

LORRANE PEREIRA RIBEIRO

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS  
COMPÓSITAS INCORPORANDO CIRCUITOS *SHUNT*  
PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2015

LORRANE PEREIRA RIBEIRO

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS  
INCORPORANDO CIRCUITOS SHUNT PARA O CONTROLE  
PASSIVO DE VIBRAÇÕES**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

UBERLÂNDIA – MG

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

R484m  
2015      Ribeiro, Lorrane Pereira, 1990-  
                Modelagem estocástica de estruturas compósitas incorporando  
                circuitos Shunt para o controle passivo de vibrações / Lorrane Pereira  
                Ribeiro. - 2015.  
                121 f. : il.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Vibração - Teses. 3. Materiais  
compostos - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. I. Lima,  
Antônio Marcos Gonçalves de, 1975- II. Universidade Federal de  
Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III.  
Título.



*Dedico este trabalho: a Deus, à minha mãe,  
aos meus avós maternos e, ao meu namorado  
Júnior, que sempre se mostraram presentes em  
minha vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, em especial à minha mãe Lara e aos meus avós, Antônia e Antônio, que me apoiaram incondicionalmente neste caminho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, pela dedicação, esforço e competência em sua orientação além de auxiliar no meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus amigos e colegas do programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, em especial, aos do Laboratório LMEst, pela parceria nos trabalhos e alto nível das conversas.

Ao meu namorado Júnior, pelo amor e paciência, por ter sempre acreditado em meu potencial, além de me apoiar nos momentos difíceis e compreender minha ausência quando foi necessária.

À minha querida amiga Danúbia, por sempre me escutar, me apoiar, me mostrar caminhos e soluções quando tudo parecia difícil.

Aos professores, técnicos e demais colaboradores do programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, que trabalharam fortemente para a minha formação, agregando conceitos valiosos e uma nova forma de enxergar os problemas de engenharia.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, ao programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, ao Laboratório de Mecânica de Estruturas – Prof. José Eduardo Tannús Reis, ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Estruturas Inteligentes em Engenharia – INCT-EIE pela oportunidade de realizar este trabalho.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida para realização do trabalho, aos órgãos de fomento CNPq e FAPEMIG e ao coordenador do INCT-EIE Prof. Valder Steffen Jr. pelo suporte financeiro.

RIBEIRO, L. P. **Modelagem Estocástica de Estruturas Compósitas Incorporando Circuitos *Shunt* para o Controle Passivo de Vibrações.** 2015. 121f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## Resumo

Estruturas compósitas em engenharia contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt*, para fins de atenuação passiva dos níveis de vibração, apresentam incertezas inerentes em seus parâmetros de projeto, as quais, podem afetar significativamente a eficiência dos circuitos elétricos passivos. Neste contexto, este trabalho apresenta a modelagem por elementos finitos estocásticos de uma estrutura em material compósito laminado contendo elemento piezelétrico acoplado a circuitos elétricos *shunt*, de modo que, parâmetros incertos, como direções das fibras, espessuras das camadas e a resistência e indutância do circuito *shunt*, são assumidos como sendo variáveis aleatórias e, a dispersão destas variáveis, é caracterizada nas respostas estocásticas obtidas após a propagação das incertezas no modelo. Desta forma, realiza-se em um primeiro momento a modelagem do problema eletromecânico determinístico. Para tal, há combinação das teorias de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem e da Camada Equivalente Única para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos, com a Teoria *Layerwise*, que utiliza o conceito de Camadas Equivalentes Discretas na consideração dos campos elétricos, os quais, são assumidos discretos ao longo da espessura da estrutura do laminado. Na sequência, faz-se a inclusão dos circuitos elétricos *shunt* no modelo eletromecânico. A modelagem determinística é realizada de forma parametrizada para que se possa realizar a introdução *a posteriori* das incertezas no modelo de forma mais eficiente. Utilizando-se do Método dos Elementos Finitos Estocásticos, os parâmetros fatorados das matrizes e os elementos do circuito são considerados como variáveis aleatórias e modelados como campos homogêneos estocásticos gaussianos. Estes campos são então discretizados de acordo com o método de expansão em série de Karhunen-Loève, onde são geradas as matrizes estocásticas exatas do sistema eletromecânico via modificação do processo de integração pelas funções de covariância. Os resultados obtidos, em termos dos envelopes das respostas em frequência para uma viga compósita contendo um elemento piezelétrico acoplado ao circuito *shunt*, evidenciam a importância de se considerar as incertezas durante as fases de concepção inicial e/ou pré-projeto de sistemas dinâmicos incorporando circuitos *shunt* para o controle passivo de vibrações.

---

*Palavras-chave:* Modelagem estocástica, materiais compósitos, circuitos *shunt* piezelétricos, controle passivo de vibrações, propagação de incertezas

RIBEIRO, L. P. **Stochastic Modeling of Composite Structures Incorporating Shunt Circuits for Passive Vibration Control.** 2015. 121f. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

## Abstract

Engineering composite structures containing piezoelectric elements coupled with the so-named shunt circuits, with the aim of passive vibration attenuation, are characterized by inherent uncertainties in their parameters, which can affect significantly performance of the passive shunt circuit. In this context, this work presents the stochastic finite element modeling of a composite structure containing piezoelectric element to be coupled with a shunt circuit, in such a way, that uncertain parameters such as the fiber's orientation, layer thicknesses and the resistance and inductance in the shunt circuit are assumed as uncertain variables and, their corresponding dispersion, is characterized in the stochastic response by propagating the uncertainties into the model. First, the deterministic electromechanical problem is modeled by combining the First-Order Shear Deformation Theory and the concept of Equivalent Single Layer, in order to approximate the mechanical displacement fields, with the so-called Layerwise Theory used to model the discrete electric fields within the composite element. In the sequence, the shunt circuits coupled to the piezoelectric element are introduced in the model. The deterministic finite element modeling procedure was performed taking into the parameterization process of the design variables of interest to be further assumed as random variables in a straightforward way. In the present stochastic finite element modeling procedure, the uncertain variables are modeled as Gaussian stochastic homogeneous fields and discretized according to the Karhunen-Loève expansion method, with the aim of generating the exact stochastic matrices. The obtained results, in terms of the envelopes of the frequency response functions for a composite beam incorporating piezoelectric material coupled with a shunt circuit, demonstrate the interest in considering the uncertainties in the preliminary design phase of the shunt circuits to control the undesired vibrations.

---

*Keywords:* Stochastic modeling, composite materials, piezoelectric shunted circuits, passive vibration control, uncertainty propagation

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Crescente utilização de materiais compósitos na indústria aeronáutica, <i>Boeing 787</i> ( <a href="http://modernairliners.com/Boeing787_files/Specifications.html">http://modernairliners.com/Boeing787_files/Specifications.html</a> , acessado em 29/06/2015).....	25
Figura 2.2 - Classificação dos materiais compósitos (adaptado de Callister Jr. e Rethwisch (2009)) .....	26
Figura 2.3 - Compósito estrutural do tipo laminado formado por várias lâminas (adaptado de Mendonça (2005)).....	27
Figura 2.4 - Lâmina com orientação $\theta$ arbitrária segundo o eixo de referência plano x-y, (adaptado de Reddy (1997)). .....	28
Figura 2.5 - Representação esquemática de uma placa composta em sua posição indeformada (a) e ilustração da cinemática das teorias ESL de deformação, CLT (b), FSDT (c) e HSDT (d) (adaptado de Diacenco (2010)).....	35
Figura 2.6 - Representação do efeito inverso dos piezelétricos: dimensões do elemento para diferentes polaridades de aplicação de voltagem (adaptado de Santana (2007)). .....	37
Figura 2.7 - Viga engastada amortecida via uso de circuito <i>shunt</i> ligado ao elemento piezelétrico (adaptado de Caruso (2001)).....	43
Figura 2.8 - Principais topologias de circuitos <i>shunt</i> (adaptado de Lesieutre (1998)).	43
Figura 3.1 - Elemento retangular de oito nós da família <i>Serendipity</i> , em coordenadas locais (esquerda) e globais (direita), (adaptado de Faria, 2006).....	47
Figura 3.2 - Representação esquemática das funções de interface.....	61
Figura 3.3 - Representação dos potenciais elétricos nodais por interface (adaptado de Zambolini-Vicente (2014)).....	63
Figura 4.1 - Domínio de correlação para o elemento finito de placa compósita. ....	79
Figura 5.1 - Viga compósita com piezelétrico acoplado a circuito elétrico <i>shunt</i> .....	88
Figura 5.2 - Amplitudes do primeiro modo de vibração da viga sem circuito <i>shunt</i> e com <i>shunt</i> resistivo e ressonante. ....	92

Figura 5.3 - Autofunções para: a) $\Omega_x = [0;0,01]$ e $L_{cov,x} = 0,01$ ; b) $\Omega_x = [0;0,0459]$ e $L_{cov,x} = 0,0459$ ; c) $\Omega_x = [0;0,062525]$ e $L_{cov,x} = 0,062525$ e d) $\Omega_y = [0;0,0255]$ e $L_{cov,y} = 0,0255$ .	94
.....	
Figura 5.4 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico sem circuito <i>shunt</i> considerando-se o primeiro conjunto de simulações.....	97
Figura 5.5 - Convergência para os cenários da Fig. 5.4 do sistema sem <i>shunt</i> . .....	97
Figura 5.6 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico sem circuito <i>shunt</i> considerando-se o segundo conjunto de simulações.....	98
Figura 5.7 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.6 do sistema sem <i>shunt</i> . .....	99
.....	
Figura 5.8 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com <i>shunt</i> resistivo considerando-se o primeiro conjunto de simulações.....	100
Figura 5.9 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.8 do sistema estocástico com <i>shunt</i> resistivo.....	101
Figura 5.10 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com <i>shunt</i> resistivo considerando-se o segundo conjunto de simulações. ....	102
Figura 5.11 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.10 do sistema estocástico com <i>shunt</i> resistivo.....	102
Figura 5.12 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante considerando-se o primeiro conjunto de simulações. ....	104
Figura 5.13 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.12 do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante. ....	105
Figura 5.14 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante considerando-se o segundo conjunto de simulações. ....	106
Figura 5.15 - Convergências para os cenários da Fig. 5.14 do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante.....	106
Figura 5.16 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante considerando-se o terceiro conjunto de simulações. ....	107
Figura 5.17 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.16 do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante. ....	108
Figura 5.18 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante considerando-se o quarto conjunto de simulações. ....	109

Figura 5.19 - Curvas de convergência os cenários da Fig. 5.18 do sistema estocástico com <i>shunt</i> ressonante.....	110
---	-----

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS LATINOS

$c, s$	$\cosseno(\theta), \seno(\theta)$
$k$	$k$ -ésima camada
$T, T_b, T_s$	Matrizes que rotacionam de um ângulo $\theta$ as matrizes de propriedades mecânicas, sendo $T$ a matriz completa, e com separação de efeitos, flexão-membrana, $T_b$ , e cisalhamento, $T_s$ .
$Q$	Matriz que rotaciona de um ângulo $\theta$ as matrizes de propriedades elétricas
$u_0, v_0, w_0$	Componentes dos deslocamentos nas respectivas direções de coordenadas $(x, y, z)$ em um ponto do plano médio, ou seja, $z = 0$
$u, v, w$	Deslocamentos totais nas respectivas direções $(x, y, z)$
$K_{ij}$	Coeficiente de acoplamento piezelétrico atuando no modo $ij'$
$d$	Matriz de constantes piezelétricas de deformação
$E, E_\theta, E_i$	Vetor dos campos elétricos totais e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$D, D_\theta, D_i$	Vetor de deslocamentos elétricos totais e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$C, C_b, C_s$	Tensor de elasticidade linear total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$e, e_b, e_s$	Tensor de constantes dielétricas total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$U, u, A_u$	Campo de deslocamentos mecânicos, graus de liberdade mecânicos e matriz com o parâmetro $z$ fatorado, respectivamente

$\mathbf{D}_b, \mathbf{D}_s$	Matrizes dos operadores diferenciais com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$\mathbf{J}, J$	Matriz Jacobiana e Jacobiano, respectivamente, sendo $J = \det(\mathbf{J})$
$\mathbf{u}_e$	Variáveis mecânicas nodais
$\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_\phi$	Funções de forma e funções de forma elétricas
$\mathbf{B}, \mathbf{B}_b, \mathbf{B}_s$	Matriz que correlaciona deformações e deslocamentos nodais total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$E_c, P_e$	Energia cinética e energia potencial de deformação mecânica, ambas a nível elementar
$\mathbf{U}_e$	Energia de deformação a nível elementar, realizando-se uma integração no volume do elemento finito entre a diferença da energia de deformação mecânica e da energia de deformação elétrica
$\mathbf{M}_{uu}^e, \mathbf{K}_{uu}^e, \mathbf{K}_{ub}^e, \mathbf{K}_{us}^e$	Matrizes mecânicas elementares de massa, de rigidez mecânica e de rigidezes mecânica com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$\mathbf{M}_{uu}, \mathbf{K}_{uu}$	Matrizes mecânicas globais de massa e rigidez, respectivamente
$\mathbf{f}(t), \mathbf{F}(\omega)$	Vetor dos esforços generalizados, no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente
$\mathbf{q}(t), \mathbf{Q}(\omega)$	Vetor de cargas elétricas, no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente
$L_{kd}, L_{ku}$	Funções <i>layerwise</i> transversais para as interfaces inferior e superior, respectivamente.
$\mathbf{B}_\phi, \mathbf{B}_{\phi\theta}, \mathbf{B}_{\phi i}$	Matriz que correlaciona o campo elétrico e os potenciais elétricos nodais completa e, com separação de efeitos: circuito aberto e fechado, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\phi}^e, \mathbf{K}_{\phi\phi}^e$	Matrizes de rigidezes elementares, eletromecânica e elétrica, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\phi}, \mathbf{K}_{\phi\phi}$	Matrizes de rigidezes globais, eletromecânica e elétrica, respectivamente
$\mathbf{Z}$	Matriz de impedâncias elétricas
$R, L$	Parâmetro resistivo e indutivo, respectivamente

$Var[X]$	Variância da variável aleatória $X$
$H(\cdot), \bar{H}(\cdot)$	Campo estocástico e campo estocástico aproximado, respectivamente
$f_r$	Autovetor solução da Integral de Fredholm
$l_x, l_y$	Comprimentos de correlação nas direções $x$ e $y$ , respectivamente
$n_{KL}$	Número de termos na expansão da série de Karhunen-Loève
$\mathbf{M}_{uu}^e(\theta), \mathbf{K}_{uu}^e(\theta)$	Matrizes estocásticas mecânicas elementares de massa e rigidez, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\Phi}^e(\theta), \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e(\theta)$	Matrizes estocásticas de rigidezes elementares, eletromecânica e elétrica, respectivamente
$\mathbf{M}(\theta), \mathbf{K}_{uu}(\theta)$	Matrizes estocásticas mecânicas globais de massa e de rigidez, respectivamente
$\mathbf{K}_{u\Phi}(\theta), \mathbf{K}_{\Phi\Phi}(\theta)$	Matrizes estocásticas de rigidezes globais, eletromecânica e elétrica, respectivamente
$n_s$	Número de indivíduos na amostra
$H_j(\omega, \Omega, \theta)$	$j$ -ésima FRF estocástica
$H_{med,j}(\omega, \Omega, \theta)$	$j$ -ésima FRF estocástica média
$h_i, h_{PZT}$	Espessura da $i$ -ésima camada de compósito e do PZT, respectivamente
$C_{PZT}$	Capacitância inerente à pastilha piezelétrica

## SÍMBOLOS GREGOS

$\theta_k$	Ângulo de orientação das fibras da $k$ -ésima camada do compósito
$\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$	Deformações cisalhantes transversais
$\varepsilon_{zz}$	Deformação normal
$\psi_x, \psi_y, \psi_z$	Rotações da seção transversal nas direções $x$ , $y$ e $z$ , respectivamente
$\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z, \Phi_x, \Phi_y$	Funções dependentes apenas das coordenadas $(x, y)$ , as quais não apresentam significado físico evidente, mas, podem ser vistas como rotações de ordem superior (Teoria HSDT)

$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_b, \boldsymbol{\varepsilon}_s$	Vetor de deformações mecânicas total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b, \boldsymbol{\sigma}_s$	Vetor das tensões mecânicas total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\chi}_b, \boldsymbol{\chi}_s$	Matriz de permissividade elétrica total e com separação de efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, respectivamente
$\xi, \eta$	Coordenadas locais
$\rho_k$	Densidade do material da $k$ -ésima camada
$\Phi_k, \Phi_{k+1}$	Vetor contendo as funções <i>layerwise</i> no plano, dadas pela função potencial elétrico das interfaces inferior e superior, respectivamente, da $k$ -ésima camada
$\Phi_{(k)}$	Vetor potencial elétrico da $k$ -ésima camada
$\varphi_{ek}$	Vetor contendo os potenciais elétricos nodais
$\xi_r$	Variáveis aleatórias ortogonais de média zero
$\lambda_r$	Autovalor solução da Integral de Fredholm
$\Omega_x, \Omega_y$	Domínios estocásticos nas direções $x$ e $y$ , respectivamente
$\omega_n$	Frequência natural do sistema

## ABREVIACÕES

ESL	<i>Equivalent single-layer theories</i> (Teorias da camada Equivalente Única)
CLT	<i>Classical Laminated Theory</i> (Teoria Clássica dos Laminados)
FSDT	<i>First-Order Shear Deformation Theory</i> (Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem)
HSDT	<i>High-Order Shear Deformation Theory</i> (Teoria da Deformação Cisalhante de Alta Ordem)
PZT	<i>Lead zirconate titanate</i> (Titanato Zirconato de Chumbo)
PVDF	Polyvinylidene fluoride (Polifluoreto de Vinilideno)

SFEM	<i>Stochastic Finit Element Method</i> (Método dos Elementos Finitos Estocásticos)
KL	Método de expansão em série de Karhunem-Loève
HCL	Amostragem por Hipercubo Latino
MCS	Método da Simulação de Monte Carlo
FRF	Função de Resposta em Frequência
LMEst	Laboratório de Mecânica de Estruturas
INCT-EIE	Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Estruturas Inteligentes em Engenharia
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO I.....</b>	<b>19</b>
1. INTRODUÇÃO.....	19
<b>CAPÍTULO II .....</b>	<b>24</b>
2. REVISÃO SOBRE MATERIAIS COMPÓSITOS E PIEZELÉTRICOS .....	24
2.1. Materiais Compósitos.....	24
2.2. Teorias de placas e cascas compostas laminadas .....	30
2.2.1. Teoria Clássica dos Laminados (CLT).....	31
2.2.2. Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) .....	33
2.2.3. Teoria da Deformação Cisalhante de Alta Ordem (HSDT) .....	34
2.2.4. Teoria Mista .....	35
2.3. Fundamentos da piezeletricidade linear .....	36
2.4. Técnicas de controle de vibrações .....	40
2.4.1. Técnicas de controle ativo.....	40
2.4.2. Técnicas de controle passivo.....	41
<b>CAPÍTULO III.....</b>	<b>45</b>
3. MODELAGEM DETERMINÍSTICA DE PLACAS COMPÓSITAS COM ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS ACOPLADOS A CIRCUITOS <i>SHUNT</i> .....	45
3.1. Modelagem do problema mecânico.....	45
3.2. Modelagem do problema eletromecânico .....	56
3.2.1. Rotação das matrizes de propriedades mecânicas, elétricas e eletromecânicas.....	57
3.2.2. Discretização do Potencial Elétrico por camadas .....	61
3.2.3. Obtenção das matrizes de massa e rigidezes do sistema eletromecânico .....	66
3.3. Inclusão dos circuitos elétricos <i>shunt</i> no modelo de elementos finitos....	71

<b>CAPÍTULO IV</b>	<b>74</b>
4. MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO PROBLEMA	74
4.1. Conceitos fundamentais sobre incertezas	74
4.2. Técnicas de resolução do problema estocástico	76
4.3. Expansão de Karhunen-Loève (KL)	76
4.4. Formulação do modelo de Elementos Finitos Estocásticos	83
4.4.1. Matrizes de massa e rigidezes estocásticas	83
<b>CAPÍTULO V</b>	<b>88</b>
5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	88
5.1. Resposta dinâmica do sistema determinístico	90
5.2. Resposta dinâmica do sistema estocástico	93
5.2.1. Simulações do problema eletromecânico estocástico	95
5.2.2. Viga compósita com piezelétrico sem circuito <i>shunt</i> acoplado	96
5.2.3. Viga de compósito contendo piezelétrico acoplado de <i>shunt</i> resistivo	99
5.2.4. Viga de compósito contendo piezelétrico acoplado de <i>shunt</i> ressonante	103
<b>CAPÍTULO VI</b>	<b>112</b>
6. CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	112
Sugestões de trabalhos futuros	115
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>117</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Inúmeros pesquisadores têm mostrado que a consideração das incertezas em modelos determinísticos de sistemas de engenharia se torna cada vez mais necessária, uma vez que as mesmas podem influenciar sobremaneira no desempenho, na durabilidade, na segurança e no atendimento aos requisitos de projeto de um dado sistema (KOROISHI et al, 2012). Neste contexto, uma ferramenta poderosa em mecânica estocástica computacional é o Método dos Elementos Finitos Estocásticos (*Stochastic Finite Element Method - SFEM*), o qual é uma extensão da abordagem determinística do método dos elementos finitos clássico para o contexto estocástico, ou seja, para a solução de problemas estocásticos (estático e dinâmico), cujos parâmetros de projeto são aleatórios. Desta forma, o SFEM possibilita uma combinação da análise clássica por elementos finitos e a análise estatística (DE LIMA, RADE e BOUHADDI, 2010).

No que diz respeito ao tipo de material, neste trabalho é dada atenção especial ao uso de compósitos, uma vez que, no atual contexto de engenharia, a utilização dos mesmos em vez de materiais convencionais é uma realidade. A fundamentação deste fato baseia-se principalmente, no quesito da superioridade das propriedades mecânicas que se consegue alcançar para uma dada estrutura utilizando-se deste tipo de material.

Como exemplo, pode-se citar a relação resistência/peso muito superior desses materiais em relação aos materiais metálicos tradicionais como aço e alumínio (FARIA, 2006; CALLISTER Jr. e RETHWISCH, 2009). Tem-se como vantagem a confecção deste tipo de material de acordo com as necessidades específicas de projeto, apresentando-se como sendo a solução mais adequada quando se necessita de estruturas mais leves e ao mesmo tempo resistentes, além de outras combinações de propriedades mecânicas difíceis de serem obtidas com os materiais convencionais (PINHEIRO, BECKHAUSER e MENEZES, 2006).

O conceito de estruturas inteligentes ou estruturas adaptativas também é utilizado neste trabalho. Tais estruturas são capazes de captar alterações no ambiente a sua volta e realizar algum tipo de ação ou então se adaptar a este novo meio, sempre na busca da manutenção do seu desempenho pré-determinado, (FARIA, 2006). Portanto, as estruturas inteligentes passam a exercer um papel fundamental no contexto de controle de vibrações de sistemas dinâmicos, o que leva a mobilização de inúmeras pesquisas realizadas nesta área. As perturbações estáticas e/ou dinâmicas aplicadas a uma estrutura podem ser tratadas com o projeto de uma estrutura inteligente. As mesmas, por exemplo, podem ser concebidas de tal forma que, por meio de sensores, seja feita a captação de possíveis mudanças no meio, a adaptação da estrutura a este novo contexto realizada pelos atuadores, e um sistema de controle para se encarregar de todas estas tarefas. Assim, é possível realizar a confecção de uma estrutura com toda esta tecnologia embarcada, assegurando seu desempenho de forma autônoma (PIEFORT, 2001; SANTANA, 2007).

Dentre os diversos tipos de materiais inteligentes existentes, pode-se citar, como por exemplo, os materiais piezelétricos, os eletrostrictivos e os fluídios eletroreológicos, sendo que, todos eles se encaixam na mesma categoria, ou seja, dos que transformam energia elétrica em mecânica e vice-versa. Outra classificação para os materiais inteligentes pode-se dar pela transformação de energia magnética e mecânica, como é o caso dos materiais magnetostriktivos e os fluidos magnéticos-reológicos. Existem também materiais inteligentes que sofrem transformações termo-mecânicas, que é o caso dos materiais viscoelásticos e das ligas como memória de forma. (PIEFORT, 2001). Entretanto, dentre os materiais inteligentes, os piezelétricos se destacam. Eles podem ser confeccionados em formas variadas, são leves, pouco intrusivos e fáceis de manusear, o que os leva a serem utilizados em diversos tipos de aplicações. Outro importante quesito é o fato dos mesmos poderem ser usados efetivamente tanto como sensores como atuadores. Pode-se citar ainda o fato desses materiais serem de fácil

obtenção comercial e de adaptação a diferentes tipos estruturais, como placas, cascas, vigas e estruturas curvas (FARIA, 2006).

Os piezelétricos têm sido bastante utilizados em trabalhos de pesquisas e experiências como componentes de atuação no controle de vibrações de estruturas. Em se tratando de controle ativo de sistemas, os mesmos requerem o uso de amplificadores, uma eletrônica de detecção associadas assim como sistemas de controle. Mas, todo este aparato é desnecessário nas aplicações dos chamados circuitos *shunt* onde o único elemento externo é um circuito elétrico passivo, que é o próprio *shunt*. É dado destaque ao circuito *shunt* ressonante monomodal, o qual é formado por um indutor e um resistor, permitindo-se que seja realizada uma sintonização do mesmo para qualquer frequência que se queira amortecer (HAGOON e VON FLOTOW, 1991; VIANA 2005). Mesmo sendo monomodal, pode-se observar no trabalho de Viana (2005) que com a realização de algumas mudanças no *shunt* ressonante, há a possibilidade de se realizar o amortecimento de mais de um modo de vibração de forma simultânea. Além disso, o autor observa que com um olhar na mecânica, o circuito *shunt* ressonante alcança resultados similares ao de um absorvedor dinâmico de vibrações. Um inconveniente é que dependendo do modo a ser atenuado, o circuito ressonante pode requerer valores altos para a indutância normalmente não encontrados no mercado, levando-se a necessidade da utilização de indutâncias sintéticas.

No que se refere à modelagem do problema eletromecânico determinístico de vigas compósitas incorporando materiais piezelétricos, neste trabalho as teorias empregadas foram escolhidas em função de sua adaptação ao tipo de análise de incerteza a ser feita, precisão, domínio de aplicação e esforço computacional envolvido na sua implementação (REDDY, 1997; FARIA, 2006). Assim, será empregada a Teoria Mista, a qual considera o campo de deslocamentos mecânicos concebido de forma condensada em uma única camada equivalente e o potencial elétrico distribuído por camadas. Desta forma, para a aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos, a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (*First-order Shear Deformation Theory* – FSDT), a qual está inserida no contexto das Teorias da Camada Equivalente única (*Equivalent-single layer theories* - ESL) é utilizada. Já a modelagem dos campos elétricos discretos é realizada utilizando-se da Teoria das Camadas Equivalentes Discretas (Layerwise Theory) que está inserida no grupo da Teoria da Elasticidade Tridimensional (REDDY, 1997).

Para facilitar a introdução das incertezas paramétricas de forma sistemática no modelo, ainda na fase determinística foi realizada a parametrização do modelo eletromecânico da estrutura de forma que as variáveis como densidade do material, espessuras das camadas e direção das fibras foram fatoradas das matrizes elementares de massa e rigidezes. Este procedimento facilita a consideração *a posteriori* das variáveis como sendo campos estocásticos gaussianos homogêneos.

Dentre as famílias de métodos utilizados para discretizar espacialmente um campo estocástico, no qual o tamanho da malha de elementos finitos depende do comprimento de correlação do campo aleatório, utiliza-se neste trabalho os métodos chamados de Métodos de Expansão em séries que consistem no acoplamento do desenvolvimento em série do campo aleatório e uma análise espectral para uma seleção dos termos mais importantes. Dentre os três métodos que fazem parte desta categoria, detalha-se o desenvolvimento proposto por Karhunen-Loëve (KL). Assim, há uma intervenção direta no processo de integração, obtendo-se as matrizes estocásticas exatas de massa e rigidezes (GHANEM E SPANOS, 1991). Isto permite avaliar a variabilidade das funções de resposta em frequência do sistema pela propagação das incertezas no modelo. Para tanto, utiliza-se do Método do Monte Carlo combinado com a amostragem por Hipercubo Latino (HCL) como solver estocástico.

Por fim, deve-se destacar que este trabalho de dissertação apresenta uma proposta de projeto robusto de circuitos elétricos *shunt* para o controle passivo de vibrações de estruturas compósitas utilizando-se da discretização dos campos estocásticos por meio da expansão de Karhunen-Loëve, sendo que, esta contribuição se encontra inserida no contexto dos trabalhos de pesquisas desenvolvidos no Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Estruturas Inteligentes em Engenharia, INCT-EIE, sediado no LMEst/UFU.

Além deste capítulo introdutório, o Capítulo II dedica-se a uma breve revisão sobre estruturas compósitas e materiais piezelétricos, bem como o tipo de modelagem por elementos finitos a ser empregada ao longo deste trabalho de dissertação. Neste caso, ênfase também será dada aos fundamentos da piezeletricidade linear e seu emprego enquanto técnica de controle de vibrações.

A modelagem determinística de estruturas compósitas incorporando elementos piezelétricos acoplados de circuitos elétricos *shunt* é apresentada no Capítulo III. Observa-se uma sequência de modelagem, de forma que, primeiramente é dada ênfase a modelagem do

problema mecânico utilizando-se da teoria FSDT. Na sequência, com vistas à incorporação do elemento piezelétrico no modelo, faz-se uso da utilização da Teoria Mista. É dado foco na parametrização do modelo de elementos finitos do problema eletromecânico que permite a introdução de maneira eficiente e sistemática das incertezas nos parâmetros mais influentes. Na sequência, realiza-se a introdução dos circuitos *shunt* no modelo eletromecânico determinístico.

No Capítulo IV as variáveis fatoradas das matrizes de massa e rigidezes e os parâmetros do circuito *shunt* são então considerados como sendo variáveis aleatórias e estas modeladas como campos estocásticos gaussianos homogêneos. Para a discretização destes campos estocásticos, utiliza-se a técnica de expansão de Karhunen-Loëve via modificação das integrações direta das matrizes elementares determinísticas para a geração das matrizes elementares estocásticas exatas.

No Capítulo V são mostrados os resultados das simulações numéricas para uma viga de compósito contendo um elemento piezelétrico acoplado a um circuito elétrico *shunt*, comparando-se os casos de utilização de *shunt* resistivo e ressonante. Os resultados são os envelopes das Funções de Resposta em Frequência (FRFs) do sistema estocástico obtidos via emprego do método de simulação de Monte Carlo combinado com a amostragem por Hipercubo Latino. Assim, é possível analisar os efeitos das incertezas introduzidas no sistema através da análise das dispersões das respostas dinâmicas estocásticas.

No Capítulo VI são apresentadas as conclusões gerais e as sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO II

### REVISÃO SOBRE MATERIAIS COMPÓSITOS E PIEZELÉTRICOS

#### 2.1. Materiais Compósitos

Os materiais compósitos são aqueles formados pela combinação de dois ou mais materiais numa escala macroscópica de tal modo que, a concepção deste tipo de material seja realizada para que se consiga atingir melhores propriedades de engenharia em comparação com as de um material convencional, como o alumínio, por exemplo. De acordo com os requisitos de projeto, há o desejo de que algumas das propriedades possam ser melhoradas através do projeto de um material compósito. Dentre estas propriedades, pode-se citar casos em que se queria materiais com uma melhor rigidez, uma melhor resistência mecânica, a melhora da resistência à corrosão, a redução de peso de uma estrutura, o melhoramento das propriedades térmicas, da vida de fadiga ou da resistência ao desgaste. Assim, observa-se que materiais compósitos apresentam uma fase descontínua, chamada de reforço, embebida de uma fase contínua, chamada de matriz, e sua distribuição e interação vão determinar as propriedades finais do material (SOUZA 2003; REDDY 1997).

No atual contexto de engenharia, observa-se que com os crescentes avanços das pesquisas em engenharia de materiais, os compósitos têm assumido papel cada vez mais importante na indústria, uma vez que os mesmos conseguem fornecer características mecânicas únicas, as quais não seriam conseguidas utilizando-se dos materiais tradicionais (PINHEIRO,

BECKHAUSER e MENEZES, 2006). Com isso, observa-se que o uso destes materiais possibilitou grandes avanços tecnológicos em diversos setores, tornando-se fundamental em projetos de estruturas que exigem alto desempenho e confiabilidade, como nos produtos finais da indústria da construção civil, petrolífera, aeroespacial, automobilística, dentre outras. Nesse contexto, destacadamente observa-se o setor aeroespacial, que requer estruturas resistentes e de mínimo peso, considerando ainda a observância de aspectos relacionados a conforto no interior das aeronaves. Na Figura 2.1 ilustra-se a utilização de materiais compósitos em aeronaves, especificamente no *Boeing 787*, o qual foi introduzido no ano de 2011 e possui cinquenta por cento de toda sua estrutura neste tipo de material. Assim, é interessante salientar a crescente aplicação deste tipo de material, uma vez que o *Boeing 777*, introduzido no ano de 1995, possuía apenas doze por cento da sua estrutura em compósitos e cinquenta por cento dela em alumínio.

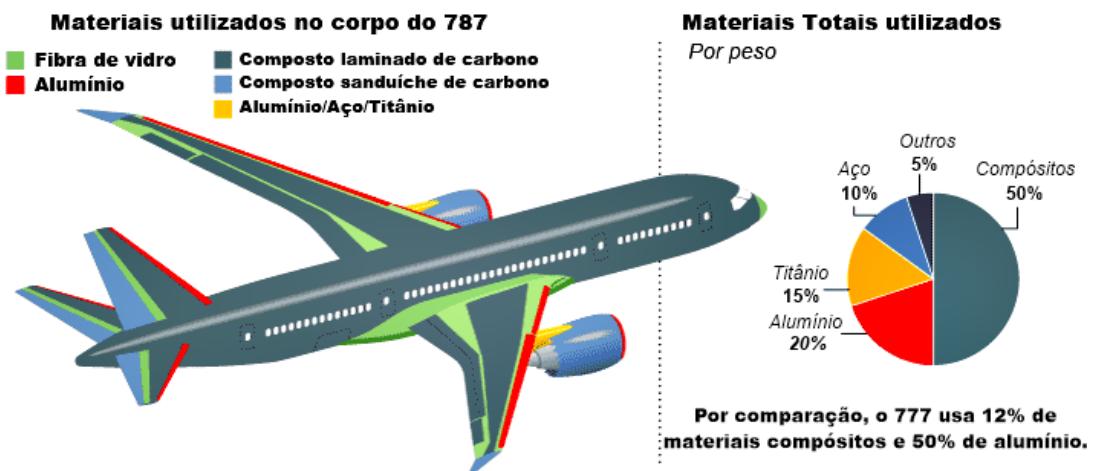


Figura 2.1 - Crescente utilização de materiais compósitos na indústria aeronáutica, *Boeing 787* ([http://modernairliners.com/Boeing787\\_files/Specifications.html](http://modernairliners.com/Boeing787_files/Specifications.html), acessado em 29/06/2015).

Segundo Callister Jr. e Rethwisch (2009), a classificação dos materiais compósitos se dá em termos da morfologia de seus agentes de reforço, sendo que, com esta classificação, tem-se os compósitos particulados, os compósitos reforçados com fibras e os compósitos estruturais, conforme ilustrado na Fig. 2.2.

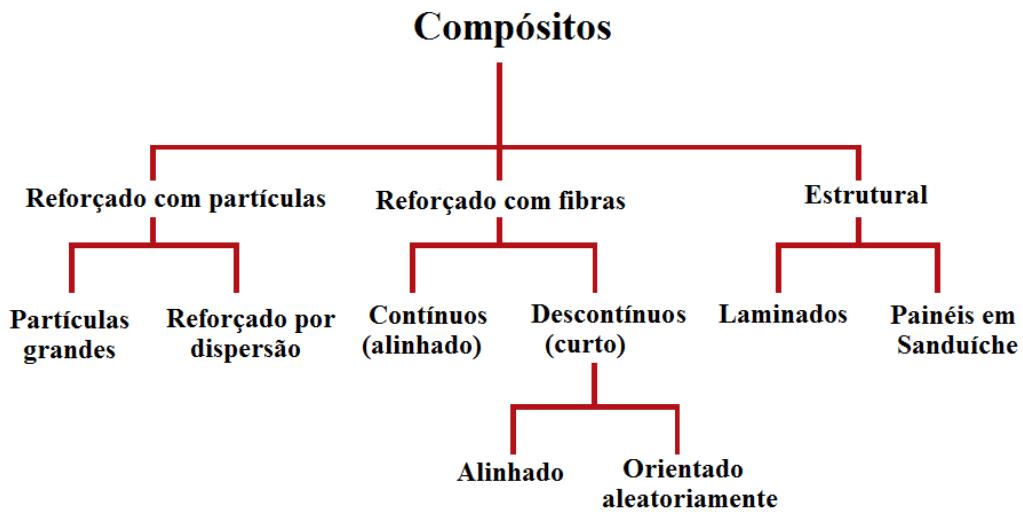


Figura 2.2 - Classificação dos materiais compósitos (adaptado de Callister Jr. e Rethwisch (2009))

Os compósitos reforçados com partículas podem ser de dois tipos: os compósitos reforçados com partículas grandes, e os compósitos reforçados por dispersão. A distinção entre essas subclassificações está baseada no mecanismo de reforço ou aumento de resistência, onde a fase particulada é mais dura e mais rígida do que a matriz (MENDONÇA, 2005; DIACENCO, 2010).

Para que se possa entender melhor do que se tratam os compósitos reforçados com partículas grandes, cita-se o exemplo do concreto, o qual é composto por cimento (matriz) e areia e brita (elementos particulados). Desta forma, emprega-se a teoria da mecânica do contínuo uma vez que tais tipos de materiais não são analisados sob o ponto de vista atômico ou molecular. Já no caso dos compósitos que têm sua resistência aumentada por dispersão, as interações ocorrem a nível atômico ou molecular, uma vez que, as partículas são, em geral, muito menores, com diâmetro entre 0,01 e 0,1  $\mu\text{m}$ . Como principal vantagem deste tipo de compósito reforçado com pequenas partículas é o fato de que o aumento da resistência é mantido a temperaturas elevadas e por longos períodos de tempo (DIACENCO, 2010).

A segunda classificação de compósitos trata dos reforçados com fibras. Assim, observa-se que as características mecânicas de um compósito reforçado com fibras não dependem somente das propriedades da fibra, mas também do arranjo ou orientação das mesmas umas em relação às outras, a concentração delas, e sua distribuição pela matriz. Neste sentido, têm-se dois tipos de fibras: as fibras contínuas e as fibras descontínuas ou curtas. Observa-se que que

as fibras contínuas, possuem a característica de reforçarem certas direções, de acordo com a sua disposição, sendo este reforço unidirecional ou bidirecional, enquanto que, as fibras curtas ou descontínuas produzem na sua grande maioria reforços aleatórios. Desta forma, é importante salientar que a direção das fibras é decidida de acordo com a direção dos esforços que irão atuar na estrutura (MENDONÇA, 2005; REDDY, 1997).

No caso do terceiro grupo de compósitos, os estruturais, os mesmos podem ser formados tanto por materiais homogêneos como por materiais compósitos cujas propriedades dependem não somente das propriedades dos materiais constituintes, mas também do projeto geométrico dos vários elementos estruturais. Os compósitos estruturais são divididos em dois tipos básicos: laminados e do tipo sanduíche (CALLISTER Jr. e RETHWISCH, 2009). Segundo Reddy (1997) a construção de um compósito laminado composto se dá pelo empilhamento de lâminas de materiais compósitos, que podem ser de diferente composição ou com diferentes orientações de fibras. Além disso, observa-se também que os mesmos possuem suas dimensões, largura e comprimento, de uma a duas ordens de magnitude maior do que a sua espessura. Além disso, os laminados compostos são modelados como elementos de placa pelo fato dos mesmos serem, em muitos casos, utilizados em situações com forças de membrana e flexão.

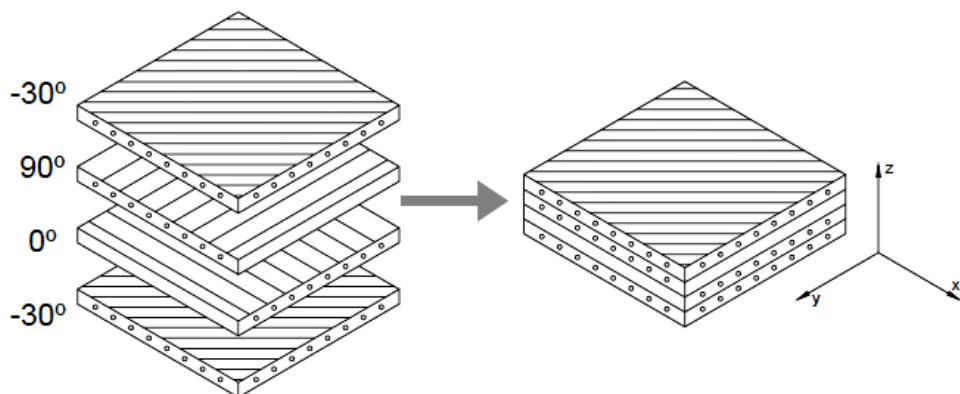


Figura 2.3 - Compósito estrutural do tipo laminado formado por várias lâminas  
(adaptado de Mendonça (2005)).

Na figura a seguir há a representação da vista superior de uma lâmina orientada de forma que há a adoção de um sistema local, designado por  $x_1-x_2-x_3$  e a representação também de um sistema global  $x-y-z$  comum a toda estrutura. Desta forma, observa-se que há a rotação de um

ângulo  $\theta$  de um sistema em relação ao outro. Esta rotação das lâminas pode ser utilizada de forma a maximizar a rigidez e a resistência mecânica e minimizar o peso final da estrutura, projetando-se assim cada lâmina do compósito com certo ângulo de rotação de forma a atingir estes objetivos. A designação dos laminados é efetuada segundo a disposição das camadas e a orientação das mesmas com relação ao eixo referencial global adotado (MENDONÇA, 2005; REDDY, 1997).

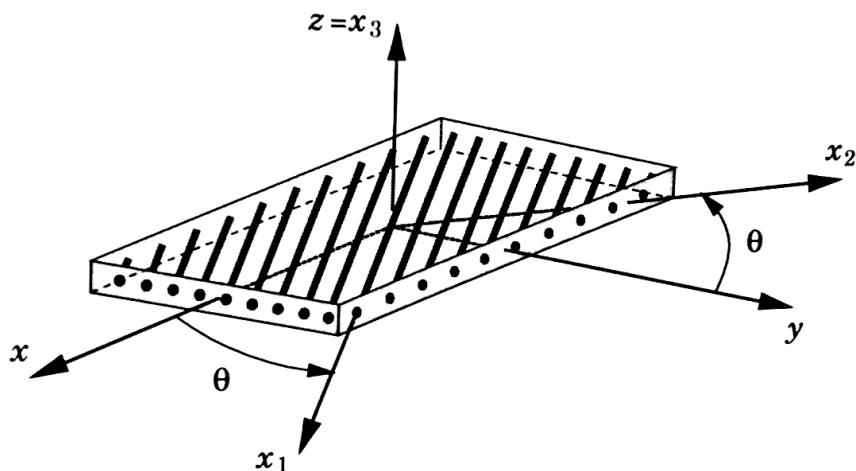


Figura 2.4 - Lâmina com orientação  $\theta$  arbitrária segundo o eixo de referência plano x-y, (adaptado de Reddy (1997)).

A importância da adoção de um sistema de coordenadas comum a toda estrutura está no fato do mesmo ser utilizado na formulação das equações constitutivas e na modelagem numérica da estrutura composta. As matrizes das propriedades dos materiais podem ser transformadas por rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo z usando uma matriz apropriada de transformação  $T$  para propriedades mecânicas ou  $Q$  para propriedades elétricas, as quais promovem a transformação do sistema de coordenadas locais do material para o sistema de coordenadas globais e principais da estrutura ( $x, y, z$ ). As matrizes de transformação são apresentadas nas Equações (2.1) e (2.2) (REDDY, 1997; FARIA 2006):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $c$  e  $s$  designam, respectivamente,  $\cos(\theta_k)$  e  $\sin(\theta_k)$ , sendo  $\theta_k$  o ângulo de orientação da  $k$ -ésima camada.

Já os compósitos estruturais do tipo sanduíche, são formados por lâminas fibrosas mais resistentes e um núcleo constituído de um material menos denso, que proporciona certo grau de rigidez contra o cisalhamento ao longo dos planos perpendiculares às faces e também resiste às deformações perpendiculares ao plano da face (DIACENCO, 2010; FARIA, 2006).

O núcleo de um material compósito do tipo sanduíche é comumente chamado de alma ou recheio. Existem dois tipos de almas: cheias e vazadas (ou vazias). Os materiais mais utilizados para almas cheias são madeiras celulares, diversas espumas celulares, resinas carregadas de microesferas vazias de vidro denominadas espumas sintéticas, plásticos, etc. Os principais materiais utilizados nas almas vazadas, essencialmente na forma de colmeia de abelhas (alvéolos hexagonais) e perfis são: ligas metálicas leves, papel Kraft (com ou sem resina), papel poliamida, etc. (FARIA, 2006; CALLISTER Jr. e RETHWISCH, 2009).

Os materiais ainda podem ser classificados no que diz respeito à quantidade de planos de simetria existentes em sua estrutura cristalina. Em decorrência do número de planos de simetria, há redução do número de termos independentes de rigidez na matriz de propriedades que cada material possui. Assim, a orientação interna da estrutura do material tem influência nas propriedades mecânicas deste material. Desta forma, os materiais podem ser classificados em isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos. Os anisotrópicos são aqueles que não possuem

planos de simetria em sua estrutura cristalina e, desta forma, suas propriedades mecânicas se diferem em todas as direções do material, sendo a sua matriz de propriedades mecânicas formada 21 termos independentes. Já os ortotrópicos possuem três planos de simetria mutuamente ortogonais e, assim sendo, sua matriz de propriedades mecânicas possui apenas nove termos independentes. Já os isotrópicos são aqueles que possuem infinitos planos de simetria e, desta maneira, as propriedades mecânicas são as mesmas em todas as direções internas do material, possuindo uma matriz de propriedades mecânicas apenas com dois termos independentes (REDDY, 1997, MENDONÇA, 2005). A relação entre tensão,  $\sigma$ , e deformação,  $\varepsilon$ , se dá por  $\sigma = C\varepsilon$ , onde  $C$  é a matriz das propriedades mecânicas do material. A Eq. (2.3) mostra esta relação para os materiais ortotrópicos, demonstrando como fica a matriz de propriedades mecânicas destes materiais. Os materiais ortotrópicos são os utilizados neste trabalho, tanto para o material composto quanto para a pastilha piezelétrica.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

## 2.2. Teorias de placas e cascas compostas laminadas

Uma grande diversidade de teorias pode ser encontrada na literatura, no que diz respeito à modelagem de estruturas compósitas laminadas, as quais são utilizadas na formulação de elementos finitos de materiais compósitos. Cada uma destas teorias apresenta suas particularidades, suas considerações, suas aplicações e simplificações. Desta forma, cada uma se demonstra mais adequada para cada tipo de problema, apresentando vantagens e desvantagens, tanto na sua aplicabilidade, no quanto próximo se consegue chegar ao resultado real, e no esforço computacional envolvido na sua implementação (DE LIMA, RADE e FARIA, 2009). Assim, observa-se que a principal diferença entre as várias teorias existentes se dá pela

ordem das funções polinomiais escolhidas na aproximação das variáveis de campo mecânicas e a sua abrangência de aplicação (REDDY, 1997; MENDONÇA 2005).

De acordo com Reddy (1997), duas abordagens são utilizadas na classificação das teorias de placas compósitas: Teorias da camada Equivalente Única (*Equivalent single-layer theories* - ESL) e Teoria da elasticidade tridimensional. As teorias ESL se dão no plano, de forma que, as mesmas foram criadas a partir da simplificação da Teoria da elasticidade tridimensional, levando-se em consideração premissas adequadas no que diz respeito à cinemática de deformação e também do estado de tensão ao longo da espessura do laminado. Já na Teoria da elasticidade tridimensional, não há simplificações e, desta forma, cada camada é modelada como um sólido em três dimensões. Dentro do grupo ESL, encontram-se a Teoria Clássica dos Laminados (CLT) e as Teorias de deformação cisalhante de placas laminadas, como a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (*First-Order Shear Deformation Theory* - FSDT) e a Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem ou de Alta Ordem (*High-Order Shear Deformation Theory* - HSDT), a qual foi proposta por Lo, Christensen e Wu (1977). Já no grupo da Teoria da elasticidade tridimensional estão as Formulações Tradicionais de elasticidade tridimensional e as teorias *Layerwise*.

### 2.2.1. Teoria Clássica dos Laminados (CLT)

Dentre as teorias que modelam todas as camadas do laminado como sendo apenas uma, a Teoria Clássica dos Laminados é a mais simples, a qual é uma extensão da teoria clássica de placas de Kirchhoff para placas compostas laminadas. A CLT possui os seguintes campos de deslocamentos (REDDY, 1997; MENDONÇA 2005):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{w_0}{x} \quad (2.4a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{w_0}{y} \quad (2.4b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.4c)$$

onde  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$ , são as componentes dos deslocamentos nas respectivas direções de coordenadas  $(x, y, z)$  em um ponto do plano médio, ou seja,  $z = 0$ .

Desta maneira, conhecidos os deslocamentos do plano médio da superfície de referência,  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$ , os deslocamentos de qualquer ponto arbitrário do contínuo tridimensional são determinados por meio das Eqs.(2.4). Observa-se que este campo de deslocamento implica que, uma linha reta e perpendicular à superfície média indeformada, também conhecida como superfície de referência, permanece reta e perpendicular a esse plano e não se alonga na direção da espessura, ou seja, permanece inextensível nesta direção (REDDY, 1997). Tal consideração é apresentada na figura a seguir, juntamente com um comparativo com as outras teorias ESL.

Desta maneira, a teoria CLT não leva em consideração o efeito das deformações cisalhantes transversais  $(\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$  e nem da deformação normal transversal  $(\varepsilon_{zz})$  (REDDY, 1997; MENDONÇA, 2005). Pode-se citar como desvantagem desta teoria o fato de requerer uma continuidade no campo dos deslocamentos, com funções com as primeiras derivadas contínuas. Esta condição pode ser assim representada, funções pertencentes ao espaço  $C^1$ . Esta não é uma condição difícil de ser alcançada ao se trabalhar apenas com soluções analíticas, mas no caso de formulações de elementos finitos, as teorias baseadas em aproximações no espaço  $C^1$  deixam o problema mais complexo se comparado com a utilização de funções que requerem apenas que as funções sejam contínuas, ou seja, que pertençam ao espaço  $C^0$  (FARIA, 2006).

Devido ao fato da teoria clássica considerar a hipótese linear e não levar em conta as deformações cisalhantes observa-se que esta teoria até pode ser utilizada na análise de tensões de placas compósitas, mas, só é interessante o uso da mesma na modelagem de compósitos laminados finos por conta da sua precisão, pois, o erro ao se utilizar esta teoria aumenta à medida que se aumenta a relação entre a espessura e a largura da estrutura laminada. (MENDONÇA, 2005).

### 2.2.2. Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)

A segunda teoria do conjunto de teorias ESL é a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT). Esta teoria considera cinco graus de liberdade e requer funções pertencentes ao espaço  $C^0$ , ou seja, funções contínuas (REDDY, 1997; FARIA, 2006). Seu campo de deslocamentos é apresentado nas Eqs. (2.5).

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \quad (2.5a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \quad (2.5b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.5c)$$

onde  $\psi_x$  e  $\psi_y$  são as rotações em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente, dos segmentos normais à superfície de referência, como ilustrado na Fig. 2.5 (c).

A Teoria FSDT consegue prever o comportamento de estruturas mais espessas do que a Teoria Clássica e são baseadas nas teorias de placas de Mindlin-Reissner, na qual as seções planas normais permanecem planas com relação à superfície média, mas não necessariamente normais durante e após a flexão. A Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem assume que a deformação cisalhante transversal varia linearmente ao longo da espessura do laminado, o que não acontece nos casos reais, requerendo assim, a introdução de uma constante de correção para as deformações de cisalhamento transversais  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$  (FARIA, 2006; DIACENCO, 2010)

Desta forma, a Teoria FSDT foi escolhida na modelagem da estrutura compósita laminada deste trabalho uma vez que a mesma se encaixa na classe de placas e cascas finas e moderadamente finas. Além disso, a FSDT é considerada a teoria que apresenta a melhor relação entre capacidade de predição e custo computacional para uma larga classe de aplicações. Como desvantagens desta teoria pode-se citar o problema de travamento ou *shear locking* na modelagem de placas extremamente finas (relação entre espessura e comprimento  $<0,02$  ), sendo que, tal problema leva a rigidez excessiva, além também da desvantagem de requerer um

fator de correção para as deformações cisalhantes transversais (MENDONÇA, 2005; FARIA, 2006; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014).

### 2.2.3. Teoria da Deformação Cisalhante de Alta Ordem (HSDT)

A HSDT é a teoria que conduz a distribuições de tensões e deformações cisalhantes transversais ( $\varepsilon_{xz}$  e  $\varepsilon_{yz}$ ) e normais ( $\varepsilon_{zz}$ ) bem próximas das obtidas pela Teoria da Elasticidade Tridimensional, não necessitando assim de constantes de correção para as deformações cisalhantes transversais, além de não apresentar o problema de travamento (*shear locking*) para o caso de modelagem de placas finas. Esta teoria é recomendada quando se tem placas compósitas laminadas espessas (relação entre espessura e comprimento  $> 0,25$ ) uma vez que assume uma distribuição parabólica ao longo da espessura do laminado e adota uma variação cúbica para os deslocamentos coplanares (MENDONÇA, 2005, ZAMBOLINI-VICENTE, 2014). A seguir é mostrado seu campo de deslocamentos segundo o trabalho de Lo, Christensen e Wu (1977):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\Phi_x(x, y, t) \quad (2.6a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\Phi_y(x, y, t) \quad (2.6b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t) \quad (2.6c)$$

onde,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  e  $\psi_z$  são as rotações da seção transversal nas direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$  como ilustrado na Fig. 2.5 (d). As funções  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ ,  $\zeta_z$ ,  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  são funções dependentes apenas das coordenadas  $(x, y)$ , as quais não apresentam significado físico evidente, mas, podem ser vistas como rotações de ordem superior que descrevem a deformação de uma linha normal em relação ao plano de referência (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977; MENDONÇA, 2005). Nestas condições, esta linha não permanece reta depois da deformação, conforme indicado na Fig. 2.5 (d).

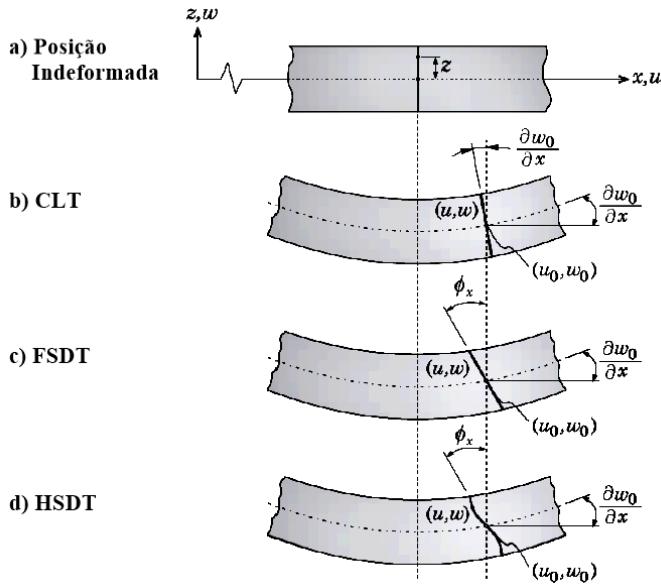


Figura 2.5 - Representação esquemática de uma placa composta em sua posição indeformada (a) e ilustração da cinemática das teorias ESL de deformação, CLT (b), FSDT (c) e HSDT (d) (adaptado de Diacenco (2010)).

#### 2.2.4. Teoria Mista

A estrutura compósita laminada modelada neste trabalho apresenta certo número de camadas em que uma é o elemento piezelétrico normalmente colado na face inferior ou superior da mesma. Desta forma, faz-se o uso da Teoria Mista, a qual considera o campo de deslocamentos mecânicos concebido de forma condensada em uma única camada equivalente e o potencial elétrico distribuído por camadas (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; CHEE, 2000).

Para o caso da modelagem dos campos de deslocamentos mecânicos, a Teoria Mista aplicada a cascas e placas compostas inteligentes finas e espessas pode adotar as aproximações tanto de baixa ordem, utilizando-se da teoria FSDT ou de alta ordem, utilizando-se da HSDT (REDDY, 1997). Esta é uma das principais vantagens da Teoria Mista em relação à teoria da camada equivalente discreta, pois ela considera os campos de deslocamentos mecânicos como sendo condensados em uma camada equivalente única, tendo como atrativo o baixo custo computacional comparado ao custo das teorias que consideram os campos de deslocamentos mecânicos como discretos em cada camada (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995;

SARAVANOS, 1999). Além disso, ela apresenta a vantagem de considerar as variáveis elétricas definidas segundo a estratificação do compósito, permitindo que seja realizada a introdução de diferentes sensores e atuadores na modelagem, além da possibilidade da captura da heterogeneidade elétrica que é induzida pelas camadas piezelétricas embutidas no compósito ao longo da espessura (FARIA, 2006; SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; SARAVANOS, 1999).

### **2.3. Fundamentos da piezeletricidade linear**

A piezeletricidade trata-se de uma propriedade dos materiais dielétricos, naturais ou sintéticos, que não apresentam estrutura cristalina simétrica em relação ao centro da célula. Tal propriedade pode ser observada em materiais inorgânicos como o quartzo, a turmalina e cerâmicas e em materiais orgânicos como os polímeros e tecidos biológicos, tais como osso, cabelo e pele (PIEFORT, 2001; SANTANA, 2007).

O efeito piezelétrico direto consiste na habilidade de ao se submeter um material piezelétrico a um carregamento mecânico externo, haver uma distribuição de cargas na superfície do mesmo, sendo que, tal característica é bastante utilizada na construção de sensores de deformação e para medidas indiretas de força e pressão. Já o efeito inverso se dá quando o piezelétrico é submetido a um campo elétrico e variações em sua forma e dimensões podem então serem observadas, sendo tal característica explorada na construção de atuadores e geradores de movimento (PIEFORT, 2001; FARIA, 2006; SANTANA, 2007).

Observa-se que os dois tipos de materiais piezelétricos mais utilizados em aplicações industriais são os piezocerâmicos, que possuem como principal representante o Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) e os piezopolímeros, principalmente representados pelo Polifluoreto de Vinilideno (PVDF) (SANTANA, 2007).

O efeito piezelétrico em cerâmicas piezelétricas policristalinas como é o caso do PZT, não existe em sua forma original, uma vez que estes cristais são randomicamente orientados, tendo-se um material macroscopicamente isotrópico e não piezelétrico. Desta forma, por meio da aplicação de elevados campos elétricos enquanto a cerâmica é submetida a altas temperaturas, os cristais são orientados de forma que o material se torna anisotrópico. Assim, após a retirada do campo elétrico, observa-se que o material permanece com uma polarização

residual, obtendo-se então propriedades piezelétricas a temperatura ambiente, (FARIA, 2006; SANTANA, 2007).

Na Figura 2.6 é mostrada a resposta de um piezelétrico a uma carga elétrica aplicada, o qual sofre mudanças em suas dimensões, caracterizando-se assim o efeito inverso destes materiais.

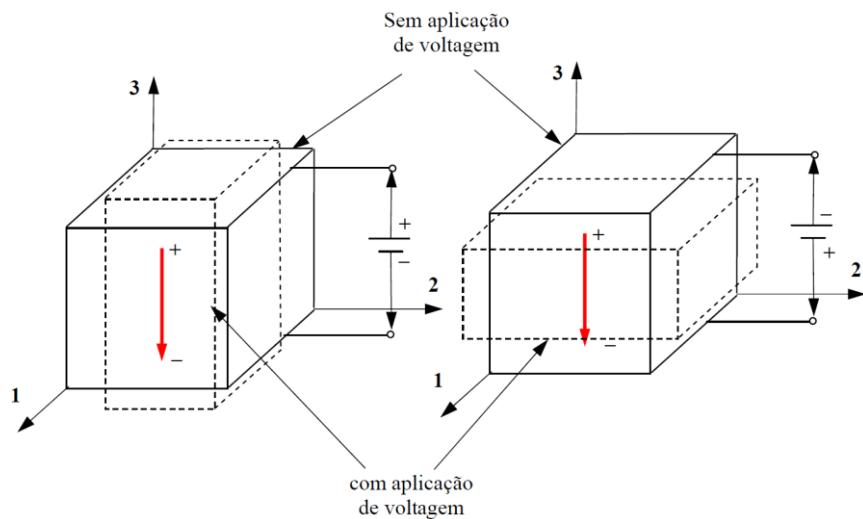


Figura 2.6 - Representação do efeito inverso dos piezelétricos: dimensões do elemento para diferentes polaridades de aplicação de voltagem (adaptado de Santana (2007)).

Assim, observa-se que o piezelétrico mostrado foi polarizado na direção 3 com a direção de polarização do mesmo indicado pela seta. Nota-se pela Fig. 2.6 que ao se aplicar uma voltagem com a mesma polaridade do piezelétrico, há uma expansão na direção 3 e contrações nas direções 1 e 2. Agora, no segundo caso, ao se aplicar uma polaridade contrária aquela do piezelétrico, há uma contração do mesmo na direção 3 e uma expansão nas direções 1 e 2. O elemento piezelétrico utilizado neste trabalho também é polarizado ao longo da espessura (direção 3), o qual foi concebido para atuar primariamente na direção do comprimento (direção 1), tendo-se interesse então no modo de atuação 31.

O coeficiente de acoplamento piezelétrico,  $K_{ij}$ , para um dado modo " $ij$ " é que indica a capacidade de transformação de energia elétrica em mecânica e vice-versa, sendo que, em geral, os PZTs possuem maior coeficiente de acoplamento se comparados aos PVDFs. É interessante

salientar que para se garantir que o efeito piezelétrico continue funcionando perfeitamente, o elemento não deve ser submetido a elevados campos elétricos no sentido oposto ao campo original de fabricação. Deve-se evitar também temperaturas elevadas, acima da temperatura de *Curie*, que é a temperatura na qual a estrutura cristalina do material sofre uma transição de fase e o mesmo deixa de apresentar propriedades piezelétricas. Depois de ultrapassada esta temperatura, o material perde a polarização remanescente induzida tornando-se inútil para a utilização como elemento transdutor de energia elétrica em mecânica (FARIA, 2006; SANTANA, 2007).

Para um dado elemento piezelétrico livre de tensões mecânicas e campos elétricos aplicados, assume-se as seguintes equações de deformações mecânicas e deslocamentos elétricos, são dadas respectivamente por (PIEFORT, 2001; SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; SARAVANOS, 1999; FARIA, 2006):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}^T \mathbf{E} \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.7b)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de deformações mecânicas  $[m/m]$ ,  $\mathbf{d}$  é a matriz de constantes piezelétricas de deformação  $[C/N]$ ,  $\mathbf{E}$  é o vetor dos campos elétricos  $[V/m]$ ,  $\mathbf{D}$  é o vetor de deslocamentos elétricos  $[C/m^2]$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor das tensões mecânicas  $[N/m^2]$  e o superscrito  $(.)^T$  indica a transposição da matriz dada.

No caso de aplicação simultânea ao piezelétrico de carregamento mecânico e elétrico, descreve-se o acoplamento eletromecânico de acordo com as seguintes relações (HAGOOD e VON FLOTOW, 1991; FARIA, 2006):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\chi}^E \mathbf{E} \quad (2.8b)$$

onde  $s^E$  é a matriz da flexibilidade medida em um campo elétrico constante (eletrodos em curto-circuito)  $[m^2/N]$  e  $\chi^\sigma$  é a matriz de constantes dielétricas medida para uma tensão mecânica constante  $[N/V^2]$ .

As equações de acoplamento eletromecânico podem também ser escritas de forma a se isolar as tensões mecânicas.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} + \chi^\varepsilon \mathbf{E} \quad (2.9b)$$

onde  $\mathbf{C}^E$  é o tensor de elasticidade linear para campo elétrico constante  $[N/m^2]$ ,  $\mathbf{e}$  é o tensor de constantes dielétricas para deformação mecânica constante  $[N/V^2]$  e  $\chi^\varepsilon$  é a matriz de permissividade elétrica para deformação mecânica constante  $[N/Vm]$  (HAGOOD e VON FLOTOW, 1991; SARAVANOS, 1999; PIEFORT, 2001; FARIA, 2006).

A Eq. (2.9) em sua forma matricial é expressa na Eq. (2.10):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & C_{14}^E & C_{15}^E & C_{16}^E & -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ C_{21}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & C_{24}^E & C_{25}^E & C_{26}^E & -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ C_{31}^E & C_{32}^E & C_{33}^E & C_{34}^E & C_{35}^E & C_{36}^E & -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \\ C_{41}^E & C_{42}^E & C_{43}^E & C_{44}^E & C_{45}^E & C_{46}^E & -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ C_{51}^E & C_{52}^E & C_{53}^E & C_{54}^E & C_{55}^E & C_{56}^E & -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ C_{61}^E & C_{62}^E & C_{63}^E & C_{64}^E & C_{65}^E & C_{66}^E & -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \chi_{11}^\varepsilon & \chi_{12}^\varepsilon & \chi_{13}^\varepsilon \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \chi_{21}^\varepsilon & \chi_{22}^\varepsilon & \chi_{23}^\varepsilon \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & \chi_{31}^\varepsilon & \chi_{32}^\varepsilon & \chi_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_5 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_6 \\ \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

## 2.4. Técnicas de controle de vibrações

As contínuas exigências impostas em muitas das novas aplicações de estruturas compósitas em engenharia para que se tenha uma melhor resposta em termos dos níveis aceitáveis de vibrações e ruídos, além de redução de peso implicam no desenvolvimento de novos conceitos e mecanismos de amortecimento (SARAVANOS, 1999). Neste contexto, em aplicações nas quais os carregamentos dinâmicos estão envolvidos, o interesse em atenuar os níveis de vibração e ruído torna-se um fator de extrema importância, visto que, a não resolução deste problema, pode comprometer a integridade da estrutura e levar a uma falha catastrófica. Como agravante, observa-se que estas estruturas estão sendo desenvolvidas de forma que sejam cada vez mais leves e extensas e com velocidades de operação cada vez mais elevadas. Neste contexto, com o intuito de realizar o controle de vibrações e ruído de sistemas dinâmicos e assim, atenuar os inconvenientes causados, várias técnicas de controle têm sido desenvolvidas e aplicadas no tratamento deste tipo de problema (GUARALDO NETO, 2012).

Como abordado em seções anteriores, os materiais piezelétricos possuem uso bastante comum no controle de vibrações tanto em técnicas ativas quanto passivas. As técnicas ativas são caracterizadas pela presença dos atuadores, fontes de potência e sistemas de controle. Já nas técnicas passivas as fontes de potência e os sistemas de controle são suprimidos, explorando as características físicas dos materiais inteligentes, de forma que uma parcela da energia de deformação é absorvida nos modos de interesse e dissipada através de algum mecanismo de dissipação (CARUSO, 2001; MENDONÇA, 2005). Neste trabalho tem-se o interesse nas técnicas de controle passivo envolvendo os materiais piezelétricos, sendo assim de fundamental importância o entendimento do princípio de funcionamento de tais técnicas.

### 2.4.1. Técnicas de controle ativo

Nas técnicas de controle ativo, existem três mecanismos principais que trabalham de forma integrada, que são os sensores, os atuadores e os sistemas de controle ou controladores. Como as técnicas ativas se baseiam na aplicação de forças ou estímulos destinados a anular o efeito das perturbações externas, há necessidade do uso de sensores para que se possa captar as respostas dinâmicas, necessidade também de atuadores, os quais são os responsáveis pela

aplicação das forças ou ondas sonoras de controle, além de se necessitar também de um sistema de controle que tenha uma lei e controle as entradas e saídas do sistema, (SANTANA, 2007).

As técnicas de controle ativo são reconhecidas por sua eficiência e adaptabilidade, mas, apresentam certos inconvenientes e limitações, tais como: alto custo de desenvolvimento e implementação; uso de fontes de fontes externas de potência, podendo levar a instabilidade no sistema; não robustez, uma vez que o controle ativo torna-se difícil de operar em altas frequências pelo fato de requerer maiores velocidades de processamento dos sinais e de ação dos atuadores; eficiência do controle dependente da instrumentação utilizada, de forma que, para grandes esforços, geralmente são requeridos atuadores de grande volume e de preço elevado. Assim, destaca-se o importante papel dos materiais piezelétricos a partir da década de 1990 no controle ativo, sendo os mesmos utilizados como sensores e atuadores, tanto em efeito direto como inverso, exibindo características bastante interessantes, principalmente pela sua elevada capacidade de transdução e a pouca intrusão, podendo os mesmos serem integrados à estrutura a ser controlada como um de seus membros, colados a superfície ou inseridos em seu volume, (SANTANA, 2007).

#### *2.4.2. Técnicas de controle passivo*

O uso de técnicas de controle passivo de vibrações é bastante aplicado na literatura. Muitos trabalhos demonstram que a adição de um amortecimento passivo em um sistema estrutural, com o intuito de realizar o controle da vibração de tal estrutura, pode aumentar em muito o desempenho e a estabilidade do sistema dinâmico. Assim, nota-se que existem várias maneiras de se aumentar o amortecimento de uma estrutura, sendo que, a mais comum é a adição de materiais dissipadores de energia ou com elevado fator de perda tais como os materiais viscoelásticos, as ligas com memória de forma e a utilização de absorvedores dinâmicos de vibrações (HAGOOD e VON FLOTOW, 1991).

Outra possibilidade de se aumentar o amortecimento de uma estrutura é o desenvolvimento de estruturas passivamente amortecidas via incorporação de elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos passivos. Como já mencionado, devido ao efeito piezelétrico, camadas piezelétricas apresentam a capacidade de conversão de tensão mecânica e/ou energia cinética em energia elétrica durante um ciclo de vibração e vice-versa, permitindo,

assim, a capacidade de dissipação de energia elétrica através do circuito elétrico passivo. Em comparação com outras técnicas que, tipicamente, introduzem alto amortecimento, tais como as técnicas que utilizam camadas de materiais viscoelásticos ou também técnicas de amortecimento ativo com controle de *feedback* ou ainda ligas com memória de forma, o conceito de amortecimento passivo utilizando-se materiais piezelétricos e circuitos elétricos passivos ou comumente chamados de circuitos *shunt* trazem consigo características muito desejáveis. Dentre estas características, pode-se citar: a possibilidade de mudança do grau de amortecimento de forma espontânea ou periódica, sendo que, esta modificação se dá por meio da variação das propriedades dos elementos elétricos passivos do *shunt* (resistores, capacitores, indutores etc.) ou através da reconfiguração do circuito elétrico; a melhoria no amortecimento em estruturas compósitas não reduz a rigidez do laminado, como no caso da utilização de camadas viscoelásticas; é uma técnica que requer o mínimo em *hardware*, o qual pode até ser encapsulado no laminado, utilizando-se então de tecnologia embarcada, acrescentando-se assim o mínimo de massa a estrutura. Consequentemente, a abordagem pode ser muito adequada para o controle de vibrações em rotação ou componentes móveis, tais como pás de turbomáquinas e helicóptero (HAGOOD e VON FLOTOW, 1991; SARAVANOS, 1999).

Desta forma, o amortecimento passivo de vibrações pode ser obtido colando-se um elemento piezelétrico na estrutura que se deseja amortecer e conectando-se aos eletrodos deste um circuito elétrico externo chamado de circuito elétrico *shunt*, o qual será composto de uma impedância elétrica. Assim, para que a energia de um determinado modo seja absorvida e dissipada neste circuito, basta sintonizar o mesmo de acordo com o modo de vibração de interesse (CARUSO, 2001). Um arranjo típico contendo um elemento piezelétrico acoplado a uma estrutura e um circuito *shunt* ligado aos eletrodos deste elemento é apresentado na Fig. 2.7.

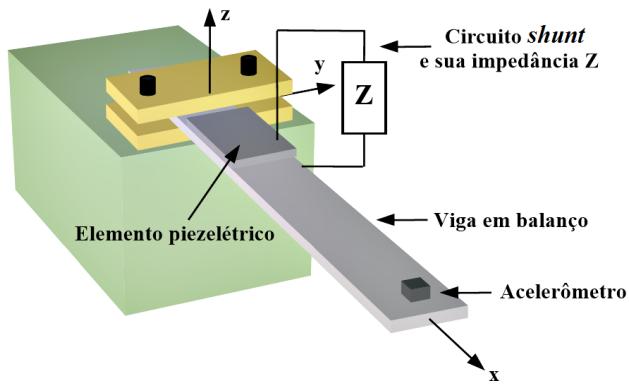


Figura 2.7 - Viga engastada amortecida via uso de circuito *shunt* ligado ao elemento piezelétrico (adaptado de Caruso (2001)).

No trabalho de Caruso (2001) ressalta-se que um circuito elétrico de controle passivo de vibração, *shunt*, também pode ser utilizado em conjunto com uma técnica de controle ativo, obtendo-se um mecanismo de controle semi-ativo. Neste caso, o circuito *shunt* adicionaria amortecimento ao sistema controlado além de proporcionar um aumento na margem de estabilidade do controle ativo, trabalhando assim com as características favoráveis de cada um dos tipos de controles.

No trabalho de Lesieutre (1998) são mostradas as quatro principais topologias de circuitos elétricos *shunt* que são o resistivo, o ressonante, o capacitivo e o chaveado, ilustrados na figura a seguir. A abreviação PZT se refere a elemento piezelétrico e, desta forma, Cpzt é a capacidade inerente da pastilha piezelétrica.

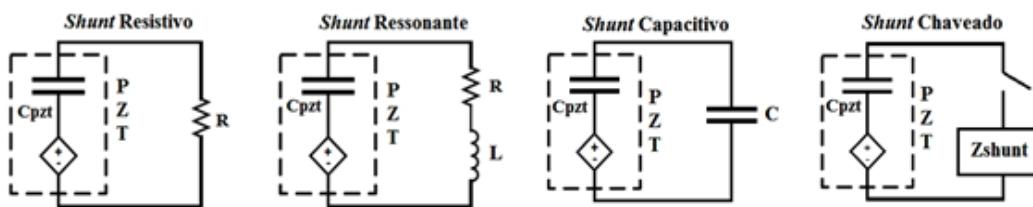


Figura 2.8 - Principais topologias de circuitos *shunt* (adaptado de Lesieutre (1998)).

O primeiro circuito mostrado na Fig. 2.8 é o circuito *shunt* resistivo. Este tipo de circuito dissipava a energia de vibração através do efeito Joule, inserindo assim amortecimento no sistema.

original. Já o segundo tipo de circuito apresentado é o circuito *shunt* ressonante. Este circuito possui comportamento similar à inserção de um absorvedor dinâmico de vibrações no sistema. A terceira topologia de circuito *shunt* apresentada é o circuito *shunt* capacitivo. Sua principal característica é o fato deste tipo de circuito ser capaz de alterar a rigidez efetiva do elemento piezelétrico. O último tipo de circuito *shunt* apresentado é o chaveado. A característica mais importante deste tipo de circuito é ajustar o comportamento do circuito em resposta ao que acontece com o sistema, (LESIEUTRE, 1998).

Dentre as topologias de circuitos *shunt* aqui apresentadas, o circuito ressonante se destaca. Formado por um indutor e um resistor, este circuito permite a sintonia para qualquer frequência que se queira amortecer, seja uma frequência natural do sistema ou não. É importante ressaltar ainda o fato de que a realização de certas modificações na configuração deste tipo de circuito possibilita o amortecimento simultâneo de mais de um modo de vibrar. Assim, como já mencionado, sob o ponto de vista mecânico, o circuito *shunt* ressonante é visto pelo sistema como um absorvedor dinâmico de vibrações (VIANA, 2005). Neste trabalho é dada atenção especial aos circuitos *shunt* resistivo e ressonante.

## CAPÍTULO III

### MODELAGEM DETERMINÍSTICA DE PLACAS COMPÓSITAS COM ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS ACOPLADOS A CIRCUITOS SHUNT

#### 3.1. Modelagem do problema mecânico

Como mencionado no capítulo anterior, neste trabalho é adotada a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem, FSDT, para a modelagem do problema mecânico determinístico. De acordo com a FSDT, os deslocamentos em um ponto arbitrário do elemento são expressos utilizando-se das Eqs. (2.5), as quais podem ser escritas de forma condensada como apresentado na Eq. (3.1) (REDDY, 1997; MENDONÇA, 2005):

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}_u(z) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (3.1)$$

Sendo que:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\}^T \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{A}_u(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 + z\mathbf{A}_I \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \{u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \psi_y(x, y, t)\}^T \quad (3.2c)$$

onde  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$  e  $w(x, y, z, t)$  são os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  são os deslocamentos no plano médio nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;  $\psi_x$  e  $\psi_y$  são, as rotações da seção transversal.

Assumindo-se pequenos deslocamentos, com os campos de deslocamentos mecânicos previamente definidos e, considerando-se as deformações resultantes separadas em deformações de flexão-membrana e cisalhamento,  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ , pode-se obter a seguinte relação condensada entre as deformações e os deslocamentos, os quais são relacionados pelas matrizes dos operadores diferenciais como segue (MENDONÇA, 2005; FARIA, 2006):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = \mathbf{D}_b(z) \mathbf{u}(x, y, t) = (\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_I) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (3.3a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = \mathbf{D}_s(z) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (3.3b)$$

onde  $\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \end{bmatrix}$  são as

matrizes dos operadores diferenciais de flexão-membrana,  $\mathbf{D}_b = (\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_I)$ , e cisalhamento,  $\mathbf{D}_s$ .

Para modelagem mecânica por elementos finitos é adotado um elemento de placa plana retangular contendo oito nós da família *Serendipity* (REDDY, 1997), o qual não possui nó central, como mostrado a seguir:

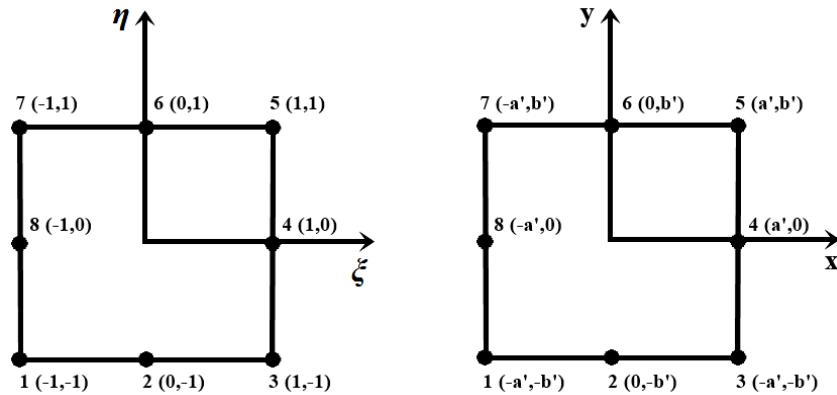


Figura 3.1 - Elemento retangular de oito nós da família *Serendipity*, em coordenadas locais (esquerda) e globais (direita), (adaptado de Faria, 2006).

A Fig. 3.1 ilustra o elemento finito de dimensões  $(a, b)$  em coordenadas locais e globais, sendo que,  $a = 2a'$  e  $b = 2b'$ , obtendo-se as seguintes relações entre coordenadas:

$$x = \frac{I}{2} [\xi(x_4 - x_8) + x_8 + x_4] \quad (3.4a)$$

$$y = \frac{I}{2} [\eta(y_6 - y_2) + y_6 + y_2] \quad (3.4b)$$

A matriz Jacobiana de transformação linear entre as coordenadas globais e locais pode ser definida conforme a Eq. (3.5) (REDDY, 1997; SOUZA, 2003; FARIA, 2006).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_4 - x_8) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O Jacobiano  $J$  é o determinante da matriz Jacobiana e importante fator na integração das matrizes elementares. Assume-se para este elemento o valor de  $J = \det(\mathbf{J}) = ab / 4$ , sendo  $a$  e  $b$  as dimensões do elemento finito.

Em função da utilização da teoria FSDT sabe-se que a mesma adota cinco variáveis mecânicas na definição dos seus campos de deslocamentos, as quais podem ser expressas em termos das suas 40 correspondentes variáveis mecânicas nodais,  $\mathbf{u}_e = \{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, \psi_{x_{ij}}, \psi_{y_{ij}}\}$  com  $i=1\dots 8$ , designando cada um dos oito nós do elemento, e  $j=1\dots 5$ , referenciando os cinco graus de liberdade em cada nó, totalizando 40 graus de liberdade por elemento finito (REDDY, 1997).

A correspondência entre os deslocamentos totais do elemento finito e a contribuição de cada nó se dá por meio das Funções de Forma,  $N_u$ , que representam as especificidades de cada tipo de elemento. As funções de forma, para o tipo de elemento finito utilizado, são definidas a seguir e já se encontram representadas em termos das coordenadas locais  $(\xi, \eta)$ , com  $\xi$  e  $\eta$  variando de  $-1$  a  $1$  (FARIA, 2006; DE LIMA, 2007; DIACENCO, 2010).

$$N_1(\xi, \eta) = -(1/4)(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (3.6a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = (1/2)(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.6b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = -(1/4)(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \quad (3.6c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = (1/2)(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \quad (3.6d)$$

$$N_5(\xi, \eta) = -(1/4)(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \quad (3.6e)$$

$$N_6(\xi, \eta) = (1/2)(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) \quad (3.6f)$$

$$N_7(\xi, \eta) = -(1/4)(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \quad (3.6g)$$

$$N_8(\xi, \eta) = (1/2)(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta) \quad (3.6h)$$

Pode-se escrever o vetor dos deslocamentos do elemento finito em função do vetor dos deslocamentos nodais, tendo-se de forma simplificada:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, t) = N_u(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{u}_e = \{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, \psi_{x_{ij}}, \psi_{y_{ij}}\}$ , com  $i=1\dots 8$  e  $j=1\dots 5$ , tendo-se um vetor de dimensão  $40 \times 1$  e  $N_u(\xi, \eta)$  é a matriz de Funções de Forma a qual possui valores reais e dimensão  $5 \times 40$ .

Desta forma, os campos de deslocamentos representados pela Eq. (3.1) podem ser definidos em termos dos deslocamentos nodais e das Funções de Forma como mostrado na Eq. (3.8):

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, z, t) = \mathbf{A}_u(z) N_u(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) \quad (3.8)$$

As deformações de flexão-membrana e de cisalhamento, dadas nas Eqs.(3.3), respectivamente, podem ser definidos em termos dos deslocamentos nodais e das Funções de Forma como mostrado na Eq. (3.8). Assim, introduzindo-se os termos de simplificação  $\mathbf{B}_{b0}$ ,  $\mathbf{B}_{b1}$  e  $\mathbf{B}_{s0}$ , tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) = (\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_1) N_u(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) = (\mathbf{B}_{b0} + z\mathbf{B}_{b1}) \mathbf{u}_e \quad (3.9a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\xi, \eta, z, t) = \mathbf{D}_s(z) N_u(\xi, \eta) \mathbf{u}_e(t) = \mathbf{B}_{s0} \mathbf{u}_e \quad (3.9b)$$

Agora, para que seja possível encontrar as matrizes de massa e rigidezes elementares, são necessárias as integrações. Sabe-se que a energia cinética a nível elementar é dada por (FARIA, 2006; DE LIMA, 2007; RIBEIRO e DE LIMA, 2014):

$$E_c = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho_k \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dV_e \quad (3.10)$$

onde,  $\rho_k$  é a densidade do material na  $k$ -ésima camada,  $V_e$  é definido como o volume do elemento finito e  $\dot{\mathbf{U}}$  é a derivada do vetor dos campos de deslocamentos  $\mathbf{U}$ , definido na Eq. (3.1).

Assim, partindo-se da equação da energia cinética a nível elementar, encontra-se a matriz de massa elementar  $\mathbf{M}_{uu}^e$ , que representa a seguinte integração:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{V_e} \rho_k \mathbf{N}_u^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N}_u dV_e \quad (3.11)$$

onde  $k$  designa o número da camada do compósito na qual a integração está sendo realizada.

Para que se possa entender melhor como é realizada a integração da matriz de massa elementar: sabe-se que a matriz  $\mathbf{A}_u$  pode ser decomposta em duas fatorando-se o termo  $z$ , que diz respeito à espessura das camadas, sendo  $\mathbf{A}_u = \mathbf{A}_\theta + z\mathbf{A}_I$ . Desta forma, ao se realizar a multiplicação  $\mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u$ , tem-se como resultado uma matriz independente do parâmetro  $z$ ,  $\overline{\mathbf{A}}_I = \mathbf{A}_\theta^T \mathbf{A}_\theta$ , outra com  $z$  fatorado,  $\overline{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_\theta^T \mathbf{A}_I + \mathbf{A}_I^T \mathbf{A}_\theta$ , e uma última em função de  $z^2$ ,  $\overline{\mathbf{A}}_3 = \mathbf{A}_I^T \mathbf{A}_I$ . Portanto, para se encontrar a matriz de massa elementar, realiza-se a integração dada na Eq. (3.12).

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-I}^{\xi=I} \int_{\eta=-I}^{\eta=I} \rho_k \mathbf{N}_u^T (\overline{\mathbf{A}_1} + \overline{\mathbf{A}_2} + \overline{\mathbf{A}_3}) \mathbf{N}_u J d\eta d\xi dz \quad (3.12)$$

onde  $z_k$  e  $z_{k+1}$  indicam as coordenadas da camada na qual está se realizado a integração e  $J$  é o jacobiano previamente definido.

Observa-se que a matriz de massa elementar é composta pela soma de três matrizes, uma vez que as mesmas se encontram parametrizadas pela espessura e pela densidade  $\rho_k$  de cada camada. Desta forma:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) \rho_k \mathbf{M}_{u1} + (z_{k+1}^2 - z_k^2) \rho_k \mathbf{M}_{u2} + (z_{k+1}^3 - z_k^3) \rho_k \mathbf{M}_{u3} \quad (3.13)$$

Para simplificação da terminologia utilizada, facilidade de parametrização e implementação computacional em ambiente MATLAB®, a espessura de cada camada do composto  $h_k$ , é utilizada da seguinte maneira (DIACENCO, 2010; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014):

$$(z_{k+1}^i - z_k^i) = t_k^i = \left[ k^i - (k-1)^i \right] h_k^i, \text{ com } i=1\dots 3 \quad (3.14)$$

A matriz de massa elementar pode então ser escrita da seguinte maneira simplificada:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 t_k^i \rho_k \mathbf{M}_{ui} \quad (3.15)$$

É importante salientar sobre a vantagem da parametrização do modelo, uma vez que as incertezas presentes nos parâmetros estruturais serão introduzidas por meio das variáveis

aleatórias fatoradas das matrizes de massa e rigidezes, as quais são representadas pelas espessuras das camadas e pelos ângulos de direções das fibras do compósito. O processo de parametrização foi demonstrado na obtenção da matriz de massa elementar, sendo que, este procedimento é estendido a todas as matrizes deste trabalho, utilizando-se de um processo e nomenclatura semelhantes. Este procedimento permite realizar de maneira mais conveniente e eficiente a introdução das incertezas paramétricas no modelo de elementos finitos além de levar a um menor custo computacional envolvido em procedimentos iterativos de estocagem matricial durante a montagem das matrizes globais (ZAMBOLINI-VICENTE, 2014).

Para a obtenção das matrizes de rigidezes elementares do problema mecânico, tanto de flexão-membrana quanto de cisalhamento, é interessante a prévia demonstração de alguns conceitos que serão necessários na integração destas matrizes. Como já mencionado, faz-se a utilização neste trabalho de materiais ortotrópicos, sendo que, a forma da matriz de propriedades mecânicas deste tipo de material foi mostrada na Eq. (2.3). Outro importante aspecto é o fato de se poder utilizar um compósito laminado com diferentes direções de fibras  $\theta_k$  em cada camada. Portanto, para se encontrar as matrizes de propriedades mecânicas,  $C_b$  e  $C_s$ , que levam em consideração os ângulos de direções das fibras do compósito, utiliza-se as matrizes de transformação das propriedades mecânicas,  $T_b$  e  $T_s$ , flexão-membrana e cisalhamento, que são uma subdivisão da matriz  $T$ , previamente definida na Eq.(2.1). (FARIA, 2006; DE LIMA, 2007; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014; RIBEIRO e DE LIMA, 2014):

$$C_{bt} = T_b C_b T_b^T \quad (3.16a)$$

$$C_{st} = T_s C_s T_s^T \quad (3.16b)$$

onde,  $C_b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$ ,  $C_s = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}$ ,  $T_b = \begin{bmatrix} c_k^2 & 1 - c_k^2 & 0 & -2s_k c_k \\ 1 - c_k^2 & c_k^2 & 0 & 2s_k c_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_k c_k & -s_k c_k & 0 & 2c_k^2 - 1 \end{bmatrix}$ ,

$$T_s = \begin{bmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{bmatrix}, \quad s_k = \sin(\theta_k) \text{ e } c_k = \cos(\theta_k).$$

As matrizes  $\mathbf{T}_b$  e  $\mathbf{T}_s$  podem ser parametrizadas da seguinte maneira:

$$\mathbf{T}_b = c_k^2 \mathbf{T}_{bI} + \mathbf{T}_{b2} + s_k c_k \mathbf{T}_{b3} \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{T}_s = c_k \mathbf{T}_{sI} + s_k \mathbf{T}_{s2} \quad (3.17b)$$

onde  $\mathbf{T}_{bI} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}_{b3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}_{sI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}_{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Combinando as Eqs. (3.16) e (3.17) obtém-se as seguintes matrizes de propriedades mecânicas parametrizadas, com os termos  $s_k = \sin(\theta_k)$  e  $c_k = \cos(\theta_k)$  fatorados (DIACENCO, 2010; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014):

$$\mathbf{C}_{bt} = c_k^4 \mathbf{C}_{btI} + c_k^2 \mathbf{C}_{bt2} + s_k c_k^3 \mathbf{C}_{bt3} + \mathbf{C}_{bt4} + s_k c_k \mathbf{C}_{bt5} + s_k^2 c_k^2 \mathbf{C}_{bt6} \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{C}_{st} = c_k^2 \mathbf{C}_{stI} + s_k c_k \mathbf{C}_{st2} + s_k^2 \mathbf{C}_{st3} \quad (3.18b)$$

onde,  $\mathbf{C}_{btI} = \mathbf{T}_{bI} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{bI}^T$ ,  $\mathbf{C}_{bt2} = \mathbf{T}_{bI} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b2}^T + \mathbf{T}_{b2} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{bI}^T$ ,  $\mathbf{C}_{bt3} = \mathbf{T}_{bI} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b3}^T + \mathbf{T}_{b3} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{bI}^T$ ,  $\mathbf{C}_{bt4} = \mathbf{T}_{b2} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b2}^T$ ,  $\mathbf{C}_{bt5} = \mathbf{T}_{b2} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b3}^T + \mathbf{T}_{b3} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b2}^T$ ,  $\mathbf{C}_{bt6} = \mathbf{T}_{b3} \mathbf{C}_b \mathbf{T}_{b3}^T$ ,  $\mathbf{C}_{stI} = \mathbf{T}_{sI} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{sI}^T$ ,  $\mathbf{C}_{st2} = \mathbf{T}_{sI} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{s2}^T + \mathbf{T}_{s2} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{sI}^T$ ,  $\mathbf{C}_{st3} = \mathbf{T}_{s2} \mathbf{C}_s \mathbf{T}_{s2}^T$ .

Para a obtenção das matrizes de rigidezes elementares do problema mecânico determinístico, primeiramente define-se a relação entre o campo de tensão e deformação para o material composto ortotrópico, dada nas Eqs. (3.19):

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{C}_{bt} \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (3.19a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{C}_{st} \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (3.19b)$$

Faz-se na Eq. (3.20) a definição da energia potencial de deformação mecânica (FARIA, 2006; DE LIMA, 2007; RIBEIRO e DE LIMA, 2014):

$$P_e = \int \int \int_{z \xi \eta} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\eta d\xi dz \quad (3.20)$$

Combinando-se as Eqs. (3.19) e (3.20), pode-se chegar às matrizes de rigidezes mecânica elementares para os efeitos de flexão-membrana, Eq. (3.21a), e cisalhamento, Eq. (3.21b):

$$\mathbf{K}_{ub}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu} J dV_e \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{K}_{us}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{s0} J dV_e \quad (3.21b)$$

onde,  $\mathbf{B}_{bu} = (\mathbf{B}_{b0} + z\mathbf{B}_{b1})$  e  $V_e$  é o volume do elemento finito. Além disso, o termo  $\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu}$  resulta em três matrizes, a saber:  $\mathbf{B}_{bz0}$ , independente de  $z$ ,  $\mathbf{B}_{bz1}$ , com  $z$  fatorado e  $\mathbf{B}_{bz2}$ , dependente do termo  $z^2$ , sendo que,  $\mathbf{B}_{bz0} = \mathbf{B}_{b0}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b0}$ ,  $\mathbf{B}_{bz1} = \mathbf{B}_{b0}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b1} + \mathbf{B}_{b1}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b0}$  e  $\mathbf{B}_{bz2} = \mathbf{B}_{b1}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{b1}$ . Já a multiplicação da parcela de cisalhamento independe do parâmetro  $z$  e resulta em apenas um termo, dado por  $\mathbf{B}_{sz0} = \mathbf{B}_{s0}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{s0}$ .

Em função da parametrização, observa-se que as matrizes de propriedades  $\mathbf{C}_{bt}$  e  $\mathbf{C}_{st}$  dadas nas Eqs. (3.18) são compostas por seis e três matrizes, respectivamente. Desta forma,  $\mathbf{B}_{bz0}$ ,  $\mathbf{B}_{bz1}$  e  $\mathbf{B}_{bz2}$ , são formadas por seis matrizes, sendo que, de forma simplificada,  ${}_j \mathbf{B}_{bz0}$ ,

${}_j \mathbf{B}_{bzI}$  e  ${}_j \mathbf{B}_{bz2}$  com  $j=1\dots6$ . Já a parcela de cisalhamento,  $\mathbf{B}_{sz0}$ , será composta por três matrizes, sendo dadas por  ${}_j \mathbf{B}_{sz0}$ , com  $j=1\dots3$  (DIACENCO, 2010; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014).

A seguir é mostrada a integração das matrizes de rigidezes elementares, sendo que, observa-se pela presença do termo de parametrização da espessura,  $t_k^i$  com  $i=1\dots3$ , que as mesmas já se encontram integradas em  $z$ .

$${}_j \mathbf{K}_{bz0}^e = \sum_{k=1}^n t_k^2 \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[ c_k^4 \left( {}_1 \mathbf{B}_{bz0} \right) + c_k^2 \left( {}_2 \mathbf{B}_{bz0} \right) + s_k c_k^3 \left( {}_3 \mathbf{B}_{bz0} \right) + \left( {}_4 \mathbf{B}_{bz0} \right) + \right. \\ \left. + s_k c_k \left( {}_5 \mathbf{B}_{bz0} \right) + s_k^2 c_k^2 \left( {}_6 \mathbf{B}_{bz0} \right) \right] J d\eta d\xi \quad (3.22)$$

$${}_j \mathbf{K}_{bzI}^e = \sum_{k=1}^n t_k^2 \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[ c_k^4 \left( {}_1 \mathbf{B}_{bzI} \right) + c_k^2 \left( {}_2 \mathbf{B}_{bzI} \right) + s_k c_k^3 \left( {}_3 \mathbf{B}_{bzI} \right) + \left( {}_4 \mathbf{B}_{bzI} \right) + \right. \\ \left. + s_k c_k \left( {}_5 \mathbf{B}_{bzI} \right) + s_k^2 c_k^2 \left( {}_6 \mathbf{B}_{bzI} \right) \right] J d\eta d\xi \quad (3.23)$$

$${}_j \mathbf{K}_{bz2}^e = \sum_{k=1}^n t_k^3 \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[ c_k^4 \left( {}_1 \mathbf{B}_{bz2} \right) + c_k^2 \left( {}_2 \mathbf{B}_{bz2} \right) + s_k c_k^3 \left( {}_3 \mathbf{B}_{bz2} \right) + \left( {}_4 \mathbf{B}_{bz2} \right) + \right. \\ \left. + s_k c_k \left( {}_5 \mathbf{B}_{bz2} \right) + s_k^2 c_k^2 \left( {}_6 \mathbf{B}_{bz2} \right) \right] J d\eta d\xi \quad (3.24)$$

$${}_j \mathbf{K}_{sz0}^e = \sum_{k=1}^n t_k \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left[ c_k^2 \left( {}_1 \mathbf{B}_{sz0} \right) + s_k c_k \left( {}_2 \mathbf{B}_{sz0} \right) + s_k^2 \left( {}_3 \mathbf{B}_{sz0} \right) \right] J d\eta d\xi \quad (3.25)$$

Desta forma, a matriz de rigidez mecânica elementar, representa a soma dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento,  $\mathbf{K}_{uu}^e = \mathbf{K}_{ub}^e + \mathbf{K}_{us}^e$ , as quais podem ser escritas de forma simplificada:

$$\mathbf{K}_{ub}^e = \sum_{k=1}^n t_k \sum_{i=1}^3 \left[ c_k^4 \left( {}_1 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)} \right) + c_k^2 \left( {}_2 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)} \right) + s_k c_k^3 \left( {}_3 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)} \right) + \left( {}_4 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)} \right) + \right. \\ \left. + s_k c_k \left( {}_5 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)} \right) + s_k^2 c_k^2 \left( {}_6 \mathbf{K}_{bzi}^{(k)} \right) \right] \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{K}_{us}^e = \sum_{k=1}^n t_k \left[ c_k^2 \left( {}_1 \mathbf{K}_{sz\theta}^{(k)} \right) + s_k c_k \left( {}_2 \mathbf{K}_{sz\theta}^{(k)} \right) + s_k^2 \left( {}_3 \mathbf{K}_{sz\theta}^{(k)} \right) \right] \quad (3.26b)$$

De posse das matrizes elementares de massa e rigidezes do problema mecânico determinístico, pode-se obter a Eq. (3.27) que é a equação do movimento do sistema na forma matricial a nível global via emprego de procedimentos clássicos de montagem de elementos finitos conhecendo-se a conectividade dos nós (FARIA, 2006; DE LIMA, 2007; DIACENCO, 2010; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014, RIBEIRO e DE LIMA, 2014):

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.27)$$

onde,  $\mathbf{M}_{uu} = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{M}_u^e$  e  $\mathbf{K}_{uu} = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{K}_{uu}^e$  são, respectivamente, as matrizes globais de massa e rigidezes do sistema mecânico, sendo que, o símbolo de união indica a soma das matrizes elementares utilizando-se a técnica de montagem de elementos finitos;  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor dos graus de liberdade globais e  $\mathbf{f}(t)$  representa o vetor dos esforços generalizados.

### 3.2. Modelagem do problema eletromecânico

Para modelagem de estruturas compósitas laminadas contendo elementos piezelétrico é empregada a Teoria mista que combina a Teoria da camada equivalente única com a Teoria das camadas equivalentes discretas. Desta maneira, os campos de deslocamentos mecânicos são modelados via utilização da camada equivalente única, e os potenciais elétricos são distribuídos de forma discreta ao longo das camadas piezelétricas. Neste contexto, os campos de deslocamentos mecânicos são aproximados via FSDT e o potencial elétrico aproximado como na Eq. (3.28) (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; CHEE, 2000):

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{n^o \text{camadas}+1} L_j(z) \Phi_j(x, y, t) \quad (3.28)$$

onde,  $\Phi_j$  é o potencial elétrico de cada interface das camadas ao longo da espessura do composto (funções *layerwise* no plano), sendo o subscrito  $j$  ligado às interfaces e  $L_j$  são as funções *layerwise* transversais, que serão melhores definidas na sequência do capítulo.

A subdivisão do laminado em camadas discretas é que garante a discretização das variáveis elétricas por camadas, sendo o potencial elétrico assumido contínuo em cada camada discreta, tendo assim uma variação do tipo  $C^0$  (funções contínuas) ao longo da espessura (FARIA, 2006).

### 3.2.1. Rotação das matrizes de propriedades mecânicas, elétricas e eletromecânicas

No trabalho de Chee (2000) é apresentado que dentre os materiais piezelétricos mais utilizados, que são as piezocerâmicas (estruturas policristalinas, como o PZT) e os piezopolímeros (como o PVDF), há a seguinte classificação: estruturas cristalinas *mm2* para a maior parte das piezocerâmicas e estrutura cristalina *mm6* para os piezopolímeros, sendo esta última considerada um subgrupo degenerado das estruturas cristalinas *mm2*. Esta divisão é devida aos métodos de polarização utilizados em cada uma das classes. Como neste trabalho é utilizado um material piezelétrico com características ortotrópicas, cuja forma da matriz elasto-piezo-dielétrica acoplada do material foi previamente apresentada na Eq. (2.10), a Eq. (3.29) apresenta a matriz correspondente à classe *mm2*, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \chi_{22} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

Ou ainda de forma simplificada:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ D \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} C & -e^T \\ e & \chi \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ E \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

onde,  $\sigma$  é o tensor de tensão mecânica  $[N/m^2]$ ;  $E$  é o tensor campo elétrico  $[V/m]$ ;  $C$  é o tensor de elasticidade linear  $[N/m^2]$ ;  $D$  é o tensor deslocamento elétrico  $[C/m^2]$ ;  $\chi$  é a matriz de permissividade dielétrica  $[N/Vm]$ ;  $\varepsilon$  é o tensor de deformação mecânica  $[m/m]$ ; e  $e$  é o tensor de constantes dielétricas para deformação mecânica constante  $[N/V^2]$ , os quais foram previamente definidos, sendo que, tais propriedades ainda não levam em conta a direção das fibras do laminado.

Para que as Eqs. (3.30) possam ser escritas levando-se em consideração as direções das fibras de cada camada do compósito, faz-se necessário o uso das matrizes de transformação  $T$  e  $Q$  previamente definidas nas Eqs. (2.1) e (2.2), respectivamente. A matriz  $T$  pode ser dividida em outras duas levando-se em consideração os efeitos de flexão-membrana,  $T_b$ , e cisalhamento,  $T_s$ , sendo que, as mesmas foram apresentadas nas Eqs. (3.17), realizando-se a parametrização do ângulo  $\theta_k$ . A matriz  $Q$  fatorada em termos do ângulo  $\theta_k$  é apresentada nas

Eqs. (3.31), sendo que, define-se também como se dá a parametrização da sua inversa,  $\mathbf{Q}^{-l}$ , uma vez que a mesma é utilizada na sequência (FARIA, 2006; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014).

$$\mathbf{Q} = c_k \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + s_k \mathbf{Q}_3 \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{Q}^{-l} = c_k \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + s_k \mathbf{Q}_{3i} \quad (3.31b)$$

onde,  $\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{Q}_{3i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

As Eqs. (3.30) podem ser reescritas de forma a levar em consideração os ângulos das fibras do compósito laminado, já separando seus efeitos de flexão-membrana e cisalhamento (FARIA, 2006):

- Flexão-membrana:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{T}_b \mathbf{C}_b \mathbf{T}_b^T \boldsymbol{\varepsilon}_b - \mathbf{T}_b \mathbf{e}_b \mathbf{Q}^{-l} \mathbf{E} \quad (3.32a)$$

$$\mathbf{D}_\theta = \mathbf{Q} \mathbf{e}_b^T \mathbf{T}_b^T \boldsymbol{\varepsilon}_b - \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_b \mathbf{Q}^{-l} \mathbf{E} \quad (3.32b)$$

onde,  $\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{D}_\theta = \{D_3\}$ ,  $\mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\boldsymbol{\chi}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$ .

- Cisalhamento:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{T}_s \mathbf{C}_s \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{T}_s \mathbf{e}_s \mathbf{Q}^{-l} \mathbf{E} \quad (3.33a)$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{Q} \mathbf{e}_s^T \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E} \quad (3.33b)$$

onde,  $\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{D}_i = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\boldsymbol{\chi}_s = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

A rotação de um ângulo  $\theta_k$  dos tensores de elasticidade linear, demonstrando a parametrização realizada para os casos de flexão-membrana,  $\mathbf{C}_{bt} = \mathbf{T}_b \mathbf{C}_b \mathbf{T}_b^T$ , e cisalhamento,  $\mathbf{C}_{st} = \mathbf{T}_s \mathbf{C}_s \mathbf{T}_s^T$ , foram previamente apresentados nas Eqs. (3.18). Já o tensor de constantes dielétricas  $\mathbf{e}$ , para os casos de flexão-membrana e cisalhamento, pode ser colocado como nas Eqs. (3.34) (ZAMBOLINI-VICENTE, 2014):

$$\mathbf{e}_{bt} = \mathbf{T}_b \mathbf{e}_b \mathbf{Q}^{-1} = c_k^2 \mathbf{e}_{bt1} + \mathbf{e}_{bt2} + s_k c_k \mathbf{e}_{bt3} \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{e}_{st} = \mathbf{T}_s \mathbf{e}_s \mathbf{Q}^{-1} = c_k^2 \mathbf{e}_{st1} + c_k s_k \mathbf{e}_{st2} + s_k^2 \mathbf{e}_{st3} \quad (3.34b)$$

onde,  $\mathbf{e}_{bt1} = \mathbf{T}_{b1} \mathbf{e}_b \mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{e}_{bt2} = \mathbf{T}_{b2} \mathbf{e}_b \mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{e}_{bt3} = \mathbf{T}_{b3} \mathbf{e}_b \mathbf{Q}_3$ ,  $\mathbf{e}_{st1} = \mathbf{T}_{s1} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{e}_{st2} = \mathbf{T}_{s1} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_{3i} + \mathbf{T}_{s2} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{e}_{st3} = \mathbf{T}_{s2} \mathbf{e}_s \mathbf{Q}_{3i}$ .

Para o caso do tensor  $\boldsymbol{\chi}$  que representa permissividade dielétrica, a influência dos ângulos das direções das fibras do compósito, tanto para os efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, é assim computada (ZAMBOLINI-VICENTE, 2014):

$$\boldsymbol{\chi}_{bt} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_b \mathbf{Q}^{-1} = \boldsymbol{\chi}_{bt1} \quad (3.35a)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{st} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}^{-1} = c_k^2 \boldsymbol{\chi}_{st1} + s_k c_k \boldsymbol{\chi}_{st2} + s_k^2 \boldsymbol{\chi}_{st3} \quad (3.35b)$$

onde,  $\boldsymbol{\chi}_{bt1} = \mathbf{Q}_2 \boldsymbol{\chi}_b \mathbf{Q}_2$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{st1} = \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_1$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{st2} = \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_{3i} + \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_1$  e  $\boldsymbol{\chi}_{st3} = \mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\chi}_s \mathbf{Q}_{3i}$ .

### 3.2.2. Discretização do Potencial Elétrico por camadas

Dada uma estrutura laminada dividida em várias camadas, cada camada  $k$  pode ser aproximada por uma função campo potencial elétrico linear. Desta forma, a função potencial elétrico de uma camada  $k$ ,  $\Phi_{(k)}$ , é composta por duas funções potencial elétrico de interface  $\Phi_k$  e  $\Phi_{k+1}$  nas interfaces inferior e superior de cada camada, respectivamente, como ilustrado na Figura 3.2. Assim o potencial elétrico da  $k$ -ésima camada é obtido como expresso na Eq. (3.36) (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; CHEE, 2000):

$$\Phi_{(k)}(x,y,z,t) = L_{kd}(z)\Phi_k(x,y,t) + L_{ku}(z)\Phi_{k+1}(x,y,t) \quad (3.36)$$

onde,  $\Phi_k$  e  $\Phi_{k+1}$  são as funções *layerwise* no plano, dadas pela função potencial elétrico das interfaces inferior e superior da  $k$ -ésima camada;  $L_{kd}(z) = (z_{k+1} - z)/(z_{k+1} - z_k)$  e  $L_{ku}(z) = (z - z_k)/(z_{k+1} - z_k)$  são as funções *layerwise* transversais para as interfaces inferior e superior, respectivamente.

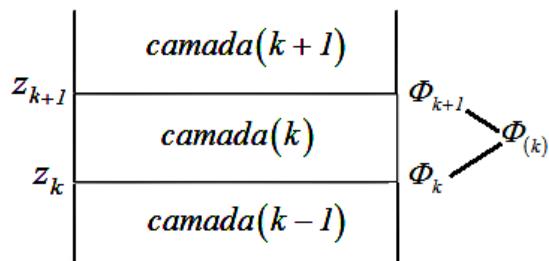


Figura 3.2 - Representação esquemática das funções de interface.

Desta forma, a título de exemplo, caso se tenha uma estrutura em material compósito laminado, contendo *três* camadas, das quais, a primeira e a terceira camada são de material piezelétrico, os potenciais elétricos das respectivas camadas podem ser escritos como nas Eqs. (3.37).

$$\Phi_{(1)} = \begin{bmatrix} L_{1d} & L_{1u} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}; \quad \Phi_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_{3d} & L_{3u} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Com relação ao campo elétrico de cada camada  $k$  do laminado, o qual está presente nas Eqs. (3.32) e (3.33), sabe-se que o mesmo é definido como sendo o negativo do gradiente do potencial elétrico, podendo ser então representado como na Eq. (3.38) (BOYLESTAD, 2012):

$$E_{(k)}(x, y, z, t) = -\nabla \Phi_{(k)}(x, y, t) = -\mathbf{L}_k^\partial(z) \Phi_k(x, y, t) \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{L}_k^\partial(z) = \begin{bmatrix} L_{kd} \partial/\partial x & L_{ku} \partial/\partial x \\ L_{kd} \partial/\partial y & L_{ku} \partial/\partial y \\ 1/(z_k - z_{k+1}) & 1/(z_{k+1} - z_k) \end{bmatrix}$  e  $\Phi_k = \begin{Bmatrix} \Phi_k \\ \Phi_{k+1} \end{Bmatrix}$ .

Como mencionado na seção anterior, o elemento finito utilizado é o de placa plana retangular da família *Serendipity* (REDDY, 1997), mostrado na Figura 3.1, o qual possui oito nós. Desta forma, cada uma das  $k+1$  interfaces das  $k$  camadas do compósito laminado, terá a presença de oito potenciais elétricos nodais, ou seja, um grau de liberdade elétrico por nó. A figura a seguir representa a primeira camada de um compósito laminado. Nota-se que cada interface possui oito graus de liberdade elétricos (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995; CHEE, 2000).

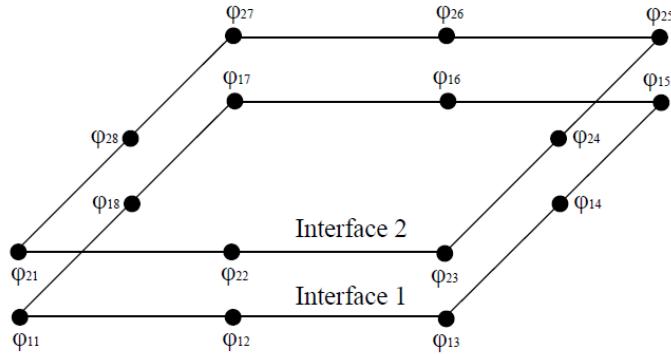


Figura 3.3 - Representação dos potenciais elétricos nodais por interface (adaptado de Zambolini-Vicente (2014)).

Assim, analisando-se a Fig. 3.3, nota-se que cada camada terá um conjunto de potenciais elétricos nodais  $\varphi_{ij}$  conforme a interface  $i$  e o nó  $j$ . Os potenciais elétricos totais de cada interface,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , da primeira camada são apresentados na Eq. (3.39), os quais são relacionados com a contribuição de cada nó por meio das funções de forma, apresentadas nas Eqs. (3.6):

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{18} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

De forma genérica, pode-se então relacionar o vetor dos potenciais elétricos das interfaces,  $\Phi_k$ , com os potenciais elétricos nodais, por meio das funções de forma, dadas em coordenadas locais, como na Eq. (3.40) (SARAVANOS e HEYLIGER, 1995):

$$\Phi_k(\xi, \eta, t) = N_u(\xi, \eta) \varphi_{ek}(t) \quad (3.40)$$

Os conceitos de funções de forma e potenciais elétricos nodais podem então ser introduzidos na expressão do potencial elétrico de uma camada genérica  $k$ , dada na Eq. (3.36), como na Eq. (3.41):

$$\boldsymbol{\Phi}_{(k)}(\xi, \eta, z, t) = \mathbf{L}_k(z) \mathbf{N}_u(\xi, \eta) \boldsymbol{\varphi}_{ek}(t) = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_{ek}(t) \quad (3.41)$$

onde,  $\mathbf{L}_k = [\cdots \ L_{kd} \ L_{ku} \ \cdots]$  e  $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\Phi}}$  são as funções de forma elétricas, dadas por  $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{L}_k(z) \mathbf{N}_u(\xi, \eta)$ .

Já o campo elétrico de uma camada genérica  $k$ , dado na Eq. (3.38), pode ser reescrito em termos das funções de forma e potenciais elétricos nodais, como na Eq. (3.42):

$$\mathbf{E}_{(k)}(\xi, \eta, z, t) = -\nabla \boldsymbol{\Phi}_{(k)}(\xi, \eta, t) = -\nabla \mathbf{N}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_{ek}(t) = -\mathbf{B}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_{ek}(t) \quad (3.42)$$

Devido à separação dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, torna-se interessante separar também o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}_{(k)}$  em outros dois, sendo que,  $\mathbf{E}_{(k)}^i$  refere-se à condição de circuito fechado e,  $\mathbf{E}_{(k)}^o$ , a de circuito aberto, de forma que:

$$\mathbf{E}_{(k)}^i(\xi, \eta, z, t) = -\mathbf{B}_{\boldsymbol{\Phi}i}(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_{ek}(t) \quad (3.43a)$$

$$\mathbf{E}_{(k)}^o(\xi, \eta, z, t) = -\mathbf{B}_{\boldsymbol{\Phi}0}(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_{ek}(t) \quad (3.43b)$$

onde  $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\Phi}i} = \begin{bmatrix} L_{kd} \frac{\partial}{\partial \xi} & L_{ku} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ L_{kd} \frac{\partial}{\partial \eta} & L_{ku}(z) \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{N}_u$  e,  $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\Phi}0} = \begin{bmatrix} -I \\ \frac{1}{(z_{k+1} - z_k)} & \frac{1}{(z_{k+1} - z_k)} \end{bmatrix} \mathbf{N}_u$ .

A parametrização do termo  $z$  das matrizes  $\mathbf{B}_{\phi_i}$  e  $\mathbf{B}_{\phi_0}$ , é realizada da forma:

$$\mathbf{B}_{\phi_i} = \frac{I}{t_k} \left[ \begin{pmatrix} L_{kd}^1 + zL_{kd}^2 \\ L_{ku}^1 + zL_{ku}^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_{kd}^1 + zL_{kd}^2 \\ L_{ku}^1 + zL_{ku}^2 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} N_u = \frac{I}{t_k} \mathbf{B}_{\phi_i}^1 + \frac{z}{t_k} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \quad (3.44a)$$

$$\mathbf{B}_{\phi_0} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{I}{t_k} \left( \begin{pmatrix} L_{kd}^1 + zL_{kd}^2 \\ L_{ku}^1 + zL_{ku}^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_{kd}^1 + zL_{kd}^2 \\ L_{ku}^1 + zL_{ku}^2 \end{pmatrix} \right) \right] N_u = \frac{I}{t_k} \mathbf{B}_{\phi_0}^1 \quad (3.44b)$$

onde  $t_k = (z_{k+1} - z_k) = [k - (k-1)]h_k$ ,  $L_{kd}^1 = z_{k+1}$ ,  $L_{kd}^2 = -z$ ,  $L_{ku}^1 = z$ ,  $L_{ku}^2 = -z_k$ ,  $\mathbf{B}_{\phi_i}^1 = \begin{bmatrix} \xi \mathbf{B}_{\phi_i}^1 & \eta \mathbf{B}_{\phi_i}^1 \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{B}_{\phi_i}^2 = \begin{bmatrix} \xi \mathbf{B}_{\phi_i}^2 & \eta \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \end{bmatrix}^T$ .

Pode-se ter uma melhor compreensão das matrizes,  $\xi \mathbf{B}_{\phi_i}^1$ ,  $\eta \mathbf{B}_{\phi_i}^1$ ,  $\xi \mathbf{B}_{\phi_i}^2$ ,  $\eta \mathbf{B}_{\phi_i}^2$  e  $\mathbf{B}_{\phi_0}^1$  da seguinte maneira:

$$\xi \mathbf{B}_{\phi_i}^1 = \begin{bmatrix} \dots & L_{kd}^1 N_1^\xi & L_{ku}^1 N_1^\xi & \dots & L_{kd}^1 N_8^\xi & L_{ku}^1 N_8^\xi & \dots \end{bmatrix} \quad (3.45a)$$

$$\eta \mathbf{B}_{\phi_i}^1 = \begin{bmatrix} \dots & L_{kd}^1 N_1^\eta & L_{ku}^1 N_1^\eta & \dots & L_{kd}^1 N_8^\eta & L_{ku}^1 N_8^\eta & \dots \end{bmatrix} \quad (3.45b)$$

$$\xi \mathbf{B}_{\phi_i}^2 = \begin{bmatrix} \dots & L_{kd}^2 N_1^\xi & L_{ku}^2 N_1^\xi & \dots & L_{kd}^2 N_8^\xi & L_{ku}^2 N_8^\xi & \dots \end{bmatrix} \quad (3.45c)$$

$$\eta \mathbf{B}_{\phi_i}^2 = \begin{bmatrix} \dots & L_{kd}^2 N_1^\eta & L_{ku}^2 N_1^\eta & \dots & L_{kd}^2 N_8^\eta & L_{ku}^2 N_8^\eta & \dots \end{bmatrix} \quad (3.45d)$$

$$\mathbf{B}_{\phi_0}^1 = \begin{bmatrix} \dots & L_{kd}^2 N_1 & L_{ku}^2 N_1 & \dots & L_{kd}^2 N_8 & L_{ku}^2 N_8 & \dots \end{bmatrix} \quad (3.45e)$$

onde,  $N_i^\xi = \partial N_i / \partial \xi$  e  $N_i^\eta = \partial N_i / \partial \eta$  com  $i=1\dots8$ .

### 3.2.3. Obtenção das matrizes de massa e rigidezes do sistema eletromecânico

Para que seja possível encontrar as equações do movimento a nível global do sistema eletromecânico, necessita-se primeiramente realizar o cálculo das matrizes de massa e rigidezes elementares. A matriz de massa elementar do sistema eletromecânico é obtida da mesma maneira para o sistema mecânico, uma vez que os graus de liberdade elétricos não influenciam no cálculo da mesma. Desta forma, parte-se da equação da energia cinética a nível elementar, dada na Eq. (3.10) para que se possa então realizar a integração no volume do elemento finito e encontrar a matriz de massa elementar dada na Eq. (3.13).

O processo de obtenção das matrizes de rigidezes elementares do sistema eletromecânico, no entanto, se difere do utilizado no sistema mecânico. Para o sistema acoplado eletromecânico, as matrizes de rigidezes elementares são agora obtidas por meio da energia de deformação, envolvendo a contribuição elétrica da seguinte forma (FARIA, 2006):

$$\mathbf{U}_e = \int_{V_e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV_e \quad (3.46)$$

Introduzindo-se as Eqs. (3.32) e (3.33) na equação da energia de deformação, dada na Eq. (3.46), levando-se em consideração os efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, tem-se:

$$\mathbf{U}_e = \int_{V_e} (\mathbf{A}_{uu} + \mathbf{B}_{u\Phi} + \mathbf{C}_{\Phi u} + \mathbf{D}_{\Phi\Phi}) dV_e \quad (3.47)$$

De forma que:

$$\mathbf{A}_{uu} = \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{C}_{bt} \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{C}_{st} \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{u}_e^T (\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{so}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{so}) \mathbf{u}_e \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{B}_{u\Phi} = -\boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{E}_{(k)}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{E}_{(k)}^i = \mathbf{u}_e^T (\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{B}_{\Phi 0} + \mathbf{B}_{so}^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{B}_{\Phi i}) \varphi_{ek} \quad (3.48b)$$

$$\mathbf{C}_{\Phi u} = -\mathbf{E}_{(k)}^i \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{e}_b - \mathbf{E}_{(k)}^i \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{e}_s = \boldsymbol{\varphi}_{ek}^T (\mathbf{B}_{\Phi i}^T \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{\Phi \theta}^T \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{B}_{s\theta}) \mathbf{u}_e \quad (3.48c)$$

$$\mathbf{D}_{\Phi \Phi} = -\mathbf{E}_{(k)}^i \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{e}_\theta - \mathbf{E}_{(k)}^i \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{e}_{(k)}^i = \boldsymbol{\varphi}_{ek}^T (-\mathbf{B}_{\Phi \theta}^T \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{B}_{\Phi \theta} - \mathbf{B}_{\Phi i}^T \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{B}_{\Phi i}) \boldsymbol{\varphi}_{ek} \quad (3.48d)$$

Assim, é possível obter as matrizes de rigidezes elementares, mecânica,  $\mathbf{K}_{uu}^e$ , eletromecânicas,  $\mathbf{K}_{u\Phi}^e$  e  $\mathbf{K}_{\Phi u}^e$ , e a matriz de rigidez elétrica  $\mathbf{K}_{\Phi \Phi}^e$ , realizando-se as seguintes integrações:

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-I}^{\xi=I} \int_{\eta=-I}^{\eta=I} (\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{C}_{bt} \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{C}_{st} \mathbf{B}_{s\theta}) J d\eta d\xi dz \quad (3.49a)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-I}^{\xi=I} \int_{\eta=-I}^{\eta=I} (\mathbf{B}_{bu}^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{B}_{\Phi \theta} + \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{B}_{\Phi i}) J d\eta d\xi dz \quad (3.49b)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi u}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-I}^{\xi=I} \int_{\eta=-I}^{\eta=I} (\mathbf{B}_{\Phi i}^T \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{\Phi \theta}^T \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{B}_{s\theta}) J d\eta d\xi dz \quad (3.49c)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi \Phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_k+1} \int_{\xi=-I}^{\xi=I} \int_{\eta=-I}^{\eta=I} (-\mathbf{B}_{\Phi \theta}^T \mathbf{e}_{bt}^T \mathbf{B}_{\Phi \theta} - \mathbf{B}_{\Phi i}^T \mathbf{e}_{st}^T \mathbf{B}_{\Phi i}) J d\eta d\xi dz \quad (3.49d)$$

Com relação à parametrização do sistema, as matrizes de rigidezes mecânica, tanto de flexão-membrana quanto cisalhamento, possuem os mesmos parâmetros fatorados. Desta forma, a parametrização das matrizes de rigidezes mecânica sofrerá o mesmo processo do demonstrado para o problema mecânico. Já as matrizes de rigidezes eletromecânicas e elétricas terão seus processos de parametrização melhor explicitados na sequência. Observa-se que para o caso das matrizes eletromecânicas,  $\mathbf{K}_{u\Phi}^e$  e  $\mathbf{K}_{\Phi u}^e$ , a fatoração das matrizes ocorrerá da mesma maneira, uma vez que uma é a transposta da outra, necessitando-se assim exemplificar apenas um dos casos.

Primeiramente, a parametrização da matriz  $\mathbf{K}_{u\Phi}^e$  tem início ao se realizar a multiplicação dada na Eq. (3.50):

$$\mathbf{B}_{u\Phi} = \mathbf{B}_{u\Phi}^b + \mathbf{B}_{u\Phi}^s = \left( \left( \mathbf{B}_{b\theta}^T + z \mathbf{B}_{bl}^T \right) \mathbf{e}_{bt} \mathbf{B}_{\Phi\theta} \right) + \left( \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^I + z \mathbf{B}_{\Phi i}^2 \right) \right) \quad (3.50)$$

Os tensores das constantes dielétricas,  $\mathbf{e}_{bt}$  e  $\mathbf{e}_{st}$ , foram previamente definidos nas Eqs. (3.34), os quais são compostos, cada um, por três matrizes diferentes de acordo com a parametrização realizada. Realizando-se as multiplicações presentes na equação anterior, o resultado da integração no volume do elemento finito para que se possa encontrar  $\mathbf{K}_{u\Phi}^e$  e a parametrização utilizada, se dá como apresentado na Eq. (3.51):

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^e = \frac{I}{t_k} \left( t_k \mathbf{K}_{u\Phi}^{00} + t_k c_k^2 \mathbf{K}_{u\Phi}^{01} + t_k s_k c_k \mathbf{K}_{u\Phi}^{02} + t_k s_k^2 \mathbf{K}_{u\Phi}^{03} + t_k^2 \mathbf{K}_{u\Phi}^{10} + t_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{u\Phi}^{11} + \right. \\ \left. + t_k^2 s_k c_k \mathbf{K}_{u\Phi}^{12} + t_k^2 s_k^2 \mathbf{K}_{u\Phi}^{13} \right) \quad (3.51)$$

Sendo que:

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^{00} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{b\theta}^T \mathbf{e}_{bt2} \mathbf{B}_{\Phi\theta} \right) J d\eta d\xi \quad (3.52a)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^{01} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{b\theta}^T \mathbf{e}_{bt1} \mathbf{B}_{\Phi\theta} + \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st1} \mathbf{B}_{\Phi i}^I \right) J d\eta d\xi \quad (3.52b)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^{02} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{b\theta}^T \mathbf{e}_{bt3} \mathbf{B}_{\Phi\theta} + \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st2} \mathbf{B}_{\Phi i}^I \right) J d\eta d\xi \quad (3.52c)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^{03} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st3} \mathbf{B}_{\Phi i}^I \right) J d\eta d\xi \quad (3.52d)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^{10} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{b\theta}^T \mathbf{e}_{bt2} \mathbf{B}_{\Phi\theta} \right) J d\eta d\xi \quad (3.52e)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi}^{11} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (\mathbf{B}_{bt}^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{B}_{\Phi 0} + \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{B}_{\Phi i}^2) J d\eta d\xi \quad (3.52f)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi}^{12} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (\mathbf{B}_{bt}^T \mathbf{e}_{bt} \mathbf{B}_{\Phi 0} + \mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{B}_{\Phi i}^2) J d\eta d\xi \quad (3.52g)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi}^{13} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (\mathbf{B}_{s\theta}^T \mathbf{e}_{st} \mathbf{B}_{\Phi i}^2) J d\eta d\xi \quad (3.52h)$$

Já a parametrização da matriz  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e$  tem início ao se realizar a multiplicação dada na Eq.

(3.53):

$$\mathbf{B}_{\Phi\Phi} = \mathbf{B}_{\Phi\Phi}^b + \mathbf{B}_{\Phi\Phi}^s = (\mathbf{B}_{\Phi 0}^T \chi_{bt} \mathbf{B}_{\Phi 0}) + ((\mathbf{B}_{\Phi i}^{1T} + z \mathbf{B}_{\Phi i}^{2T}) \chi_{st} (\mathbf{B}_{\Phi i}^1 + z \mathbf{B}_{\Phi i}^2)) \quad (3.53)$$

Os tensores de permissividade elétrica,  $\chi_{bt}$  e  $\chi_{st}$ , foram previamente definidos nas Eqs. (3.35), sendo que,  $\chi_{bt}$  é composto por apenas uma matriz e  $\chi_{st}$  por três matrizes diferentes de acordo com a parametrização realizada. Realizando-se as multiplicações presentes na Eq. (3.53), o resultado da integração no volume do elemento finito para que se possa encontrar  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e$  e a parametrização utilizada, se dá como mostrado na Eq. (3.54):

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e = \frac{1}{t_k^2} \left( t_k \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{00} + t_k c_k^2 \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{01} + t_k s_k c_k \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{02} + t_k s_k^2 \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{03} + t_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{11} + t_k^2 s_k c_k \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{12} + \right. \\ \left. + t_k^2 s_k^2 \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{13} + t_k^3 c_k^2 \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{21} + t_k^3 s_k c_k \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{22} + t_k^3 s_k^2 \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{23} \right) \quad (3.54)$$

Sendo que:

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{00} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (\mathbf{B}_{\Phi 0}^T \chi_{bt} \mathbf{B}_{\Phi 0}) J d\eta d\xi \quad (3.55a)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{01} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{1 T} \boldsymbol{\chi}_{st1} \mathbf{B}_{\Phi i}^1 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55b)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{02} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{1 T} \boldsymbol{\chi}_{st2} \mathbf{B}_{\Phi i}^1 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55c)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{03} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{1 T} \boldsymbol{\chi}_{st3} \mathbf{B}_{\Phi i}^1 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55d)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{11} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{1 T} \boldsymbol{\chi}_{st1} \mathbf{B}_{\Phi i}^2 + \mathbf{B}_{\Phi i}^{2 T} \boldsymbol{\chi}_{st1} \mathbf{B}_{\Phi i}^1 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55e)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{12} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{1 T} \boldsymbol{\chi}_{st2} \mathbf{B}_{\Phi i}^2 + \mathbf{B}_{\Phi i}^{2 T} \boldsymbol{\chi}_{st2} \mathbf{B}_{\Phi i}^1 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55f)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{13} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{1 T} \boldsymbol{\chi}_{st3} \mathbf{B}_{\Phi i}^2 + \mathbf{B}_{\Phi i}^{2 T} \boldsymbol{\chi}_{st3} \mathbf{B}_{\Phi i}^1 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55g)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{21} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{2 T} \boldsymbol{\chi}_{st1} \mathbf{B}_{\Phi i}^2 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55h)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{22} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{2 T} \boldsymbol{\chi}_{st2} \mathbf{B}_{\Phi i}^2 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55i)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^{31} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \left( \mathbf{B}_{\Phi i}^{2 T} \boldsymbol{\chi}_{st3} \mathbf{B}_{\Phi i}^2 \right) J d\eta d\xi \quad (3.55j)$$

De posse das matrizes elementares de massa e rigidezes mecânicas, eletromecânicas e elétricas, pode-se obter a equação do movimento do sistema eletromecânico na forma matricial a nível global via emprego de procedimentos clássicos de montagem de elementos finitos conhecendo-se a conectividade dos nós, dada na Eq. (3.56).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\Phi}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\Phi} \\ \mathbf{K}_{\Phi u} & \mathbf{K}_{\Phi\Phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\Phi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

onde,  $\mathbf{M}_{uu} = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{M}_{uu}^e$  é a matriz de massa global,  $\mathbf{K}_{uu} = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{K}_{uu}^e$  é a matriz de rigidez mecânica global,  $\mathbf{K}_{u\Phi} = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{K}_{u\Phi}^e$  é a matriz de rigidez eletromecânica global, sendo que,  $\mathbf{K}_{u\Phi} = \mathbf{K}_{\Phi u}^T$  e,  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi} = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e$  é a matriz de rigidez elétrica global. O símbolo de união indica a soma das matrizes elementares utilizando-se a técnica de montagem de elementos finitos;  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor dos graus de liberdade mecânicos globais,  $\dot{\Phi}(t)$  são os potenciais elétricos globais,  $\mathbf{f}(t)$  representa o vetor dos esforços generalizados e  $\mathbf{q}(t)$  é o vetor das cargas elétricas a nível global.

### 3.3. Inclusão dos circuitos elétricos *shunt* no modelo de elementos finitos

Nesta seção ênfase é dada à inclusão do circuito elétrico *shunt* nas equações do movimento do sistema eletromecânico. Neste sentido, a Eq. (3.56) que está em sua forma matricial, pode ser reescrita como nas Eqs. (3.57):

$$\mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_{u\Phi}\Phi(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.57a)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi u}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_{\Phi\Phi}\Phi(t) = \mathbf{q}(t) \quad (3.57b)$$

No sistema piezo-*shunt* são considerados dois eletrodos na pastilha piezelétrica. Os nós que constituem cada eletrodo são equipotenciais elétricos. Esta condição é considerada introduzindo uma transformação no vetor dos potenciais elétricos. Além disso, para a análise no domínio da frequência, as Eqs. (3.57) podem ser representadas no domínio de Fourier, negligenciando-se condições iniciais, levando às equações do movimento dadas nas Eqs. (3.58) (ZAMBOLINI-VICENTE, 2014; RIBEIRO e DE LIMA, 2014):

$$(\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}) \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_{u\Phi} \boldsymbol{\Phi}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.58a)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi u} \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_{\Phi\Phi} \boldsymbol{\Phi}(\omega) = \mathbf{Q}(\omega) \quad (3.58b)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}(\omega)$  diz respeito ao vetor formado pelos potenciais elétricos que permanecem independentes entre si.

No livro de Boylestad (2012), alguns conceitos básicos de circuitos elétricos são apresentados e, dentre eles, a definição de corrente elétrica como sendo a variação instantânea de cargas no tempo. Além disso, segundo a Lei de Ohm, a corrente elétrica é proporcional ao potencial elétrico, sendo essa proporção, o inverso da impedância elétrica do circuito. Tais equivalências são apresentadas na Eq. (3.59).

$$\frac{dq(t)}{dt} = \mathbf{I}(t) = \mathbf{Z}^{-1} \boldsymbol{\Phi}(t) \quad (3.59)$$

Na sequência é feita a manipulação das equações do movimento para que as mesmas venham a considerar o tipo de circuito *shunt* conectado aos eletrodos do piezelétrico, uma vez que se admite a transferência das cargas elétricas entre eles. A Transformada de Fourier é então aplicada à Eq. (3.59) levando à Eq. (3.60), de forma a encontrar o vetor de correntes elétricas que fluem através dos circuitos *shunt* cujas impedâncias formam a matriz  $\mathbf{Z}(\omega)$ .

$$\mathbf{Q}(\omega) = (I/j\omega) \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi}(\omega) \quad (3.60)$$

onde a matriz  $\mathbf{L}$  permite selecionar dentre os potenciais elétricos independentes, aqueles que correspondem aos eletrodos dos circuitos *shunt* conectados.

Assim, dando sequência a manipulação das equações do movimento, combina-se a Eq. (3.58b) e a Eq. (3.60), obtendo-se a Eq. (3.61).

$$\mathbf{K}_{\Phi u} \mathbf{U}(\omega) + \left( \mathbf{K}_{\Phi \Phi} - \frac{\mathbf{Z}^{-1}(\omega)}{j\omega} \mathbf{L} \right) \boldsymbol{\Phi}(\omega) = 0 \quad (3.61)$$

A esta altura pode-se então encontrar a função de resposta em frequência (FRF) do sistema eletromecânico, Eq. (3.62), combinando-se as Eqs. (3.58a) e (3.61) exclusivamente em termos dos graus de liberdade mecânicos:

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[ \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\Phi} \left( \mathbf{K}_{\Phi\Phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\Phi u} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} \right]^{-1} \quad (3.62)$$

A FRF do sistema eletromecânico dada na Eq. (3.62) pode ser utilizada para diferentes tipos de circuitos *shunt* mediante a introdução das expressões correspondentes de suas impedâncias elétricas, indicadas por  $\mathbf{Z}(\omega)$ . Assim sendo, na sequência são apresentadas as correspondentes impedâncias elétricas para os circuitos resistivo e ressonante, respectivamente, sendo que, o circuito resistivo por apresentar apenas resistência, é composto apenas de parte real. Já o ressonante, apresenta além da parcela resistiva, a indutiva, sendo então dado tanto por componente real quanto imaginária.

- *Shunt Resistivo:*

$$Z = R \quad (3.63a)$$

- *Shunt Ressonante:*

$$Z = R + jX(\omega) \quad (3.63)$$

# CAPÍTULO IV

## MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO PROBLEMA

Este capítulo é dedicado à proposição de um modelo de propagação de incertezas ao nível dos elementos finitos de placas compósitas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt* para o controle passivo de vibrações. Através deste modelo, as incertezas são introduzidas nos parâmetros de concepção mais influentes que caracterizam os parâmetros estruturais que foram fatorados das matrizes de massa e rigidezes do sistema eletromecânico e os parâmetros do circuito elétrico *shunt*, resistência e indutância. Para tanto, estes parâmetros serão, neste capítulo, modelados como campos estocásticos gaussianos e, estes campos, discretizados via expansão de Karhunen-Loève.

### 4.1. Conceitos fundamentais sobre incertezas

As incertezas em sistemas de engenharia têm origens diversas: elas podem decorrer das tolerâncias de fabricação, das condições de contorno, das variabilidades afetando as propriedades dos materiais, etc. (SCHUELLER, 2001). Além disso, a modelagem dos sistemas físicos como no caso de estruturas compósitas contendo circuitos *shunt*, passa geralmente por uma etapa de equacionamento matemático que são na maioria dos casos, difícil de ser resolvida numericamente, e consequentemente, com um custo de resolução elevado.

Diante disso, deve-se assumir um certo número de hipóteses que simplificam o problema, resultando numa fonte de incerteza que deve ser levada em conta nos modelos. Isto é traduzido por uma modelagem mais elaborada e onerosa, mas apresenta-se como sendo mais realista dos sistemas reais.

De uma maneira geral, as incertezas são consideradas nos modelos segundo a aproximação não paramétrica que permite a introdução das mesmas diretamente nas matrizes globais do modelo (SOIZE, 1999; 2000), e pela aproximação paramétrica, utilizando-se principalmente o método dos elementos finitos estocásticos (*Stochastic Finite Element Method - SFEM*), que permite uma combinação da análise clássica por elementos finitos e a análise estatística (GHANEM e SPANOS, 1991; SHUELLER, 2001).

Dessombz et al (2001) define as incertezas no estado de concepção em duas etapas: as incertezas estatísticas, modeladas por variáveis aleatórias, no qual se conhece bem a lei de probabilidade; e as variáveis incertas e limitadas, que são modeladas por intervalos definidos pela física. Além disso, as incertezas podem ser classificadas em quatro grandes categorias:

- Parâmetros aleatórios: são os parâmetros físicos ou mecânicos no qual se conhecem as tolerâncias. Eles podem ser, por exemplo, a espessura de chapas metálicas, frequentemente modeladas por uma lei Gaussiana (GHANEM e SPANOS, 1991).
- Parâmetros mal conhecidos: as condições de limite são problemas típicos. Por exemplo, um engaste corresponde a uma alta rigidez, mas se conhece somente a ordem de grandeza; os diferentes tipos de montagem mecânica, como soldagem, colagem, etc., são difíceis de serem modeladas, e em muitos casos os valores determinísticos utilizados para representar esses fenômenos são insuficientes.
- Parâmetros variáveis: pode-se distinguir aqui os parâmetros que podem ser variáveis no tempo que são difíceis de serem modelados, como por exemplo, a degradação ou o envelhecimento de um material viscoelástico no tempo.
- Incertezas no modelo: são por exemplo as leis do comportamento adotadas que representam mal ou de forma incompleta os fenômenos físicos, os erros associados à escolha da malha de elementos finitos, o número de elementos na malha, o tipo de elemento escolhido, etc. Em geral, essas incertezas são difíceis de serem avaliadas.

#### **4.2. Técnicas de resolução do problema estocástico**

Os métodos existentes para resolver os problemas estocásticos são normalmente classificados em quatro grandes categorias (BENAROYA e REHAK, 1988; IBRAHIM, 1987; SHUELLER, 2001): o método de Simulação de Monte Carlo (MCS) (SCHINOZURA, 1972; RUBINSTEIN, 1981; PAPADRAKAKIS e KOTSOPULOS, 1999) frequentemente considerado como sendo a referência, mas que possui o inconveniente de apresentar um alto custo computacional em virtude do número elevado de cálculos para a convergência. Como alternativa, o método do Hipercubo Latino (HCL) (IMAN e CONOVERS, 1980; FLORIAN, 1992; MANTEUFEL, 2000) foi proposto, com o objetivo de reduzir o número de cálculos necessário para a convergência da Simulação de Monte Carlo, conservando o nível de predição. Os métodos de perturbação, que são a base das expansões em série de Taylor (KLEIBER e HIEN, 1992; ALVIN, 1998) ou em série de Neumann (YAMAZAKI e SCHINOZUKA, 1988; LEI e QIU, 2000), os quais se fundamentam nas respostas ao redor das médias das variáveis aleatórias. Existem também os métodos espectrais que utilizam as funções de base no espaço de Hilbert associadas aos problemas aleatórios (GHANEM e SPANOS, 1991; GHANEM e KRUGER, 1996). Estas funções podem ser polinômios ortogonais de uma maneira geral, e um caos polinomial em particular. Neste caso, utilizam-se as variáveis aleatórias onde os campos aleatórios contínuos são discretizados.

Neste trabalho, para a análise dinâmica de estruturas compósitas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt*, utiliza-se particularmente o método da Simulação de Monte Carlo (MCS) combinado com a amostragem por Hipercubo Latino (HCL).

#### **4.3. Expansão de Karhunen-Loève (KL)**

De acordo com Ghanem e Spanos (1991) um campo aleatório  $H(x, \theta)$  é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto de parâmetros contínuos  $x \in \Omega$ , onde  $\Omega \subset R^d$  representa o conjunto aberto que descreve a geometria do sistema físico.

Um campo aleatório é chamado de unidimensional ou multidimensional de acordo com a dimensão  $d$  de  $\mathbf{x}$ , que é  $d=1$  ou  $d>1$ . Para o caso em questão, o campo estocástico é bidimensional, uma vez que se utiliza um elemento de placa plana retangular.

O procedimento de discretização utilizado se baseia na aproximação de  $H(\mathbf{x}, \theta)$  por  $\hat{H}(\mathbf{x}, \theta)$ . Dentre as famílias de métodos utilizados para discretizar espacialmente um campo estocástico, no qual o tamanho da malha de elementos finitos depende do comprimento de correlação do campo aleatório, utiliza-se neste trabalho os métodos chamados *Series Expansion Methods*, que consistem no acoplamento do desenvolvimento em série do campo aleatório e uma análise espectral para uma seleção dos termos mais importantes. Dentre os três métodos que fazem parte desta categoria, detalha-se o desenvolvimento proposto por Karhunen-Loève (KL) como detalhado no livro de Ghanem e Spanos (1991). A discretização por KL de um campo aleatório gaussiano homogêneo é apresentada na Eq. (4.1):

$$H(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) f_r(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

onde  $\{\xi_r, r \in N^*\}$  são as variáveis ortogonais de média zero e  $\{\lambda_r, f_r(\mathbf{x})\}$  são as soluções do problema de autovalores dado na Eq. (4.2):

$$\int_{\Omega_e} C_{HH}(x_1, x_2) f_r(x) dx_1 = \lambda_r f_r(x_2) \quad (4.2)$$

A equação precedente é chamada de Integral de Fredholm. O kernel  $C_{HH}(\cdot, \cdot)$  sendo uma função de autocovariância é limitado, simétrico e definido positivo. Assim, o conjunto  $f_r$  forma uma base ortogonal completa. O conjunto de autovalores é em sua maioria real, positivo, numerável e tem o zero como o único ponto de acumulação (GHANEM e SPANOS, 1991; SUDRET e DER KIUREGHIAN, 2000).

Como não há acumulação dos autovalores em torno de um valor não nulo, se torna possível então ordená-los em uma série decrescente que converge para zero. Pode-se então, após o *M-ésimo* termo da série, realizar o truncamento da mesma, obtendo-se o campo estocástico aproximado dado na Eq. (4.3) (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^M \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) f_r(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{x} \in \Omega_e$ .

Para a resolução analítica da Integral de Fredholm, existem três tipos comuns de funções de covariância mais utilizados na literatura, a exponencial, a exponencial quadrática e a senoidal (GHANEM e SPANOS, 1991). No caso deste trabalho, utiliza-se a função e covariância exponencial, sendo que, como se trata da modelagem de um elemento de placa plana retangular, o problema se torna bidimensional. Assim, em um primeiro momento, definem-se os domínios  $(x_1, x_2) \in \Omega_x$  e  $(y_1, y_2) \in \Omega_y$ , onde  $\Omega_x = [0, a]$ ,  $\Omega_y = [0, b]$  e  $l_x$ ,  $l_y$  como sendo os comprimentos de correlação nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Na Equação (4.4), é apresentada a função de covariância exponencial para o problema bidimensional e, na Fig. (4.1) o elemento finito de placa utilizado:

$$C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = C(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \exp\left(-\frac{x_1 - x_2}{l_x} - \frac{y_1 - y_2}{l_y}\right) \quad (4.4)$$

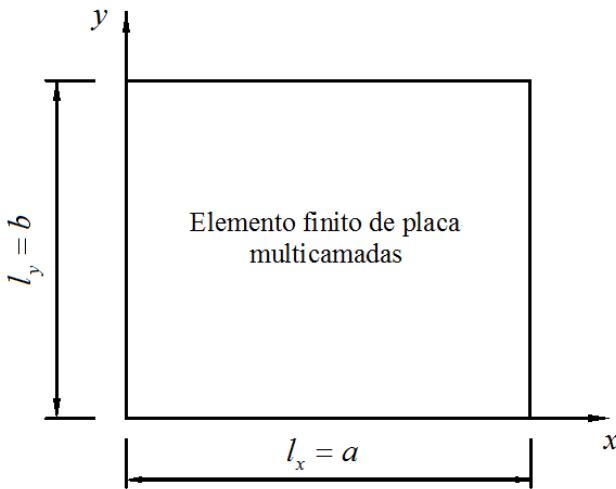


Figura 4.1 - Domínio de correlação para o elemento finito de placa compósita.

A equação Integral de Fredholm para o problema bidimensional pode então ser reescrita, substituindo-se na mesma a função de covariância exponencial (SUDRET, 2007):

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} e^{\left( \frac{-x_I - x_2 - y_I - y_2}{l_x} \right)} f_r(x_2, y_2) dx_2 dy_2 = \lambda_r f_r(x_I, y_I) \quad (4.5)$$

A resolução analítica da Integral de Fredholm pode ser encontrada de forma detalhada no trabalho de Ghanem e Spanos (1991). A escolha da função de covariância do tipo exponencial possui como consequência imediata a propriedade da separabilidade e, desta forma, o problema bidimensional utilizado nesta modelagem pode ser desacoplado em dois problemas de autovalores unidimensionais, como apresentado nas Eqs. (4.6) (GHANEM e SPANOS, 1991; DE LIMA, 2007; SUDRET, 2007):

$$f_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{y}) \quad (4.6a)$$

$$\lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (4.6b)$$

Desta forma, obtêm-se os termos  $[\lambda_i, f_i(\mathbf{x})]$  que são soluções da integral de Fredholm pela introdução da função de covariância exponencial através da decomposição de KL com um comprimento de correlação  $l_x \in \Omega_x$ . Já os termos  $[\lambda_j, f_j(\mathbf{y})]$  são obtidos resolvendo-se o mesmo problema, mas, para um comprimento de correlação  $l_y \in \Omega_y$ . Pode-se então expressar estes termos da seguinte maneira, (GHANEM e SPANOS, 1991; DE LIMA, 2007):

- Para o caso onde  $i$  e  $j$  são ímpares ( $i \geq 1$  e  $j \geq 1$ ):

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \cos(\omega_i \mathbf{x}) \quad (4.7a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; f_j(\mathbf{y}) = \alpha_j \cos(\omega_j \mathbf{y}) \quad (4.7b)$$

onde  $c_1 = \frac{l}{l_x}$ ,  $c_2 = \frac{l}{l_y}$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\operatorname{sen}(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$  e  $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b + \frac{\operatorname{sen}(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$ .

Já termos  $\omega_i$  e  $\omega_j$  representam as soluções das seguintes equações transcendentais nos respectivos domínios,  $\left[(i-1)\frac{\pi}{a}, \left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}\right]$  e  $\left[(j-1)\frac{\pi}{b}, \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b}\right]$ :

$$c_1 \cdot \omega_i \operatorname{tg}(\omega_i a) = 0 \quad (4.8a)$$

$$c_2 \cdot \omega_j \operatorname{tg}(\omega_j b) = 0 \quad (4.8b)$$

- Para o caso onde  $i$  e  $j$  são pares ( $i \geq 2$  e  $j \geq 2$ ):

$$\lambda_i = \frac{2c_i}{\omega_i^2 + c_i^2}; f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \sin(\omega_i \mathbf{x}) \quad (4.9a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_j}{\omega_j^2 + c_j^2}; f_j(\mathbf{y}) = \alpha_j \sin(\omega_j \mathbf{y}) \quad (4.9b)$$

onde  $c_i = \frac{l}{l_x}$ ,  $c_j = \frac{l}{l_y}$ ,  $\alpha_i = \frac{I}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$  e  $\alpha_j = \frac{I}{\sqrt{b + \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$ .

De forma que,  $\omega_i$  e  $\omega_j$  representam as soluções das seguintes equações transcendentais nos respectivos domínios,  $\left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a}, i \frac{\pi}{a} \right]$  e  $\left[ \left( j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{b}, j \frac{\pi}{b} \right]$ :

$$\omega_i + c_i \operatorname{tg}(\omega_i a) = 0 \quad (4.10a)$$

$$\omega_j + c_j \operatorname{tg}(\omega_j b) = 0 \quad (4.10b)$$

No trabalho de Ghanem e Spanos (1991) algumas interessantes propriedades sobre o método de expansão de Karhunen-Loève são citadas:

- Como já mencionado, não há acumulação dos autovalores em torno de um valor não nulo e, desta forma, torna-se possível ordená-los em uma série decrescente que converge para zero. Pode-se então, após o  $M$ -ésimo termo da série, realizar o truncamento da mesma;
- A base de autofunções de covariância  $f_r(\mathbf{x})$ , obtida como sendo a solução do problema de autovalores da equação Integral de Fredholm, é ótima no sentido que

o erro quadrático médio resultante do truncamento após o  $M$ -ésimo termo é minimizado. Este erro seria maior caso se escolhesse outra base;

- Devido à ortonormalidade das autofunções, pode-se obter uma forma fechada para cada variável aleatória da série através da seguinte transformação linear:

$$\xi_r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \int_{\Omega_e} [H(x, \theta) - \mu(x)] f_r(x) d\Omega_e \quad (4.11)$$

- Dado  $H(\cdot, \cdot)$  um campo aleatório Gaussiano, cada variável aleatória normalizada padrão  $\xi_r$  segue também uma distribuição Gaussiana e tem-se a garantia que as mesmas serão independentes. No caso de um campo não Gaussiano, a expansão de KL não deixa de existir, mas, as variáveis aleatórias que aparecem na série possuem uma função densidade de probabilidade (FDP) desconhecida e as mesmas podem não ser independentes (LOÈVE, 1978);
- De acordo com a equação que aproxima o campo aleatório, dado por  $\hat{H}(x, \theta)$ , a variância do erro obtido quando se trunca a expansão após  $M$  termos é mostrada a seguir:

$$Var[H(x) - \hat{H}(x)] = \sigma^2(x) - \sum_{i=1}^M \lambda_i f_i^2(x) = Var[H(x)] - Var[\hat{H}(x)] \quad (4.12)$$

Assim observa-se que o lado direito da equação precedente é sempre positivo, pois representa a variância de uma quantidade. Isto implica que, a expansão de Karhunen-Loève sempre sub-representa a verdadeira variância do campo.

Desta forma, observa-se que a Expansão de Karhunen-Loève tem sido largamente utilizada em abordagens que utilizam elementos finitos estocásticos, sendo que, isso se deve as suas propriedades que são bastante úteis. Pode-se salientar que um dos maiores problemas ao se utilizar deste tipo de expansão é o fato da necessidade da resolução do problema de autovalores da equação Integral de Fredholm, mas, na maior parte das aplicações encontradas

na literatura, como detalhado no trabalho de Ghanem e Spanos (1991), utiliza-se a função de covariância exponencial em conjunto com geometrias quadradas para se poder então chegar a solução analítica deste problema.

#### 4.4. Formulação do modelo de Elementos Finitos Estocásticos

##### 4.4.1. Matrizes de massa e rigidezes estocásticas

A discretização do campo aleatório  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$  é realizada por meio da expansão de KL, aproximando-se  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$  por  $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$ . Assim, a discretização por KL de um campo gaussiano homogêneo sobre a base das autofunções da função de covariância de forma truncada é dada na Eq. (4.13) (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^M H_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xi_r(\theta) \quad (4.13)$$

Desta forma, pode-se realizar a formulação de elementos finitos estocásticos do problema eletromecânico baseada na decomposição de KL de um campo aleatório  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$  sobre a base das autofunções da função de covariância.

Através da Eq. (3.11), a qual demonstra a integração necessária para que seja possível encontrar a matriz de massa elementar de um elemento finito de placa multicamadas, combinada com decomposição de KL de um campo aleatório,  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$ , pode-se obter a seguinte matriz de massa elementar estocástica, a qual resulta do somatório das matrizes de massa de cada camada  $k$  deste elemento:

$$\mathbf{M}_{uu}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \rho_k \mathbf{N}_u^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N}_u d\Omega_e \quad (4.14)$$

Da mesma maneira, pode-se obter as matrizes de rigidezes elementares estocásticas do sistema eletromecânico, combinando-se a decomposição de KL de um campo aleatório  $H(\mathbf{x}, \theta)$  com as Eqs. (3.21) para a matriz de rigidez mecânica; com as Eqs. (3.49b) e (3.49c) para as rigidezes eletromecânicas e com a Eq. (3.49d) para a matriz de rigidez elétrica. O procedimento utilizado em cada uma delas é apresentado na sequência, sendo que, demonstrase apenas uma das matrizes eletromecânicas de rigidez, uma vez  $\mathbf{K}_{\Phi u}^e = \mathbf{K}_{u\Phi}^{e T}$ .

$$\mathbf{K}_{uu}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_e \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\Phi d\Omega_e \quad (4.15b)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_\Phi^T \mathbf{\chi}_t \mathbf{B}_\Phi d\Omega_e \quad (4.15c)$$

onde,  $\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_{bu} + \mathbf{B}_{s0}$ ,  $\mathbf{B}_\Phi = \mathbf{B}_{\Phi i} + \mathbf{B}_{\Phi 0}$ ,  $\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{bt} + \mathbf{C}_{st}$ ,  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{bt} + \mathbf{e}_{st}$  e  $\mathbf{\chi}_t = \mathbf{\chi}_{bt} + \mathbf{\chi}_{st}$ , as quais foram previamente apresentadas no Cap. III e aqui utilizadas em suas formas parametrizadas, de maneira que, os principais parâmetros de projeto foram fatorados das mesmas e neste momento modelados como campos estocásticos gaussianos.

Pode-se então substituir  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$ , dado em sua forma truncada pela Eq. (4.13), nas respectivas matrizes de massa e rigidezes elementares estocásticas, obtendo-se, em cada um dos casos, uma parcela puramente determinística e outra estocástica:

$$\mathbf{M}_{uu}^e(\theta) = \mathbf{M}_{uu}^e + \mathbf{M}_r^e(\theta) = \mathbf{M}_{uu}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{M}}^e \xi_r(\theta) \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e(\theta) = \mathbf{K}_{uu}^e + \mathbf{K}_{uur}^e(\theta) = \mathbf{K}_{uu}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{K}}_{uu}^e \xi_r(\theta) \quad (4.16b)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^e(\theta) = \mathbf{K}_{u\Phi}^e + \mathbf{K}_{u\Phi r}^e(\theta) = \mathbf{K}_{u\Phi}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{K}}_{u\Phi}^e \xi_r(\theta) \quad (4.16c)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e(\theta) = \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e + \mathbf{K}_{\Phi\Phi r}^e = \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e + \sum_{r=1}^M \bar{\mathbf{K}}_{\Phi\Phi}^e \xi_r(\theta) \quad (4.16d)$$

onde  $\mathbf{M}_{uu}^e$ ,  $\mathbf{K}_{uu}^e$ ,  $\mathbf{K}_{u\Phi}^e$  e  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e$  denotam as matrizes de massa e rigidezes médias ou determinísticas do elemento finito de placa multicamadas, previamente calculadas no Cap. III desta dissertação e,  $\mathbf{M}_r^e(\theta)$ ,  $\mathbf{K}_{uur}^e(\theta)$ ,  $\mathbf{K}_{u\Phi r}^e(\theta)$ ,  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi r}^e$  representam a parcela estocástica de cada uma dessas matrizes, sendo que:

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(x, y) \rho_k N_u^T A_u^T A_u N_u d\Omega_e \quad (4.17a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(x, y) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_e \quad (4.17b)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{u\Phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(x, y) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\Phi d\Omega_e \quad (4.17c)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{\Phi\Phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H_r(x, y) \mathbf{B}_\Phi^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_\Phi d\Omega_e \quad (4.17d)$$

onde  $H_r(x, y) = \sqrt{\lambda_r} f_r$ , sendo que,  $\lambda_r$  e  $f_r$  são os autovalores e autofunções resultantes da solução da Integral de Fredholm, dada na Eq. (4.5).

Para uma função de covariância exponencial, as soluções da Integral de Fredholm são dadas nas Eqs. (4.7) e Eqs. (4.9) e, desta maneira, a forma final da parcela estocástica de cada uma das matrizes de massa e rigidezes elementares pode ser escrita como nas Eqs. (4.18):

$$\mathbf{M}_r^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) \rho_k N_u^T A_u^T A_u N_u d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{r}}^e = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.18b)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{u} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{r}}^e = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\Phi d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.18c)$$

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{r}}^e = \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\Phi^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_\Phi d\Omega_x d\Omega_y \quad (4.18d)$$

Observa-se nas Eqs. (4.18) que os termos  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$ , das expressões das autofunções  $f_i(\mathbf{x})$  e  $f_j(\mathbf{y})$ , respectivamente, foram retirados da integral, uma vez que, são constantes para as dadas variáveis de integração. Assim,  $f_i(\mathbf{x})$  e  $f_j(\mathbf{y})$  presentes nas Eqs. (4.18) são dadas apenas pelos termos  $\sin(\bullet)$ , quando  $i$  e  $j$  são pares, e  $\cos(\bullet)$ , quando  $i$  e  $j$  são ímpares.

De posse das matrizes elementares estocásticas de massa e rigidezes, pode-se obter as matrizes estocásticas globais em suas formas matriciais a nível global via emprego de procedimentos clássicos de montagem de elementos finitos conhecendo-se a conectividade dos nós, as quais são dadas por:  $\mathbf{M}(\theta)$ , matriz de massa global estocástica,  $\mathbf{K}_{uu}(\theta)$ ,  $\mathbf{K}_{u\Phi}(\theta)$ ,  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}(\theta)$ , matrizes de rigidezes globais estocásticas, mecânica, eletromecânica e elétrica, respectivamente.

A resposta em frequência do sistema estocástico eletromecânico acoplado de circuito elétrico *shunt* pode então ser dada como na Eq. (4.19):

$$\mathbf{H}(\omega, \theta) = \left[ \mathbf{K}_{uu}(\theta) - \mathbf{K}_{u\Phi}(\theta) \left( \mathbf{K}_{\Phi\Phi}(\theta) - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega, \theta) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\Phi u}(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}(\theta) \right]^{-1} \quad (4.19)$$

onde,  $\mathbf{M}(\theta) = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{M}^e(\theta)$ ,  $\mathbf{K}_{uu}(\theta) = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{K}_{uu}^e(\theta)$ ,  $\mathbf{K}_{u\Phi}(\theta) = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{K}_{u\Phi}^e(\theta)$ , sendo que,  $\mathbf{K}_{u\Phi}(\theta) = \mathbf{K}_{\Phi u}^T(\theta)$  e,  $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}(\theta) = \bigcup_{elemento=1}^{n^o\ elementos} \mathbf{K}_{\Phi\Phi}^e(\theta)$ . O símbolo de união indica a soma das matrizes elementares estocásticas utilizando-se da técnica de montagem de elementos finitos.

## CAPÍTULO V

### SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, são apresentados os resultados das simulações numéricas para uma viga de material compósito engastada-livre contendo um elemento piezelétrico acoplado a um circuito elétrico *shunt*. A Fig. 5.1 a seguir ilustra as características geométricas do sistema a ser investigado e a malha de elementos finitos. As dimensões são dadas em metros. Desta forma, a viga possui comprimento total de  $0,306m$ , sendo que todas as camadas possuem a mesma espessura,  $0,002m$ , inclusive o PZT, e a mesma largura,  $0,0255m$ . Foi investigada a seguinte configuração para as orientações das fibras do compósito  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .

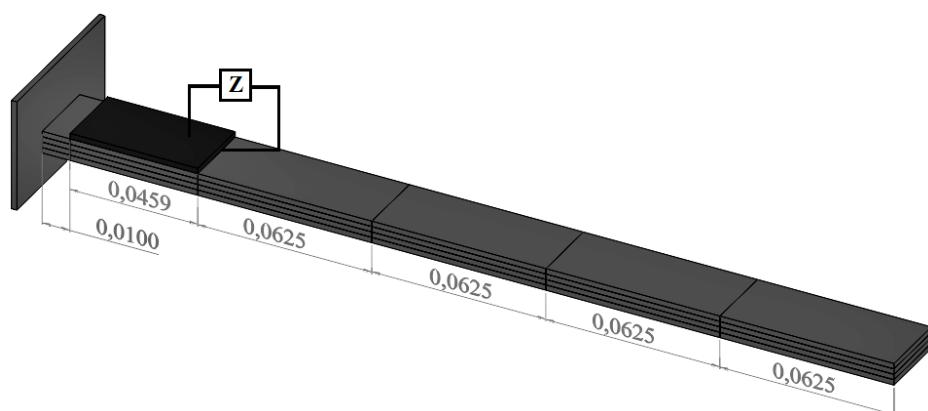


Figura 5.1 - Viga compósita com piezelétrico acoplado a circuito elétrico *shunt*.

Assim, pode-se observar que a viga mostrada na Fig. 5.1 foi discretizada em seis elementos finitos, sendo que, de acordo com esta discretização, observa-se a presença de três tipos diferentes de elementos em relação ao comprimento de cada um: o elemento finito entre o engaste e o PZT,  $0,01\text{m}$  de comprimento, o elemento finito que compreende o PZT,  $0,0459\text{m}$  de comprimento, e, o restante da viga foi dividida em outros quatro elementos finitos de mesmo tamanho,  $0,0625\text{m}$  de comprimento cada um.

As propriedades mecânicas do compósito e do piezelétrico são definidas na Tab. 5.1, sendo que, o termo  $\rho$  indica a densidade de cada um dos materiais e,  $v_{12}$ ,  $v_{13}$  e  $v_{23}$  são os coeficientes de Poisson. Houve a multiplicação dos Módulos de Young ( $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ ) e de Cisalhamento ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ ) por um fator complexo, sendo que,  $\beta = 5 \times 10^{-8}$ , de forma a contemplar o amortecimento inerente à estrutura compósita.

Tabela 5.1 - Propriedades mecânicas do compósito e do PZT

<b>Propriedades</b>	<b>Compósito</b>	<b>PZT G1195</b>
$E_1[\text{Pa}]$	$1,72 \times 10^{11} (1 + i\beta)$	$6,90 \times 10^{10} (1 + i\beta)$
$E_2[\text{Pa}]$	$6,89 \times 10^9 (1 + i\beta)$	$6,90 \times 10^{10} (1 + i\beta)$
$E_3[\text{Pa}]$	$6,89 \times 10^9 (1 + i\beta)$	$6,90 \times 10^{10} (1 + i\beta)$
$G_{12}[\text{Pa}]$	$3,45 \times 10^9 (1 + i\beta)$	$2,59 \times 10^{10} (1 + i\beta)$
$G_{13}[\text{Pa}]$	$3,45 \times 10^9 (1 + i\beta)$	$2,59 \times 10^{10} (1 + i\beta)$
$G_{23}[\text{Pa}]$	$1,38 \times 10^9 (1 + i\beta)$	$2,59 \times 10^{10} (1 + i\beta)$
$v_{12}$	0,25	0,33
$v_{13}$	0,25	0,33
$v_{23}$	0,30	0,33
$\rho[\text{Kg/m}^3]$	1566,00	7700,00

Já as propriedades eletromecânicas e elétricas do elemento piezelétrico, PZTG1195, são dadas na Tab. (5.2) e Tab. (5.3), respectivamente (FARIA, 2006; ZAMBOLINI-VICENTE, 2014):

Tabela 5.2 - Propriedades eletromecânicas do PZT

<b>Material</b>	$e_{15} [c/m^2]$	$e_{24} [c/m^2]$	$e_{31} [c/m^2]$	$e_{32} [c/m^2]$	$e_{33} [c/m^2]$
<b>PZT G1195</b>	0,00	0,00	-18,30	-9,01	-9,01

Tabela 5.3 - Propriedades elétricas do PZT

<b>Material</b>	$\chi_{11} [F/m]$	$\chi_{22} [F/m]$	$\chi_{33} [F/m]$
<b>PZT G1195</b>	$1,59 \times 10^{-8}$	$1,59 \times 10^{-8}$	$1,59 \times 10^{-8}$

Na sequência, serão apresentadas algumas simulações realizadas com a viga apresentada na Fig. 5.1 a fim de demonstrar a atuação dos circuitos elétricos *shunt* na redução dos níveis de vibração e ruído do sistema determinístico. Em seguida, realiza-se a introdução de incertezas nos parâmetros estruturais, espessura das camadas e orientações das fibras e nos parâmetros do circuito *shunt*, indutância e resistência, afim de verificar a robustez do sistema, além da avaliação da influência da variabilidade dos parâmetros nas respostas dinâmicas.

### 5.1. Resposta dinâmica do sistema determinístico

Para fins de atenuação dos níveis de vibração e ruído do sistema dinâmico em questão, utilizou-se dos circuitos elétricos *shunt* para realizar este controle de forma passiva, com o objetivo de atenuar a amplitude de vibração do primeiro modo da viga compósita. Os valores de resistência e indutância para cada circuito foram calculados como sendo ótimos de acordo com Hagood e Von Flotow (1991), utilizando-se da Eq. (5.1) para o cálculo do valor de

resistência do resistor no caso do *shunt* resistivo e das Equações (5.2) e (5.3) para o cálculo dos parâmetros do circuito ressonante, resistência e indutância, respectivamente. Estes valores calculados foram utilizados nas simulações dos problemas determinísticos e estocásticos, conforme mostrados na Tab. 5.4.

*Shunt Resistivo:*

$$R = \frac{\sqrt{1 - K_{31}^2}}{C_{pzt}\omega_n} \quad (5.1)$$

*Shunt Ressonante:*

$$R = \frac{\sqrt{2}K_{31}}{C_{pzt}\omega_n(1 + K_{31}^2)} \quad (5.2)$$

$$L = \frac{1}{C_{pzt}\omega_n^2(1 + K_{31}^2)} \quad (5.3)$$

onde  $K_{31}$  é o coeficiente de acoplamento piezelétrico, atuando no modo  $31$ ,  $C_{pzt}$  é a capacitância inerente à pastilha piezelétrica e  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema eletromecânico considerando-se a pastilha piezelétrica com seus eletrodos em curto-circuito.

Tabela 5.4 - Parâmetros nominais ótimos dos circuitos elétricos *shunt* utilizados

<b>Tipo de circuito</b>	<b>Resistivo</b>	<b>Ressonante</b>
$R(\Omega)$	96907,00	17016,00
$L(H)$	-	111,81

Assim, com a utilização dos valores de resistência e indutância dados na Tab. 5.4, faz-se a simulação das funções de resposta em frequência (FRFs) para o primeiro modo, tanto da viga compósita somente com PZT sem circuito, quanto da mesma em que o elemento piezelétrico é acoplado aos diferentes circuitos *shunt* para o controle passivo de vibrações. O resultado destas simulações é apresentado na Fig. 5.2.

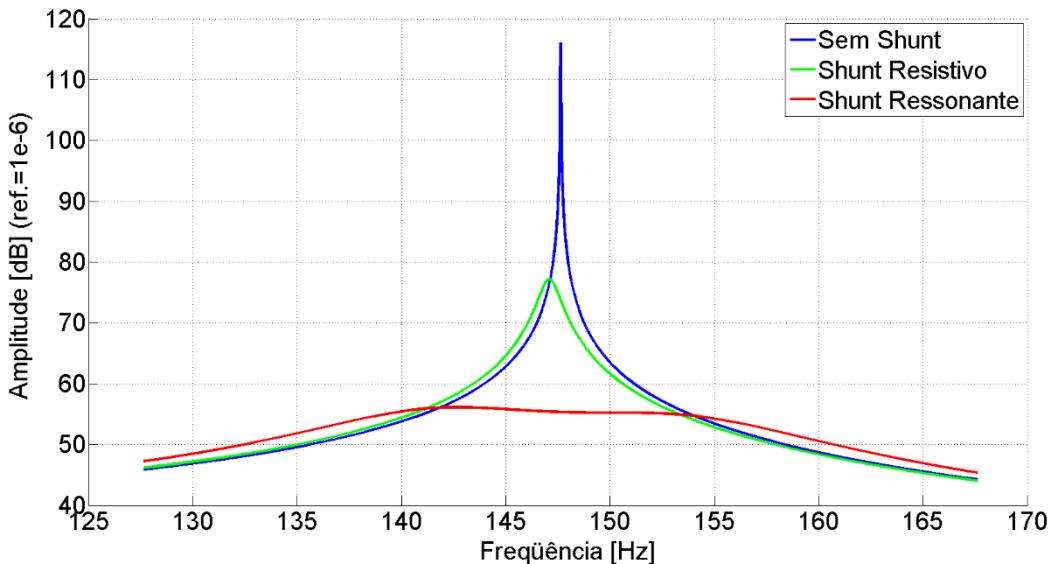


Figura 5.2 - Amplitudes do primeiro modo de vibração da viga sem circuito *shunt* e com *shunt* resistivo e ressonante.

De imediato, nota-se claramente a grande capacidade de atenuação passiva dos níveis de vibração proporcionada pelos dois circuitos. Com a utilização do circuito elétrico *shunt* resistivo houve uma redução de aproximadamente  $40\text{dB}$  da amplitude do primeiro modo de vibração. Já com utilização do *shunt* ressonante a atenuação foi ainda maior, cerca de  $60\text{dB}$ , demonstrando a superioridade deste tipo de circuito no controle passivo de vibrações. A utilização do circuito resistivo leva a um ligeiro deslocamento em frequência no modo de interesse, assemelhando-se aos resultados obtidos ao se atribuir características viscoelásticas ao sistema. O comportamento de viscoelásticos pode ser melhor estudado no trabalho de De Lima, 2007. Já a estrutura com *shunt* ressonante possui uma FRF semelhante à obtida via emprego de absorvedores dinâmicos de vibrações pela presença das duas antirressonâncias. Os resultados para a viga compósita em questão são semelhantes aos obtidos pelo próprio autor em um

trabalho anterior, Ribeiro e De Lima (2014), utilizando-se de um compósito com diferentes propriedades.

## 5.2. Resposta dinâmica do sistema estocástico

Nesta seção, é dada ênfase as simulações do problema estocástico eletromecânico, de forma a computar as incertezas presentes tanto nos parâmetros que foram fatorados das matrizes de massa e rigidezes do sistema, que são os parâmetros estruturais, como nos parâmetros dos circuitos elétricos *shunt*. Como mencionado na primeira seção deste capítulo, a viga apresentada na Fig. 5.1 foi discretizada em três diferentes tipos de elementos finitos em relação ao comprimento de cada um: o elemento finito entre o engaste e o PZT, o elemento finito que comprehende o PZT, e, o restante da viga foi dividida em outros quatro elementos finitos de mesmo tamanho.

A determinação do domínio do problema estocástico foi realizada de acordo com diversos trabalhos da literatura, como o de Ghanem e Spanos (1991), De Lima (2007), De Lima, Rade e Bouhaddi (2010), Koroishi et al (2012) onde os mesmos são definidos conforme os comprimentos de correlação. A definição dos domínios estocásticos e dos comprimentos de correlação para o problema estocástico desta dissertação é apresentada na Tab. 5.5:

Tabela 5.5 – Domínios estocásticos e comprimentos de correlação

<b>Tipo de EF</b>	<b>Domínio</b>		<b>Comprimento de correlação</b>	
	$\Omega_x$	$\Omega_y$	$L_{cov,x}$	$L_{cov,y}$
1	$[0;0,01]$	$[0;0,0255]$	0,01	0,0255
2	$[0;0,0459]$	$[0;0,0255]$	0,0459	0,0255
3	$[0;0,062525]$	$[0;0,0255]$	0,062525	0,0255

Com o objetivo de demonstrar a influência do comprimento de correlação e da definição do domínio estocástico no valor das autofunções e dos autovalores, soluções da integral de

Fredholm, estes resultados são apresentados a seguir, tanto para os três domínios estocásticos utilizados em  $x$ , dado por  $\Omega_x$ , quanto para o domínio estocástico  $y$ , dado por  $\Omega_y$ , comum aos três tipos de elementos. As autofunções para cada um dos domínios estão apresentadas na Fig. 5.3 e os autovalores na Tab. 5.6.

Tabela 5.6 – Autovalores para cada um dos domínios estocásticos utilizados

<b>Domínio</b>	<b>Autovalores</b>			
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\Omega_x = [0; 0,01]$	0,0074	0,0014	0,0004	0,0002
$\Omega_x = [0; 0,0459]$	0,0339	0,0063	0,0021	0,0010
$\Omega_x = [0; 0,062525]$	0,0462	0,0086	0,0028	0,0013
$\Omega_y = [0; 0,0255]$	0,0188	0,0035	0,0011	0,0005

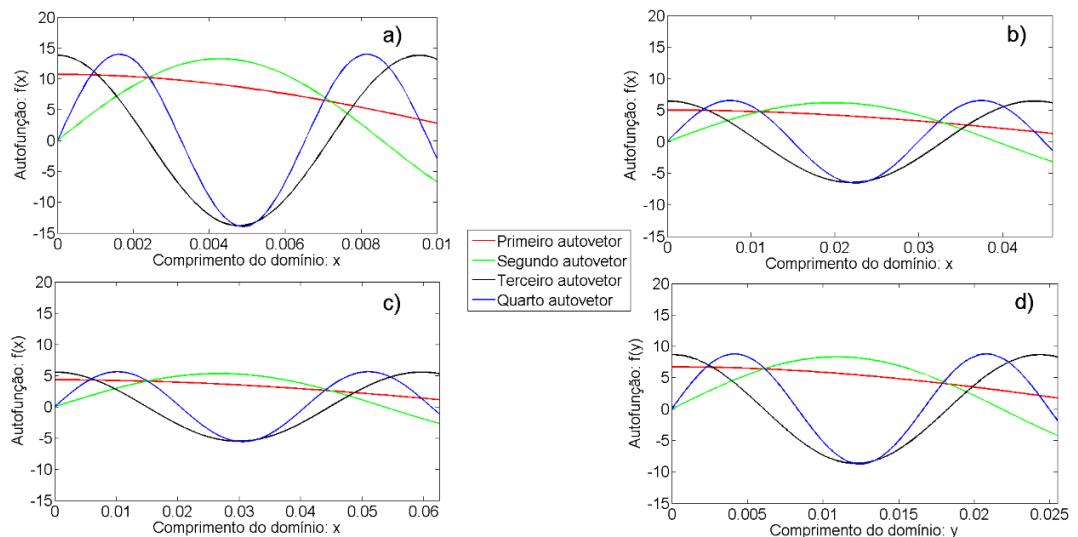


Figura 5.3 - Autofunções para: a)  $\Omega_x = [0; 0,01]$  e  $L_{cov,x} = 0,01$ ; b)  $\Omega_x = [0; 0,0459]$  e  $L_{cov,x} = 0,0459$ ; c)  $\Omega_x = [0; 0,062525]$  e  $L_{cov,x} = 0,062525$  e d)  $\Omega_y = [0; 0,0255]$  e  $L_{cov,y} = 0,0255$ .

Assim, de acordo com os resultados obtidos com a solução da Integral de Fredholm nos domínios apresentados na Fig. 5.3 e na Tab. 5.6, nota-se que tanto o comprimento de correlação

do campo estocástico como o comprimento da definição do domínio influenciam nos autovalores e autofunções (GHANEM e SPANOS, 1991; DE LIMA, 2007; DE LIMA, RADE e BOUHADDI, 2010; KOROISHI et al, 2012).

### *5.2.1. Simulações do problema eletromecânico estocástico*

Utilizando-se da expansão em série de Karhunen-Loève na discretização dos campos estocásticos houve a necessidade, em um primeiro momento, da escolha do número de termos da série. Assim, de acordo com a literatura (GHANEM e SPANOS, 1991; SUDRET e DER KIUREGHIAN, 2000; SUDRET, 2007; KOROISHI, 2012) constatou-se que a utilização de dez termos na expansão da série seria mais do que suficiente. Os trabalhos nesta área atestam que já existe convergência, na maioria dos casos, a partir de quatro termos. Fixando-se o número de termos da série,  $n_{KL} = 10$ , foi necessário realizar, para cada caso, um teste de convergência, de modo a saber quantos indivíduos seriam necessários em cada amostra. Foi observado que todas as simulações realizadas convergiam com menos de 500 indivíduos na amostra, sendo esta então a quantidade utilizada. O teste de convergência baseado na soma do erro quadrático médio foi realizado, para cada caso, utilizando-se da Eq. (5.4):

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \left| H_j(\omega, \Omega, \theta) - H_{med_j}(\omega, \Omega, \theta) \right|^2} \quad (5.4)$$

onde  $n_s$  representa o número de indivíduos da amostra e  $H_{med_j}$  representa a função de resposta em frequência média das FRFs estocásticas para cada caso analisado.

Na sequência são apresentadas as simulações realizadas para cada caso, sendo que, vários cenários foram investigados, no que diz respeito à quantidade de parâmetros considerados como incertos e a dispersão destes. Foi utilizada a amostragem por Hipercubo Latino, considerando-se um intervalo de confiança de 99,73% (três desvios-padrão) combinada com a Simulação de Monte Carlo como solver estocástico. A amostragem dos parâmetros aleatórios foi realizada de forma a gerar uma distribuição Gaussiana conforme a

expansão de Karhunen-Loève para as variáveis consideradas como sendo incertas. Os parâmetros físicos como espessuras, indutâncias, resistências, os quais não podem assumir valores negativos, foram gerados de acordo com valores máximos e mínimos atribuídos como parâmetros de entrada à função que realiza a amostragem (truncamento), sendo então os indivíduos gerados, em cada amostra, baseados nestes limites.

### *5.2.2. Viga compósita com piezelétrico sem circuito shunt acoplado*

Nesta seção, são apresentados os resultados das simulações estocásticas realizadas com a viga da Fig. 5.1 sem a presença do circuito elétrico *shunt*. Desta forma, o único amortecimento presente é o inerente à estrutura compósita. No primeiro conjunto de simulações apenas as espessuras das camadas de compósito,  $h_i, i=1\dots4$ , e a espessura do PZT,  $h_{PZT}$ , foram tomados como sendo variáveis aleatórias. Já os ângulos de direções das fibras da estrutura compósita foram assumidos como sendo determinísticos. Quatro cenários diferentes foram simulados neste primeiro conjunto, sendo que, o valor nominal de cada uma das espessuras,  $0,002m$ , foi variado de forma simultânea em cinco por cento (Fig. 5.4a), dez por cento (Fig. 5.4b), quinze por cento (Fig. 5.4c) e vinte por cento (Fig. 5.4d). Assim, na Fig. 5.4 são apresentados os envelopes das funções de resposta em frequência, que representam os valores extremos estatísticos de cada amostra.

Apenas para efeito de esclarecimento, observa-se que para os cenários apresentados, tanto para este primeiro conjunto de simulações como para os dados na sequência, os valores nominais dos termos considerados como incertos foram variados simultaneamente, sendo esta apenas uma dentre muitas possibilidades. Outras combinações de formas de variar os valores nominais destes parâmetros poderiam ter sido aqui demonstradas, como por exemplo, realizar a variação da espessura de apenas uma das camadas e tomar as outras com seus valores determinísticos. Ressalva-se que muitas simulações contendo diferentes combinações foram realizadas ao longo deste trabalho, mas, não aqui colocadas devido à relevância e redundância das conclusões obtidas.

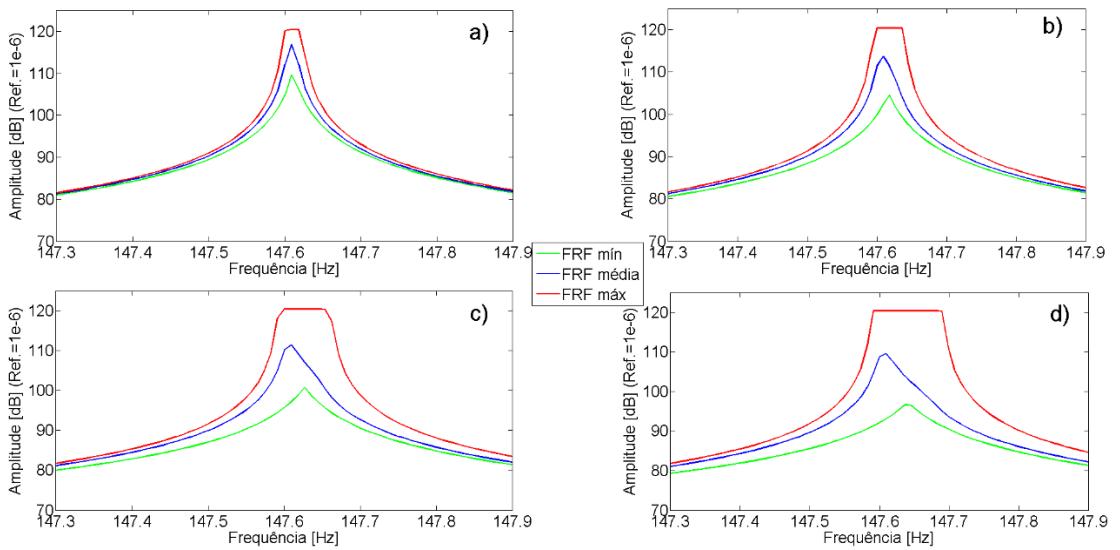


Figura 5.4 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico sem circuito *shunt* considerando-se o primeiro conjunto de simulações.

A convergência para cada um dos cenários da Fig. 5.4 foi verificada. Os resultados são apresentados na Fig. 5.5. Nota-se que, para todos os casos, a convergência ocorreu com menos de 500 indivíduos na amostra do Hipercubo Latino.

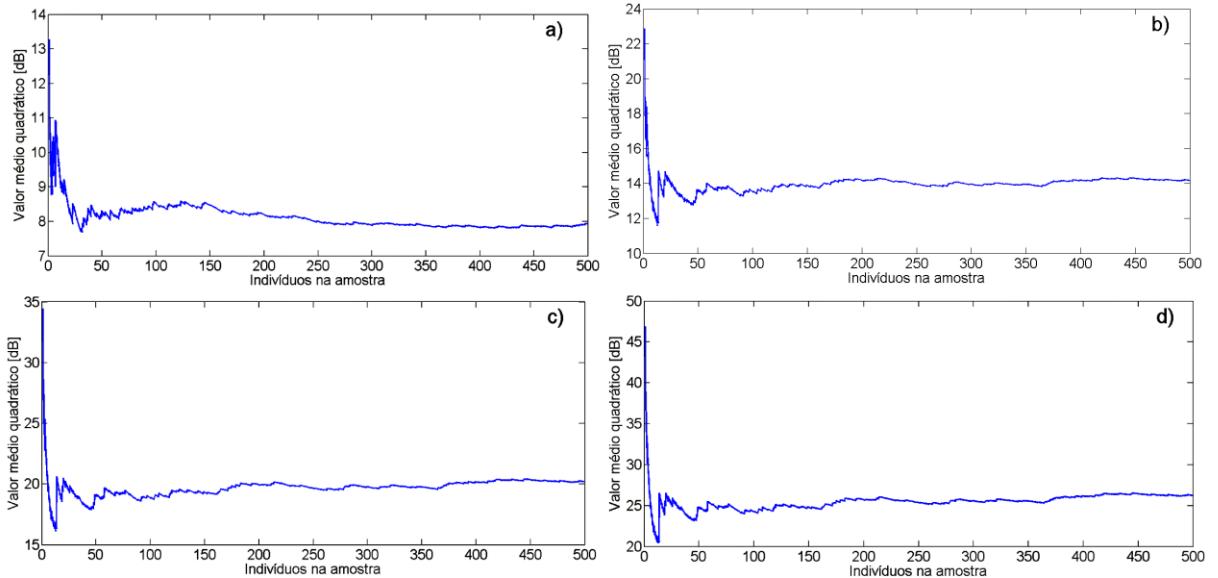


Figura 5.5 - Convergência para os cenários da Fig. 5.4 do sistema sem *shunt*.

Assim, a partir da Fig. 5.4 pode-se concluir que à medida que o nível de dispersão dos parâmetros considerados como incertos (espessuras das camadas do compósito e do PZT) é aumentado, a dispersão ao redor das amplitudes das FRFs médias também aumenta, tornando-se assim maior o intervalo de confiança, formado pela confiança da resposta dinâmica do sistema de estar dentro do envelope formado pelas FRFs mínimas e máximas. Além disso, observa-se que os valores médios das amplitudes das FRFs, para todos os casos, estão dentro dos envelopes, demonstrando uma boa predição do modelo médio quanto aos níveis de incerteza investigados.

No segundo conjunto de simulações, apresentado na Fig. 5.6, tanto as espessuras das camadas do compósito e do PZT como os ângulos de direções das fibras do compósito foram considerados como variáveis aleatórias, sendo  $\alpha_i, i=1\dots 4$  os ângulos das fibras de cada uma das camadas do compósito. Os valores nominais das espessuras, como já mencionado, foi de  $0,002m$  e, dos ângulos das fibras do compósito de  $[0\%90\%90\%0^\circ]$ , sendo que, estes valores médios foram perturbados de forma simultânea em cinco por cento (Fig. 5.6a), dez por cento (Fig. 5.6b), quinze por cento (Fig. 5.6c) e vinte por cento (Fig. 5.6d).

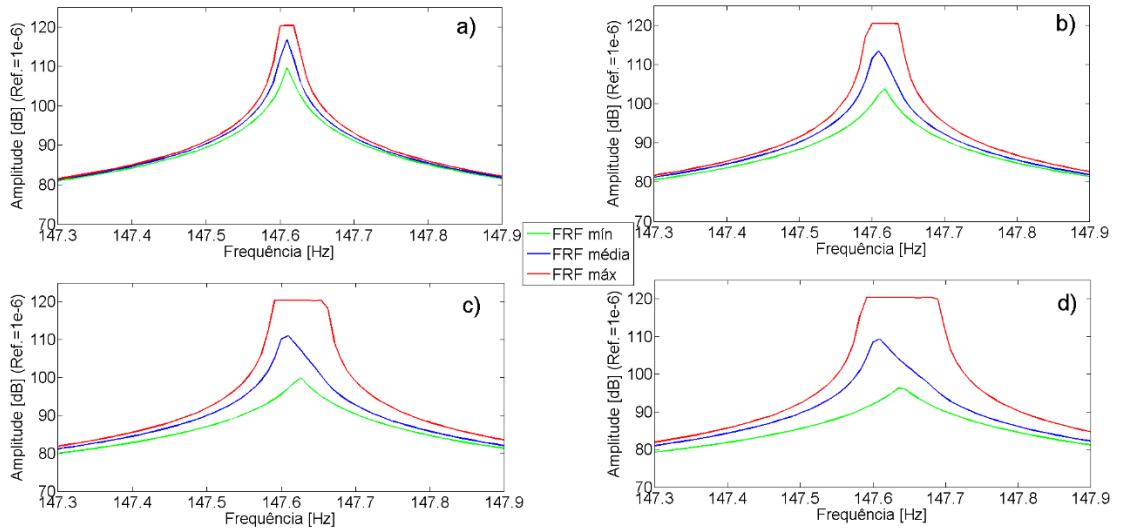


Figura 5.6 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico sem circuito *shunt* considerando-se o segundo conjunto de simulações.

Da mesma maneira que observado no primeiro conjunto de simulações (Fig. 5.4), onde foram consideradas apenas as espessuras como variáveis incertas, ao se aumentar o nível de

dispersão dos parâmetros, a variabilidade das FRFs também aumentou, tornando-se assim maior o intervalo de confiança. Além disso, observa-se que as FRFs médias estocásticas estão dentro dos envelopes formados pelas FRFs mínimas e máximas estocásticas, o que novamente indica uma boa predição do modelo frente ao quadro de incertezas. Além disso, comparando as amplitudes das FRFs dadas na Fig. 5.4 com as da Fig. 5.6 nota-se que ao se considerar os ângulos das fibras do compósito como sendo também variáveis incertas, pouca mudança foi observada nas respostas dinâmicas do sistema eletromecânico estocástico e, assim, pode-se inferir que as espessuras das camadas possuem, neste caso, maior influência no aumento da variabilidade das FRFs e consequente aumento do intervalo de confiança.

As curvas de convergência para os cenários dados na Fig. 5.6 são mostradas na Fig. 5.7, onde nota-se que para todos os casos, a convergência ocorre com menos de 500 indivíduos na amostra.

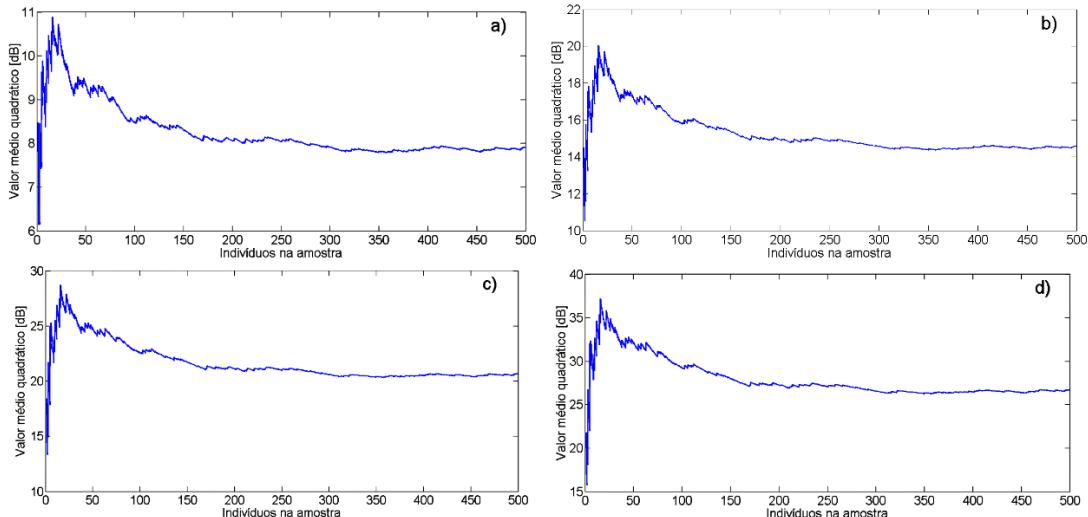


Figura 5.7 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.6 do sistema sem *shunt*.

### 5.2.3. Viga de compósito com piezelétrico acoplado de circuito shunt resistivo

Nesta seção, as simulações realizadas consideram a viga compósita com piezelétrico acoplado a um circuito elétrico *shunt* resistivo. No primeiro conjunto de simulações, Fig. 5.8, somente a resistência do circuito resistivo é assumida como incerta, sendo seu valor nominal de  $R=96907,00(\Omega)$ , o qual foi previamente apresentado na Tab. 5.4. Desta forma, tanto as

espessuras das camadas do compósito e do PZT como os ângulos das fibras do compósito, foram tomados como determinísticos. Assim, o valor médio da resistência foi variado de forma simultânea em cinco por cento (Fig. 5.8a), dez por cento (Fig. 5.8b), quinze por cento (Fig. 5.8c) e vinte por cento (Fig. 5.8d). Vale ressaltar que segundo Boylestad (2012), na prática, a série E6 de resistores padrões disponíveis comercialmente apresentam 20% de tolerância em relação ao valor nominal de resistência, sendo a mais ampla tolerância admissível em projeto.

Na Fig. 5.8 são apresentados os envelopes das funções de resposta em frequência, que representam os valores dos extremos estatísticos de cada amostra.

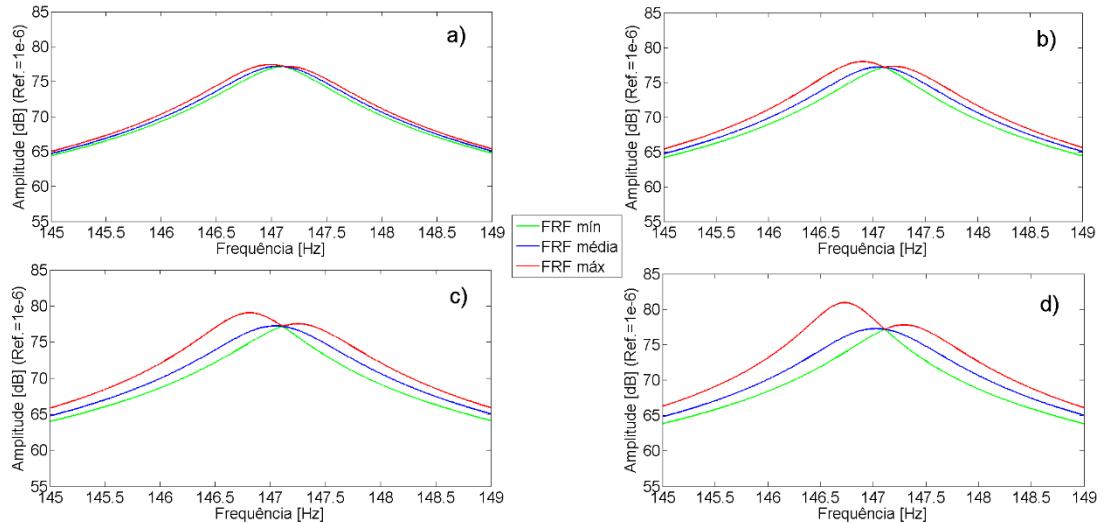


Figura 5.8 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* resistivo considerando-se o primeiro conjunto de simulações.

A convergência para cada um dos cenários dados na Fig. 5.8 foi verificada. As curvas de convergência são apresentadas na Fig. 5.9 e, observa-se que para todos os casos, a convergência ocorreu com menos de 500 indivíduos na amostra.

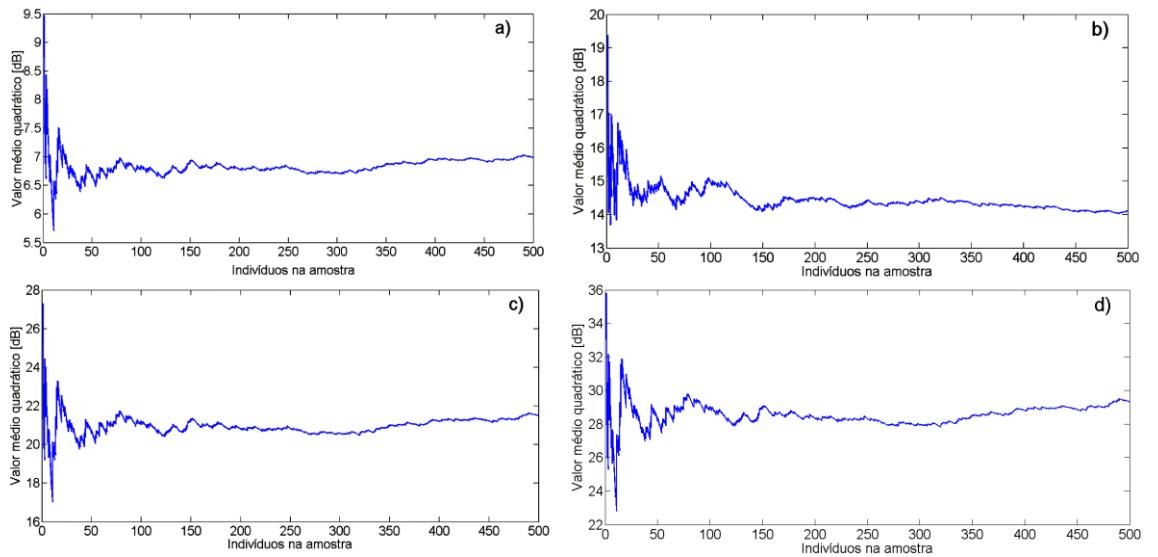


Figura 5.9 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.8 do sistema estocástico com *shunt* resistivo.

A partir da Fig. 5.8 nota-se que os envelopes das FRFs, delimitados pelos extremos estatísticos, expandiram-se com o aumento do nível de dispersão ao redor do parâmetro resistivo, ocorrendo também o consequente aumento do intervalo de confiança. Além disso, a FRF média estocástica encontra-se, para todos os cenários, dentro do envelope. Outro aspecto que merece destaque é a robustez inerente ao *shunt* resistivo uma vez que, mesmo para o pior caso, dado pelo cenário d) da Fig. 5.8, este circuito continua a realizar a atenuação dos níveis de vibração quase da mesma maneira que para o caso determinístico onde se considera o valor ótimo de resistência calculado (Tab. 5.4).

Já no segundo conjunto de simulações, além do valor da resistência do circuito *shunt* resistivo, os parâmetros estruturais, espessuras das camadas do compósito e PZT e ângulos das fibras do compósito, foram considerados como sendo incertos. Desta forma, os valores nominais das espessuras, dos ângulos e da resistência foram perturbados, de forma simultânea, em cinco por cento (Fig. 5.10a), dez por cento (Fig. 5.10b), quinze por cento (Fig. 5.10c) e vinte por cento (Fig. 5.10d). Os envelopes das funções de resposta em frequência, que representam os valores extremos estatísticos de cada amostra, são apresentados na Fig. 5.10.

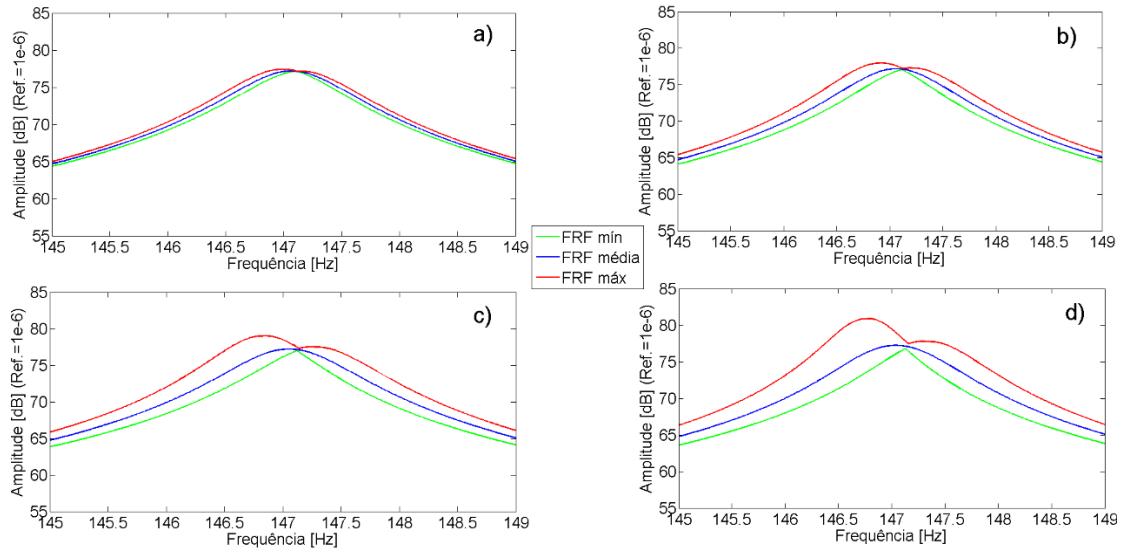


Figura 5.10 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* resistivo considerando-se o segundo conjunto de simulações.

As curvas de convergência para cada um dos cenários dados na Fig. 5.10 são apresentadas na Fig. 5.11, sendo que, a convergência ocorreu com menos de 500 indivíduos na amostra.

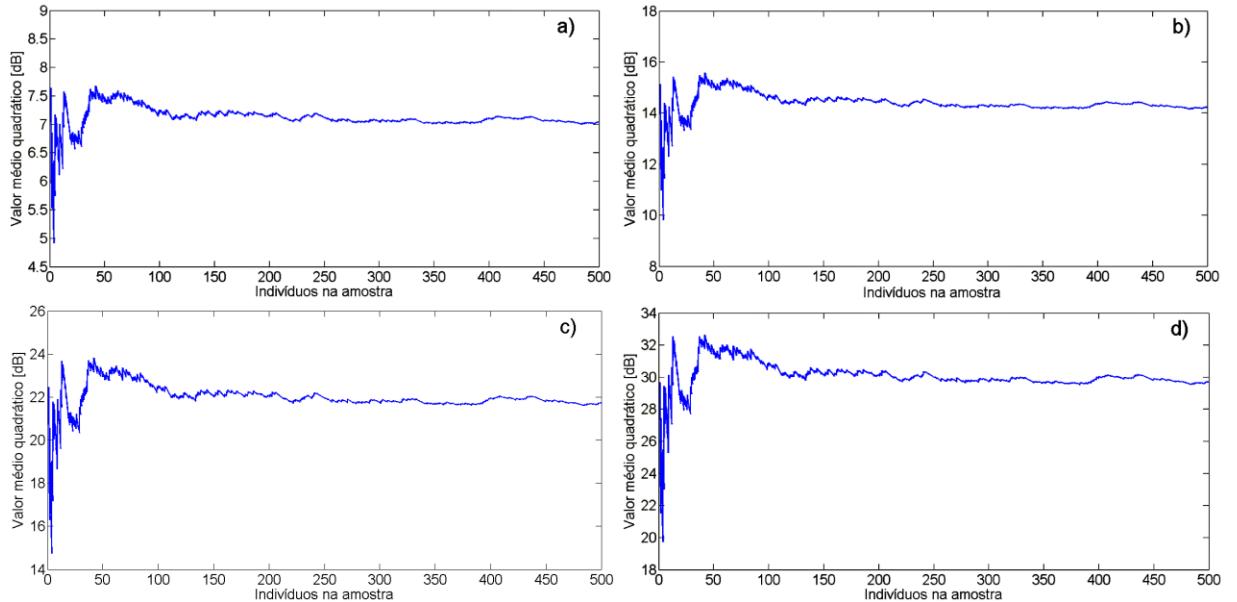


Figura 5.11 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.10 do sistema estocástico com *shunt* resistivo.

Para este segundo conjunto de simulações, pode-se notar o mesmo comportamento das FRFs obtidas para as simulações do primeiro conjunto, onde apenas a resistência havia sido considerada como variável aleatória. Assim, o aumento da dispersão dos parâmetros incertos leva a um aumento da dispersão das FRFs estocásticas e, além disso, a FRF média estocástica se encontra dentro do envelope formado pelas FRFs mínimas e máximas estocásticas.

É importante salientar que ao se comparar as FRFs do sistema eletromecânico acoplado com *shunt* resistivo, dadas na Fig. 5.8 com as da Fig. 5.10, nota-se que, ao se considerar além da resistência do circuito as espessuras das camadas e as direções das fibras como sendo também variáveis aleatórias, poucas mudanças foram observadas nas respostas do sistema. Assim, pode-se inferir que as incertezas advindas da resistência, neste caso, possuem maior influência na variabilidade e consequente aumento do intervalo de confiança das FRFs da estrutura em relação as incertezas associadas à espessura das camadas e as direções das fibras. A baixa relevância dos parâmetros da estrutura na variabilidade das respostas do sistema pode ser explicada pelas pequenas dimensões da viga simulada se comparadas com a ordem de grandeza do parâmetro resistivo. Além disso, nota-se novamente que mesmo para o pior caso dado pelo cenário d) da Fig. 5.10, o circuito resistivo continua a realizar a atenuação dos níveis de vibração quase da mesma maneira que para o caso determinístico onde se considera o valor ótimo de resistência calculado (Tab. 5.4).

#### *5.2.4. Viga de compósito contendo piezelétrico acoplado de shunt ressonante*

Neste tópico será avaliada a influência da dispersão dos parâmetros do circuito ressonante, resistência e indutância, e dos parâmetros estruturais, espessura das camadas do compósito e do PZT e ângulos de direções das fibras do compósito, na variabilidade das respostas do sistema e na atenuação dos níveis de vibrações do primeiro modo da estrutura. Os valores nominais dos parâmetros do circuito ressonante foram calculados como sendo ótimos e apresentados na Tab. 5.4, sendo que, como valores nominais tem-se  $17016,00(\Omega)$  para o resistor e um indutor de  $111,81(H)$ . Segundo Boylestad (2012), os indutores padrões disponíveis comercialmente apresentam, assim como os resistores, um máximo de 20% de tolerância em relação ao seu valor nominal, sendo então, este o valor máximo de dispersão simulado neste trabalho.

No primeiro conjunto de simulações, apenas a indutância do circuito ressonante foi tomada como incerta. A resistência do circuito, as espessuras e os ângulos das fibras considerados como sendo determinísticos. Desta forma, o valor nominal da indutância foi perturbado, de forma simultânea, em cinco por cento (Fig. 5.12a), dez por cento (Fig. 5.12b), quinze por cento (Fig. 5.12c) e vinte por cento (Fig. 5.12d). Os envelopes das funções de resposta em frequência, que representam os valores dos extremos estatísticos de cada amostra, são apresentados na Fig. 5.12.

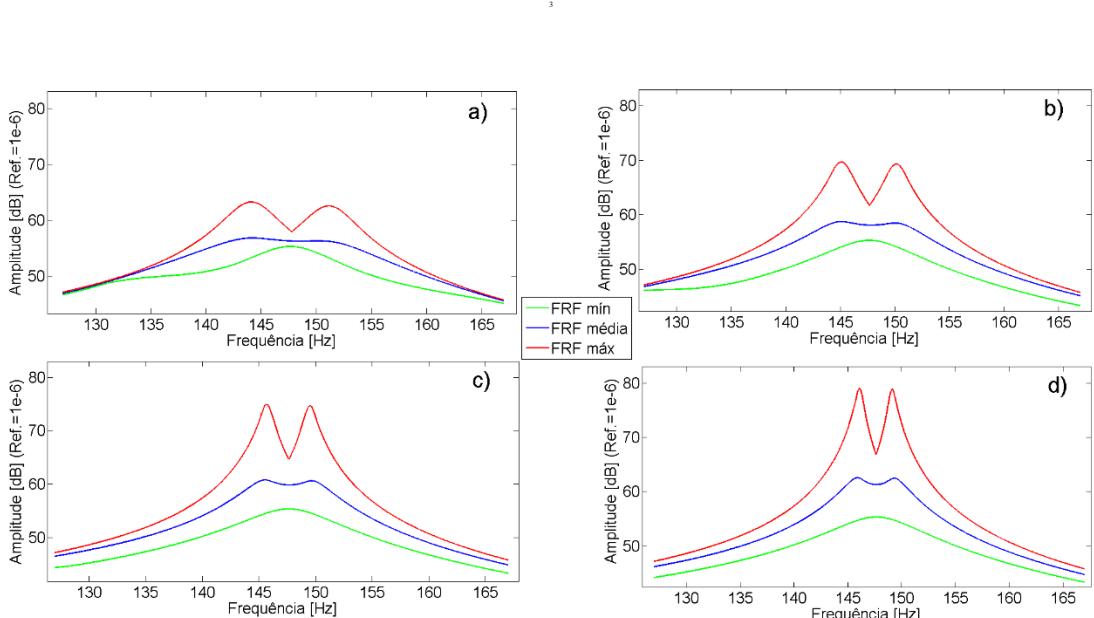


Figura 5.12 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* ressonante considerando-se o primeiro conjunto de simulações.

Os testes de convergência, para cada um dos cenários da Fig. 5.12, são mostrados a seguir. Observa-se que a convergência, em todos os casos, ocorreu com menos de 500 indivíduos na amostra.

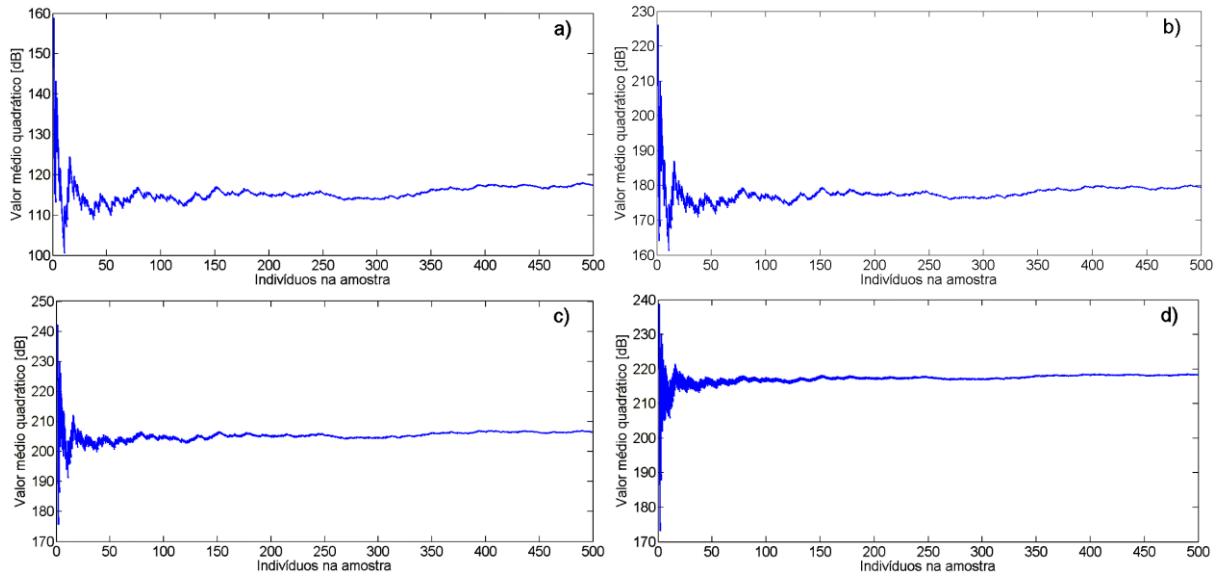


Figura 5.13 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.12 do sistema estocástico com *shunt* ressonante.

A partir da Fig. 5.12 pode-se observar que os envelopes das FRFs estocásticas se expandiram com o aumento da dispersão do parâmetro indutivo do circuito *shunt*, observando-se também o aumento do intervalo de confiança. Nota-se que a FRF média estocástica está contida, em todos os cenários, dentro dos envelopes e que a maior amplitude destes envelopes, no que diz respeito a maior diferença entre as amplitudes das FRFs mínimas e máximas estocásticas, possui valor aproximado de  $30dB$ , dado no cenário d) da Fig. 5.12, sendo que, para este cenário, o valor nominal da indutância sofreu uma dispersão de  $20\%$ . Salienta-se que, dependendo do nível de incerteza presente na indutância do circuito, o controle passivo de vibrações via *shunt* ressonante não mais irá atenuar a amplitude de vibração dos aproximados  $120dB$  para cerca  $55dB$ , como no sistema determinístico, mas sim, para o pior dos casos, atenuar para cerca  $80dB$ .

O segundo conjunto de simulações, Fig. 5.14, considera apenas o parâmetro resistivo como sendo incerto. Desta forma, os parâmetros estruturais e a indutância do circuito ressonante são tomados como sendo determinísticos. Assim, o valor médio da resistência foi variado, de forma simultânea, em cinco por cento (Fig. 5.14a), dez por cento (Fig. 5.14b), quinze por cento (Fig. 5.14c) e vinte por cento (Fig. 5.14d). Os envelopes das funções de resposta em frequência, que representam os valores dos extremos estatísticos de cada amostra, são apresentados na Fig. 5.14.

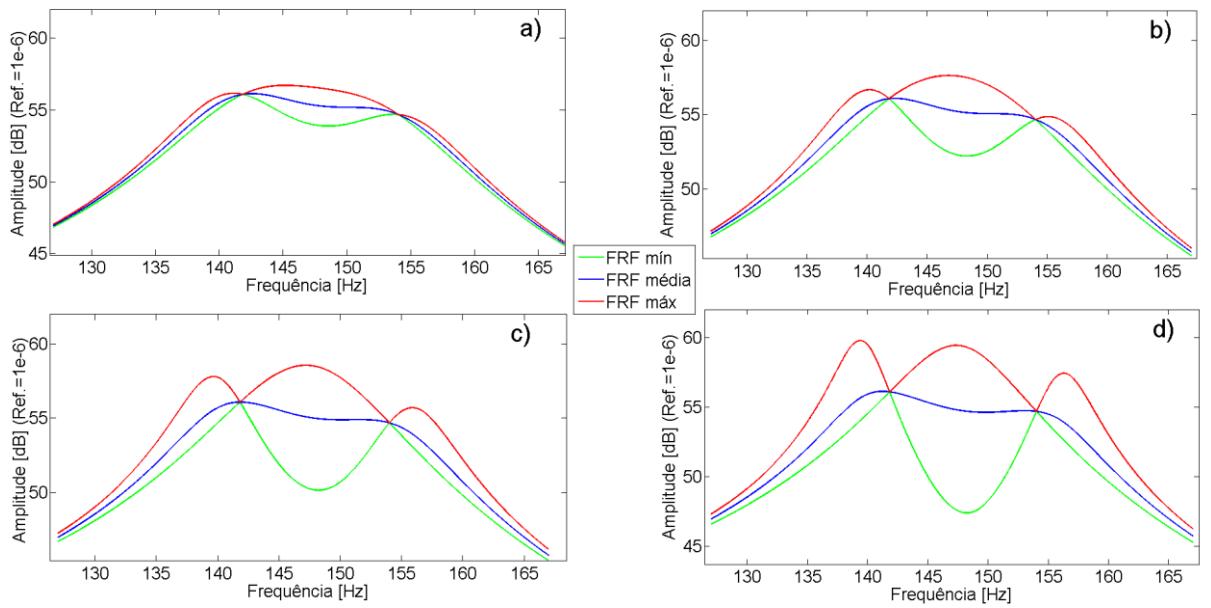


Figura 5.14 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* ressonante considerando-se o segundo conjunto de simulações.

A convergência para cada um dos cenários da Fig. 5.14 foi verificada. As curvas de convergência são apresentadas na Fig. 5.15 e, observa-se que para todos os casos, a convergência ocorreu com menos de 500 indivíduos na amostra

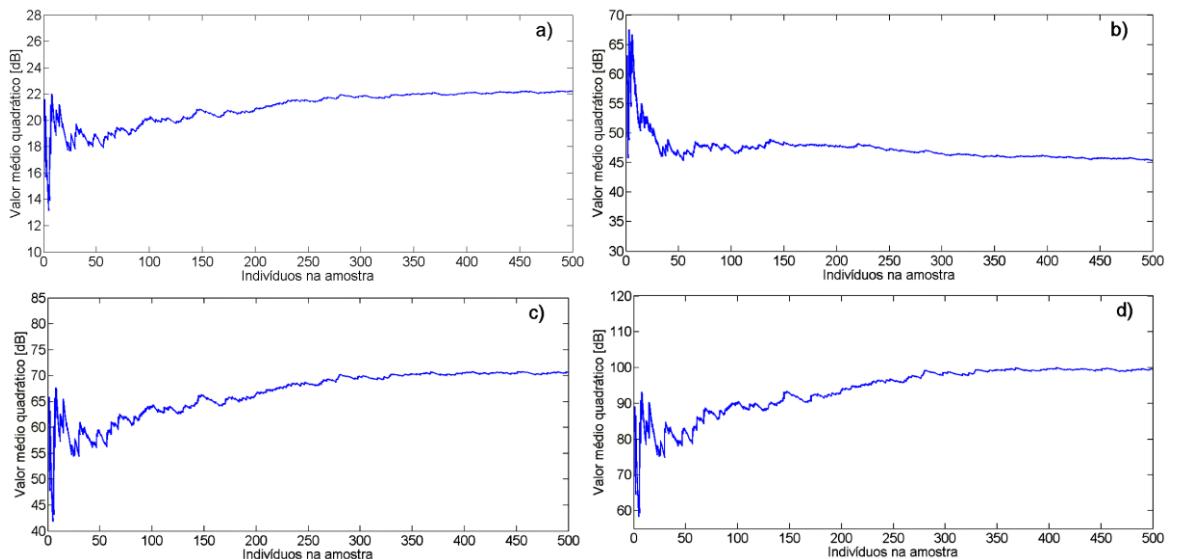


Figura 5.15 - Convergências para os cenários da Fig. 5.14 do sistema estocástico com *shunt* ressonante.

Observa-se pela Fig. 5.14 que houve uma expansão dos envelopes das FRFs estocásticas à medida que se aumentou o nível de dispersão do parâmetro resistivo do circuito ressonante, expandindo-se também o intervalo de confiança. Nota-se que a FRF média estocástica se encontra, em todos os cenários, dentro do envelope e, além disso, que a maior amplitude deste envelope, é um pouco maior de  $10\text{dB}$ , dado no cenário d) da Fig. 5.14. Para este cenário, o valor nominal da resistência sofreu uma dispersão de  $20\%$ . Assim, tem-se que, apesar do aumento amplitude do envelope, o circuito ressonante, tendo como variável aleatória apenas sua resistência, reduziu quantitativamente menos seu poder de atenuação níveis de vibrações caso se comparado com os cenários da Fig. 5.12 onde considerou-se como parâmetro incerto a indutância. Assim, infere-se que a indutância possui maior influência na variabilidade das respostas do sistema estocástico do que a resistência.

O terceiro conjunto de simulações é apresentado na Fig. 5.16. Neste conjunto, ambos parâmetros do circuito, indutância e resistência, são considerados como incertos. Os parâmetros estruturais são então tomados como determinísticos. Assim, os valores médios da resistência e indutância foram perturbados, de forma simultânea, em cinco por cento (Fig. 5.16a), dez por cento (Fig. 5.16b), quinze por cento (Fig. 5.16c) e vinte por cento (Fig. 5.16d). Os envelopes das funções de resposta em frequência, que representam os valores dos extremos estatísticos de cada amostra, são apresentados na Fig. 5.16.

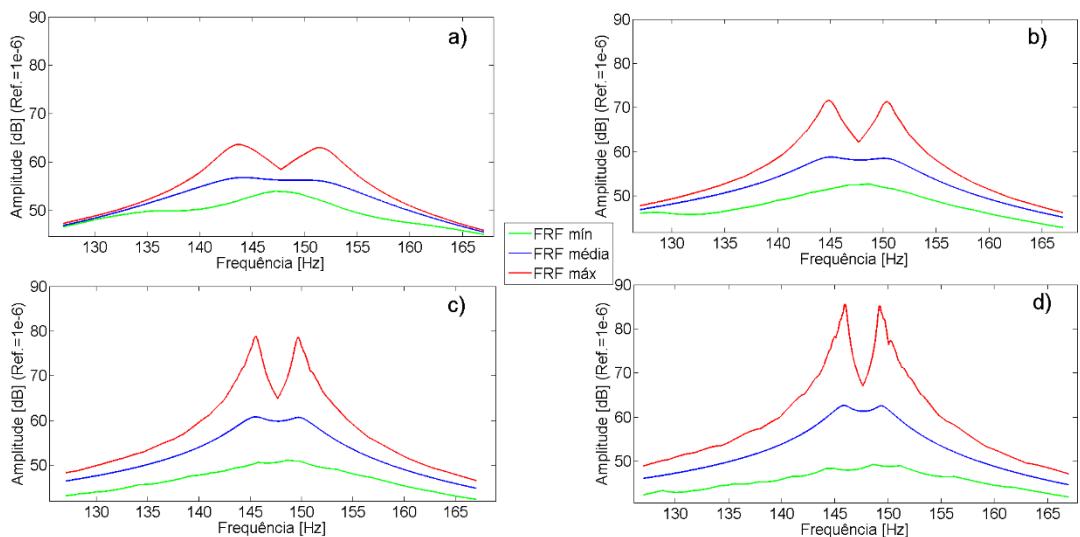


Figura 5.16 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* ressonante considerando-se o terceiro conjunto de simulações.

As curvas de convergência para cada um dos cenários da Fig. 5.16 são apresentadas na Fig. 5.17, sendo que, a convergência ocorreu, em todos os casos, com menos de 500 indivíduos na amostra.

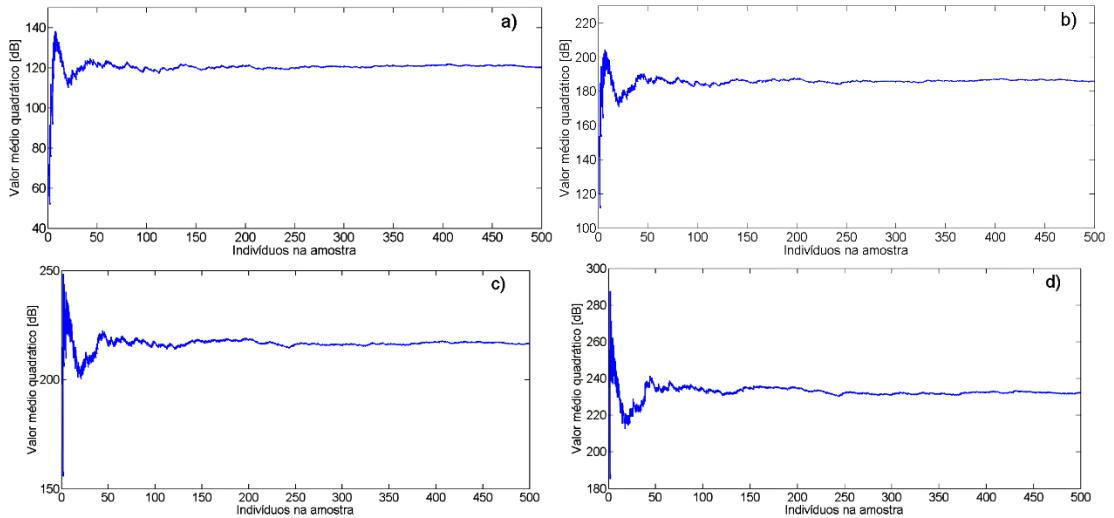


Figura 5.17 - Curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.16 do sistema estocástico com *shunt* ressonante.

A partir da Fig. 5.16 pode-se observar que os envelopes das FRFs estocásticas expandiram-se à medida que se aumentava a dispersão dos parâmetros indutância e resistência do circuito ressonante, tornando-se assim maior o intervalo de confiança. Nota-se também que a FRF média estocástica encontra-se, em todos os cenários, dentro dos envelopes.

Dentre o conjunto de envelopes, a maior amplitude se dá no cenário d) da Fig. 5.16, sendo que, para este cenário, os valores nominais da indutância e da resistência sofreram uma dispersão simultânea de 20%. Desta forma, infere-se que houve espécie de superposição das incertezas advindas de cada um dos parâmetros. Assim, aumentando-se o número de variáveis tomadas como incertas, aumentou-se também a amplitude dos envelopes e o intervalo de confiança. Mas, salienta-se que ao se comparar a Fig. 5.14 com a Fig. 5.12, nota-se que a indutância do circuito ressonante possui uma maior influência na variabilidade das respostas do sistema. Salienta-se que, dependendo do nível de incerteza presente na indutância e na resistência do circuito, o controle passivo de vibrações via *shunt* ressonante não mais irá atenuar a amplitude de vibração dos aproximados 120dB para cerca 55dB, como no sistema determinístico, mas sim, para o pior dos casos, atenuar para cerca 85dB.

O quarto e último conjunto de simulações realizadas, utilizando-se da estrutura compósita amortecida via *shunt* ressonante, considera todos os possíveis parâmetros como sendo aleatórios. Assim, tanto os parâmetros estruturais, espessuras das camadas de compósito e PZT e ângulos de direções das fibras do compósito, como os parâmetros do circuito, resistência e indutância, foram tomados como incertos.

Desta forma, os valores médios da resistência, indutância, espessuras e ângulos foram perturbados, de forma simultânea, em cinco por cento (Fig. 5.18a), dez por cento (Fig. 5.18b), quinze por cento (Fig. 5.18c) e vinte por cento (Fig. 5.18d). Os envelopes das funções de resposta em frequência, que representam os valores dos extremos estatísticos de cada amostra, são apresentados na Fig. 5.18.

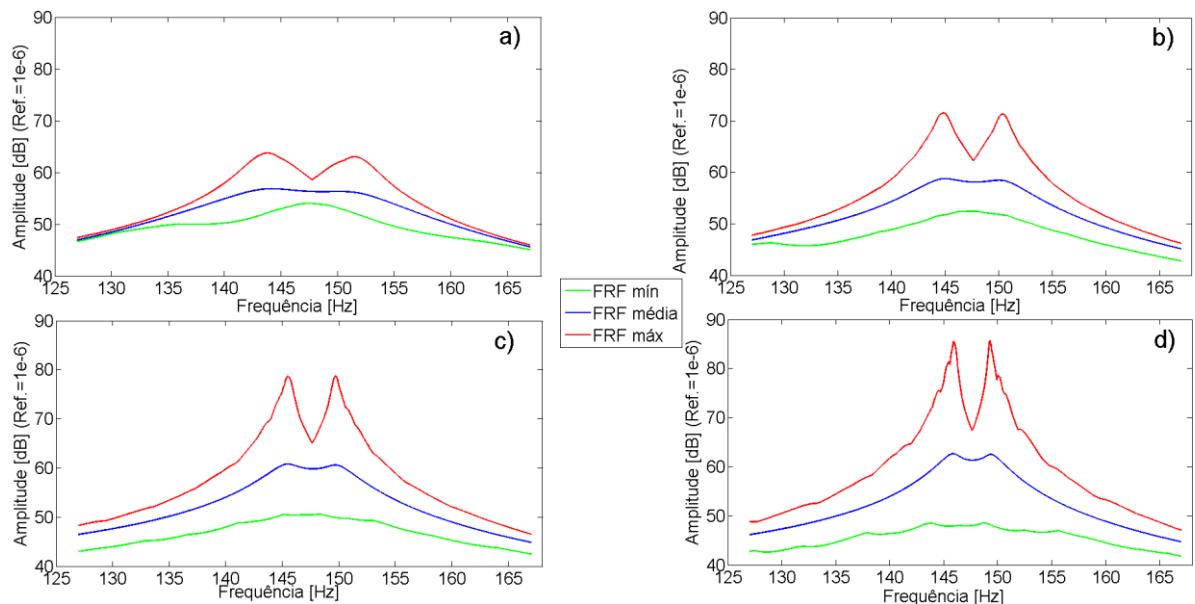


Figura 5.18 - Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* ressonante considerando-se o quarto conjunto de simulações.

São apresentadas na Fig. 5.19 as curvas de convergência para os cenários da Fig. 5.18, sendo que, a convergência, em todos os casos, ocorreu com menos de 500 indivíduos na amostra.

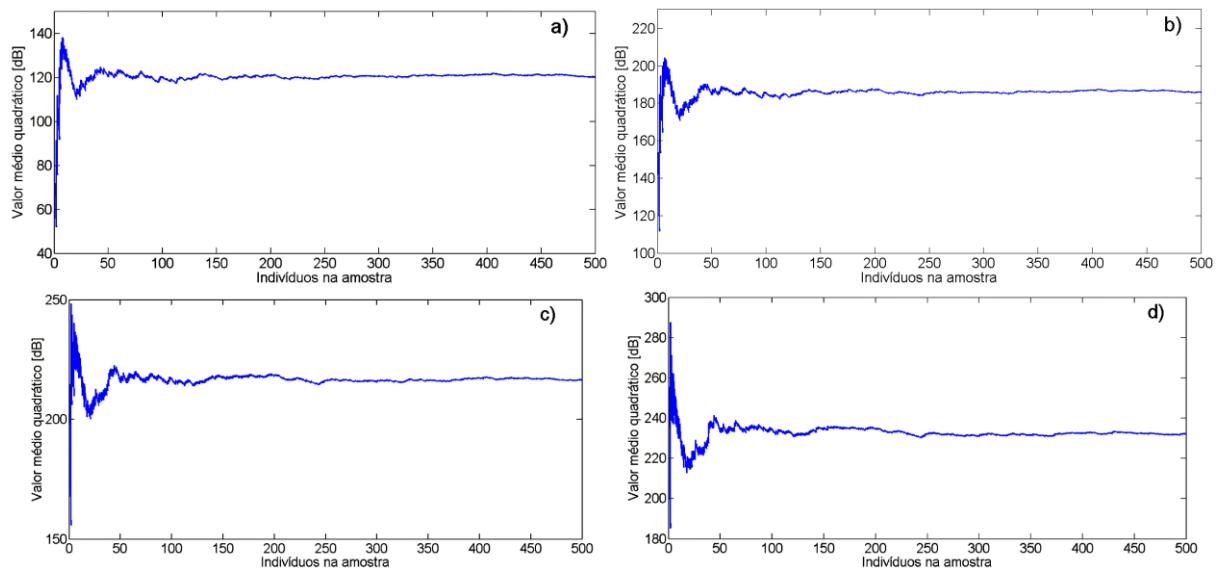


Figura 5.19 - Curvas de convergência os cenários da Fig. 5.18 do sistema estocástico com *shunt* ressonante.

Observa-se pela Fig. 5.18 que os envelopes das FRFs estocásticas se expandiram à medida que se aumentava a dispersão dos parâmetros do circuito ressonante, indutância e resistência, e também dos parâmetros da estrutura, ângulos de direções das fibras e espessuras das camadas, tornando-se assim maior o intervalo de confiança. Nota-se que a maior amplitude deste envelope encontra-se no cenário d) da Fig. 5.18, sendo que, para este cenário, o valor nominal, de todos os parâmetros, sofreu uma dispersão simultânea de 20%. Além disso, é possível observar que a FRF média estocástica encontra-se, em todos os cenários, entre os valores das FRFs mínimas e máximas dos limites da amostra.

O problema abordado neste quarto conjunto de simulações teve como principal foco avaliar a influência dos parâmetros estruturais na resposta estocástica do sistema amortecido via *shunt* ressonante. Assim, ao se comparar a Fig. 5.18, onde se tem os parâmetros do circuito e da estrutura como incertos, com a Fig. 5.16 onde considerou-se apenas os parâmetros do circuito como aleatórios, nota-se que houve pouca variação de um conjunto de simulações para outro. Desta forma, infere-se que os parâmetros do *shunt* ressonante possuem uma maior influência sobre a variabilidade das respostas do sistema estocástico se comparados com os parâmetros estruturais. Dentre os parâmetros do circuito, o parâmetro indutivo é o que possui maior influência. A baixa relevância dos parâmetros da estrutura na variabilidade das respostas

dinâmicas pode ser explicada pelas pequenas dimensões da viga simulada, a qual possui ordem de grandeza menor que a dos elementos do circuito.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

O trabalho de dissertação aqui apresentado teve como principal objetivo a geração de um modelo estocástico exato de uma estrutura compósita contendo elemento piezelétrico acoplado a circuitos elétricos *shunt* monomodais para o controle passivo de vibrações. Desta forma, entende-se que o presente trabalho constitui uma contribuição no cenário da modelagem numérico-computacional e projeto robusto de estruturas compósitas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt* monomodais, onde tanto os parâmetros estruturais, espessuras das camadas e ângulos de direções das fibras, quanto os parâmetros do circuito elétrico, resistência e indutância, são assumidos como sendo parâmetros incertos. Assim, se tem hoje um modelo eletromecânico de estruturas compósitas parametrizado, de forma que, a introdução das incertezas nestes parâmetros pôde ser realizada de maneira direta. Sequência pode ser então dada aos desenvolvimentos que vem sendo realizados no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) da Universidade Federal de Uberlândia. Além disso, este trabalho está inserido dentro dos principais temas de pesquisa de interesse do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE), de forma a representar o resultado da continuidade dos trabalhos desenvolvidos por Faria (2006) sobre a modelagem numérica de estruturas compósitas finas do tipo placas, do trabalho realizado por Viana (2005) sobre a modelagem numérica e caracterização experimental de circuitos elétricos *shunt* para o controle passivo de vibrações de sistemas estruturais, das contribuições dadas por

De Lima (2007) em sua tese de doutorado com o tema de modelagem e otimização robusta de sistemas mecânicos amortecidos com materiais viscoelásticos, utilizando-se da técnica de expansão Karhunen-Loève para discretização dos campos estocásticos.

Observa-se que, o trabalho seguiu uma sequência de modelagem, partindo da modelagem mecânica e eletromecânica determinística parametrizada de estruturas compósitas, combinada com elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt*, realizada no Capítulo III desta dissertação. Assim, a modelagem teve início levando-se em consideração os desenvolvimentos baseados no método de elementos finitos, sendo que, fez-se a utilização de elementos estruturais do tipo placas planas compósitas finas e moderadamente finas contendo elementos piezelétricos via emprego da Teoria Mista. Esta teoria utiliza o conceito de camada equivalente única para a modelagem dos campos de deslocamentos mecânicos e considera os graus de liberdade elétricos discretos em cada camada. Finalmente, foi realizada a introdução dos circuitos *shunt* no modelo. Uma das contribuições deste trabalho foi o foco dado a parametrização do modelo de elementos finitos do problema eletromecânico, optando-se pela manutenção das variáveis de projeto fatoradas das matrizes elementares e para cada efeito, flexão-membrana e cisalhamento, permitindo a introdução de maneira eficiente e simples das incertezas nos parâmetros mais influentes.

A partir do modelo eletromecânico determinístico parametrizado, no Capítulo IV as variáveis fatoradas das matrizes de massa e rigidezes foram então assumidas como aleatórias e modeladas como campos estocásticos. Para discretização destes campos, utilizou-se da técnica de expansão em série de Karhunen-Loève. As matrizes de massa e rigidezes foram novamente integradas, de forma a se obter as matrizes de massa e rigidezes estocásticas, considerando esta expansão, o que levou à geração do modelo estocástico exato. Assim, destaca-se outra contribuição relevante deste trabalho, a obtenção das matrizes exatas de massa e rigidezes do sistema, uma vez que se interviu diretamente na integração das mesmas.

De posse das matrizes exatas do sistema, simulações foram realizadas no Capítulo V, onde levou-se em consideração uma viga compósita contendo piezelétrico acoplado de circuito *shunt* com vistas a obtenção das respostas estocásticas dinâmicas do problema controlado passivamente. Desta forma, utilizou-se o método da Simulação de Monte Carlo combinado com a amostragem por Hipercubo Latino com o objetivo de geração dos envelopes de funções de resposta em frequência. Foi possível então, analisar os efeitos das incertezas introduzidas sobre a dispersão das respostas dinâmicas do problema direto.

Ao se observar os resultados das simulações realizadas, pode-se avaliar de uma forma geral, a eficiência dos procedimentos de modelagem desenvolvidos como uma ferramenta de análise e de concepção de circuitos elétricos *shunt* para o controle passivo de vibrações de estruturas compósitas em engenharia. Além disso, foi possível também avaliar a influência da dispersão dos parâmetros estruturais e dos parâmetros dos circuitos elétricos na variabilidade das respostas dinâmicas do sistema eletromecânico. De acordo com os resultados obtidos, conclusões mais específicas acerca do problema são:

- De acordo com as respostas dinâmicas obtidas, observa-se que os procedimentos de modelagem desenvolvidos demonstraram-se eficientes para a caracterização do comportamento dinâmico de sistemas estruturais de materiais compósitos incorporando elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt*.
- Verificou-se a grande capacidade de atenuação dos níveis de amplitude de vibração de ambos os circuitos, *shunts* resistivo e ressonante. O circuito ressonante demonstrou superioridade no controle passivo de vibrações. Entretanto, o grau de eficiência deste tipo de circuito depende da banda de frequência de interesse e de altos valores de indutância. Para o caso de montagem de um aparato experimental, indutâncias sintéticas seriam necessárias.
- A utilização do circuito elétrico *shunt* resistivo acoplado à estrutura desloca um pouco a frequência de ressonância, semelhante aos resultados obtidos ao se atribuir características viscoelásticas ao sistema. Já a estrutura acoplada de *shunt* ressonante possui uma FRF que se assemelha às obtidas por meio de absorvedores dinâmicos de vibrações, devido à presença das duas antirressonâncias.
- Em todas as simulações realizadas, observou-se que com o aumento do nível de dispersão dos parâmetros considerados como sendo incertos, aumentou-se também a variabilidade das FRFs, tornando maior o envelope das funções de resposta em frequência estocásticas, expandindo-se o intervalo de confiança. Além disso, a FRF média estocástica encontra-se, em todos os casos, dentro do envelope formado pelas FRFs mínimas e máximas estocásticas.
- No que diz respeito à viga compósita com piezelétrico de posse apenas do amortecimento inerente a estrutura, dentre as variáveis avaliadas como sendo incertas, neste caso, apenas as estruturais, pôde-se inferir que as espessuras das camadas do compósito e do PZT possuem maior influência no aumento da variabilidade das FRFs e consequente aumento do intervalo de confiança do que os ângulos de direções das fibras

do compósito. Isso pode ser explicado pelo fato de se tratar de uma viga de pequena largura e, as direções das fibras não impõem mudanças significativas na rigidez do sistema.

- No sistema eletromecânico acoplado de *shunt* resistivo, foi possível observar que, dentre as variáveis consideradas como aleatórias, inferiu-se que as incertezas advindas da variabilidade da resistência do circuito, possuem maior influência na variabilidade e consequente aumento do intervalo de confiança das FRFs da estrutura em comparação com as incertezas associadas a espessura das camadas e aos ângulos de direções das fibras. A pouca relevância dos parâmetros da estrutura na variabilidade das respostas do sistema amortecido passivamente via *shunt* resistivo, pode ser explicada pelas pequenas dimensões da viga comparadas à ordem de grandeza da resistência do circuito. Salienta-se a robustez adicionada pelo circuito resistivo ao ser acoplado a estrutura mais PZT, uma vez que, mesmo para os piores cenários, sob a máxima dispersão no valor da resistência, este circuito continua a realizar a atenuação dos níveis de vibração quantitativamente similar ao problema ótimo determinístico.
- Avaliando-se o problema da viga compósita mais piezelétrico amortecida passivamente via *shunt* ressonante, foi possível observar que os parâmetros do circuito, resistência e indutância, possuem maior influência sobre a variabilidade das respostas do sistema estocástico se comparados aos parâmetros estruturais e, dentre os parâmetros do circuito, a indutância é a que possui maior influência. É importante salientar que, dependendo do nível de incertezas presente nos valores de indutância e resistência do circuito ressonante, a atenuação dos níveis de vibração do primeiro modo pode não mais se assemelhar quantitativamente aos resultados obtidos pelo problema ótimo determinístico.

## Sugestões de trabalhos futuros

De acordo com o trabalho realizado, podem ser citadas algumas perspectivas de trabalhos futuros, de forma a dar continuidade às contribuições alcançadas:

- Utilização da teoria de alta ordem para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos, para que se possa então realizar a modelagem de estruturas compósitas do tipo placas mais espessas e também com geometrias complexas;

- Extensão da metodologia baseada na discretização dos campos estocásticos via expansão de Karhunen-Loéve para o projeto robusto de circuitos elétricos *shunt* multimodais com vistas à atenuação das vibrações de estruturas compósitas para vários modos simultaneamente.
- Utilização da metodologia baseada na discretização dos campos estocásticos via expansão de Karhunen-Loéve para concepção de um projeto ótimo robusto de sistemas estruturais contendo materiais poroelásticos para fins de controle passivo de vibrações e ruído.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- ALVIN, K. F. Efficient computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 35(1), 1998.
- BENAROYA, H., REHAK, M. Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review. **Applied Mechanics Reviews, ASME**, v. 41(5), p. 201-213, 1988.
- BOYLESTAD, R. L. Introdução à Análise de Circuitos Elétricos. **Pearson** 12a. Ed., 979f, 2012.
- CALLISTER, W. D. J.; RETHWISCH, D. G. Materials Science and Engineering an Introduction. 9. ed. Utah: **John Wiley & Sons**. Inc, v. 2, 2009.
- CARUSO, G. A Critical Analysis of Electric Shunt Circuits Employed in Piezoelectric Passive Vibration Damping. **Smart Materials and Structures** v. 10, p. 1059-1068, 2001.
- CHEE, C. Y. K. **Static Shape Control of Laminated Composite Plate Smart Structure using Piezoelectric Actuators**. Tese de Pós-Doutorado, University of Sydney: Department of Aeronautical Engineering, Sydney, Austrália, 2000.
- DE LIMA, A.M.G. **Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques**. Tese de Doutorado, Université de Franche-Comté, 2007.
- DE LIMA, A. M. G., RADE, D. A. e FARIA, W. A. Sensitivity Analysis of Frequency Response Functions of Composite Sandwich Plates Containing Viscoelastic Layers. **Composite Structures**, v. 92, p. 364-376, 2009.

DE LIMA, A.M.G., RADE, D.A. e BOUHADDI, N. Stochastic Modeling of Surface Viscoelastic Treatments Combined with Model Condensation Procedures. **Shock and Vibration**, v. 17, p. 429-444, 2010.

DESSOMBZ, O., THOUVEREZ, F., LAINE, J. P. e JÉZÉQUEL, L. Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains. **Journal of Sound and Vibration**, v. 239(5), p. 949-968, 2001.

DIACENCO, A. A. **Modelagem por elementos finitos de materiais compósitos estruturais incorporando material viscoelástico para o controle passivo de vibração e ruído**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, MG, 2010.

FARIA, A. W. **Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica**, 152f. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2006.

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 7, p. 123-130, 1992.

GHANEM, R.G. e SPANOS, P.D. **Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach**. **Spring Verlag**, 1991.

GHANEM R.G. e KRUGER R. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. **Comput Methods Appl Mech Eng**, 129(3):289–303, 1996.

GUARALDO NETO, B. **Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas Dinâmicos Combinando Materiais Viscoelásticos e Materiais com Memória de Forma para o Controle Passivo de Vibrações e Ruído**, 121f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.

HAGOOD, N. W. e VON FLOTOW, A. Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks. **Journal of Sound and Vibration**, v. 146, n. 2, p. 243-268, 1991.

IBRAHIM, R. A. Structural dynamics with parameter uncertainties. **Applied Mechanics Reviews**, v. 40(3), p 309-328, 1987.

- IMAN, R. L. e CONOVERS, W. J. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models, with an application to risk assessment. **Communications Statistics**, v. A9, p. 1749-1842, 1980.
- KLEIBER, M. e HIEN, T. D. The stochastic finite element method, basic perturbation technique and computer implementation. **John Wiley & Sons**, 1992.
- KOROISHI et al. Stochastic Modeling of Flexible Rotors. **J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.** v.34 no.spe2 Rio de Janeiro, 2012.
- LEI, Z. e QIU, C. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. **Computers and Structures**, v. 77, p. 651-657, 2000.
- LESIEUTRE, G. A. Vibration Damping and Control using Shunted Piezoelectric Materials. **Shock and Vibration Digest**, v. 30, p 181-190, 1998.
- LO, K. H, CHRISTENSEN, R. M. e WU, E. M. A High Order Theory of Plate Deformation - Part 1: Homogeneous Plates. **Journal of Applied Mechanics**. v. 44, p. 663-668, 1977.
- LOÈVE, M. Probability Theory. Graduate texts in mathematics. **Springer Verlag**, v. 2, 4th ed New York, 1978.
- MANTEUFEL, R. D. Evaluating the convergence of Latin Hypercube sampling. **AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**, v. 3, p. 100-106, 2000.
- MENDONÇA, P. T. R. Materiais Compostos & Estruturas - Sanduíche: Projeto e Análise. **Manole**, 1.ed., 2005.
- PAPADRAKAKIS, M. e KOTSOPULOS, A. Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo Simulation. **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, v. 168, p. 305-320, 1999.
- PIEFORT, V. **Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures**. 126f. Tese de Doutorado, Université Libre de Bruxelles, Bruxelas, Bélgica, 2001.

PINHEIRO, M. A. S.; BECKHAUSER, G. N. e MENEZES, M. R. Aplicativo Voltado para a Macromecânica Básica das Estruturas Laminadas de Material Compósito. **Boletim SBMAC** (Rio de Janeiro), Rio de Janeiro, v. VII, p. 209-222, 2006

REDDY, J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis. 2.ed. Florida: **CRC Press**, 1997.

RIBEIRO, L. P. e DE LIMA, A. M. G. Projeto Ótimo de Circuitos *Shunt* para o Controle de Vibrações de Estruturas Compostas. **Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, Fortaleza, Brazil, 2014.

RITTO, T. G., SAMPAIO, R. e CATALDO, E. Timoshenko Beam with Uncertainty on the Boundary Conditions. **Journal of Brazilian Society of Mechanical Science e Engineering**, October-December, v. XXX, n. 4, p. 295-303, 2008.

RUBINSTEIN, R. Y. Simulation and the Monte Carlo Method. **John & Wiley & Sons**, 1981.

SAMPAIO, R. e CATALDO E. Two strategies to model uncertainties in structural dynamics. **Shock Vibration**, v. 17(2), p. 171–186, 2010.

SANTANA, D. C. **Modelagem e otimização de shunts piezelétricos aplicados ao controle passivo de vibrações**. 203f, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

SARAVANOS, D. A. e HEYLIGER P. R. Coupled Layerwise Analysis of Composite Beams with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 6, n.3, p. 350-363, 1995.

SARAVANOS, D. A. Damped Vibration of Composite Plates with Passive Piezoelectric-Resistor Elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 221, n. 5, p. 867-885, 1999.

SCHINOZURA, M. Monte Carlo Solution of Structural dynamics. **Computers and Structures**, v. 2, p. 855-874, 1972.

SHUELLER, G., I. Computational stochastic mechanics - recent advances. **Journal of Computers and Structures**, v. 79, p. 2225-2234, 2001.

- SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties in linear structural dynamics. **ISBN**, v. 152, p. 109-138, 1999
- SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix model in structural dynamics. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 2000, v 15(3), p. 277-294.
- SOUZA, C. E. **Otimização em dois níveis da orientação e da topologia de cascas laminadas**. 131f, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
- SUDRET, B. e DER KIUREGHIAN A. Stochastic finite elements and reliability: a state-of-the-art report. **Technical report no. UCB/SEMM-2000/08**, p. 173 University of California, Berkeley; 2000.
- SUDRET B. **Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models - Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods**. Clermont-Ferrand (France): Habilitation à diriger des recherches. Université Blaise Pascal; 2007.
- VIANA, F.A.C. **Amortecimento de vibrações usando pastilhas piezoeletricas e circuitos shunt ressonantes**. 105f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.
- ZAMBOLINI-VICENTE, B. G. G. L. **Projeto robusto de circuitos shunt para o controle passivo de vibrações de estruturas compostas**. 97f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.
- YAMAZAKI, F. e SCHINOZUKA, M. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. **Journal of Engineering Mechanics ASCE**, v. 114(8), p. 1335-1354, 1988.
- ZHANG, J e B. ELLINGWOOD. Orthogonal Series Expansions of random fields in reliability analysis. **J. Eng. Mech.**, v. 120(12), p. 2660-2677, 1994.