

GABRIELA COSTA DE OLIVEIRA

SOLUÇÃO ANALÍTICA EM CONDUÇÃO DE  
CALOR MULTICAMADA: APLICAÇÃO EM  
FERRAMENTAS REVESTIDAS



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
**2015**

GABRIELA COSTA DE OLIVEIRA

SOLUÇÃO ANALÍTICA EM CONDUÇÃO DE  
CALOR MULTICAMADA: APLICAÇÃO EM  
FERRAMENTAS REVESTIDAS

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães  
Co-orientadora: Dr. Ana Paula Fernandes

Uberlândia  
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

- O48s Oliveira, Gabriela Costa de, 1989-  
2015 Solução analítica em condução de calor multicamada : aplicação em  
ferramentas revestidas / Gabriela Costa de Oliveira. - 2015.  
90 f. : il.
- Orientador: Gilmar Guimarães.  
Coorientadora: Ana Paula Fernandes.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Condução - Teses. 3.  
Green, Funções de - Teses. I. Guimarães, Gilmar. II. Fernandes, Ana  
Paula, 1975- III. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

---

CDU: 621

Aos meus pais.  
Ao Sidney.

# Agradecimentos

À minha família.

Ao Sidney por ser tão importante em minha vida. Devido a seu companherismo, amizade, paciência, compreensão, apoio, alegria e amor, este trabalho pode ser concretizado.

Aos professores da FACIP que ajudaram na minha formação.

Aos amigos do LTCM, Fábio, Sidney, Fernando, Alisson, Ana e Luis.

Aos amigos do LPM e “agregados”.

Às meninas da secretaria da pós.

A todos amigos da FEMEC, docentes, técnicos-administrativos e discentes.

Especialmente, aos meus, mais que orientadores, Gilmar e Ana Paula.

Às agências financiadoras CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Oliveira, G. C. **Solução analíticaa multicamada em condução de calor: Aplicação em ferramentas revestidas.** 2015. 93f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

### **Resumo**

Este trabalho dedica-se à obtenção de solução analítica em condução de calor por meio de Funções de Green (FG), decorrente de um problema térmico unidimensional transiente com meio multicamada. Indica-se o uso do método de Funções de Green (FG) uma vez que as condições de contorno variam com o tempo, o que descarta de imediato o método de separação de variáveis. Obtém-se o perfil de temperatura para o meio dupla-camada e verifica-se a solução analítica através da comparação com soluções exatas e numéricas de problemas térmicos correlacionados e específicos. Uma aplicação importante de soluções de dupla camada é dada pela análise térmica de uma ferramenta de usinagem com revestimento. Nesse sentido, duas análises do comportamento térmico em ferramentas revestidas são abordadas. Verificam-se os parâmetros térmicos e geométricos envolvidos, que possibilitam uma melhor distribuição da temperatura na região de corte, diminuindo os desgastes presentes nesse processo e visando aumentar a vida útil da ferramenta. Mostra-se que o revestimento com as propriedades térmicas do material de cobalto, teve um aumento de temperatura, enquanto os revestimento de óxido de alumínio ( $Al_2O_3$ ) e nitreto de titânio (TiN) apresentou-se uma diminuição de temperatura na interface ferramenta-revestimento.

---

*Palavras-chave:* *funções de Green, solução analítica, multicamada, condução de calor, ferramenta revestida*

Oliveira, G. C. **Analytical solution multilayer heat conduction: Application in coated tools.** 2015. 93p. Master's Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Abstract

In this work a transient one dimensional thermal problem with multilayer was solved analytical by using the Green's functions (FG) method. This method was used because the boundary conditions vary with time and this discards the use of the separation of variables method. The temperature profile for a two-layer medium was obtained and checks up this analytical solution by comparison with exact and numerical solutions of related thermal problems with specific characteristics. One important application of double layer solutions are given by thermal analysis in a coating machine tool. Accordingly, two analyzes of the thermal behavior of coated tools are addressed. Check up the thermal and geometric parameters involved, which allow a better distribution of temperature in the cutting area, reducing wear used in the process and to increase the tool life. It has been shown that coating with the thermal properties of the cobalt material, had an increase in temperature, while the coating of aluminum oxide ( $Al_2O_3$ ) and titanium nitride (TiN) showed a decrease of temperature in the tool-coating interface.

---

*Keywords:* *Green's function, analytical solution, multilayer, heat conduction, coated tool*

# Listas de Figuras

3.1	Problema térmico clássico: placa plana submetida a um fluxo de calor em $x = 0$ , e condição de isolamento térmico à superfície oposta, $x = L$ . . . . .	15
3.2	Problema térmico: placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor em $x = 0$ , e condição de isolamento térmico na superfície oposta, $x = L$ . . . . .	18
3.3	Representação gráfica das assíntotas do problema X2C12. . . . .	31
4.1	Problema térmico: placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor em $x = 0$ , e condição de isolamento térmico na superfície oposta, $x = L$ . . . . .	35
4.2	Perfil de temperatura ao longo da espessura da camada do material composto Aço/Cobre. . . . .	36
4.3	Fluxo de calor discreto. . . . .	37
4.4	Comparação entre a solução analítica (4.3) e híbrida (4.2). . . . .	39
4.5	Erro absoluto entre as soluções analítica e híbrida (4.2). . . . .	40
4.6	Fluxo de calor pulso triangular da solução híbrida. . . . .	41
4.7	Temperaturas obtidas a partir do fluxo de calor pulso triangular. . . . .	41
4.8	Representação gráfica das assíntotas considerando $M = 1$ . . . . .	45
4.9	Problema térmico clássico: placa plana submetida a um fluxo de calor em $x = 0$ , e condição de isolamento térmico na superfície oposta, $x = L$ . . . . .	47
4.10	Perfil de temperatura dos problemas térmicos X2C12 e X22. . . . .	47
4.11	Erro absoluto entre os problemas térmicos X22 e X2C12 considerando as mesmas propriedades térmicas. . . . .	48
4.12	Função transferência desenvolvida por (RECH; BATTAGLIA; MOISAN, 2004) dada pela equação (4.17). . . . .	50
4.13	Função transferência do problema térmico X22. . . . .	52
4.14	Função transferência do problema desenvolvido por (RECH; BATTAGLIA; MOISAN, 2004) e do problema X2C12. . . . .	53
4.15	Erro absoluto entre as funções transferências dada pelo gráfico (4.14). . . . .	53
4.16	Problema térmico de duas camadas cuja primeira camada mede $10\mu m$ . . . . .	54
4.17	Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12, com espessura da primeira camada de $b = L/2$ . . . . .	56
4.18	Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12, com espessura da primeira camada de $b = L/4$ . . . . .	57
4.19	Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12, com espessura da primeira camada de $b = L/8$ . . . . .	58

4.20	Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema <i>X2C12</i> , com espessura da primeira camada de $0.003[m]$ ou $b = L/16$ . . . . .	60
4.21	Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema <i>X2C12</i> , com espessura da primeira camada de $b = L/32$ . . . . .	61
4.22	Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema <i>X2C12</i> , com espessura da primeira camada de $b = L/64$ . . . . .	63
4.23	Malhas fornecida pelo COMSOL automaticamente e refinada manualmente com espessura da primeira camada de $b = L/64$ . . . . .	64
4.24	Malhas refinadas manualmente com espessura da primeira camada de $b = L/64$ . . . . .	65
4.25	Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema <i>X2C12</i> , com espessura da primeira camada de $b = L/64$ e um refino de malha de 10.000 elementos em cada camada. . . . .	66
5.1	Temperatura na face de corte da ferramenta revestida (T1), na interface entre o revestimento e o material base (T2) e na face de corte da ferramenta de metal base, sem revestimento . . . . .	72
5.2	Análise térmica entre ferramenta não revestida e ferramenta revestida com três tipos de revestimento distintos, considerando um fluxo de calor de $q = 25 \times 10^5$ e $\text{time}=10\text{s}$ . . . . .	72
5.3	Diferença de temperatura entre ferramenta não revestida e com revestimento $\text{Al}_2\text{O}_3$ . . . . .	73
5.4	Diferença de temperatura entre ferramenta não revestida e com revestimento de cobalto. . . . .	74
5.5	Diferença de temperatura entre ferramenta não revestida e com revestimento de TiN. . . . .	74
5.6	Evolução no tempo de T1, T2 e T3 considerando o revestimento de TiN com espessura de 10um, onde A: Ferramenta Revestida de TiN (Superfície de Corte), B: Ferramenta Revestida de TiN (Interface) e C: Ferramenta sem revestimento (Superfície de Corte). . . . .	77

# Listas de Tabelas

3.1	Tipos de condições de contorno. . . . .	14
4.1	Propriedades Termofísicas. . . . .	35
4.2	Condições de continuidade . . . . .	36
4.3	Autovalores dos problemas térmicos $X22$ e $X2C12$ . . . . .	45
4.4	Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema $X2C12$ na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/2$ ). . . . .	56
4.5	Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema $X2C12$ na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/4$ ). . . . .	58
4.6	Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema $X2C12$ na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/8$ ). . . . .	59
4.7	Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema $X2C12$ na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/16$ ). . . . .	60
4.8	Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema $X2C12$ no instante inicial $x = 0$ e na interface $b = L/32$ . . . . .	62
4.9	Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema $X2C12$ no instante inicial $x = 0$ e na interface $b = L/64$ . . . . .	63
4.10	Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema $X2C12$ no instante inicial $x = 0$ e na interface $b = L/64$ . . . . .	66
5.1	Propriedades termofísicas da ferramenta e dos revestimentos de TiN, Cobalto e $Al_2O_3$ . . . . .	71
5.2	Comparação entre as temperaturas da ferramenta de metal duro e a ferramenta revestida de Co para diferentes espessuras de revestimento em um tempo de 10s. . . . .	75
5.3	Comparação entre as temperaturas da ferramenta de metal duro e a ferramenta revestida de $Al_2O_3$ para diferentes espessuras de revestimento em um tempo de 10s. . . . .	75
5.4	Comparação entre as temperaturas da ferramenta de metal duro e a ferramenta revestida de TiN para diferentes espessuras de revestimento em um tempo de 10s. . . . .	76
A.1	Solução dos coeficientes $X_1 = Acos(\gamma x) + Bsen(\gamma x)$ e $X_2 = Ccos(\eta x) + Dsen(\eta x)$ considerando contato perfeito . . . . .	85
B.1	Equação transcendental para demais condições de contorno. . . . .	86

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1	Introdução . . . . .	4
2.2	Condução de Calor em Problemas Multicamadas . . . . .	4
2.2.1	Soluções Numéricas de Problemas Multicamadas . . . . .	6
2.2.2	Soluções Analíticas de Problemas Multicamadas . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	<b>12</b>
3.1	Introdução . . . . .	12
3.2	Vantagens do Método de Funções de Green . . . . .	12
3.2.1	Sistema de Numeração em condução de calor . . . . .	13
3.3	Modelo térmico unidimensional transiente . . . . .	14
3.3.1	Problema térmico unidimensional transiente $X2C12$ . . . . .	15
3.3.2	Problema térmico $1D$ $X2C12$ . . . . .	18
3.4	Autofunções para o problema térmico $X2C12$ . . . . .	21
3.5	Cálculo da norma para o problema térmico $X2C12$ . . . . .	28
3.6	Autovalores para o problema térmico $X2C12$ . . . . .	29
3.7	Solução de Temperatura . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Equação-Solução Multicamada: Verificação e Comparação com soluções numéricas e analíticas</b>	<b>34</b>
4.1	Introdução . . . . .	34
4.2	Perfil de Temperatura do Problema térmico unidimensional $1D$ transiente $X2C12$ . . . . .	34
4.2.1	Solução híbrida . . . . .	37
4.3	Verificação da Solução o problema térmico $X2C12$ . . . . .	42
4.3.1	Verificação algébrica da solução $X2C12$ . . . . .	42
4.3.2	Verificação Intrínseca da solução $X2C12$ . . . . .	46
4.4	Comparações . . . . .	48
4.4.1	Comparações entre soluções analíticas . . . . .	49
4.5	Método analítico x Método numérico . . . . .	54

<b>5 Análise do comportamento térmico em Ferramentas Revestidas</b>	<b>69</b>
5.1 Introdução . . . . .	69
5.2 Importância do uso do Revestimento em Ferramenta de corte . . . . .	70
5.3 Análise Térmica em Ferramentas Revestidas . . . . .	71
<b>6 Conclusão</b>	<b>79</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>82</b>
<b>A Coeficientes para obtenção das autofunções</b>	<b>85</b>
<b>B Equações transcendental para demais condições de contorno</b>	<b>86</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A ciéncia é separada em três grandes áreas: humanas, biomédicas e exatas, que se subdividem em dois grandes grupos, como, ciéncias básicas e aplicadas. Como exemplo de ciéncias básicas tem-se a matemática, a física e a química. A matemática é uma forte aliada na busca da simplicidade, segurança e confiança desejáveis sempre que qualquer solução numérica ou cálculo computacional proposto não possa ser observado experimentalmente (FERNANDES, 2009). Já as engenharias, geociéncias e astronomia podem ser encaradas como áreas de aplicação destas ciéncias.

Especificamente, no ramo da engenharia mecânica dentre os fenômenos existentes, estuda-se a transférencia de calor por condução que ocorre devido ao gradiente de temperatura em meio sólido e que pode ser modelado matematicamente pela equação da difusão.

A procura por soluções analíticas, vem aumentando a cada dia, uma vez que apresentam robustez, precisão, menor gasto computacional e maior confiança em suas estimativas. No caso de soluções puramente numéricas, além da demora do processamento, elevando o custo computacional, para obter uma boa precisão numérica, é preciso uma malha com bastante números de elementos ou nós.

Uma das propostas do Laboratório de Transferênciа de Calor e Massa (LTCM - UFU), é a obtenção de soluções analíticas de problemas térmicos em condução de calor com diferentes tipos de condições de contorno e com várias aplicações em engenharia.

Propõem-se aqui a obtenção de soluções analíticas para equação da condução de calor, que é dada por uma equação diferencial parcial. Vários métodos podem ser usados para tal tarefa, dentre eles é usado o método de Funções de Green (FG) uma vez que as condições de contorno variam com o tempo, o que descarta de imediato o método de separação de variáveis.

Uma das vantagens no uso de soluções integrais por FG é a possibilidade de se construir,

sem dificuldades adicionais, soluções multidimensionais a partir da obtenção das funções de Green unidimensionais. Neste caso, as versões da equação-solução 2D e 3D são absolutamente equivalentes à equação unidimensional e as FG podem ser obtidas a partir de produtos de soluções 1D nas diversas direções (FERNANDES, 2009).

Em diversas situações práticas de engenharia mecânica existe a presença de problemas térmicos de transferência de calor por condução que envolvem problemas com multicamadas. Como por exemplo, a equação da biotransferência de calor em tecidos que possuem mais de uma camada, como pele, epiderme e músculo. Outras aplicações encontram-se em paredes de fornos industriais, em construção civil (espessura da tinta), ferramentas revestidas usadas em processo de usinagem. Observa-se que todas essas aplicações são decorrentes de um problema térmico multicamada ou composto, cujas propriedades termofísicas são distintas em cada camada.

O objetivo do presente trabalho é a investigação e o desenvolvimento de solução analítica para problemas de condução de calor em meios multicamada, ou também denominado compostos, usando a técnica de FG em ferramentas de corte revestidas usadas em um processos de usinagem, cujo objetivo é estimar a temperatura na interface (ferramenta-revestimento).

Apresenta-se no capítulo 2, uma revisão bibliográfica dos trabalhos encontrados na literatura que abordam soluções analíticas e numéricas onde, o meio a ser analizado é composto por materiais distintos em cada camada. Aplicações também são apresentadas.

O capítulo 3, trata-se da fundamentação teórica, onde se apresenta detalhadamente as etapas para obtenção da equação-solução de temperatura analítica multicamada. Ressalta-se que para a compreensão dos procedimentos para obter a solução multicamada é necessário e fundamental o estudo da solução de um problema de camada simples, por meio de FG, cujas condições de contorno são as mesmas em ambos problemas.

No capítulo 4, mostra-se os procedimentos computacionais realizados e implementados no *software* MATLAB (2012). Verifica-se a solução analítica multicamada através de um problema clássico em condução de calor composto por uma única camada e compara-se a solução analítica multicamada obtida no capítulo 3 com uma solução analítica obtida da literatura usando o método de transformada de Laplace. Apresenta-se também, comparações com soluções puramente numéricas fornecidas pelo *software* COMSOL.

Observa-se, que o trabalho não só apresenta a formulação, o desenvolvimento e a obtenção da equação-solução analítica multicamada, mas também sua implementação computacional, permitindo um melhor entendimento físico do problema.

No capítulo 5, apresenta-se a aplicação da solução analítica multicamada em ferramentas de corte revestidas usadas em processo de usinagem.

Conclui-se o trabalho apresentando propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma breve revisão de trabalhos encontrados na literatura que abordam modelos e soluções de problemas térmicos que envolvem meios com mais de um material. Os trabalhos são apresentados considerando o tipo de solução (numérica/analítica) e suas aplicações.

### 2.2 Condução de Calor em Problemas Multicamadas

Encontram-se na literatura soluções para vários problemas de engenharia em condução de calor. Citam-se os trabalhos de Arpaci (1966) com o livro *Conduction Heat Transfer*; Beck (1992) com o livro *Heat Conduction Using Green's Function* e Özişik (1993) com o livro *Heat Conduction*. Esses trabalhos são denominados clássicos em condução de calor.

Arpaci (1966) apresenta em seu livro soluções para vários problemas térmicos de transferência de calor por condução, usando os métodos de separação de variáveis, método da transformada de Laplace e o Teorema de Duhamel. Apesar de mostrar diversos métodos de solução, o seu trabalho é fortemente voltado para a caracterização física dos problemas. Porém, Arpaci (1966) não aborda em seu livro problemas que envolvem meios com mais de uma camada.

Özişik (1993) apresenta em seu livro soluções de problemas de condução de calor, usando o método de separação de variáveis, método da transformada de Laplace, o Teorema de Duhamel e soluções baseadas em Funções de Green. Özişik (1993) aborda, principalmente, soluções de problemas homogêneos em condução de calor. Em seu livro *Heat Conduction* encontra-se uma breve introdução de problemas inversos em condução de calor. Além disso,

Özişik (1993) aborda de uma maneira objetiva e didática todos os procedimentos necessários para obtenção da solução de temperatura em problemas multcamadas e dedica um capítulo a problemas unidimensionais com meio composto, onde, apresenta exemplos didáticos, tanto para obtenção da equação de temperatura baseada em FG, quanto para obtenção dos autovalores. Porém, não calcula efetivamente os autovalores, nem apresenta resultados dessas soluções (FERNANDES, 2009).

O trabalho desenvolvido por Beck (1992) apresenta de uma forma didática, vários problemas de condução de calor como encontrados nos livros de Arpacı (1966) e Özişik (1993), porém o que diferencia seu trabalho dos anteriores é a sua atenção voltada principalmente para soluções baseada em Funções de Green. O livro *Heat Conduction Using Green's Function* apresenta soluções para problemas mais complexos como não homogeneidades presentes tanto na equação da difusão como nas condições de contorno. Assim como Arpacı (1966) Beck (1992) não aborda problemas térmicos que envolvem meios com mais de um material.

A grande força do uso de Funções de Green está na possibilidade de obtenção de soluções de problemas de condução de calor dos tipos mais variados e complexos. Por exemplo, citam-se problemas tridimensionais transientes, com termos de geração de calor transientes e não uniformes e que possam ainda estar sujeitos as condições de contorno não homogêneas. Essas não homogeneidades podem ainda variar com o tempo e o espaço (FERNANDES, 2009).

A intenção deste trabalho é obter a equação-solução de um problema térmico unidimensional transiente onde a geometria a ser analisada é composta por propriedades termofísicas distintas, isso é, um problema de materiais composto ou multcamada, com aplicação em engenharia. Esse trabalho não só apresenta o desenvolvimento, a formulação e a obtenção da equação-solução analítica, mas também a sua implementação computacional. Isto permite análises dos processos físicos, segurança na sua aplicação, entendimento e o domínio completo de passos intermediários importantes como a obtenção e implementação numérica dos autovalores.

Apresenta-se a seguir, alguns trabalhos encontrados na literatura que abordam soluções numéricas de problemas térmicos composto por mais de uma camada e suas aplicações.

### 2.2.1 Soluções Numéricas de Problemas Multicamadas

Foi abordado no trabalho desenvolvido por Du, Lovell & Wu (2000) uma aplicação com ferramentas revestidas. Os autores consideraram em seu trabalho, um problema térmico unidimensional em regime permanente, de duas camadas, com condição de contorno de isolamento térmico em ( $x = 0$ ) e temperatura prescrita na superfície oposta. Apresentam duas técnicas gerais para determinar o campo de temperatura com materiais que contenham revestimentos finos. O primeiro método trata-se de uma técnica numérica baseada em elementos finitos cujo revestimento deve possuir uma espessura limite e o segundo método, mais eficiente computacionalmente, baseia-se em aproximações por uma única camada. O segundo método é usado para aplicações em que a espessura do revestimento é muito pequena. Exemplos comparando esses dois métodos são apresentados considerando apenas uma camada de revestimento, usando três tipos de revestimento distintos. Os autores concluem que o método de aproximações por uma camada é mais eficiente quando trata-se do revestimento ter espessura muito fina.

Uma aplicação em problema inverso é dada pelo trabalho de Wu & Chu (2004), que abordou um problema térmico unidimensional, em regime transiente, constituído por duas camadas, cujas condições de contorno são fluxo de calor em ambas as extremidades. Para obtenção da solução numérica inversa usa-se o método de diferenças finitas. O objetivo principal desse trabalho, é determinar o comportamento térmico da temperatura na interface do substrato de película fina. Nesse estudo os autores consideram o efeito de resistência térmica na interface. Os resultados numéricos mostraram uma queda brusca de temperatura na interface.

O trabalho desenvolvido por Brito *et al.* (2009) apresentou um problema térmico tridimensional em regime transiente, de duas camadas, considerando as condições de contorno por convecção e fluxo de calor conhecidas. A solução do problema é obtida numericamente, usando o pacote comercial ANSYS *Academic Research, v. 11.*, baseado no método de volumes finitos. O objetivo da obtenção da solução numérica é aplicá-la em ferramentas de metal duro revestidas. Foram analisados quatro casos com ferramenta de corte revestidas, usando uma única camada de revestimento, variando sua espessura e dois tipos de fluxos de calor utilizados na interface ferramenta-cavaco. Com isto, foram obtidos os campos de temperaturas nas ferramentas de corte e uma análise numérica da influência térmica deste revestimento foi apresentada.

O trabalho desenvolvido por Armando *et al.* (2009) analisou um problema térmico bidimensional em regime permanente, de duas camadas, sujeita as condições de contorno de isolamento térmico na coordenada  $x$  e fluxo de calor por convecção em  $y$ . Para obtenção

da solução numérica usou-se um método computacional de dinâmica dos fluidos (CFD). A fim de aplicar a solução numérica em fornos industriais, os autores propuseram uma análise da transferência de calor numa parede de um forno incluindo uma camada de ar. A análise consiste no estudo da transferência de calor na camada de ar para determinar o fluxo de calor que passa através da parede da fornalha. Nesse estudo, a espessura da camada de ar foi determinada para identificar o princípio da convecção natural, o que representa uma redução do efeito de isolamento na parede do forno. Além disso, foram analizados diferentes combinações de espessura de camada de ar para melhorar a capacidade de isolamento da parede. Os autores mostraram que uma camada de ar com 10 cm de espessura apresenta a melhor capacidade de isolamento.

O trabalho desenvolvido por Bertolazzi, Basttisti & Trivellato (2012) abordou um problema térmico unidimensional semi-infinito em regime transiente, composto por duas camadas, sujeita a condição de contorno de fluxo de calor em ( $x = 0$ ). A solução deste problema é obtida numericamente usando o método de elementos finitos com o intuito de aplica-la em problemas inversos. Os autores relatam que a motivação desse estudo foi rever as metodologias existentes para determinação dos fluxos de calor por meio de problema inverso.

Outro exemplo de aplicação em engenharia envolvendo problemas com multicamada pode ser dado pelos problemas térmicos decorrentes de um processo de usinagem com corte ortogonal. Radulescu & Kapoor (1994) apresentam em seu trabalho um modelo analítico tridimensional da ferramenta de corte e do cavaco para determinar os campos de temperatura durante a usinagem com corte interrompido e corte contínuo a partir de simulações de uma fonte de calor conhecida. Todavia, na modelagem da ferramenta, as condições de contorno são simplificadas desprezando-se os efeitos convectivos e de resistência de contato (RADULESCU; KAPOOR, 1994 apud FERNANDES, 2009).

Como visto, existem muitos trabalhos que abordam soluções numéricas de problemas térmicos multicamada com diversas aplicações, porém existe uma limitação da solução numérica quando deseja-se que a espessura da camada seja muito fina, e será visto que isso realmente ocorre no capítulo 4. Esse problema se deve à transição necessária para a construção da malha numérica. Normalmente o domínio tem dimensões da ordem de milímetros enquanto a camada de revestimento é da ordem de micrômetros. Como o refinamento da malha, na região do revestimento deve ser inferior à camada (micrômetros), uma malha adequada acarreta em milhões de nós que por sua vez torna muito onerosa a técnica numérica.

O uso de soluções analíticas representam, nesse caso, uma grande vantagem em relação aos métodos numéricos, uma vez que sua solução é válida para qualquer ponto, independente de sua localização.

A seguir, apresenta-se uma breve revisão de soluções analíticas voltadas a meios multicamadas.

### **2.2.2 Soluções Analíticas de Problemas Multicamadas**

As soluções analíticas representam uma importante ferramenta para a solução de problemas de engenharia, uma vez que podem ser usadas para a validação de soluções aproximadas, facilitam a análise e o entendimento de problemas físicos e possibilitam fornecer informações precisas e rápidas sobre o comportamento da temperatura e do fluxo de calor durante vários processos (FERNANDES, 2009).

Singh, Jain & Rizwan-uddin (2007) abordam em seu trabalho um problema de condução de calor em uma geometria cilíndrica bidimensional em regime transiente composto por três camadas. A obtenção da solução analítica é determinada usando coordenadas polares e o método de separação de variáveis para obter a solução analítica. O objetivo desse trabalho é apresentar os cálculos dos autovalores. Os autores relatam que um cuidado deve ser tomado na obtenção dos autovalores, uma vez, que problemas bidimensionais ou tridimensionais apresentam autovalores imaginários (números complexos). Afirmam também que essa solução é válida para qualquer combinação de contorno do primeiro ou segundo tipo. Um exemplo para ilustrar a solução analítica obtida é apresentado.

O trabalho desenvolvido por Ramadan (2008) apresenta uma solução semi-analítica de um problema de transferência de calor por condução, unidimensional, em regime transiente composto por duas camadas. Apresenta-se a solução semi-analítica nos três sistemas de coordenadas, Cartesiana, Cilíndricas e Esféricas. Para obtenção da solução em coordenadas cartesianas usa-se o método de transformada de Laplace enquanto a obtenção da solução em coordenadas cilíndricas e esféricas usa-se um método computacional baseado na inversão numérica da transformada de Laplace. O objetivo desse estudo é usar a solução obtida para analisar a propagação de uma onda térmica.

O trabalho desenvolvido por Belghazi, Ganaoui & Labbe (2009) trata um problema térmico de transferência de calor, unidimensional, em regime transiente composto por duas camadas, submetido a uma fonte de calor em movimento. Nesse trabalho, considera-se a resistência de contato. O método para obtenção da solução analítica, consiste na derivação da parte homogênea da solução usando o método de separação de variáveis e expressando o termo fonte em forma de série. Mostra-se que a convergência da série é alcançada para os primeiros vinte autovalores usando o método de Newton-Raphson. Os autores afirmam que este modelo analítico pode ser usado também para estimativa da resistência térmica entre os contatos das camadas.

Maestre, Cubillas & Pérez-Lombard (2010) apresentam em seu trabalho uma solução analítica decorrente de um problema térmico de transferência de calor por condução unidimensional, em regime transitório composto por duas camadas. Mostra-se duas metodologias para obtenção da solução analítica. A primeira metodologia usa o método de transformada de Laplace para calcular os fatores de resposta e o segundo um programa computacional para obter os coeficientes da função transferência. Os autores propõem estratégias para execução do método de transformada de laplace devido ao excesso de tempo de processamento. O objetivo principal das análises é comparar a precisão e a velocidade desses métodos em um espaço curto de tempo. Resultados mostram que o primeiro método por tratar-se de uma solução exata obteve menor tempo computacional e foi mais eficiente.

O trabalho desenvolvido por Kayhani, Norouzi & Delouei (2011) analisa um problema térmico de transferência de calor, em regime permanente composto por duas camadas. A solução analítica é obtida em um sistema de coordenadas cilíndricas. Como as condições de contorno são homogêneas, usa-se o método de separação de variáveis para obter a solução analítica. Os autores propõem esse estudo como instrumento para aplicações nas indústrias, como por exemplo, a aplicação em um tubo de refrigeração composto de duas camadas, com um fluxo de calor variando na espessura do tubo.

Singh, Jain & Rizwan-uddin (2011) apresentam em seu trabalho uma solução analítica baseada no método da transformada integral (FIT) para obter a distribuição de temperatura. Trata-se portanto de um problema térmico unidimensional, em regime transitório composto por três camadas, submetidas a condições de contorno do segundo tipo. A solução analítica é obtida por um sistema de coordenadas cilíndricas e mostra-se que a solução analítica também é válida para qualquer combinação de condições de contorno não homogêneas.

Li & Lai (2013) desenvolveram em seu trabalho um conjunto de soluções analíticas clássicas de transferência de calor por condução. O problema em questão possui formato cilíndrico constituído por duas camadas e a solução analítica é obtida pelo método da transformada de Laplace. As condições de contorno são gerais, incluindo várias combinações, tais como, fluxo de calor constante, fluxo de calor nulo ou condição de contorno de convecção em qualquer superfície. O objetivo dos autores ao desenvolver essas soluções é de contribuir para o campo de soluções de condução de calor.

Observa-se que em diversas situações práticas de engenharia mecânica existe a presença de problemas térmicos de transferência de calor por condução que envolvem problemas com multcamadas. Como por exemplo, na aplicação dada Rodrigues *et al.* (2013) onde se apresenta uma solução analítica transitória unidimensional da equação de Bioheat Pennes, onde cada região representa um tecido biológico independente, por exemplo, pele, gordura ou músculo.

Já o trabalho de Haji-Sheikh & Beck (2002), aborda de uma forma completa o desenvolvimento para obtenção da solução analítica. Haji-Sheikh & Beck (2002) consideram um problema de transferência de calor por condução tridimensional em regime transiente, constituído por duas camadas e sujeitas as condições de contorno de convecção e fluxo de calor. Para obtenção da solução analítica usa-se o método baseado em funções de Green. O procedimento da obtenção da solução multicamada é diferente quando se tem uma única camada. Nesse caso, é necessário adequar a equação em termos de funções de Green obtendo as autofunções e os autovalores, enquanto para o caso de uma única camada a função de Green é obtida por tabelas que se encontram em Beck (1992).

O desenvolvimento para obtenção da solução de temperatura do trabalho Monte (2000) é bem similar ao trabalho desenvolvido por Haji-Sheikh & Beck (2002). Trata-se de um problema térmico unidimensional em regime transiente, composto por duas camadas. Monte (2000) usa o mesmo procedimento proposto por Haji-Sheikh & Beck (2002) para adequar a solução em termos de funções de Green, tendo então que obter as autofunções e os autovalores. Usa-se o método de separações de variáveis para obter as autofunções, porém, os autovalores são obtidos por uma tabela desenvolvida por Haji-Sheikh & Beck (2002). Monte (2000) não detalha os cálculos dos autovalores.

O trabalho de Haji-Sheikh, Beck & Agonafer (2003) complementa o trabalho desenvolvido por Haji-Sheikh & Beck (2002). Trata-se portanto, da obtenção da equação de condução de calor transiente em materiais com camadas multidimensionais. Além disso, mostra-se, um estudo numérico envolvendo as condições de contorno do primeiro, segundo e terceiro tipo. Os autovalores são obtidos diretamente da tabela desenvolvida por Haji-Sheikh & Beck (2002) que se encontra no Anexo A.

Este trabalho propõe o uso do procedimento de Haji-Sheikh & Beck (2002) para obtenção das autofunções e autovalores. A obtenção da equação-solução envolvendo problemas multicamadas requer procedimentos mais elaborados em relação ao de uma simples camada, tanto para adequar a equação-solução em termos de funções de Green quanto para obtenção dos autovalores. Apresenta-se de uma forma didática todos os cálculos para obtenção da equação-solução multicamada cuja a obtenção dos autovalores não é evidente. Uma contribuição deste trabalho, reside na complementação da literatura descrevendo a obtenção da solução multicamada e detalhando os procedimentos da obtenção dos autovalores. Outra contribuição desse trabalho é a sua aplicação no estudo do comportamento térmico de ferramentas revestidas usadas em processo de usinagem.

O trabalho de Rech, Battaglia & Moisan (2004) apresenta uma solução analítica de difusão de calor unidimensional e tridimensional sujeito as condições de contorno de fluxo de

calor em uma das extremidades ( $x = 0$ ) e efeito de convecção na extremidade oposta, afim de aplica-la em ferramentas revestidas para uma melhor compreensão do fluxo de calor entrando no substrato da ferramenta durante uma operação de torneamento, sem considerar a sua influência tribológica. Para obter o modelo de transferência de calor da ferramenta usou-se um método analítico baseado em quadripolos. Os autores mostraram que tanto a solução analítica unidimensional quanto a solução tridimensional possuem a mesma resposta impulsiva no instante inicial. Vários exemplos foram apresentados, variando-se a espessura do revestimento.

A limitação da técnica do quadripolo reside na necessidade do conhecimento do fluxo de calor e temperatura nas superfícies e interface, o que na prática nem sempre é possível.

Como já citado, no presente trabalho é proposto um estudo da influência térmica em ferramentas de metal duro, variando-se a espessura do revestimento, isto é, a primeira camada. O objetivo dessa análise térmica é investigar os parâmetros térmicos envolvidos na análise, possibilitando uma melhor distribuição da temperatura na região de corte durante um processo de usinagem.

# Capítulo 3

## Fundamentos Teóricos

### 3.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo alguns conceitos, vantagens e a equação-solução de um problema térmico de condução de calor, unidimensional em regime transiente, baseada em funções de green. Inicialmente, a equação-solução se refere a um meio simples e posteriormente a um meio de dupla-camada.

A obtenção da solução analítica para problema de condução de calor multicamada requer procedimentos mais elaborados que a solução de problemas de uma única camada, tanto para adequar a equação-solução em termos de FG, quanto para obtenção dos autovalores. Neste capítulo, apresenta-se também, os cálculos necessários para obtenção das autofunções e dos autovalores do modelo térmico multicamada. No caso de duas camadas, em contato perfeito, o problema é referenciado como *X2C12* por Haji-Sheikh (2014), e em seguida obtém-se a solução de temperatura em termos de FG. Para a obtenção das autofunções e dos autovalores para demais condições de contorno, encontra-se em Anexo A uma tabela desenvolvida por Haji-Sheikh & Beck (2002).

### 3.2 Vantagens do Método de Funções de Green

Matematicamente, uma função de Green é um tipo de função usada para resolver equações diferenciais não-homogêneas sujeitas a condições iniciais ou condições de contorno determinadas. As Funções de Green's recebem esse nome em homenagem ao matemático britânico George Green(1773 – 1841).

Como as condições de contorno variam com o tempo, descarta-se de imediato a solução deste problema usando-se o método de separação de variáveis. Uma vez identificado a FG, a

solução da equação torna-se um simples problema de integração matemática de cada termo envolvido. Assim, caso a integral não possa ser resolvida analiticamente, o uso de métodos numéricos de integração podem ser aplicados sem perdas que comprometam a exatidão do problema (FERNANDES, 2009).

Uma outra vantagem no uso do método de funções de Green, é a possibilidade da obtenção das FG em tabelas da literatura como em Beck, Cole & B.Litkouhi (1992). Como o número de problemas em condução de calor é grande devido as várias combinações das condições de contorno, Cole *et al.* (2010) propuseram um sistema de numeração com o intuito de facilitar a notação no uso das FG nos vários problemas.

### 3.2.1 Sistema de Numeração em condução de calor

Como mencionado o sistema de numeração em condução de calor tem como objetivo principal facilitar e identificar o problema térmico em questão. A equação da difusão em coordenadas cartesianas pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g(x, y, z, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

onde  $x, y$  e  $z$  representam respectivamente as variáveis independentes. A equação (3.1) pode estar sujeita as seguintes condições de contorno:

- Geometria infinita(condição natural);
- Temperatura prescrita;

$$T(r_i, t) = f_i(r, t) \quad (3.2)$$

- Fluxo de calor prescrito;

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = f_i(r, t) \quad (3.3)$$

- Condição de contorno de convecção;

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} + h_i T|_{r_i} = f_i(r, t) \quad (3.4)$$

- Condição de contorno do quarto tipo(espessura fina sem convecção);

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = f_i(r, t) - (\rho cb)_i \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{r_i} \quad (3.5)$$

- Condição de contorno do quinto tipo(espessura fina com convecção);

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} + h_i T|_{r_i} = f_i(r, t) - (\rho cb)_i \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{r_i} \quad (3.6)$$

Assim, considerando as coordenadas retangulares, apresenta-se na Tabela 3.1 a numeração das diferentes combinações possíveis.

Tabela 3.1: Tipos de condições de contorno.

Notação	Tipo de contorno	Descrição
0	Tipo zero	Sem efeito físico de contorno
1	Dirichlet	Temperatura prescrita
2	Neumann	Fluxo de calor prescrito
3	Robin	Convecção
4	Quarto tipo	espessura fina, sem convecção
5	Quinto tipo	espessura fina, com convecção

Por exemplo, a função de Green unidimensional sujeita a condição de contorno de fluxo prescrito em uma das extremidades ( $x = 0$ ) e condição de convecção do lado oposto é representada por  $X_{23}$ . Para problemas multidimensionais a simbologia é dada pelo produto de problemas uni-dimensionais, por exemplo:  $XabYcdZef$  onde  $abcdef$  pode assumir qualquer tipo de contorno listado na Tabela 3.1. Beck, Cole & B.Litkouhi (1992) também apresentam um sistema de numeração para o sistema de coordenadas cilíndricas e esféricas.

### 3.3 Modelo térmico unidimensional transiente

Aborda-se, inicialmente o problema térmico unidimensional de uma única camada. Esse procedimento tem o objetivo de facilitar o entendimento e a verificação da equação-solução de dupla-camada apresentada posteriormente. A aplicação da solução de dupla-camada é apresentada no capítulo 5.

### 3.3.1 Problema térmico unidimensional transiente X22

O problema unidimensional ( $1D$ ) de condução de calor definido por uma placa submetida a um fluxo de calor,  $q(t)$  em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico à superfície oposta,  $x = L$ , é referenciado como  $X22$  por Cole *et al.* (2010) (Fig. 3.1). Trata-se, neste caso, de um dos problemas clássicos em condução de calor que tem aplicação em obtenção de propriedades termofísicas.

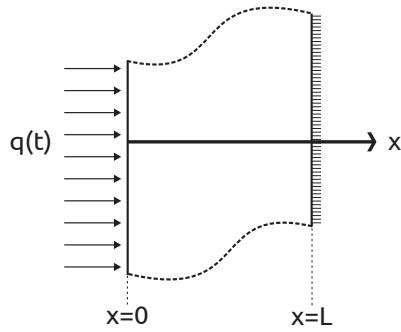


Figura 3.1: Problema térmico clássico: placa plana submetida a um fluxo de calor em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico à superfície oposta,  $x = L$ .

Descreve-se matematicamente, o problema representado pela Fig. 3.1 pela equação de difusão de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.7a)$$

Sujeita às condições de contorno

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.7b)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (3.7c)$$

A solução do problema dado pelas Eqs. (3.7a)-(3.7c) pode ser obtida por funções de Green. Uma das grandes vantagens das funções de Green é a sua fácil transposição para problemas multidimensionais ( $2D$  e  $3D$ ) e a capacidade de resolver problemas com condições de contorno complexas, como fluxo de calor com variação espacial e temporal (FERNANDES, 2009).

A equação-solução integral baseada em funções de Green do problema unidimensional é

dada por

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & \int_0^L G(x, t|x', 0) F(x') dx' \\
 & + \alpha \int_0^t \int_0^L G(x, t|x', \tau) \frac{g(x', \tau)}{k} dx' d\tau \\
 & + \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{f_1(\tau)}{k} d\tau \\
 & + \alpha \int_0^t G(x, t|L, \tau) \frac{f_2(\tau)}{k} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

O primeiro termo da solução integral na Eq. (3.8) é referente à temperatura inicial ( $F(x) = T_0$ ), o segundo termo diz respeito a geração de calor ( $g(x, t)$ ) e os dois últimos termos descrevem condições de contorno do segundo tipo, isto é, em  $x = 0$  tem-se  $f_1(t) = q(t)$  e para  $x = L$  tem-se  $f_2(t) = 0$ .  $G(x, t|x', \tau)$  representa a função de Green,  $\alpha$  e  $k$  são difusividade e condutividade térmica, respectivamente (COLE *et al.*, 2010); (HAHN; OZISIK, 2012); (FERNANDES, 2009).

Assim, resumindo as características particulares do problema, descritas nas Eqs. (3.7a)-(3.7c), tem-se que

$$F(x) = T_0; \quad g(x, t) = 0; \quad f_1(t) = q(t); \quad \text{e} \quad f_2(t) = 0 \tag{3.9}$$

e substituindo (3.9) em (3.8) obtém-se

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{q(\tau)}{k} d\tau \tag{3.10}$$

Observa-se na equação (3.10) que  $G(x, t|x', \tau)$  é a função de Green referente ao problema X22, dada por (BECK, 1992)

$$G_{X22}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right] \tag{3.11}$$

Logo, quando  $x' = 0$

$$G_{X22}(x, t|0, \tau) = G(x, t|0, \tau) = \frac{1}{L} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \tag{3.12}$$

Observa-se ainda que o problema descrito pelas Eqs. (3.7a)-(3.7c) é equivalente ao pro-

blema com geração de calor “superficial” em  $x = 0$ , isto é,  $g(x, t) = q(t)\delta(x - 0)$  e fluxo de calor nulo em  $x = 0$ . Desta forma, supondo que a não homogeneidade associada à condição de contorno em  $x = 0$  é removida por meio do procedimento de superposição, o termo de geração de energia torna-se a única não homogeneidade do problema. Portanto, o problema descrito anteriormente é equivalente ao que é dado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.13a)$$

Sujeita às condições de contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.13b)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (3.13c)$$

Nesse caso, a equação-solução integral baseada em funções de Green dada pela Eq.(3.8) e resumida as características particulares do problema descritas nas Eqs. (3.13a)-(3.13c), ou seja

$$F(x) = T_0; \quad g(x, t) = q(t)\delta(x - 0); \quad f_1(t) = 0; \quad \text{e} \quad f_2(t) = 0 \quad (3.14)$$

É descrita por

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t \int_0^L G(x, t|x', \tau) \frac{q(\tau)\delta(x' - 0)}{k} dx' d\tau \quad (3.15)$$

Aplicando-se a propriedade da função delta de dirac (BECK; COLE; B.LITKOUHI, 1992)

$$\int F(x)\delta(x - a)dx = F(a) \quad (3.16)$$

obtém-se

$$\int_0^L G(x, t|x', \tau)\delta(x' - 0)dx' = G(x, t|0, \tau) \quad (3.17)$$

Logo, observando que as condições de contorno continuam sendo do tipo 2,  $G(x, t|x', \tau)$

para esse caso também é a  $G_{X22}$  e reescrevendo a equação (3.15) tem-se

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k} G(x, t|0, \tau) q(t) d\tau \quad (3.18)$$

Conclui-se que as soluções dos problemas dados por (3.7a)-(3.7c) e (3.13a)-(3.13c) são algebricamente iguais.

### 3.3.2 Problema térmico 1D X2C12

O problema de condução de calor 1D mostrado na Fig. 3.2, definido por uma placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor,  $q(t)$  em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico na superfície oposta,  $x = L$ , cujas propriedades termofísicas são diferentes em cada camada, delimitada por  $x = b$ , é referenciado como X2C12 por (HADI-SHEIKH, 2014).

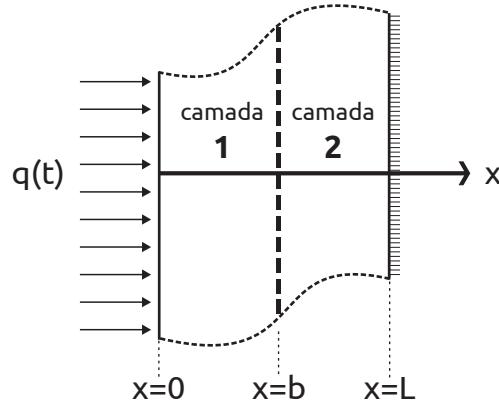


Figura 3.2: Problema térmico: placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico na superfície oposta,  $x = L$ .

Descreve-se matematicamente, o problema representado pela Fig. 3.2 pelas equações de difusão de calor

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (3.19b)$$

Sujeita às condições de contorno

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); \quad -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.19c)$$

e condições de continuidade

$$T_1|_{x=b} = T_2|_{x=b} \quad (3.19d)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (3.19e)$$

e à condição inicial

$$T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (3.19f)$$

A expressão para a temperatura em termos de função de Green é semelhante ao descrito para o caso de uma camada, porém, a forma funcional da solução geral e a função de Green são obtidas a partir de procedimentos mais elaborados. A solução geral do problema dado pelas Eqs. (3.19a)-(3.19f) é apresentada na Eq. (3.20), supondo-se que a não homogeneidade associada à condição de contorno (fluxo de calor) é removida pelo mesmo procedimento de superposição descrito na solução alternativa para o problema de uma camada (Eq. (3.13)), isto é, considerando  $g(x, t) = q(t)\delta(x - 0)$ . Nesse sentido, a solução para temperatura em cada região  $i$  é dada por

$$\begin{aligned} T_i(x, t) &= \sum_{j=1}^M \left\{ \int_{x_j}^{x_{j+1}} G_{ij}(x, t|x', 0) F_j(x') dx' \right. \\ &\quad \left. + \alpha_j \int_0^t \int_{x_j}^{x_{j+1}} G_{ij}(x, t|x', \tau) \frac{g_j(x', \tau)}{k_j} dx' d\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ , para  $j = 1, 2, \dots, M$ , são os limites de cada camada, e,  $G_{ij}(x, t|x', \tau)$  é a função de Green para problemas multicamadas.

Se  $M = 1$ , tem-se a solução para o caso de uma única camada definida no intervalo  $0 \leq x \leq L$ , onde  $x_1 = 0$  e  $x_2 = L$ , portanto a solução dada pela Eq. (3.21) é algebricamente

identica à apresentada na Eq. (3.15).

$$T_{(1)}(x, t) = \alpha_{(1)} \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{(11)}(x, t|x', \tau) \frac{g_{(1)}(x', \tau)}{k_{(1)}} dx' d\tau \quad (3.21)$$

Para  $M = 2$ , define-se duas camadas dadas pelos seguintes intervalos  $0 \leq x \leq b$  e  $b \leq x \leq L$ , sendo  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = b$  e  $x_3 = L$ . Assim, tem as soluções  $T_1$  e  $T_2$  definidas respectivamente pelas Eqs. (3.22) e (3.23), ou seja,

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \alpha_1 \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{11}(x, t|x', \tau) \frac{g_1(x', \tau)}{k_1} dx' d\tau \\ &\quad + \alpha_2 \int_0^t \int_{x_2}^{x_3} G_{12}(x, t|x', \tau) \frac{g_2(x', \tau)}{k_2} dx' d\tau \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \alpha_1 \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{21}(x, t|x', \tau) \frac{g_1(x', \tau)}{k_1} dx' d\tau \\ &\quad + \alpha_2 \int_0^t \int_{x_2}^{x_3} G_{22}(x, t|x', \tau) \frac{g_2(x', \tau)}{k_2} dx' d\tau \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como a geração de calor é aplicada na superfície,  $g(x, t) = q(t)\delta(x - 0)$ , isto implica que ela ocorre em  $x = 0$ , assim,  $g_1(x, t) = g(x, t)$  e  $g_2(x, t) = 0$ , portanto a segunda parte das (3.22) e (3.23) são nulas.

A função de Green  $G_{ij}$  é dada por (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002)

$$G_{ij}(x, t|x', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_x} X_{in}(x) X_{jn}(x'), \quad (3.24)$$

onde  $X_{in}$  e  $X_{jn}$  são as autofunções,  $\lambda_n$  os autovalores e  $N_x$  a norma que é definida por:

$$N_x = \sum_{j=1}^M \int_{x_j}^{x_{j+1}} [X_{jn}(x')]^2 dx' \quad (3.25)$$

Observa-se, portanto que para esse caso serão necessárias as seguintes funções de Green

$$G_{11}(x, t|x', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} X_{1n}(x) X_{1n}(x') \quad (3.26)$$

$$G_{21}(x, t|x', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} X_{2n}(x) X_{1n}(x') \quad (3.27)$$

Portanto, considerando o problema equivalente a uma geração de calor aplicada na superfície em  $x = 0$  e fluxo de calor nulo em  $x = 0$ , e substituindo  $G_{11}$  e  $G_{21}$  respectivamente em  $T_1$  e  $T_2$  a solução para a temperatura no intervalo  $[x_1, x_2]$  se reduz à

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(\tau) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(\tau) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.28)$$

e para o intervalo  $[x_2, x_3]$ :

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.29)$$

A seguir descrevem-se a obtenção das autofunções  $X_1 = X_{1n}(x)$  e  $X_2 = X_{2n}(x)$  no caso particular do problema *X2C12* (Fig. 3.2), definido pelas Eqs. (3.19a)-(3.19f) que deverão ser adequadas para que a solução geral dada pela Eq. (3.20) possa ser aplicada.

### 3.4 Autofunções para o problema térmico *X2C12*

Assumindo que as condições de contorno são homogêneas, propõem-se que as autofunções das soluções (3.28)-(3.29) sejam obtidas por funções de variáveis independentes no espaço e no tempo, a qual nos interessará apenas determinar a função dependente de  $x$ , que serão as autofunções que se deseja obter, assim, o método de separação de variáveis será usado, então

$$T_1(x, t) = X_1(x)\Gamma_1(t) \quad (3.30a)$$

$$T_2(x, t) = X_2(x)\Gamma_2(t) \quad (3.30b)$$

Substituindo Eqs. (3.30a) em Eqs. (3.19a) e Eqs. (3.30b) em Eqs. (3.19b) e dividindo por  $X_1(x)\Gamma_1(t)$  e  $X_2\Gamma_2(t)$  respectivamente tem-se

$$\frac{1}{X_1} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma_1} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} \quad (3.31a)$$

$$\frac{1}{X_2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2 \Gamma_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial t} \quad (3.31b)$$

e como o membro do lado esquerdo da Eq. (3.31) é independente de  $t$ , o lado direito é independente de  $x$ , conclui-se que ambos os membros da equação são independentes de  $x$  e  $t$ . Logo, cada membro da equação deve ser uma constante, ou seja

$$\frac{1}{X_1} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma_1} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{X_2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2 \Gamma_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial t} = -\lambda^2 \quad (3.33)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha_1} X_1 = 0 \quad (3.34)$$

e

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha_2} X_2 = 0 \quad (3.35)$$

Definindo que

$$\gamma^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_1} \quad e \quad \eta^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_2} \quad (3.36)$$

e rescrevendo as equações diferenciais ordinárias (EDOS) (3.34) e (3.35) segue-se

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \gamma^2 X_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \eta^2 X_2 = 0 \quad (3.38)$$

As soluções para essas EDOS são as autofunções que se deseja obter:

$$X_1 = A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x) \quad (3.39a)$$

$$X_2 = C\cos(\eta x) + D\sin(\eta x) \quad (3.39b)$$

Para obter as autofunções  $X_1$  e  $X_2$  é necessário obter os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  das Eqs. (3.39a) e (3.39b). Dessa forma, usa-se, as condições de contorno em  $x = 0$  para obter os coeficientes da Eq. (3.39a) e as condições de contorno em  $x = b$ , ou melhor, condições de continuidade (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002) para obter os coeficientes da equação (3.39b).

A condição de contorno em  $x = 0$  é dada por

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.40)$$

e pode ser rescrita como

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow -k_1 \frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.41)$$

Substituindo a autofunção  $X_1$  dada pela Eq. (3.39a) na condição de contorno em  $x = 0$  dada pela Eq. (3.41) tem-se

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{\partial(A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x))}{\partial x} \quad (3.42)$$

Resolvendo a derivada em relação a  $x$  da Eq. (3.42), tem-se

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = -A\gamma\sin(\gamma x) + B\gamma\cos(\gamma x) \quad (3.43)$$

Aplicando a condição de contorno de  $x = 0$  na Eq. (3.43) segue-se

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -A\gamma\sin(0) + B\gamma\cos(0) = 0 \quad (3.44)$$

Como  $\sin(0) = 0$  e  $\cos(0) = 1$ , conclui-se que o coeficiente  $B = 0$ .

Como  $B = 0$  sem perda de generalidade o coeficiente  $A$  da Eq. (3.39a) pode assumir qualquer valor constante, incluindo o valor unitário,  $A = 1$  (ÖZİŞIK, 1993). Assim, substituindo os coeficientes  $A$  e  $B$  na Eq. (3.39a) tem-se

$$X_1 = 1\cos(\gamma x) + 0\sin(\gamma x) \quad (3.45)$$

Logo, a autofunção  $X_1$  está determinada e é dada por

$$X_1 = \cos(\gamma x) \quad (3.46)$$

Como mencionado, para obtenção da autofunção  $X_2$  é necessário obter os coeficiente  $C$  e  $D$  da Eq. (3.39b), para isso, usa-se, a condição de continuidade em  $x = b$ .

A condição de continuidade em  $x = b$  é dada por:

$$T_1|_{x=b} = T_2|_{x=b} \quad (3.47)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (3.48)$$

e pode ser rescrita como

$$X_1|_{x=b} = X_2|_{x=b} \quad (3.49)$$

$$-k_1 \frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial X_2}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (3.50)$$

Observa-se que

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos(\gamma x) \\ X_2 &= C \cos(\eta x) + D \sin(\eta x) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Aplicando a condição de continuidade em  $x = b$  dada pela Eq. (3.50) na Eq. (??) segue-se

$$\cos(\gamma b) = C \cos(\eta b) + D \sin(\eta b) \quad (3.52)$$

e reescrevendo a Eq. (3.52) tem-se

$$\cos(\gamma b) - C \cos(\eta b) - D \sin(\eta b) = 0 \quad (3.53)$$

Analogamente, substituindo as autofunções  $X_1$  e  $X_2$  dadas pela Eq. (3.51) na Eq. (3.50) segue-se

$$-k_1 \frac{\partial (\cos(\gamma x))}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial (C \cos(\eta x) + D \sin(\eta x))}{\partial x} \quad (3.54)$$

Resolvendo a derivada com relação a  $x$  tem-se

$$k_1[-\gamma \operatorname{sen}(\gamma x)] = k_2[-C\eta \operatorname{sen}(\eta x) + D\eta \cos(\eta x)] \quad (3.55)$$

colocando em evidência  $\gamma$  e  $\eta$  tem-se

$$k_1\gamma[-\operatorname{sen}(\gamma x)] = k_2\eta[-C\operatorname{sen}(\eta x) + D\cos(\eta x)] \quad (3.56)$$

dividindo ambos membros da Eq. (3.56) por  $k_2\eta$  segue-se,

$$-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)\operatorname{sen}(\gamma x) = -C\operatorname{sen}(\eta x) + D\cos(\eta x) \quad (3.57)$$

Aplicando a condição de continuidade em  $x = b$  dada pela Eq. (3.50) na Eq. (3.57) segue-se

$$-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)\operatorname{sen}(\gamma b) = -C\operatorname{sen}(\eta b) + D\cos(\eta b) \quad (3.58)$$

e reescrevendo a equação tem-se

$$-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)\operatorname{sen}(\gamma b) + C\operatorname{sen}(\eta b) - D\cos(\eta b) = 0 \quad (3.59)$$

Em  $x = L$ , tem-se a condição de contorno de isolamento térmico, ou seja,

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.60)$$

e pode ser reescrita por

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow -k_2 \frac{\partial X_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial X_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.61)$$

Sustituindo a autofunção  $X_2$  na Eq. (3.61) segue-se

$$\frac{\partial(C\cos(\eta x) + D\operatorname{sen}(\eta x))}{\partial x} = 0 \quad (3.62)$$

Resolvendo a derivada em relação a  $x$  tem-se

$$-C\eta \operatorname{sen}(\eta x) + D\eta \cos(\eta x) = 0 \quad (3.63)$$

Aplicando a condição de contorno em  $x = L$  dada pela Eq. (3.61) na Eq. (3.63) tem-se

$$-C\eta \operatorname{sen}(\eta L) + D\eta \cos(\eta L) = 0 \quad (3.64)$$

Uma vez aplicadas todas as condições de contorno e as condições de continuidade, as Eqs. (3.53), (3.59) e (3.64) em forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(\gamma b) & \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ -K \operatorname{sen}(\gamma b) & \operatorname{sen}(\eta b) & -\cos(\eta b) \\ 0 & -\eta \operatorname{sen}(\eta L) & \eta \cos(\eta L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

onde

$$K = \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right). \quad (3.66)$$

Observa-se que na Eq. (3.65) ainda resta a identificação dos coeficientes  $C$  e  $D$ . Assim, para sua obtenção, são necessárias apenas duas equações, ou seja, tomando as Eqs. (3.53)-(3.59) tem-se o seguinte sistema linear em sua forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ \operatorname{sen}(\eta b) & -\cos(\eta b) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\gamma b) \\ -K \operatorname{sen}(\gamma b) \end{bmatrix}}_B \quad (3.67)$$

A Eq. (3.68) apresenta a notação do sistema linear dado pela Eq. (3.67) em sua forma simplificada. Para a solução desse sistema é necessário e suficiente que exista a matriz inversa tal que, satisfaça a expressão abaixo (3.68)

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1} \quad (3.68)$$

onde  $A^{-1}$  é denotado como matriz inversa. A existência da matriz inversa  $A^{-1}$  consiste no cálculo do determinante, ou seja, para que a matriz  $A^{-1}$  exista é necessário que o determinante da matriz  $A$  (notação:  $(\Delta(A))$ ) seja diferente de zero. Note que,

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ \operatorname{sen}(\eta b) & -\cos(\eta b) \end{vmatrix} = -\cos(\eta b)^2 - \operatorname{sen}(\eta b)^2 = -1$$

Como o determinante da matriz  $A$  é diferente de zero, existe a matriz inversa  $A^{-1}$ . A

inversão de matrizes  $2 \times 2$  é dada por Dante (2010)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

Portanto,

$$A^{-1} = (-1) \begin{bmatrix} -\cos(\eta b) & -\sin(\eta b) \\ -\sin(\eta b) & \cos(\eta b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\eta b) & \sin(\eta b) \\ \sin(\eta b) & -\cos(\eta b) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Para determinar os coeficientes  $C$  e  $D$  usa-se a relação dada pela expressão (3.68), ou seja,

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma b) \\ -K \sin(\gamma b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\eta b) & \sin(\eta b) \\ \sin(\eta b) & -\cos(\eta b) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Obtem-se assim os coeficientes  $C$  e  $D$

$$C = \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \quad (3.72a)$$

$$D = \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \quad (3.72b)$$

Logo, a autofunção  $X_2$  é definida por

$$\begin{aligned} X_2 = & \left[ \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \right] \cos(\eta x) \\ & + \left[ \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \sin(\eta x) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Uma vez obtidas as autofunções resta a obtenção da norma e dos autovalores. Apresenta-se na próxima seção, os cálculos para obtenção da norma.

### 3.5 Cálculo da norma para o problema térmico X2C12

A obtenção da norma consiste na soma das integrais das autofunções referentes a cada camada, ou seja,

$$N_x = \int_{x1}^{x2} [X_{1n}(x')]^2 dx' + \int_{x2}^{x3} [X_{2n}(x')]^2 dx' \quad (3.74)$$

onde o intervalo da primeira e da segunda integral da Eq. (3.74) referem-se respectivamente a primeira e segunda camada do problema X2C12. Substituindo as autofunções  $X_1$  e  $X_2$  obtidas na seção anterior na Eq. (3.74), a norma passa a ser definida por:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{x1}^{x2} [X_{1n}(x')]^2 dx' + \int_{x2}^{x3} [X_{2n}(x')]^2 dx' \\ &= \underbrace{\int_0^b [\cos(\gamma x')]^2 dx'}_1 + \underbrace{\int_b^L [C\cos(\eta x') + D\sin(\eta x')]^2 dx'}_2 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Resolvendo as integrais indicadas por 1 e 2 que aparece na Eq. (3.75) tem-se

$$\text{Integral 1} = \int_0^b [\cos(\gamma x')]^2 dx' = \frac{x'}{2} + \frac{1}{4\gamma}(2\gamma x') \Big|_0^b = \frac{b}{2} + \frac{1}{4\gamma}(2\gamma b) \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \text{Integral 2} &= \int_b^L [C\cos(\eta x') + D\sin(\eta x')]^2 dx' \\ &= \int_b^L C^2 \cos^2(\eta x') + 2CD\cos(\eta x')\sin(\eta x') + D^2 \sin^2(\eta x') dx' \\ &= C^2 \int_b^L \cos^2(\eta x') dx' + 2CD \int_b^L \cos(\eta x')\sin(\eta x') dx' + D^2 \int_b^L \sin^2(\eta x') dx' \\ &= \frac{C^2}{4\eta} (2\eta(L-b) - \sin(2b\eta) + \sin(2L\eta)) + \frac{2CD}{4\eta} (\cos(2b\eta) - \cos(2L\eta)) \\ &\quad + \frac{D^2}{4\eta} (2\eta(L-b) + \sin(2b\eta) - \sin(2L\eta)) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Logo, a norma é definida por:

$$N_x = \text{Integral 1} + \text{Integral 2} \quad (3.78)$$

Resta ainda o cálculo dos autovalores  $\lambda_n$ . A obtenção dos autovalores é importante para implementação computacional da solução do problema X2C12.

### 3.6 Autovalores para o problema térmico X2C12

Os autovalores para o problema térmico X2C12 devem ser obtidos por um método numérico, por tratar-se de uma equação transcendental.

A obtenção da equação transcendental é dada pelo cálculo do determinante Eq. (3.79) que é composto, pelas condições de continuidade em  $x = b$  e condição de contorno em  $x = L$ , dadas respectivamente pelas Eqs. (3.53), (3.59) e (3.64). Assim, escrevendo a matriz de seus coeficientes tem-se

$$\begin{vmatrix} \cos(\gamma b) & \cos(\eta b) & \sin(\eta b) \\ -K \sin(\gamma b) & \sin(\eta b) & -\cos(\eta b) \\ 0 & -\eta \sin(\eta L) & \eta \cos(\eta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.79)$$

Vários métodos podem ser usados para obtenção do determinante Eq. (3.79), dentre eles, a regra de Sarrus. A regra de Sarrus é usada para cálculo de determinantes de matrizes quadradas e permite o cálculo de maneira prática, relacionando a diagonal principal com a diagonal secundária, ou seja,

$$\begin{vmatrix} \cos(\gamma b) & \cos(\eta b) & \sin(\eta b) & \cos(\gamma b) & \cos(\eta b) \\ -K \sin(\gamma b) & \sin(\eta b) & -\cos(\eta b) & -K \sin(\gamma b) & \sin(\eta b) \\ 0 & -\eta \sin(\eta L) & \eta \cos(\eta L) & 0 & -\eta \sin(\eta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.80)$$

Aplicando a regra de Sarrus, obtem-se

$$[\eta \cos(\gamma b) \sin(\eta b) \cos(\eta L) + K \eta \sin(\eta b) \sin(\gamma b) \sin(\eta L) - \eta \sin(\eta L) \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + K \eta \cos(\eta L) \sin(\gamma b) \cos(\eta b)] = 0 \quad (3.81)$$

Reorgizando as parcelas da Eq. (3.81) tem-se

$$[\eta \cos(\gamma b) \sin(\eta b) \cos(\eta L) - \eta \sin(\eta L) \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + K \eta \sin(\eta b) \sin(\gamma b) \sin(\eta L) + K \eta \cos(\eta L) \sin(\gamma b) \cos(\eta b)] = 0 \quad (3.82)$$

Da relação trigonométrica tem-se (DANTE, 2010)

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \quad (3.83a)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (3.83b)$$

Assim, usando as relações apresentadas nas Eqs. (3.83a)-(3.83b) na Eq. (3.82) tem-se

$$\begin{aligned} \eta \cos(\gamma b) [\sin(\eta b - \eta L)] + K \eta \sin(\gamma b) [\cos(\eta b - \eta L)] &= 0 \\ \eta \cos(\gamma b) [\sin(\eta b - \eta L)] &= -K \eta \sin(\gamma b) [\cos(\eta b - \eta L)] \\ \eta \cos(\gamma b) &= -K \eta \sin(\gamma b) \frac{\cos(\eta b - \eta L)}{\sin(\eta b - \eta L)} \\ \eta \cos(\gamma b) &= -K \eta \sin(\gamma b) \tan(\eta b - \eta L) \\ \frac{\eta \cos(\gamma b)}{\eta \sin(\gamma b)} &= -K \tan(\eta b - \eta L) \\ \tan(\gamma b) &= -K \tan[\eta(b - L)] \end{aligned} \quad (3.84)$$

Portanto, a equação transcendental é definida por

$$\tan(\gamma b) = -K \tan[\eta(b - L)] \quad (3.85)$$

A solução da Eq. (3.85) pode ser obtida aplicando-se vários métodos matemáticos. Neste sentido (ÖZİŞIK, 1993) sugere várias técnicas clássicas como: Método de Newton-Raphson, Bissecção e Secante. Na verdade qualquer um desses métodos são suficientes para obtenção das raízes destas equações. Entretanto um cuidado especial deve ser tomado em relação a obtenção de todas as raízes. Observa-se que como os métodos são iterativos, corre-se algum risco de se perder o primeiro autovalor dependendo das características físicas e geométricas do problema e do primeiro autovalor estimado (FERNANDES, 2009).

Sendo assim, Beck (1992) e Haji-Sheik & Beck (2000) apresentam soluções para a equação transcendental baseadas em aproximações assintóticas que evitam estes problemas.

Para um melhor entendimento do comportamento destas raízes é importante a visualização de suas representações gráficas, conforme apresenta-se na Fig. (3.3), onde a intersecção das curvas representam os autovalores da equação.

Como visto a obtenção dos autovalores não é evidente. É importante ressaltar que quando houver aplicações da solução X2C12 onde a espessura da camada precisa ser muito fina, é preciso reorganizar os autovalores, pois, quanto mais diminui a espessura da camada as raízes da equação transcendental, dada pela Eq. (3.85), vão ficando cada vez mais próximas ou até mesmo coincidindo. Quando isso acontece é preciso eliminar essas raízes. Um exemplo de aplicação que necessita da espessura da camada ser fina, se dá, pela ferramenta de corte (camada 2) revestida (camada 1) usada em processo de usinagem. Nesse caso, as

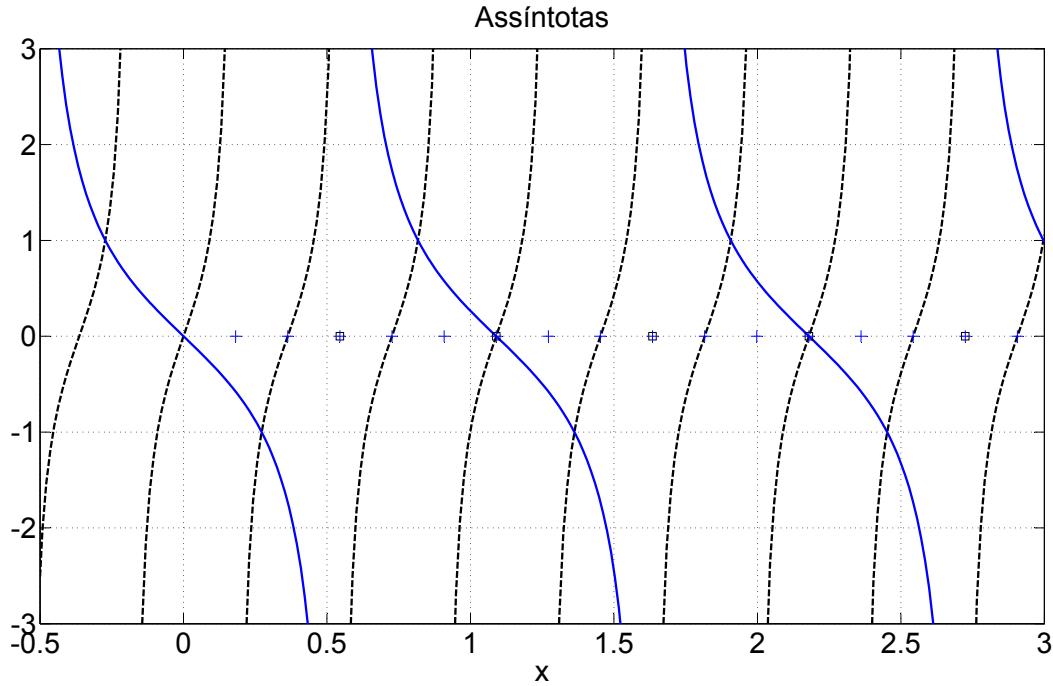


Figura 3.3: Representação gráfica das assíntotas do problema X2C12.

espessuras de revestimento são muito finas.

Desenvolveu-se um procedimento no *software* MATLAB (2012) que evita esse tipo de problema seguindo a seguinte lógica: se a diferença entre dois autovalores, por exemplo, primeiro com o segundo, segundo com o terceiro, e assim sucessivamente for menor que uma tolerância de 0.05 o autovalor passa a ser zero. Como não pode existir autovalores nulos, esse valores são eliminados.

Após esse procedimento os autovalores necessários para obtenção da equação-solução multicamada estão calculados e com isso pode-se obter a equação-solução X2C12. Apresenta-se na seção seguinte a solução de temperatura do problema X2C12.

### 3.7 Solução de Temperatura

Vimos que a solução para a temperatura no intervalo  $[x_1, x_2]$  é dada por:

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.86)$$

e para o intervalo  $[x_2, x_3]$ :

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde define-se duas camadas pelos seguintes intervalos  $0 \leq x \leq b$  e  $b \leq x \leq L$ , sendo  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = b$  e  $x_3 = L$ . Assim, substituindo as autofunções  $X_1$  e  $X_2$  dada pelas Eqs. (3.88)

$$X_1 = \cos(\gamma x) \quad (3.88a)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \left[ \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \right] \cos(\eta x) \\ &\quad + \left[ \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \sin(\eta x) \end{aligned} \quad (3.88b)$$

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma x) \cos(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.89a)$$

$$\begin{aligned}
T_2(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\
&= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\
&= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[ \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \quad (3.89b) \\
&\quad \left. + \left[ \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \sin(\eta x) \right\} \cos(0) \\
&\quad \times \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau
\end{aligned}$$

Onde  $\lambda_n$  são os  $n$  autovalores e  $\gamma$  e  $\eta$  estão relacionados com  $\lambda$  pela seguinte expressão

$$\gamma^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_1} \quad e \quad \eta^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_2} \quad (3.90)$$

Apresenta-se no próximo capítulo a verificação dessa solução de forma algébrica e intrínseca.

# Capítulo 4

## Equação-Solução Multicamada: Verificação e Comparação com soluções numéricas e analíticas

### 4.1 Introdução

Neste capítulo inicialmente apresentam-se a verificação algébrica da solução analítica  $X2C12$  desenvolvida no capítulo anterior e em seguida, a verificação intrínseca, através da equação-solução  $X22$ . Apresenta-se também, uma comparação da equação-solução analítica multicamada  $X2C12$  com uma solução analítica da literatura, e com uma solução numérica obtida pelo *software* COMSOL.

### 4.2 Perfil de Temperatura do Problema térmico unidimensional 1D transiente $X2C12$ .

Como visto anteriormente, o problema térmico de dupla-camada  $X2C12$  representado pela figura (4.1), é definido por uma placa plana de duas camadas, onde o comprimento  $L$  é dado por dois tipos de materiais. Assim, no intervalo  $0 \leq b \leq L$  tem-se duas camadas distintas definida pelo valor  $b$ . Nesta aplicação, na região entre zero e  $b$  tem-se as propriedades termofísicas do material aço AISI 1010, enquanto para a região entre  $b$  e  $L$  tem-se as propriedades termofísicas do material cobre. A tabela (4.1) apresenta-se as propriedades de ambos materiais.

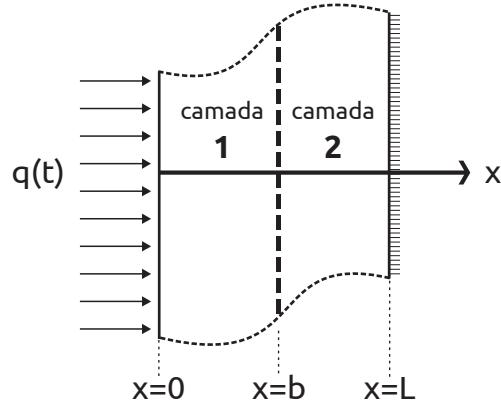


Figura 4.1: Problema térmico: placa plana, com duas camadas, submetida a um fluxo de calor em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico na superfície oposta,  $x = L$ .

Tabela 4.1: Propriedades Termofísicas.

	Aço AISI 1010	Cobre
Condutividade térmica [ $W/mK$ ]	64	401
Difusividade térmica [ $m^2/s$ ]	$18,8 \times 10^{-6}$	$117 \times 10^{-6}$

A solução desse problema é dada pelas Eqs. (3.89a)-(3.89b) apresentadas na seção (3.7) e serão implementadas usando o *software*MATLAB (2012).

Apresenta-se na Fig. (4.2) o comportamento térmico da solução de dupla-camada *X2C12* considerando três tempos constantes  $t = 0[s]$ ,  $t = 50[s]$  e  $t = 100[s]$ , um fluxo de calor prescrito,  $4 \times 10^5 [W/m^2]$ ; temperatura inicial,  $T_0 = 0 [^\circ C]$ , comprimento da placa,  $L = 5 \times 10^{-2} [m]$  e divisão das camadas,  $b = L/2 [m]$ . Nesse caso, não é interessante mostrar a solução em relação ao tempo, pois a solução de dupla-camada é definida em todo domínio e não no tempo, assim, considera-se temperatura por comprimento para visualizar e entender o comportamento dessa solução em todo o domínio.

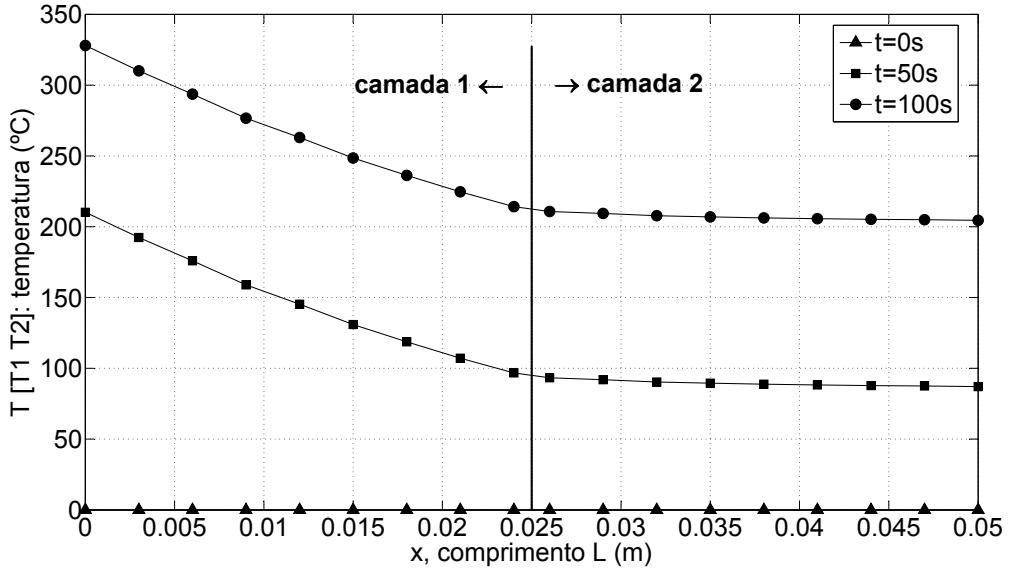


Figura 4.2: Perfil de temperatura ao longo da espessura da camada do material composto Aço/Cobre.

Observa-se que o perfil de temperatura da segunda camada tem um comportamento aparentemente constante em relação ao da primeira camada, isso é devido a condutividade térmica do material ser muito alta, tornando-o condutor e assim dissipando o calor de uma forma mais rápida. Observa-se também, na tabela (4.2) que as condições de continuidade em  $x = b$ , isso é, a temperatura  $T_1 = T_2$  na interface são satisfeitas para os três tempos constantes.

Tabela 4.2: Condições de continuidade

Tempo (s)	$T_1$	$T_2$
$t = 0$	0	0
$t = 50$	95.5742	95.5742
$t = 100$	213.0248	213.0248

Observa-se ainda, que para obter o perfil de temperatura da solução de dupla-camada usou-se um caso particular, onde o fluxo de calor imposto em uma das extremidades ( $x = 0$ ) é conhecido e é constante, restando apenas o cálculo das integrais nas Eqs. (3.89a)-(3.89b). Por exemplo, se o fluxo de calor é constante ou somente dependente da posição, ou ainda uma

função exponencial,  $q(t) = c_1 e^{(-c_2 t)}$ , com  $c_1$  e  $c_2$  não nulos, a solução é facilmente determinada de forma analítica. Entretanto, em uma situação real o fluxo de calor,  $q(t)$ , não é descrito por uma expressão analítica, uma vez que sua natureza é discreta. Nesse caso, a solução poderia ser chamada de “híbrida”, pois a integral é necessariamente calculada a partir da discretização do fluxo de calor (FERNANDES; GUIMARÃES, 2012), (FERNANDES, 2013). Apresenta-se a seguir, a solução híbrida que é usada em um situação real, uma vez que o fluxo de calor é discreto.

#### 4.2.1 Solução híbrida

A solução híbrida é uma alternativa para casos reais onde o fluxo de calor não é constante. Nesse caso, o fluxo de calor experimental (dados discretos) é representado como um vetor onde cada componente é um valor de fluxo, e esse fluxo é considerado constante para cada intervalo de tempo, como mostra na figura, ou seja,  $q(t) = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$  sendo  $q_n$  a componente para o intervalo  $\Delta_t = t_{n+1} - t_n$  com  $n = 1, 2, \dots, N - 1$  (FERNANDES, 2013).

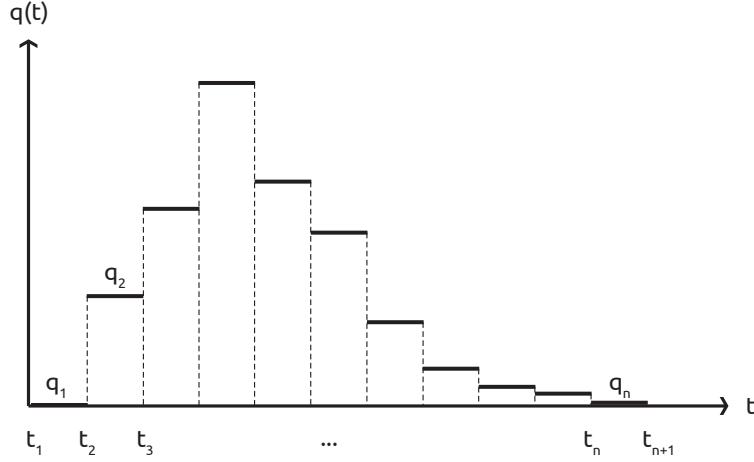


Figura 4.3: Fluxo de calor discreto.

Sendo assim, a integral que aparece nas Eqs. (3.89a)-(3.89b) pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \int_0^t q(\tau) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau &= \int_{t_1=0}^{t_2} q_1 e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau + \int_{t_2}^{t_3} q_2 e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau + \dots \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_n e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{-\lambda_n^2 t} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\lambda_n^2(t_{n+1})} - e^{-\lambda_n^2(t_n)}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Então, a solução de temperatura dadas pelas Eqs. (3.89a)-(3.89b) podem ser re-escritas

da seguinte maneira

$$T_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma x) \cos(0)}{N_x} \frac{1}{-\lambda_n^2 t} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\lambda_n^2(t_n+1)} - e^{-\lambda_n^2(t_n)}) \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[ \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \sin(\eta x) \right\} \cos(0) \\ &\quad \times \frac{1}{-\lambda_n^2 t} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (e^{-\lambda_n^2(t_n+1)} - e^{-\lambda_n^2(t_n)}) \end{aligned} \quad (4.2b)$$

Assim como toda solução, a solução híbrida dada pela Eq. (4.2) precisa ser validada, para isso, obtém-se a solução analítica considerando o fluxo de calor,  $q(t) = c_1 e^{-c_2 t}$  na Eq. (3.89) e compara as duas soluções (híbrida e analítica). Resolvendo as integrais no tempo das Eqs. (3.89a)-(3.89b) tem-se

$$T_1(x, t) = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\gamma x) \cos(0)}{N_x} \frac{c_1 (e^{-c_2 t} - e^{-\lambda_n^2 t})}{\lambda_n^2 - c_2} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_x} \left\{ \left[ \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \right] \cos(\eta x) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \sin(\eta x) \right\} \cos(0) \\ &\quad \times \frac{c_1 (e^{-c_2 t} - e^{-\lambda_n^2 t})}{\lambda_n^2 - c_2} \end{aligned} \quad (4.3b)$$

A seguir, apresenta-se a validação da solução híbrida (4.2) através da comparação entre as soluções analítica (4.3) e híbrida (4.2). Mostra-se também, um exemplo da solução híbrida considerando um fluxo de calor do tipo pulso triangular. Essas soluções são implementadas no *software* MATLAB (2012) considerando as propriedades termofísicas do aço e cobre referente a primeira e segunda camada. Temperatura inicial,  $T_0 = 0$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]; comprimento da placa  $L = 5 \times 10^{-2}$  [m] e divisão das camadas,  $b = L/2$  [m]. Para o fluxo de calor discreto, somente aplicado na equação (4.2), tem-se o vetor  $q_n = [0 \ c_1 \exp(-c_2 t)]$ , com  $c_1 = 4 \times 10^5$  e  $c_2 = 0,002$ ,  $\Delta t = 0.1$  com  $t = 0 : \Delta t : 100$  Fernandes (2013).

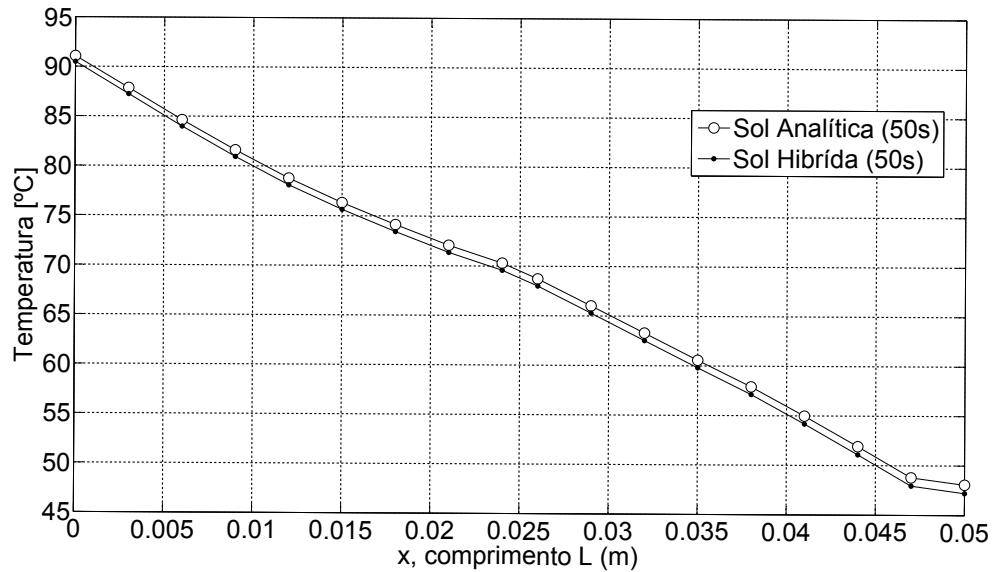


Figura 4.4: Comparaçao entre a soluao analitica (4.3) e hibrida (4.2).

Oberva-se que as duas soluoes apresentadas na Fig. (4.4) possuem o mesmo perfil de temperatura, assim, a Fig. (4.5) apresenta o erro absoluto entre as soluoes analitica (4.3) e hibrida (4.2).

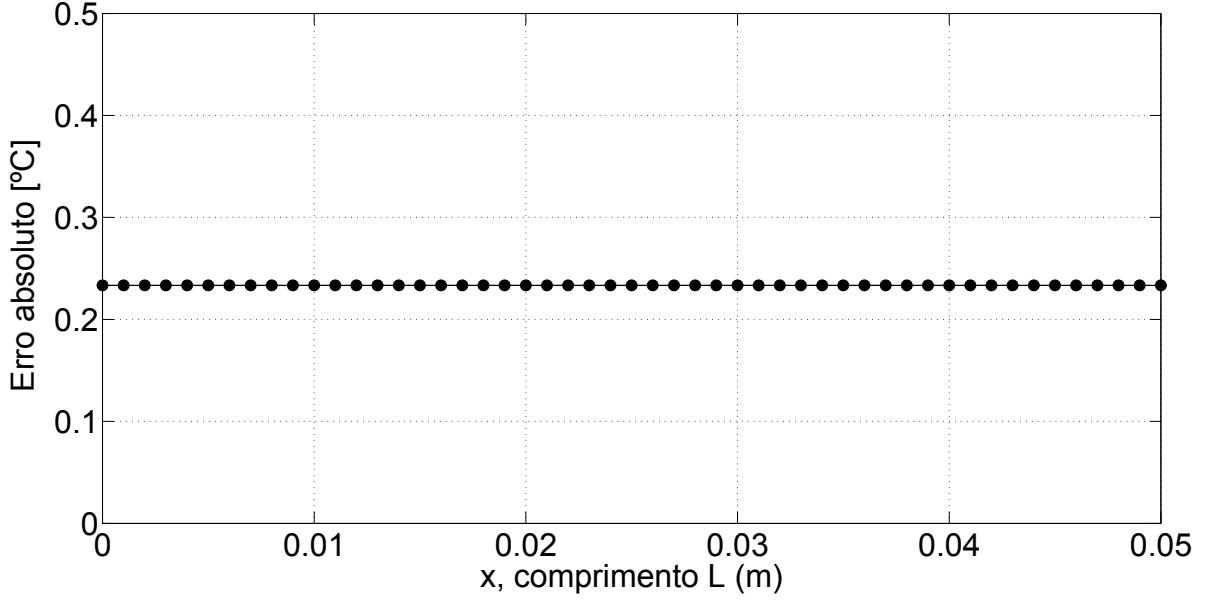


Figura 4.5: Erro absoluto entre as soluções analítica e híbrida (4.2).

Observa-se ainda na Fig. (4.5) que o erro absoluto obtido entre as soluções híbrida (4.2) e analítica (4.3) é de  $0,24(^{\circ}C)$  com erro percentual de 0,22%.

Após a validação da solução híbrida (4.2), mostra-se, outro exemplo usando fluxo de calor triangular discreto,  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ , construindo o fluxo de calor na forma vetor, com um pulso triangular, por meio da função *tripuls* no MATLAB, considera-se as mesmas propriedades térmicas vistas anteriormente, ou seja, o material aço e cobre referentes a primeira e segunda camada respectivamente, considera-se também  $d_t = 1$ ;  $t = [0 : dt : 1000]$ ; as constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem assumir qualquer valor, e dentre eles foram escolhidos os seguintes valores  $c_1 = 4 \times 10^5$ ;  $c_2 = 50$  e  $q = c_1 * \text{tripuls}(t - c_2, c2)$ . As Figs. (4.6)-(4.7) mostram respetivamente o fluxo de calor triangular, obtido pela solução híbrida e o perfil de temperatura da solução híbrida (4.2) considerando o fluxo com o pulso triangular.

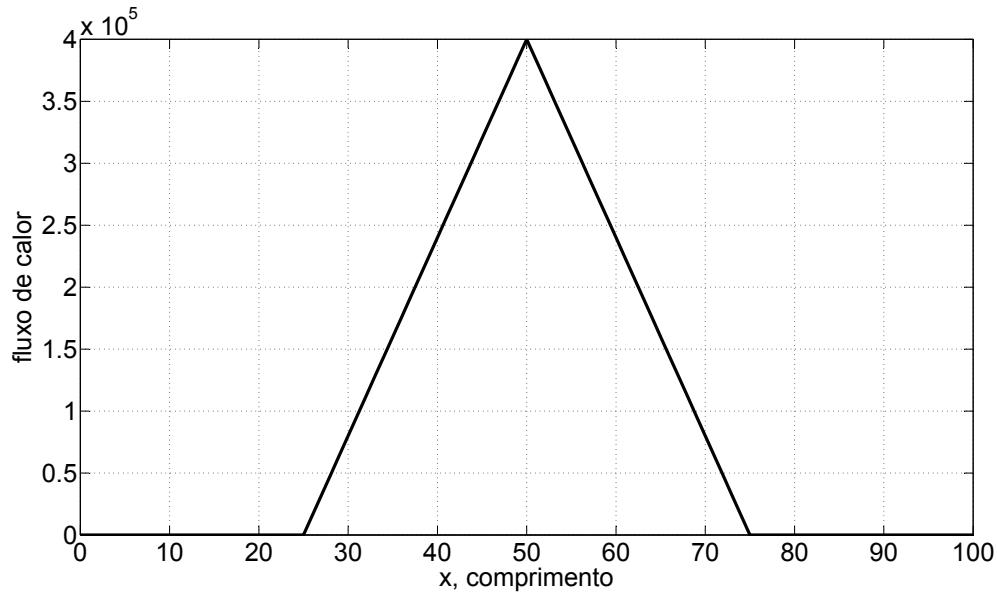


Figura 4.6: Fluxo de calor pulso triangular da solução híbrida.

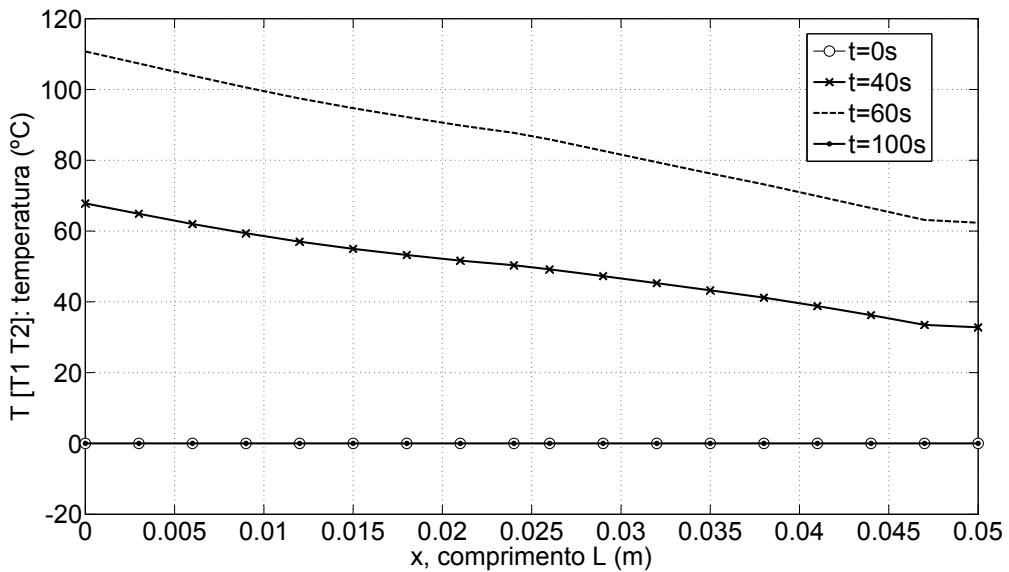


Figura 4.7: Temperaturas obtidas a partir do fluxo de calor pulso triangular.

Na seção seguinte mostra-se que se considerarmos as mesmas propriedades térmicas em

ambas camadas, isto é,  $\alpha_1 = \alpha_2$  e  $k_1 = k_2$  é possível verificar-se a solução do problema de dupla-camada  $X2C12$ .

## 4.3 Verificação da Solução o problema térmico X2C12

A verificação de soluções é necessária para garantir a consistência de soluções construídas de forma analítica ou códigos numéricos. A precisão das soluções em elementos finitos, volumes finitos e outros métodos para equações diferenciais parciais precisam ser assegurados, (BECK *et al.*, 2006) (RIBEIRO; OLIVEIRA; GUIMARÃES, 2014). A importância em se estudar e utilizar métodos de verificação está no estabelecimento de garantia de exatidão da solução calculada, como afirma (BECK *et al.*, 2006).

### 4.3.1 Verificação algébrica da solução $X2C12$

A verificação algébrica da solução  $X2C12$  é feita com base no problema térmico  $X22$ , ou seja, considerando  $M = 1$  na solução de dupla-camada, assume-me que as duas camadas possuem propriedades termofísicas iguais tornando o problema de dupla-camada em uma camada simples. Primeiramente, verifica-se a igualdade das normas dos problemas  $X2C12$  e  $X22$ , em seguida, mostra-se que os autovalores também são os mesmo em ambos problemas.

Mostrou-se no capítulo anterior o cálculo para obtenção da norma do problema  $X2C12$ , que é dado pela soma das integrais das autofunções referente a primeira e segunda camada, ou seja,

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{x1}^{x2} [X_{1n}(x')]^2 dx' + \int_{x2}^{x3} [X_{2n}(x')]^2 dx' \\ &= \int_0^b [\cos(\gamma x')]^2 dx' + \int_b^L \left\{ \left[ \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \right] \cos(\eta x') \right. \\ &\quad \left. + \left[ \cos(\gamma b) \sin(\eta b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \sin(\eta x') \right\}^2 dx' \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

$$X_1 = \cos(\gamma x) \quad (4.5a)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \left[ \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \right] \cos(\eta x) \\ &\quad + \left[ \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\eta} \right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \sin(\eta x) \end{aligned} \quad (4.5b)$$

Considerando  $M = 1$  na Eq. (4.4), e a relação dada pela Eq. (3.90), segue-se que  $k_1 = k_2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$  e  $\gamma = \eta$ . Assim substituindo essas informações nos coeficientes  $C$  e  $D$  que é dada pela Eq. (3.72) temos,

$$C = \cos(\gamma b) \cos(\gamma b) + \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\gamma} \right) \sin(\gamma b) \sin(\gamma b) = 1 \quad (4.6a)$$

$$D = \cos(\gamma b) \sin(\gamma b) - \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \left( \frac{\gamma}{\gamma} \right) \sin(\gamma b) \cos(\gamma b) = 0 \quad (4.6b)$$

Substituindo a Eq. (4.6) na autofunção  $X_2$  que é dada pela Eq. (4.5b), a autofunção  $X_2$  passa a ser definida por:

$$X_2 = 1 \cos(\eta x) + 0 \sin(\eta x) = \cos(\eta x) \quad (4.7)$$

E como visto,

$$X_1 = \cos(\gamma x) \quad (4.8)$$

Logo, as autofunções são algebricamente iguais, isto é,  $X_1 = X_2$ . Assim a norma passa a ser definida por:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{x_1}^{x_2} [X_{1n}(x')]^2 dx' + \int_{x_2}^L [X_{2n}(x')]^2 dx' \\ &= \int_0^b [\cos(\gamma x')]^2 dx' + \int_b^L [\cos(\gamma x')]^2 dx' \\ &= \int_0^L [\cos(\gamma x')]^2 dx' \end{aligned} \quad (4.9)$$

De acordo com (BECK, 1992) tem-se:

$$N_x = \int_0^L [\cos(\gamma x')]^2 dx' = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ L & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{L}{2} & \text{se } m = n \neq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Usando o princípio de ortogonalidade de funções (BECK, 1992) considerando ( $m = n \neq 0$ ) segue-se

$$N_x = \frac{L}{2} \quad (4.11)$$

Que por sua vez, é exatamente a mesma norma para o problema térmico  $X22$  (BECK, 1992). Com isso, mostra-se que as normas dos problemas térmicos  $X22$  e  $X2C12$  são algebricamente iguais.

Portanto, para concluir a verificação da solução, resta demostrar para o caso onde  $M = 1$  que os autovalores dos problemas térmicos  $X22$  e  $X2C12$  coincidem.

Observa-se que em problemas homogêneos do tipo  $X22$  onde a condição é de isolamento térmico em todas as superfícies, os autovalores são obtidos aplicando-se diretamente as condições de contorno na equação de Sturm-Liouville (ÖZIŞIK, 1993). Nestes casos, tem-se como condição de solução não trivial que  $\cos(\lambda_m) = 0$  e portanto os autovalores são determinados por

$$\lambda_m = m\pi \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Deve-se observar ainda que para o caso  $X22$ ,  $\lambda = 0$  também representa um autovalor (FERNANDES, 2009).

Considerando  $M = 1$  na equação transcendental que é dada pela Eq. (3.85) temos:

$$\tan(\gamma b) = -K \tan[\gamma(b - L)] \quad (4.13)$$

O procedimento para obtenção dos autovalores para o caso  $M = 1$ , é análogo ao problema  $X2C12$ , onde é considerado  $M = 2$ , que foi desenvolvido no capítulo anterior. Os autovalores para esse caso também são obtidos numericamente usando aproximações assintóticas como desenvolvido para o caso de duas camadas.

Com isso, apresenta-se na Fig. (4.8) o comportamento das assíntotas, e na tabela (4.3.1) a comparação entre os autovalores dos problemas térmicos  $X22$  e  $X2C12$ , observa-se, nesse caso, os autovalores do problema  $X2C12$  são exatamente  $m\pi$ .

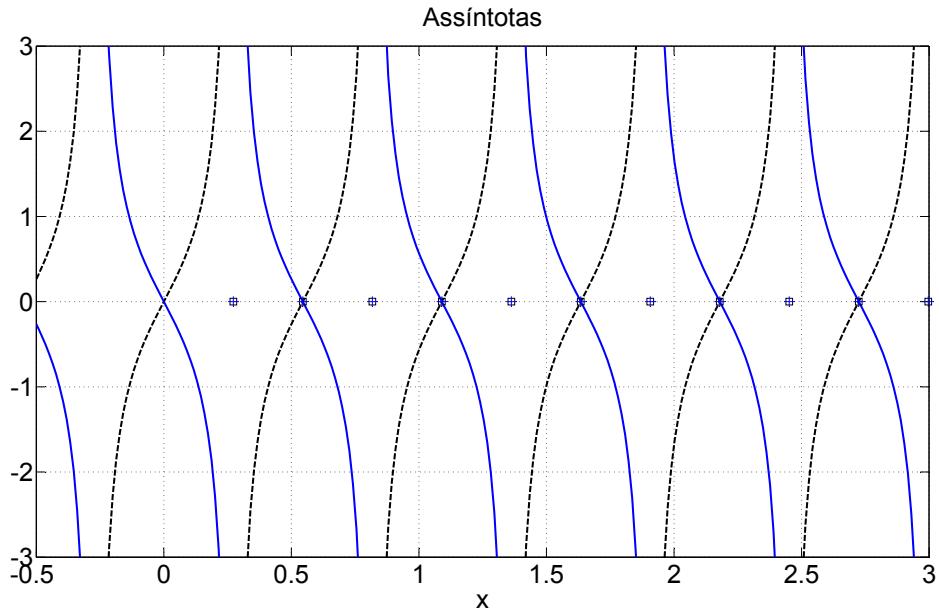


Figura 4.8: Representação gráfica das assíntotas considerando  $M = 1$ .

Tabela 4.3: Autovalores dos problemas térmicos  $X22$  e  $X2C12$ .

$m$	$X2C12$	$X22$
1	3.1415926535898	3.14159265358979
2	6.28318530717959	6.28318530717959
3	9.42477796076939	9.42477796076938
4	12.5663706143592	12.5663706143592
5	15.707963267949	15.707963267949
6	18.8495559215388	18.8495559215388
7	21.9911485751286	21.9911485751286
8	25.1327412287183	25.1327412287183
9	28.2743338823081	28.2743338823081

Observa-se também, que os autovalores do problema térmico  $X22$  são exatamente iguais aos autovalores do problema térmico  $X2C12$ .

Como visto anteriormente a solução para o problema térmico  $X22$  é dada por:

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t \int_0^L G(x, t|x', \tau) \frac{q(\tau)\delta(x' - 0)}{k} dx' d\tau \quad (4.14)$$

E considerando  $M = 1$  a solução do problema térmico  $X2C12$  é dada por:

$$T_{(1)}(x, t) = \alpha_{(1)} \int_0^t \int_0^L G_{(11)}(x, t|x', \tau) \frac{g_{(1)}(x', \tau)}{k_{(1)}} dx' d\tau \quad (4.15)$$

Conclui-se que as soluções da Eqs. (4.14)-(4.15) são matematicamente identicas o que verifica a solução do problema térmico  $X2C12$  do ponto de vista algébrico.

### 4.3.2 Verificação Intrínseca da solução $X2C12$

Podemos conceituar a verificação intrínseca como o processo de comparação entre duas soluções exatas obtidas por métodos diferentes ou de problemas diferentes mas que possuem o mesmo resultado numérico.

Por exemplo, compara-se duas soluções analíticas exatas que possuem geometrias distintas, ou seja, considera-se um problema térmico unidimensional de transferência de calor, denotado por  $X11$ , isto é, uma placa plana submetida condições de contorno de temperatura prescrita em ambas as extremidades e um outro problema, denotado por  $X10$ , cuja placa possui comprimento semi-infinito, é submetido a condição de contorno de temperatura prescrita em  $x = 0$ . Observa-se que os dois problemas possuem a mesma condição de contorno em  $x = 0$ . Assim, esses dois problemas podem ser verificados intrínsecamente, fazendo-se o tamanho da placa do problema  $X11$  ser grande o suficiente para que possa ser considerado de comprimento infinito.

O objetivo principal dessa seção é a verificação intrínseca da solução  $X2C12$ . Como mencionado, é preciso compara-lá com outra solução. Nesse caso, compara-se a solução analítica de dupla-camada  $X2C12$  com uma solução analítica de camada simples  $X22$  que já está verificada.

Como visto, a solução de dupla-camada  $X2C12$  é representada pela Fig. (4.1) onde a geometria analisada é composta por materiais distintos. Para fazer a verificação intrínseca da solução  $X2C12$  considera-se que ambas as camadas possuem as mesmas propriedades termofísicas. Nesse caso, as propriedades térmicas usadas são do material de aço.

A Fig. (4.9), apresenta o problema térmico transiente  $X22$  usado para fazer a verificação intrínseca da solução  $X2C12$ . Este é um problema clássico em condução de calor que é definido por uma placa submetida a um fluxo de calor  $q(t)$ , em  $x = 0$ , e condição de isolamento

térmico à superfície oposta,  $x = L$ .

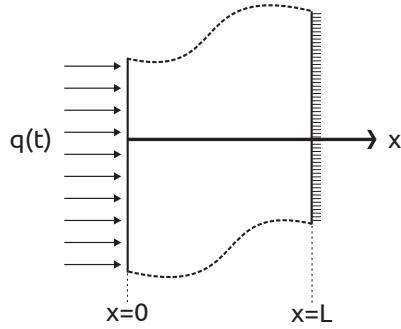


Figura 4.9: Problema térmico clássico: placa plana submetida a um fluxo de calor em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico na superfície oposta,  $x = L$ .

O desenvolvimento e procedimento para obtenção da solução desse problema encontra-se no capítulo anterior, e é dada pela Eq. (3.18). Para obter o perfil de temperatura desse problema, assim como no caso de dupla-camada, considera-se as propriedades térmicas do material aço e fluxo de calor prescrito,  $q(t) = 4 \times 10^5 [W/m^2]$ ; temperatura inicial,  $T_0 = 0[^{\circ}C]$ ; comprimento da placa,  $L = 5 \times 10^{-2}[m]$ . A Fig. (4.10) mostra o comportamento de ambas soluções ( $X2C12$  -  $X22$ ) ao longo do domínio, considerando um tempo de 50 segundos.

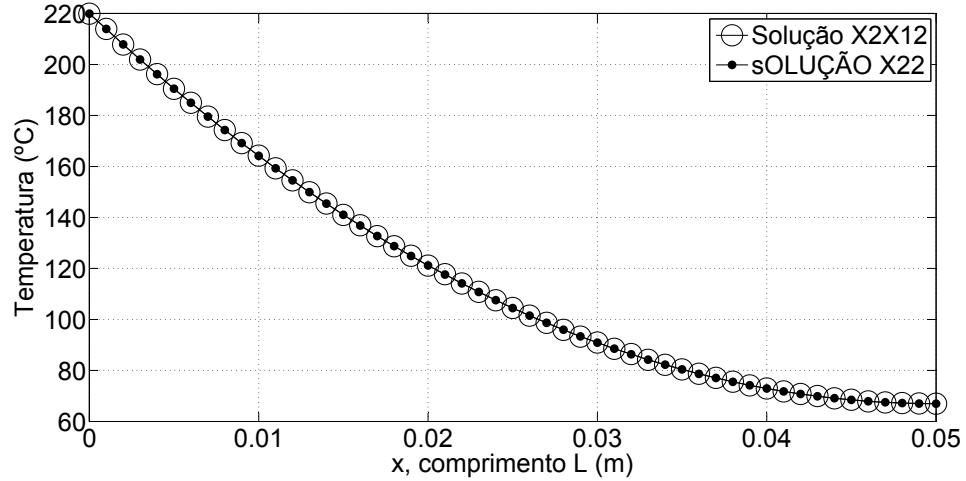


Figura 4.10: Perfil de temperatura dos problemas térmicos  $X2C12$  e  $X22$ .

Observa-se na Fig. (4.10) o ajuste no comportamento das duas soluções. Uma melhor visualização da diferença entre as duas soluções é apresentada na Fig. (4.11).

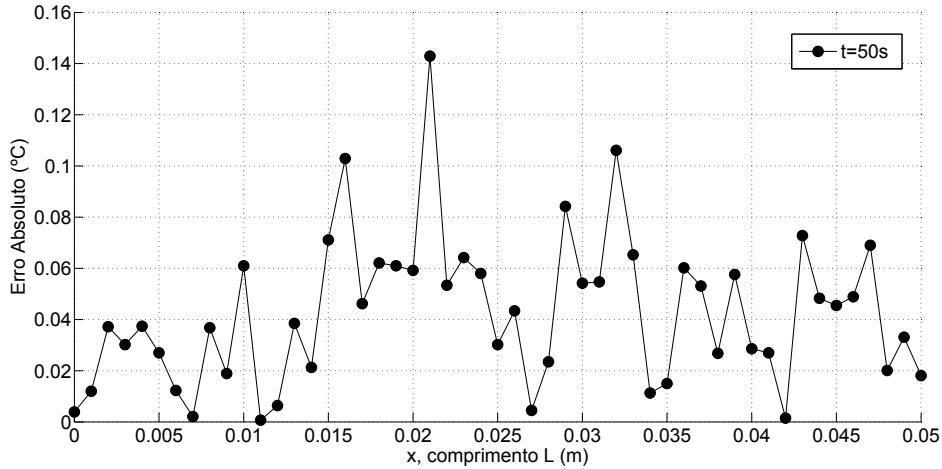


Figura 4.11: Erro absoluto entre os problemas térmicos  $X22$  e  $X2C12$  considerando as mesmas propriedades térmicas.

Observa-se que o erro máximo entre as duas soluções é menor que  $0,14(^{\circ}C)$ , o que apresenta  $0,04\%$ .

Uma outra maneira de verificar a solução analítica dupla-camada  $X2C12$  é compara-la com solução analítica obtida da literatura.

Apresenta-se essa comparação na próxima seção.

## 4.4 Comparações

As seções anteriores visam entender o comportamento térmico da solução (2.68) desenvolvida e obtida no capítulo anterior através do perfil de temperatura ao longo do comprimento do domínio. Observa-se que a solução analítica de dupla-camada  $X2C12$  é verificada a partir de um problema de camada simples, onde ambos problemas possuem as mesmas condições de contorno. O objetivo dessa seção é comparar a solução analítica  $X2C12$  com uma outra solução analítica desenvolvida por métodos distintos e que possuem a mesma condição de

contorno em ( $x = 0$ ). Apresenta-se, a comparação entre a solução do analítica  $X2C12$  com a solução analítica desenvolvida no trabalho de Rech, Battaglia & Moisan (2004).

#### 4.4.1 Comparações entre soluções analíticas

Como mencionado, essa seção tem por objetivo a comparação entre as soluções analíticas  $X2C12$  e outra solução obtida da literatura. O trabalho desenvolvido por Rech, Battaglia & Moisan (2004) trata-se de um problema unidimensional em regime transiente de duas camadas que está submetido a um fluxo de calor em uma das extremidades,  $x = 0$ , e na superfície oposta tem-se fluxo de calor por convecção. Observa-se que tanto a solução desenvolvida no trabalho de Rech, Battaglia & Moisan (2004) quanto a solução de dupla-camada desenvolvida no capítulo anterior, possuem a mesma condição de contorno em ( $x = 0$ ) (fluxo de calor), sendo então possível a comparação entre ambas soluções para determinadas condições temporais.

Os autores (RECH; BATTAGLIA; MOISAN, 2004) relatam a importância em obter-se a solução analítica devido a aplicabilidade da solução em ferramentas revestidas, usadas em um processo de torneamento. Os autores também modelam e quantificam a influência térmica de um revestimento sem considerar o efeito tribológico. Esse modelo térmico também considera apenas uma única camada de revestimento sobre a face da ferramenta de corte.

A obtenção da equação-solução analítica desenvolvida no trabalho de Rech, Battaglia & Moisan (2004) é obtida pelo método de transformada de Laplace. Os autores aplicam o método da transformada de Laplace na equação da difusão de calor na variável do tempo e obtem-se a formulação clássica em termos de quadripolos. Nesse caso, a solução analítica é dada em termos de resposta impulsiva que é calculada pelo método de função transferência, denotada por  $H_{1D}(s)$ .

Observa-se que as condições de contorno em ( $x = 0$ ) são as mesmas em ambos os problemas, mas, na outra extremidade tem-se condições de contorno diferentes. Como visto, o problema térmico  $X2C12$  tem isolamento térmico na superfície oposta, enquanto a solução desenvolvida no trabalho de Rech, Battaglia & Moisan (2004) possui fluxo de calor por convecção. Nesse caso, compara-se as duas soluções no contorno ( $x = 0$ ), esto é, para tempos pequenos.

Assim, a equação-solução para tempos pequenos desenvolvida por (RECH; BATTAGLIA; MOISAN, 2004) é dada pelo limite da função transferência, ou seja:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H_{1D}(s) = \frac{1}{\sqrt{k_1(\rho c p)}} \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (4.16)$$

Observe-se que a Eq. (4.16) é definida em função de  $s$ , isto é, no domínio da frequência.

Para obter-se a equação-solução para tempos pequenos em função do tempo é necessário aplicar a transformada de Laplace inversa e avaliar o limite da função transferência em função do tempo para tempos pequenos da Eq. (4.17), ou seja

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H_{1D}(s) = \frac{1}{\sqrt{k_1(\rho c p)}} \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k_1 \rho c p}} \quad (4.17)$$

Após transformar a solução analítica desenvolvida por Rech, Battaglia & Moisan (2004) obtida no domínio da frequência em função de tempo pode-se obter o perfil de temperatura. A solução dada pela Eq. (4.17) é implementada no *software* MATLAB (2012) e usa as mesmas características físicas e geométricas, isto é, condutividade térmica,  $k_1 = 23 [W/mk]$ ; difusividade térmica,  $\alpha_1 = 8 \cdot 10^{-6} [m^2/s]$ ; comprimento da placa,  $L = 3 \times 10^{-3}$  e  $\rho c p = \frac{k_1}{\alpha_1}$ .

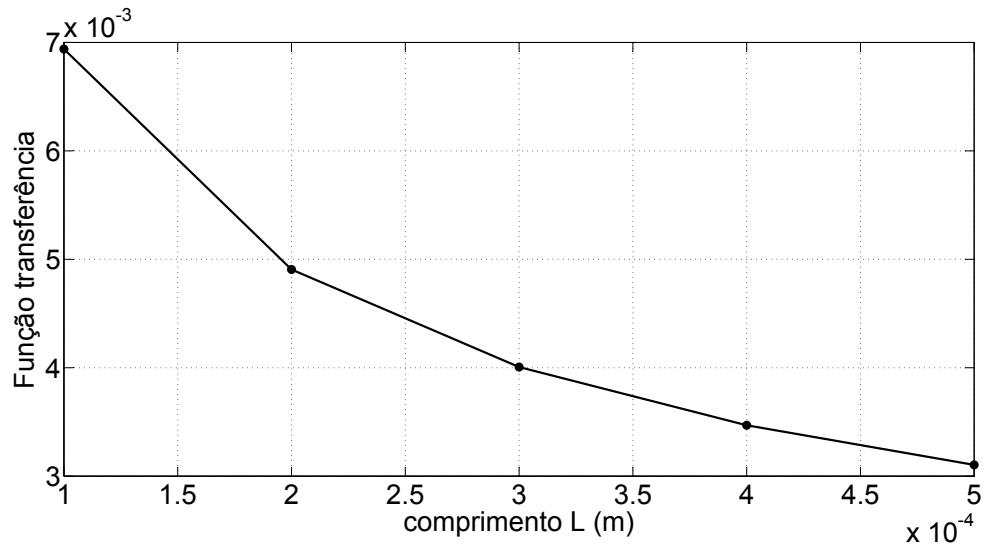


Figura 4.12: Função transferência desenvolvida por (RECH; BATTAGLIA; MOISAN, 2004) dada pela equação (4.17).

A Fig. (4.12) mostra o comportamento térmico da função transferência ao longo do comprimento da placa. Como a comparação entre as soluções analíticas (4.17)-(3.89a)-(3.89b) é apenas para tempos pequenos, a solução é observada no ponto  $x = 0$ .

A equação-solução analítica do problema térmico X2C12 referente a primeira camada

(T1) é dada pela por:

$$T_1(x, t) = \alpha_1 \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{11}(x, t|x', \tau) \frac{g_1(x', \tau)}{k_1} dx' d\tau \quad (4.18)$$

onde  $g_1(x', t) = g(x, t) = q(t)\delta(x - 0)$ .

Observa-se, a solução do problema X2C12 dada pela Eq. (4.18) está definida em função da temperatura, para poder comparar as duas soluções (4.17)-(4.18) é necessário a obtenção da função transferência, denotada por  $H$ , da solução (4.18). Observa-se, que a integral da função de Green com relação ao comprimento da placa (nesse caso é o comprimento da camada 1) vezes a função de dirac no ponto ( $x = 0$ ) dada na equação (4.18) é exatamente a função de Green do problema X2C122 no ponto ( $x = 0$ ), matematicamente isso quer dizer,

$$\int_0^b G_{(11)}(x, t|x', \tau) \delta(x' - 0) dx' = G_{(11)}(x, t|0, \tau)$$

Desta forma, a equação (4.18) pode ser re-escrita da forma:

$$T_1(x, t) = \alpha_1 \int_0^t G_{(11)}(x, t|0, \tau) \frac{q(\tau)}{k_1} d\tau \quad (4.19)$$

O procedimento para obtenção da função transferência encontra-se em (FERNANDES, 2013). Considera-se  $q(t) = \delta(t)$  na equação (4.19), assim, a função transferência é definida por:

$$H = \alpha_1 \int_0^t G_{(11)}(x, t|0, \tau) \frac{\delta(\tau)}{k_1} d\tau = \frac{\alpha_1}{k_1} G_{(11)}(x, t|0, \tau) \quad (4.20)$$

Substituindo a função de Green do problema X2C12 referente a primeira camada dada pela Eq. (3.26) na Eq. (4.20) a função transferência passa a ser definida por

$$H = \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_n} X_{1n}(x) X_{1n}(x') \quad (4.21)$$

A função transferência dada pela Eq. (4.21) é implementada no MATLAB (2012) e representada pela Fig. (4.13) com as mesmas características físicas e geométricas usadas na Eq. (4.17).

A Fig. (4.13) mostra o comportamento térmico da função transferência ao longo do comprimento da placa.

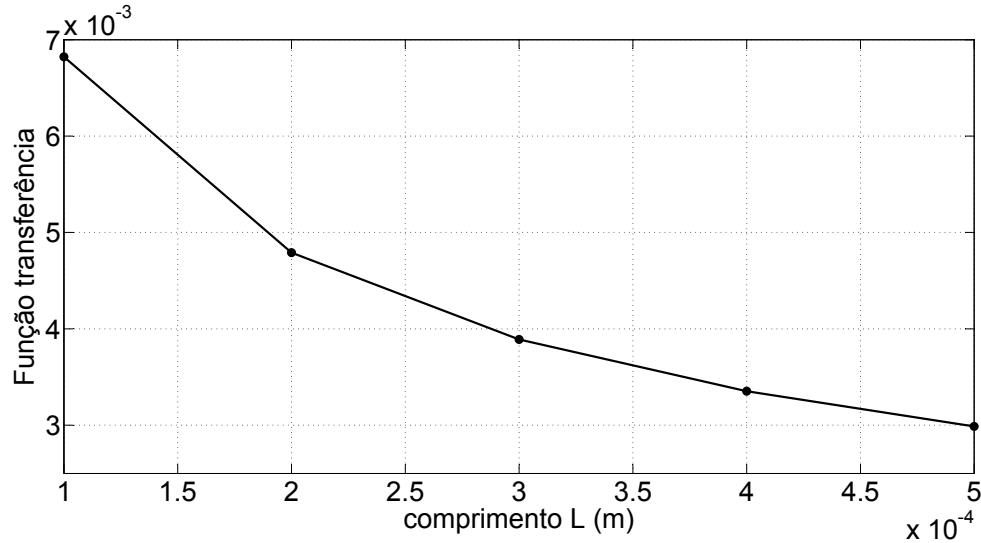


Figura 4.13: Função transferência do problema térmico X22.

Para um melhor entendimento e visualização das duas soluções (4.17)-(4.21) dadas respectivamente pelos gráficos (4.12)-(4.13) mostra na Fig. (4.14) a função transferência de ambas as soluções.

A Fig. (4.14) apresenta o comportamento térmico das funções transferência do problema desenvolvido por (RECH; BATTAGLIA; MOISAN, 2004) e do problema X2C12 ao longo do comprimento da placa. A seguir, mostra na Fig. (4.15) o erro máximo absoluto entre as duas soluções dada pelo gráfico (4.14).

Observa-se que o erro máximo obtido entre as duas soluções analíticas é de 0,0001( $^{\circ}C$ ) o que verifica as duas soluções.

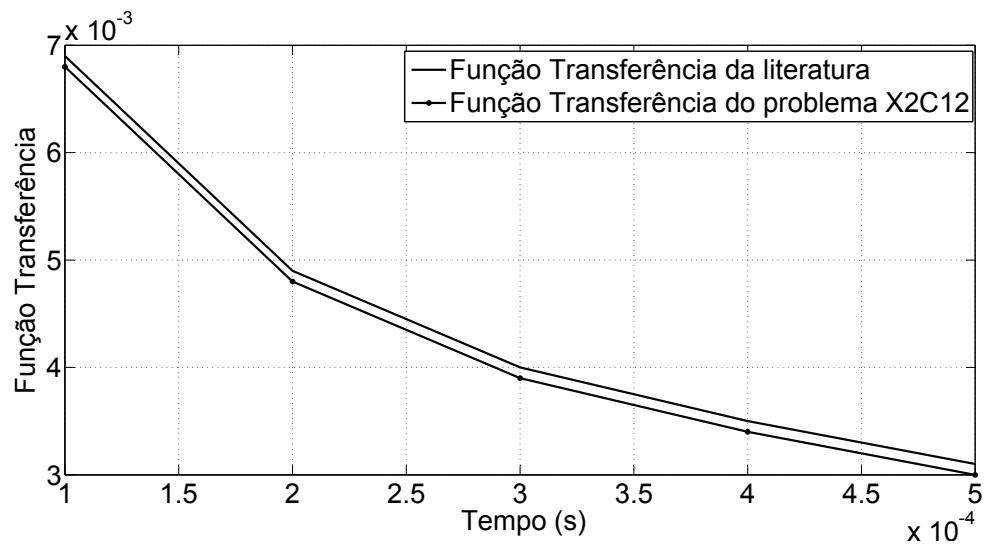


Figura 4.14: Função transferência do problema desenvolvido por (RECH; BATTAGLIA; MOISAN, 2004) e do problema *X2C12*.

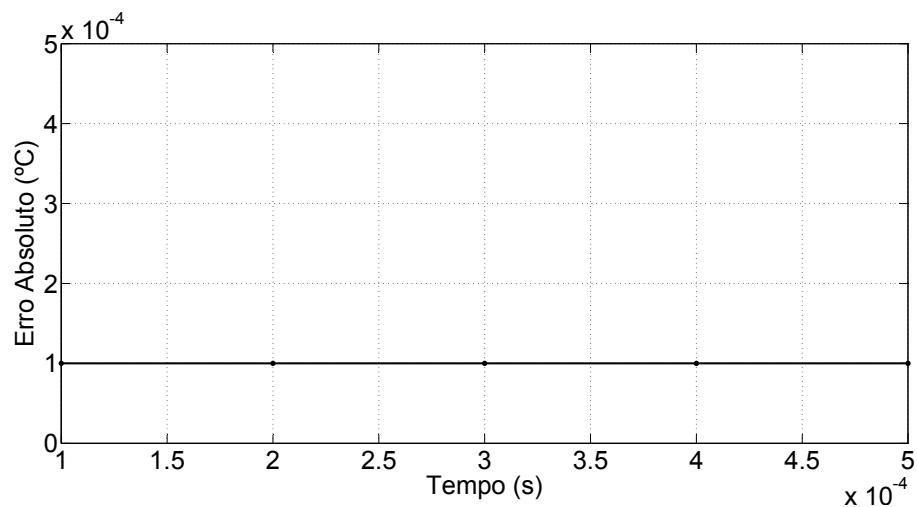


Figura 4.15: Erro absoluto entre as funções transferências dada pelo gráfico (4.14).

Apresenta-se na próxima seção uma comparação da solução analítica de dupla-camada X2C12 com uma solução desenvolvida numericamente usando o *software* comercial *COMSOL Multiphysics*.

## 4.5 Método analítico x Método numérico

Como mencionado, apresenta-se uma comparação entre a solução analítica e numérica de dupla-camada X2C12. A solução numérica é obtida pelo *software* COMSOL (4.3) usando uma malha extra-fina. O *COMSOL Multiphysics* é um software comercial de simulação para várias aplicações na física e engenharia baseado no método dos elementos finitos (MEF).

Na Fig. (4.16) é apresentada uma ilustração do problema térmico unidimensional de duas camadas para relatar as malhas disponíveis no *software* COMSOL (4.3), considerando a espessura da primeira camada muito fina, onde no intervalo entre zero e  $b$  tem-se a primeira camada e no intervalo entre  $b$  e  $L$  tem-se a segunda camada.

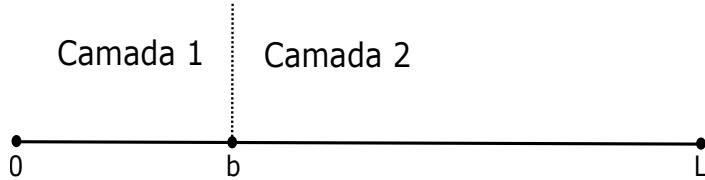


Figura 4.16: Problema térmico de duas camadas cuja primeira camada mede  $10\mu m$ .

Considera-se na Fig. (4.16), o comprimento da placa  $L = 0.030$  [mm] e a espessura da primeira camada  $10\mu m$  contido no intervalo zero e  $b$ . Assim, apresenta-se a seguir, as malhas disponíveis no *software* COMSOL (4.3) e o número de nós existentes em cada camada.

- Malha Normal: A malha normal possui 31 elementos (nós), onde, 30 nós são referente a segunda camada e apenas 1 nó referente a primeira camada, que possui espessura de ( $10\mu m$ ).
- Malha Fina: A malha fina possui 37 nós, onde, 36 nós são referente a segunda camada e novamente apenas 1 nó referente a primeira camada.
- Malha mais Fina: A malha mais fina possui 43 nós, onde, 42 nós são referente a segunda camada e 1 nó referente a primeira camada.

- Malha Extra-fina: A malha extra-fina possui 64 nós. Apesar de possuir um número maior de nós comparado com as outras malhas, essa malha também apresenta apenas 1 nó na primeira camada.

Observa-se que, como a primeira camada é muito fina ( $10\mu m$ ), as malhas pre-estruturadas do *software* COMSOL (4.3) refinam apenas a segunda camada.

A resolução do problema usando esse *software* pode ser resumida nos seguintes passos Fiqueiredo (2014):

- Seleção da dimensão espacial do problema;
- Inserção da física do problema;
- Seleção do tipo de estudo (transiente ou estacionário);
- Escolha da geometria a ser usada;
- Adição do tipo de material ao(s) domínio(s) do problema;
- Inserção das condições de contorno e iniciais do problema;
- Escolha da malha
- Cálculo;
- Apresentação dos resultados.

O objetivo principal dessa comparação é analisar ambas soluções quando tem-se a espessura da primeira camada fina. Em todos os casos mostrados a seguir considera-se 10 segundos de tempo de simulação.

Apresenta-se, a solução analítica e numérica X2C12 com as seguintes características físicas e geométricas: fluxo de calor prescrito,  $4 \times 10^5 [W/m^2]$ ; temperatura inicial,  $T_0 = 0 [^{\circ}C]$ ; comprimento da placa,  $L = 5 \times 10^{-2} [m]$ ; difusividade térmica da primeira camada,  $\alpha_1 = 97,1 \times 10^{-6} [m^2/s]$ ; difusividade térmica da segunda camada,  $\alpha_2 = 117 \times 10^{-6} [m^2/s]$ , condutividade da primeira camada,  $k_1 = 237 [W/mK]$  e condutividade da segunda camada,  $k_2 = 401 [W/mK]$ . Considera-se seis casos variando-se a espessura da primeira camada.

- Caso 1: Análise do comportamento térmico entre a solução  $X2C12$  analítica e numérica, considerando o comprimento da placa  $L = 5 \times 10^{-2} [m]$  e a espessura da primeira camada de  $0,025 [m]$ , isto é ( $b = L/2$ ), onde  $b$  é a divisão das camadas.

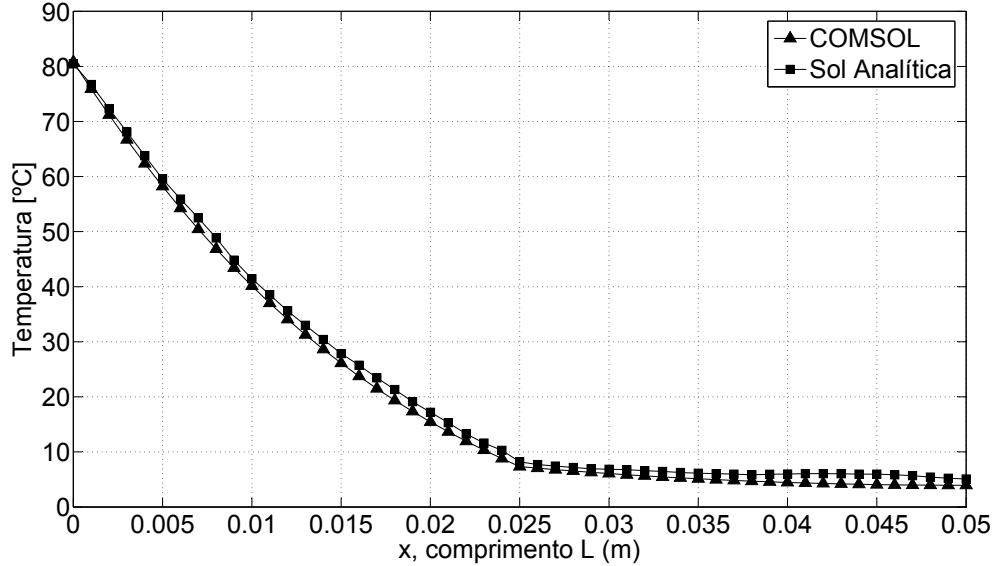


Figura 4.17: Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema  $X2C12$ , com espessura da primeira camada de  $b = L/2$ .

Observa-se na Fig. (4.17), que o comprimento da placa é dado por  $0,05[m]$  possuindo duas camadas delimitadas pelo ponto  $b = 0,025[m]$  ou  $b = L/2$ . Observa-se também, que ambas as soluções (análitica-numérica) apresentam o mesmo perfil de temperatura e aparentemente são as mesmas soluções. Para uma melhor visualização apresenta-se na tabela (4.4) o desvio entre as duas soluções na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/2$ ).

Tabela 4.4: Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema  $X2C12$  na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/2$ ).

Posições	$x = 0$	$b = L/2$
COMSOL	80,8047	7,3278
Solução Analítica	80,7041	7,7599
Diferença de Temperatura	0,1006	0,4321

Analizando a tabela (4.4) percebe-se que a diferença entre as duas soluções na superfície da camada ( $x = 0$ ) é de  $0.10[^{\circ}C]$  e na interface é de  $0.43[^{\circ}C]$ . No próximo caso mostra-se o perfil de temperatura entre ambas soluções, porém diminui a espessura da primeira camada.

- Caso 2: Análise do comportamento térmico entre as soluções *X2C12* analítica e numérica, considerando o comprimento da placa  $L = 5 \times 10^{-2}$  [m] e a espessura da primeira camada ( $b = L/4$ ), onde  $b$  é a divisão das camadas.

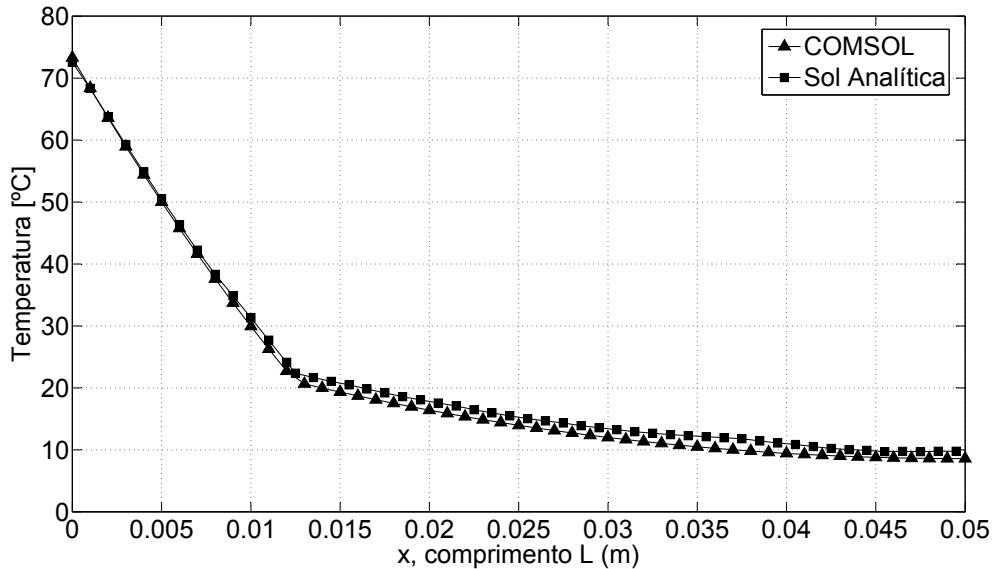


Figura 4.18: Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema *X2C12*, com espessura da primeira camada de  $b = L/4$ .

Como mencionado, nesse caso houve uma redução à espessura da primeira camada. Observando a Fig. (4.18) percebe-se que a interface das duas camadas é dada no ponto  $0,0125[m]$  ou  $b = L/4$ . Assim como no primeiro caso, na Fig. (4.18) mostra-se que ambas soluções são equivalentes ao longo do domínio. A tabela (4.5) apresenta o desvio entre as duas soluções.

Tabela 4.5: Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12 na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/4$ ).

Posições	$x = 0$	$b = L/4$
COMSOL	73, 2935	20, 9846
Solução Analítica	73, 4890	21, 4809
Diferença de Temperatura	0, 1955	0, 4963

Analizando os casos 1 e 2, percebe-se uma pequena diferença de temperatura na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/4$ ) que é menor que 0,5 [°C] podendo então garantir a equivalência entre ambas soluções.

Diminuindo ainda mais a espessura da primeira camada tem-se o perfil de temperatura apresentado na Fig. (4.19) e mostrado no próximo caso.

- Caso 3: Análise do comportamento térmico entre a solução X2C12 analítica e numérica, considerando o comprimento da placa  $L = 5 \times 10^{-2}$  [m] e a espessura da primeira camada de ( $b = L/8$ ), onde  $b$  é a divisão das camadas.

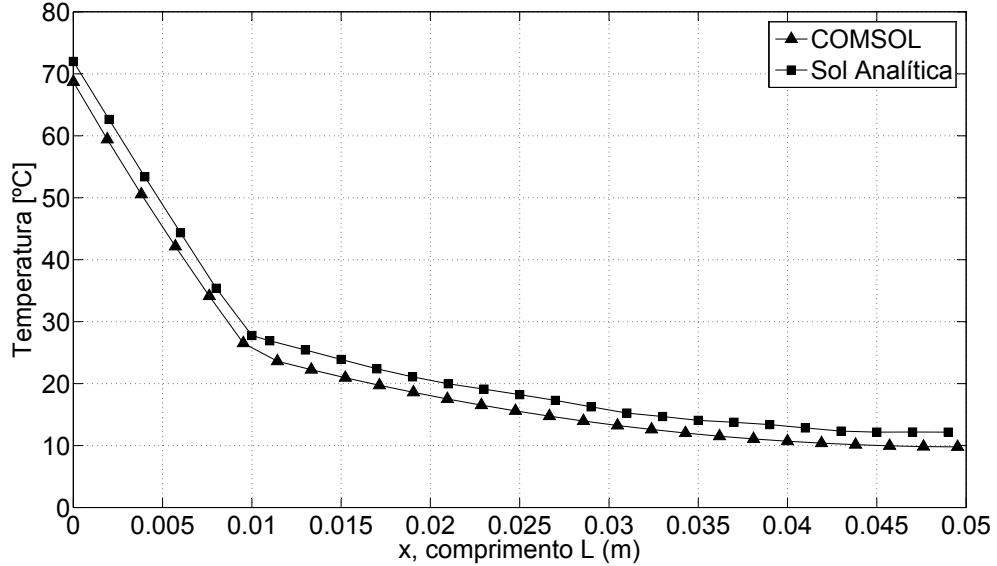


Figura 4.19: Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12, com espessura da primeira camada de  $b = L/8$ .

Observa-se que a solução numérica tem um comportamento de evolução com um certo “atraso” em relação a solução analítica. Isso se deve à característica finita da discretização do tempo, que nesse caso foi de  $\Delta t = 0,01[s]$ . Na tabela (4.6) apresenta-se o desvio entre ambas soluções.

Tabela 4.6: Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12 na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/8$ ).

Posições	$x = 0$	$b = L/8$
COMSOL	68,6918	24,6764
Solução Analítica	69,9998	25,8991
Diferença de Temperatura	1,3080	1,2227

A mesma divergência que percebe-se na Fig. (4.19), percebe-se também analisando a tabela (4.6). Nesse caso o desvio entre as duas soluções é de  $1,30[^{\circ}C]$  na superfície da camada ( $x = 0$ ) e de  $1,22[^{\circ}C]$  na interface ( $b = 0,006 [m]$ ) ou ( $b = L/8$ ).

Como mencionado, o objetivo dessa seção é analisar a solução analítica e numérica do problema X2C12 com diferentes tipos de espessura da primeira camada. Assim, apresenta-se o próximo caso uma redução de espessura ao analisado no caso 3.

- Caso 4: Análise do comportamento térmico entre as soluções X2C12 analítica e numérica, considerando o comprimento da placa  $L = 5 \times 10^{-2} [m]$  e a espessura da primeira camada de ( $b = L/16$ ), onde  $b$  é a divisão das camadas.

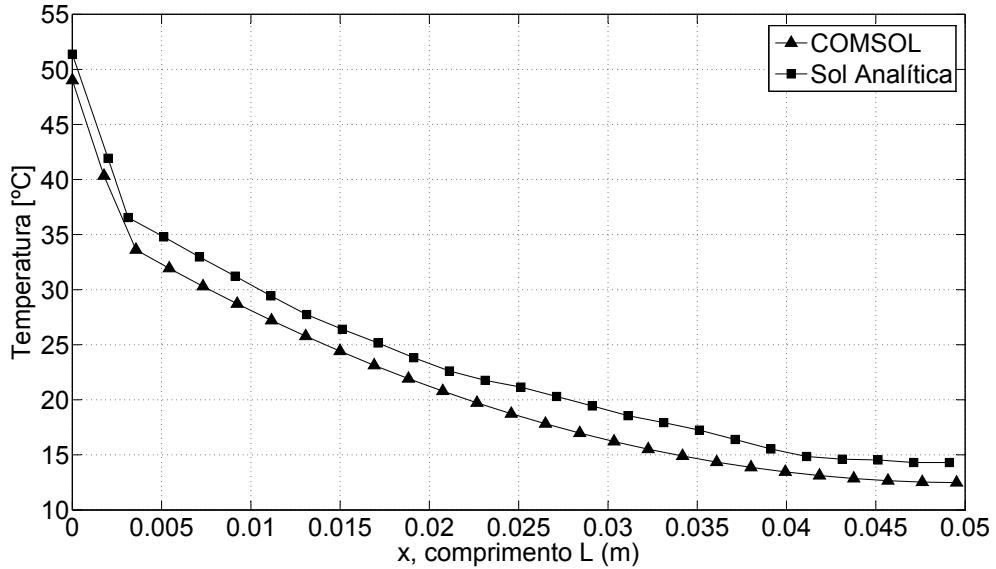


Figura 4.20: Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12, com espessura da primeira camada de 0.003[m] ou  $b = L/16$ .

Observando a Fig. (4.20) e comparando com a Fig. (4.19), mostrada no caso anterior, percebe-se novamente que a solução numérica tem um comportamento de evolução com um certo "atraso" em relação a solução analítica. Usou-se novamente uma discretização de  $\Delta t = 0.01 [s]$ . Da mesma forma, a tabela (4.7) mostra o desvio entre ambas soluções.

Tabela 4.7: Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12 na superfície da camada ( $x = 0$ ) e na interface ( $b = L/16$ ).

Posições	$x = 0$	$b = L/16$
COMSOL	49,0105	34,0521
Solução Analítica	51,0004	35,9989
Diferença de Temperatura	1,9899	1,9468

Nesse caso, houve um aumento na diferença entre as duas soluções, sendo, 1,98[°C] na superfície da camada ( $x = 0$ ) e 1,94[°C] na interface, como mostra a tabela (4.7). Pode-se observar, que a partir do caso que considerou-se a espessura da camada ( $b = L/8$ ) a solução analítica sempre apresenta um maior aumento de temperatura ao longo do domínio e novamente isso ocorre devido a discretização do método numérico. A

seguir mostra-se a diferença de temperatura considerando ( $b = L/32$ ) e ( $b = L/64$ ) respectivamente, para visualizar e entender essa divergência entre ambas soluções.

- Caso 5: Análise do comportamento térmico entre as soluções *X2C12* analítica e numérica, considerando o comprimento da placa  $L = 5 \times 10^{-2} [m]$  e a espessura da primeira camada de ( $b = L/32$ ), onde  $b$  é a divisão das camadas.

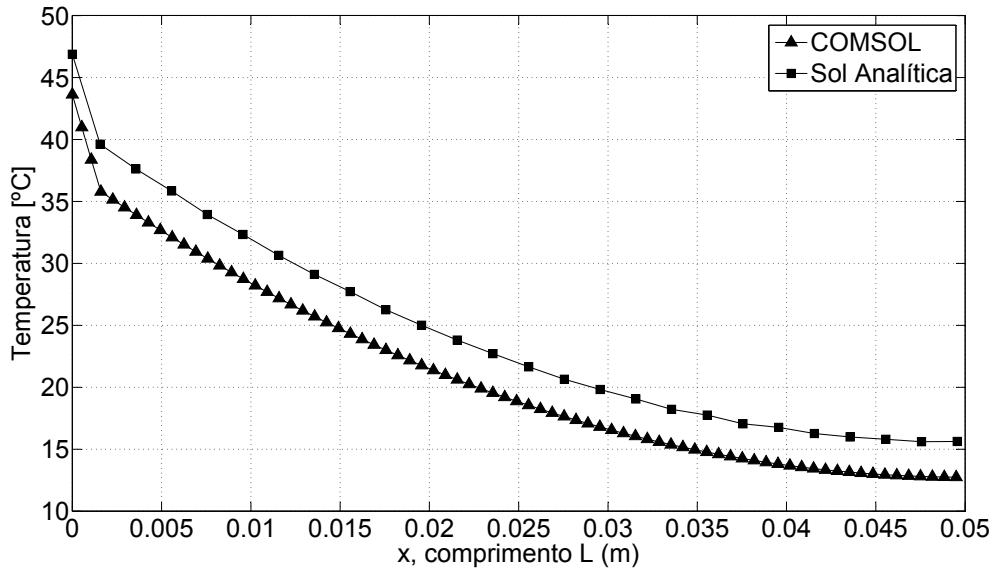


Figura 4.21: Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema *X2C12*, com espessura da primeira camada de  $b = L/32$ .

Observa-se a grande dificuldade em trabalhar com camadas finas usando o método numérico. Novamente, como nos casos 3 e 4 onde a espessura da primeira camada  $b = L/8$  e  $b = L/16$  respectivamente, consideramos agora a espessura da primeira camada  $0,0015 [m]$  ou ( $b = L/32$ ) tem-se novamente a divergência entre as soluções, onde a solução numérica mostrou um comportamento atrasado em relação a solução analítica, nesse caso a discretização foi igual aos casos anteriores. A tabela (4.8) apresenta o desvio entre as soluções.

Tabela 4.8: Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12 no instante inicial  $x = 0$  e na interface  $b = L/32$ .

Posições	$x = 0$	$b = L/32$
COMSOL	43,6246	35,7781
Solução Analítica	46,8785	37,8395
Diferença de Temperatura	3,2539	2,0614

Observa-se na tabela (4.8) que a diferença de temperatura foi menor na interface,  $2,06[^{\circ}C]$ , enquanto na superfície da camada ( $x = 0$ ),  $3,25[^{\circ}C]$ , novamente mostrou-se a divergência entre as soluções.

Pode-se concluir que, quanto mais se reduz a espessura da primeira camada, mais as soluções se tornam distantes e a solução numérica tem um comportamento com um certo atraso em relação a solução analítica. Para concluir essa afirmação mostra-se mais um caso em que a espessura da primeira camada é muito fina ( $b = L/64$ ).

- Caso 6: Análise do comportamento térmico entre a solução X2C12 analítica e numérica, considerando o comprimento da placa  $L = 5 \times 10^{-2}$  [m] e a espessura da primeira camada de (0.0007[m]) ou ( $b = L/64$ ), onde  $b$  é a divisão das camadas.

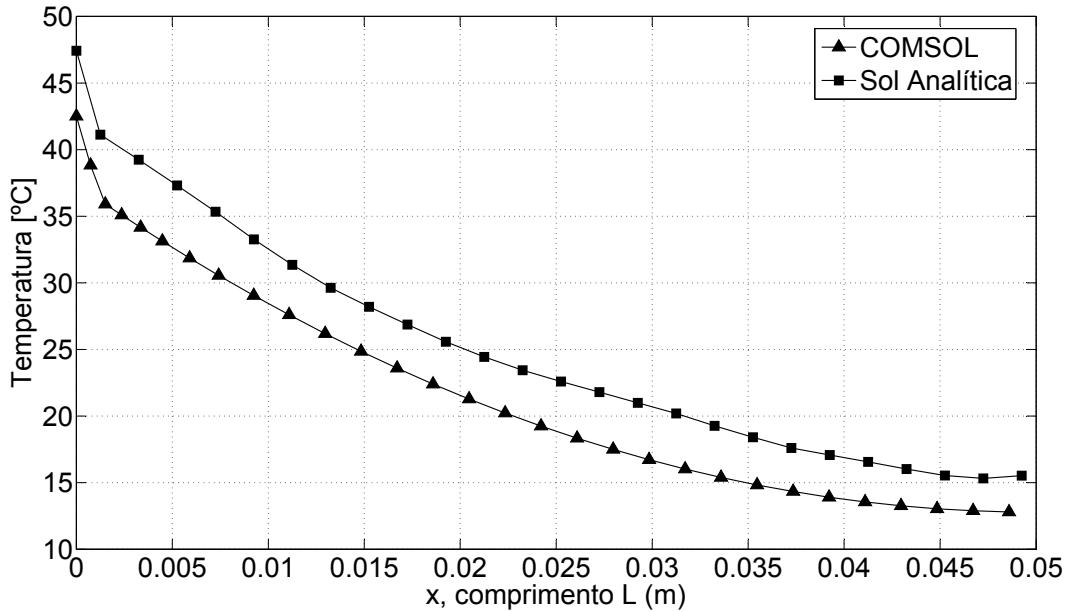


Figura 4.22: Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12, com espessura da primeira camada de  $b = L/64$ .

Note pela Fig. (4.22), que apesar das soluções possuirem o mesmo perfil de temperatura ao longo de todo o domínio, existe novamente uma grande diferença entre as soluções e da mesma forma que os casos mostrados anteriormente a solução analítica mostra um perfil de temperatura mais elevado que a solução numérica, assim a tabela (4.9) mostra o desvio entre as soluções.

Tabela 4.9: Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12 no instante inicial  $x = 0$  e na interface  $b = L/64$ .

Posições	$x = 0$	$b = L/32$
COMSOL	42,5035	36,1079
Solução Analítica	47,4215	41,1231
Diferença de Temperatura	4,9180	5,0152

Como mencionado, os valores encontrados nas tabelas (4.4)-(4.5) mostram que as temperaturas na superfície da camada no ponto ( $x = 0$ ) e nas interfaces ( $b = L/2$  [m]) e

( $b = L/4$  [m]) são equivalentes entre as duas soluções (analítica e numérica), porém, os resultados apresentados nas Figs. (4.19)-(4.20)-(4.21)-(4.22) mostram uma discrepância entre as soluções, como mostra os respectivos desvios nas tabelas (4.6)-(4.7)-(4.8)-(4.9).

Observa-se que nos casos considerados acima, usou-se uma malha extra fina. Além dessas malhas fornecidas pelo software COMSOL (4.3) automaticamente, é possível refinar a malha de forma manual. Refinando manualmente a malha considerada no caso 6 (que é o que apresenta uma camada menor com relação aos outros casos) percebe-se que a solução tem exatamente o mesmo comportamento térmico.

Na Fig. (4.23) mostra-se a solução de duas camadas numericamente considerando 1 elemento (malha fornecida pelo COMSOL e usada nos casos anteriores) e 2 elementos (refino manual) na primeira camada.

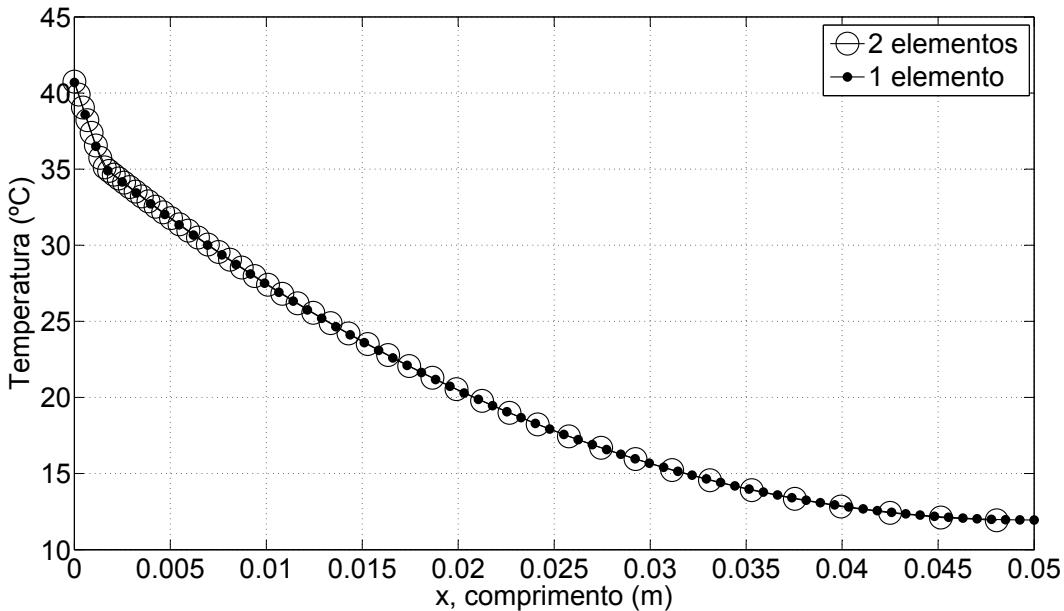


Figura 4.23: Malhas fornecida pelo COMSOL automaticamente e refinada manualmente com espessura da primeira camada de  $b = L/64$ .

Observa-se que mesmo refinando a malha considerando agora 2 elementos na primeira camada, a solução é a mesma. Além disso a solução apresentou um tempo computacional de 19 minutos e 7 segundos, considerado um tempo alto comparado com a solução analítica, que no caso foi de 5 segundos.

Com o objetivo de melhorar a solução numérica refina-se ainda mais a malha. A Fig. (??)

apresenta 3 casos de refino de malha.

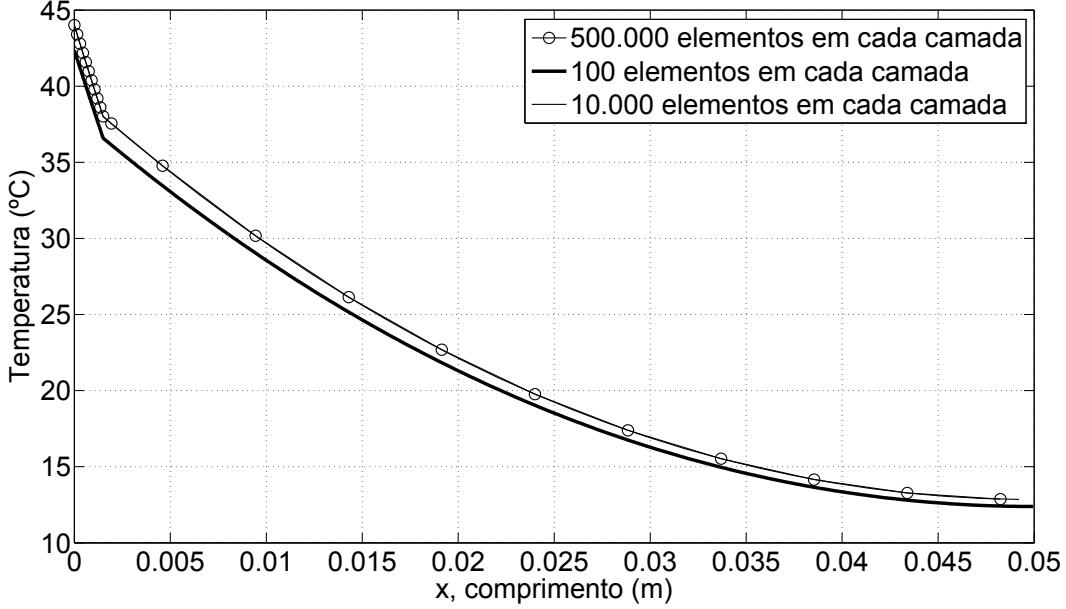


Figura 4.24: Malhas refinadas manualmente com espessura da primeira camada de  $b = L/64$ .

Primeiramente, refinou-se a malha considerando 100 elementos na primeira e segunda camada respectivamente, como mostra a (Fig. (??)), e novamente a solução numérica mostrou-se exatamente a mesma apresentada na Fig. (4.23), nesse caso a solução numérica apresentou um tempo computacional de 19 minutos e 16 segundos. Refinando ainda mais as camadas, considerando então 10.000 elementos em cada camada, percebe-se que a solução numérica teve um aumento de temperatura (Fig. (??)) chegando mais próxima da solução analítica, com um tempo computacional de 21 minutos e 4 segundos. Com o objetivo de aproximar ainda mais as duas soluções, refina-se novamente as camadas. Considera-se agora 500.000 elementos em cada camada, isto é 1.000.000 de elementos no total, analisando a Fig. (??) percebe-se a convergência de malha, pois, mesmo refinando a malha, a solução passa a ser a mesma de quando considerados 10.000 elementos. Nesse caso o tempo computacional gasto foi de 21 minutos e 24 segundos.

Conclui-se com essas análises que para atingir a convergência de malha foi necessário 10.000 elementos em cada camada.

A Fig. (4.25) apresenta novamente o caso 6, onde a espessura da primeira camada é de (0.0007[m]) ou ( $b = L/64$ ) considerando agora o refino de malha de 10.000 elementos em

cada camada.

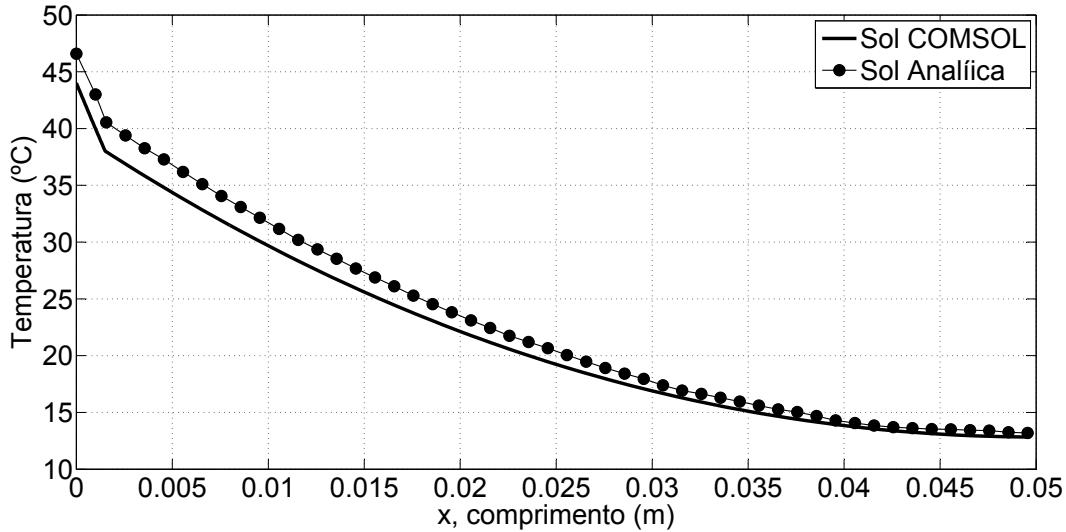


Figura 4.25: Perfil de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12, com espessura da primeira camada de  $b = L/64$  e um refino de malha de 10.000 elementos em cada camada.

Percebe-se na Fig. (4.25) que a solução numérica ficou mais próxima da analítica, mas ainda apresenta um desvio entre as duas soluções.

A Tab. (4.10) mostra o desvio entre as duas soluções.

Tabela 4.10: Diferença de temperatura entre as soluções analítica e numérica do problema X2C12 no instante inicial  $x = 0$  e na interface  $b = L/64$ .

Posições	$x = 0$	$b = L/32$
COMSOL	44,9130	38,1893
Solução Analítica	47,4215	41,1231
Diferença de Temperatura	2,5085	2,9338

Observa-se que a diferença de temperatura tanto na superfície em ( $x = 0$ ) quanto na interface ( $x = b$ ) é de aproximadamente 5%.

A partir dessas análises consideradas acima, pode-se perceber a grande importância em

obter-se uma solução analítica. A solução analítica mostrou-se confiável e com um tempo de processamento muito pequeno comparada com a solução numérica. Nesse tipo de casos, a solução analítica mostrou-se uma grande alternativa.

A diferença que existe entre as soluções apresentadas analiticamente e numericamente, é devido as limitações do método numérico, dentre várias limitações pode-se citar por exemplo:

- Precisão finita do computador;
- O processo de discretização do problema é feito por aproximações;
- A discretização do método numérico é finita.

A representação numérica realizada por *hardware* de computadores é dada por um subconjunto do conjunto dos números reais, isso devido a sua precisão de representação, este fato torna este subconjunto um conjunto finito, por esse motivo as operações usuais realizadas no cálculo diferencial são obtidas por aproximações.

Um elemento qualquer desse subconjunto finito é representado por um número da forma  $x = (-1)^s \cdot (0, d_1, d_2, \dots, d_n) \cdot b^e$  onde  $s, b, e, d_1, d_2, \dots, d_n$  que são respectivamente o sinal (zero se positivo e um se negativo), base, expoente e o número de dígitos para representação Viana (2004), em caso de uma representação com precisão simples  $n = 23$  e para precisão dupla  $n = 52$ .

No processo de cálculo numérico de derivadas de uma equação diferencial, um dos seus passos é realizar a discretização, que consiste em transformar e aproximar um problema infinito-dimensional em um problema finito-dimensional, através de um procedimento matemático Rade (2011). Os erros de discretizações podem ser reduzidos por meio de interpolação mais precisa, ou, aproximações para regiões menores, mas, isso geralmente aumenta o tempo e custo para obtenção da solução (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Porém, o cálculo analítico das derivadas de um problema físico, descrito no capítulo anterior, consiste em calcular o limite descrito abaixo:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{T(x) - T(a)}{x - a} \quad (4.22)$$

onde,  $x$  e  $a$  pertencem ao conjunto dos números reais, isto é, em um método de solução analítica é possível fazer  $x \rightarrow a$  tão próximo quanto se queira, pois para qualquer intervalo  $[a, b] \in \mathbb{R}$  existem infinitos elementos, o que não ocorre no cálculo realizado de forma discreta.

Dessa forma, pode-se concluir, que no caso de camada muito fina o método numérico apresenta diferenças do método analítico devido a precisão finita de *hardware*. Assim, a

solução analítica apresentada no capítulo anterior é de grande importância para esse tipo de situação por mostrar robustes, confiabilidade e exatidão.

# Capítulo 5

## Análise do comportamento térmico em Ferramentas Revestidas

### 5.1 Introdução

Como já mencionado, uma das motivações deste trabalho é o estudo do comportamento térmico de ferramentas revestidas usadas em processos de usinagem. Investiga-se aqui o comportamento térmico de ferramentas revestidas com três tipos de revestimento: cobalto (Co), nitrôto de titânio (TiN) e óxido de alumínio ( $Al_2O_3$ ) sobre uma ferramenta (substrato) de metal duro (Carboneto de tungstenio). Várias espessuras de revestimento são testadas num modelo térmico unidimensional transiente proposto para um material composto de duas camadas, obtido analiticamente no capítulo 3. Um fluxo de calor constante simula o calor gerado na interface ferramenta-peca-cavaco e é imposto nas ferramentas revestidas e não revestidas. O efeito da presença do revestimento pode então ser calculado através da análise da evolução da temperatura na interface de corte (superfície do revestimento) em contato com o fluxo de calor imposto e da evolução da temperatura na interface entre o substrato (ferramenta) e o revestimento.

## 5.2 Importância do uso do Revestimento em Ferramenta de corte

O estudo do comportamento térmico e mecânico são extremamente importantes nos processos de fabricação. As ferramentas são fundamentais para o sucesso de qualquer processo de fabricação tanto do ponto de vista de qualidade final do material acabado quanto do ponto de vista econômico que ocupa na cadeia produtiva. A evolução tecnológica da produção de ferramentas levou ao desenvolvimento e a aplicação de revestimentos nas ferramentas facilitando o corte por atrito através da atuação nos mecanismos tribológicos. Com o avanço na tecnologia da técnica de deposição de revestimentos pela indústria, tem havido um grande crescimento em aplicações industriais automotivas, aerospaciais e no setor de ferramentas de precisão (DU; LOVELL; WU, 2000). Uma das principais funções dos revestimentos é proporcionar um menor desgaste da ferramenta. As características de isolamento térmico é outro efeito desejado.

Nos dias atuais, praticamente todas as ferramentas de corte são revestidas graças ao efeito de melhorias nos processos de fabricação. Rech et al, 2004 afirma que 80% de todas as operações de usinagem são realizadas com ferramentas revestidas. Nesse caso, são dois os motivos principais:

- i) o efeito tribológico dos revestimentos que permitem um corte com menor desgaste e portanto com um menor atrito proporcionando uma maior vida ás ferramentas e;
- ii) o efeito de barreira térmica que os revestimentos apresentam uma vez que o contato entre peça-ferramenta-cavaco acontece no revestimento e não no material base da ferramenta.

Este capítulo busca analisar, especificamente o efeito térmico desse revestimento sem considerar, todavia, o efeito tribológico.

Na indústria, as ferramentas de corte, por exemplo, quase todas são revestidas com camadas finas de carboneto de titânio (TiC), carbonitreto de titânio (TiCN), nitreto de titânio (TiN) e óxido de alumínio ( $Al_2O_3$ ) que proporcionam um menor desgaste, com características de isolamento térmico. Ambas as combinações desses revestimentos são depositados em metal duro ou aço de alta velocidade (DU; LOVELL; WU, 2000). Normalmente, a espessura das camadas de revestimento pode variar entre  $4\mu m$  e  $12\mu m$  (MACHADO *et al.*, 2011).

O revestimento de ferramentas de metal duro ganhou uma importância muito grande, pois tal revestimento pode garantir um desempenho bem superior a ferramenta sem revestimento na usinagem de materiais ferrosos, sendo estes os materiais mais usados na indústria mecânica (MACHADO *et al.*, 2011).

O objetivo do presente capítulo, é propor uma análise da influência térmica na interface

ferramenta/revestimento. Para realizar essa análise considera-se uma ferramenta de metal duro ISO K 10 cujas propriedades térmicas se encontram na tabela (5.1). Como mencionado considera-se também três tipos de revestimentos com diferentes espessuras. O objetivo dessa análise térmica é verificar os parâmetros termofísicos e geométricos envolvidos na análise, possibilitando uma melhor distribuição da temperatura na interface ferramenta/revestimento, diminuindo os desgastes presentes nesse processo e visando aumentar a vida útil da ferramenta.

### 5.3 Análise Térmica em Ferramentas Revestidas

Para a análise da influência térmica de revestimentos será considerado uma ferramenta de metal duro ISO K 10 como material base, com  $3mm$  de espessura e tres tipos de revestimento: cobalto (Co), nitrêto de titânio (TiN) e óxido de alumínio ( $Al_2O_3$ ). A Tabela (5.1) apresenta as propriedades térmicas destes materiais, que encontram-se, respectivamente em, (Brito *et al.* (2009), Rech, Battaglia & Moisan (2004) e Du, Lovell & Wu (2000)).

Baseando-se nos diversos revestimentos encontrados na indústria, este trabalho investigará o comportamento de ferramentas revestidas com espessura de  $1, 2, 5, 10$  e  $20\mu m$ .

Tabela 5.1: Propriedades termofísicas da ferramenta e dos revestimentos de TiN, Cobalto e  $Al_2O_3$ .

Propriedades	Ferramenta	TiN	Co	$Al_2O_3$
$\alpha \times 10^{-5} [m^2/s]$	4,36	0,7	2,66	0,76
$k [W/mK]$	130	21	99,2	36

Um fluxo de calor constante  $q = 25 \times 10^5 [W/m^2]$  será imposto na superfície de ambas as amostras revestidas e nao revestidas. Esta magnitude foi escolhida de forma a produzir na interface temperaturas da ordem de 450 a 1000K encontradas em um processo real de corte ortogonal. Evidente que em um processo de torneamento o fluxo de calor imposto é extremamente maior devido a área de contato ser da ordem de  $10^{-6}mm^2$ .

A Fig. (5.1) ilustra a temperatura na face de corte da ferramenta revestida (T1), na interface entre o revestimento e o material base (T2) e na face de corte da ferramenta de metal base, sem revestimento.

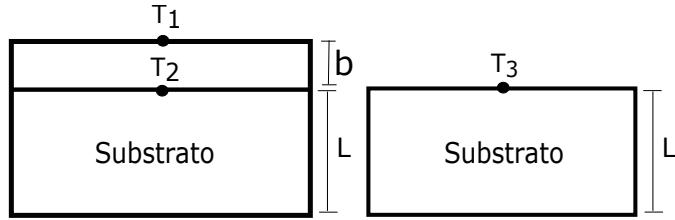


Figura 5.1: Temperatura na face de corte da ferramenta revestida ( $T_1$ ), na interface entre o revestimento e o material base ( $T_2$ ) e na face de corte da ferramenta de metal base, sem revestimento

A Fig. (5.2) mostra o perfil de temperatura da ferramenta não revestida e dos três tipos de ferramentas de revestimento, ao longo do domínio para um instante de 10s. Este tempo foi escolhido por ser representativo de um processo de corte ortogonal. Evoluções de temperatura com o tempo são mostradas a seguir.

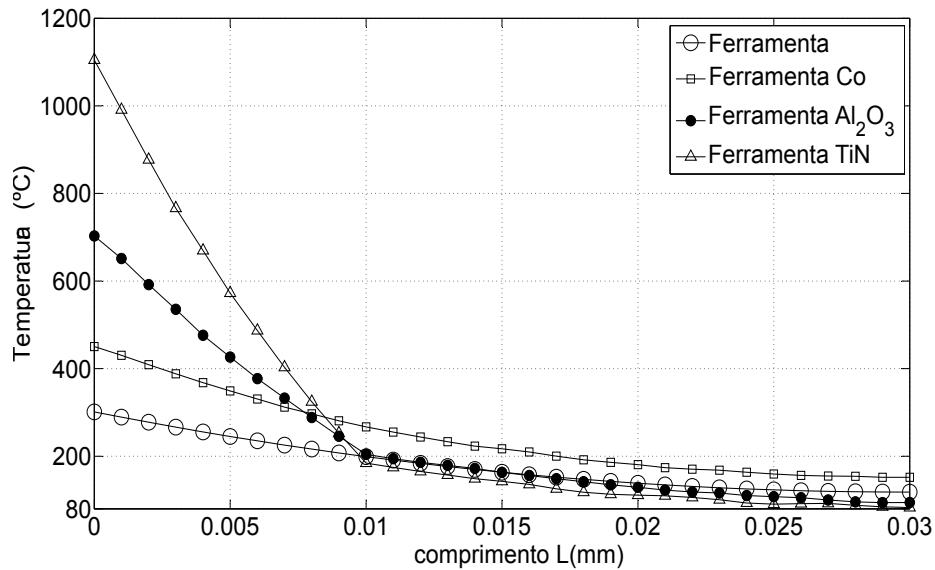


Figura 5.2: Análise térmica entre ferramenta não revestida e ferramenta revestida com três tipos de revestimento distintos, considerando um fluxo de calor de  $q = 25 \times 10^5$  e time=10s

Observa-se que as diferenças de comportamento térmico entre a ferramenta não revestida

e as ferramentas revestidas são mais acentuadas na região do revestimento. Esta diferença, no entanto, diminui bastante ao aproximar-se do material base da ferramenta.

Nas Figs. (5.3)-(5.4)-(5.5) este comportamento é melhor observado.

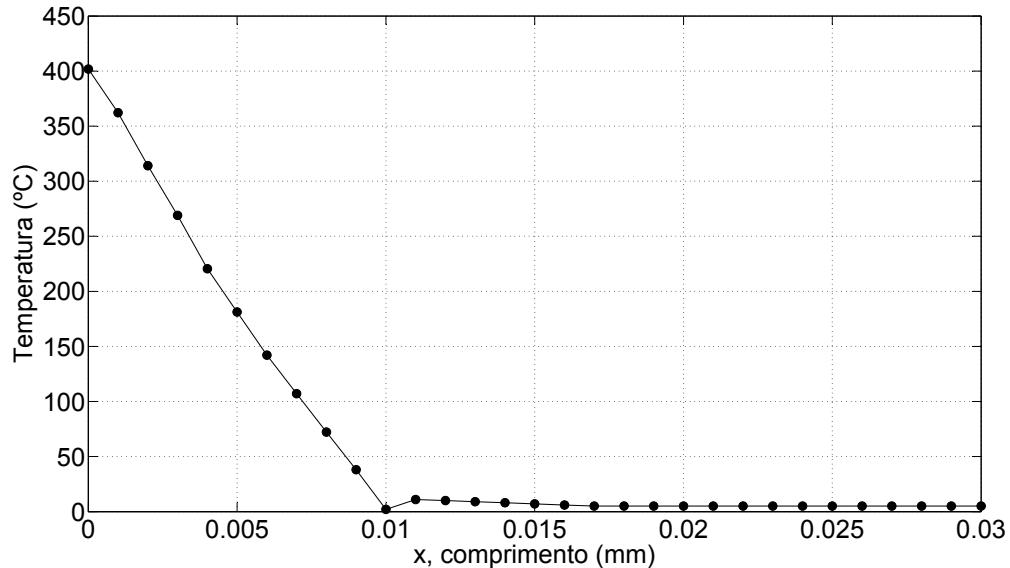


Figura 5.3: Diferença de temperatura entre ferramenta não revestida e com revestimento  $Al_2O_3$ .

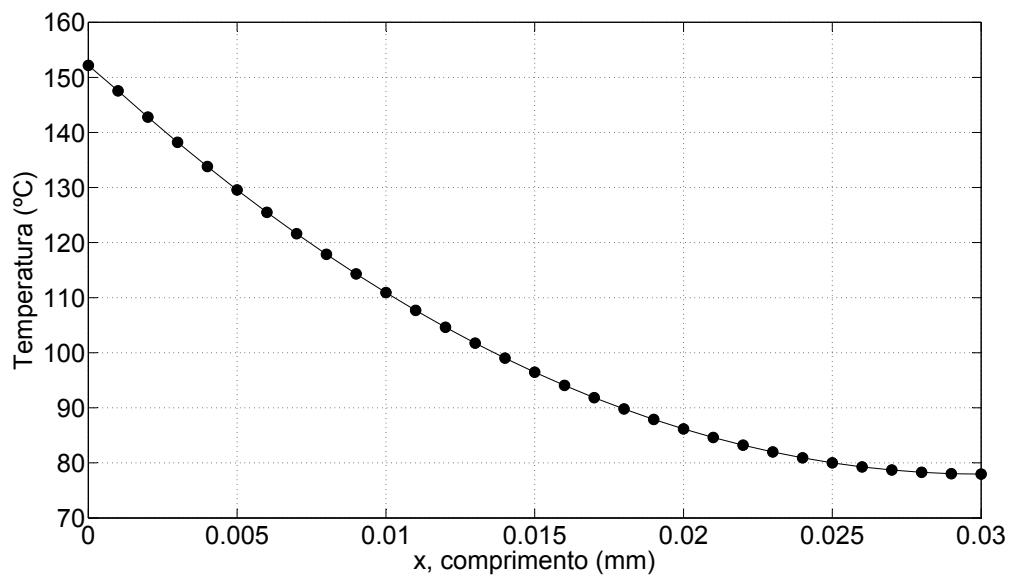


Figura 5.4: Diferença de temperatura entre ferramenta não revestida e com revestimento de cobalto.

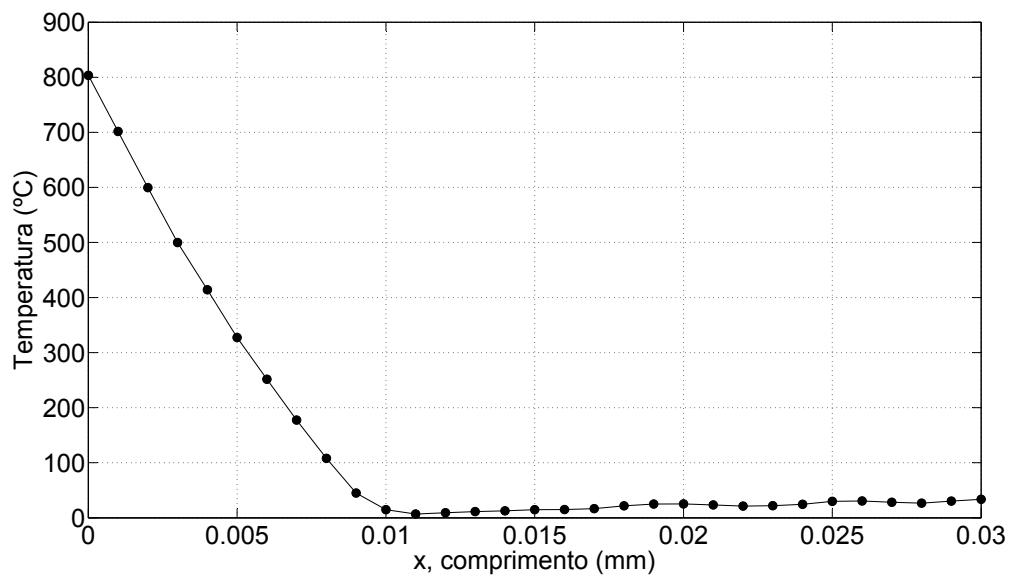


Figura 5.5: Diferença de temperatura entre ferramenta não revestida e com revestimento de TiN.

As Tabelas (5.2)-(5.3)-(5.4) apresenta as temperaturas que simulam a interface de corte ( $x=0$ ) para as ferramentas revestidas e não revestidas. Além disso, para efeito de comparação apresenta-se tambem a temperatura na interface entre revestimento e o substrato nas ferramentas revestidas com vários tipos de espessuras de revestimento.

Tabela 5.2: Comparaçao entre as temperaturas da ferramenta de metal duro e a ferramenta revestida de Co para diferentes espessuras de revestimento em um tempo de 10s.

Espessuras de revestimento	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_3 - T_2$	$100x(T_3 - T_2)/T_3$ %
1um	395,1	297,8	300,3	3,1	0,8
2um	399,6	292,9	300,3	7,4	2
5um	432,4	287,3	300,3	13,0	4
10um	460,2	280,1	300,3	20,2	6
20um	478,9	252,3	300,3	48,0	15

Tabela 5.3: Comparaçao entre as temperaturas da ferramenta de metal duro e a ferramenta revestida de  $Al_2O_3$  para diferentes espessuras de revestimento em um tempo de 10s.

Espessuras de revestimento	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_3 - T_2$	$100x(T_3 - T_2)/T_3$ %
1um	382,8	276,5	300,3	23,8	7
2um	422,58	269,6	300,3	30,7	10
5um	489,2	255,8	300,3	44,5	14
10um	703,0	217,2	300,3	83,1	27
20um	792,6	198,5	300,3	101,8	33

Tabela 5.4: Comparação entre as temperaturas da ferramenta de metal duro e a ferramenta revestida de TiN para diferentes espessuras de revestimento em um tempo de 10s.

Espessuras de revestimento	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_3 - T_2$	$(100 \times T_3 - T_2) / T_3 \%$
1 $\mu$ m	724,2	271,4	300,3	28,9	9
2 $\mu$ m	784,8	256,8	300,3	43,5	14
5 $\mu$ m	836,4	220,2	300,3	80,1	26
10 $\mu$ m	1104,6	198,5	300,3	102,1	34
20 $\mu$ m	1200,8	174,3	300,3	126,0	41

Observa-se na Fig. (5.2) e Tabs. (5.2)-(5.3)-(5.4) que o efeito imediato do revestimento é aumentar a temperatura na "interface de corte" devido à resistência térmica adicional provocada pelo revestimento. Entretanto a temperatura cai rapidamente ao longo da espessura do revestimento e em direção ao substrato. Observa-se que ao se aplicar revestimentos com espessuras muito finas, ou seja, da ordem de  $1\mu$ m a redução de temperatura na interface de corte é inferior 1% não produzindo efeitos de barreira térmica significativos, como concluído por Batagla et al. Todavia a partir de espessura de  $5\mu$ m o efeito na redução pode alcançar valores significativos alcançando 26% para o caso do revestimento TiN. Por exemplo, para espessuras de  $10\mu$ m o efeito térmico de redução é da ordem de 27% e 34% respectivamente para  $Al_2O_3$  e o TIN. Contudo, é interessante observar que o revestimento de cobalto não produz efeitos significativos de redução de temperatura para materiais com revestimentos muito finos, ou seja inferiores a 10 microns. De fato, esse comportamento se deve às propriedades condutividade e difusividade térmica serem muito semelhantes ao material base (metal duro) cuja composição tem grande porcentagem de cobalto.

Em relação aos revestimentos analisados observa-se que o mais efetivo na atuação como barreira térmica é o TIN proporcionando para o calor simulado uma redução de até 41% para revestimentos mais grossos ( $20\mu$ m).

Destaca-se neste caso, a temperatura na face de corte da ferramenta revestida ( $T_1$ ), na interface entre o revestimento e o material base ( $T_2$ ) e na face de corte da ferramenta de metal base, sem revestimento ( $T_3$ ). A Figura xxx, apresenta a evolução da diferença percentual de temperatura ( $T_3 - T_2 / T_3 \times 100\%$ ) entre as superfícies de corte da ferramenta não revestida ( $T_3$ ) e a interface de revestimento ( $T_2$ ), para cada um dos tipos de materiais, considerando camadas de revestimento com espessura de 10 microns.

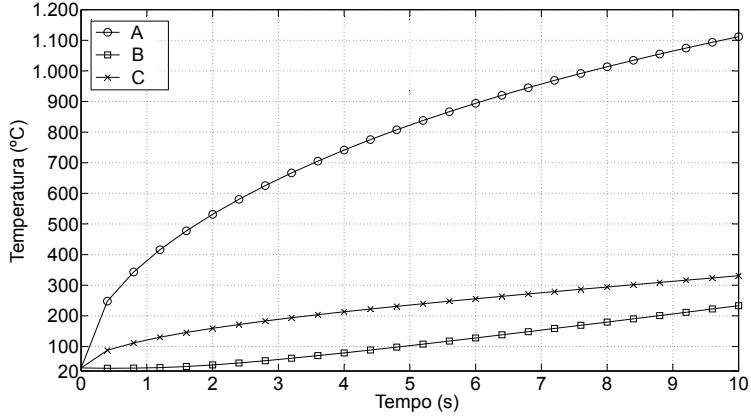


Figura 5.6: Evolução no tempo de T1, T2 e T3 considerando o revestimento de TiN com espessura de 10um, onde A: Ferramenta Revestida de TiN (Superfície de Corte), B: Ferramenta Revestida de TiN (Interface) e C: Ferramenta sem revestimento (Superfície de Corte).

Nesta figura pode-se observar o comportamento bem diferente da camada de cobalto. Observa-se que diferente dos outros revestimentos, a temperatura na interface revestimento substrato chega a ser superior à do substrato sem revestimento, proporcionando então um efeito condutor e não de barreira térmica. Esse comportamento inesperado aponta que existe uma dependência muito forte das propriedades térmica e da espessura de revestimento para que o efeito de barreira térmica esteja presente.

Pode-se concluir que os revestimentos têm efeito térmico, embora revestimentos com espessuras de  $1\mu$  esta influencia é muito pequena e produz uma queda de temperatura inferior a 14%.

A partir de espessuras maiores que  $5\mu m$  o efeito passa a ser considerável podendo, dependendo o par substrato revestimento alcançar uma queda de temperatura de 26, 34 e 41% como é o caso de metal duro/TiN com espessuras de  $5\mu$ ,  $10\mu$  e  $20\mu$  respectivamente.

Observa-se ainda que o efeito tribológico não foi avaliado. Ou seja, a presença do revestimento pode alterar a área de contato ou que faria com que o fluxo de calor imposto fosse diferente ao se considerar usinagem com ferramentas revestidas e não revestidas.

Dependendo das propriedades térmicas do revestimento e substrato e da espessura do revestimento pode ser que não haja efeito de barreira térmica perceptível como já observado por Bataglia. Esse é o caso, por exemplo do revestimento de cobalto aplicado a um substrato de metal duro.

Em relação aos revestimento analisados observa-se que o mais efetivo na atuação como barreira térmica é o TiN proporcionando para o calor simulado uma redução de até 41% para revestimentos mais grossos de  $20\mu$ .

É importante observar-se que a análise térmica do comportamento das pastilhas revestidas não considerou os efeitos tribológicos da adição de revestimento do material base.

Grezik (1999) apresenta uma investigação experimental de pastilhas revestidas considerando diferentes fatores, como condição de corte e revestimentos, de forma a obter a influência na temperatura de corte destas ferramentas, na interface revestimento-substrato e cavaco, considerando a usinagem de aço médio carbono e aço inoxidável austenítico. Em seu trabalho, considerou revestimento de carbeto de titânio (TiC), composto de carbeto de titânio e nitreto de titânio (TiC/TiN) e composto de carbeto de titânio, óxido de alumínio e nitreto de titânio (TiC/ $Al_2O_3$ /TiN).

Para a obtenção da temperatura na interface foram inseridos termopares tipo k na ferramenta sendo as temperaturas dos termopares no interior da ferramenta usadas para a investigação. Grezik (1999) concluiu que a temperatura média da interface peça-ferramenta é influenciada pelas propriedades térmicas do material base e do revestimento. Em particular ele concluiu que a condutividade térmica da ferramenta e da camada afetam significamente a temperatura da interface.

Em seu trabalho, Grezik (1999) concluiu que o uso de revestimento contribuiu bastante para a redução de atrito na interface de corte que resulta também no decréscimo de geração de calor e abaixamento da temperatura na interface cavaco ferramenta. Entretanto, ocorre também uma redução no comprimento de contato da região de interface o que representa uma proteção da difusão da ferramenta. Esse efeito, porém faz com que o calor gerado por área aumente e fique localizado.

A análise realizada nesse trabalho colabora em parte os resultados experimentais. Porém, não é só a condutividade térmica a responsável pelo efeito de barreira térmica, uma vez que o revestimento de cobalto, se reduz a temperatura na interface de contato (revestimento-peça) mas não tem esse efeito na superfície do material base da ferramenta.

Um trabalho futuro deve então investigar as características de redução de área de contato, de aumento do fluxo de calor nesta região e do decréscimo de temperatura na superfície da ferramenta.

# Capítulo 6

## Conclusão

Propôs-se neste trabalho o estudo e a obtenção da solução analítica em condução de calor em meios constituidos por mais de uma camada, usando o método baseado em funções de Green, decorrente de um problema térmico unidimensional transiente, para então, aplicá-la em ferramentas revestidas usadas em processos de usinagem.

Uma das contribuições deste trabalho, reside na complementação da literatura onde descreveu-se a obtenção da solução multicamada e detalhou-se os procedimentos da obtenção dos autovalores. Outra contribuição desse trabalho é a sua aplicação no estudo do comportamento térmico de ferramentas revestidas usadas em processos de usinagem.

O uso do *software* MATLAB mostou-se bastante eficiente e de fácil implementação da solução analítica de dupla-camada, permitindo um melhor entendimento físico do problema.

Observa-se, por meio de uma análise dos resultados apresentados no decorrer do trabalho que os objetivos foram alcançados de forma satisfatória.

Inicialmente apresentou-se a equação-solução analítica de um problema térmico unidimensional de camada simples, a fim de obter a diferença de um problema de camada simples com um problema constituído de duas camadas, cujas propriedades térmicas são distintas em cada camada. Mostrou-se, de uma forma didática, os procedimentos para obtenção da equação-solução multicamada, as autofunções foram obtidas através do método de separação de variáveis, e então pôde-se obter a função de Green. Os autovalores foram calculados e obtidos numericamente por tratar-se de uma equação transcendental.

Posteriormente, apresentou-se, o perfil de temperatura da equação-solução multicamada com materiais de propriedades termofísicas distinta em cada camada, a fim de entender e visualizar a parte física do problema. A verificação da solução multicamada foi obtida através de um problema clássico em condução de calor. Uma análise, da solução analítica comparada com a solução numérica, foi abordada nesse trabalho.

A aplicação da equação-solução multicamada em ferramentas revestidas durante um processo de usinagem foi realizada com sucesso, como mostrou-se no capítulo anterior.

### **Proposta de trabalhos futuros**

O uso de soluções analíticas em diversos problemas térmicos demostrou ser uma grande alternativa, principalmente quando se trata de aplicações que envolvem camadas finas. Portanto, propõem-se como trabalho futuro a investigação dessa solução e sua aplicação em:

- Problemas inversos usando função transferência;
- Equação de bio-transferência de calor;
- Biomecânica;
- Obtenção da solução analítica com diferentes condições de contorno;
- Obtenção da solução analítica tridimensional transiente.

# Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, C. M. de. *Avaliação do desgaste da ferramenta de metal duro revestida com TiN no fresamento do aço ABNT4140 laminado a quente e temperado/revenido*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia universidade católica de minas gerais, 2010.
- ARMANDO, G.-M. *et al.* Analysis of the conjugate heat transfer in a multi-layer wall including an air layer. *Applied Thermal Engineering*, v. 30, p. 599–604, November 2009.
- ARPACI, V. S. *Conduction Heat Transfer*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966.
- BECK, J. *Heat conduction using Green's functions*. [S.l.]: Hemisphere Pub. Corp., 1992. (in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences). ISBN 9781560320968.
- BECK, J.; COLE, K.; B.LITKOUHI, A.-S. *Heat Conduction Using Green's Function*. United States: hpc, 1992.
- BECK, J. V. *et al.* Intrinsic verification in linear heat conduction. *Heat and Mass Transfer*, 2006.
- BELGHAZI, H.; GANAOUI, M. E.; LABBE, J. Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source. *International Journal od Thermal Sciences*, v. 49, p. 311–318, September 2009.
- BERTOLAZZI, E.; BASTTISTI, L.; TRIVELLATO, F. Numerical processing of thin-film thermometer data for determining transient heat fluxes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 36, p. 3645–3662, August 2012.
- BRITO, R. F. *et al.* Análise térmica em ferramenta de metal duro revestida. *CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA DE FABRICAÇÃO*, 2009.
- COLE, K. D. *et al.* *Heat Conduction Using Green's Functions*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2010. (Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences). ISBN 9781439813546.
- COMSOL. *version number:4.3.2.189*. [S.l.: s.n.], 4.3.
- DANTE. *Matemática Contexto e Aplicações*. [S.l.: s.n.], 2010.

- DU, F.; LOVELL, M. R.; WU, T. W. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools. *Solids and Structures*, v. 38, p. 4557–4570, July 2000.
- FERNANDES, A. P. *Funções de Green: soluções analíticas aplicadas a problemas inversos em condução de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009. Disponível em: <<http://www.bdtd.ufu.br>>.
- FERNANDES, A. P. *Função transferência analítica aplicada a solução de problemas inversos em condução de calor*. [S.l.], 2013.
- FERNANDES, A. P.; GUIMARÃES, G. Heat conduction analytical solutions to be applied in boundary conditions obtained from discrete data. In: *Proceedings of the ENCIT 2012, 14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: ABCM, 2012.
- FERZIGER, J.; PERIĆ, M. *Computacional Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2002.
- FIQUEIREDO, A. A. A. *Análise numérica de modelos térmicos envolvendo a estimativa de parâmetros na equação da biotransferência de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.
- HAHN, D.; OZISIK, N. *Heat Conduction*. [S.l.]: Wiley, 2012. ISBN 9781118330111.
- HAJI-SHEIK, A.; BECK, J. V. An efficient method of computing eigenvalues in heat conduction. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, v. 38, n. 2, p. 133–156, 2000.
- HAJI-SHEIKH, A. *Two-layer slab with perfect contact between layers; with zero in heat flux at one boundary, zero heat flux at other boundary*. 2014. Disponível em: <<http://exact.unl.edu/>>.
- HAJI-SHEIKH, A.; BECK, J. Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, n. 9, p. 1865 – 1877, 2002. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931001002794>>.
- HAJI-SHEIKH, A.; BECK, J. V.; AGONAFER, D. Steady-state heat conduction in multi-layer bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, n. 13, p. 2363–2379, 2003.
- KAYHANI, M.; NOROUZI, M.; DELOUEI, A. A. A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates. *Elsevier*, v. 52, p. 73–82, 2011.
- LI, M.; LAI, A. C. Analytical solution to heat conduction in finite hollow composite cylinders with a general boundary condition. *Heat and Mass Transfer*, v. 60, p. 549–556, April 2013.
- MACHADO, A. R. *et al. Teoria da usinagem dos materiais*. Blucher: [s.n.], 2011.

- MAESTRE, I. R.; CUBILLAS, P. R.; PÉREZ-LOMBARD, L. Transient heat conduction in multi-layer walls: An efficient strategy for laplace's method. *Energy and Buildings*, v. 42, p. 541–546, April 2010.
- MATLAB. *version 7.14.0.739 (R2012a)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2012.
- MONTE, F. de. Transient heat conduction in one-dimensional composite, a natura analytical approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, n. 19, p. 3607–3619, 2000.
- ÖZİŞIK, M. N. *Heat Conduction*. Nova Iorque, NY: Wiley, 1993. (Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471532569.
- RADE, D. A. *Método dos elementos finitos aplicados a engenharia mecânica*. [S.l.: s.n.], 2011.
- RADULESCU, R.; KAPOOR, S. G. An analytical model for prediction of tool temperature fields during continuous and interrupted cutting. *Journal of engineering for industry*, v. 116, n. 2, p. 135–143, 1994.
- RAMADAN, K. Semi- analytical solutions for the dual phase lag heat conduction in multi-layered media. *Elsevier*, v. 48, p. 14–25, April 2008.
- RECH, J.; BATTAGLIA, J.; MOISAN, A. Thermal influence of cutting tool coatings. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 159, n. 1, p. 119–124, 2004.
- RIBEIRO, S.; OLIVEIRA, G. C. de; GUIMARÃES, G. Verificação instrínseca de soluções analíticas em condução de calor. *POSMEC*, Novembro 2014.
- RODRIGUES, D. et al. Study of the one dimensional and transient bioheat transfer equation: Multi-layer solution development and applications. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 62, p. 153–162, July 2013.
- SINGH, S.; JAIN, P. K.; RIZWAN-UDDIN. Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction. *Elsevier*, v. 47, p. 261–273, March 2007.
- SINGH, S.; JAIN, P. K.; RIZWAN-UDDIN. Finite integral transform method to solve asymmetric heat conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions. *Nuclear Engineering and Design*, v. 241, p. 144–154, October 2011.
- VIANA, G. V. R. Padrão ieee 754 para aritmética binária de ponto flutuante. 2004.
- WU, S.-K.; CHU, H.-S. Inverse determination of surface temperature in thin-films/substrate systems with interface thermal resistance. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, p. 3507–3515, July 2004.

# Anexo A

## Coeficientes para obtenção das autofunções

Na tabela (A.1) encontra-se os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  desenvolvidos por (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002) para obter as autofunções  $X_1 = Acos(\gamma x) + Bsen(\gamma x)$  e  $X_2 = Ccos(\eta x) + Dsen(\eta x)$  para demais condições de contorno. Os casos estão definidos por  $XIJ$  onde  $I$  é equivalente a condição de contorno em  $x = 0$  e  $J$  a condição de contorno em  $x = L$ .

Tabela A.1: Solução dos coeficientes  $X_1 = Acos(\gamma x) + Bsen(\gamma x)$  e  $X_2 = Ccos(\eta x) + Dsen(\eta x)$  considerando contato perfeito

Caso A B	C	D
$X1J \ 0 \ 1$	$sen(\gamma b)cos(\eta b) - (\gamma/\eta)$ $\times(k_1/k_2)cos(\gamma b)sen(\eta b)$	$sen(\gamma b)sen(\eta b) + (\gamma/\eta)$ $\times(k_1/k_2)cos(\gamma b)cos(\eta b)$
$X2J \ 1 \ 0$	$cos(\gamma b)cos(\eta b) + (\gamma/\eta)$ $\times(k_1/k_2)sen(\gamma b)sen(\eta b)$	$cos(\gamma b)sen(\eta b) - (\gamma/\eta)$ $\times(k_1/k_2)sen(\gamma b)cos(\eta b)$
$X3J \ 1 \ (h_1/k_1\gamma)$	$cos(\eta b)[cos(\gamma b) + (h_1/k_1\gamma)]sen(\gamma b)$ $\times[(h_1/k_1\gamma)cos(\gamma b) - sen(\gamma b)]$	$sen(\eta b)[cos(\gamma b) + (h_1/k_1\gamma)sen(\gamma b)]$ $[(h_1/k_1\gamma)cos(\gamma b) - sen(\gamma b)]$

## Anexo B

### Equações transcendental para demais condições de contorno

A tabela (B.1) apresenta as equações transcendental para demais condições de contorno desenvolvida por (HAJI-SHEIKH; BECK, 2002).

Tabela B.1: Equação transcendental para demais condições de contorno.

Caso	Autocondição
X11	$\cot(\bar{\eta}) = -\left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\cot(\bar{\gamma})$
X12	$\tan(\bar{\eta}) = -\left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\cot(\bar{\gamma})$
X13	$\frac{\bar{\eta}\tan(\bar{\eta})-B_{i2}}{(B_{i2})\tan(\bar{\eta})+\bar{\eta}} = \left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\cot(\bar{\gamma})$
X21	$\cot(\bar{\eta}) = \left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\tan(\bar{\gamma})$
X22	$\tan(\bar{\eta}) = -\left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\tan(\bar{\gamma})$
X23	$\frac{\bar{\eta}\tan(\bar{\eta})-B_{i2}}{(B_{i2})\tan(\bar{\eta})+\bar{\eta}} = -\left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\tan(\bar{\gamma})$
X31	$\cot(\bar{\eta}) = \left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\bar{\gamma}\tan(\bar{\gamma})-B_{i1}}{B_{i1}\tang(\bar{\gamma})+\bar{\gamma}}$
X32	$\tan(\bar{\eta}) = -\left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\bar{\gamma}\tan(\bar{\gamma})-B_{i1}}{B_{i1}\tang(\bar{\gamma})+\bar{\gamma}}$
X33	$\frac{\bar{\eta}\tan(\bar{\eta})-B_{i2}}{B_{i2}\tan(\bar{\eta})+\bar{\eta}} = -\left(\frac{c-b}{b}\right)\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\bar{\gamma}\tan(\bar{\gamma})-B_{i1}}{B_{i1}\tang(\bar{\gamma})+\bar{\gamma}}$