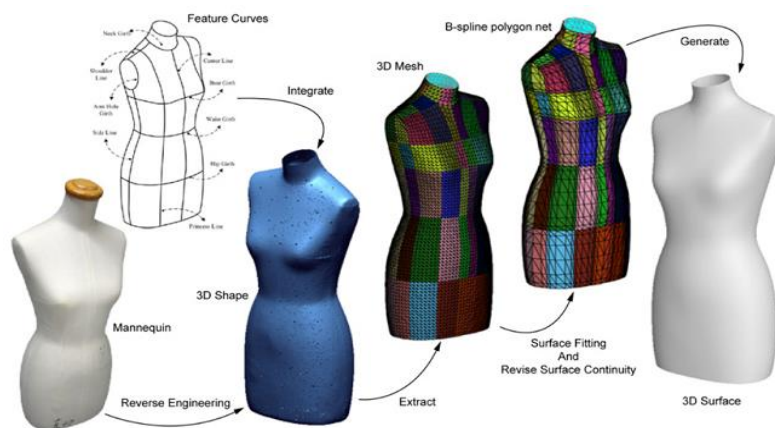


Figura 2.1 - Passos da reconstrução da superfície tridimensional de um manequim (HSIAO e CHEN, 2013)

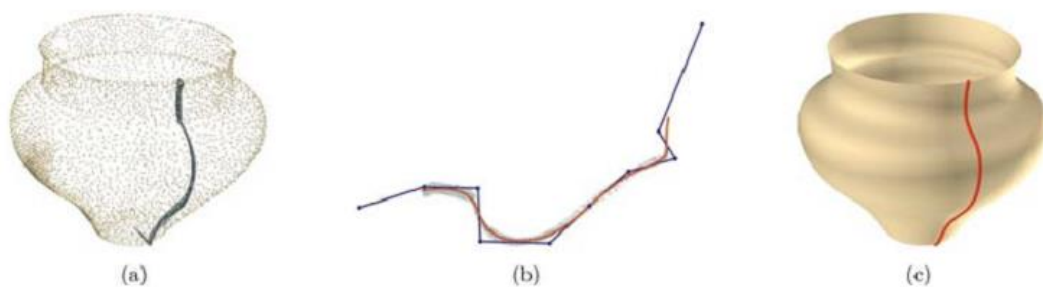


Figura 2.2 - Reconstrução de uma superfície de revolução a partir de uma nuvem de pontos utilizando B-Splines calculada pelo método SDM – Squared Distance Minimization (WANG et al., 2006)

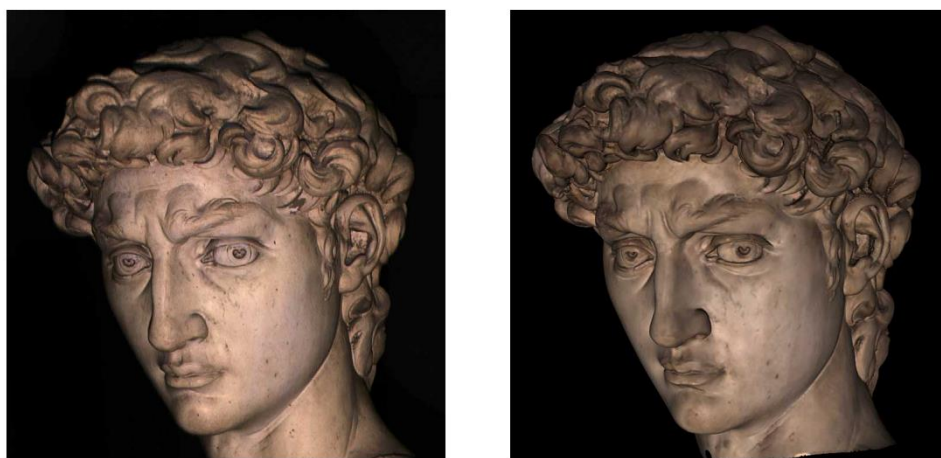


Figura 2.3 - A esquerda uma foto da estátua David de Michelangelo, a direita a renderização da digitalização da estátua com uma resolução de 1 mm e contendo 4 milhões de polígonos (LEVOY et al., 2000)



Figura 2.4 - Digitalização e reconstrução do busto do presidente Barack Obama em dezembro de 2014 pelo grupo Smithsonian (GRUPO ALUTECH, 2014).

2.2. Digitalização do objeto

A digitalização do objeto consiste em realizar a leitura do objeto, ou seja, adquirir as coordenadas cartesianas tridimensionais dos pontos pertencentes à superfície do objeto. Um sistema industrial que permite isto pode ser dividido em um equipamento eletro-mecânico (normalmente um scanner associado a um dispositivo mecânico de movimentação), e o software que permite o controle do scanner e a reconstrução do objeto a partir dos dados lidos (DÍAZ, 2011).

O objetivo da reconstrução de uma superfície pode ser definido como: dado um conjunto de pontos P assumindo definir uma superfície S , criar uma superfície modelo S' o mais próximo possível de S . O processo de reconstrução da superfície não garante que ela será exatamente igual a S , visto que é conhecida uma quantidade finita de pontos. Um aumento na quantidade de pontos também não garante a exatidão da superfície.

Diversos métodos de aquisição de formas têm sido estudados e propostos nas últimas décadas. Estes métodos se dividem em: sensoriamento passivo e ativo. A técnica passiva não interage com o objeto ao passo que o método ativo tem contato com o objeto ou projeta alguma forma de energia sobre ele.

Entre os métodos ativos pode-se ainda distinguir duas técnicas: o uso de sensores de contato e sensores sem contato. Sensores de contato são tipicamente “pontas de prova”. Quando a ponta de prova

toca a superfície do objeto, os dados de sua posição são armazenados. Existe uma grande variedade de “pontas de prova” tanto no que se refere à precisão como em preço.

Os métodos ativos sem contato geralmente operam pela projeção de ondas energéticas sobre o objeto e registram a energia refletida (método reflexivo) ou a que atravessa o objeto (método transmissivo). Um exemplo do método transmissivo é a tomografia computadorizada que consiste em um método em que a energia atravessa o objeto e registra sua forma. Quando ocorre a reflexão, o método pode ser subdividido em duas categorias: método ótico e não-óptico. O método não-óptico inclui, por exemplo, o sonar. O método óptico inclui, por exemplo, a interferometria (CURLESS, 1997). Uma boa revisão deste método é apresentada por (BESL, 1989) e Díaz (2011) apresenta um resumo bem elaborado que permite verificar a diferença entre os métodos.

O método óptico utiliza uma técnica denominada “triangulação” para a aquisição dos pontos da superfície. Este método tem apresentado grande evolução tanto em velocidade de aquisição de dados como em precisão graças ao desenvolvimento de sensores geometricamente estáveis tais como CCD’s e CMOS (CURLESS, 1997), (GINANI, 2008).

A leitura do objeto resulta em uma nuvem de pontos que nem sempre são organizados. A reconstrução de superfícies precisas a partir desta nuvem de pontos é um problema difícil, não completamente solucionado e muito problemático nos casos em que os dados estão incompletos, com ruídos e esparsos (REMONDINO, 2003).

Várias publicações se dedicam ao estudo da técnica da triangulação e sua descrição foge ao escopo deste trabalho. Apesar de sua evolução, ainda persistem algumas fontes de erro, principalmente na leitura e interpretação do sinal refletido, devido a problemas relacionados com a descontinuidade de reflexão, cantos no objeto, descontinuidade do perfil em relação à fonte de luz, e oclusão do sensor (CURLESS e LEVOY, 1995), (ZHANG et al, 2003) e (MOONS et al, 2010). Além destes erros pode ocorrer que uma certa região não receba o foco de luz.

2.3. Reconstrução de superfície digital

O processo de reconstrução de superfícies consiste, em geral, em construir uma superfície poligonal a partir do conjunto de pontos lidos para um pós-processamento (suavização, texturização) e visualização do objeto tridimensional (MENCL, 2001), (PATIAS, 2001).

Nos processos de reconstrução 3D, os métodos de tratamento dos pontos, fornecidos pelo sistema de aquisição de dados, têm caráter determinante sobre o resultado final da superfície e o tempo de processamento. Além disso, é possível obter uma superfície aproximada ou interpolada dependendo do método de construção utilizado e do objetivo almejado.

As superfícies aproximadas são construídas, geralmente, através de polígonos (exemplo: triangulações) ou utilizando funções como as B-splines. Os métodos mais conhecidos podem ser divididos em três grupos: métodos implícitos, métodos baseados em Delaunay e métodos baseados em B-Splines.

Métodos implícitos: Através da construção de uma função de espaço para as amostras, uma superfície pode ser implicitamente definida como um nível de ajuste da função que permite a reconstrução da superfície suave e aproximada (LABATUT et al., 2009). Alguns exemplos deste grupo, Fig. 2.5:

- Planos tangentes são estimados a partir dos k vizinhos mais próximos de cada amostra. Uma orientação consistente é encontrada e a função considerada é a distância ao plano tangente do ponto mais próximo no espaço (HOPPE et al., 1992).
- Funções de base radial (*Radial Basis Functions* - RBF): RBFs são colocados em pontos de restrição, onde o valor da função é conhecido e os pesos são globalmente resolvidos para satisfazer as restrições exatamente ou aproximadamente, e para minimizar uma medida de suavidade (CARR et al., 2001) e (OHTAKE et al., 2004).
- Partição unitária multi-nível (*Multi-level Partition of Unity* - MPU) – Este método permite trabalhar com grande quantidade de pontos. O método é baseado em três itens: a) Funções quadráticas por partes que capturam a forma local da superfície; b) funções de ponderação que mistura essas funções de forma local; e c) um método de subdivisão de cubo que se adapta as variações de complexidade da forma local (OHTAKE et al., 2003).
- Mínimos quadrados moveis (*Moving Least Squares* - MLS) – pode lidar com quantidade moderada de ruído e ser usada para definir funções implícitas semelhantes com a distância aos planos locais como aproximações locais, produzindo o método MLS implícito (LANCASTER e SALKAUSKAS, 1981) e (SHEN et al., 2004). Garantias de reconstrução são fornecidos para nuvens de pontos suficientemente densas e uniformes (KOLLURI, 2008).

- *Poisson* - alinha, no sentido dos mínimos quadrados, a inclinação da função indicadora com um campo vetorial calculado a partir das amostras de entrada orientada. Isto conduz a um problema de *Poisson*: localmente RBFs suportados são usados ao longo de um cubo adaptável para garantir eficiência e produzir excelentes resultados, tornando o método muito competitivo (KAZHDAN et al., 2006).
- Superfície mínima via cortes gráficos (*Minimal Surfaces via Graph Cuts*) - Métodos baseados na mínima superfície estruturada com corte gráfico de Boykov e Kolmogorov (2003), Hornung e Kobbelt (2006) e Lempsky e Boykov (2007). Também pertencem a esta categoria: valores da função indicadora são atribuídas a volumes elementares ao longo de uma grade regular, de modo a minimizar a energia global com o mínimo de cortes s-t. Pós-processamento é necessário para remover artefatos decorrentes da discretização da grade regular.

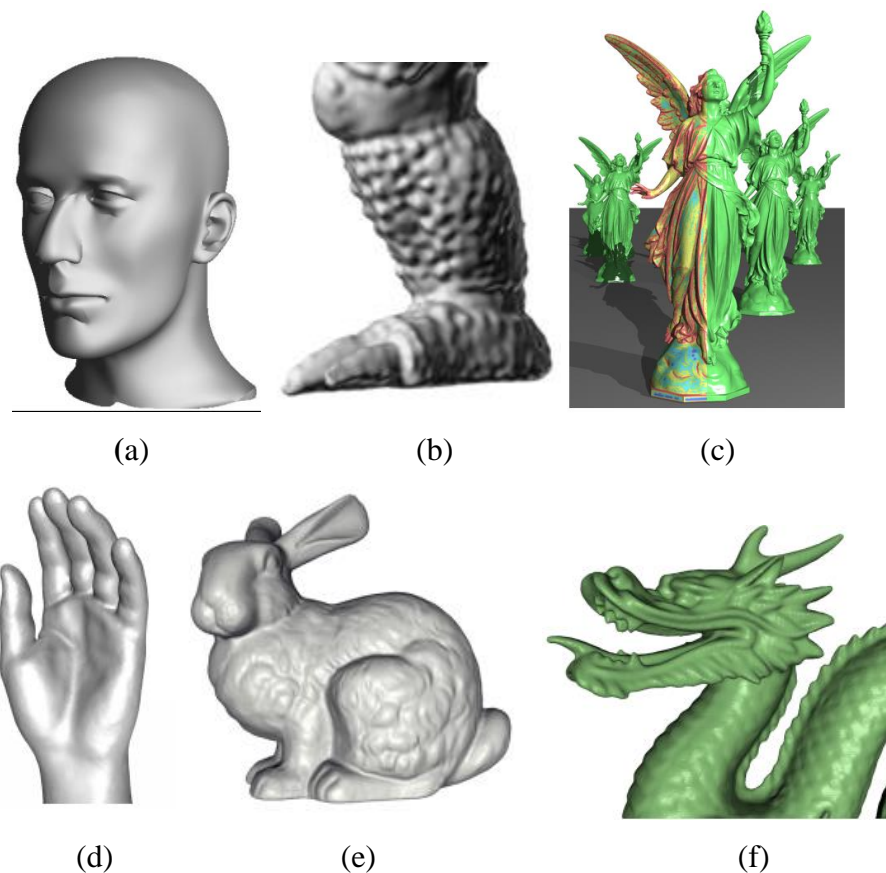


Figura 2.5 - Exemplos da aplicação dos métodos implícitos: (a) Planos tangentes (HOPPE, 1996); (b) RBF (OHTAKE et al., 2004); (c) MPU (OHTAKE et al., 2003); (d)

MLS (DEY e SUN, 2005); (e) Poisson (KAZHDAN et al., 2006); (f) Graph Cuts (LEMPITSKY e BOYKOV, 2007).

Métodos baseados em Delaunay: A outra abordagem, que é muito comum para a reconstrução de superfície, é utilização da triangulação de Delaunay: a ideia é que quando a amostragem é livre de ruído e densa o suficiente, pontos próximos na superfície deverão ser também próximos no espaço. Eliminando as faces dos tetraedros de Delaunay de acordo com alguns critérios, é possível a reconstrução de uma malha triangular (LABATUT et al., 2009), Fig. 2.6.

Entre os métodos baseados em Delaunay, talvez os algoritmos mais conhecidos são: o *Crust* (AMENTA et al., 1998), (AMENTA et al., 2001) e o *COCONE* (AMENTA et al., 2002), (DEY e GOSWAMI, 2003), (DEY et al., 2012 e 2013).

- Os Algoritmos *Crust* exploram o fato de que as células de pontos Voronoi na superfície são alongadas numa direção perpendicular à superfície em questão. Os vértices extremos destas células, denominadas polos, podem ser utilizados para estimar o eixo mediano e filtrar faces não pertencentes à superfície. O mais utilizado destes algoritmos é o *Power Crust* (AMENTA et al., 2001), mais robusto para as entradas realistas, que se baseia no diagrama de Power, um diagrama de Voronoi ponderado dos polos. Uma modificação simples, sugerido em Mederos et al. (2005), melhora a robustez do método em relação aos ruídos.
- Algoritmos *COCONE* usam pólos em uma maneira mais simples para comparar faces normais com os vetores formados pelos pólos. O *COCONE* robusto de Dey e Goswami (2006) generaliza a definição de pólos para lidar com um modelo específico de ruído. Enquanto Amenta e Bern (1999) foram os primeiros a prestarem garantias teóricas para superfícies lisas com a noção da dimensão local e ϵ -amostragem. Vários dos algoritmos mencionados também são comprovadamente corretos na ausência de ruído e *outliers* ou sob modelos específicos de ruídos relacionados com a dimensão local. Em contraste com estas abordagens de geometria computacional, Chaine (2003) propõe traduzir o esquema de convecção da superfície através da triangulação de Delaunay dos pontos de entrada. Degradações dos dados de entrada podem fazer estas técnicas locais falharem.

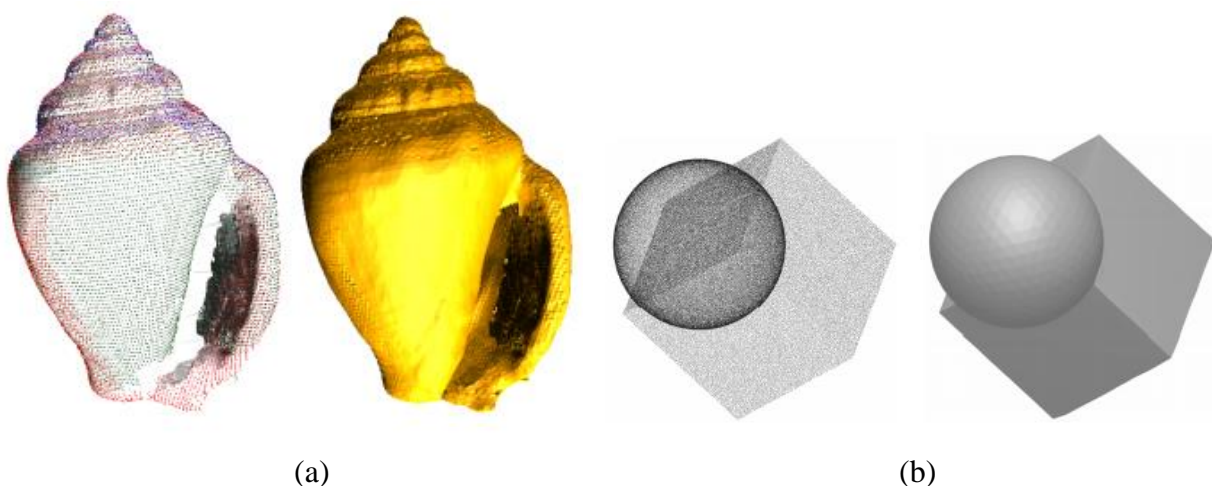


Figura 2.6 - Exemplos da aplicação do métodos baseados em Delaunay: (a) Power Crust (AMENTA et al., 2001) e (b) COCONE.(DEY et al., 2012).

Métodos baseados em B-Splines: As B-splines, originária das funções de Bézier (BARTELS et al., 1986), (BEZIER, 1987), (CHENIN et al, 1986) e das splines, consistem em segmentos de curvas cujos coeficientes polinomiais não dependem de todos os pontos de controle. Desta forma, ao mover um ponto de controle, a área afetada da curva é menor e o tempo de cálculo dos coeficientes é reduzido. A continuidade das B-splines é a mesma das splines, mas geralmente não interpola seus pontos de controle.

As superfícies interpoladas são construídas através da utilização das splines e/ou combinando métodos especiais de interpolação com triangulações ou curvas B-splines. Um exemplo é a utilização das NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) que reproduz com boa exatidão a forma do modelo físico e, ainda, possibilita a alteração da forma. Nesses métodos é comum o uso de splines cúbicas pela facilidade do tratamento matemático.

Alguns dos métodos mais atuais que utilizam B-Splines são, Fig. 2.7:

- B-Spline triangular (*Triangular B-Splines*) – Neste método, o usuário especifica o grau n da superfície B-spline triangular e o erro de ajuste admissível ϵ . O procedimento de reconstrução da superfície gera domínios triangulares de B-spline sobre a superfície que possuem continuidade C^{n-1} ao longo da região lisa e C^0 sobre as características nítidas. Todos os nós e pontos de controles são determinados através da minimização de uma combinação linear de funções de interpolação e equidade (HE e QIN, 2004).
- B-Spline implícita (*Implicit B-Splines - IBS*) – Utiliza uma função bivariada do tensor produto de duas B-Splines para a aproximação dos pontos da superfície. Este método

sempre vem em conjunto com outro para otimizar a construção da superfície (ROUHANI et al., 2015).

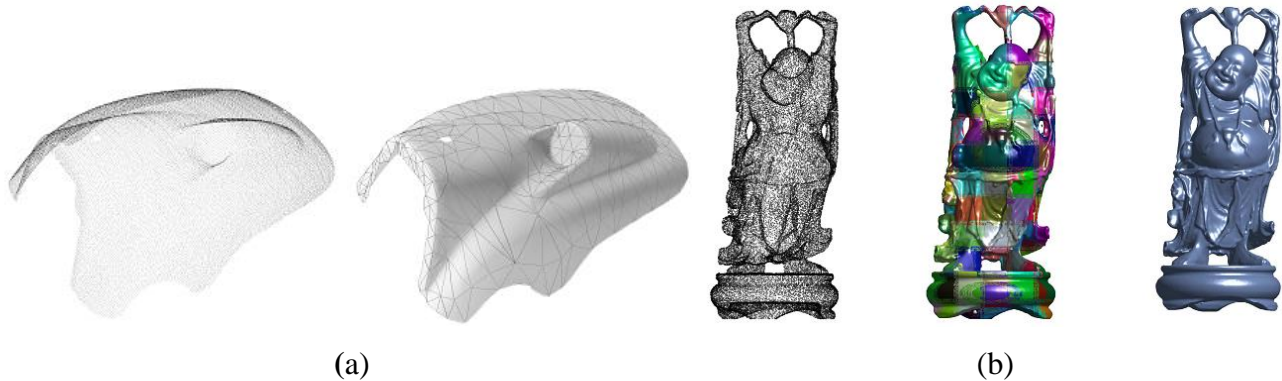


Figura 2.7 - Exemplos da aplicação dos métodos baseados em B-Splines: (a) Triangular B-Spline (HE e QIN, 2004) e (b) IBS (ROUHANI et al., 2015).

As técnicas para reconstrução gráfica de objetos reais são muitas, mas todas elas têm aplicação em uma área específica ou restrições quanto aos dados. Os problemas de ruído, sombra (falhas de leitura por detalhes ocultos), arestas e contornos sinuosos restringem cada método tornando difícil a elaboração de um método genérico e eficiente.

A reconstrução através de fatias (seções transversais), associada a B-Splines, permite reproduzir com fidelidade a superfície do objeto e os parâmetros de contornos são simples de serem aplicados (PIEGL e TILLER, 1996), (BOISSONNAT e MEMARI, 2007).

Uma importante aplicação da reconstrução de superfícies a partir de seções transversais é na imagem médica. A tomografia computadorizada gera imagens de seções transversais de partes do corpo sendo então necessário a utilização deste método para se obter um modelo tridimensional (KELS e DYN, 2011), Fig. 2.8.

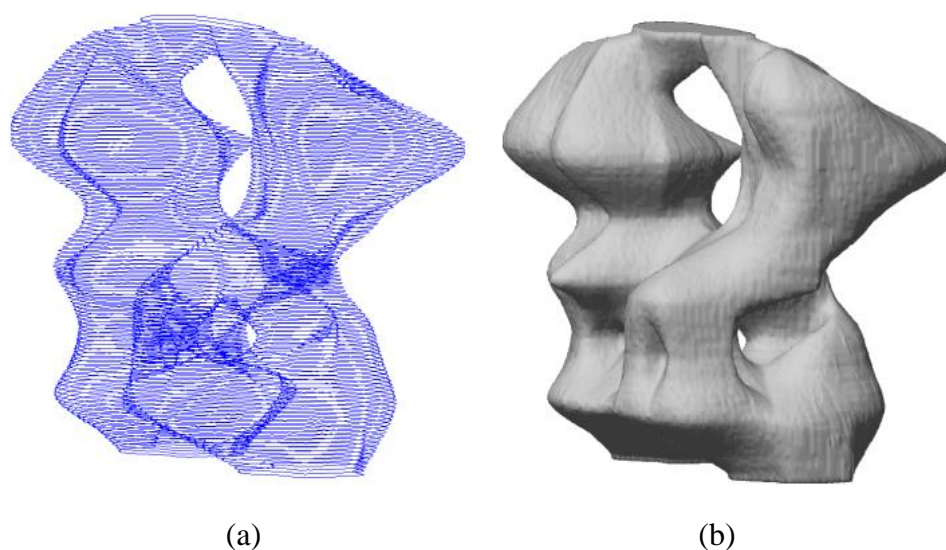


Figura 2.8 - (a) Seções transversais e (b) imagem renderizada (KELS e DYN, 2011).

2.4. Digitalizadores

Digitalizadores tridimensionais são equipamentos construídos com intuito de realizar a análise do objeto real para obter dados de sua forma e/ou de sua cor, para que com estes dados possam construir modelos digitais tridimensionais. O objetivo de um digitalizador é de criar uma nuvem de pontos a partir do procedimento de “leitura” da superfície do objeto físico. Muitas vezes, o digitalizador é projetado em função da forma de aquisição dos dados, ou seja, com contato ou sem contato.

Alguns digitalizadores de contato são as unidades robotizadas e os sistemas de medição de coordenadas (*CMM – Coordinate Measuring Machines*). Já os digitalizadores para os sistemas óticos de aquisição, em geral, consistem em projetos específicos para este fim como pode ser visto nas Figs. 2.9 a 2.13.

Independentemente do tipo de aquisição dos dados, e de forma resumida, as características básicas de um digitalizador tridimensional são (DÍAZ, 2011):

- Flexibilidade para a leitura de qualquer objeto;
- Boa resolução para possibilitar a geração de uma nuvem de pontos com mínimo erro;
- Alta velocidade de aquisição de dados, pois uma digitalização de um objeto trabalha com milhares ou até mesmo milhões de pontos;
- Insensíveis a pequenas mudanças de iluminação e à reflexão de superfícies do ambiente;

- Portabilidade e facilidade no uso;
- Armazenagem automática dos dados.

A seguir alguns exemplos de digitalizadores encontrados no mercado e em pesquisas, Figs. 2.9 a 2.13.

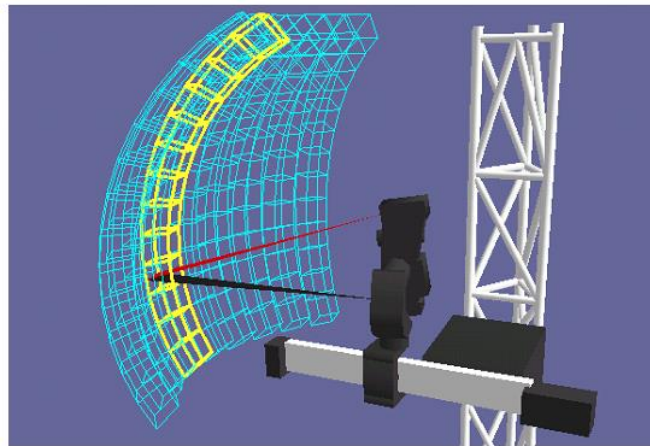


Figura 2.9 - Imagem representativa do scanner da empresa Cyberware Inc e seu espaço de trabalho (LEVOY et al., 2000)



Figura 2.10 - Scanner VISSCAN-3D projetado pelo GRACO-UnB (GINANI, 2008)



(a)



(b)

Figura 2.11 - Hexagon Metrology (a) LEICA T-SCAN e (b) ROMER ABSOLUTE ARM.



Figura 2.12 - 3D SCANNER HD da empresa NextEngine



Figura 2.13 - SURVEYOR ZS SERIES da empresa Laser Design Inc

CAPÍTULO III

AJUSTE DE CURVAS E SUPERFÍCIES UTILIZANDO B-SPLINES

3.1. Introdução

Na matemática são utilizados dois processos para realizar um ajuste de curva: interpolação e aproximação. A interpolação tem como característica a curva passar necessariamente por todos os pontos utilizados para o ajuste. Já para a aproximação a curva não necessariamente passa pelos pontos.

A reconstrução de superfícies digital se resume a duas etapas:

- **Leitura do objeto real:** é feita a leitura por meio de algum dispositivo robótico ou não que vai fazer a leitura das coordenadas da superfície do objeto. Neste trabalho será utilizado um scanner 3D construído no laboratório de Automação e Robótica, que faz a leitura por meio de um laser, resultando em um conjunto com milhares de pontos lidos representando toda a superfície. Este conjunto de pontos é conhecido como nuvem de pontos.
- **Reconstrução da superfície:** a partir da nuvem de pontos é utilizado um algoritmo para a reconstrução da superfície, conforme descrito no Capítulo 2. Em geral, os métodos utilizados efetuam, inicialmente, uma redução de quantidade de pontos lidos para reduzir o tempo de processamento.

Na reconstrução de uma superfície não convém utilizar a interpolação devido ao grande número de pontos que representam a superfície, necessitando um cálculo computacional muito grande. Por isso, a utilização de uma aproximação com um baixo número de pontos de controle se torna mais vantajosa. Outro motivo é o fato da presença de um erro de leitura do digitalizador que está contido nas nuvens de pontos. De acordo com (FERREIRA, 2013; OZAKI et al., 2003) os robôs industriais possuem uma boa precisão no controle de posição, porém um controle não muito preciso de *tracking*.

Ou seja, o robô passa pelos pontos interpolados com um erro mínimo, porém na trajetória entre estes pontos o erro se eleva, pois ele não consegue seguir a trajetória planejada. Assim uma aproximação poderia resultar em uma minimização deste efeito, já que não força a curva a passar sobre todos os pontos, resultando em uma curva suave que melhor se adequa ao conjunto de pontos.

Outra vantagem na utilização da aproximação é o fato de poder fazer o ajuste de maneira que a curva passe mais perto ou mais distante de um certo ponto. Isto pode ser feito pela aplicação de pesos no ajuste por B-Splines.

Neste capítulo será apresentada uma revisão geral das B-Splines e ainda os métodos de interpolação e aproximação via métodos dos mínimos quadrados para curvas e superfícies. Este capítulo é a base deste trabalho para a reconstrução de superfícies a partir de uma nuvem de pontos não organizados.

3.2. B-Splines

A curva B-Spline é uma das curvas paramétricas mais utilizadas para ajustes devido à facilidade com que se pode fazer alterações em partes dela sem que se altere toda a curva. Seu equacionamento também é definido de maneira simples e conciso, graças às *funções base B-Spline* que faz a ponderação do efeito de cada ponto de controle para o ponto da curva calculado.

Elas são classificadas em dois grupos, Racionais e Não-Racionais. As B-Splines Racionais se diferenciam das Não-Racionais pela utilização de um valor de peso, diferente de 1, associado a cada ponto de controle, fazendo com que a curva se aproxime ou afaste mais do ponto de controle em questão.

A Equação 3.1 representa as B-Splines Não-Racionais.

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i \quad a \leq u \leq b \quad (3.1)$$

A Equação 3.2 representa as B-Splines Racionais.

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i \cdot w_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot w_i} \quad a \leq u \leq b \quad (3.2)$$

Onde: $C(u)$ - ponto pertencente à curva B-Spline calculado para o nó u ;

u - nó limitado entre dois valores a e b ;

$N_{i,p}(u)$ - representa a i -ésima função base de grau p ;

P_i - o i -ésimo ponto de controle;

n - número total de pontos de controle;

w_i - o i -ésimo peso associado ao i -ésimo ponto de controle P_i .

As B-Splines ainda podem ser classificadas de acordo com a distribuição do vetor de nós:

- Uniforme ou não-uniforme – Depende da uniformidade do vetor de nós, e que será abordado no item 3.2.3;

Particularmente, as B-Splines racionais com vetores de nós não uniformes são denominadas de *NURBS (Non Uniform Rational B-Spline)*.

3.2.1. Funções base B-Splines

Existem diversas formas de se obter as funções base B-Splines, porém será utilizada a formula da recorrência devido a deBoor, Cox e Mansfield (Cox72; DeBoor72; 78), também conhecida como formula de recorrência de Cox-deBoor. Este método também é o que apresenta melhor desempenho computacional (PIEGL; TILLER, 1997).

Dado $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ uma sequência crescente de números reais, denominados de nós. A i -ésima função base B-Spline de grau p , $N_{i,p}$, é definida por:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad i = 0, \dots, m-1 \quad (3.3)$$

Para mostrar como utilizar a equação Eq. (3.3), é apresentado um exemplo, (PIEGL; TILLER, 1997).:

Seja o vetor nó $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ e $p = 2$, as funções bases de grau 0, 1 e 2, são representadas nas Figs. 3.1 a 3.3. O eixo vertical

representa o valor da função base e no eixo horizontal o nó correspondente. Cada traço neste eixo representa a quantidade de vezes que o nó aparece no vetor de nós.

As funções base de grau zero são:

$$N_{0,0} = N_{1,0} = 0 \quad -\infty < t < \infty$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$N_{3,0} = \begin{cases} 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$N_{4,0} = \begin{cases} 1 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$N_{5,0} = \begin{cases} 1 & 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$N_{6,0} = 0 \text{ para } -\infty < t < \infty$$

$$N_{7,0} = \begin{cases} 1 & 4 \leq t < 5 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$N_{8,0} = N_{9,0} = 0 \quad -\infty < t < \infty$$

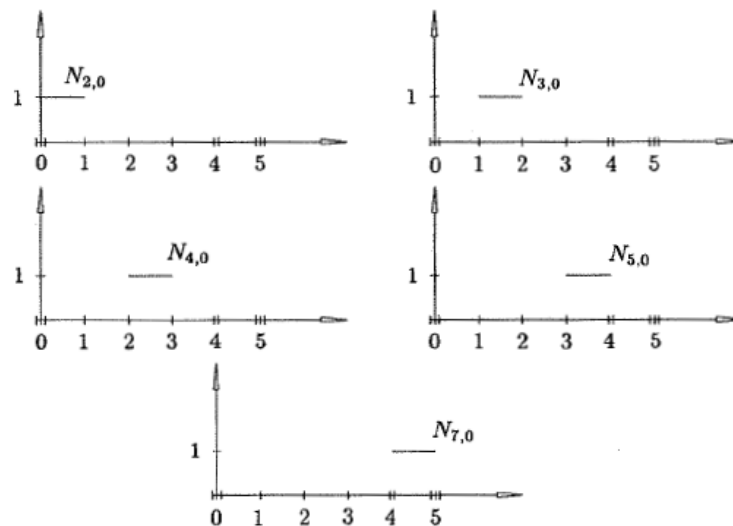


Figura 3.1 - Funções base de grau zero, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ (PIEGL; TILLER, 1997).

As funções base de grau 1 são:

$$N_{0,1} = \frac{t-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-t}{0-0} N_{1,0} = 0 \quad -\infty < t < \infty$$

$$\begin{aligned}
N_{1,1} &= \frac{t-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-t}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \\
N_{2,1} &= \frac{t-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{2-t}{2-1} N_{3,0} = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \\
N_{3,1} &= \frac{t-1}{2-1} N_{3,0} + \frac{3-t}{3-2} N_{4,0} = \begin{cases} t-1 & 1 \leq t < 2 \\ 3-t & 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \\
N_{4,1} &= \frac{t-2}{3-2} N_{4,0} + \frac{4-t}{4-3} N_{5,0} = \begin{cases} t-2 & 2 \leq t < 3 \\ 4-t & 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \\
N_{5,1} &= \frac{t-3}{4-3} N_{5,0} + \frac{4-t}{4-4} N_{6,0} = \begin{cases} t-3 & 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \\
N_{6,1} &= \frac{t-4}{4-4} N_{6,0} + \frac{5-t}{5-4} N_{7,0} = \begin{cases} 5-t & 4 \leq t < 5 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \\
N_{7,1} &= \frac{t-4}{5-4} N_{4,0} + \frac{5-t}{5-5} N_{8,0} = \begin{cases} t-4 & 4 \leq t < 5 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \\
N_{8,1} &= \frac{t-5}{5-5} N_{8,0} + \frac{5-t}{5-5} N_{9,0} = 0 \quad -\infty < t < \infty
\end{aligned}$$

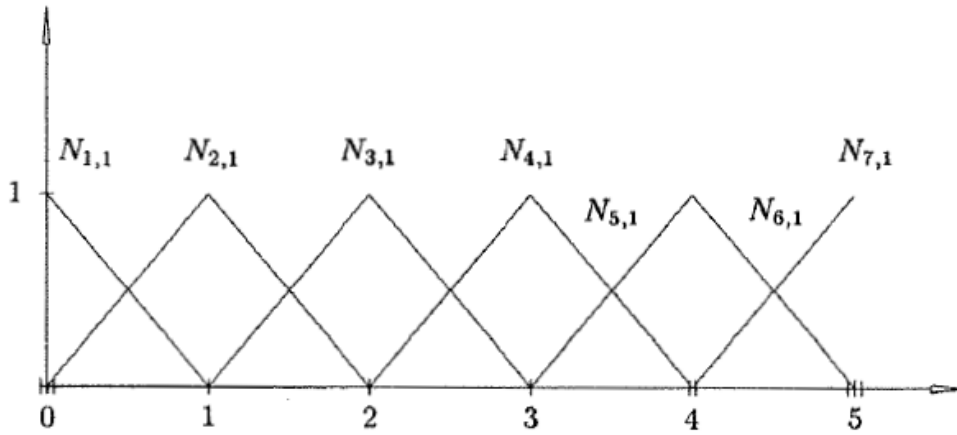


Figura 3.2 - Funções base do primeiro grau, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ (PIEGL; TILLER, 1997).

Funções base de grau 2 onde todos os seguintes $N_{i,2}$ são iguais a zero para os intervalos não especificados:

$$N_{0,2} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = (1-u)^2 \quad 0 \leq u < 1$$

$$\begin{aligned}
N_{1,2} &= \frac{u-0}{1-0} N_{0,1} + \frac{2-u}{2-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u - 3/2 u^2 & 0 \leq u < 1 \\ 1/2 (2-u)^2 & 1 \leq u < 2 \end{cases} \\
N_{2,2} &= \frac{u-0}{2-0} N_{2,1} + \frac{3-u}{3-1} N_{3,1} = \begin{cases} 1/2 u^2 & 0 \leq u < 1 \\ -3/2 + 3u - u^2 & 1 \leq u < 2 \\ 1/2 (3-u)^2 & 2 \leq u < 3 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \frac{u-1}{3-1} N_{3,1} + \frac{4-u}{4-2} N_{4,1} = \begin{cases} 1/2 (u-1)^2 & 1 \leq u < 2 \\ -11/2 + 5u - u^2 & 2 \leq u < 3 \\ 1/2 (4-u)^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \frac{u-2}{4-1} N_{4,1} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,1} = \begin{cases} 1/2 (u-2)^2 & 2 \leq u < 3 \\ -16 + 10u - 3/2 u^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases} \\
N_{5,2} &= \frac{u-3}{4-3} N_{5,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{6,1} = \begin{cases} (u-3)^2 & 2 \leq u < 3 \\ (5-u)^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases} \\
N_{6,2} &= \frac{u-4}{5-4} N_{6,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,1} = 2(u-4)(5-u) \quad 4 \leq u < 5 \\
N_{7,2} &= \frac{u-4}{5-4} N_{7,1} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,1} = (u-4)^2 \quad 4 \leq u < 5
\end{aligned}$$

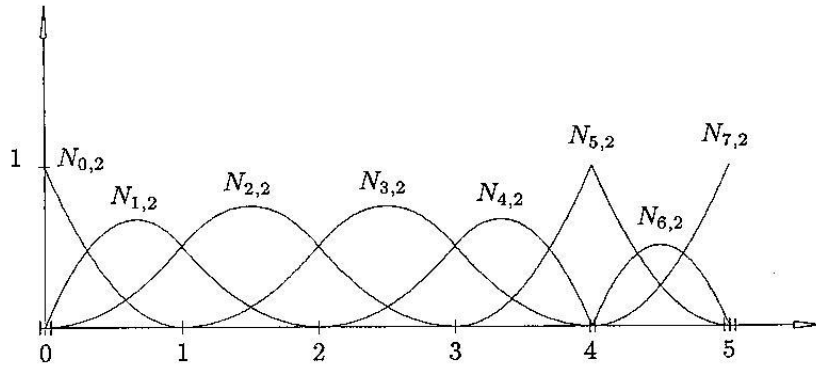


Figura 3.3 - Função base do segundo grau, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ (PIEGL; TILLER, 1997).

3.2.2. Derivada das funções base B-Splines

De acordo com Piegl e Tiller (1997), a derivada da função de base é dada por:

$$N'_{i,p} = \frac{p}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) = 0 \quad (3.4)$$

A diferenciação repetida da Eq. (3.4) permite obter a equação geral da k -ésima derivada, ou seja:

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p}-u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} \right) \quad (3.5)$$

Outra generalização que permite obter a k -ésima derivada de $N_{i,p}(u)$ em termos das funções $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$ é dada por:

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k} \quad (3.6)$$

Onde,

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{k,0} = \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1}-u_i}$$

$$a_{k,j} = \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1}-u_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1$$

$$a_{k,k} = \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1}-u_{i+k}}$$

Deve-se observar que k não deve exceder p (as derivadas de alta ordem são nulas) e os denominadores envolvendo as diferenças entre os nós podem ser nulos: este caso o quociente é definido como zero.

Uma equação adicional para o cálculo das derivadas das funções base B-Splines em função da k -ésima derivada de $N_{i,p-1}$ e $N_{i+1,p-1}$ é:

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = \frac{p}{p-k} \left(\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}^{(k)} - \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}^{(k)} \right) \quad k = 0, \dots, p-1 \quad (3.7)$$

A Figura 3.4b apresenta as derivadas correspondentes das funções de base da Fig. 3.4a.

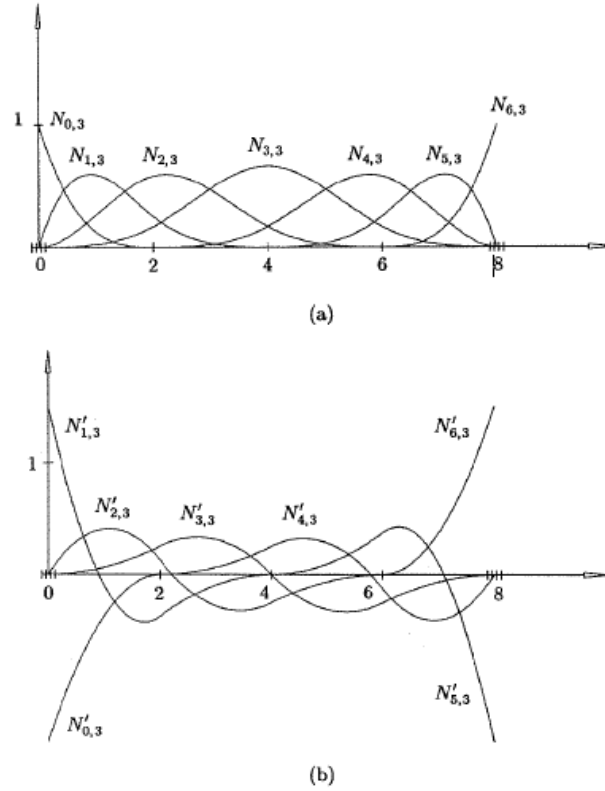


Figura 3.4 - (a) Função base cúbica; (b) derivada das funções base cúbicas (PIEGL; TILLER, 1997).

Na Figura 3.5 são apresentadas todas as derivadas não nulas de $N_{i,3}$.

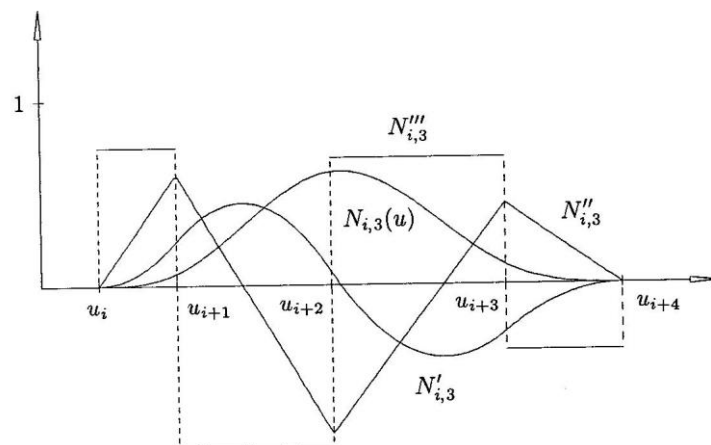


Figura 3.5 - $N_{i,3}$ e todas suas derivadas não nulas (PIEGL; TILLER, 1997).

3.2.3. Vetor de nós

O vetor de nós U afeta diretamente o perfil da curva como pode ser observado nos exemplos apresentados na seção 3.2.1 e pela Eq. 3.3 que define a função de base B -*Spline*.

As curvas podem ser classificadas como engastadas (*clamped*) e livres (*unclamped*). As curvas do tipo engastadas (*clamped*) começam e(ou) terminam no primeiro e(ou) último ponto de controle, respectivamente, Fig. 3.7a. No caso das curvas livres (*unclamped*) a curva tem início e(ou) fim próximos dos pontos de controle inicial e(ou) final, respectivamente, Fig. 3.7b. Isso significa que a curva pode ser engastada (*clamped*) ou livre (*unclamped*) no seu início, no seu fim ou em ambos. Nos dois casos, o vetor de nós U pode ser uniforme e não uniforme como descritos a seguir com exemplos.

- Engastada (*Clamped*): os vetores de nós possuem os primeiros e últimos nós com multiplicidade igual a $p+1$, exemplo: $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ para $p = 2$.
- Livre (*Unclamped*): não apresenta multiplicidade para os primeiro e último nós, exemplo:
 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9\}$.
- Uniforme: o vetor de nós possui a mesma distância internodal (vão) ou seja, o mesmo espaçamento entre nós, exemplo: $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$.
- Não uniforme: Não há a mesma distância de vão, exemplo:
 $U = \{0, 0, 0, 1, 3, 4, 5, 7, 7, 7\}$.

A definição de engastada (*clamped*) /livre (*unclamped*) podem ser também encontrados como não-periódico (*nonperiodic*)/periódico (*periodic*), respectivamente.

Para realizar a conversão de engastada (*clamped*) para livre (*unclamped*) é necessário analisar os p vãos iniciais e p finais, e então recalculer os p nós à direita e à esquerda. Também é necessário recalculer os $p-1$ pontos de controle à esquerda e à direita. (PIEGL; TILLER, 1997).

Para os nós é feito o cálculo com as equações a seguir, para uma curva aberta:

$$n = m - p - 1 \quad (3.8)$$

$$u_{p-i-1} = u_{p-i} - (u_{n-i+1} - u_{n-i}) \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (3.9)$$

$$u_{n+i+2} = u_{n+i+1} + (u_{p+i+1} - u_{p+i}) \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (3.10)$$

Como exemplo dessa conversão, considere um vetor de nós U e o grau p :

$U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ e $p = 2$:

$n = 10 - 2 - 1 = 7$

Nós à esquerda:

$i = 0 \rightarrow u_1 = u_2 - (u_8 - u_7) = 0 - 1 = -1$;

$i = 1 \rightarrow u_0 = u_1 - (u_7 - u_6) = -1 - 0 = -1$;

Nós à direita:

$i = 0 \rightarrow u_9 = u_8 + (u_3 - u_2) = 5 + 1 = 6$;

$i = 1 \rightarrow u_{10} = u_9 + (u_4 - u_3) = 6 + 1 = 7$;

Portanto, o novo vetor de nós fica:

$U = \{-1, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7\}$

Já para os pontos de controle, o cálculo não é tão direto como os nós. É necessário realizar o cálculo dos pontos de controle a cada cálculo do nó realizado anteriormente, mantendo a mesma curva original. O algoritmo para realizar o cálculo dos nós e dos pontos de controle, tomando por base o algoritmo A12.1 apresentado por Piegl e Tiller (1997) e elaborado no MATLAB é:

```
function [Pw,U]=UnclampCurve(n,p,U,Pw)
% Algoritmo de transformação de curva clamped para unclamped
% Algorithm A12.1 - The NURBS Book 2nd Edition - PIEGL; TILLER, 1997
%
for i=0:(p-2) % cálculo dos nós a esquerda
    U(p-i)=U(p-i+1)-(U(n-i+1)-U(n-i));
    k=p;
    for j=i:-1:0
        % calculo dos pontos de controle a esquerda
        alfa=(U(p+1)-U(k))/(U(p+j+2)-U(k));
        Pw(j+1,:)=(Pw(j+1,:)-alfa*Pw(j+2,:))/(1-alfa);
        k=k-1;
    end
end
U(1)=U(2)-(U(n-p+2)-U(n-p+1)); % cálculo do primeiro nó
for i=0:(p-2) % cálculo dos nós a direita
    U(n+i+2)=U(n+i+1)+(U(p+i+2)-U(p+i+1));
    for j=i:-1:0
        % cálculo dos pontos de controle a direita
        alfa=(U(n+1)-U(n-j))/(U(n-j+i+2)-U(n-j));
        Pw(n-j,:)=(Pw(n-j,:)-(1-alfa)*Pw(n-j-1,:))/alfa;
    end
end
U(n+p+1)=U(n+p)+(U(2*p+1)-U(2*p)); % cálculo do último nó
```

Na Figura 3.6 é apresentado um exemplo da utilização do algoritmo acima para o processo de *unclamping* de uma curva de quarto grau, feito apenas para o lado esquerdo da curva.

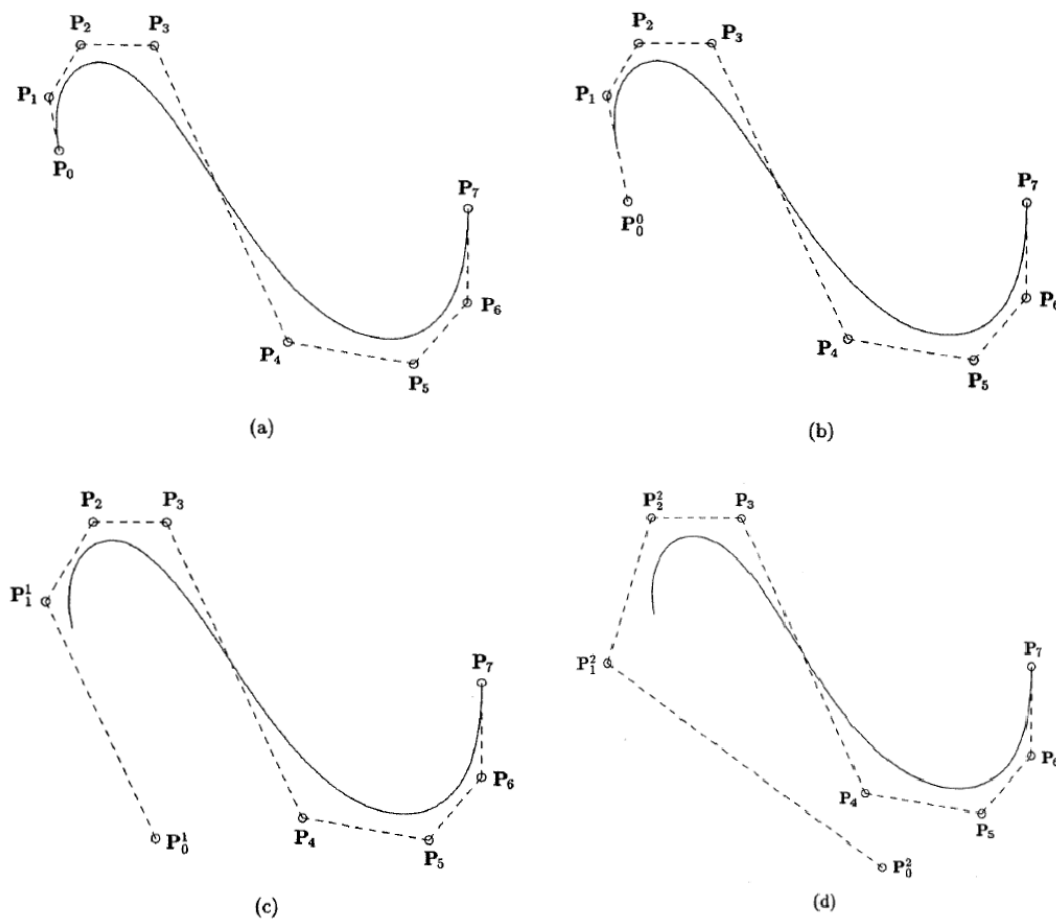


Figura 3.6 - Processo de unclamping da parte esquerda de uma curva quártica. (a) Curva “clamped”; (b) para $i=0$; P_0^0 calculado; (c) $i=1$; P_0^1 e P_1^1 calculado; (d) $i=2$; P_0^2, P_1^2 e P_2^2 calculado (PIEGL; TILLER, 1997).

3.2.4. Curva aberta ou fechada

As curvas podem ser classificadas como abertas ou fechadas. Uma curva é dita aberta quando o seu último ponto é diferente do primeiro ponto, Fig. 3.7. E fechada quando o seu primeiro ponto coincide com seu último ponto, Fig. 3.9.

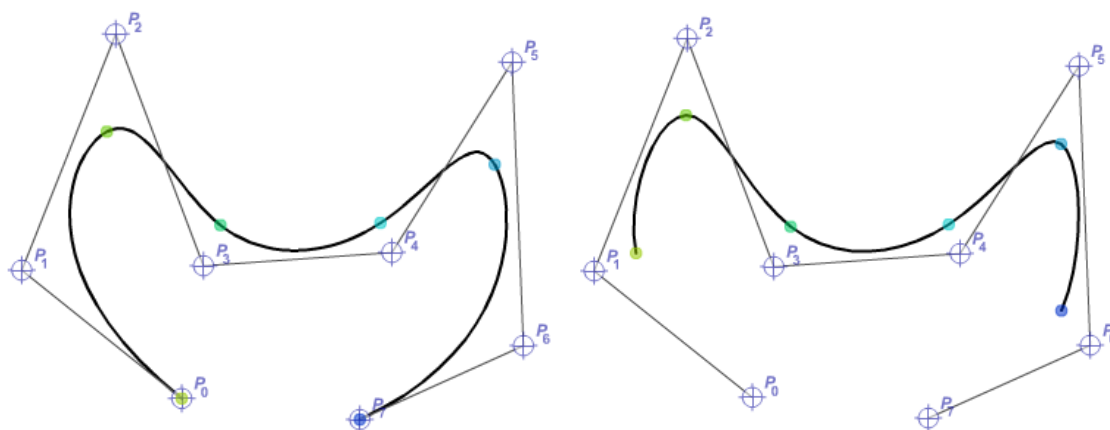


Figura 3.7 - Curvas abertas; (a) Clamped; (b) Unclamped.

Para as curvas fechadas é necessário definir a continuidade no ponto de união. Existem dois tipos de continuidade: paramétricas e geométricas:

- Continuidade Paramétrica (C), é uma continuidade matemática, definida pelo parâmetro utilizado para traçar as curvas. Este tipo de continuidade é garantida quando as derivadas são iguais em direção e magnitude:
 - Continuidade C^0 – O ponto de fim da primeira curva é igual ao ponto de início da segunda curva, ou seja, as duas curvas se encontram.
 - Continuidade C^1 – possui continuidade C^0 e a primeira derivada no ponto de junção tem a mesma direção e o mesmo tamanho no ponto de intersecção. É dito que as curvas possuem continuidade $C1$ no parâmetro t que definem as curvas.
 - Continuidade C^2 – possui continuidade C^1 e a segunda derivada no ponto de junção é a mesma para as duas curvas, ou seja, elas possuem a mesma curvatura no ponto de intersecção.
 - Continuidade C^k – possui continuidade C^{k-1} e a k -ésima derivada no ponto de junção é a mesma para as duas curvas.
- Continuidade Geométrica (G), é uma continuidade física, sendo menos restritiva que a continuidade paramétrica. Este tipo de continuidade é garantida quando as derivadas são iguais apenas em direção:
 - Continuidade G^0 – Equivalente à continuidade C^0 ;
 - Continuidade G^1 – Possui continuidade G^0 e a primeira derivada do ponto de união possuem apenas a mesma direção, porém valores diferentes para as duas curvas.

- Continuidade G^2 – Possui continuidade G^1 e segunda derivada possui a mesma direção, porém valores diferentes para as duas curvas.
- Continuidade G^k – Possui continuidade G^{k-1} e a k-ésima derivada possui a mesma direção, porém valores diferentes para as duas curvas.

Na Figura 3.8 são apresentados exemplos de continuidade paramétricas e geométricas.

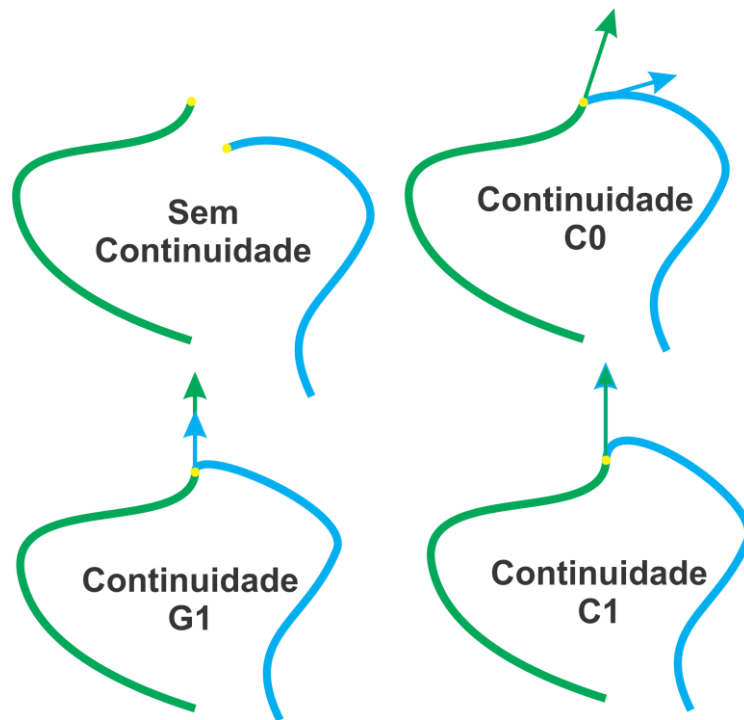


Figura 3.8 - Exemplos de continuidades geométricas e paramétricas

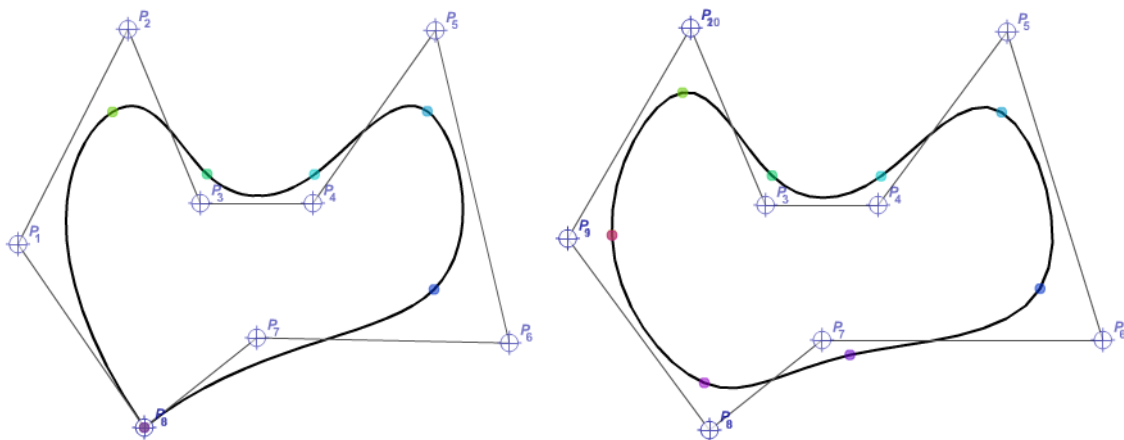


Figura 3.9 - Curvas fechadas; (a) Clamped C^0 com 9 Pontos de controle; (b) Unclamped C^2 com 11 Pontos de controle.

De acordo com (PIEGL; TILLER, 1997), uma curva na configuração *clamped*, pode ser aberta ou fechada geometricamente. A continuidade C^k para uma curva fechada depende das primeiras e últimas k distâncias entre nós e dos primeiros e últimos $k+1$ pontos de controle.

Portanto, uma curva pode ser contínua com o vetor de nós na condição de *clamped* ou *unclamped*. É possível obter o fechamento da curva considerando o vetor nós no formato *unclamped*, adicionando pontos de controle ao redor do ponto de fechamento da curva no formato *clamped*. Esta técnica tem o nome de *wrapping* e pode ser feita para os pontos de controle ou para o vetor de nós, (ALAVALA, 2008).

Wrapping nos pontos de controle é feita da seguinte forma:

1. Definir o vetor de nós *unclamped* e uniforme;
2. Repetir os primeiros p e os últimos p pontos de controle, ou seja,
 $P_0 = P_{n-p+1}, P_1 = P_{n-p+2}, \dots, P_{p-2} = P_{n-1}, P_{p-1} = P_n$; Fig. 3.10;
3. A curva construída será uma B-Spline fechada com continuidade C^{p-1} .

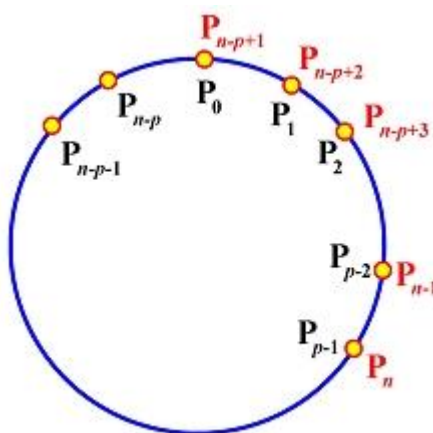


Figura 3.10 - Wrapping nos pontos de controle (SHENE, 1998).

Wrapping nos nós é feita da seguinte forma:

1. Realizar o fechamento da curva pela repetição do primeiro ponto de controle:
 $P_{n+1} = P_0$;
2. Definir uma sequência de $n+1$ nós apropriados, u_0, \dots, u_n , não necessariamente uniforme. Essa é uma vantagem com relação ao método apresentado anteriormente;
3. Adicione $p+2$ nós ao fim fazendo uma repetição dos primeiros $p+2$:
 $u_{n+1} = u_0, u_{n+2} = u_1, \dots, u_{n+p+1} = u_p, u_{n+p+2} = u_{p+1}$, Fig. 3.11;

4. A B-Spline aberta de grau p definida pelos procedimentos acima com $n + 1$ pontos de controle e $n + p + 2$ nós, é fechada com continuidade C^{p-1} e ponto de junção $C(u_0) = C(u_{n+1})$, sendo o domínio desta curva o intervalo $[u_0, u_{n+1}]$.

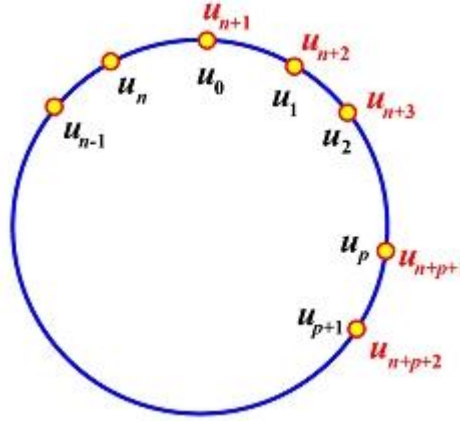


Figura 3.11 - Wrapping nos nós (SHENE, 1998).

3.2.5. As derivadas de uma curva B-Spline

Seja $C^{(k)}(u)$ a denotação da k -ésima derivada de $C(u)$. Para u fixo, pode-se obter a $C^{(k)}(u)$ pelo cálculo da k -ésima derivada da função base, $N_{i,p}^{(k)}(u)$, (PIEGL; TILLER, 1997), ou seja:

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) \cdot P_i \quad a \leq u \leq b \quad (3.11)$$

Existem outras maneiras de se calcular a derivada para um ponto da curva, porém neste trabalho será utilizada esta equação. Outros métodos foram apresentados na seção 3.2.2 e mais detalhes podem ser obtidos no livro *The NURBS Book, 2nd Edition*, pág. 91 (PIEGL; TILLER, 1997).

3.3. Alteração geométrica de B-Splines

Nesta seção são apresentados quatro métodos importantes para alteração de curvas e superfícies *B-Splines*: inserção de nós, remoção de nós, elevação de grau e redução de grau.

3.3.1. Inserção de nós

Seja uma curva $C^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \cdot P_i^w$ com o vetor de nós definido como $U = \{u_0, \dots, u_m\}$. E seja \bar{u} o nó a ser inserido com $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1})$. A inserção do nó no vetor U é feita de modo que o novo vetor de nós será:

$$U' = \{u_0, \dots, u_k, \bar{u}, u_{k+1}, \dots, u_m\} \quad (3.12)$$

E o novo vetor de pontos de controle será definido como $P' = \{P'_0, \dots, P'_{n+1}\}$. Sendo calculados com as seguintes equações:

$$P'_0 = \alpha_i \cdot P_i^w + (1 - \alpha_i) \cdot P_{i-1}^w \quad (3.13)$$

Onde:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k - p \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

A Figura 3.12 representa o método de inserção de nó. No exemplo, foi inserido o nó P'_4 e, consequentemente, os nós P_3 e P_4 foram realocados passando para P'_3 e P'_5 .

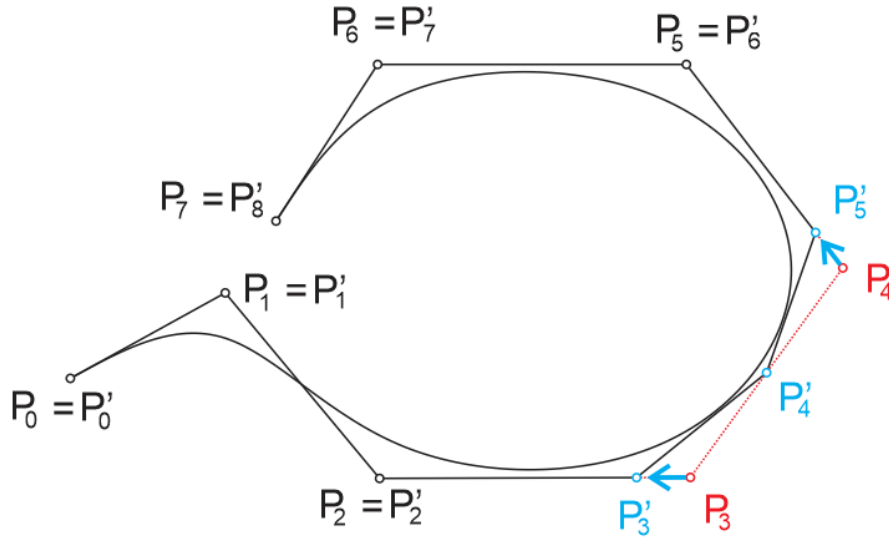


Figura 3.12 - Exemplo de inserção de nó (PIEGL; TILLER, 1997).

Existem mais duas utilidades para inserção de nós que não serão abordadas aqui: avaliação dos pontos e suas derivadas, e divisão de curvas, fazendo com que uma *B-Spline* possa ser dividida em várias curvas de *Bézier*.

3.3.2. Remoção de nós

O método de remoção de nós é o processo inverso do de inserção. Seja uma curva

$$C^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \cdot P_i^w \quad (3.15)$$

definida com $U = \{u_0, \dots, u_m\}$. U_t será o vetor de nós obtido após a remoção de u_r t vezes para $U(1 \leq t \leq s)$. Dizemos que u_r é t vezes removível se $C^w(u)$ possui uma representação precisa na forma:

$$C^w = \sum_{i=0}^{n-t} \overline{N}_{i,p} \cdot Q_i^w \quad (3.16)$$

onde $\overline{N}_{i,p}(u)$ é a função base para U_t ou seja, as equações geometricamente e parametricamente representam a mesma curva.

Para que um nó possa ser removível, deve-se ter atenção quanto à continuidade da curva. Portanto o nó u_r é t vezes removível se e somente se a curva $C^w(u)$ possui continuidade C^{p-s+t} para $u = u_r$.

Assim o algoritmo de remoção de nós possui duas funções:

- Determinar se o nó é removível e quantas vezes;
- Calcular os novos pontos de controle Q_i^w .

Seja $u = u_r \neq u_{r+1}$ um nó com multiplicidade s , onde $1 \leq s \leq p$. As equações para calcular os novos pontos de controle para uma remoção de u são:

$$P_i^1 = \frac{P_i^0 - (1-\alpha_i)P_{i-1}^1}{\alpha_i} \quad r-p \leq i \leq \frac{1}{2}(2r-p-s-1) \quad (3.17)$$

$$P_j^1 = \frac{P_j^0 - \alpha_j P_{j+1}^1}{(1-\alpha_j)} \quad \frac{1}{2}(2r-p-s+2) \leq j \leq r-s \quad (3.18)$$

$$\alpha_k = \frac{u-u_k}{u_{k+p+1}-u_k} \quad k = i, j \quad (3.19)$$

A Figura 3.13 representa a remoção de nó. O procedimento é o inverso do apresentado na Fig. 3.12 ou seja, o ponto de controle P'_4 foi removido.

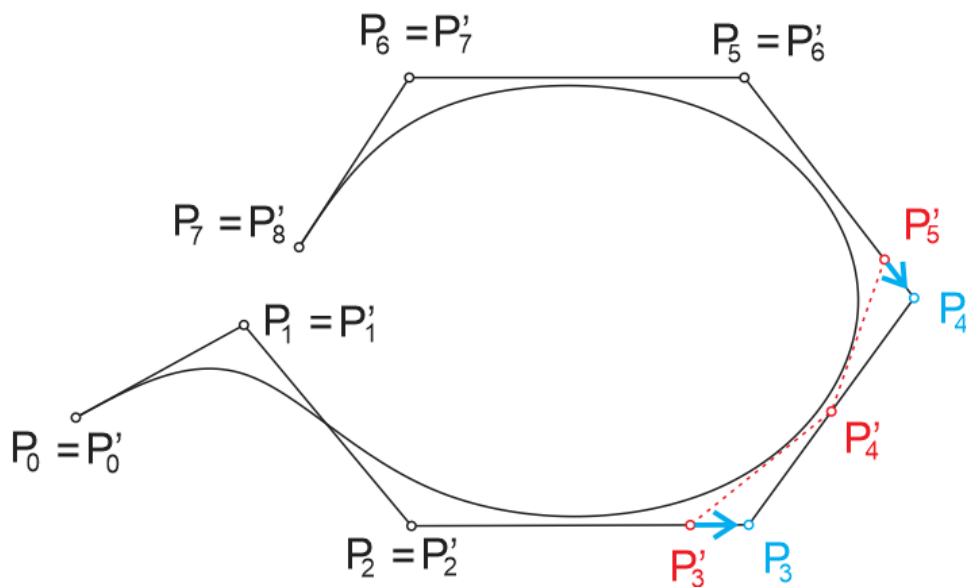


Figura 3.13 - Exemplo de remoção de nó, (PIEGL; TILLER, 1997).

3.3.3. Elevação de grau

Para elevar o grau de uma curva *B-Spline* de grau p é necessário encontrar uma curva de grau $p+1$ que possa representar os mesmos pontos da de grau menor, ou seja, dado uma curva

$$C_p = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \cdot P_i \quad (3.20)$$

deseja-se encontrar uma curva com grau $p+1$ em que

$$C_p = C_{p+1} = \sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p+1} \cdot Q_i \quad (3.21)$$

Portanto, o problema de elevar grau de uma curva se remete a calcular os pontos de controle e vetor de nós desconhecidos.

No processo existem três incógnitas: a quantidade de pontos de controle \hat{n} , o novo vetor de nós \hat{U} e os novos pontos de controle Q_i . Para determinar \hat{n} e \hat{U} , tem-se que:

$$U = \{u_0, \dots, u_m\} = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{p+1}, \underbrace{\{u_1, \dots, u_1\}}_{m_1}, \dots, \underbrace{\{u_s, \dots, u_s\}}_{m_s}, \underbrace{\{b, \dots, b\}}_{p+1} \quad (3.22)$$

Onde m_1, \dots, m_s representam a multiplicidade dos nós.

Um nó de multiplicidade m_i possui continuidade C^{p-m_i} , dado que a curva C_{p+1} deve possuir a mesma continuidade em todos os nós. Então, o mesmo nó deve ter multiplicidade $m_i + 1$. Assim tem-se que:

$$\hat{n} = n + s + 1 \quad (3.23)$$

$$\hat{U} = \{u_0, \dots, u_{\hat{m}}\} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+2}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+2}\} \quad (3.24)$$

$$\hat{m} = m + s + 2 \quad (3.25)$$

Restando, portanto, os pontos de controle a serem calculados. Uma maneira direta, porém não eficiente, seria resolver o sistema de equações lineares a seguir:

$$\sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p+1} \cdot Q_i = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \cdot P_i \quad (3.26)$$

Um método mais simples e mais eficiente é proposto por Piegl e Tiller (2007), que se baseia em:

- Decompor a *B-Spline* em i segmentos de curvas de Bézier;
- Elevar o grau dos i segmentos de curvas de Bézier, tal que:

$$Q_i = (1 - \alpha_i) \cdot P_i + \alpha_i \cdot P_{i-1} \quad (3.27)$$

$$\alpha_i = \frac{i}{p+1} \quad i = 0, \dots, p+1 \quad (3.28)$$

- Remover os nós desnecessários que separam as curvas de Bézier. Estes da mesma quantidade que foi inserido na decomposição.

As aplicações do método de elevação de grau são:

- Para formar uma superfície pelo produto tensor é necessário que todas as curvas estejam com o mesmo grau. Portanto, utiliza-se o método para padronizar os graus.

- Sejam duas curvas onde o ponto de fim de uma é igual ao ponto de início da outra. Para que se possa combiná-las e formar uma única curva é necessário que as duas tenham o mesmo grau.

3.3.4. Redução de grau

Seja uma curva $C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot Q_i$ de grau p com o vetor de nós:

$$U = \{u_0, \dots, u_m\} = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{p+1}, \underbrace{\{u_1, \dots, u_1\}}_{m_1}, \dots, \underbrace{\{u_s, \dots, u_s\}}_{m_s}, \underbrace{\{b, \dots, b\}}_{p+1} \quad (3.29)$$

Esta curva será de grau reduzível se e somente se ela possui uma representação precisa na forma:

$$C(u) = \hat{C}(u) = \sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p-1}(u) \cdot P_i \quad (3.30)$$

e vetor de nós:

$$\hat{U} = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_p, \underbrace{\{u_1, \dots, u_1\}}_{m_1-1}, \dots, \underbrace{\{u_s, \dots, u_s\}}_{m_s-1}, \underbrace{\{b, \dots, b\}}_p \quad (3.31)$$

Como no item anterior, pode-se concluir que:

$$\hat{n} = n - s - 1 \quad (3.32)$$

Pode-se notar que m_i pode ser igual a 1, resultando que o nó u_i não estará mais presente no vetor \hat{U} .

É sempre possível elevar o grau de uma curva, porém reduzir o grau de uma curva nem sempre é possível. É necessário também calcular um erro entre as duas curvas, $E(u) = |C(u) - \hat{C}(u)|$, pois a curva de grau reduzido nunca será precisamente igual a anterior. E assim uma curva será de grau reduzido somente se:

$$\max\{E(u)\} < TOL \quad (3.33)$$

Onde,

TOL – Tolerância para que a curva possa ter seu grau reduzido;

O método de redução de grau se baseia nas seguintes etapas:

- Decompor a B-Spline em i segmentos de curvas de Bézier;
- Reduzir o grau dos i segmentos de curvas de Bézier;
- Remover os nós desnecessários que separam as curvas de Bézier para obter a curva de grau reduzido, se o erro estiver dentro da tolerância;

Para calcular os pontos de controles é feita uma elevação de grau de $p-1$ a p . Assim é possível encontrar os pontos de controle, considerando:

$$r = \frac{p-1}{2} \quad (3.34)$$

$$\alpha_i = \frac{i}{p} \quad (3.35)$$

Primeiramente, resolvendo a Eq. (3.27) para p ímpar obtém:

$$P_0 = Q_0 \quad (3.36)$$

$$P_i = \frac{Q_i - \alpha_i P_{i-1}}{1 - \alpha_i} \quad i = 1, \dots, r \quad (3.37)$$

$$P_i = \frac{Q_{i+1} - (1 - \alpha_i) P_{i+1}}{\alpha_{i+1}} \quad i = p - 2, \dots, r + 1 \quad (3.38)$$

$$P_{p-1} = Q_p \quad (3.39)$$

Agora para p par:

$$P_0 = Q_0 \quad (3.40)$$

$$P_i = \frac{Q_i - \alpha_i P_{i-1}}{1 - \alpha_i} \quad i = 1, \dots, r - 1 \quad (3.41)$$

$$P_i = \frac{Q_{i+1} - (1 - \alpha_i) P_{i+1}}{\alpha_{i+1}} \quad i = p - 2, \dots, r + 1 \quad (3.42)$$

$$P_r = \frac{1}{2}(P_r^L + P_r^R) \quad (3.43)$$

$$P_{p-1} = Q_p \quad (3.44)$$

Onde:

$$P_r^L = \frac{Q_r - \alpha_r P_{r-1}}{1 - \alpha_r} \quad (3.45)$$

$$P_i = \frac{Q_{r+1} - (1 - \alpha_{r+1}) P_{r+1}}{\alpha_{r+1}} \quad (3.46)$$

3.4. Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados se resume a encontrar uma função contínua que melhor se ajuste aos pontos que se deseja ajustar, de maneira que a soma do quadrado das diferenças entre os dados e a função a ser encontrada seja mínimo possível.

3.4.1. Caso discreto

Seja um conjunto de pontos $[x_k, f(x_k)]$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, onde deseja ajustar uma função $\varphi(x)$ a esse conjunto de pontos de tal maneira que o desvio, $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$, seja mínimo.

Considerando que a função $\varphi(x)$ seja uma combinação linear de várias funções contínuas $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\varphi(x) = \alpha_1 \cdot g_1(x) + \alpha_2 \cdot g_2(x) + \cdots + \alpha_n \cdot g_n(x) \quad (3.47)$$

As funções $g_i(x)$ são escolhidas de acordo com o conjunto de pontos que se deseja ajustar. Normalmente se escolhe analisando o diagrama de dispersão dos pontos, Fig. 3.14.

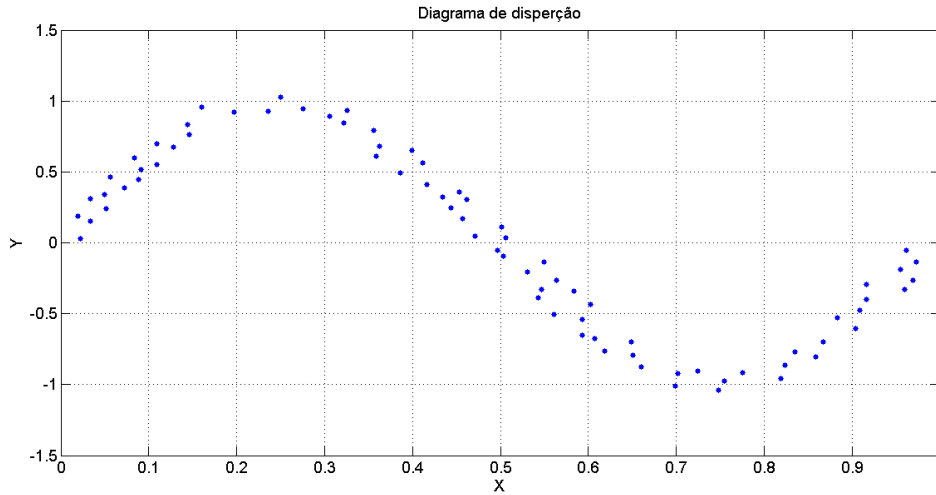


Figura 3.14 - Exemplo de diagrama de dispersão.

Já que as funções $g_i(x)$ são escolhidas de acordo com o diagrama de dispersão, então resta obter os coeficientes α_i . Neste caso é dito que o ajuste é linear sob os parâmetros α_i .

O método dos mínimos quadrados consiste em calcular os parâmetros α_i de maneira a minimizar F da seguinte equação:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^m [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 \quad (3.48)$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^m [f(x_k) - (\alpha_1 \cdot g_1(x_k) + \alpha_2 \cdot g_2(x_k) + \cdots + \alpha_n \cdot g_n(x_k))]^2 \quad (3.49)$$

Como $F(\alpha) \geq 0$, esta possui um limite inferior e portanto um mínimo, podendo ser determinado pela derivada primeira igualada a zero.

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.50)$$

Logo,

$$-2 \cdot \sum_{k=1}^m [f(x_k) - (\alpha_1 \cdot g_1(x_k) + \alpha_2 \cdot g_2(x_k) + \dots + \alpha_n \cdot g_n(x_k))] \cdot g_i(x_k) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.51)$$

Reorganizando, tem-se:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot \sum_{k=1}^m g_1(x_k) \cdot g_1(x_k) + \alpha_2 \cdot \sum_{k=1}^m g_1(x_k) \cdot g_2(x_k) + \dots + \alpha_n \cdot \sum_{k=1}^m g_1(x_k) \cdot g_n(x_k) = \sum_{k=1}^m g_1(x_k) \cdot f(x_k) \\ \alpha_1 \cdot \sum_{k=1}^m g_2(x_k) \cdot g_1(x_k) + \alpha_2 \cdot \sum_{k=1}^m g_2(x_k) \cdot g_2(x_k) + \dots + \alpha_n \cdot \sum_{k=1}^m g_2(x_k) \cdot g_n(x_k) = \sum_{k=1}^m g_2(x_k) \cdot f(x_k) \\ \vdots \\ \alpha_1 \cdot \sum_{k=1}^m g_n(x_k) \cdot g_1(x_k) + \alpha_2 \cdot \sum_{k=1}^m g_n(x_k) \cdot g_2(x_k) + \dots + \alpha_n \cdot \sum_{k=1}^m g_n(x_k) \cdot g_n(x_k) = \sum_{k=1}^m g_n(x_k) \cdot f(x_k) \end{cases}$$

Fazendo:

$$\begin{cases} a_{i,j} = \sum_{k=1}^m g_i(x_k) \cdot g_j(x_k) \\ b_i = \sum_{k=1}^m g_i(x_k) \cdot f(x_k) \end{cases}$$

Pode-se escrever o sistema da Eq. (3.51) da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot \alpha_1 + a_{1,2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{1,n} \cdot \alpha_n = b_1 \\ a_{2,1} \cdot \alpha_1 + a_{2,2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{2,n} \cdot \alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} \cdot \alpha_1 + a_{n,2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{n,n} \cdot \alpha_n = b_n \end{cases} \quad (3.52)$$

Fazendo a escolha das funções $g_i(x)$ de maneira que estas sejam linearmente independentes, tem-se um sistema linear $n \times n$ determinado, ou seja, apresentando apenas uma solução para os parâmetros α_i .

O erro do ajuste é o próprio valor de F , também denominado de desvio D , sendo este valor dependente de sua escolha para as funções $g_i(x)$, ou seja:

$$D = \sum_{k=1}^m [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 \quad (3.53)$$

3.4.2. Caso contínuo

Neste caso não existe mais um conjunto de pontos para ajuste da curva, mas sim uma função $f(x)$ em um certo intervalo $[a, b]$. O procedimento é o mesmo que o anterior, sendo necessário a escolha das funções $g_i(x)$ e assim calcular os parâmetros α_i de maneira que o desvio se torne mínimo, ou seja:

$$D = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \quad (3.54)$$

Da mesma maneira que o caso discreto, o sistema linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot \alpha_1 + a_{1,2} \cdot \alpha_2 + \cdots a_{1,n} \cdot \alpha_n = b_1 \\ a_{2,1} \cdot \alpha_1 + a_{2,2} \cdot \alpha_2 + \cdots a_{2,n} \cdot \alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} \cdot \alpha_1 + a_{n,2} \cdot \alpha_2 + \cdots a_{n,n} \cdot \alpha_n = b_n \end{cases} \quad (3.55)$$

Sendo,

$$a_{i,j} = \int_a^b g_i(x_k) \cdot g_j(x_k) \quad e,$$

$$b_i = \int_a^b g_i(x_k) \cdot f(x_k)$$

3.4.3. Método dos mínimos quadrados aplicado à B-Spline

De acordo com Piegl e Tiller (2007), seja uma curva *B-Spline* $C(\bar{u}_k)$, ajustada a um conjunto de pontos Q_k . O erro do ajuste pelo método dos mínimos quadrados é calculado por:

$$f = \sum_{k=1}^{m-1} [C(\bar{u}_k) - Q_k]^2 \quad (3.56)$$

$$f = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i - Q_k \right]^2 \quad (3.57)$$

Na forma matricial pode ser escrito:

$$f = [NP - Q]^2 \quad (3.58)$$

$$f = (P^T N^T - Q^T)(NP - Q) \quad (3.59)$$

Derivando e igualando a zero para encontrar o mínimo, tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial P} = N^T(NP - Q) + (P^T N^T - Q^T)N = 0 \quad (3.60)$$

$$N^T \cdot N \cdot P = N^T Q \quad (3.61)$$

Onde:

$$N = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(\bar{u}_m) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_m) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_0 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

Para solução do sistema de equações 3.61 é necessário definir o vetor de nós \bar{u}_k . De acordo com Piegl e Tiller (2007), esse pode ser determinado pelo método do comprimento de cordas “ d ”:

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}| \quad (3.62)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = 0 \\ \bar{u}_n = 1 \\ \bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} \quad k = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.63)$$

Definido o vetor de nós é então possível a solução do sistema de equações 3.61 para obter os pontos de controle que reduz o erro dos mínimos quadrados ao mínimo, ou seja, o melhor ajuste para esta condição.

3.4.4. Método dos mínimos quadrados aplicado a B-Spline com restrição

Indo um pouco mais além, em certos ajustes é necessário definir alguns parâmetros tais como a interpolação de alguns pontos, e/ou a derivada em alguns pontos específicos. Sendo assim, pode-se transformar o problema de ajuste em um problema de minimização com restrição de igualdade, podendo ser representado pelo método de Lagrange da seguinte forma (PIEGL; TILLER, 2007):

Seja:

- S - pontos e derivadas sem restrições;
- T - pontos e derivadas com restrições;
- W - Matriz diagonal com pesos aplicados aos pontos a serem aproximados;
- P - Pontos de controle;
- N - Funções bases dos itens sem restrição;
- M - Funções bases dos itens com restrição;

Portanto as equações são:

- Para os pontos sem restrição:

$$NP = S \quad (3.64)$$

- Para pontos com restrição:

$$MP = T \quad (3.65)$$

Montando a equação de Lagrange para avaliação do erro pelo método dos mínimos quadrados, tem-se:

$$f = (S^T - P^T N^T)W(S - NP) + A^T(MP - T) \quad (3.66)$$

Onde:

- A - Representa os multiplicadores de Lagrange;
- A e P são as incógnitas;

Na busca pelo mínimo desta função, a sua derivada primeira deve ser nula. Como se trata de uma função de duas variáveis, deve-se fazer as derivadas parciais de cada variável, ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial P} = -2(S^T W N - P^T N^T W N) + A^T M = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial f}{\partial A} = M P - T = 0 \quad (3.68)$$

Isolando as incógnitas A e P tem-se que:

$$A = (M(N^T W N)^{-1} M^T)^{-1} (M(N^T W N)^{-1} N^T S - T) \quad (3.69)$$

$$P = (N^T W N)^{-1} N^T S - (N^T W N)^{-1} M^T A \quad (3.70)$$

Portanto, resolvendo as equações matriciais acima, obtém-se aos valores para os pontos de controle que atendem as restrições e minimizam o erro dos mínimos quadrados.

3.5. Superfície

As superfícies *B-Splines* podem ser obtidas através de uma rede bidirecional de pontos de controle, dois vetores de nós e o produto das funções de bases para cada direção. Assim como as curvas, as superfícies também podem ser classificadas como racionais ou não-rationais, Eq. (3.71) e (3.72), respectivamente.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad (3.71)$$

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j} \quad (3.72)$$

Onde:

$$U = \{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_{r-p-1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}\}$$

$$V = \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, 1, \dots, 1\}$$

$$r = n + p + 1$$

$$s = m + q + 1$$

As superfícies podem ser abertas ou fechadas, dependendo se em uma das direções da rede de pontos de controle existem perfis fechados, como pode ser verificado nos exemplos a seguir, Figs. 3.15 e 3.16.

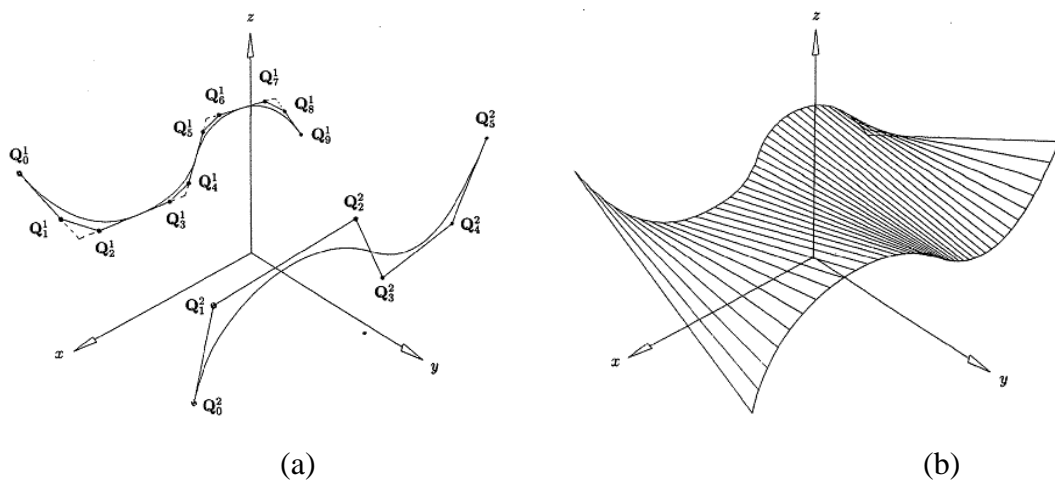


Figura 3.15 - Superfície aberta: (a) Rede de pontos de controles; (b) Superfície (Piegl; Tiller, 2007).

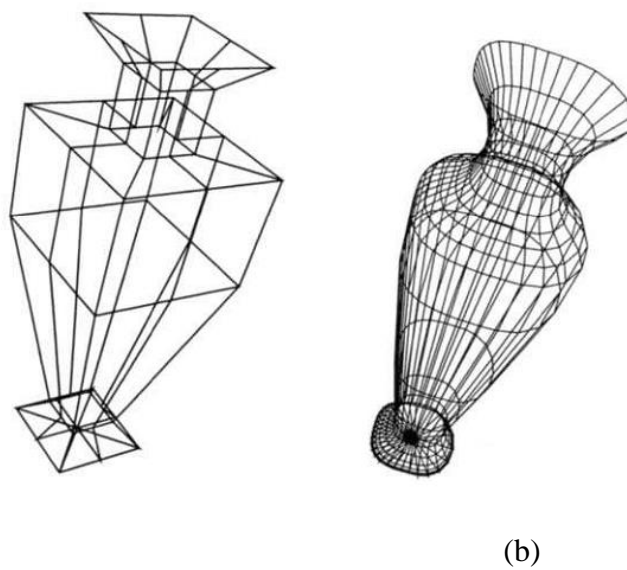


Figura 3.16 - Superfície fechada: (a) Rede de pontos de controles; (b) Superfície B-Spline (Rogers, 2001).

Piegl e Tiller (2007) também apresentam três técnicas avançadas de construção de superfícies: Superfícies de revolução (*Swung surfaces*); Superfícies concordantes (*Skinned surfaces*) que é um novo termo para *Lofting*; e Superfícies por varredura (*Swept surfaces*) que desliza um perfil sobre uma trajetória.

3.6. Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma revisão geral das curvas B-Spline, onde foi definida a sua equação; a equação das funções de base B-Spline e a derivada da B-Spline. Também foram apresentados alguns procedimentos de alteração das curvas B-Splines como elevação/redução de grau da curva e inclusão/retirada de pontos de controle da curva.

Com relação ao ajustes de curvas, foram apresentados dois métodos de aproximação de curva B-Spline com peso utilizando o método dos mínimos quadrados. O primeiro método, o mais simples, se baseia em definir o conjunto de pontos de controle que reduz o erro de ajuste da curva ao mínimo. Já o segundo define um problema de otimização com restrições, restrições estas que são a interpolação, a definição da derivada nos pontos e pesos associados aos pontos. Este segundo método possibilita um maior controle sobre o ajuste da curva.

Também foi apresentada uma revisão das superfícies B-Splines, demonstrando como são definidas a partir da equação da superfície B-Spline. Estas equações serão utilizadas em um dos métodos da reconstrução de superfície.

Este capítulo é de grande importância já que é a base deste trabalho, onde foram apresentadas todas as ferramentas necessárias para ajustar e alterar uma curva ou superfície B-Spline.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA DESENVOLVIDA

Como descrito no Capítulo I, Introdução, este trabalho tem como objetivo propor metodologias para reconstrução de superfícies a partir de uma nuvem de pontos. Para obter as seções transversais do objeto, aqui considerado paralelos ao plano XY, são utilizados B-Spline cúbicas com peso associado aos pontos que definem a seção do objeto. Uma vez obtidas, as curvas longitudinais são definidas a partir de pontos das seções transversais justificando, desta forma, a aplicação de interpolação.

Neste capítulo todo o processo é detalhado, inclusive com os cinco métodos propostos para obter a interpolação e, conseqüentemente, os pontos que definem a superfície.

A metodologia proposta para a reconstrução de uma superfície utiliza o método das seções transversais do objeto e consiste em:

1. Criação da nuvem de pontos
2. Metodologia para redução da nuvem de pontos
3. Pré-cálculo de parâmetros para ajuste de curva B-Spline
4. Ajuste de curva B-Spline
5. Cálculo dos pontos da Superfície B-Spline

4.1. Criação da nuvem de pontos

Como o digitalizador não ficou operacional a tempo de obter uma nuvem de pontos para que fosse validado o método, foi necessário criar uma nuvem de pontos para representar a superfície a ser reconstruída.

Foram realizados estudos da leitura do sensor laser que compõe o digitalizador do Laboratório de Automação e Robótica para determinar um parâmetro que caracterizasse a distribuição dos pontos lidos pelo digitalizador. Assim, sendo possível a criação de uma nuvem de pontos que se aproxima de uma leitura real do digitalizador.

A seguir são explicados passo a passo a definição do parâmetro e a criação da nuvem de pontos.

4.1.1. Estudo da leitura do digitalizador

Dado a necessidade de uma nuvem de pontos para testar a metodologia desenvolvida, foi necessário criar a nuvem de pontos. Mas esta nuvem não poderia ser criada de forma aleatória uma vez que a metodologia de reconstrução será um complemento do digitalizador portanto, sendo necessário realizar o estudo da distribuição de pontos com base em sua leitura.

O sistema de leitura do digitalizador é composto por um sensor laser modelo ODSL8 V4/45 S12. Suas características de medição são apresentados a seguir:

Dados retirados do *datasheet*:

- Voltagem de alimentação: 18 a 30VDC
- Faixa de operação: 25 a 45mm
- Resolução: 0.01mm
- Laser com comprimento de onda: 650nm
- Erro absoluto de precisão: 0.5%
- Erro de repetibilidade: 0.1%
- Tempo de medição: 2 a 5ms

Portanto pode-se notar que o laser é um instrumento de medição muito preciso e sensível, além de ter comportamento linear da sua faixa de operação, Fig. 4.1.

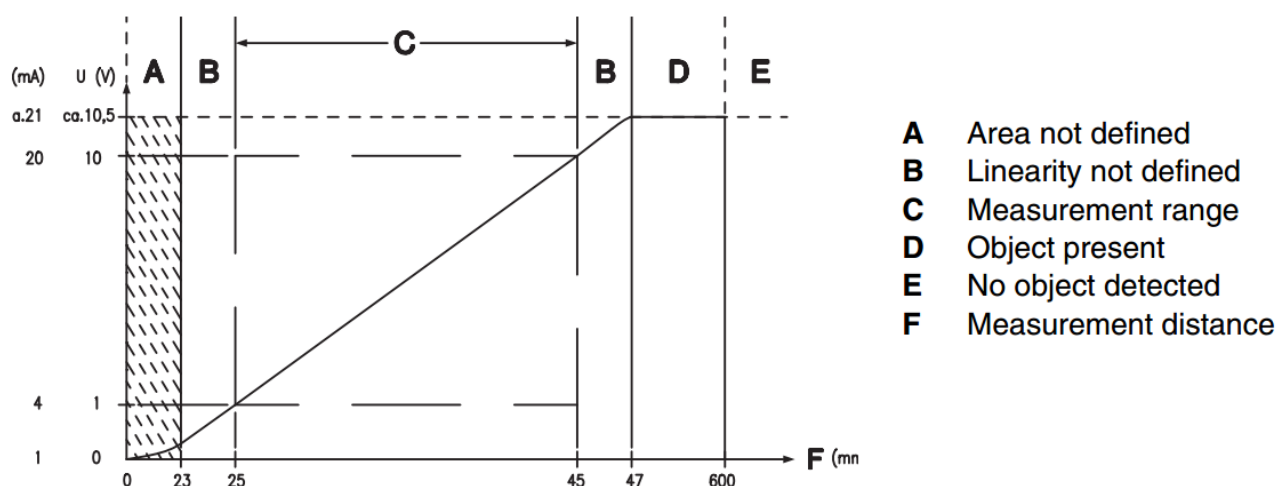


Figura 4.1 - Curva de sensibilidade do laser LEUZE ELECTRONIC

Lembrando que a leitura do laser é influenciada por diversos fatores tais como:

- Superfície opaca, translúcida ou refletiva;
- Qualidade das superfícies “Rugosidade”
- Defeitos na superfície.

A influência desses fatores é devido à forma como o sensor laser opera, já que este emite o feixe de laser refletindo-se no objeto e retornando ao captor do laser. Quanto mais reflexiva a superfície, maior a quantidade de luz que retorna ao sensor. Caso haja defeitos na superfície, isso faz com que o feixe de laser seja refletido para outra direção que não a do seu captor, ocasionando em erro na leitura. Por isso é necessário o posicionamento do feixe de laser na direção perpendicular à superfície de leitura.

Toda nuvem de pontos é constituída por vários pontos que se distribuem em torno do perfil real do objeto de forma que, quanto mais preciso o sensor de medição, menor será a distribuição dos pontos. Dado esta ideia, foram realizadas várias leituras de uma linha (superfície plana em aço e polida) para assim determinar a distribuição da leitura, ou erro aleatório, que o digitalizador possui, Fig. 4.2. De posse dessa característica do digitalizador é possível simular a construção de nuvens de pontos semelhantes a uma seção transversal do objeto quando obtida pelo próprio digitalizador.

A leitura tomada como base para simular a leitura do digitalizador, está apresentada na Fig. 4.2, onde foram lidos 7142 pontos em um perfil linear com 28,34mm de comprimento. A distância média de leitura foi de 31,3mm, sendo desprezados 15% de pontos lidos no início e no fim.

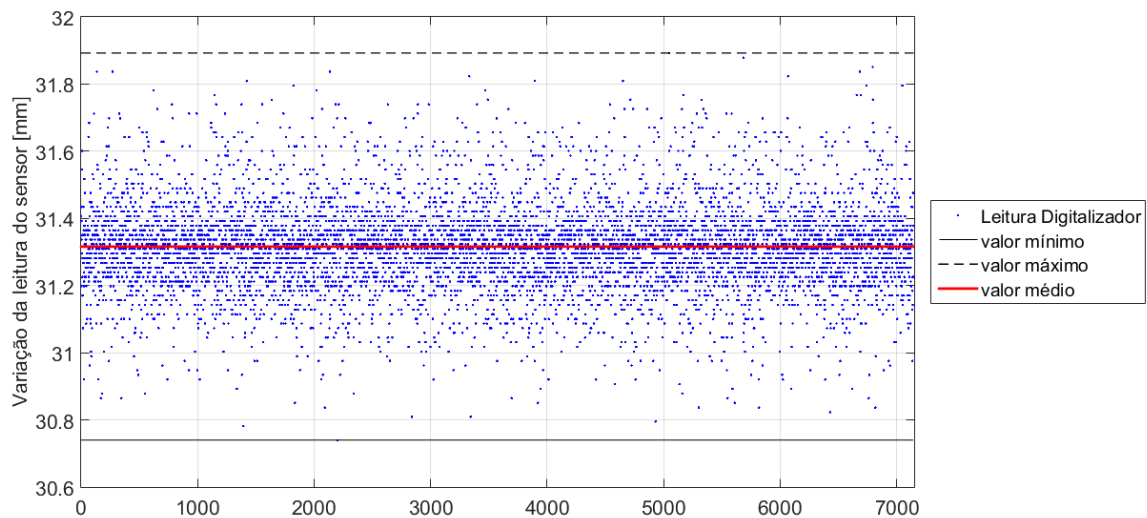


Figura 4.2 - Dispersão da leitura do digitalizador

Para análise da leitura do sensor laser foi utilizado o conceito de rugosidade media Ra, a qual se baseia em calcular a média aritmética dos valores absolutos dos picos e vales de uma distribuição de pontos. Calculado este parâmetro é feito então o histograma centrado no valor médio da distribuição e com as faixas de Ra, Fig.4.3.

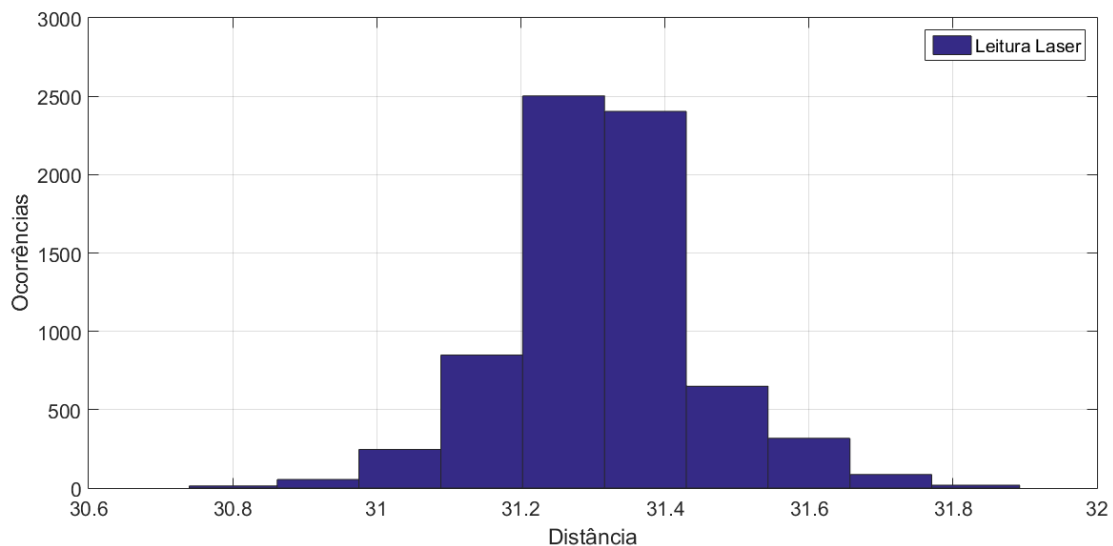


Figura 4.3 - Histograma da dispersão da leitura do digitalizador

A construção do histograma mostra que a diferença dos pontos lidos corresponde à uma distribuição normal de média igual à média da distribuição de pontos da leitura e desvio padrão igual a R_a , Fig. 4.4.

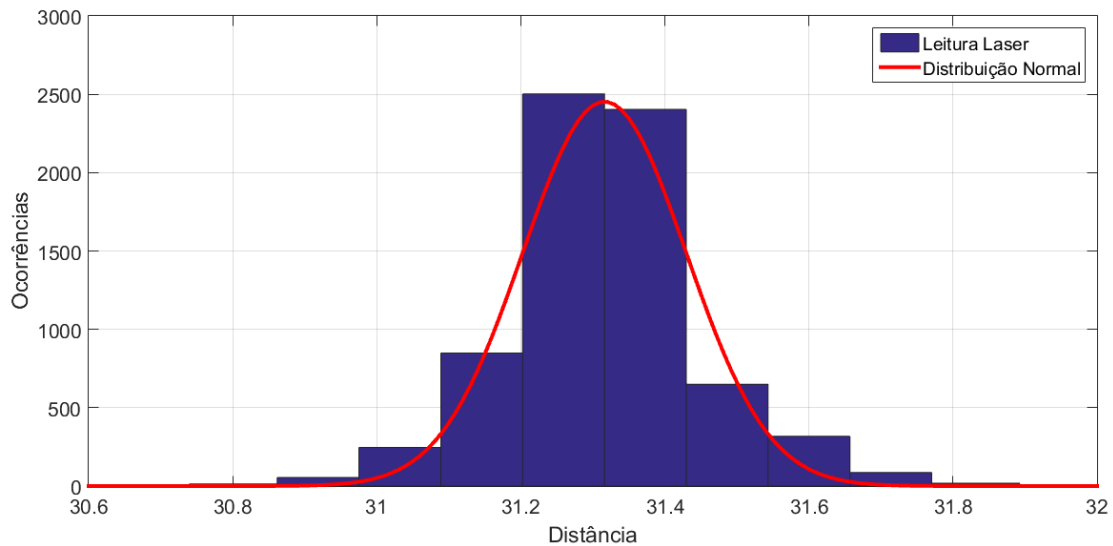


Figura 4.4 - Semelhança entre histograma e distribuição normal

Calculando a porcentagem das distribuições para cada faixa de $\pm n.\sigma$ da distribuição normal e das faixas de $\pm n.R_a$ do histograma, com $n = 1, \dots, 5$, é montada a Tab. 4.1.

Tabela 4.1: Comparativo entre porcentagens para distribuição normal e histograma

Faixa	Distribuição Normal [%]	Histograma Leitura Digitalizador [%]	Erro [%]
$\pm\sigma / \pm R_a$	68,27	68,70	0,43
$\pm 2\sigma / \pm 2R_a$	95,45	89,68	5,77
$\pm 3\sigma / \pm 3R_a$	99,73	97,59	2,14
$\pm 4\sigma / \pm 4R_a$	99,99	99,57	0,42
$\pm 5\sigma / \pm 5R_a$	100,00	100,00	0,00

Pela análise da Fig.4.4 e da Tab. 1 pode-se perceber que a leitura do digitalizador pode ser caracterizada por uma distribuição normal. Portanto, para a criação da nuvem de pontos será utilizada a distribuição normal com desvio padrão igual a R_a .

4.1.2. Criação da nuvem de pontos

A criação da nuvem de pontos, como mencionado anteriormente, é realizada de maneira a herdar as características da leitura do digitalizador para assim simular uma leitura real. No item 4.1.1 foi mostrado que a leitura do digitalizador pode ser caracterizada por uma distribuição normal com desvio padrão igual a $R_a = 0,1136\text{mm}$.

Para construir a nuvem de pontos, primeiramente é necessário criar uma curva de referência contida no plano XY. Esta curva é constituída por trechos retilíneos e curvas de forma a garantir sua continuidade. Para o desenvolvimento do trabalho, foi utilizado o perfil representado na Fig. 4.5, sendo $R1$, $R2$ e L variáveis em função da posição ao longo do eixo Z. Para a seção de base tem-se: $R1=10\text{ mm}$ e $R2=L=20\text{ mm}$.

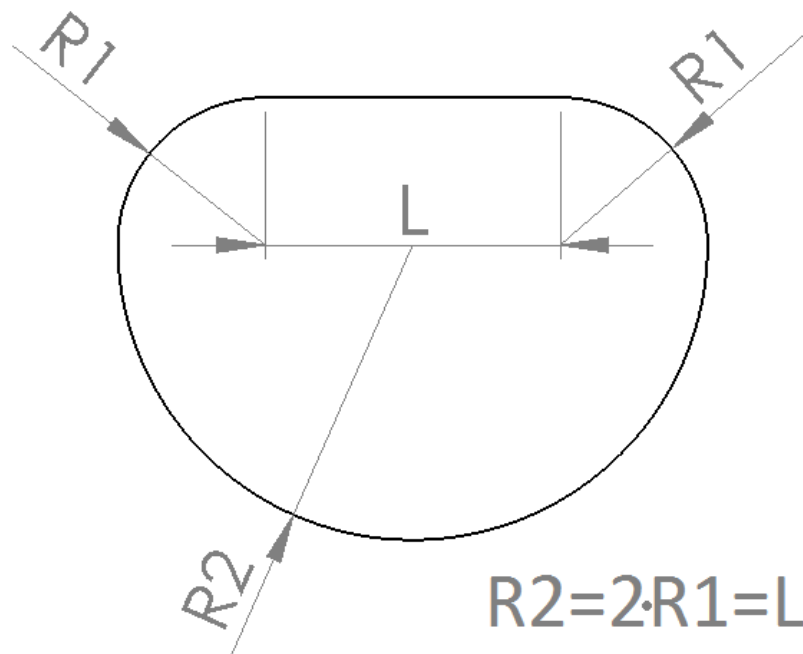


Figura 4.5 - Perfil no plano XY utilizado para criação da nuvem de pontos

O perfil criado é formado por arcos e segmentos de reta devido ao fácil equacionamento e também à facilidade com que é determinada a direção normal em qualquer ponto da curva.

Para reproduzir a leitura apresentada na Fig. 4.2, a quantidade de pontos por tamanho lido deve ser a mesma, portanto foi calculada a densidade linear de pontos conforme Eq. (4.1).

$$densidadeLinear = \frac{7142 \text{ pontos}}{28,34 \text{ mm}} = 252,0113 \text{ pontos/mm} \quad (4.1)$$

Este valor é utilizado para definir a quantidade de pontos que é criado para cada segmento da curva.

A criação da nuvem de pontos se baseia em gerar uma distribuição de pontos na direção normal de cada infinitesimal dS ao longo da curva. Como a curva é composta por segmentos, cada segmento é analisado em separado.

Para os segmentos retos, primeiramente são gerados os pontos sobre ele utilizando uma distribuição uniforme conforme as Eqs. (4.2) a (4.4). O número de pontos gerados é calculado utilizando a densidade linear de pontos calculado na Eq. (4.1).

$$distUniform = rand(nPts, 1) \quad (4.2)$$

$$X_{pontos} = X_A + (X_B - X_A) * distUniform \quad (4.3)$$

$$Y_{pontos} = Y_A + (Y_B - Y_A) * distUniform \quad (4.4)$$

Onde,

$distUniform$ é o vetor contendo os valores da distribuição uniforme;

$nPts$ é o número de pontos a ser criado para o segmento reto;

(X_{pontos}, Y_{pontos}) são os pares ordenados dos pontos gerados sobre o segmento reto;

(X_A, Y_A) é o par ordenado do primeiro ponto que define o segmento reto;

(X_B, Y_B) é o par ordenado do segundo ponto que define o segmento reto.

Em seguida são gerados os valores da distribuição normal para que sejam alteradas as coordenadas dos pontos obtidos anteriormente de forma a caracterizar a leitura do digitalizador. Esta alteração de coordenadas pode ser facilmente entendida pela Fig. 4.6, que utiliza de trigonometria para obter as Eqs. (4.5) e (4.7).

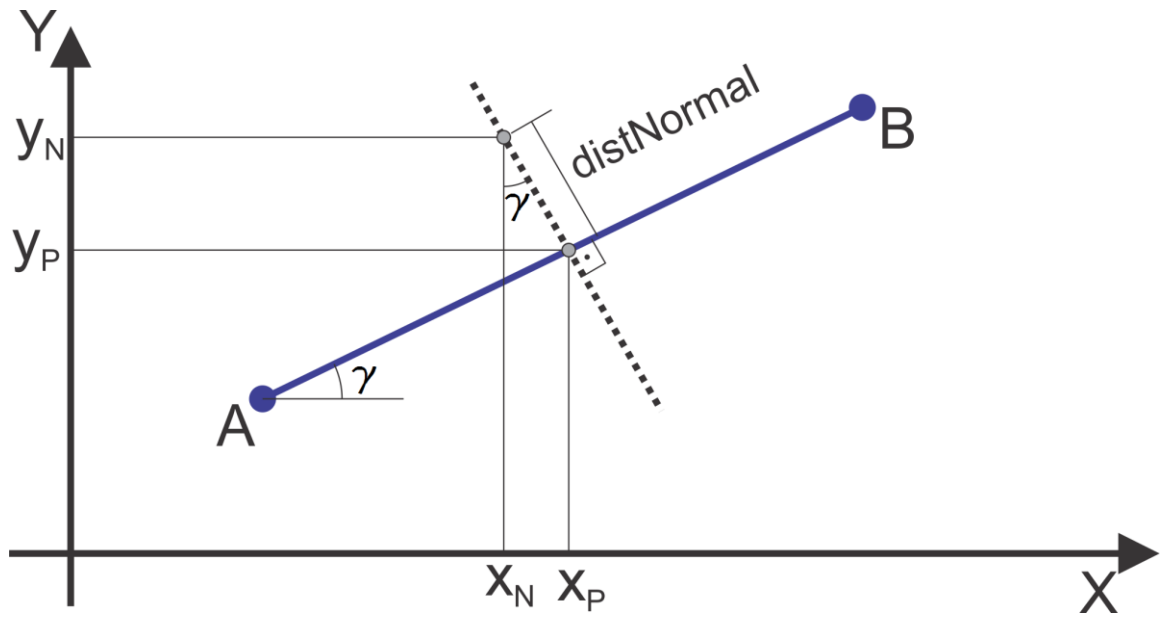


Figura 4.6 - Representação da alteração das coordenadas dos pontos via trigonometria.

$$distNorm = randn(nPts, 1) \quad (4.5)$$

$$X_{nuvem} = X_{pontos} - distNorm * Ra * \sin(\gamma) \quad (4.6)$$

$$Y_{nuvem} = Y_{pontos} + distNorm * Ra * \cos(\gamma) \quad (4.7)$$

Para os arcos o processo é semelhante ao dos segmentos retos: são gerados pontos ao longo do arco e em seguida alteradas suas coordenadas na direção normal à cada ponto para formar a distribuição normal dos pontos em torno do perfil. As Equações (4.8) a (4.11) resultam diretamente os pontos da nuvem para os arcos.

$$distNorm = randn(nPts, 1) \quad (4.8)$$

$$distUniform = rand(nPts, 1) \quad (4.9)$$

$$X_{nuvem} = X_{centro} + (r + distNorm * Ra) * \cos(\theta_0 + distUniform * (\theta_f - \theta_0)) \quad (4.10)$$

$$Y_{nuvem} = Y_{centro} + (r + distNorm * Ra) * \sin(\theta_0 + distUniform * (\theta_f - \theta_0)) \quad (4.11)$$

Onde,

$nPts$ é o número de pontos a serem criados ao longo do arco;

(X_{centro}, Y_{centro}) é o par ordenado do centro do arco;

r é o raio do arco;

θ_0 e θ_f são os ângulos de início e fim do arco, respectivamente;

Ra é a rugosidade média calculada nos itens 4.1.1 e 4.1.2.

Ao final destes procedimentos é obtida uma nuvem de pontos contida no plano XY.

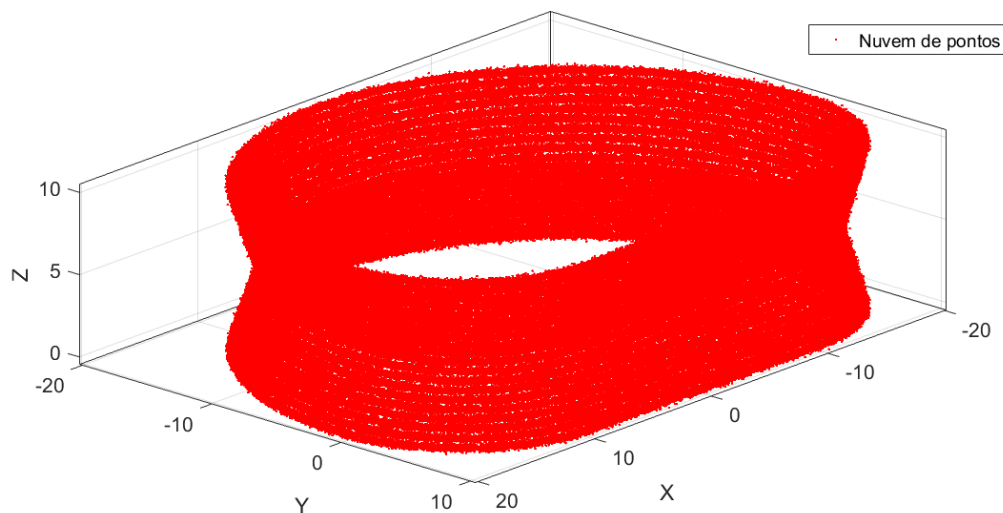
O digitalizador construído no Laboratório de Automação e Robótica da FEMEC/UFU quando “lê” a superfície do objeto fornece uma nuvem de pontos na direção do feixe de laser, conforme apresentado na Fig. 4.2. Para a leitura correta das coordenadas, o feixe do laser deve ser perpendicular à superfície. Então, ao final do processo de leitura, o digitalizador terá varrido toda a superfície do objeto, criando a nuvem de pontos correspondente.

Para aplicar a metodologia proposta é necessário definir o tamanho de cada faixa de nuvem de pontos na direção Z que vai fornecer a seção transversal do objeto. Então, neste trabalho é atribuída uma dispersão na direção Z com base nos dados obtidos da Fig. 4.2. Portanto, é admitido que os pontos possuem uma distribuição normal de média zero e desvio padrão igual a Ra na direção Z conforme Eq. (4.12). Cabe salientar que outros valores de distribuição normal podem ser utilizados. Por exemplo, quando interessa obter uma nuvem de pontos mais densa na direção Z.

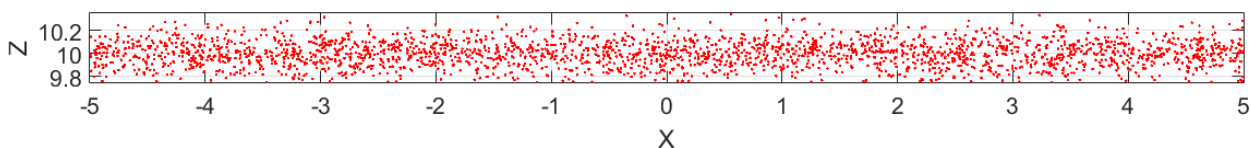
$$Z_{nuvem} = Ra * randn(nPts, 1) \quad (4.12)$$

Finalmente é construída a nuvem de pontos para um perfil dado. Portanto, para a construção de uma nuvem de pontos de um objeto é necessário aplicar o método para todos os perfis (seção transversal) que compõem o objeto. Assim ao final do processo a nuvem de pontos estará criada e pronta para iniciar a aplicação da metodologia de reconstrução da superfície.

Para aplicar a metodologia que será apresentada a seguir, foi gerada a superfície formada por dois troncos de cone representada na Fig. 4.7.



(a)



(b)

Figura 4.7 - Nuvem de pontos criada: (a) Nuvem de pontos de objeto cônico gerada para aplicação da metodologia e; (b) Zoom em trecho evidenciando a dispersão dos pontos em uma seção transversal.

4.2. Metodologia para redução da nuvem de pontos

Uma nuvem de pontos é formada por milhares de pontos que seria praticamente inviável a obtenção direta da superfície do objeto devido ao grande tempo de processamento. Por esta razão é necessário reduzir esta nuvem de pontos por um novo conjunto menor de pontos que possa representar com fidelidade a superfície do objeto.

A metodologia de redução da nuvem de pontos aqui apresentada é feita com base nos trabalhos realizados no Laboratório de Automação e Robótica da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, (FONSECA JR E CARVALHO, 2005), (AQUINO ET AL.,

2010) e (FANTI E CARVALHO, 2015). Essa metodologia substitui os pontos existentes em uma determinada região pelo seu centro de massa (CM), considerando que cada ponto possui massa unitária. Este procedimento parte do princípio que para uma região com grande concentração de pontos certamente seu CM pertence à superfície do objeto.

A seguir o procedimento é apresentado em detalhes a partir da definição da resolução e das micro-regiões.

O cálculo dos CM são realizados em três etapas:

- Definição da resolução e das micro-regiões
- Cálculo dos CM;
- Seleção dos mais prováveis CM.

4.2.1. Definição da resolução e das micros-regiões

Uma micro-região é definida por uma pequena região pertencente ao espaço que envolve o volume ocupado pelo objeto. Por razões de simplicidade e rapidez de processamento elas são consideradas como paralelepípedos com uma base retangular paralela ao plano XY. Isso significa que o volume ocupado pela nuvem de pontos que representa o objeto é dividido em micro-regiões.

Então, esta etapa são definidos os volumes prismáticos de base retangular por toda a nuvem de pontos de maneira a delimitar os pontos pertencentes a cada micro-região. A resolução definida pelo usuário determina as dimensões destas micro-regiões de maneira que, se escolhido uma resolução pequena o número de CM calculados será muito grande e assim o ajuste tende a ser sensível a qualquer detalhe da superfície ajustada, porém o tempo do processo será muito grande.

Cabe salientar que um grande número de CM corresponde a uma grande quantidade de pontos de controle necessários para o ajuste de uma B-Spline.

Em projetos anteriores, várias metodologias para determinar a resolução de maneira automática foram apresentadas e testadas, não sendo possível a definição de uma função geral para definir uma ótima resolução. Foram utilizados como parâmetros: a largura da nuvem de pontos, a dimensão total da nuvem de pontos e o raio médio de circunferências para cada três pontos consecutivos. Todas as metodologias em função da nuvem de pontos.

Neste projeto é abordada uma nova metodologia para determinação automática da resolução na qual não utiliza a nuvem de pontos para cálculo da resolução, mas sim a característica de leitura do digitalizador discutida anteriormente.

O esperado para as micro-regiões é que ela consiga limitar um certo número de pontos os quais quando calculado um centro de massa, este possa representar o ponto real da superfície. A Figura 4.8 apresenta a utilização de três valores para a resolução em função de Ra : $5Ra$, $8Ra$ e $10Ra$, para o cálculo dos centros de massas.

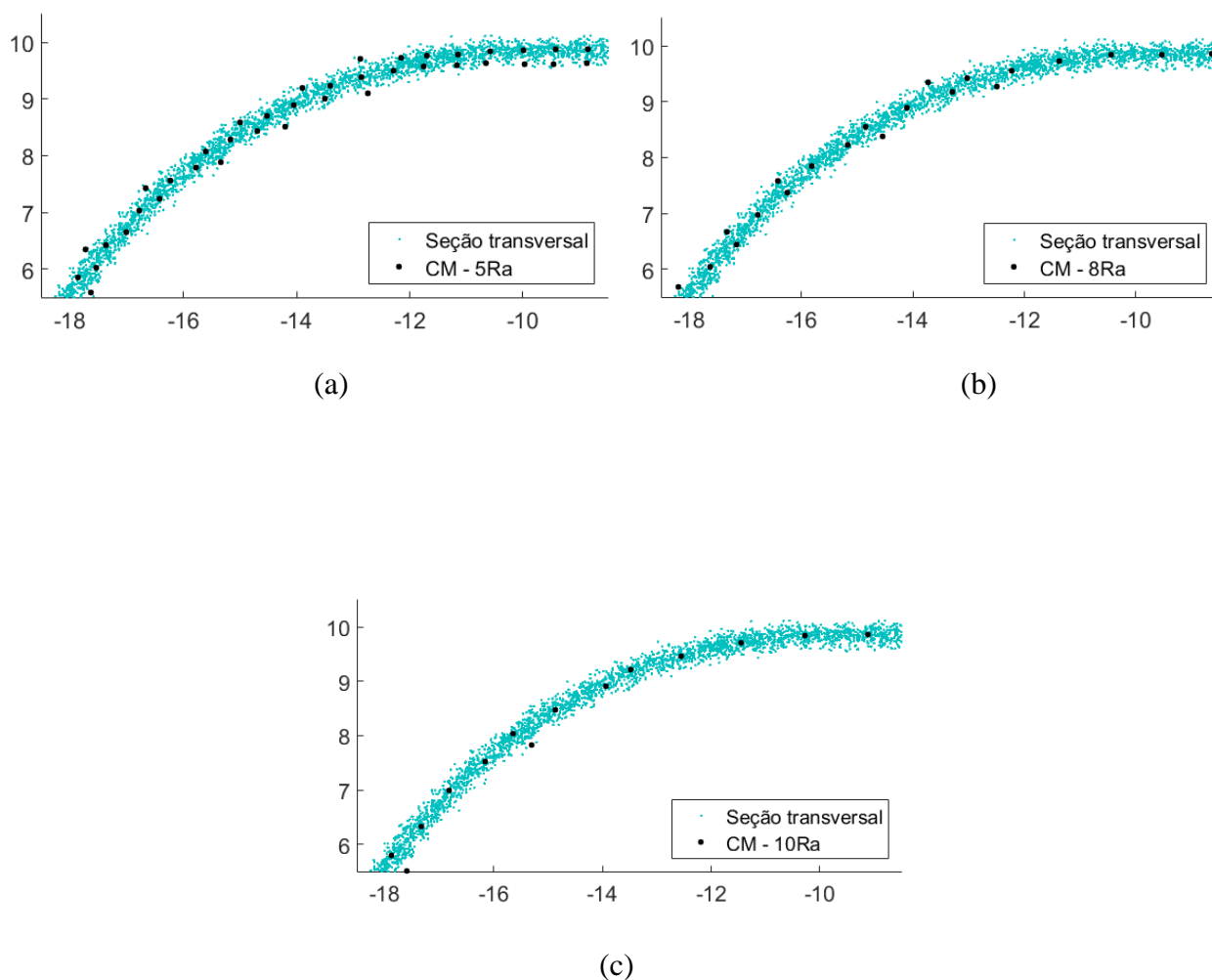


Figura 4.8 - Cálculo de centros de massa conforme resoluções: (a) $5Ra$; (b) $8Ra$ e; (c) $10Ra$.

É possível verificar que a utilização de um pequeno valor de resolução faz com que haja uma maior quantidade de centros de massa criados porém, para este caso, a utilização da resolução de $10Ra$ proporcionou um conjunto de centros de massa que melhor representam o perfil médio da seção transversal. Portanto será utilizado como resolução o valor de $10Ra$. Este valor fica compatível com os dados apresentados na Tab. 4.1 onde todos os pontos lidos pelo digitalizador ficam em uma região definida por $\pm 5Ra$.

Antes de definir as micro-regiões, é necessário selecionar as seções transversais. A resolução da micro-região na direção Z, considerando as características do digitalizador, não justifica ser maior que $10R_a$, portanto será utilizado este valor como resolução na direção Z.

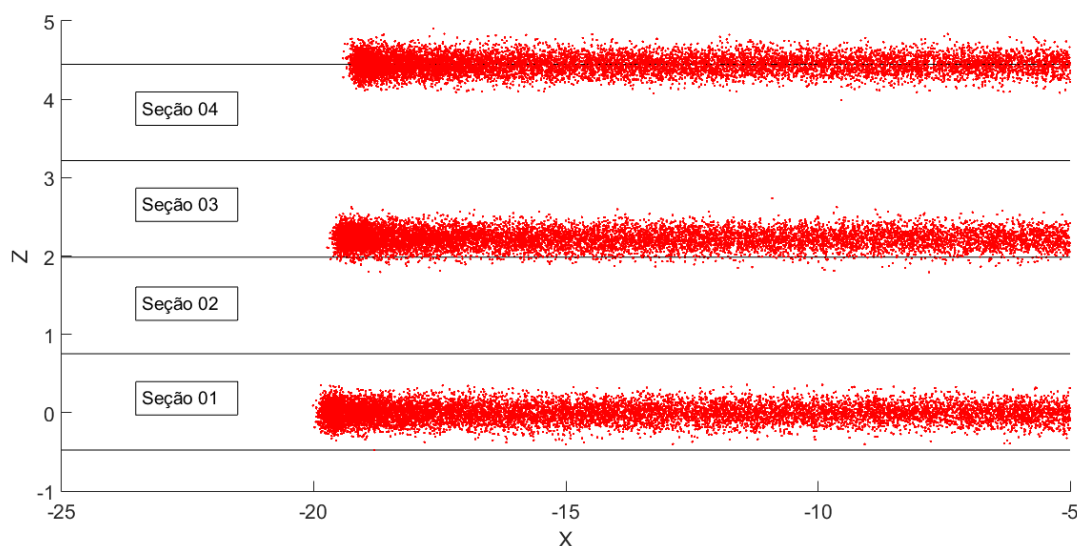
A seleção das seções transversais é realizada selecionando os pontos pertencentes a cada intervalo de $10R_a$, iniciado pelo ponto que apresenta a menor coordenada Z.

Quando a nuvem de pontos apresenta regiões vazias na direção Z significa que o digitalizador não efetuou uma leitura adequada da superfície do objeto. Neste caso, o interessante seria repetir o processo de leitura.

Uma outra alternativa consiste em “eliminar” essas regiões vazias visto que, sendo elas pequenas em relação à resolução do digitalizador, o processo de reconstrução pode não acrescentar grandes imperfeições na superfícies reconstruída.

Neste trabalho, devido ao processo de criação da nuvem de pontos, a eliminação dessas regiões poderia ser feito seja reduzindo a distância entre as curvas da seção transversal utilizadas como referência, seja pelo aumento do desvio padrão utilizado na Eq. (4.12).

Com o objetivo de avaliar a metodologia de reconstrução de superfícies proposta neste trabalho é utilizado o procedimento de eliminação dos vazios. Para isso, são considerados somente os pontos contidos entre o valor mínimo e o valor máximo, eliminando os demais, conforme esquematizado na Fig. 4.9.



(a)

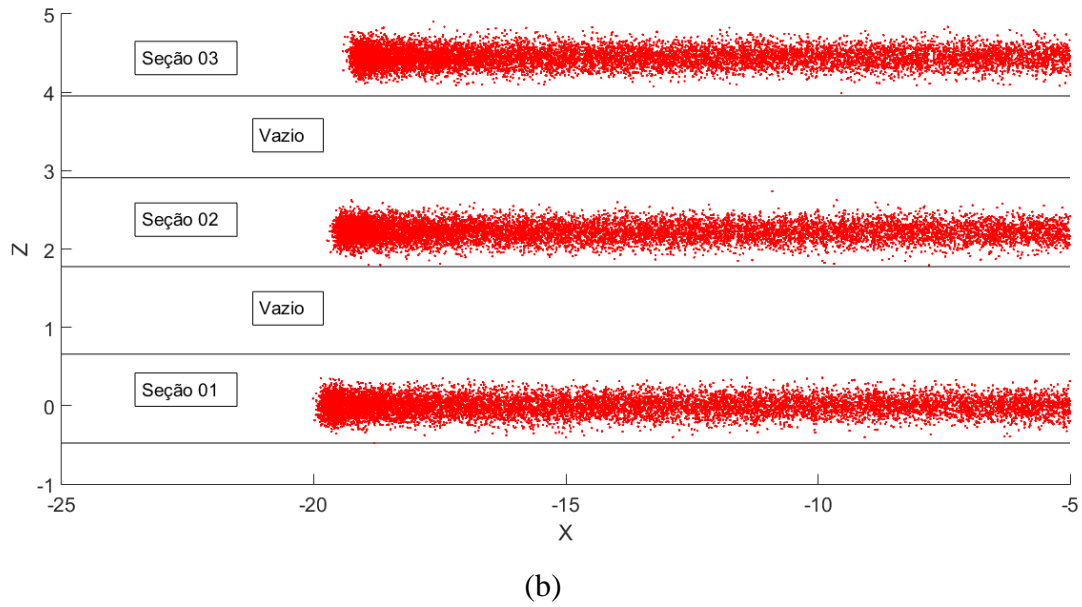


Figura 4.9 - Seleção de seções transversais com presença de espaços vazios: (a) Seleção errônea das seções; (b) Correção do método pela eliminação dos vazios.

Em seguida é feito o cálculo dos limites para cada micro-região nas direções X e Y. Para isso é calculado o número de micro-regiões possíveis de acordo com a resolução das direções X e Y. Neste trabalho as resoluções nestas duas direções são consideradas iguais. O processo é aplicado a cada seção individualmente, já que cada uma possui dimensões diferentes. As Equações (4.13) a (4.16) apresentam o procedimento.

Para direção X:

$$nX_{regiões}(i) = \frac{\max(X_i) - \min(X_i)}{resolução} \quad (4.13)$$

$$nX_{regiões}(i) = \begin{cases} nX_{regiões}(i) & , \text{ se } nX_{regiões}(i) \text{ é inteiro} \\ \text{inteiro}(nX_{regiões}(i)) + 1, & \text{ se não} \end{cases} \quad (4.14)$$

Para direção Y:

$$nY_{regiões}(i) = \frac{\max(Y_i) - \min(Y_i)}{resolução} \quad (4.15)$$

$$nY_{regiões}(i) = \begin{cases} nY_{regiões}(i) & , \text{ se } nY_{regiões}(i) \text{ é inteiro} \\ \text{inteiro}(nY_{regiões}(i)) + 1, & \text{ se não} \end{cases} \quad (4.16)$$

Sendo: $i = [1, n_{seções}]$

Ao fim deste processo está determinado o número de regiões para as direções X e Y de cada seção, bastando então definir o *array* contendo os limites de cada micro-região. Vale ressaltar que a quantidade de micro-regiões não são as mesmas para as seções, isto devido ao fato que cada seção possui dimensões e formas diferentes.

4.2.2. *Calculo dos centros de massa*

Para calcular os centros de massa (CM) de um conjunto de pontos no plano Cartesiano, deve ser realizada uma média ponderada das coordenadas utilizando os pesos atribuídos a cada um destes pontos, Eq. (4.17).

$$CM = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right) \quad (4.17)$$

Para a metodologia proposta não existem pontos com mais importância que outros, portanto, cada ponto possui peso unitário. Assim sendo é aplicada a Eq. (4.17) para cada micro-região presente na nuvem de pontos.

Com os centro de massa calculados, é então possível prosseguir com a metodologia com um número muito menor de pontos.

4.2.3. *Seleção dos centros de massa*

Somente o cálculo dos centros de massa das micro-regiões não é suficiente para prosseguir com a metodologia, uma vez que não se verifica exatamente uma sequência de pontos que define um contorno a ser ajustado, como pode ser verificado na região delimitada pelo retângulo na Fig. 4.10.

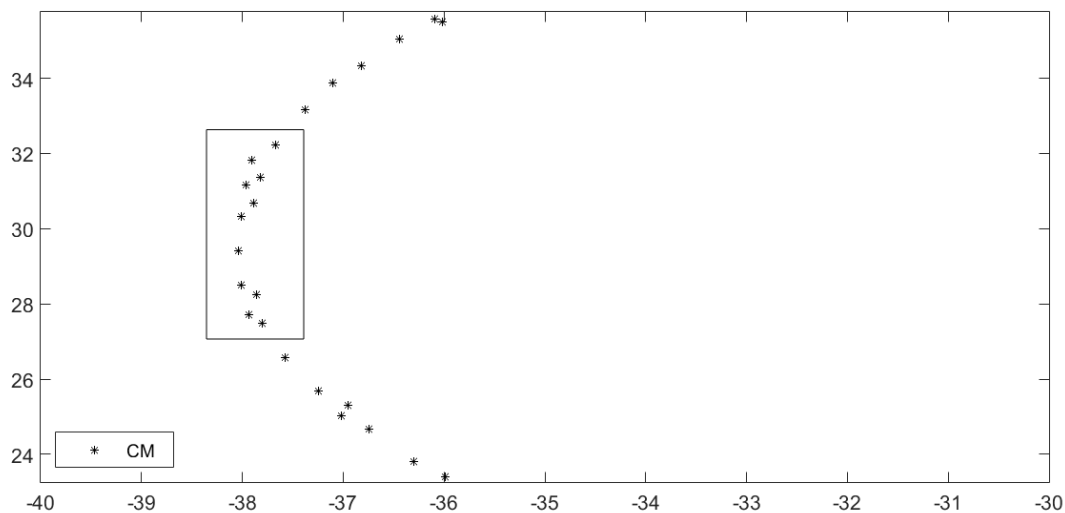


Figura 4.10 - Centros de massa calculados para uma seção.

Portanto, é necessário aplicar uma metodologia para selecionar os pontos que proporcionam o melhor conjunto para realizar um ajuste de curva o mais próximo possível do desejado.

A primeira etapa consiste em definir o primeiro CM, ou seja o de referência para início do processo de escolha. Vários testes foram realizados e verificado que, dependendo da escolha do primeiro ponto, o perfil ajustado é diferente, portanto, é necessário escolher um CM que tenha a maior chance de pertencer à superfície do objeto. É selecionado o CM em que sua micro-região possua a maior quantidade de pontos, pois ele provavelmente pertence à superfície do objeto.

Definido o primeiro CM, é então necessário selecionar os próximos CMs que farão parte do contorno e mantendo a sequência correta da formação da seção transversal. Para isso foi criado o método de detecção de contorno baseado na avaliação de uma macro-região, que são regiões formadas pelas micro-regiões vizinhas ao CM de referência, Fig. 4.11.

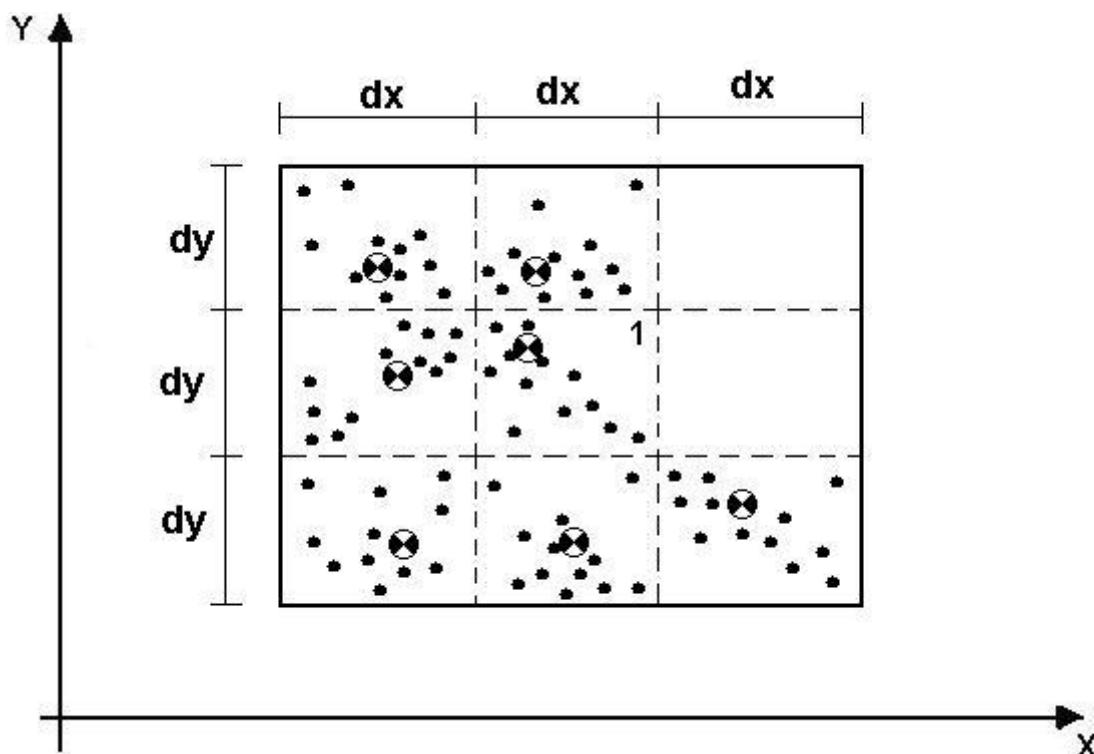


Figura 4.11 - Macro-regiões formadas por micro-regiões (FONSECA JR e CARVALHO, 2006).

Para seleção do segundo ponto é feito o produto de dois parâmetros: a distância entre o CM de referência aos demais CM presentes na macro-região, e a quantidade de pontos que compõe cada micro-região. O CM que apresentar o maior resultado do produto é selecionado para ser o próximo CM de referência.

Os CMs e suas respectivas micro-regiões analisados na macro-região são desprezados para a próxima etapa. O procedimento é repetido até que ocorra o fechamento da curva. Ao final do processo são obtidos os CM, em ordem de conectividade, que definem o contorno da curva.

Na Figura 4.11 a micro-região de referência está identificada pelo número “1”. As micro-regiões em volta dela formam a macro-região de busca do próximo CM de referência.

Este método apresenta a vantagem de eliminar ruídos de leituras do digitalizador, que correspondem a pontos esparsos, e que nada tem a ver com a superfície do objeto.

A Figura 4.12 apresenta o resultado do método para a mesma região apresentada na Fig. 4.10.

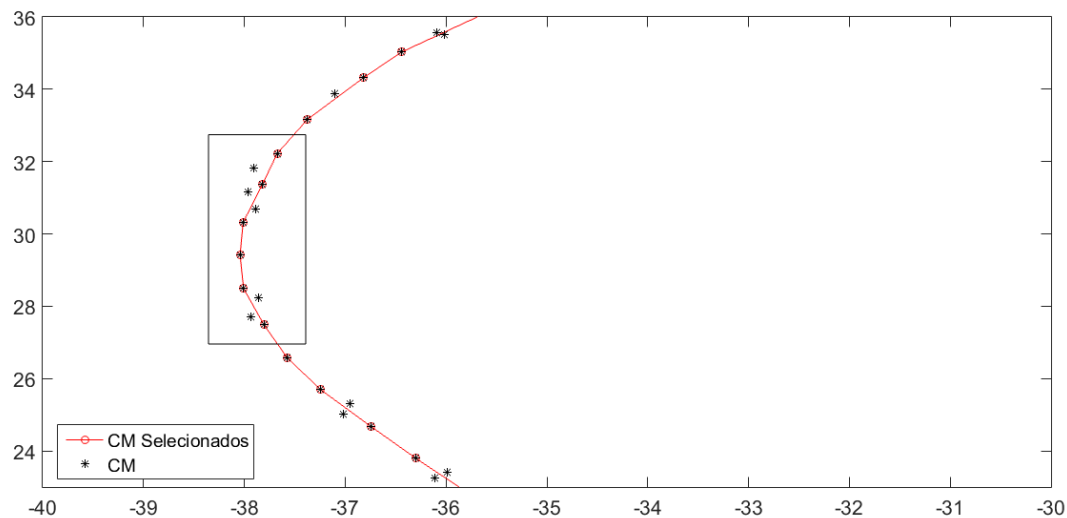


Figura 4.12 - Centros de massa selecionados pelo metodo de seleção

4.3. Pré-cálculo de parâmetros para o ajuste de curva *B-Spline*

Durante vários testes realizados pela equipe do Laboratorio de Automação e Robotica da FEMEC/UFU, diversos tipos de curvas já foram utilizadas para o ajuste de curva neste projeto tais como, aproximação e interpolação usando NURBS, e aproximação e interpolação usando *B-Splines* Uniformes. Os melhores resultados foram obtidos com a utilização da aproximação de *B-Spline* cúbica com peso e restrições de derivada do início e fim com a mesma direção e módulo, proporcionando uma continuidade do tipo C^2 para toda a curva.

Porém, para a realização do ajuste da curva conforme a metodologia proposta neste trabalho, é necessário o cálculo de alguns parâmetros como: peso aplicado a cada ponto ajustado, vetor de direção tangente do fechamento de curva, número de pontos de controle e a seleção do melhor ponto para início da curva.

Todos estes parâmetros possuem forte influência sobre a forma da curva, portanto sendo de extrema importância a boa estimativa destes valores. Este item apresenta a metodologia proposta neste trabalho.

4.3.1. Cálculo dos pesos aplicados a cada ponto ajustado

De acordo com Pereira (2014), os pesos aplicados a cada ponto ajustado podem ser definidos em função do raio de uma circunferência formada para cada três pontos consecutivos.

O raio pode ser obtido por diversas formas mas, com o objetivo de redução do tempo de processamento, neste trabalho é utilizada a lei dos senos, conforme esquematizado na Fig. 4.13, pois foi verificado que é bem mais rápido que o método das mediatrizes utilizado por Pereira (2014).

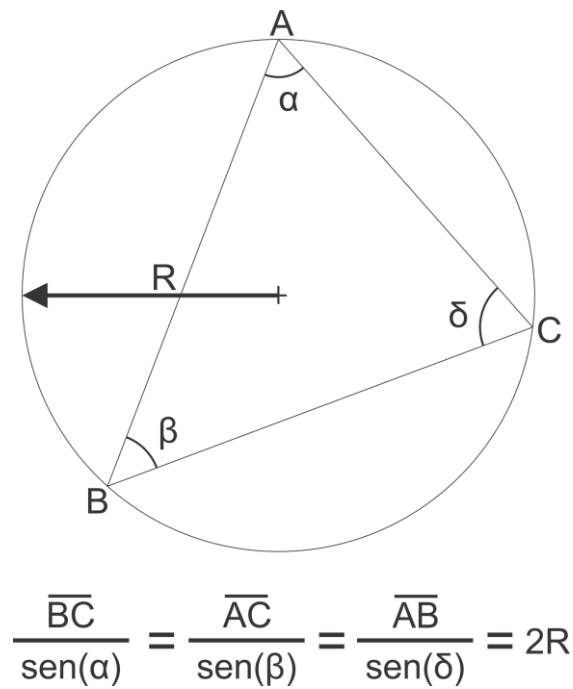


Figura 4.13 - Lei dos senos aplicado a três pontos consecutivos.

A metodologia da definição dos pesos utilizada por Pereira (2014) se baseia no cálculo do valor do raio máximo aceitável, r_{max} , a partir do estimação do raio médio, \bar{r} , somado a um desvio padrão amostral do conjunto de raios, s , Eqs. (4.18) a (4.20).

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (4.18)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2} \quad (4.19)$$

$$r_{max} = \bar{r} + s \quad (4.20)$$

O cálculo do peso é realizado pela razão entre o valor do r_{max} e o valor de cada raio, como apresentado na Eq. (4.21).

$$w_i = \frac{r_{max}}{r_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

Como pode ser verificado na Eq. (4.21), peso e raio são inversamente proporcionais, assim sendo atribuído maiores valores de pesos às regiões com menores raios, fazendo com que a curva se aproxime mais à esses pontos.

Um caso particular em que a curva também deve aproximar dos pontos acontece quando eles estão alinhados. Para este caso o método, Fig. 4.21, não faz a aplicação do máximo peso a estes pontos, pelo contrário, ele aplica o mínimo peso já que o raio tende ao infinito. Assim para os pontos em que os valores de r_i são maiores do que o valor de r_{max} são aplicados o máximo valor do peso.

Desta forma é obtido o vetor contendo os pesos a serem aplicados aos pontos ajustados.

4.3.2. Cálculo do vetor de fechamento de curva

A determinação do vetor derivada para o fechamento da curva pode ser realizada de duas maneiras. A primeira é utilizando os próprios centros de massas vizinhos ao ponto de fechamento para criação de dois vetores que serão analisados para determinar o provável vetor tangente ao ponto de fechamento.

Primeiramente é necessário obter esses dois vetores. Para isso, considere um conjunto de centros de massas definido por $CM = \{cm_1, \dots, cm_n\}$ onde cm_i são as coordenadas Cartesianas (x,y,z) do i -ésimo centro de massa, lembrando que o primeiro e o ultimo centro de massa são os mesmos, $cm_1 = cm_n$. Os vetores são obtidos da seguinte forma:

$$\vec{v1} = (cm_2x - cm_1x \quad cm_2y - cm_1y \quad cm_2z - cm_1z)$$

$$\vec{v2} = (cm_nx - cm_{n-1}x \quad cm_ny - cm_{n-1}y \quad cm_nz - cm_{n-1}z)$$

Geometricamente, os vetores $\vec{v1}$ e $\vec{v2}$ ficam dispostos como representado na Fig. 4.14.

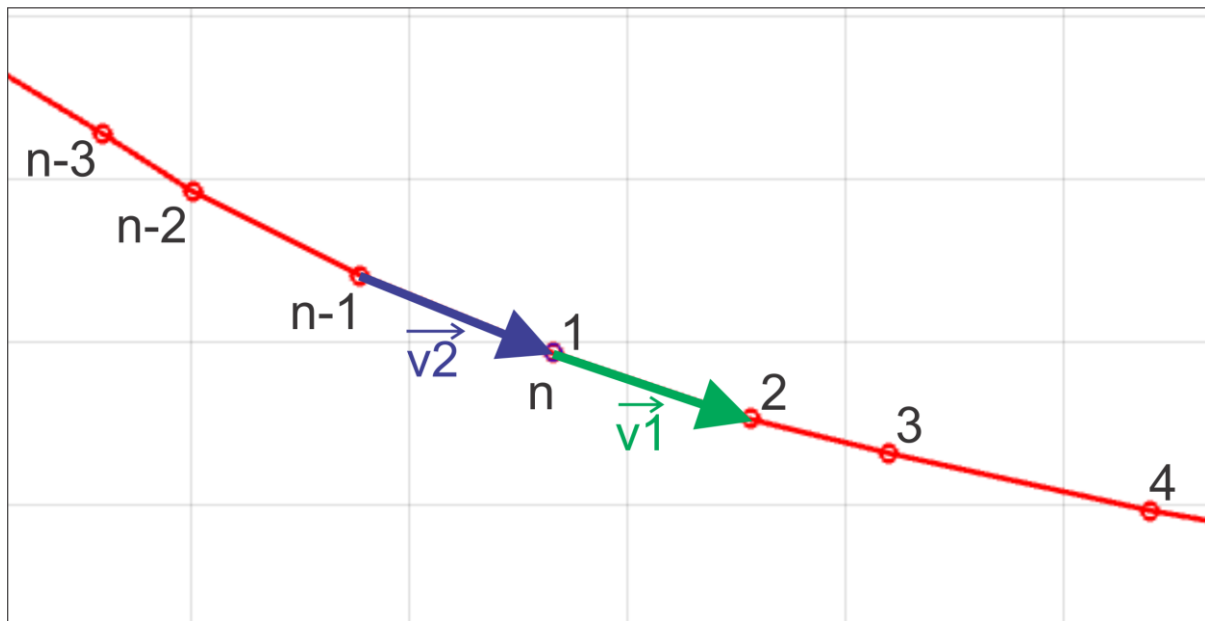


Figura 4.14 - Representação dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2

Obtido os vetores, é então realizada a sua soma e por fim dividido pelo seu módulo para que se torne um vetor unitário representando a direção da tangente no ponto de fechamento da curva, Fig. 4.15.

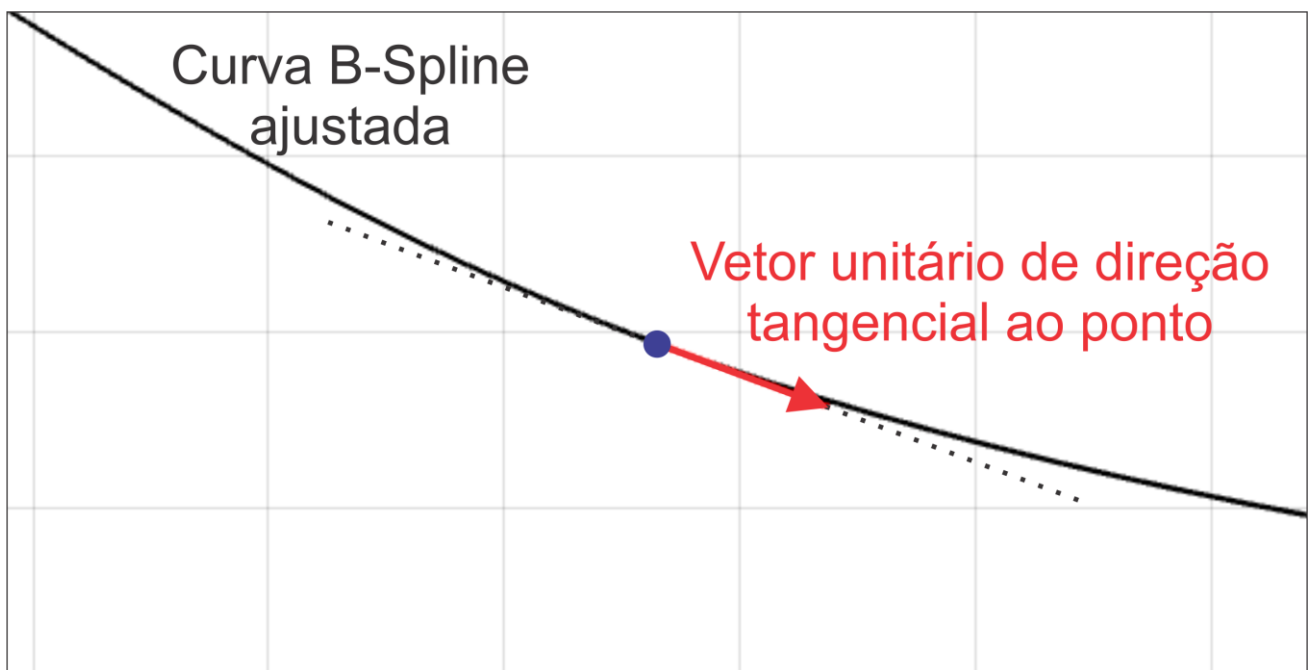


Figura 4.15 - Representação do vetor unitário utilizado para o fechamento

A segunda maneira proposta é de realizar a mudança do ponto de início e fim da curva e por seguinte realizar o ajuste de uma *B-Spline* cúbica sem restrições para esta nova configuração dos pontos. A partir disso é então realizado o cálculo da derivada da *B-Spline* para o antigo ponto de início da curva, obtendo o vetor derivada para aquele ponto.

Primeiramente é necessário realizar a mudança do ponto de início do conjunto de centros de massas. Para isso foi adotado que essa mudança deve ser feita para o lado oposto do conjunto de pontos, uma vez que o ajuste de uma *B-Spline* sem a imposição da derivada no início gera erros de curvatura para a região de início da curva, Fig. 4.16. Desta forma, o ponto a ser calculado estará fora desta zona de erro.

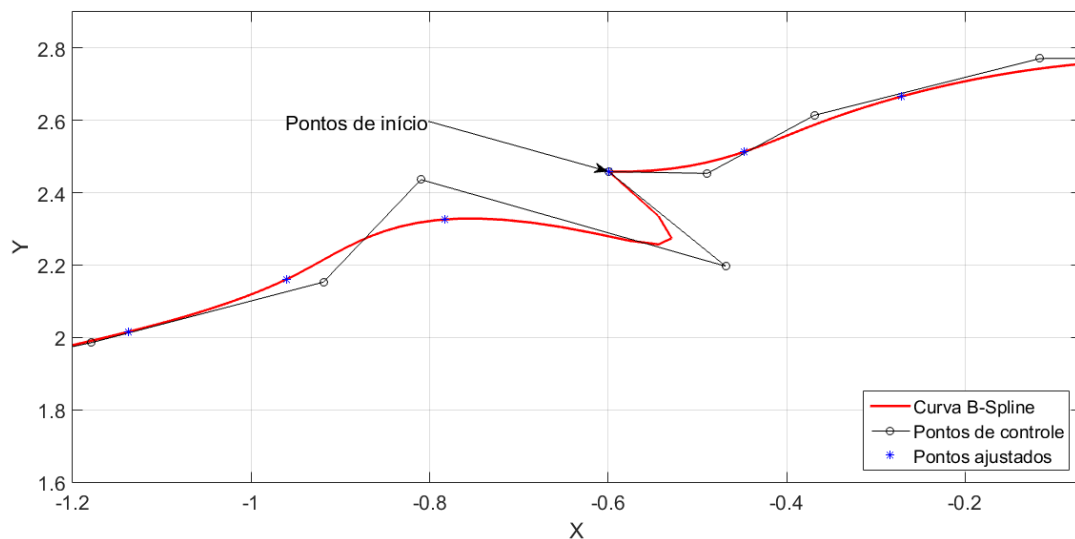


Figura 4.16 - Erro de curvatura para região próxima ao início de uma curva B-Spline sem fechamento com continuidade C^{p-1}

Uma vez realizada a mudança do início do conjunto de centros de massas, é então possível ajustar uma curva *B-Spline* sem nenhuma imposição de derivadas ou interpolação, utilizando o método dos mínimos quadrados apresentado no item 3.4.3, resultando na Fig. 4.17.

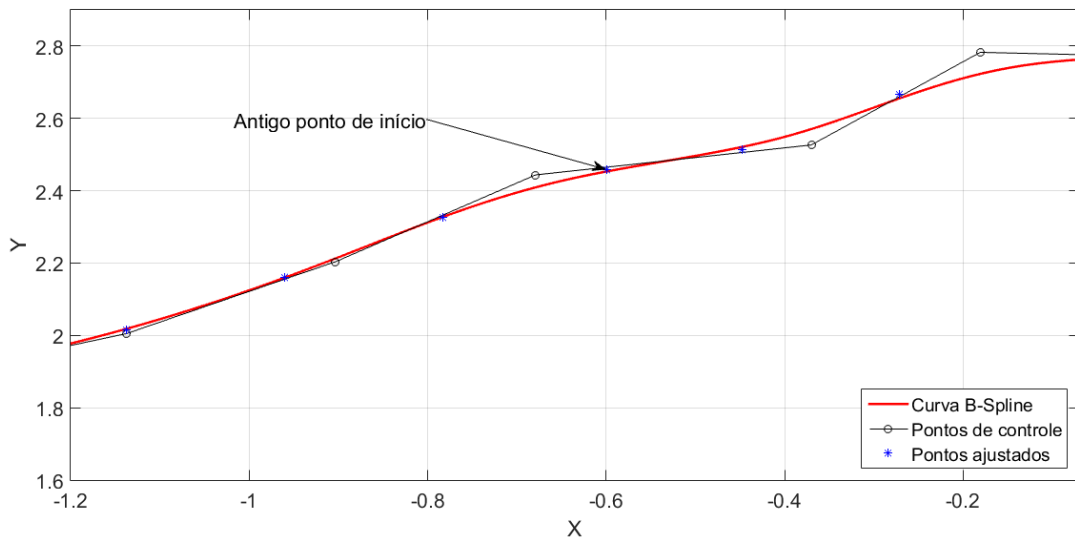


Figura 4.17 - Curva B-Spline com ponto de início alterado passando pelo antigo ponto de início

Ajustada a curva é então necessário o cálculo da derivada no antigo ponto de início da curva, considerando o conjunto inicial dos pontos. Para o cálculo da derivada é utilizada a Eq.(3.11), porém primeiramente é necessário definir a posição do ponto no vetor uk para que assim se calcule apenas a derivada do ponto em questão. Por fim é realizada a divisão do vetor pela seu módulo para definir um vetor unitário que represente a direção da tangente para aquele ponto, Fig. 4.18.

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) \cdot P_i \quad a \leq u \leq b \quad (3.11)$$

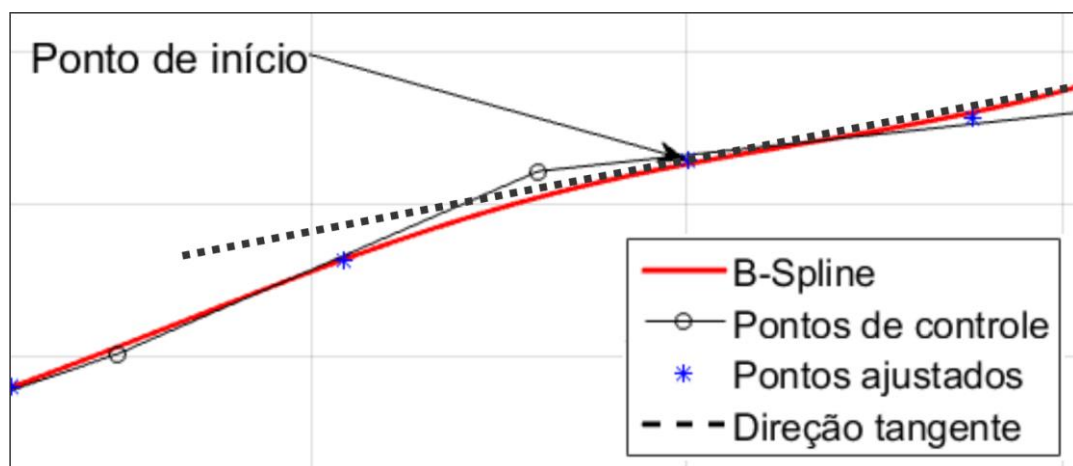


Figura 4.18 - Representação da direção de tangente ao ponto de início

Uma análise com relação aos dois métodos é que o primeiro trabalha com informações de dois pontos vizinhos ao fechamento. Já o segundo método realiza o ajuste de uma *B-Spline* passando pelo ponto a ser analisado, portanto utilizando informações de todos os pontos próximos à sua vizinhança, já que todos os pontos influenciam no perfil desta curva. Mesmo com essas diferenças os dois métodos apresentam resultados muito próximos, sendo ora um melhor ora o outro. Porém, com relação ao tempo de processamento o primeiro método não sofre influência da quantidade de pontos, uma vez que sempre necessitava de três pontos para realização do cálculo, já o segundo método realiza um ajuste de curva, portanto quanto maior o número de pontos maior será o tempo gasto para o cálculo da derivada.

A única maneira de avaliar qual dos dois métodos é melhor, seria aplicando ambos e depois verificando o erro de ajuste para os dois casos, elevando muito o tempo de processamento da reconstrução. Como o primeiro método é o mais simples e não é influenciado pela quantidade de pontos, optou-se pela sua utilização.

4.3.3. Cálculo do número de pontos de controle

O número de pontos de controle utilizados em um ajuste de curvas *B-Splines* influencia diretamente no número de equações a ser resolvidos, portanto no tempo de solução do método, assim como no erro de ajuste.

Estas duas influencias citadas são conflitantes, ou seja, quanto maior o tempo para solução das equações menor se torna o erro de ajuste. Assim sendo possível a definição de um problema de otimização com multi-objetivos, neste caso é utilizado como variável de projeto o número de pontos de controle e como objetivos as seguintes considerações:

- A minimização do tempo de processamento;
- A minimização do número de pontos de controle;
- A minimização do erro de ajuste.

De acordo com Vanderplaats (1999), a resolução de problemas multi-objetivos é feita utilizando métodos de otimização para geração dos resultados a serem analisados, curva de *Pareto*. Porém, neste trabalho não é necessário utilizar destes métodos, pois os objetivos a serem calculados são relativamente fáceis de serem obtidos.

Para avaliação dos resultados é necessária a formulação de uma função de ponderação, assim sendo possível atribuir valores diferentes de pesos para cada objetivo de acordo com a necessidade do

usuário. A função de ponderação utilizada é a soma ponderada da normalização de cada objetivo, Eq.(4.22).

$$F = \frac{w_1 \cdot \frac{F_1 - |F_1|_{\min}}{|F_1|_{\max} - |F_1|_{\min}} + w_2 \cdot \frac{F_2 - |F_2|_{\min}}{|F_2|_{\max} - |F_2|_{\min}} + w_3 \cdot \frac{F_3 - |F_3|_{\min}}{|F_3|_{\max} - |F_3|_{\min}}}{w_1 + w_2 + w_3} \quad (4.22)$$

Sendo:

F – Função objetivo;

F_1, F_2, F_3 – Vetores com resultados para cada objetivo;

w_1, w_2, w_3 – Peso aplicado para cada objetivo.

Para construção da curva de Pareto, será apresentado em um gráfico os pontos F em função dos números de pontos de controle utilizados para seu cálculo. Estes números de pontos de controle foram criados iniciando em $p+1$, uma vez que é a condição necessária para existência de uma *B-Spline* e também por não haver nenhuma restrição como interpolação ou vetores derivadas impostas a algum ponto, e finalizando no número total de pontos a ser ajustado.

O primeiro objetivo, tempo de processamento, foi mensurado utilizando as funções *tic* e *toc* do *Matlab*, onde foram posicionadas, respectivamente, no início e fim do algoritmo de cálculo dos pontos de controle para assim mensurar o tempo gasto para realização deste cálculo.

Para estimar o tempo de processamento seria necessário realizar uma média de um grande valor de amostras já que o tempo de processamento depende também do sistema operacional e assim havendo muita variação para cada amostra. No trabalho publicado no COBEM 2015, (FANTI e CARVALHO, 2015) foi realizada uma estimativa para se aproximar dos valores médios para o tempo de cálculo dos pontos de controle para um certo conjunto de pontos. Foram realizados o cálculo de 50000 amostras para cada número de pontos de controle e então obtida a média para cada conjunto, Fig. 4.19.

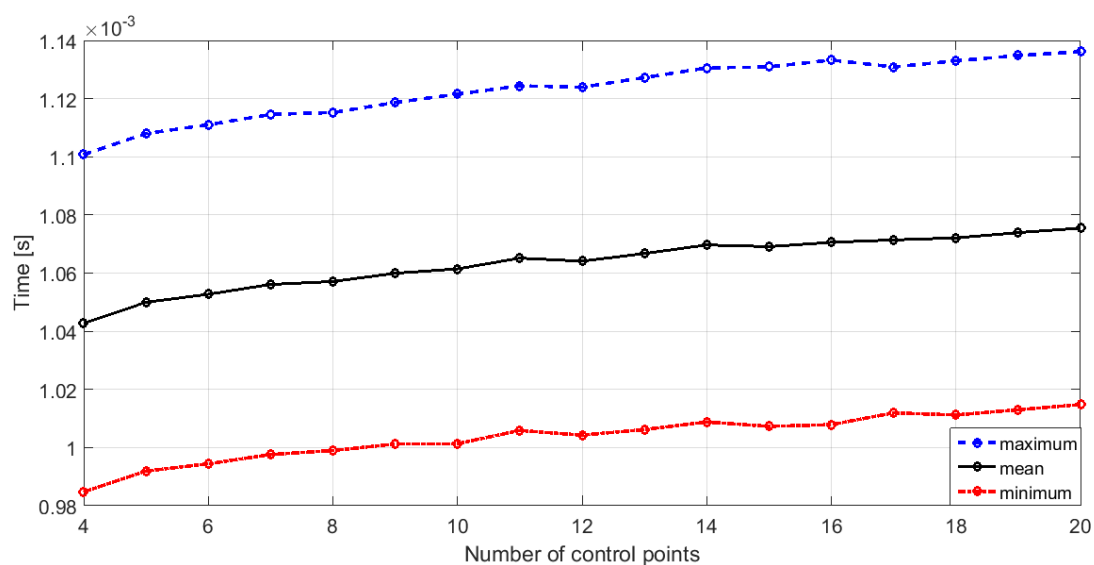


Figura 4.19 - Tempo gasto para ajuste em função do número de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015)

Pode-se perceber que realmente o tempo de cálculo dos pontos de controle é crescente em função do número de pontos de controle. Porém, a diferença entre o menor e o maior valor médio é muito pequeno, sendo próximo a 2×10^{-5} segundos para o conjunto de pontos utilizado no artigo. Sendo assim aceitável a não inclusão deste objetivo ao cálculo da função de ponderação.

O segundo objetivo, número de pontos de controle, é o mais simples de ser obtido sendo apenas registrado o número de pontos de controle utilizado para o cálculo dos pontos de controle. Portanto a curva deste objetivo é uma reta bissetriz limitada pelo menor e maior número de pontos de controle utilizado para o conjunto de pontos, Fig. 4.20.

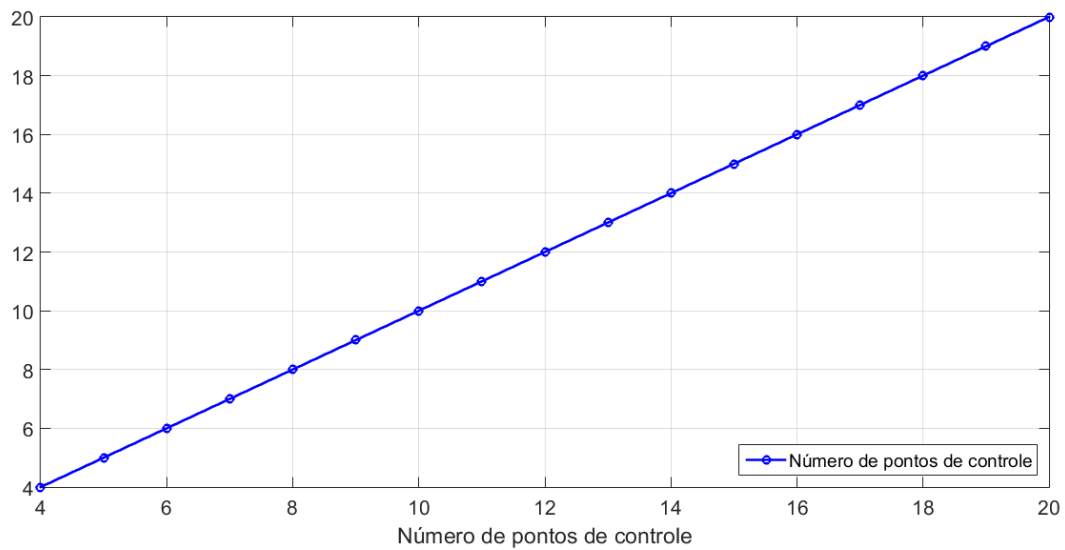


Figura 4.20 - Número de pontos de controle utilizado a cada calculo.

Finalmente o terceiro e último objetivo, erro de ajuste, é obtido pelo cálculo do erro dos mínimos quadrados conforme Eq.(4.23).

$$Erro = [NP - Q]^2 \quad (4.23)$$

Uma vez calculado o resultado para cada objetivo, é necessário obter a função de ponderação e então avaliar qual o seu menor resultado.

Considerando o conjunto de pontos representados na Fig. 4.21 para a aplicação da metodologia proposta (FANTI e CARVALHO, 2015) e aplicando o cálculo do erro dos mínimos quadrados, foi obtida a curva de resposta representada na Fig. 4.22.

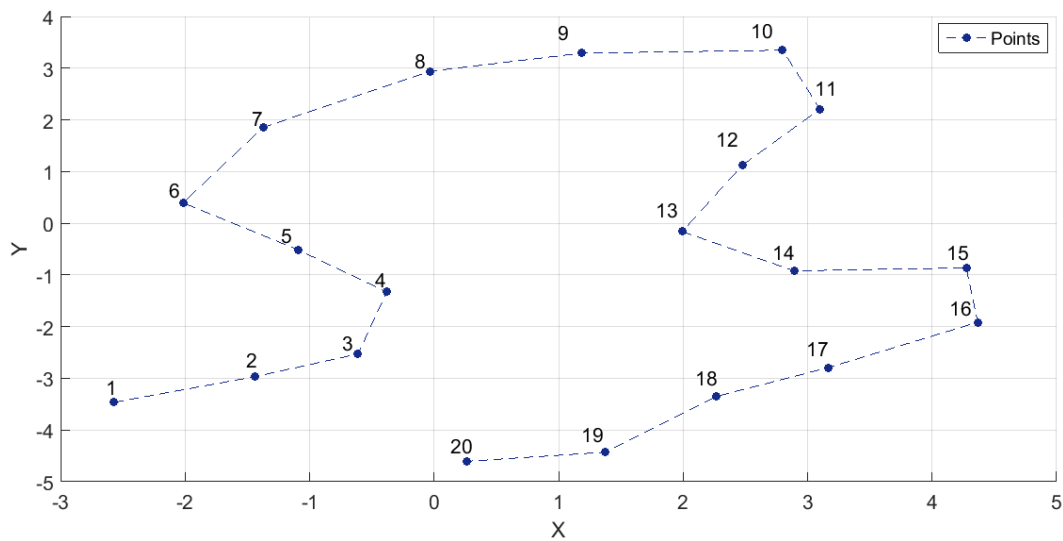


Figura 4.21 - Sequência de pontos a serem ajustados (FANTI e CARVALHO, 2015)

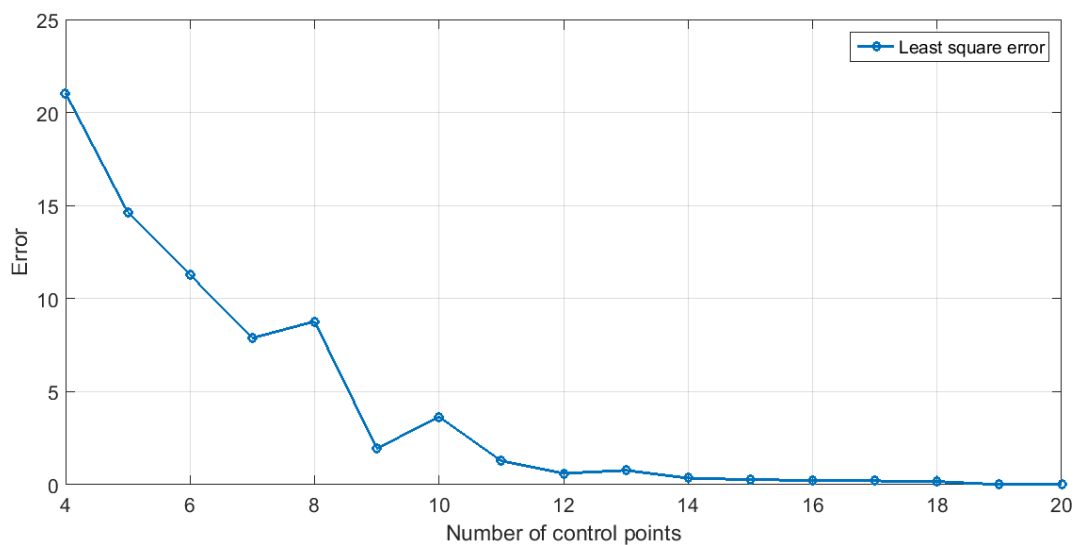


Figura 4.22 - Erro de ajuste em função do número de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015)

Por fim é aplicada a função de ponderação, sendo considerados os seguintes pesos:

- $W_{erroAjuste} = 0,9$
- $W_{numeroPontosControles} = 0,1$
- $W_{Tempo} = 0,0$

Como pode-se notar, o peso para o tempo de processamento foi utilizado como zero, portanto este foi desconsiderado. O peso para o erro de ajuste foi o mais alto uma vez que representa o objetivo

principal no ajuste de curva. Vale ressaltar que os valores dos pesos são utilizados de acordo com o objetivo do usuário.

Calculada a função de ponderação, foi então plotada a curva de *Pareto* e marcando o seu menor valor, sendo este o resultado para o método, Fig. 4.23.

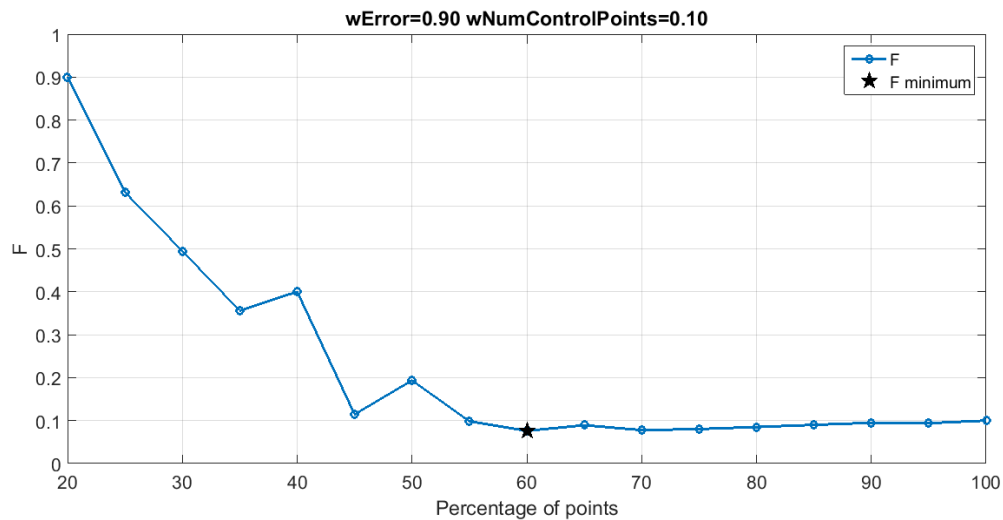


Figura 4.23 - Resultado da função de ponderação em função da porcentagem de número de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015)

Portanto, para o conjunto de pontos representado na Fig. 4.24, o número de pontos de controle que melhor atende os objetivos utilizados é de 60% que equivale a 12 pontos de controle. A B-Spline cúbica aberta ajustada está representada na Fig. 4.24.

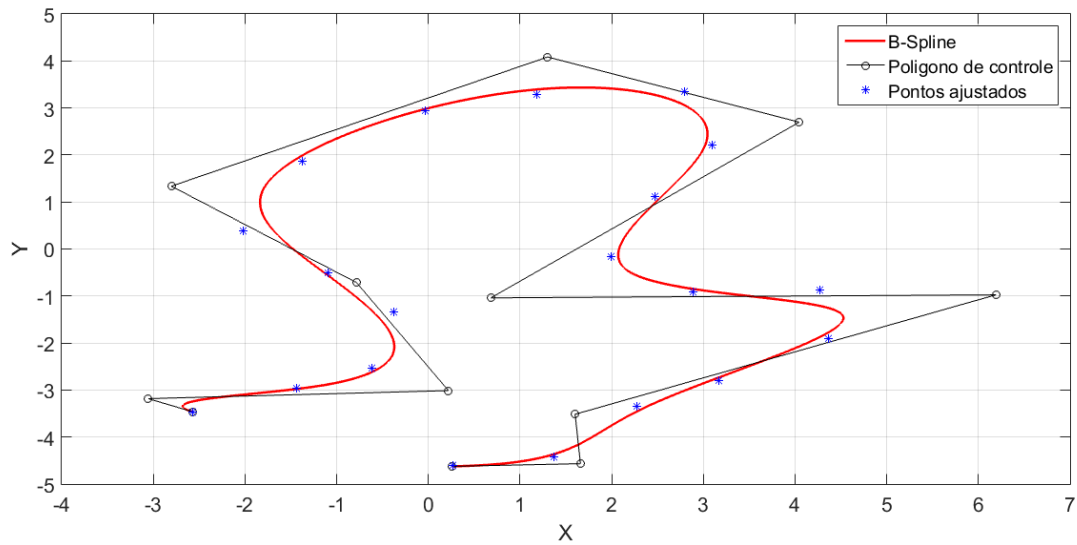


Figura 4.24 - Ajuste realizado com o número ótimo de pontos de controle (FANTI e CARVALHO, 2015)

4.3.4. Seleção do melhor ponto de início da curva

Neste trabalho são utilizados vetores de nós do tipo *clamped* onde o primeiro e último pontos da *B-Spline* são iguais aos pontos de início e fim do conjunto de pontos ajustados e, como neste trabalho é utilizada a aproximação, onde nem todos os pontos ajustados devem pertencer à curva ajustada, a escolha dos pontos de início e fim da curva deve ser bem realizada uma vez que a escolha de um ponto o qual a curva não deveria passar sobre ele pode levar a um grande erro de ajuste, como exemplificado na Fig. 4.25.

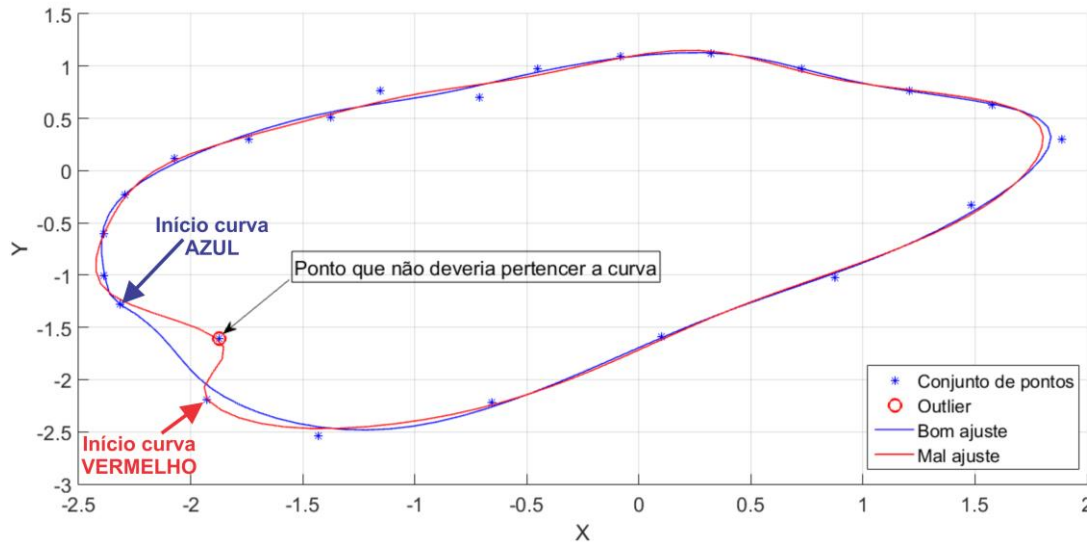


Figura 4.25 - Exemplo de bom e mal ajuste com relação a passar por um ponto que não deveria pertencer à curva

Desta forma é necessário definir um ponto de início e fim de maneira que a curva desejada passe o mais próximo possível dele. Isto acontece para pontos alinhados como pode ser verificado na Fig. 4.25. Quando os pontos estão alinhados, estes pontos tendem a representar uma reta e assim a curva *B-Spline* tende a passar sobre eles para ajustar a reta.

Porém, não necessariamente colocando o início da curva nos pontos mais alinhados resulta nos menores erros, pois isso depende de todo o conjunto de pontos. Portanto, o método para a seleção de pontos consiste em selecionar um certo número de pontos mais prováveis para início e fim da curva, e por seguinte, testar cada um destes calculando o erro de ajuste. O melhor ponto é o que apresenta o menor erro de ajuste de curva.

Primeiramente é necessário calcular os ângulos formados a cada conjunto de três pontos consecutivos, para isso é utilizado o produto escalar entre dois vetores, Eq. (4.24). Quanto mais alinhados estiverem os pontos, menor o ângulo entre eles. Para análise de escolha dos melhores pontos, são considerados cinco conjuntos de pontos mais alinhados.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (4.24)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right) \quad (4.25)$$

Os vetores são formados no sentido da orientação do conjunto de pontos, por exemplo, para os pontos $\{ Q_1, Q_2, Q_3 \}$ os vetores ficam da seguinte forma, $\overrightarrow{Q_{12}}$ e $\overrightarrow{Q_{23}}$. O ângulo calculado para cada conjunto de três pontos consecutivos representa o ângulo para o ponto intermediário aos três.

Os cinco menores ângulos correspondem aos cinco conjuntos de três pontos consecutivos mais alinhados. Isso significa que um deles pode apresentar o menor erro no ajuste da curva. Então, cinco sequências de pontos são criadas a partir da reordenação dos pontos, sendo o primeiro aquele que apresenta o menor ângulo. Aplicando o ajuste de curva, conforme descrito no item 4.4 a seguir, é possível verificar qual dos conjuntos apresenta o menor erro de ajuste, sendo o ponto correspondente escolhido como o melhor ponto de início e fim da curva.

4.4. Ajuste de curva *B-Spline*

Para melhor compreensão de como determinar o melhor ajuste de uma curva *B-Spline* para qualquer conjunto de pontos ordenados, considerando a metodologia aqui proposta, a seguir é apresentada a sequência de procedimentos.

Primeiramente, o procedimento que não depende do resultado de outros é o do cálculo dos pesos aplicados a cada ponto ajustado, sendo apenas necessário o conjunto de pontos. Portanto este método deve ser o primeiro a ser aplicado, conforme item 4.3.1.

O segundo procedimento é o de seleção do conjunto de pontos que podem ser utilizados como ponto de início da curva, o qual também só depende do conjunto de pontos. Como este método e o anterior dependem do cálculo dos ângulos, é possível a implementação dos dois algoritmos em uma única função. A seleção do melhor ponto de início da curva está descrita no item 4.3.4. Cabe salientar que este procedimento seleciona os cinco possíveis melhores pontos para início da curva.

Uma vez definido os cinco prováveis melhores pontos de início da curva, deve-se aplicar os próximos procedimentos a todos os cinco, uma vez que os próximos procedimentos são influenciados diretamente pelo início da curva.

O próximo procedimento consiste no cálculo do vetor da direção da tangente ao ponto de fechamento da curva uma vez que, se utilizado o método que considera os pontos vizinhos do ponto de início, é apenas necessário o conjunto de pontos e o ponto de início da curva. Caso seja utilizado o cálculo da derivada da curva *B-Spline* ajustada considerando a troca do início da curva, são utilizados

todos os parâmetros já calculados e o número de pontos de controle, que ainda não foi calculado. Para isso é utilizado como um valor próximo a 80% do número de pontos ajustados, para assim garantir uma boa estimativa para o vetor de direção tangente ao ponto de fechamento da curva.

Em seguida é feito o cálculo do número de pontos de controle, já que este é o último parâmetro que falta ser calculado.

Por fim é feito o ajuste da curva *B-Spline* cúbica com peso e restrição da derivada para os pontos de início e fim, obtendo os pontos de controle e o vetor de nós, bem como o cálculo do erro dos mínimos quadrados do ajuste. Uma vez calculado o erro, este e as outras informações são arquivadas e então repetido os passos para o próximo ponto de início selecionado, até que encerre os cinco pontos. De posse dos cinco erros de ajuste, é possível determinar qual foi o melhor ajuste para os cinco, sendo então o que apresentar menor erro selecionado como ponto de início e seus pontos de controle e vetor de nós a serem utilizados no ajuste final.

A Fig. 4.26 representa um fluxograma dos passos para efetuar o ajuste de curvas a partir de um conjunto de pontos conhecidos, conforme a metodologia proposta.

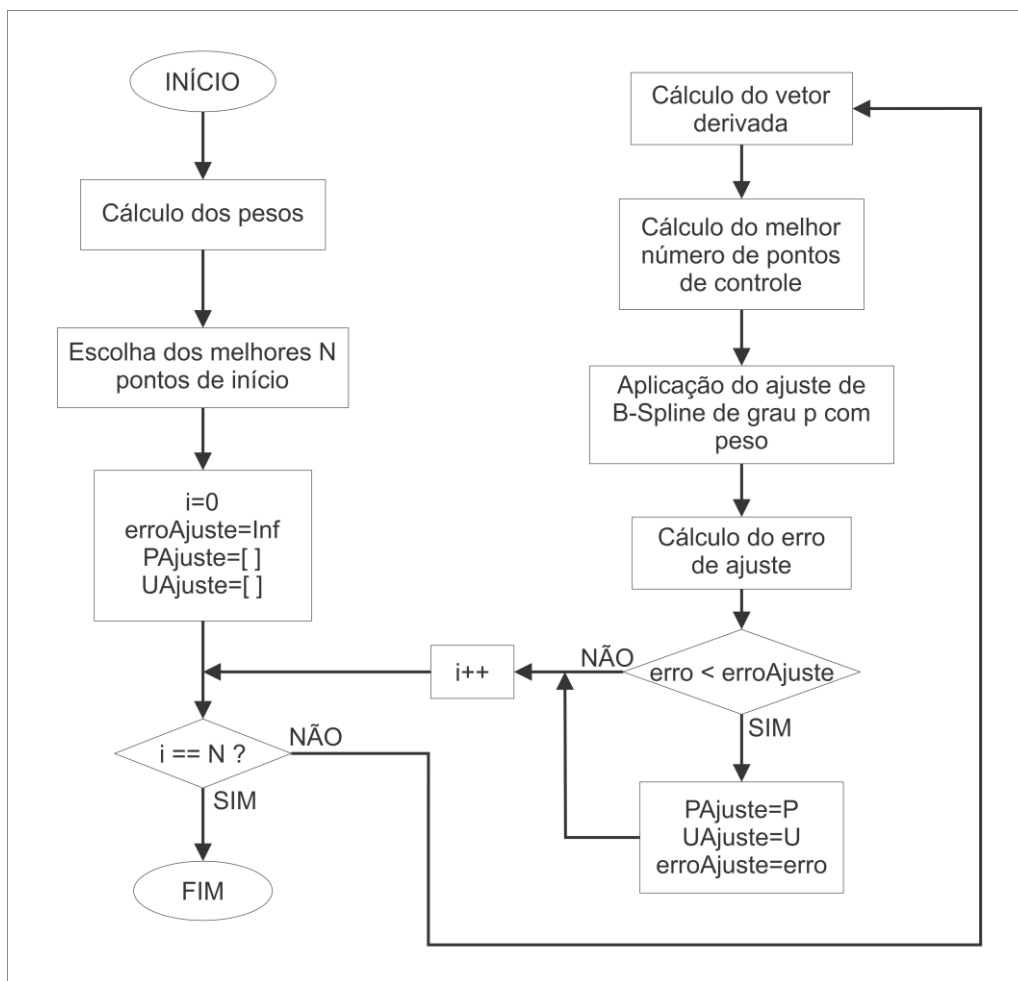


Figura 4.26 - Fluxograma representativo dos passos seguidos para o ajuste das curvas B-Splines, conforme a metodologia proposta.

4.5. Cálculo dos pontos da superfície

Neste item são apresentados os métodos desenvolvidos para calcular os pontos para reconstrução da superfície através das curvas ajustadas para cada seção transversal. As figuras de cada método apresentam o tempo gasto para o cálculo dos pontos para cada superfície, foi utilizado um notebook HP DM4-2160SF com processador Intel i5 2430M 2.4GHz e memória de 6GB DDR3, porém este tempo é somente para se ter uma noção do quão lento ou rápido é aquele método, já que para se estimar um tempo seria necessário a repetição do método várias vezes e por fim o cálculo de um intervalo de confiança, o que não será feito.

O cálculo dos pontos da superfície pode ser realizado de duas maneiras: utilizando as equações de superfície B-Spline ou através da interpolação dos pontos das seções transversais na direção longitudinal.

4.5.1. Equação da superfície B-Spline

Este método utiliza todos os pontos de controle calculados anteriormente para as seções transversais, como uma rede de pontos de controle, e então é realizado o cálculo direto dos pontos utilizando a equação da superfície apresentada no item 3.5. Esta opção tem como resultado uma superfície suave e contínua, porém apresenta um problema com relação às posições de início da curva para cada seção, causando um efeito de torção na superfície calculada, Fig. 4.27, e também necessita de um grande tempo computacional para seu cálculo.

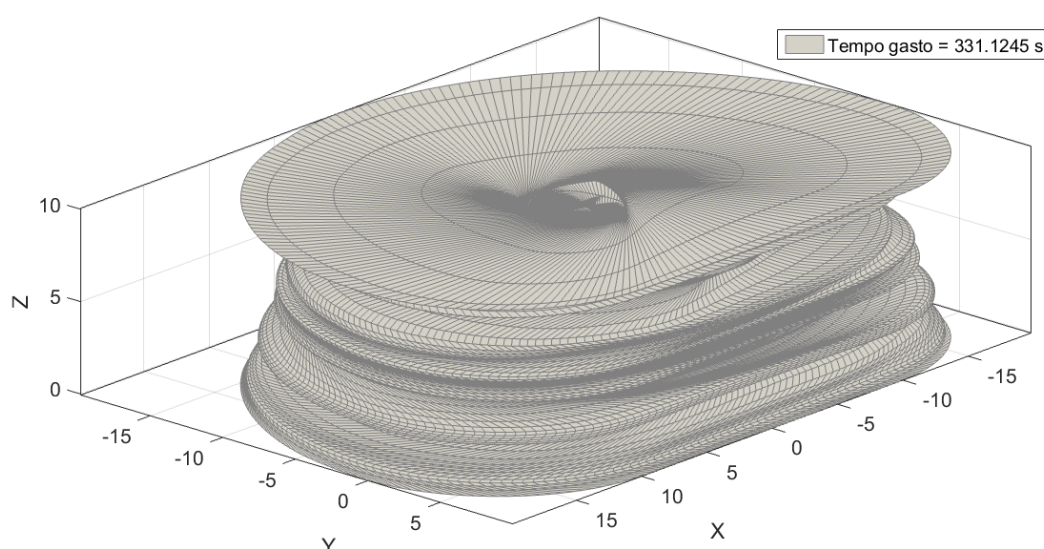


Figura 4.27 - Superfície reconstruída sem alinhamento dos pontos de início

Para contornar o efeito de torção, a função de seleção do ponto inicial da curva utilizada no item 4.3.4, é substituída por uma função que seleciona o CM mais próximo de um certo referencial adotado pelo usuário. Neste trabalho foi selecionado o ponto mais próximo da coordenada $x = 0$ e o y mais negativo, para que se torne o ponto de início de cada seção. Este procedimento trouxe uma melhora com relação ao efeito de torção apresentado, porém não por completo, como visto na Fig. 4.28, onde ainda é possível notar que as linhas longitudinais não são totalmente lineares.

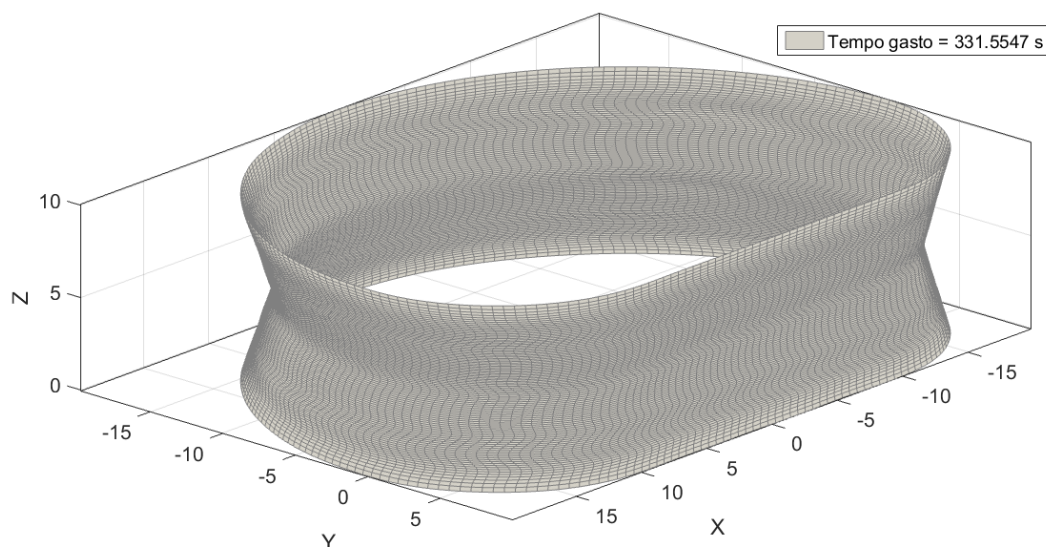


Figura 4.28 - Superfície reconstruída com alinhamento dos pontos de início

4.5.2. Interpolação dos pontos das seções transversais

Neste método é realizada a interpolação na direção longitudinal das curvas B-Splines cúbicas ajustadas à cada seção transversal conforme o método descrito no item 4.4. Para que as seções tenham o mesmo número de pontos, as curvas B-Splines são calculadas utilizando um vetor \bar{u} contendo 200 valores igualmente espaçados entre 0 e 1.

Os conjuntos de pontos a serem interpolados possuem um ponto de cada seção transversal, assim caracterizando uma direção longitudinal. A união de todos os conjuntos de pontos interpolados resulta na superfície reconstruída, Fig. 4.29.

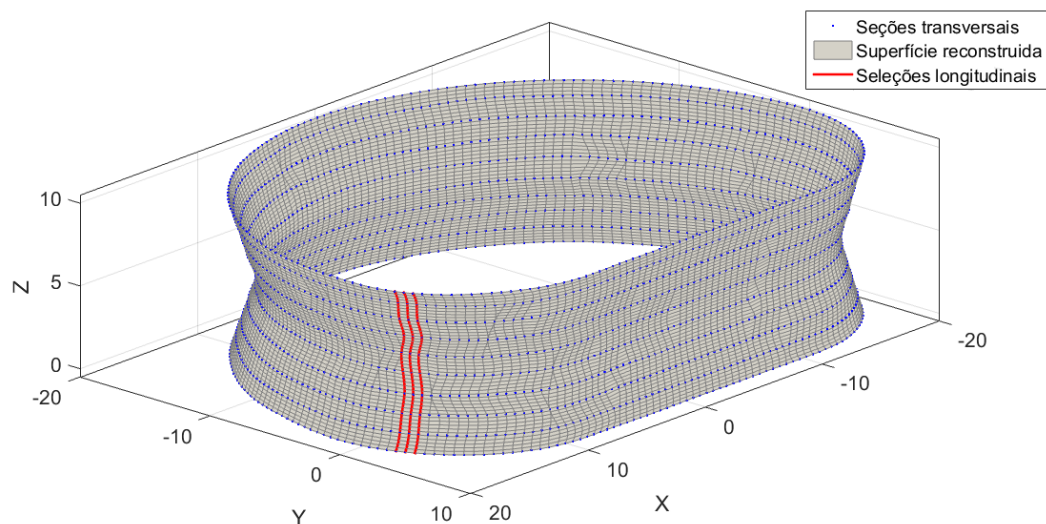


Figura 4.29 - Figura representando a superfície reconstruída com suas seções transversais e, em vermelho, exemplo da interpolação de seções longitudinais

Porém, quais pontos devem ser utilizados para a interpolação? Foram realizados diversos testes para chegar ao método mais adequado para responder essa questão.

O primeiro método que foi testado seleciona os pontos que são mais próximos para cada seção consecutiva da seguinte maneira: Primeiramente define-se os pontos-base na cota inferior que serão tomados como pontos iniciais para busca dos mais próximos pertencentes à seção transversal logo acima. Com o primeiro ponto da base é então realizada a busca pelo ponto mais próximo na cota seguinte, repetindo-se até que seja selecionado um ponto de cada seção, sendo então realizada a interpolação de uma B-Spline cúbica para este conjunto de pontos. Repete-se o procedimento para todos os pontos da base. O resultado da interpolação dos pontos é a superfície ajustada da Fig. 4.30.

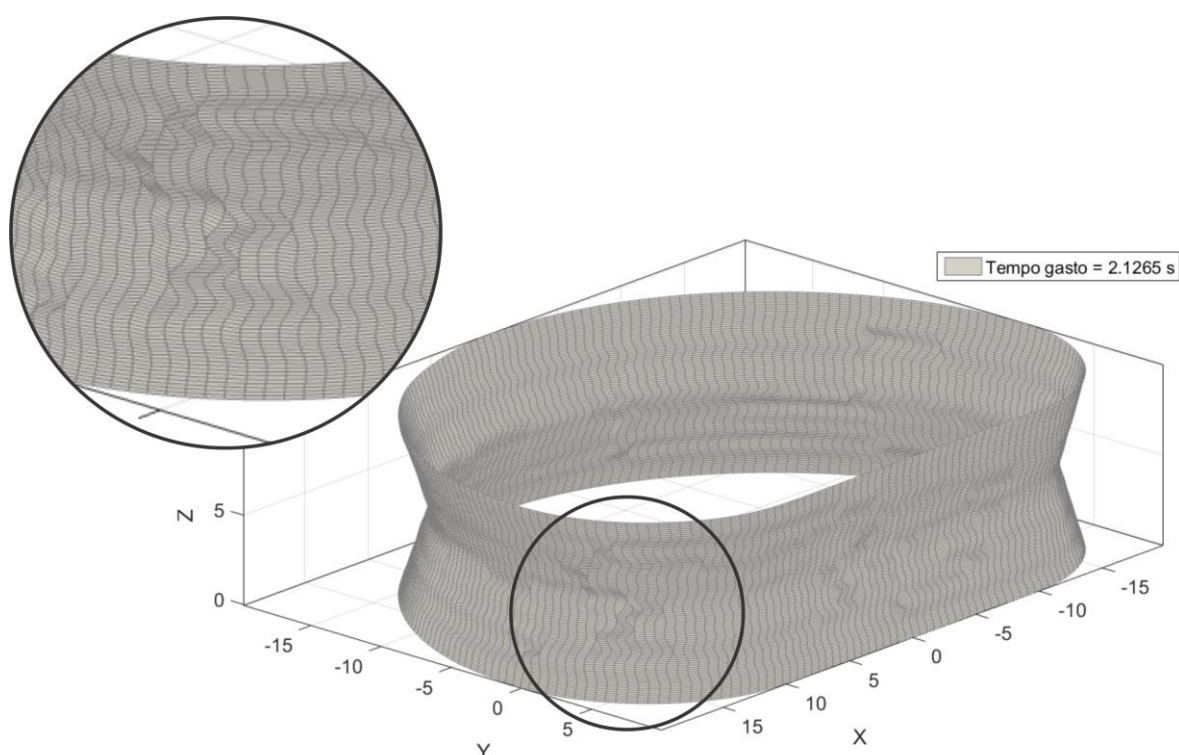


Figura 4.30 - Superfície reconstruída pelo método das distâncias a partir da verificação dos pontos mais próximos a cada ponto da base.

Como pode ser verificado, este método possui uma grande instabilidade para suas linhas longitudinais, apresentando algumas imperfeições devido à seleção de mesmos pontos por diferentes conjuntos de seleções longitudinais.

Para aumentar a precisão do método, o número de pontos das curvas das seções transversais, exceto a da base, é multiplicado por 10, portanto, se a base possui 200 pontos em sua curva da seção transversal, as demais cotas possuirão 2000 pontos. Esse aumento da quantidade de pontos faz com que se reduza o número de seleção de mesmos pontos por diferentes conjuntos de seleções longitudinais e ainda proporciona uma seleção de pontos ainda mais alinhados do que antes, como pode ser verificado na Fig. 4.31.

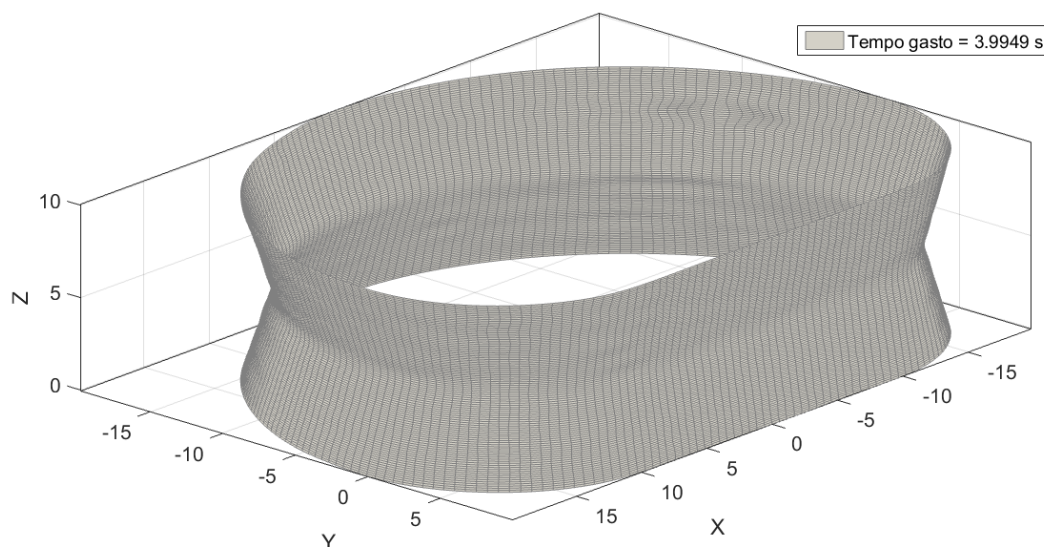


Figura 4.31 - Superfície reconstruída pelo método das distâncias com aumento de número de pontos nas seções transversais.

Esta mudança no método trouxe uma melhoria significativa com relação às imperfeições na superfície. Também pode ser notado o aumento do tempo de processamento, isto devido ao aumento do número de pontos.

Foi realizado mais um teste aumentando o valor multiplicado de 10 para 100. Porém não foi verificado melhora expressiva na superfície reconstruída, e o tempo de processamento sofreu um aumento de valores próximo a 22 segundos.

Para tentar melhorar os resultados obtidos no método anterior, foi então proposto um segundo método, denominado método das distâncias reduzido, onde não seria realizada a busca dos pontos mais próximos em relação a todos pontos da base, mas apenas de um ponto de referência para cada seção transversal. Considerando como a referência da base o seu ponto inicial, é então buscado o ponto de cada seção que possua a menor distância para este ponto da base. A partir deles, os pontos das suas respectivas seções são reordenados colocando-os como primeiro ponto de referência. Desta forma os demais pontos da base selecionam os pontos de mesmo índice das cotas superiores para então realizar a interpolação e cálculo dos pontos da superfície. O resultado é apresentado na Fig. 4.32.

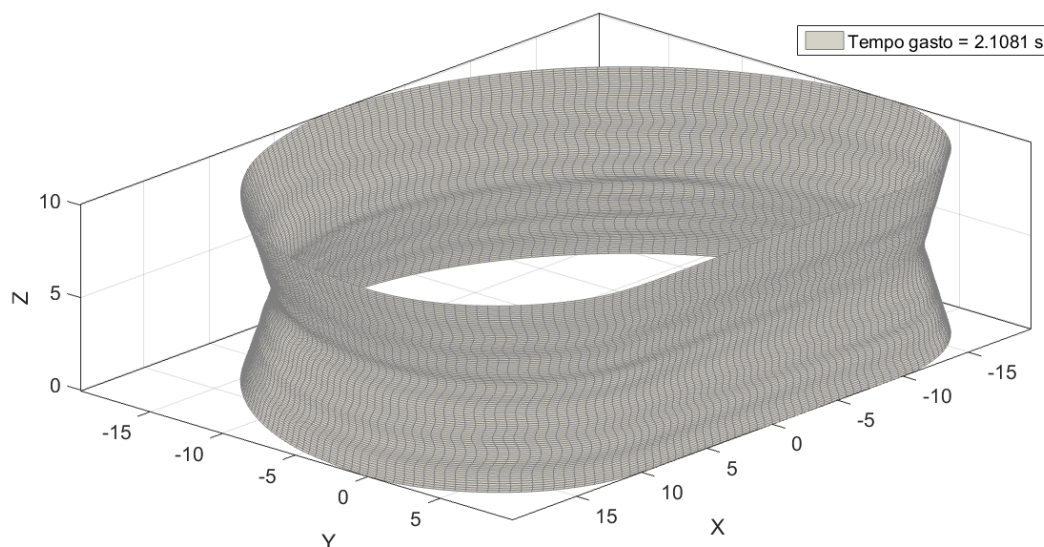


Figura 4.32 - Superfície reconstruída pelo método das distâncias reduzido.

Apesar de ser verificado uma melhora com relação ao tempo de processamento, este método não trouxe melhoria com relação à superfície reconstruída. Sendo possível ainda verificar certa instabilidade para as linhas longitudinais.

Quanto mais retilíneas as linhas longitudinais, é possível que a superfície se torne mais suave e assim proporcione uma reconstrução mais próximo do desejado.

Com base nisto foi então introduzido mais um parâmetro na escolha dos pontos: o vetor que mais se aproxima de uma ortogonal ao plano da base. Este vetor é formado pelo ponto da base e o ponto da seção logo acima. Para isso deveria ser calculada a projeção do vetor formado pelos pontos em questão no plano da base e então selecionado aquele que apresentasse projeção mais próxima de zero. Porém, como as seções são paralelas ao plano XY, foi então utilizado como parâmetro a coordenada Z do vetor unitário formado pelos dois pontos em questão, onde o vetor com maior valor para a direção Z é considerado o mais ortogonal. O resultado deste método é apresentado na Fig. 4.33.

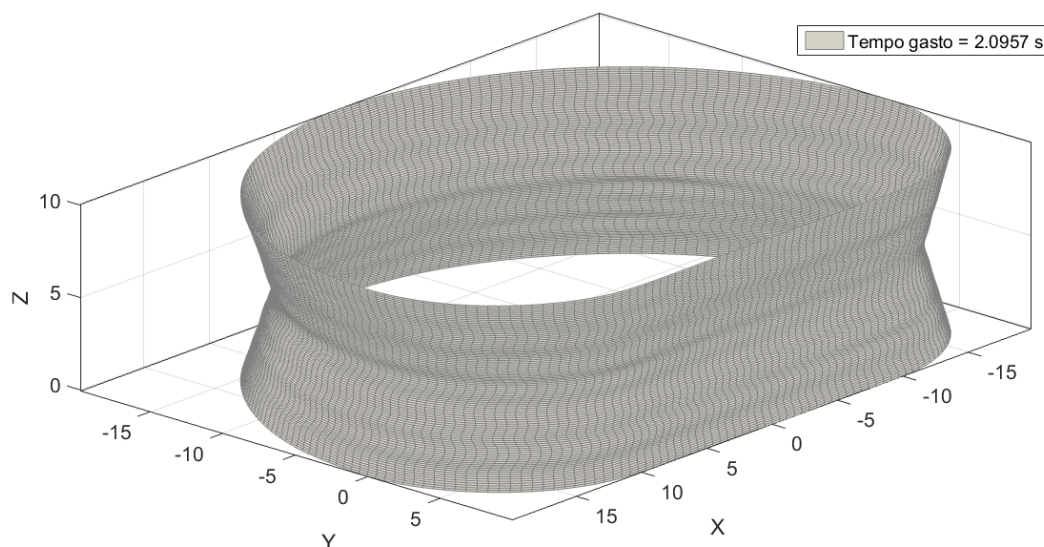


Figura 4.33 - Superfície reconstruída utilizando o método da ortogonalidade.

O método da ortogonalidade e o das distâncias reduzido apresentaram o mesmo resultado, portanto não trazendo melhorias à superfície reconstruída.

Foi testada a união dos dois métodos pelo produto da ortogonalidade pelo inverso da distância, porém também resultou na mesma superfície reconstruída.

4.5.3. Métodos baseados nos planos longitudinais

Os métodos apresentados obtiveram uma grande melhoria quanto ao tempo gasto para a reconstrução quando comparado aos métodos que utilizam as equações das superfícies *B-Splines*. Porém, o objetivo é buscar um método que seja rápido e também que realize uma reconstrução isenta da instabilidade das linhas longitudinais. Para atingir esse objetivo foi proposto selecionar os pontos de interseção entre as seções transversais e um plano longitudinal, Fig. 4.34. Assim, quando interpolados estes pontos, com certeza, não haverá efeito de *zig-zag* e muito menos o de torção na superfície.

As Figuras 4.34 e 4.35 representam uma superfície cônica para melhor visualização deste método.

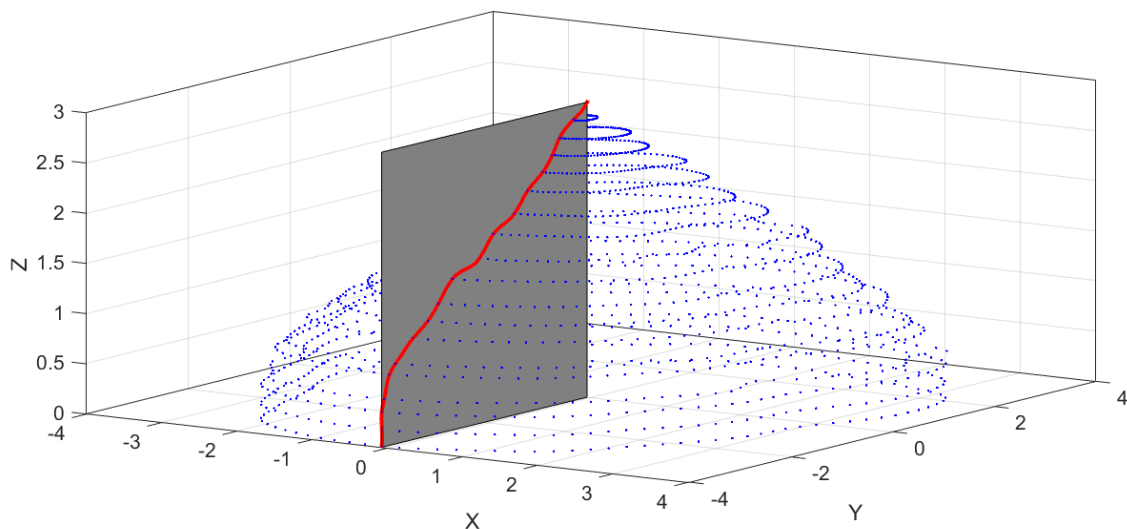


Figura 4.34 - Representação de um plano longitudinal cortando a superfície

Porém o cálculo destes pontos de interseção não é uma tarefa fácil, uma vez que a equação de uma *B-Spline* se baseia no somatório do produto entre a função de base de grau p para o nó u e os pontos de controle. As funções de base são obtidas iterativamente com o cálculo de funções de base para graus menores que p , portanto não sendo simples determinar uma equação direta a ser resolvida.

Desta forma dois métodos numéricos foram desenvolvidos para a solução desta tarefa: um método direto e outro iterativo.

4.5.3.1. Método direto

O método direto se baseia em determinar uma equação que resulta o nó u que, quando substituído na equação da curva *B-Spline*, resulta no ponto de interseção com o plano longitudinal.

Para isso, primeiramente é necessário selecionar um ponto de referência, C_R , para o cálculo do ângulo de cada ponto da curva, uma vez que será utilizada a informação desse ângulo para determinar se o ponto pertence àquele plano. Este ponto de referência deve possuir suas projeções sempre interna a todas as curvas, para que assim o cálculo do ângulo resulte sempre em apenas um resultado, Fig. 4.35.

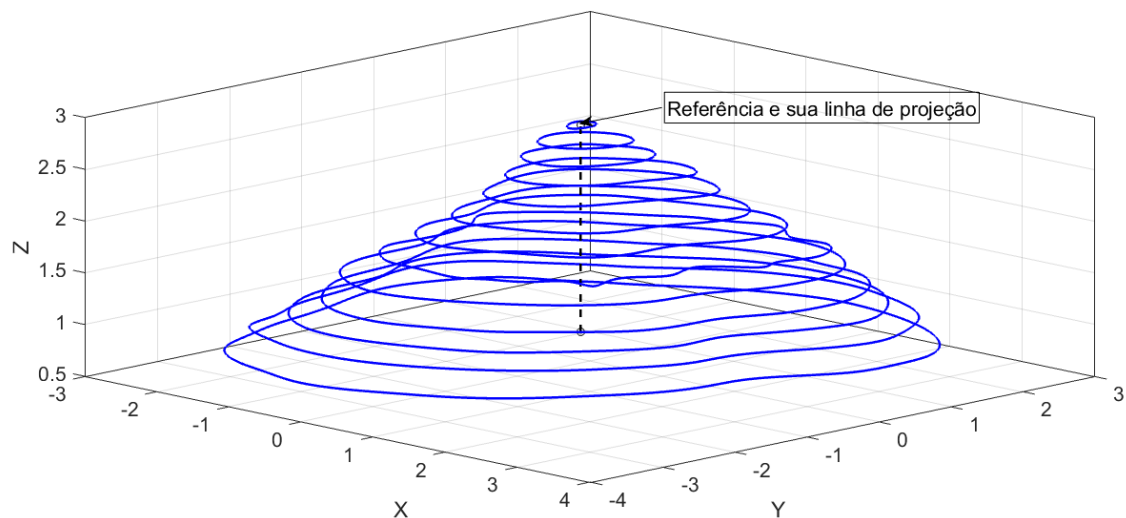


Figura 4.35 - Representação do ponto de referência com suas projeções internas a todas as seções transversais.

O método proposto só pode ser utilizado para objetos de um único eixo, não podendo apresentar ramificações, ou seja, uma curva por seção. Assim sendo ele pode iniciar em uma curva ou ponto e terminar em uma curva ou em um ponto, sendo obrigatório a existência de um ponto com projeções internas a todas as seções transversais. Portanto, para a seleção do ponto de referência foi utilizada a menor seção e então realizado o cálculo do seu CM considerando todos os pontos da curva. Caso o objeto termine ou inicie em um ponto, este ponto foi tomado como referência.

Uma vez definido o ponto, é então realizado o cálculo do ângulo α , em cada seção transversal, que cada ponto da curva faz com relação ao vetor $\vec{t} = (1,0,0)$, conforme esquematizado na Fig. 4.36, sendo o ângulo α pertencente ao intervalo de $[-\pi, \pi]$.

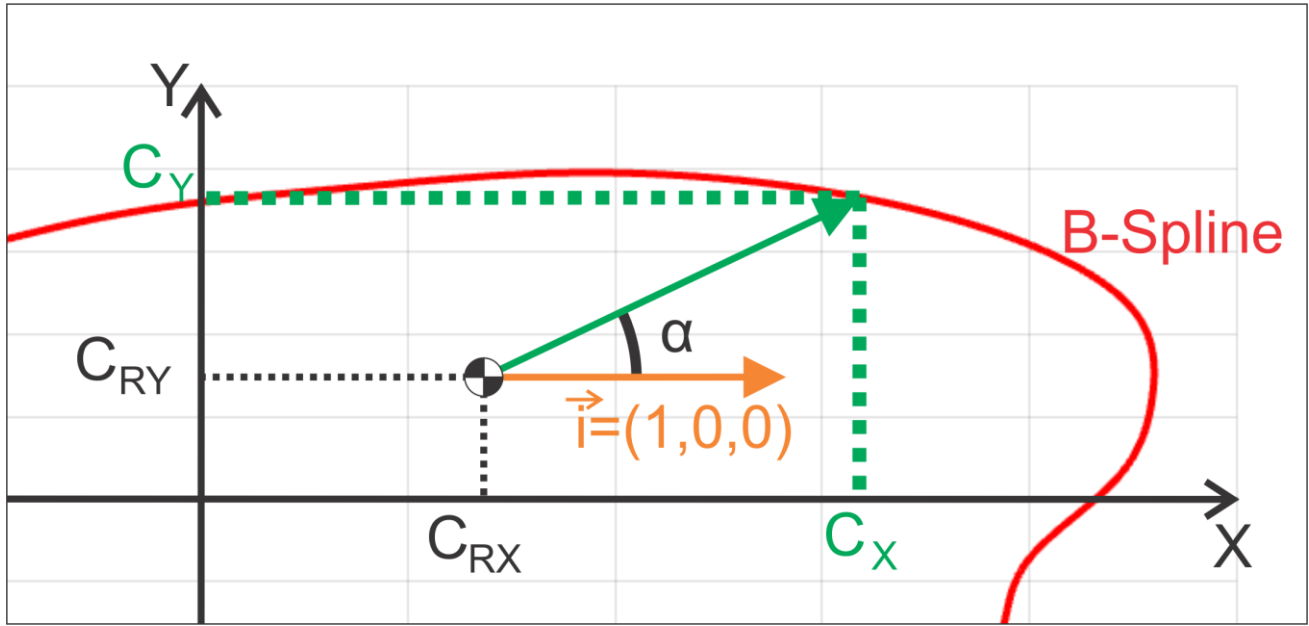


Figura 4.36 - Representação do cálculo para determinação da equação do ponto da curva

Conforme a Figura 4.36 pode-se escrever:

$$\tan \alpha = \frac{(C_Y - C_{RY})}{(C_X - C_{RX})} \quad (4.26)$$

$$C_Y - \tan \alpha \cdot C_X = C_{RY} - \tan \alpha \cdot C_{RX} \quad (4.27)$$

Dado que:

$$C = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_i \quad (4.28)$$

Pode-se escrever a Eq. (4.27) como:

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_{i_y} - \tan \alpha \cdot \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot P_{i_x} = C_{RY} - \tan \alpha \cdot C_{RX} \quad (4.29)$$

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot (P_{i_y} - \tan \alpha \cdot P_{i_x}) = C_{RY} - \tan \alpha \cdot C_{RX} \quad (4.30)$$

Do capítulo de ajuste de curvas e superfícies, foi visto que as funções de base são obtidas pela Eq. (3.3). Verificando que o cálculo da $N_{i,p}$ depende do pré-cálculo das $N_{i,p-1}$ e $N_{i+1,p-1}$, estas por

sua vez necessitam das funções de base para grau $p-2$, assim prosseguindo até que se necessite de $N_{i,0}$, a qual só pode assumir valores 0 ou 1.

Desta forma, utilizando a Eq. (4.30), é possível estabelecer uma equação que dependerá apenas dos valores das funções de base $N_{i,0}$. Sabe-se ainda que apenas uma dessas funções base $N_{i,0}$ assumirá o valor 1, enquanto as demais assumirão 0. Portanto, uma vez obtida a equação é possível testar valores para cada $N_{i,0}$, até que o nó u calculado resulte no ponto desejado.

Para obter a equação para cálculo de u , em função das funções de base $N_{i,0}$ e de α , foi utilizado o cálculo com variáveis simbólicas do Matlab para realizar a montagem do polinômio. Uma vez montado o polinômio é necessário realizar os testes de valores para as funções de base $N_{i,0}$. Para isso substitui o valor da primeira como sendo 1 e as demais 0 e então utiliza os coeficientes deste polinômio para o cálculo das raízes; em seguida calcula-se o ponto da curva *B-Spline* utilizando este resultado de u e verifica se o ângulo calculado resulta no mesmo valor de α . Se não, continua o teste até que se obtenha o ponto de interseção da curva com o plano. O resultado do método pode ser verificado na Fig. 4.37.

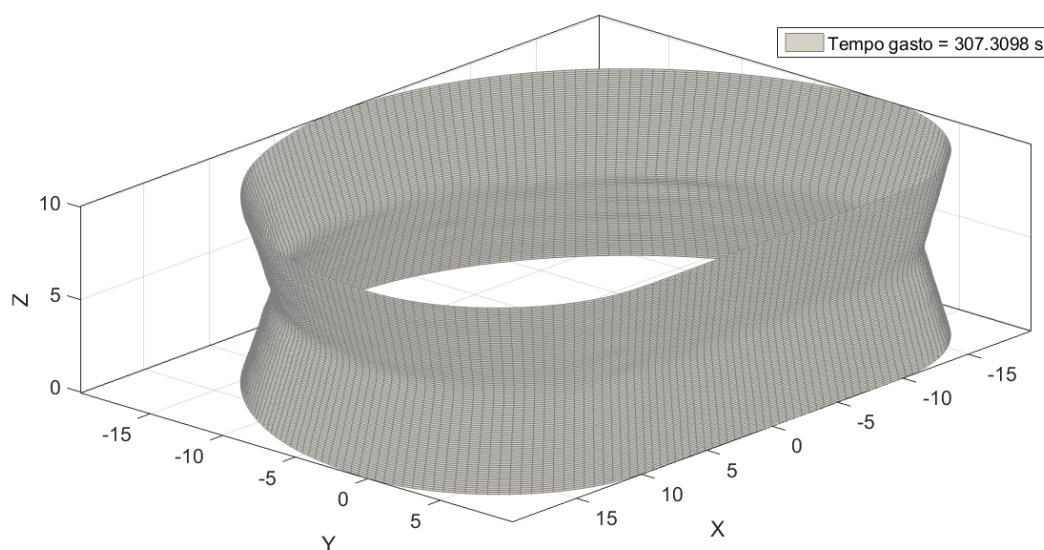


Figura 4.37 - Superfície reconstruída pelo método direto.

4.5.3.2. Método iterativo

O método iterativo possui uma boa semelhança ao método direto, porém este realiza o cálculo aproximado do ponto de interseção com o plano longitudinal.

Como o anterior, deve-se determinar o ponto de referência para que se calcule o ângulo de cada ponto da seção transversal da base com relação ao vetor $\vec{t} = (1,0,0)$.

Para determinar os pontos de interseção com o plano longitudinal, é utilizado o método da bisseção para aproximação do nó u . Para isso, primeiramente é necessário determinar em qual intervalo se encontra este nó. Então, foi utilizado o vetor up que representa a posição de cada ponto calculado da *B-Spline*. Avaliando os ângulos de cada ponto da seção transversal, é possível encontrar entre quais pontos deve estar o ponto procurado da seção longitudinal. Selecionado os limites para u , inicia-se então o método da bisseção adotando-se como critérios de parada uma tolerância para o erro e também um número máximo de iterações. Resultando uma superfície reconstruída bem próxima à anterior, Fig. 4.38.

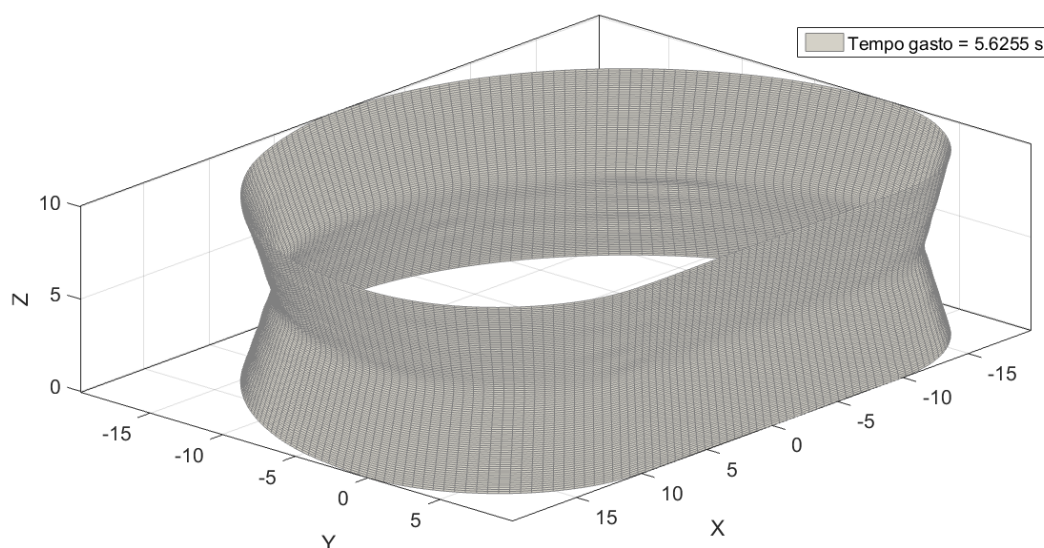


Figura 4.38 - Superfície reconstruída pelo método iterativo.

O método direto é um método exato, portanto as linhas se tornam exatamente lineares como pesquisado com os vários testes, porém o seu cálculo leva muito mais tempo do que o método iterativo o qual apresentou uma linearidade satisfatória das linhas.

Os métodos dos planos longitudinais são métodos possíveis de serem aplicados para apenas algumas nuvens de pontos, pois para ser possível a sua utilização é necessário que exista um ponto com projeção interna às curvas das seções transversais. Caso isto não ocorra, o método não pode ser utilizado.

4.5.4. Determinação do erro de reconstrução

Para poder efetuar uma comparação entre as superfícies, foi realizada uma modificação no algoritmo de criação da nuvem de pontos para gerar pontos pertencentes à superfície do objeto, Fig. 4.39. Estes pontos serão utilizados como superfície de referência para o cálculo do erro de reconstrução da superfície por cada método.

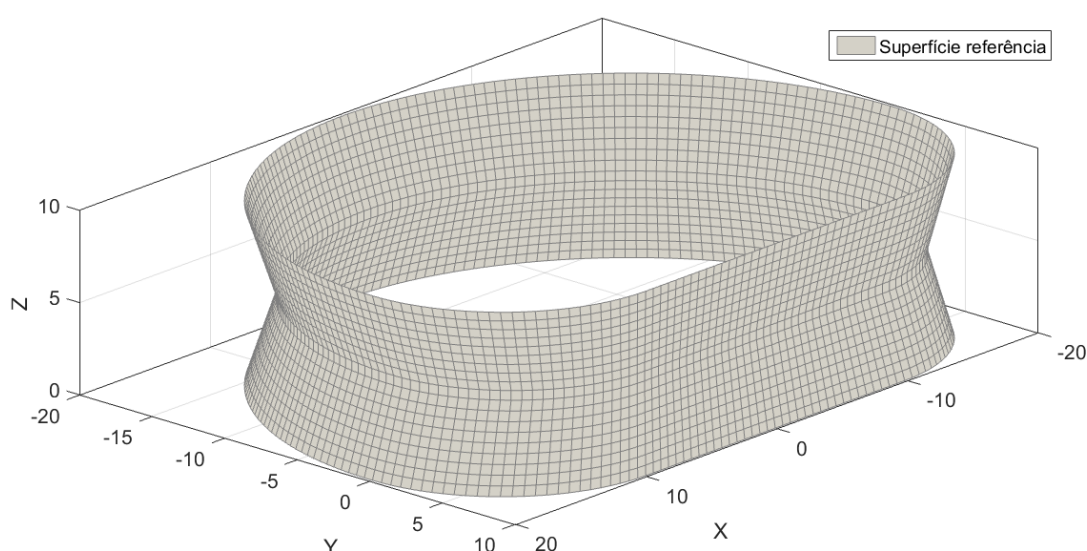


Figura 4.39 - Superfície referência.

Visualmente a superfície é muito próxima da reconstruída a partir da nuvem de pontos. Para a verificação desta afirmação foi definido um método para realizar o cálculo da diferença entre elas, uma vez que as superfícies não possuem os mesmos pontos e tão pouco possuem a mesma linha longitudinal de início. Assim há a necessidade de calcular para cada ponto da superfície reconstruída qual o ponto da superfície referência que possui a menor distância. Esta distância é adotada como o erro daquele ponto reconstruído.

Um possível problema na aplicação deste método é o maior número de seções transversais na superfície reconstruída do que na de referência, fazendo com que o cálculo da distância para alguns pontos apresente um valor maior do que realmente é. Portanto, neste caso é realizada uma seleção das seções transversais que possuem coordenadas Z próximas às presentes na superfície de referência.

Calculadas todas as distâncias é possível então plotar a figura contendo o mapa de erro, onde pode-se verificar o erro para cada região da superfície de acordo com a escala de cor à direita. A seguir, as Figuras 4.40 a 4.46 apresentam o mapa de erro para os métodos apresentados neste item, sendo o erro dado em [mm].

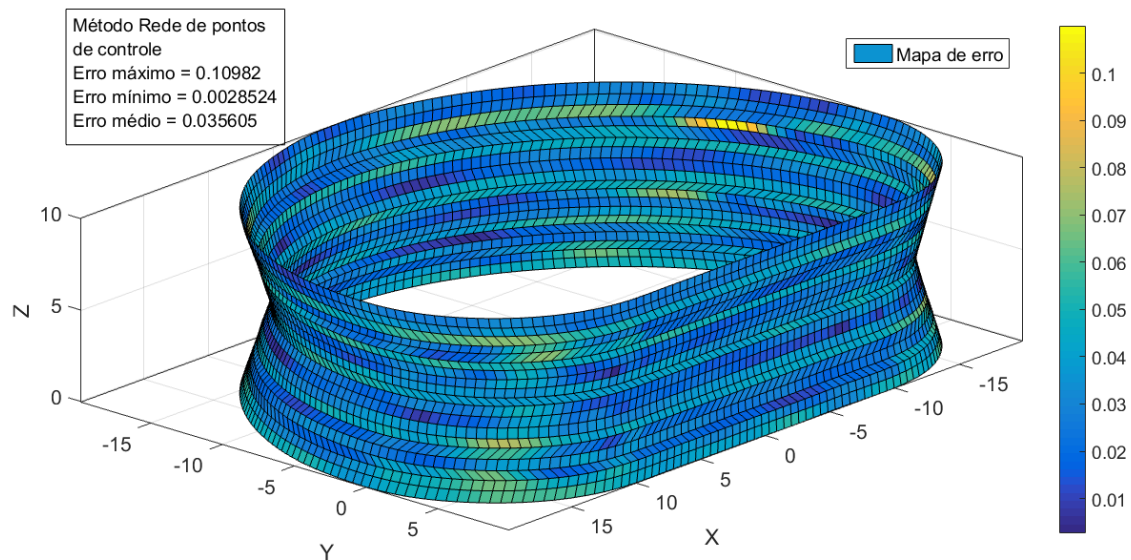


Figura 4.40 - Mapa de erro do método da rede de pontos de controle.

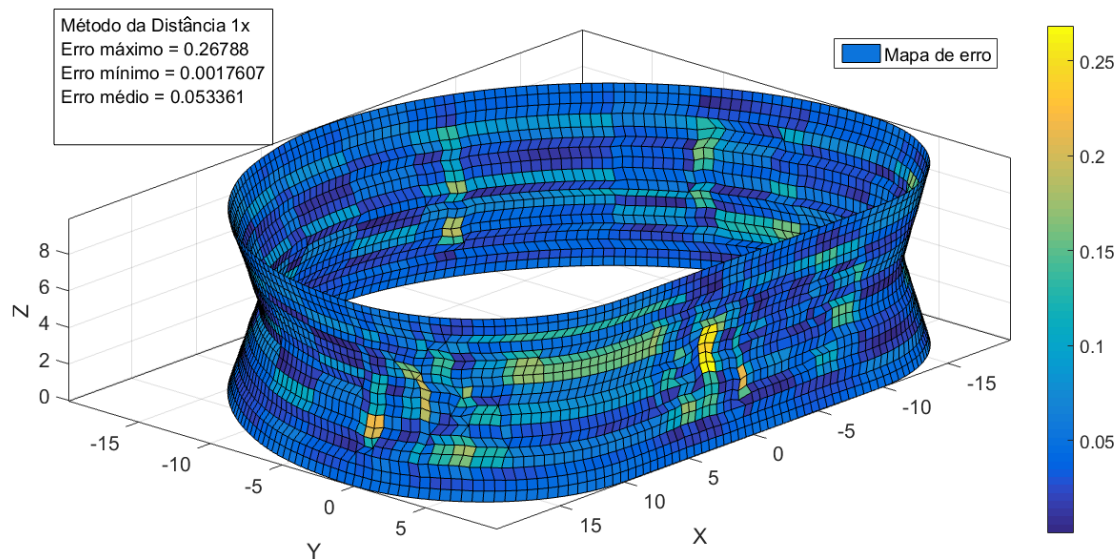


Figura 4.41 - Mapa de erro do método das distâncias com multiplicador 1x.

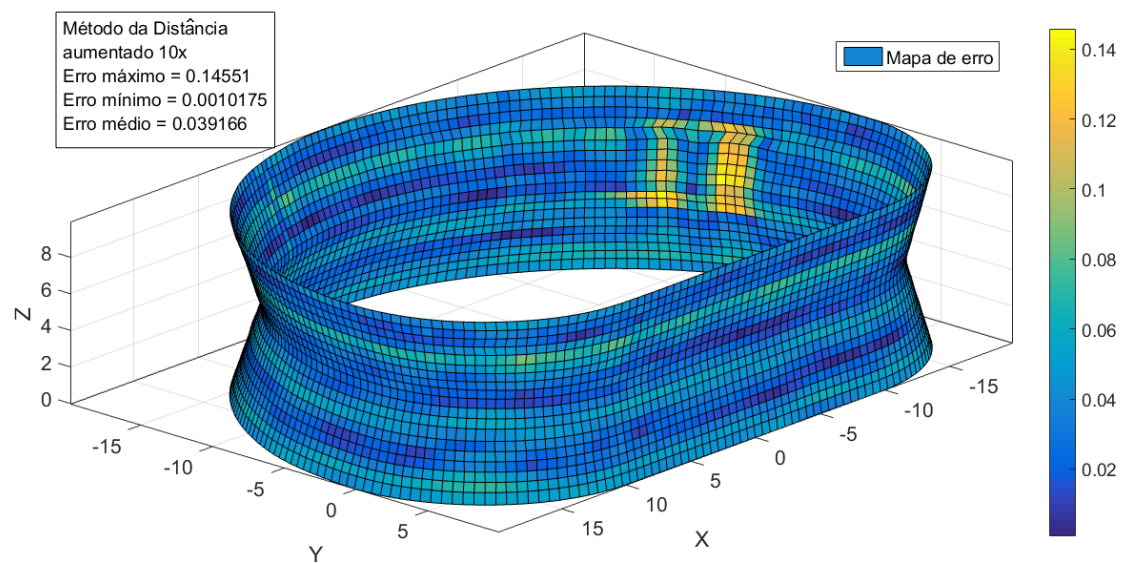


Figura 4.42 - Mapa de erro do método das distâncias com multiplicador de 10x.

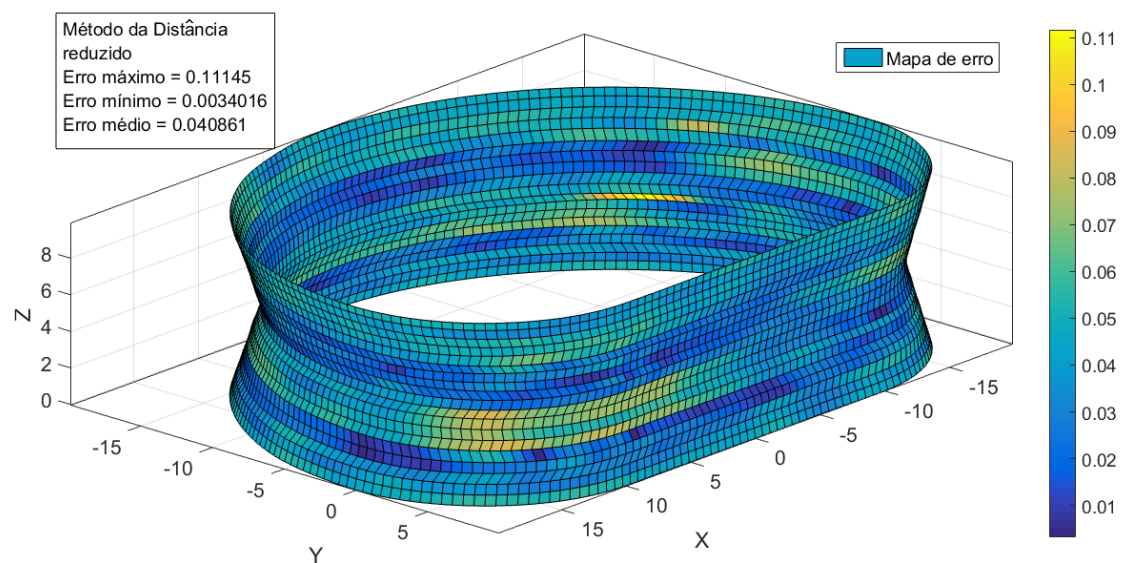


Figura 4.43 - Mapa de erro do método das distâncias reduzido.

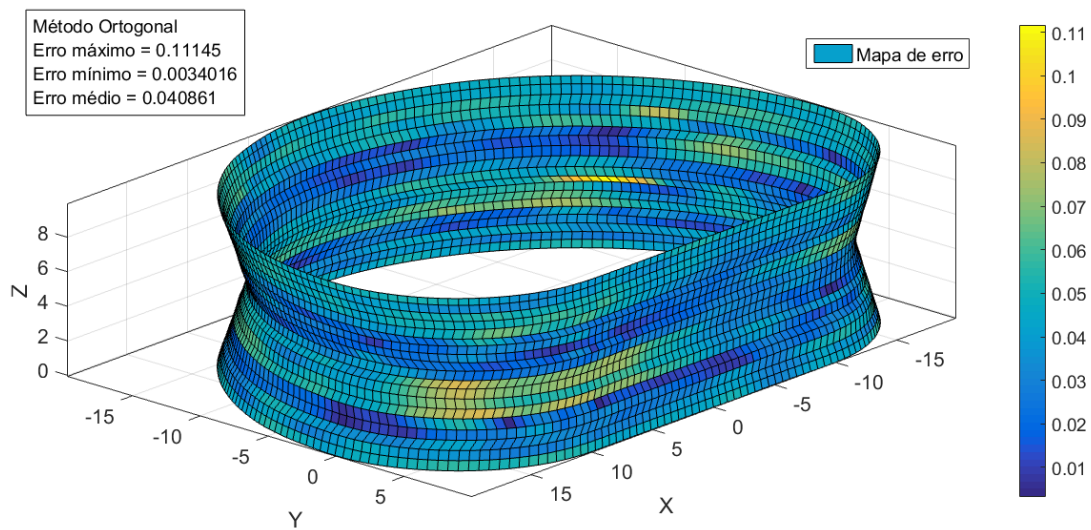


Figura 4.44 - Mapa de erro do método da ortogonalidade.

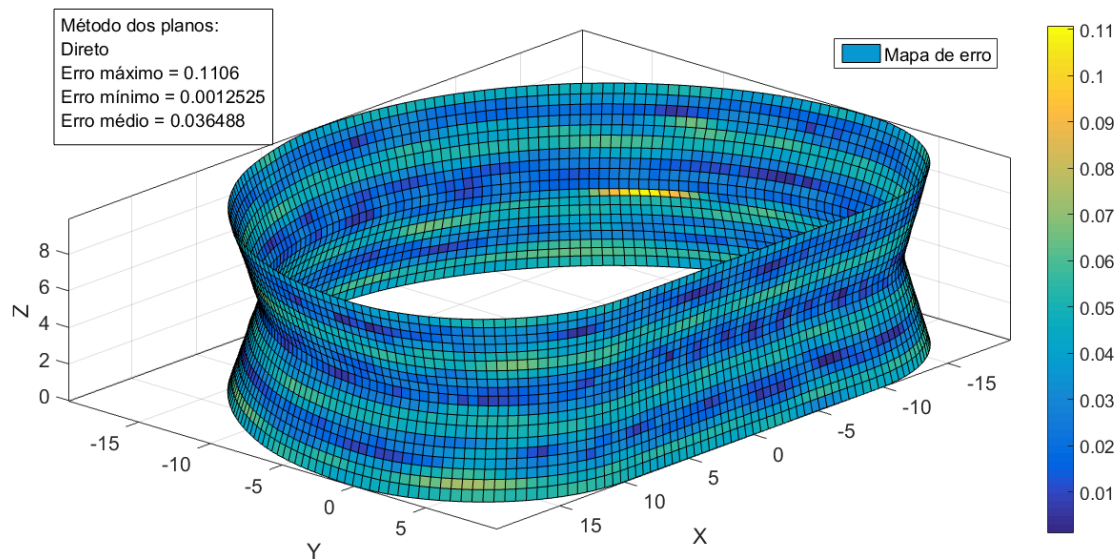


Figura 4.45 - Mapa de erro do método dos planos longitudinais - direto.

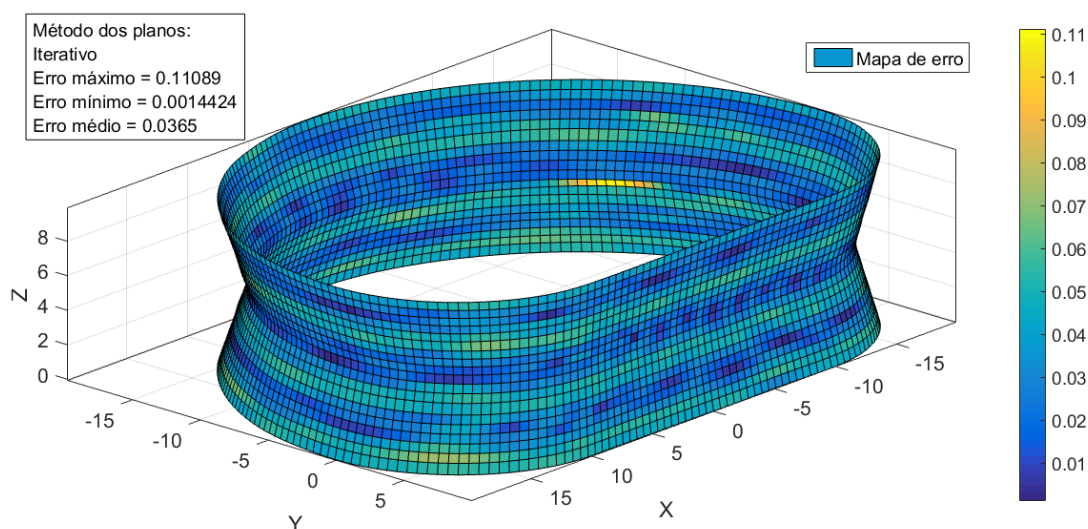


Figura 4.46 - Mapa de erro do método dos planos longitudinais - iterativo.

Para facilitar a comparação dos erros entre os métodos, foi construída a Tab. 4.2. Também foram adicionadas escalas de cores para cada coluna, sendo vermelho para pior e verde para melhor, facilitando a identificação dos melhores e piores resultados.

Tabela 4.2 – Resumo dos erros de reconstrução das superfícies.

Método	Média [mm]	Erro mínimo [mm]	Erro máximo [mm]	Tempo de reconstrução [s]
Rede de pontos de controle	0,0356	0,00285	0,10982	331,5547
Distancias 1x	0,05336	0,00176	0,26788	2,1265
Distancias aumentado 10x	0,03917	0,00102	0,14551	3,9949
Distancias reduzido	0,04086	0,0034	0,11145	2,1081
Ortogonal	0,04086	0,0034	0,11145	2,0957
Planos longitudinais - Direto	0,03649	0,00125	0,1106	307,3098
Planos longitudinais - Iterativo	0,0365	0,00144	0,11089	5,6255

É possível verificar que todos os métodos apresentaram bons resultados com relação ao erro de reconstrução. Já em relação ao desempenho computacional, os métodos da rede de pontos de controle

e o dos planos longitudinais direto, foram os que obtiveram os piores resultados. Os demais métodos apresentaram tempos de processamento bons para a reconstrução.

4.6. Conclusões

Neste capítulo foi apresentada a metodologia proposta para realização da reconstrução da superfície a partir de uma nuvem de pontos desorganizada. A metodologia primeiramente separa os pontos em seções transversais e, em seguida, para cada seção transversal é aplicado um método de redução de pontos para que seja possível realizar o ajuste de curva B-Spline cúbica com peso aplicado aos pontos ajustados. Após a obtenção das curvas ajustadas à cada seção transversal, pode ser aplicado um dos seis métodos de reconstrução de superfície propostos obtendo uma superfície parametrizada suave e continua em sua totalidade.

Apesar do digitalizador não estar operacional para a obtenção de uma nuvem de pontos para a validação da metodologia, foi possível elaborar uma metodologia de criação de nuvem de pontos de maneira a simular uma nuvem obtida pelo digitalizador. Isso foi possível a partir do estudo realizado sobre um trecho linear da leitura do sensor laser do digitalizador do Laboratório de Automação e Robótica da FEMEC/UFU.

O método de redução de pontos cumpre seu papel fazendo com que o ajuste ganhe em performance sem a perda de qualidade do ajuste. Este aumento da performance é devido à substituição dos pontos por centros de massa de micro-regiões criadas nas seções transversais.

O método para determinar o melhor número de pontos de controle também trouxe uma grande melhoria, já que assim não há a necessidade de se fixar um número de pontos de controle que pode não proporcionar o melhor ajuste para aquele conjunto de pontos.

Os métodos de fechamento e seleção do ponto de início foram de grande importância para garantir a continuidade no ponto de fechamento da curva em uma região com pontos alinhados.

A aplicação dos pesos no ajuste da curva trouxe mais sensibilidade à curva para regiões onde é necessário maior proximidade da curva aos pontos, como em curvas com pequenos raios de curvatura e em trechos retos.

Os métodos de reconstrução de superfícies propostos se mostraram muito precisos para a nuvem de pontos utilizada para aplicação da metodologia. Alguns deles apresentaram um tempo computacional muito elevado, devido à complexidade dos mesmos.

A determinação do erro de reconstrução é de grande importância para verificar se a reconstrução foi boa ou não, já que não há como concluir somente com a comparação visual entre as superfícies.

CAPÍTULO V

SIMULAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas três reconstruções de superfícies com intuito de simular a aplicação da metodologia à superfícies com diferentes características: uma em forma de cilindro, outra em forma de um de cone com excentricidade e por fim uma de revolução.

A sequência das etapas realizadas para cada superfície é a mesma que foi detalhada no capítulo 4, ou seja:

- Criação da nuvem de pontos e da superfície de referência a partir de um perfil de base;
- Aplicação da metodologia de reconstrução da superfície através da reconstrução das seções transversais com base na nuvem de pontos;
- Cálculo do erro e apresentação do mapa de erro entre as superfícies reconstruída e de referência.

5.1. Superfície cilíndrica

5.1.1. Criação da nuvem de pontos

Como visto no item 4.1.2, para construir a nuvem de pontos requer um perfil de referência contínuo contendo trechos retilíneos e curvos. O perfil criado para a simulação utiliza de trechos retilíneos e trechos circulares conforme representado na Fig. 5.1.

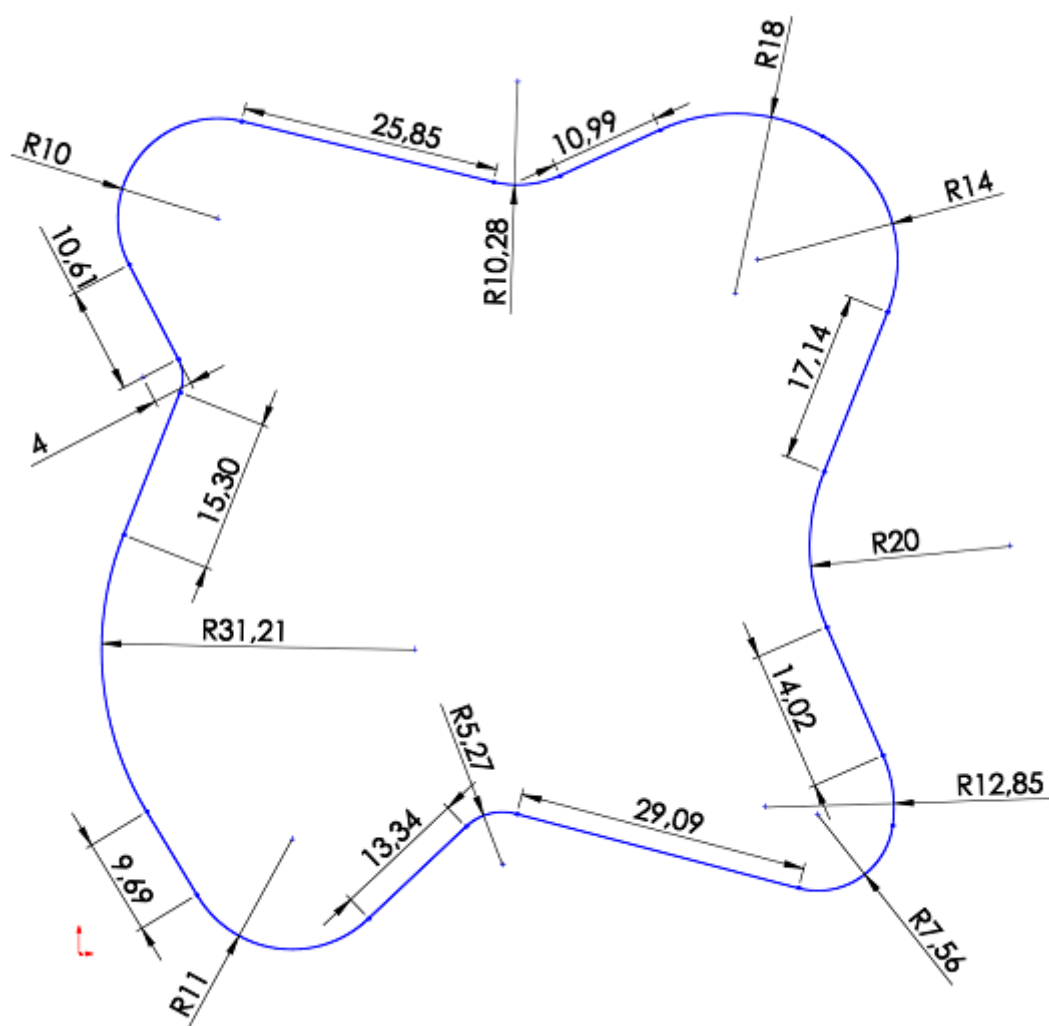


Figura 5.1 - Perfil utilizado para construir a nuvem de pontos cilíndrica.

Um cilindro é caracterizado por seções transversais iguais, portanto para criar a nuvem de pontos basta utilizar o mesmo perfil para diferentes coordenadas Z, Fig. 5.2.

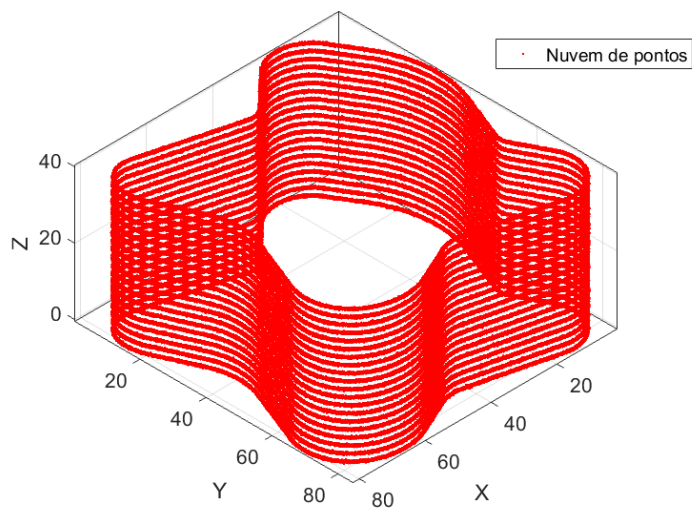


Figura 5.2 - Nuvem de pontos da superfície cilíndrica.

Utilizando o perfil de referência, foi gerada a superfície de referência da mesma maneira como foi criado a nuvem de pontos, ou seja, o mesmo número de seções transversais. A Figura 5.3 representa a superfície de referência que será utilizada para construção dos mapas de erros.

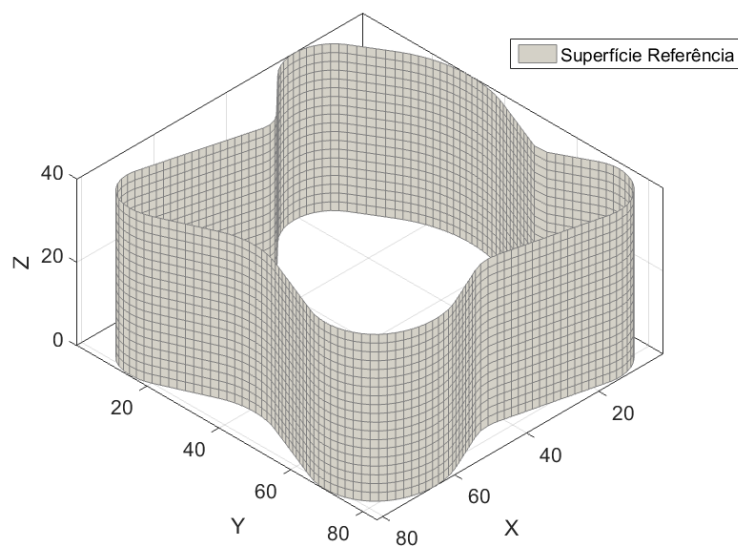
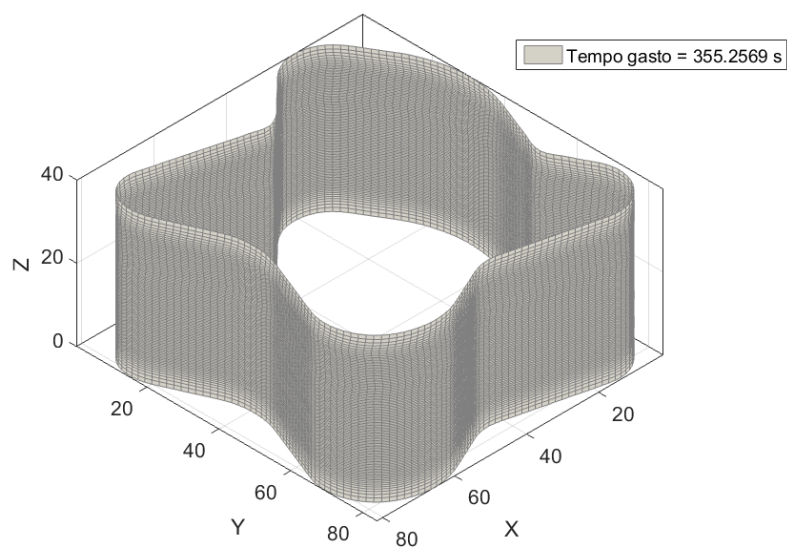


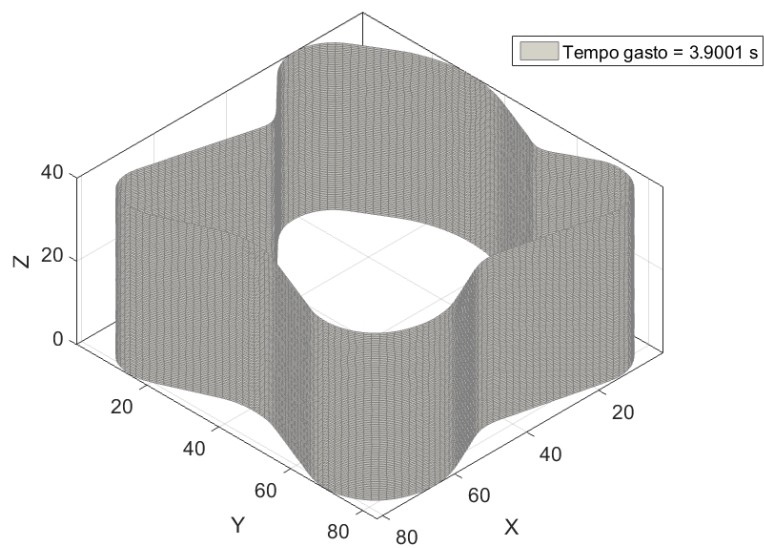
Figura 5.3 - Superfície cilíndrica de referência.

De posse da nuvem de pontos é então possível aplicar a metodologia de ajuste das curvas B-Splines com peso a cada seção transversal como descrito no item 4.4. Ao final da aplicação do método

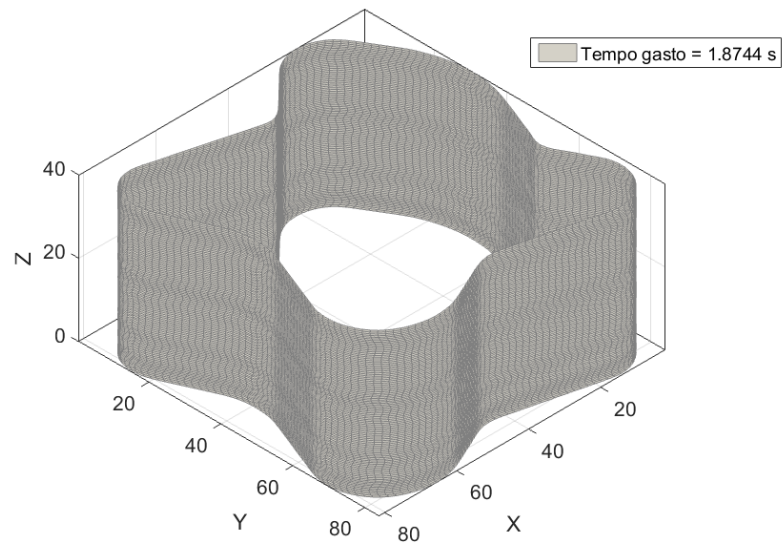
de ajuste é então possível aplicar os métodos de reconstrução de superfícies. Foram aplicados os métodos apresentados na Fig. 5.4.



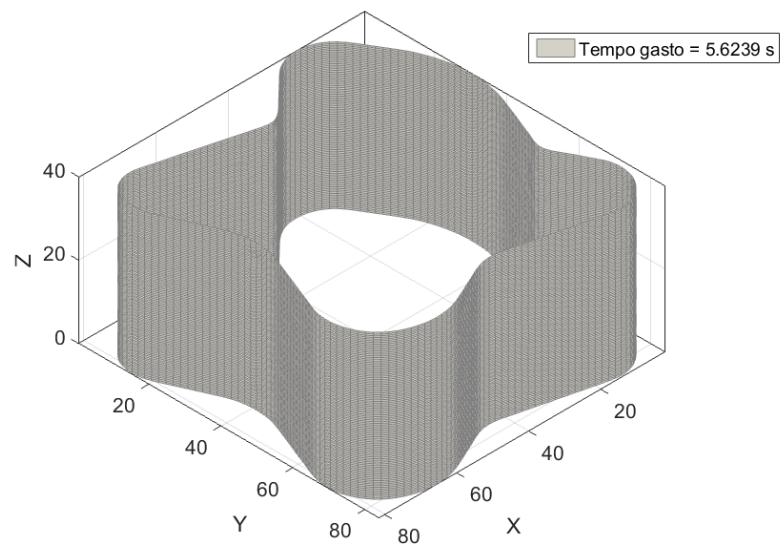
(a)



(b)



(c)

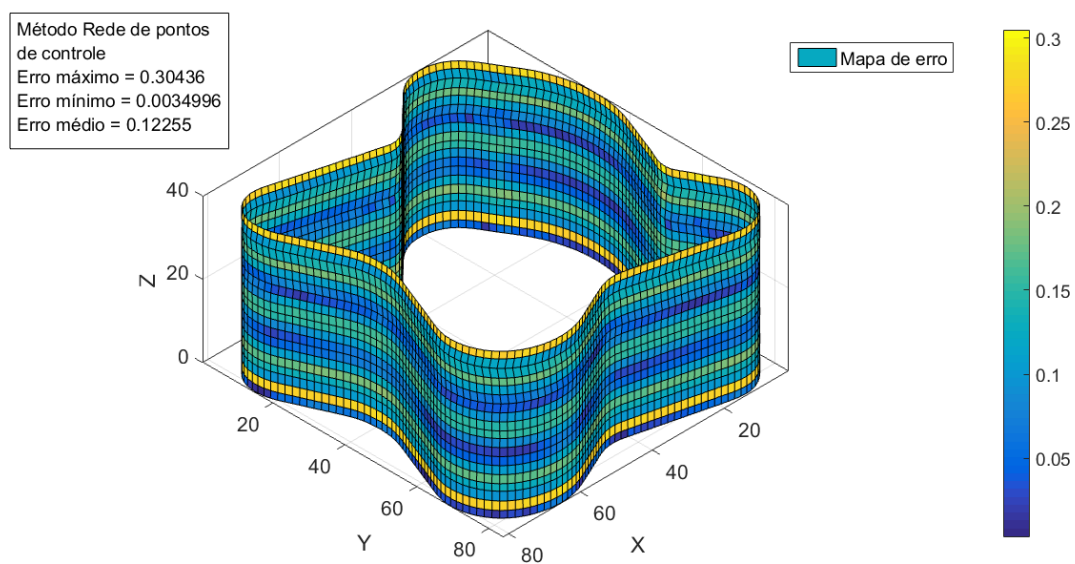


(d)

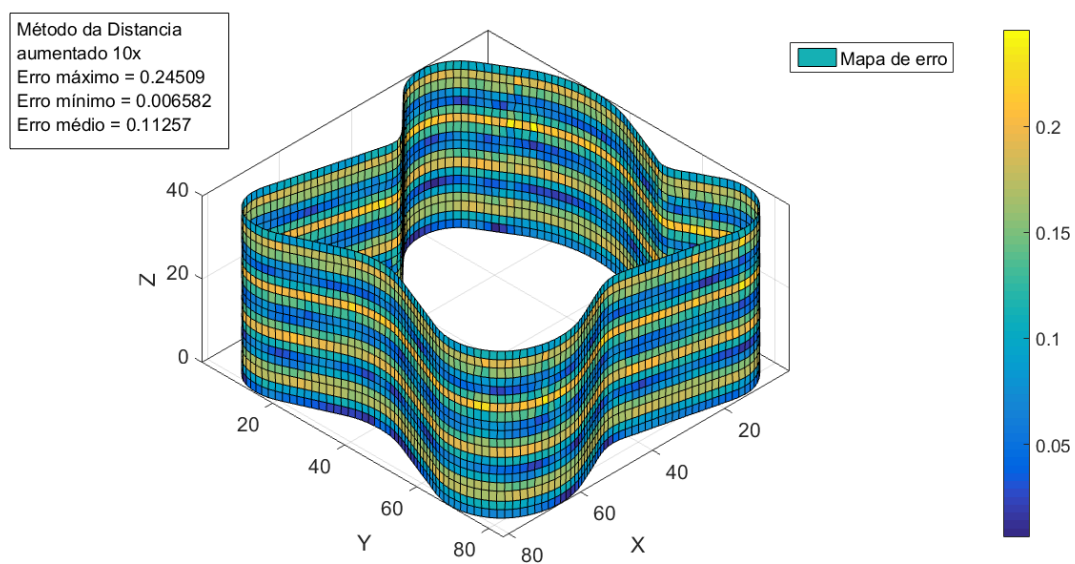
Figura 5.4 - Superfícies cilíndricas reconstruídas à partir da nuvem de pontos pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido; e (d) Planos longitudinais: Iterativo.

É possível notar visivelmente uma boa aproximação das superfícies reconstruídas em relação à superfície de referência, como pode ser visto na Fig. 5.4. Porém, para a verificação da boa reconstrução é necessário calcular o mapa de erro para cada superfície reconstruída. A Figura 5.5 apresenta o

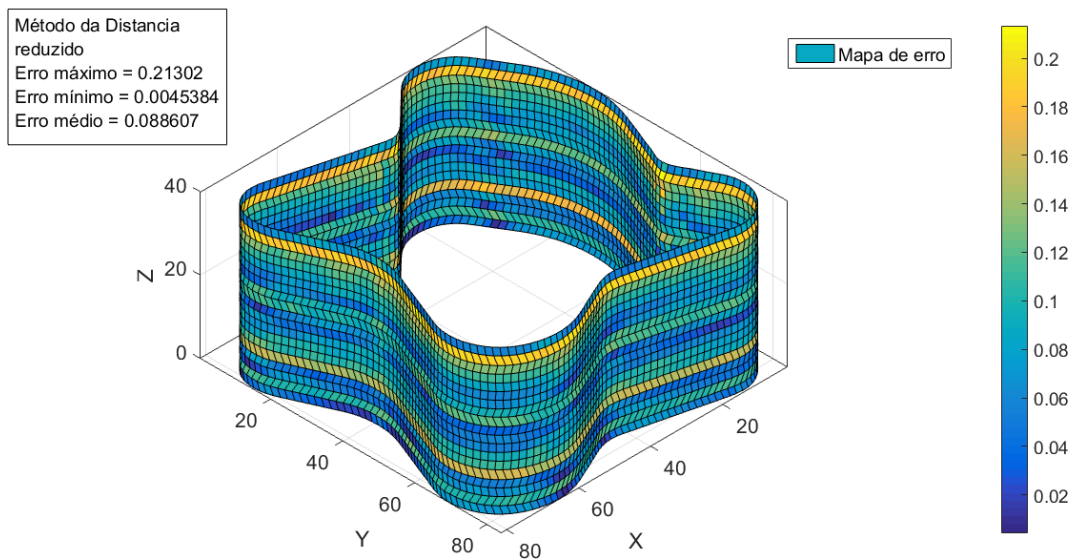
resultado da aplicação do cálculo do erro de reconstrução para cada superfície, sendo o erro dado em [mm].



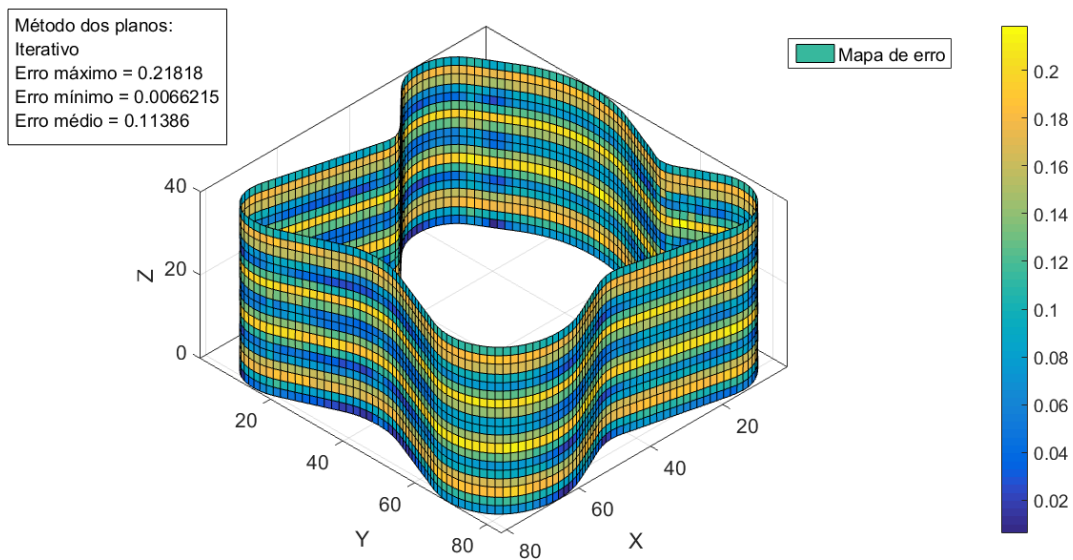
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.5 - Mapa de erro para as superfícies cilíndricas reconstruídas: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido; e (d) Planos longitudinais: Iterativo.

A Tabela 5.1 resume o resultado dos erros dos métodos aplicados à superfície cilíndrica. A cada coluna é aplicada uma escala de cor para facilitar a verificação do melhor e pior método.

Tabela 5.1 – Resumo dos resultados dos erros para os métodos de reconstrução aplicados à superfície cilíndrica.

Métodos de reconstrução de superfície	Erro médio [mm]	Erro mínimo [mm]	Erro máximo [mm]	Tempo gasto [s]
<i>Rede de pontos de controle</i>	0,12255	0,00350	0,30436	355,26
<i>Distância aumentado 10x</i>	0,11257	0,00658	0,24509	3,90
<i>Distância reduzido</i>	0,08851	0,00454	0,21302	1,87
<i>Planos longitudinais - Iterativo</i>	0,11386	0,00662	0,21818	5,62

É possível notar que os erros apresentados por todas as reconstruções são muito pequenos. O método da rede de pontos de controle, que utiliza as equações de superfície B-Spline, não obteve o melhor resultado para os erros e ainda sendo o método mais lento. Dos três métodos restantes, o método das Distâncias reduzido foi o que apresentou melhor resultado, perdendo apenas para o critério de erro mínimo.

5.2. Superfície cônica com excentricidade

Da mesma maneira que para a superfície cilíndrica, a superfície cônica apresenta uma característica única para as suas seções transversais, que se baseia na proporcionalidade entre suas seções em função da coordenada Z ao longo de sua altura. Assim, sendo possível a definição de um perfil base e em seguida a replicação proporcional das seções transversais.

O perfil base utilizado para este caso é um círculo de raio igual a 20mm. Para caracterizar a conicidade do objeto é necessário então reduzir o raio a cada acréscimo na coordenada Z, sendo expresso pela Eq.(5.1).

$$raio(z) = 20 - z \quad (5.1)$$

Para caracterizar a excentricidade do eixo do cone, foi alterada a coordenada do centro do círculo conforme a Eq. (5.2).

$$Xc(z) = 2 * z \quad (5.2)$$

Desta forma sendo então criada a nuvem de pontos de um objeto cônico com excentricidade, Fig. 5.6.

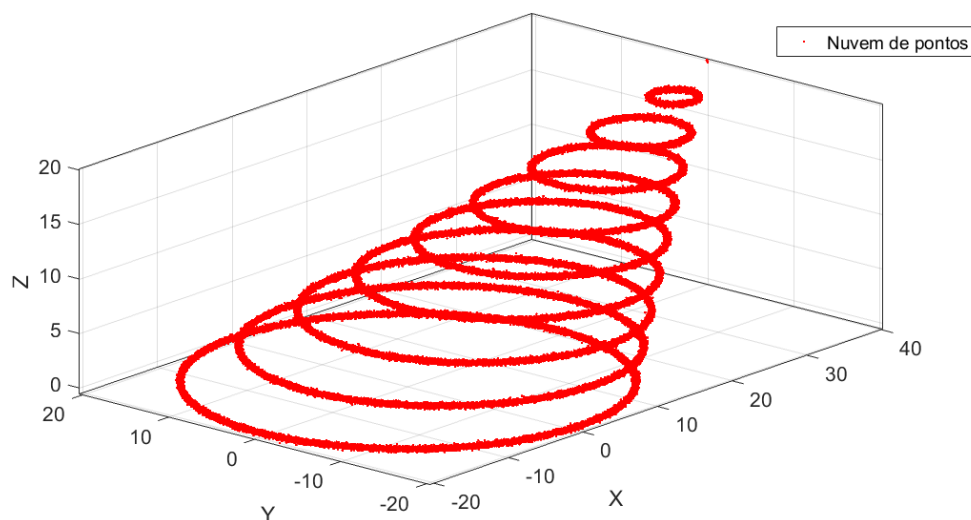


Figura 5.6 - Nuvem de pontos para a superfície cônica com excentricidade.

Utilizando o perfil de referência, foi gerada a superfície de referência da mesma maneira como foi criada a nuvem de pontos. A Figura 5.7 representa a superfície de referência que será utilizada para cálculo dos mapas de erros.

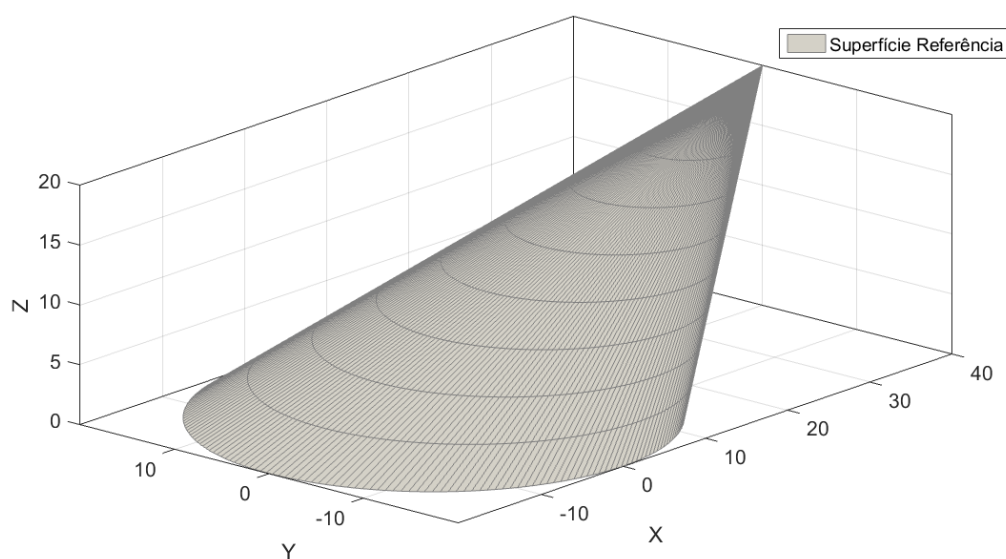
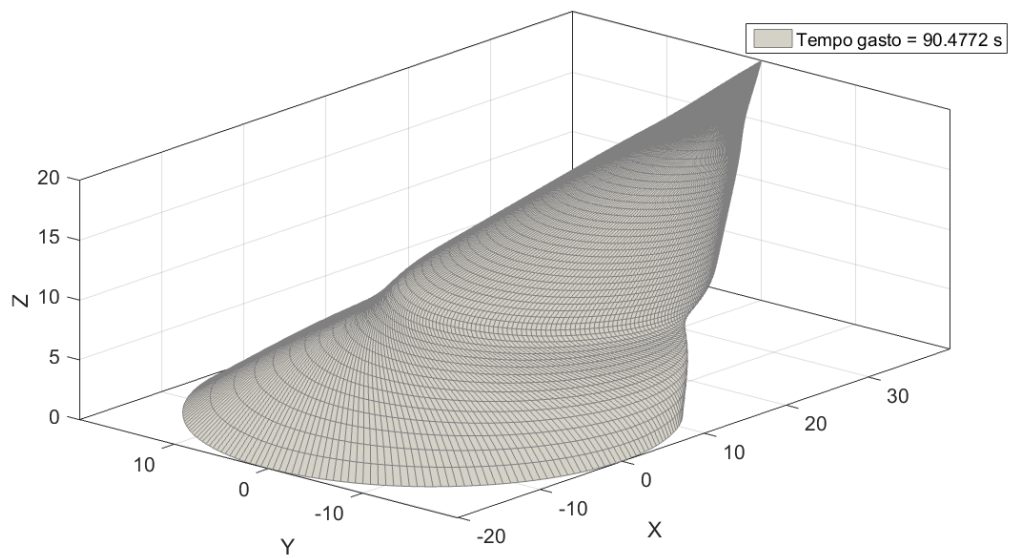
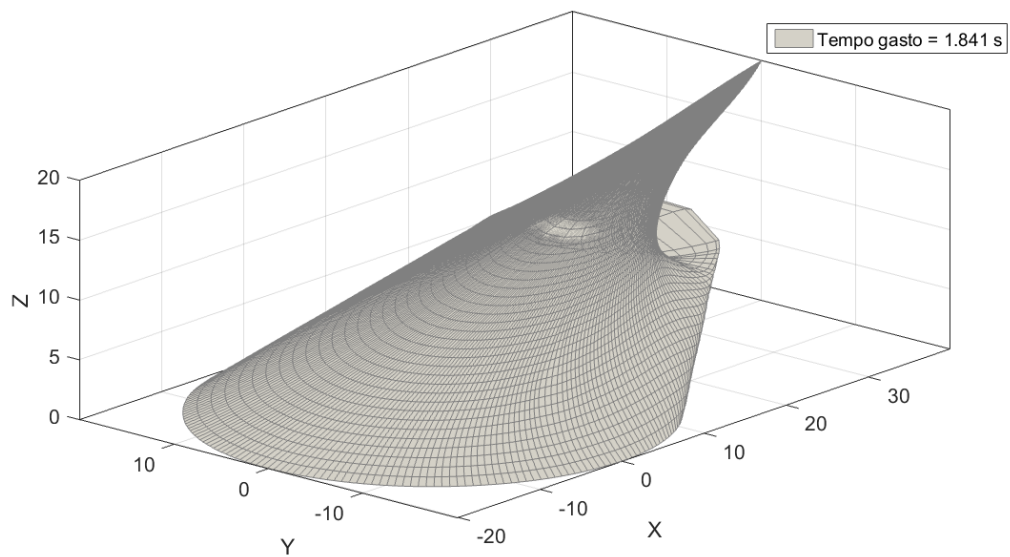


Figura 5.7 - Superfície de referência cônica com excentricidade.

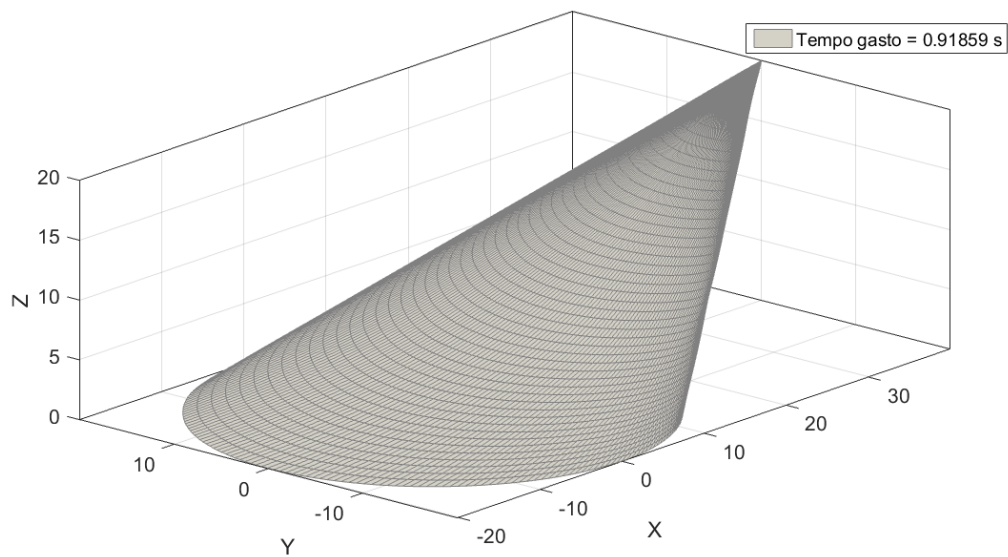
De posse da nuvem de pontos é então possível aplicar a metodologia de ajuste das curvas B-Splines com peso para cada seção transversal como descrito no item 4.4. Ao final da aplicação do método de ajuste é então possível aplicar os métodos de reconstrução de superfícies. Foram aplicados os métodos apresentados na Fig. 5.8.



(a)



(b)

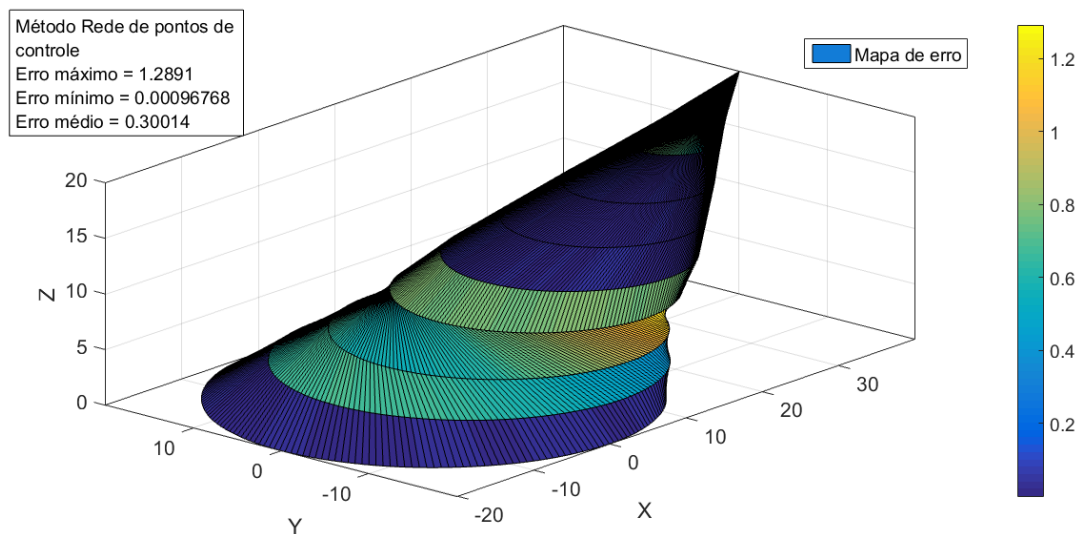


(c)

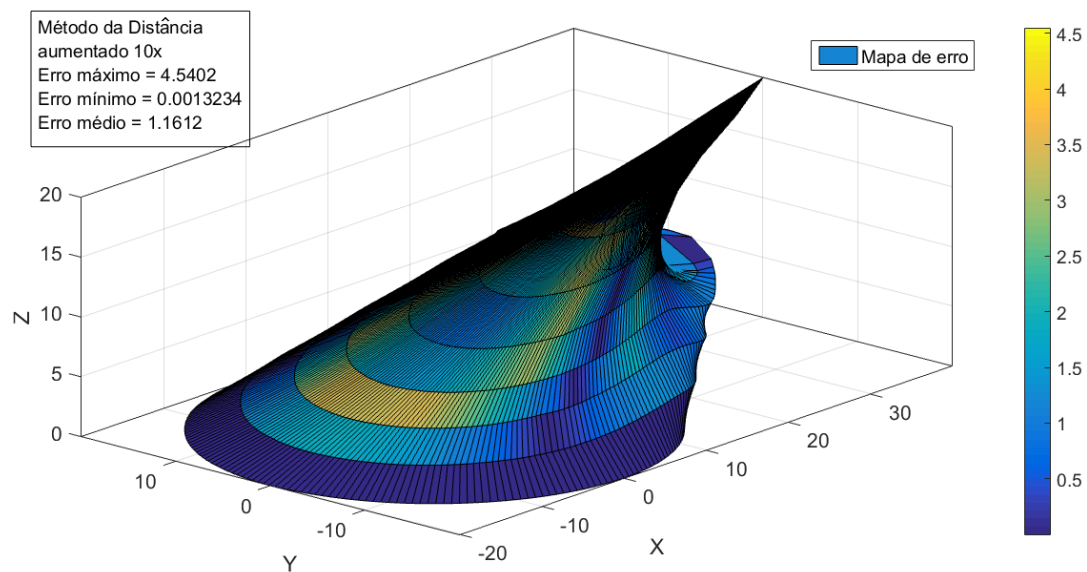
Figura 5.8 - Superfícies cônicas com excentricidade reconstruídas à partir da nuvem de pontos pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido.

Não é possível aplicar o método de planos longitudinais, já que não existe um ponto de referência que possua suas projeções internas a todas as seções transversais.

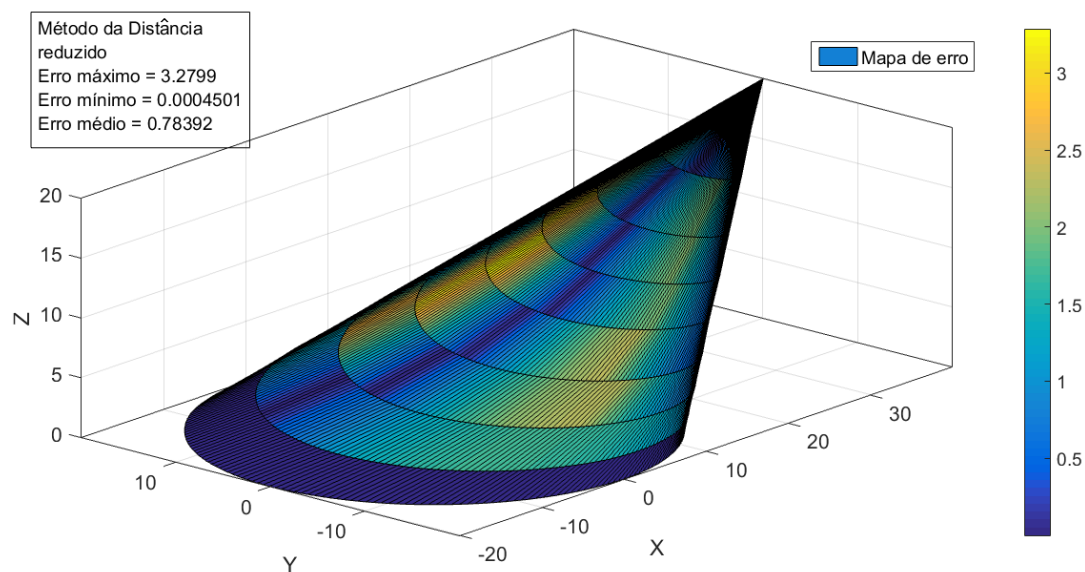
É perceptível que a superfície reconstruída pelo método das distâncias aumentado 10x não obteve sucesso, porém mesmo assim será calculado o mapa de erro. Além disso, pode ser verificado que, pela metodologia da rede de pontos de controle, a superfície fica “torcida”, de forma semelhante à Fig. 4.27, o que pode ser visto pelo formato das curvas longitudinais. Os mapas de erros podem ser visualizados na Fig. 5.9.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.9 - Mapa de erro para as superfícies cônicas com excentricidade reconstruídas pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x e; (c) Distância reduzido.

A Tabela 5.2 resume os resultados dos erros para os métodos aplicados à superfície cônica com excentricidade. A cada coluna é aplicada uma escala de cor para facilitar a verificação do melhor e pior método.

Tabela 5.2 – Resumo dos resultados dos erros para os métodos de reconstrução aplicados à superfície cônica com excentricidade.

Métodos de reconstrução de superfície	Erro médio [mm]	Erro mínimo [mm]	Erro máximo [mm]	Tempo gasto [s]
<i>Rede de pontos de controle</i>	0,30014	0,00097	1,28910	90,48
<i>Distância aumentado 10x</i>	1,16120	0,00132	4,54020	1,84
<i>Distância reduzido</i>	0,78392	0,00045	3,27990	0,92

Como esperado, o pior resultado para os métodos aplicados à superfície cônica com excentricidade foi o método das distância aumentado 10x por não ter reconstruído a superfície cônica.

Dentre os demais, o método mais preciso apresentando melhor erro médio foi o método da rede de pontos de controle, porém com um tempo muito acima dos demais. O melhor resultado para os métodos aplicados a esta superfície foi o método das distância reduzido, porém vale ressaltar que o erro máximo apresentado por este e os demais métodos deve ser melhorado para se considerar uma boa reconstrução da superfície.

5.3. Superfície complexa - Peão

Neste item é realizada a reconstrução de uma superfície de revolução com diferentes tamanhos de seções transversais. Esta superfície foi criada pelo laboratório para a confecção do objeto com intuito de realizar leituras no digitalizador para a sua validação. O objeto foi apelidado de “Peão”, sendo uma superfície de revolução criada a partir do giro em torno do eixo Z do perfil conforme a Fig. 5.10.

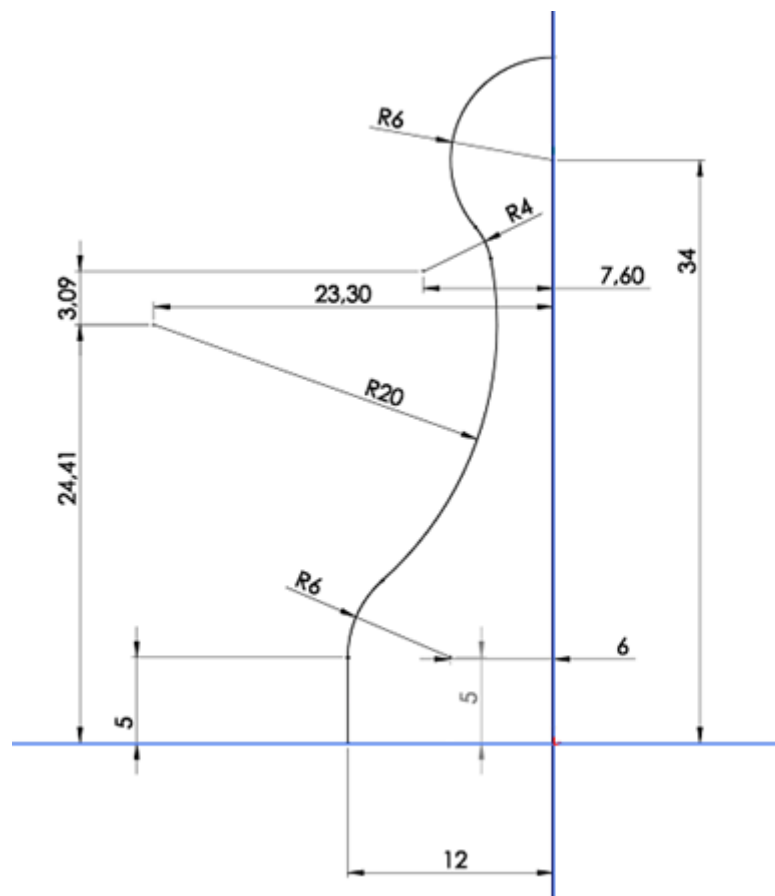


Figura 5.10 - Perfil a ser revolucionado para criação do Peão.

Como a superfície é de revolução, suas seções transversais são círculos, assim há apenas a necessidade de alterar o raio conforme perfil apresentado na Fig. 5.10. A nuvem de pontos criada é apresentada na Fig. 5.11.

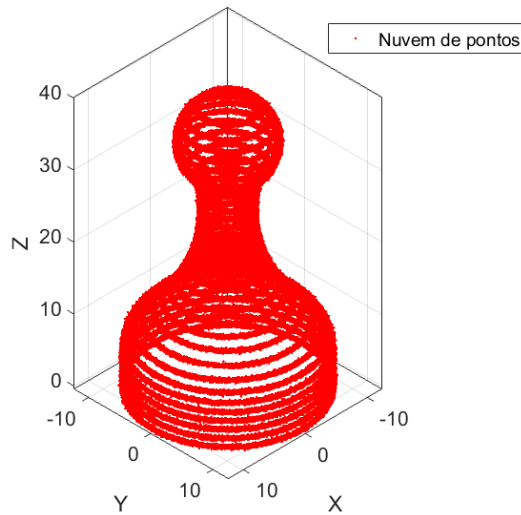


Figura 5.11 - Nuvem de pontos criada a partir do perfil do Peão.

Da mesma forma como foi criada a nuvem de pontos, também foi criada a superfície de referência, Fig. 5.12.

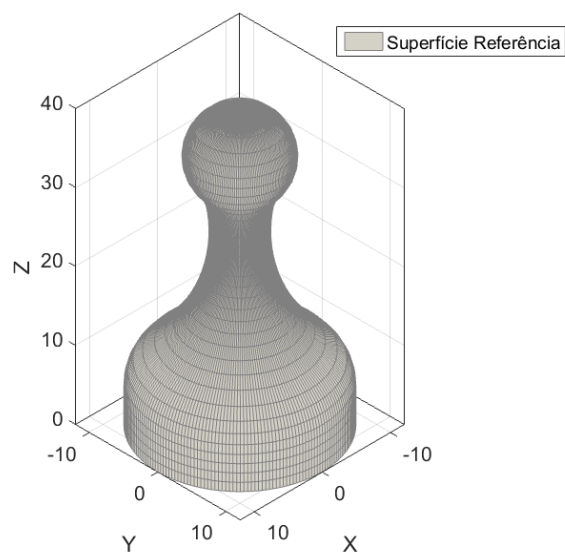


Figura 5.12 - Superfície referência do Peão.

De posse da nuvem de pontos é aplicada a metodologia de ajuste das curvas B-Splines com peso a cada seção transversal como descrito no item 4.4, para, em seguida, aplicar os métodos de reconstrução de superfícies. Foram aplicados os métodos apresentados na Fig. 5.13.

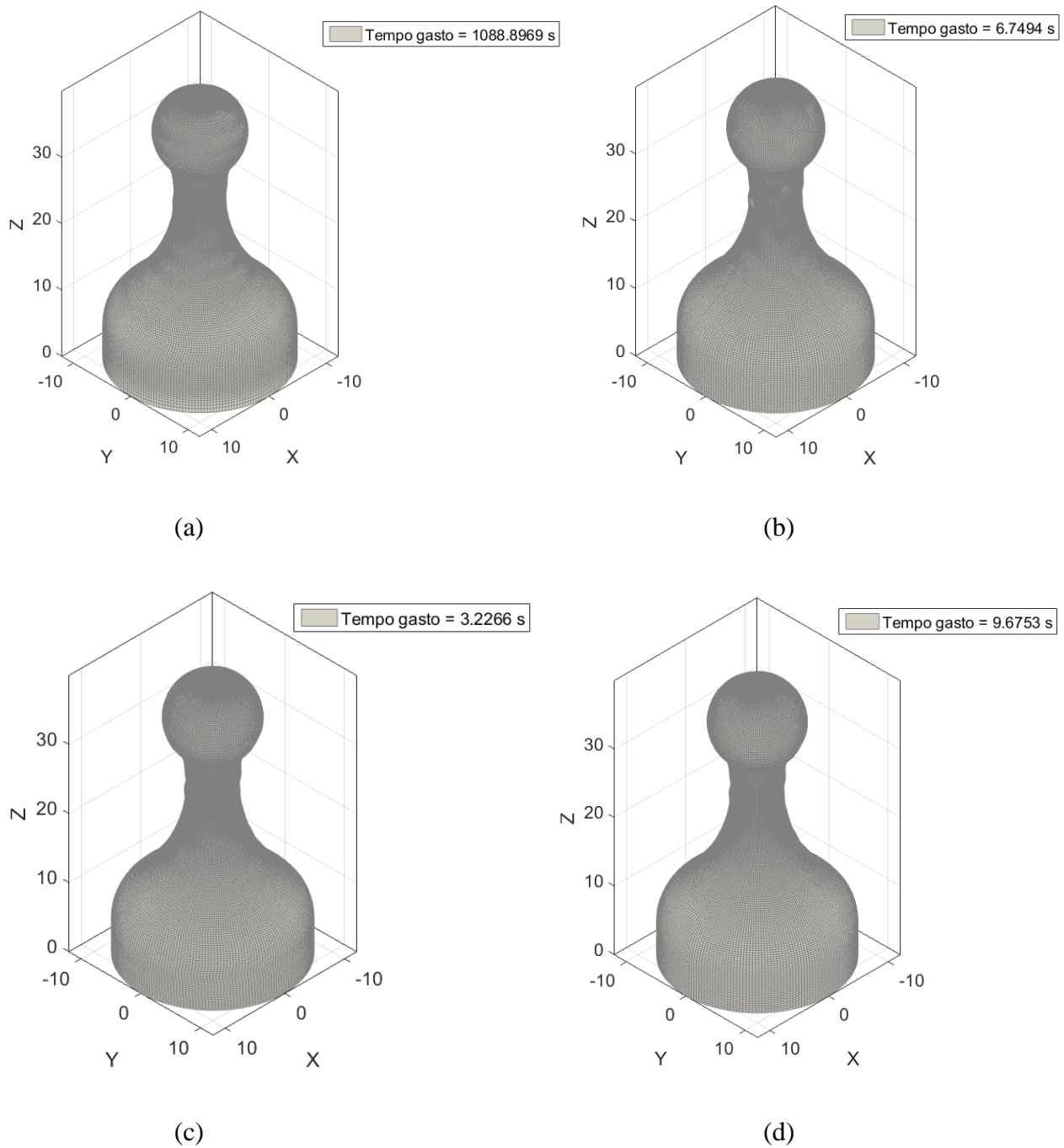


Figura 5.13 - Superfícies reconstruídas à partir da nuvem de pontos do Peão pelos métodos:

(a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido e; (d) Planos longitudinais - Iterativo.

Aplicando o cálculo do mapa de erro para as superfícies reconstruídas, os resultados são apresentados na Fig. 5.14.

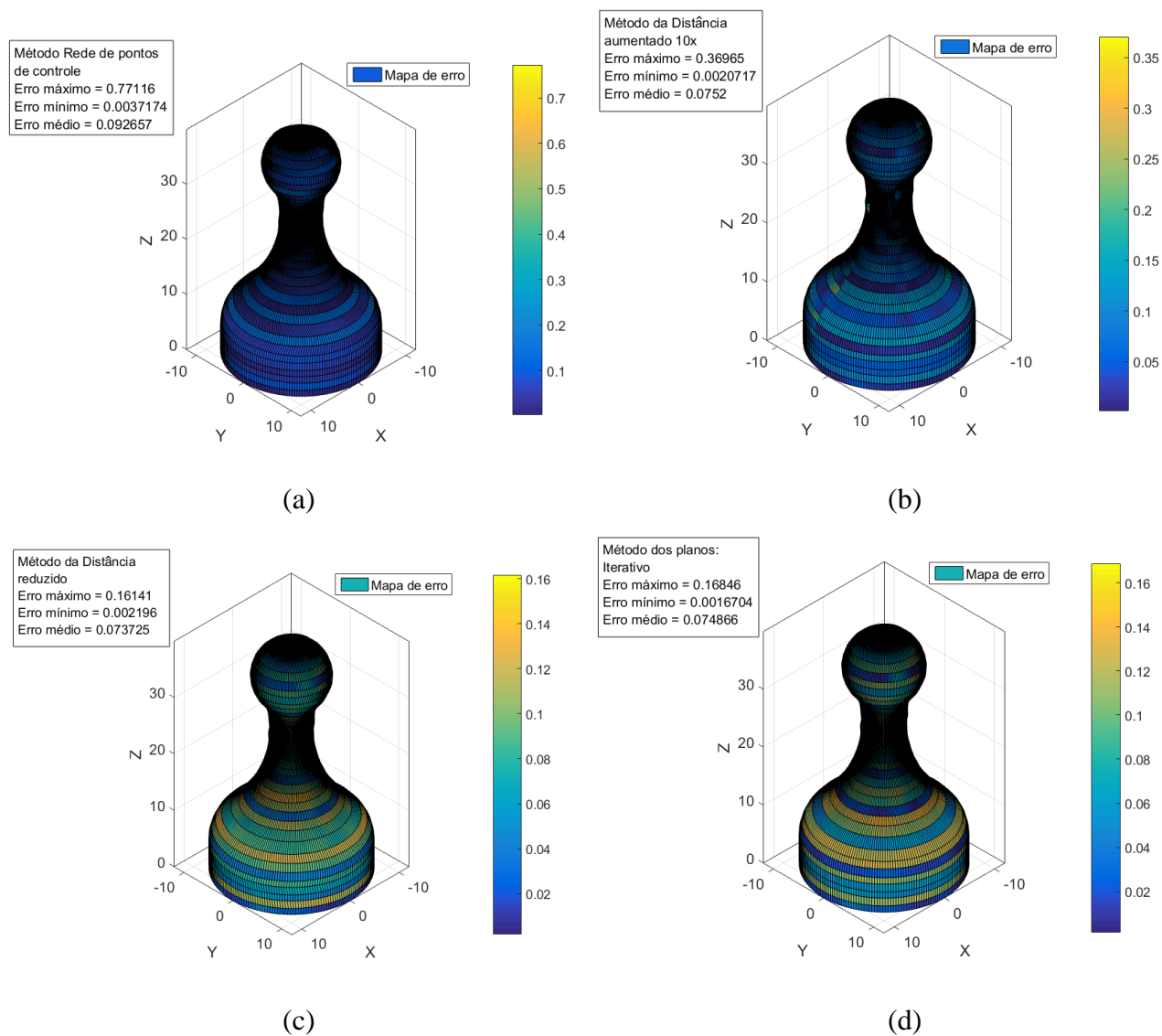


Figura 5.14 - Mapa de erro para as superfícies do Peão reconstruídas pelos métodos: (a) Rede de pontos de controle; (b) Distância aumentado 10x; (c) Distância reduzido e; (d) Planos longitudinais - Iterativo.

A Tabela 5.3 resume os resultados dos erros para os métodos aplicados à superfície do Peão. A cada coluna é aplicada uma escala de cor para facilitar a verificação do melhor e pior método.

Tabela 5.3 – Resumo dos resultados dos erros para os métodos de reconstrução aplicados à superfície do Peão.

Métodos de reconstrução de superfície	Erro médio [mm]	Erro mínimo [mm]	Erro máximo [mm]	Tempo gasto [s]
<i>Rede de pontos de controle</i>	0,09266	0,00372	0,77116	1088,90
<i>Distância aumentado 10x</i>	0,07520	0,00207	0,36965	6,75
<i>Distância reduzido</i>	0,07373	0,00220	0,16141	3,23
<i>Planos longitudinais - Iterativo</i>	0,07487	0,00167	0,16846	9,68

Novamente os métodos apresentaram resultados muito precisos, isto já esperado pela boa suavidade e proximidade de todas as superfícies reconstruídas com relação à superfície de referência. O método de rede de pontos de controle foi o de pior desempenho computacional. No geral o melhor foi o método da distância reduzido, porém vale ressaltar que o dos planos longitudinais iterativo apresentou resultados muito próximos.

5.4. Conclusões

Neste capítulo foram apresentados simulações aplicando as metodologias propostas no trabalho com intuito de verificar a sua robustez. Foram utilizados três diferentes tipos de superfícies para esta tarefa: uma cilíndrica, uma cônica com excentricidade e uma de revolução apresentando diferentes tamanhos de seções transversais.

Dentre os métodos propostos no trabalho, foram aplicados apenas quatro:

1. Método da rede de pontos de controle;
2. Método da distância com aumento do número de pontos nas seções em 10x;
3. Método da distância reduzido a uma seleção por seção transversal e;
4. Método dos planos longitudinais – Iterativo.

Para a primeira superfície, cilíndrica, foram verificadas boas reconstruções da superfície para os quatros métodos aplicados.

Para a segunda superfície, cônica com excentricidade, as reconstruções não obtiveram o resultado esperado, mesmo apresentando erros médios baixos, seus erros máximos foram bastante elevados.

Para a terceira e última superfície, Peão, os resultados foram satisfatórios. Os erros obtidos foram muito baixos para todos os métodos, proporcionando uma excelente reconstrução.

Com relação ao desempenho computacional dos métodos, o que apresentou piores resultados foi o método da rede de pontos de controle, obtendo resultados muito acima dos demais além de, em alguns casos, “torcer” a superfície. Os três outros métodos possuem excelente desempenho computacional, sendo o melhor o método da distância reduzido, já que a seleção dos pontos das linhas longitudinais neste método é realizada da maneira mais simples.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

6.1. Conclusões

A reconstrução de superfícies tridimensionais pode ser dividida em duas partes: digitalização da nuvem de pontos e reconstrução da superfície tridimensional parametrizada. Nesta dissertação foi dado ênfase na segunda parte, onde foi desenvolvido métodos para se chegar a uma superfície reconstruída que represente o objeto real com mínimo erro possível.

Inicialmente foi realizado um breve estudo sobre o ajuste de curvas e superfícies utilizando B-Splines. Este estudo foi de extrema importância já que apresenta a teoria que fundamenta a curva B-Spline, assim como apresenta fundamentos para alterar formatos da curva e outras características. Também apresenta o ajuste de curva pelo método dos mínimos quadrados, o qual faz parte da metodologia desenvolvida para ajuste das curvas às seções transversais, bem como as linhas longitudinais.

Em seguida, é apresentada toda a metodologia de ajuste das seções transversais, a qual tem uma ótima performance devido a redução dos pontos através do cálculo dos centros de massa das micro-regiões que compõem cada seção transversal.

Os demais métodos de cálculo de peso, fechamento de curva, seleção de início e determinação do número de pontos de controle fazem com que o ajuste seja o melhor possível.

Por fim, os métodos de reconstrução da superfície, onde primeiramente é definido um método que utiliza as equações teóricas da superfície B-Spline, porém necessitando de um tempo computacional muito elevado para o seu cálculo. Em seguida são definidos os métodos que fazem a interpolação das seções transversais, dentre eles destacam-se os das distâncias, distância aumentado 10x e o distância reduzido, e os dos planos longitudinais, direto e iterativo. Os métodos das distâncias

são os mais simples já que levam em conta apenas a distância entre os pontos e por isso possui o melhor desempenho computacional perante os outros. Já os dos planos longitudinais possuem certa complexidade, porém, mesmo assim, o iterativo apresentou um bom desempenho computacional, já o direto não, devido à solução de equações para a busca pelo ponto de interseção com o plano.

Todos os seis métodos propostos no trabalho apresentaram boas reconstruções das superfícies simuladas no trabalho, salvo para a superfície cônica excêntrica, a qual há a necessidade do desenvolvimento de um novo método para a boa reconstrução deste tipo de superfície, que resulte em um menor erro.

6.2. Sugestão para trabalhos futuros

As seguintes sugestões são referentes ao projeto do digitalizador de superfícies 3D:

- Adequação da metodologia de leitura do digitalizador para respeitar as limitações do algoritmo de reconstrução de superfície;
- A introdução da metodologia de reconstrução de superfície ao programa do digitalizador para que assim um único programa faça a leitura do objeto e resulte na superfície reconstruída;
- Estudo com relação a uma reconstrução online, onde à medida em que o digitalizador faz a leitura da superfície do objeto, um algoritmo de reconstrução já inicia a reconstrução do objeto ganhando assim performance.
- Estudo com relação à utilização de um segundo sensor laser para a busca da direção normal à superfície.

Com relação a metodologia de reconstrução da superfície:

- Estudo de uma metodologia para aplicação em objetos que possuam arestas e/ou mudanças bruscas de direções na superfície.
- Criação de uma metodologia de reconstrução que seja aplicável a objetos que possuam mais de uma curva em uma mesma seção transversal.
- Estudar um método que reduza as deformações causadas pela interpolação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMENTA, N.; BERN, M.; KAMVYSSELISY, M. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm. In: ACM SIGGRAPH, 1998. p. 415– 421.

AMENTA, N.; BERN, M. Surface reconstruction by Voronoi filtering. **Journal Discrete & Computational Geometry (DCG)**. v. 22, n. 4, p. 481–504. 1999.

AMENTA, N.; CHOI, S.; KOLLURI, R. The power crust. In: ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, 2001. p. 249–260.

AMENTA, N.; CHOI, S.; DEY, T. K.; LEEKHA, N. A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction. **Journal International Journal of Computational Geometry and Applications**. v. 12, n. 1–2, p.125–141. 2002.

AQUINO, D. M.; FONSECA, J. N. Jr.; CARVALHO, J. C. M. Three-Dimensional Surface Reconstruction Using NURBS. **Journal ABCM Symposium Series in Mechatronics**. Porto Alegre, Rio Grande do Sul, v.04, p.11-20. 2010.

BARTELS, R.H.; BEATTY, J.C. ; BARSKY, B.A. **Mathématiques et CAO: B-splines**. vol 06, Hermès, Paris, 1986.

BARTELS, R.H. ; BEATTY, J.C. ; BARSKY, B.A. **Mathématiques et CAO: B-splines**. vol 07, Hermès, Paris, 1986.

BESL, P. **Advances in Machine Vision**. Springer-Verlag, 1989.

BEZIER, P. **Mathématiques et CAO: Cubes et Surfaces**. 2ème édition, vol 04, Hermès, Paris, 1986.

BOISSONNAT, J.-D.; MEMARI, P. Shape reconstruction from unorganized cross-sections. In: Eurographics Symposium on Geometry Processing, 2007. p. 89-98.

BOYKOV, Y.; KOLMOGOROV, V.; Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts. In: IEEE International Conference on Computer Vision, 2003. p. 26–33.

CARR, J. C.; BEATSON, R. K.; CHERRIE, J. B.; MITCHELL, T. J.; FRIGHT, W. R.; MCCALLUM, B. C.; EVANS, T. R. Reconstruction and representation for 3D objects with radial basis functions. In: ACM SIGGRAPH, 2001. p. 67–76.

CHAINED, R. A geometric convection approach of 3-D reconstruction. In: Symposium on Geometry Processing, 2003. p. 218–229.

CHELI, F.; PENNISTRÌ, E. **Cinematica e dinamica dei sistemi multibody**. vol.02, Ambrosiana, 2009. 480p.

CHENIN, P.; COSNARD, M. ; ROBERT, F. ; GARDAN, Y. **Mathematiques et CAO: Méthodes de Base**, 2ème édition, Hermès, Paris, 1986. 164p.

CHU-KUO, C.; YAU, H.T. A Delaunay-Based Region-Growing Approach to Surface Reconstruction from Unorganized Points. **Journal Computer-Aided Design**. Butterworth-Heinemann Newton, MA, USA, v. 37, n. 8, p. 825-835, 2005.

CURLESS, B.; LEVOY, M. Better Optical Triangulation Through Spacetime Analysis. In: Proc. of IEEE Int. Conf. on Computer Vision, 1995. p. 987-994.

CURLESS, B.L. **New Methods for Surface Reconstruction from Range Images**. 1997. 189p. PhD Thesis, Stanford University, USA.

DE BOOR, C. A Practical Guide to Splines. **Applied Mathematical Sciences**. Springer, USA, v. 27, 2001.

DEY, T. K.; GOSWAMI, S. Tight cocone: A watertight surface reconstructor. In ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, 2003. p. 127–134.

DEY, T. K.; SUN, J. An adaptive MLS surface for reconstruction with guarantees. In: Eurographics Symposium on Geometry Processing, 2005.

DEY, T. K.; GOSWAMI, S. Provable surface reconstruction from noisy samples. **Journal Computational Geometry: Theory and Applications**. Amsterdam, The Netherlands, v. 35, n. 1, p. 124–141, 2006.

DEY, T. K.; GE, X.; QUE, Q.; SAFA, I.; WANG, L.; WANG, Y. Feature-Preserving Reconstruction of Singular Surfaces. **Journal Computer Graphics Forum**. New York, NY, USA, v. 31, n. 5, p. 1787-1796, 2012.

DEY, T. K.; WANG, L. Voronoi-based Feature Curves Extraction for Sampled Singular Surfaces, In: SMI 2013, Computers & Graphics, 2013.

DÍAZ, J. E. R. **Modelagem Cinemática e Dinâmica de uma Estrutura RRP+PR**. 2011. 164f. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica – Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade Federal de Uberlândia.

EVERETT, H. R. **Sensors for Mobile Robots: Theory and Application**. Wellesley, MA: A K Peters, 1995. 282p.

FANTI, C. E.; CARVALHO, J. C. M. Reduction of control points number and least square error in a curve fitting B-Spline by optimization techniques. In: 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering- COBEM2015, 2015.

FERREIRA, W. R. B. **Planejamento de Trajetórias Robóticas Utilizando B-splines**. 2011. 139f. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia.

FONSECA JR, J. N.; CARVALHO, J. C. M. Three-Dimensional representation and Surface Definition using NURBS. In 1st International Congress University-Industry Cooperation – UNINDU, 2005.

GARDAN, Y. **Mathematiques e CAO – Méthodes de Base**, Vol. 1, Hermès, Paris, 1986.

GINANI, L.S. **Desenvolvimento de um Sistema de Digitalização Tridimensional de Superfícies Baseado em Visão Computacional com Varredura a Laser para Uso em Metrologia Dimensional**. 2008. 187f. Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ENM.DM-18A/2008, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF.

GRUPO ALUTECH. Nos bastidores: como o primeiro retrato impresso em 3D de Barack Obama foi feito, 2014. Disponível em: < <http://www.grupoalutech.com.br/blog-view?id=15> >, Acessado 19/08/15 as 12h30.

HE Y.; QIN H. Surface Reconstruction with triangular B-Splines. In: Geometric Modeling and Processing, 2004, p. 279-287.

HOPPE, H.; DEROSE, T.; DUCHAMP, T.; MCDONALD, J.; STUETZLE, W. Surface reconstruction from unorganized points. In: ACM SIGGRAPH, 1992, p. 71–78.

HORNUNG, A.; KOBELT, L. Robust reconstruction of watertight 3D models from non-uniformly sampled point clouds without normal information. In: Symposium on Geometry Processing, 2006, p. 41–50.

HSIAO, S. W.; CHEN, R. Q. A study of surface reconstruction for 3D mannequins based on feature curves. **Journal Computer-Aided Design**. Butterworth-Heinemann Newton, MA, USA, v. 45, n. 11, p. 1426–1441, 2013.

KAZHDAN, M.; BOLITHO, M.; HOPPE, H. Poisson surface reconstruction. In: Symposium on Geometry Processing, 2006, pp. 61–70.

KELS, S.; DYN, N. Reconstruction of 3D objects from 2D cross-sections with the 4-points subdivision scheme adapted to sets. **Journal Computers & Graphics**. Elmsford, NY, USA, v. 35, p.741 - 746, 2011.

KOLLURI, R. K. Provably good moving least squares. **Journal ACM Transactions on Algorithms (TALG)**. New York, NY, USA, v. 4, n. 2. p.1-25, 2008.

LABATUT, P.; PONS, J. P.; KERIVEN, R. Robust and efficient surface reconstruction from range data. **Journal Computer Graphics forum**. New York, NY, USA, v.28, n. 8, p. 2275–2290, 2009.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least-squares methods. **Journal Mathematics of Computation**. v. 37, p. 141–158, 1981.

LEMPITSKY, V.; BOYKOV, Y. Global optimization for shape fitting. In: IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2007.

LEVOY, M.; PULLI, K.; CURLESS, B.; RUSINKIEWICZ, S.; KOLLER, D.; PEREIRA, L.; GINZTON, M.; ANDERSON, S. E.; DAVIS, J.; GINSBERG, J.; SHADE, J.; FULK, D. The digital Michelangelo project: 3D scanning of large statues. In: ACM SIGGRAPH, 2000, pp. 131–144.

MEDEROS, B.; AMENTA, N.; VELHO, L.; DE FIGUEIREDO, L. H. Surface reconstruction from noisy point clouds. In: Symposium on Geometry Processing, 2005, p. 53–62.

MENCL, R. **Reconstruction of Surfaces from Unorganized 3D Points Clouds**. 2001. 190p. PhD Thesis, Dortmund University, Germany.

MOONS, T.; VAN GOOL, L.; VERGAUWEN, M. 3D Reconstruction from Multiple Images Part 1: Principles. **Journal Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision**. Hanover, MA, USA, v. 4, n. 4, p. 287-404, 2010.

OHTAKE, Y.; BELYAEV, A.; ALEXA, M.; TURK, G.; SEIDEL, H. P. Multi-level partition of unity implicits. **Journal ACM Transactions on Graphics (TOG)**. New York, NY, USA, v. 22, n.3, p. 463–470, 2003.

OHTAKE, Y.; BELYAEV, A.; SEIDEL, H. P. 3D scattered data approximation with adaptive compactly supported radial basis functions. In: Shape Modeling International, 2004, pp. 153–164.

OZAKI, H.; HIRANO, K.; IWAMURA, M.; LIN, C.; SHIMOGAWA, T.; Improvement of Trajectory Tracking for Industrial Robot Arms by Learning Control with B-Spline. International Symposium on Assembly and Task Planning. n. 5, 2003, Besançon, p. 264 – 269.

PATIAS, P. Photogrammetry and Visualization. In: Technical Report, ETH Zurich, 2001. Disponível em: < <http://www.photogrammetry.ethz.ch/research/quest.html> >. Acessado 19/08/15 as 12h42.

PEREIRA, L. R. **Ajuste de Curvas B-spline Fechada com Peso**. 2014. 165f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. 2nd Edition, Springer, 1996. 646p.

REMONDINO, F. From Point Cloud to Surface: The Modeling and Visualization Problem, In: The Int. Workshop on Visualization and Animation of Reality-based 3D Models, 2003, Switzerland. p. 24-28.

ROGERS, D.F. **An Introduction to NURBS – With Historical Perspective**. 1st ed., Morgan Kaufmann Publ., San Diego, USA. 2001, 309p.

ROUHANI, M.; SAPPA, A. D.; BOYER, E. Implicit B-Spline Surface Reconstruction. **Journal Image Processing, IEEE Transactions**. Charlottesville, VA, USA, v.24, n.1, p. 22-32, 2015.

SHEN, C.; O'BRIEN, J. F.; SHEWCHUK, J. R. Interpolating and approximating implicit surfaces from polygon soup. **Journal ACM Transactions on Graphics (TOG)**. New York, NY, USA, vol. 23, p. 896–904, 2004.

WANG, W.; POTTMANN, H.; LIU, Y. Fitting B-spline curves to point clouds by curvature-based squared distance minimization. **Journal ACM Transactions on Graphics (TOG)**. New York, NY, USA, v.25 n.2, p.214-238, 2006.

ZHANG, L.; CURLESS, B.; SEITZ, S. M. Spacetime Stereo: Shape Recovery for Dynamic Scenes. In: Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2003, Madison, WI. p. 367-374.