

ALISSON AUGUSTO AZEVEDO FIGUEIREDO

ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS TÉRMICOS
ENVOLVENDO A ESTIMATIVA DE PARÂMETROS NA
EQUAÇÃO DA BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2014

ALISSON AUGUSTO AZEVEDO FIGUEIREDO

ANÁLISE NUMÉRICA DE MODELOS TÉRMICOS
ENVOLVENDO A ESTIMATIVA DE PARÂMETROS NA
EQUAÇÃO DA BIOTRANSFERÊNCIA DE CALOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

Uberlândia
2014

Aos meus pais.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

F475a Figueiredo, Alisson Augusto Azevedo, 1990-
2014 Análise numérica de modelos térmicos envolvendo a estimativa de
parâmetros na equação da biotransferência de calor / Alisson Augusto
Azevedo Figueiredo. - 2014.

124 f. : il.

Orientador: Gilmar Guimarães.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Transmissão - Teses. 3.
Corpo humano - Teses. I. Guimarães, Gilmar. II. Universidade Federal
de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
III. Título.

CDU: 621

Agradecimentos

À Deus, pela minha existência e saúde de todos familiares e amigos.

À minha mãe, dona Dalvina, que dedicou-se a vida inteira para criar seus filhos.

Ao meu pai (in memorian), Heriberto, que onde quer que esteja, continua dando forças para que eu possa alcançar todos os meus objetivos.

Aos meus irmãos.

Ao meu, mais que orientador, Gilmar.

Aos professores do IFMA, em especial ao André Persan e Rubens Soeiro, que ajudaram na minha formação em São Luís.

Ao Fernando e Fernanda, casal que me ajudou muito na ambientação à Uberlândia.

À Gabriela e o Sidney, grandes amigos conquistados durante este mestrado.

Ao Fabinho, um amigo extraordinário, que sempre me ajudou quando necessitei.

Aos amigos maranhenses, Ivanilson, Daniel, Peterson e Leonardo.

Aos amigos que ficaram no Maranhão ou em outro lugar, Clara, Thaianne, Márcia, Ricardo, Raquel, André, e outros que possa não ter lembrado.

Aos amigos do LPM e "agregados".

Às meninas da secretaria da pós.

Aos todos amigos da FEMEC, IFMA, docentes, técnicos-administrativos e discentes.

Às agências financiadoras CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Figueiredo, A. A. A. **Análise numérica de modelos térmicos envolvendo a estimativa de parâmetros na equação da biotransferência de calor.**. 2014. 124f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Este trabalho dedica-se ao desenvolvimento de modelos biotérmicos e de técnicas para a obtenção de parâmetros da equação de Pennes, visando o estudo dos processos de transferência de calor que ocorrem em tecidos vivos e contribuir com o diagnóstico precoce do câncer de mama analisando-se a temperatura superficial da mama. Inicialmente obtém-se a solução analítica 1D transiente pelo método das funções de Green, e a solução numérica usando o método dos volumes finitos e o software comercial *COMSOL Multiphysics*© para os casos 1D, 2D e 3D transientes e 2D permanente. Analisam-se o comportamento dinâmico dos parâmetros da perfusão sanguínea e metabolismo presentes na equação de Pennes. Em seguida, propõe-se o uso de técnicas de problema inverso (método da função transferência e método da função especificada sequencial) para a estimativa do perfil da geração de calor metabólico do tumor presente no corpo de um modelo biotérmico 1D. As validações das soluções obtidas são apresentadas, assim como a análise do efeito da perfusão sanguínea e metabolismo no processo de biotransferência de calor. Os resultados do problema inverso usando a técnica da função especificada sequencial juntamente com o estudo de correlação foram satisfatórios para a estimativa da localização e magnitude da geração de calor metabólico do tumor, tornando a técnica com potencial de aplicação em casos experimentais *in vitro* e *in vivo*.

Palavras-chave: equação de Pennes, parâmetros termofísicos em tecidos, problemas inversos em biomecânica

Figueiredo, A. A. A. **Numerical analysis in thermal models involving the estimation of parameters in bioheat equation.** 2014. 124f. Master's Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The aim of this work is the analysis of heat transfer process in living tissues and contribute to the early diagnosis of breast cancer by analyzing the surface temperature of the breast. Here is presented the development of biothermic models and techniques to obtain physical parameters present in Pennes's equation. Initially the 1D-transient analytical solution is obtained using Green's function, and numerical solutions using finite volume method and commercial software *COMSOL Multiphysics*© for 1D, 2D and 3D transient and 2D - steady-state case. The parameters dynamic behavior of blood perfusion and metabolism present in the Pennes's equation is presented. It is also proposed the use of inverse problem techniques to estimate the metabolism heat generation. In this sense, sequential specified function and the transfer function method based on Green's functions are used. Metabolic generations simulates the normal and abnormal behavior of tumors. The validity of the solutions are presented as well as the analysis of the effect of blood perfusion and metabolism in bioheat transfer. The results of the inverse problem using the technique of sequential specified function with the correlation study were satisfactory for estimate the localization and magnitude of the metabolic heat generation of tumor, becoming the technique with potential in cases experimental *in vitro* and *in vivo*.

Keywords: Pennes's equation, thermophysical parameters in tissues, inverse problem in biomechanics

Lista de Figuras

3.1	Anatomia da mama (WINNIKOW, 2014).	10
3.2	Carcinoma Ductal ONCOGUIA (2014).	11
3.3	Carcinoma Lobular ONCOGUIA (2014).	11
3.4	Modelo unidimensional representativo de um tecido exposto a um meio convectivo.	14
3.5	Volume de controle - Modelo unidimensional em volumes finitos.	20
3.6	Condição de contorno 1: Temperatura prescrita.	20
3.7	Condição de contorno 2: Convecção térmica.	20
3.8	Modelo bidimensional de um tecido exposto a um meio convectivo.	22
3.9	Discretização dos volumes finitos para o problema 2D.	24
3.10	Modelo Tridimensional de um tecido exposto a um meio convectivo.	25
3.11	Discretização dos volumes finitos para o problema 3D.	26
3.12	Volume finito da célula central e suas vizinhanças - Modelo 3D.	26
4.1	Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando os modelos analítico, MVF e COMSOL após 60s para o problema com perfusão constante 1D.	32
4.2	Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando os modelos analítico, MVF e COMSOL após 300s para o problema com perfusão constante 1D.	32
4.3	Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando os modelos analítico, MVF e COMSOL após 600s para o problema com perfusão constante 1D.	32
4.4	Erro absoluto entre as temperaturas obtidas da solução analítica e do MVF para o problema com perfusão constante 1D.	33
4.5	Erro absoluto entre as temperaturas obtidas da solução analítica e do COMSOL para o problema com perfusão constante 1D.	33
4.6	Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando MVF e COMSOL após 60s para o problema com perfusão variável 1D.	34
4.7	Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando MVF e COMSOL após 300s para o problema com perfusão variável 1D.	35
4.8	Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando MVF e COMSOL após 600s para o problema com perfusão variável 1D.	35
4.9	Diferença de temperaturas entre as soluções obtidas do MVF e COMSOL para o problema com perfusão variável 1D.	36

4.10	Comparação Perfusão constante x Perfusão variável após 60s (MVF).	36
4.11	Comparação Perfusão constante x Perfusão variável após 300s (MVF).	37
4.12	Comparação Perfusão constante x Perfusão variável após 600s (MVF).	37
4.13	Modelo esquemático 1D ilustrando a localização do tumor 1.	39
4.14	Modelo esquemático 1D ilustrando a localização do tumor 2.	39
4.15	Modelo esquemático 1D ilustrando a localização do tumor 3.	39
4.16	Distribuição das temperaturas ao longo do comprimento para diferentes posições do tumor após 600s (MVF).	40
4.17	Temperaturas na superfície para diferentes posições do tumor após 600s (MVF).	40
4.18	Modelo esquemático 1D ilustrando o tamanho do tumor 4.	41
4.19	Modelo esquemático 1D ilustrando o tamanho do tumor 5.	41
4.20	Modelo esquemático 1D ilustrando o tamanho do tumor 6.	41
4.21	Distribuição das temperaturas ao longo do comprimento para diferentes dimensões do tumor centralizado em $x = 0,04$ m após 600s (MVF).	42
4.22	Temperaturas na superfície para diferentes dimensões do tumor centralizado em $x = 0,04$ m após 600s (MVF).	42
4.23	Desenho esquemático do modelo biotérmico 2D usado para validação dos resultados.	43
4.24	Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção x em $y=0,025$ m após 600s - Modelo 2D transiente.	44
4.25	Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção y em $x=0,05$ m após 600s - Modelo 2D transiente.	45
4.26	Diferença de temperaturas entre as malhas 200x100 e 300x150 após 600s - Modelo 2D transiente.	45
4.27	Diferença de temperaturas entre o MVF e COMSOL após 600s - Modelo 2D.	46
4.28	Problema bidimensional reduzido para um caso 1D na direção y.	47
4.29	Verificação entre as solução 1D analítico e MVF 2D na direção y, $h_2 = h_3 = 0,0001[W/m^2K]$.	47
4.30	Desvio entre as solução 1D analítico e MVF 2D na direção y.	48
4.31	Comparação do resultado do presente trabalho com os valores encontrados por Zhang (2008) - Modelo 2D transiente.	49
4.32	Diferença entre as temperaturas do presente trabalho com Zhang (2008) - Modelo 2D transiente.	50
4.33	Temperaturas na superfície do corpo sem tumor em vários instantes de tempo - Modelo 2D.	51
4.34	Temperaturas na superfície do corpo com o tumor 1 em vários instantes de tempo - Modelo 2D.	51
4.35	Temperaturas na superfície do corpo com o tumor 2 em vários instantes de tempo - Modelo 2D.	52
4.36	Temperaturas na superfície do corpo com o tumor 3 em vários instantes de tempo - Modelo 2D.	52
4.37	Temperaturas na superfície do corpo com um tumor de (0,5cm x 0,5cm), cujo o centro está posicionado em $x=0,05$ m $y=0,035$ m em vários instantes de tempo - Modelo 2D.	54

4.38	Temperaturas na superfície do corpo com um tumor de (0,75cm x 0,75cm), cujo o centro está posicionado em $x=0,05$ m $y=0,035$ m em vários instantes de tempo - Modelo 2D.	54
4.39	Temperaturas na superfície do corpo com um tumor de (1,25cm x 1,25cm), cujo o centro está posicionado em $x=0,05$ m $y=0,035$ m em vários instantes de tempo - Modelo 2D.	55
4.40	Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção x, em $y=0,025$ m após 600s - Modelo 2D permanente.	56
4.41	Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção y, em $x=0,05$ m após 600s - Modelo 2D permanente.	57
4.42	Diferença entre as temperaturas das malhas 240x120 e 200x100 em MVF - Modelo 2D permanente.	57
4.43	Diferença entre as temperaturas da malha 200x100 do MVF e o <i>COMSOL</i> - Modelo 2D permanente.	58
4.44	Distribuição de temperaturas no domínio sem tumor - Modelo 2D permanente.	59
4.45	Distribuição de temperaturas no domínio com tumor 1 - Modelo 2D permanente.	59
4.46	Distribuição de temperaturas no domínio com tumor 2 - Modelo 2D permanente.	60
4.47	Distribuição de temperaturas no domínio com tumor 3 - Modelo 2D permanente.	60
4.48	Temperaturas na superfície do domínio com um tumor de (1,0cm x 1,0cm) localizado em várias regiões - Modelo 2D permanente.	61
4.49	Distribuição de temperaturas no domínio com tumor de (0,5 cm x 0,5 cm) centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.	62
4.50	Distribuição de temperaturas no domínio com tumor de (0,75 cm x 0,75 cm) centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.	63
4.51	Distribuição de temperaturas no domínio com tumor de (1,0 cm x 1,0 cm) centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.	63
4.52	Temperaturas na superfície do domínio com um tumor de várias dimensões centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.	64
4.53	Modelo esquemático 3D.	65
4.54	Evolução das temperaturas na direção x após 60s - Modelo 3D.	66
4.55	Evolução das temperaturas na direção y após 60s - Modelo 3D.	66
4.56	Evolução das temperaturas na direção z após 60s - Modelo 3D.	67
4.57	Diferença entre as temperaturas das malhas 500x500x250 e 400x400x200 do MVF - Modelo 3D.	68
4.58	Diferença entre as temperaturas da malha 400x400x200 do MVF e o <i>COMSOL</i> - Modelo 3D.	69
4.59	Redução do problema tridimensional para um caso 1D na direção z.	70
4.60	Verificação intrínseca entre as solução 1D analítico e MVF 3D na direção z, usando $h_2, h_3, h_4, e h_5 = 0,0001[W/m^2K]$	70
4.61	Erro absoluto entre as temperatura das solução 1D analítico e MVF 3D na direção z, usando $h_2, h_3, h_4, e h_5 = 0,0001[W/m^2K]$	71
4.62	Geometria semi-esférica - Modelo 3D.	72
4.63	Corte na superfície externa da semi-esfera - Modelo 3D.	73
4.64	Temperatura na superfície da mama sem tumor para o caso 1 - Modelo 3D.	74

4.65	Temperatura na superfície da mama com tumor a 2 cm para o caso 1 - Modelo 3D.	74
4.66	Temperatura na superfície da mama com tumor a 1 cm para o caso 1 - Modelo 3D.	75
4.67	Temperatura na superfície da mama sem tumor para o caso 2 - Modelo 3D.	76
4.68	Temperatura na superfície da semi-esfera com tumor a 2 cm para o caso 2 - Modelo 3D.	76
4.69	Temperatura na superfície da semi-esfera com tumor a 1 cm para o caso 2 - Modelo 3D.	77
5.1	Modelo biotérmico 1D para o problema inverso.	80
5.2	Sistema dinâmico de uma entrada e uma saída (FERNANDES, 2013).	83
5.3	Diagrama de blocos para o problema inverso (FERNANDES, 2013).	85
5.4	Desenho esquemático do modelo 1D usado no método da função transferência.	86
5.5	Distribuição de temperaturas ao longo do domínio de um corpo sem tumor após 1200s.	87
5.6	Temperaturas T_1^* e T_2^* obtidas no corpo sem tumor após 1200s.	88
5.7	Geração de calor metabólico estimado por temperaturas e função transferência calculadas em $x = 0,045$ m e $x = 0,06$ m para o corpo sem tumor após 1200s.	89
5.8	Campo de temperaturas ao longo do domínio de um corpo com tumor após 1200s.	90
5.9	Temperaturas obtidas no corpo com tumor após 1200s.	90
5.10	Geração de calor metabólico estimado por temperaturas e função transferência calculadas em $x = 0,045$ m e $x = 0,06$ m.	91
5.11	Geração de calor interna presente no corpo.	93
5.12	Desenho esquemático do modelo 1D usado no método sequencial.	95
5.13	Tentativa na estimativa da geração de calor metabólico para um corpo sem presença de tumor, usando seis intervalos hipotéticos diferentes (1200s).	97
5.14	Comparação entre as gerações de calor metabólico “ <i>experimental</i> ” e estimada para um corpo sem presença de tumor no tempo de 1200s.	99
5.15	Comparação entre as temperaturas “ <i>experimental</i> ” e estimada para um corpo sem presença de tumor no tempo de 1200s.	99
5.16	Resíduos entre as temperaturas “ <i>experimental</i> ” e estimada para um corpo sem presença de tumor no tempo de 1200s.	100
5.17	Tentativa na estimativa da geração de calor metabólico para um tumor posicionado de 4 à 5 cm, usando seis intervalos hipotéticos diferentes (1200s).	101
5.18	Comparação entre as gerações de calor metabólico “ <i>experimental</i> ” e estimada para um tumor posicionado no intervalo [4:5]cm no tempo de 1200s.	102
5.19	Comparação entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [4:5]cm no tempo de 1200s.	103
5.20	Resíduos entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [4:5]cm no tempo de 1200s.	103
5.21	Comparação entre as gerações de calor metabólico simulada e estimada para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s.	108

5.22	Comparação entre as gerações de calor metabólico simulada e estimada para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s, com zoom.	108
5.23	Comparação entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s.	109
5.24	Resíduos entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s.	109
B.1	Evolução das temperaturas ao longo do domínio usando as soluções analíticas da equação clássica da difusão de calor e a equação da biotransferência de calor considerando o termo de perfusão nulo após 60s.	123
B.2	Evolução das temperaturas ao longo do domínio usando as soluções analíticas da equação clássica da difusão de calor e a equação da biotransferência de calor considerando o termo de perfusão nulo após 300s.	123
B.3	Evolução das temperaturas ao longo do domínio usando as soluções analíticas da equação clássica da difusão de calor e a equação da biotransferência de calor considerando o termo de perfusão nulo após 600s.	124

Lista de Tabelas

4.1	Propriedades biotérmicas para o domínio que simula a mama (GAUTHERIE, 1980).	30
4.2	Parâmetros para o modelo biotérmico 1D.	30
4.3	Parâmetros para o modelo biotérmico 2D.	43
4.4	Propriedades para validação da solução MVF 2D com Zhang (2008).	48
4.5	Localização dos tumores - Modelo 2D.	50
4.6	Variação de temperatura na superfície do corpo com um tumor posicionado em $x_1 = 0,045$ e $x_2 = 0,055$, em varios instantes de tempo - Modelo 2D.	53
4.7	Variação de temperatura na superfície do corpo possuido por um tumor centralizado em $x = 0,05m$ e $y = 0,035 m$, em varios instantes de tempo - Modelo 2D.	55
4.8	Variação de temperatura na superfície usando diferentes localizações de tumores - Modelo 2D permanente.	61
4.9	Variação de temperatura na superfície usando diferentes dimensões de tumores centralizados em $x = 0,05 m$ e $y = 0,035 m$ - Modelo 2D permanente.	64
4.10	Propriedades e parâmetros físicos e geométricos para o problema 3D em coordenadas retangulares.	65
4.11	Variação máxima das temperaturas superficiais da mama com um tumor localizado à 2 cm da superfície.	77
4.12	Variação máxima das temperaturas superficiais da mama com um tumor localizado à 1 cm da superfície.	78
5.1	Correlação entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para 6 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo sem tumor após 1200s.	98
5.2	Correlação entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para 6 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo com tumor localizado em $[0,04 : 0,05]m$ após 1200s.	102
5.3	Correlação entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para 51 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo com tumor localizado em $[0,04 : 0,05]m$ após 1200s.	104
5.4	Correlação entre as temperaturas “ <i>experimentais</i> ” e estimadas para 51 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo com tumor localizado em $[0,03 : 0,04]m$ após 1200s.	106

Lista de Símbolos

- T - Temperatura do tecido, $[K]$.
- T_a - Temperatura do sangue arterial, $[K]$.
- k - condutividade térmica, $[\frac{W}{m^2K}]$.
- ρ - massa específica do tecido, $[\frac{kg}{m^3}]$.
- ρ_s - massa específica do sangue, $[\frac{kg}{m^3}]$.
- c - calor específico do tecido, $[\frac{J}{kgK}]$.
- c_s - calor específico do sangue, $[\frac{J}{kgK}]$.
- w - perfusão sanguínea normal, $[s^{-1}]$.
- w_s - perfusão sanguínea do tumor, $[s^{-1}]$.
- t - tempo, $[s]$.
- Q_m - taxa volumétrica de geração de calor metabólico, $[\frac{W}{m^3}]$.
- Q_e - fonte de calor externa, $[[\frac{W}{m^3}]]$
- Q_p - fonte de calor devido a perfusão sanguínea, $[\frac{W}{m^3}]$.
- Q_{m1} - geração de calor metabólico no tecido saudável, $[\frac{W}{m^3}]$.
- Q_{m2} - geração de calor metabólico tumoral, $[\frac{W}{m^3}]$.
- T_c - Temperatura prescrita na superfície interna do corpo, $[K]$.
- T_0 - Temperatura inicial, $[K]$.

T_{∞} - Temperatura ambiente, $[K]$.

θ - Variável auxiliar.

W - Variável auxiliar.

F_o - Número de Fourier.

B_i - Número de Biot.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	4
3	Fundamentação Teórica	9
3.1	Câncer de Mama	9
3.1.1	Estrutura da Mama	9
3.1.2	O Câncer	10
3.1.3	Diagnóstico para o câncer de mama	12
3.2	Equação da Biotransferência de Calor	12
3.2.1	Solução Analítica Unidimensional - Regime Transiente	13
3.2.2	Solução Numérica - Método dos Volumes Finitos	19
3.2.2.1	Modelo Unidimensional - Regime Transiente	19
3.2.2.2	Modelo Bidimensional - Regime Transiente	22
3.2.2.3	Modelo Tridimensional - Regime Transiente	24
3.2.2.4	Modelo Bidimensional - Regime Permanente	27
3.2.3	Solução Numérica - <i>COMSOL</i>	28
4	Resultados: Problema Direto	29
4.1	Solução Unidimensional - Regime Transiente	30
4.1.1	Validação para problema com perfusão sanguínea constante	30
4.1.2	Validação para problema com perfusão sanguínea variável	34
4.1.3	Perfusão constante X Perfusão variável	36
4.1.4	Efeito da temperatura na superfície alterando a posição do tumor	38
4.1.5	Efeito da temperatura na superfície alterando o tamanho do tumor	40
4.2	Solução Bidimensional - Regime Transiente	43
4.2.1	Convergência de Malha	44
4.2.2	Validação da solução	46
4.2.2.1	Verificação com a solução analítica unidimensional	46
4.2.2.2	Comparação com resultados da literatura	48
4.2.3	Efeito da temperatura na superfície alterando a posição do tumor	50
4.2.4	Efeito da temperatura na superfície alterando o tamanho do tumor	53
4.3	Solução Bidimensional - Regime Permanente	56
4.3.1	Convergência de Malha	56

4.3.2	Efeito da temperatura na superfície alterando a posição do tumor . . .	58
4.3.3	Efeito da temperatura na superfície alterando o tamanho do tumor . . .	61
4.4	Solução Tridimensional - Regime Transiente	64
4.4.1	Coordenadas Retangulares	64
4.4.1.1	Convergência de Malha	65
4.4.1.2	Verificação com a solução analítica 1D	69
4.4.2	Coordenadas Esféricas	71
4.4.2.1	Caso 1	73
4.4.2.2	Caso 2	75
5	Uso de Soluções Analíticas em Problemas Inversos aplicados a equação da biotransferência de calor	79
5.1	Abordagem do problema direto: estimativa do perfil da geração de calor metabólico presente no tumor de um corpo	79
5.2	Método da função transferência	83
5.2.1	Análise e discussão de resultados	86
5.2.1.1	Corpo sem tumor	87
5.2.1.2	Corpo com tumor	89
5.3	Método da função especificada sequencial	92
5.3.1	Análise e discussão de resultados	94
5.3.1.1	Corpo sem tumor	95
5.3.1.2	Corpo com tumor	100
6	Conclusão	111
	Referências Bibliográficas	113
	A Mudanças de variáveis a partir da equação de Pennes 1D	117
	B Verificação da solução da equação de Pennes	121

Capítulo 1

Introdução

Com o passar dos séculos, o entendimento sobre o corpo humano foi ampliando-se, uma vez que, sempre foi objeto de estudo e curiosidade desde a pré-história. Assim, várias áreas do conhecimento começaram a incorporá-lo em suas pesquisas, inclusive a engenharia.

Um dos grandes antigos filósofos gregos, Hipócrates (460 - 370 a.C), considerado o “pai da medicina”, acreditava que o aumento do calor inato do corpo humano era o principal sinal para diagnóstico de doença. Espalhava-se lama sobre o paciente e observava-se onde secava e endurecia primeiro, usando estas constatações para um indicativo de patologia (ADAMS, 1849). Desde então, a investigação e observações clínicas mostraram que certas temperaturas relativas ao corpo humano eram um fator indicativo de processos fisiológicos normais e anormais.

Descrever o fenômeno da transferência de calor no corpo humano sempre foi um problema abordado pelos cientistas. Galileu Galilei (1564 - 1642) contribuiu com a descoberta e desenvolvimento do primeiro termômetro de ar. Sanctorius (1561 - 1632) aperfeiçoou o termômetro e se destacou no estudo do metabolismo humano. Antoine Lavoisier (1743 - 1793), considerado o primeiro cientista biológico, realizou grandes descobertas à respeito do mecanismo de respiração. Wunderlich, em 1868, mapeou a temperatura do corpo de vários pacientes hospitalizados. Muitas outras contribuições estão registradas durante o tempo (CHATO, 1992).

A primeira relação quantitativa que descreveu o transporte de energia em tecidos vivos e incluiu os efeitos do fluxo sanguíneo na temperatura tecidual em uma base contínua, foi apresentada por Harry H. Pennes em 1948. A equação derivada deste estudo, originalmente concebida para prever os campos de temperatura no antebraço humano, é a representação mais comum da distribuição espacial e temporal da temperatura nos sistemas biológicos e é denominada “equação da biotransferência de calor” ou “equação de Pennes” (CHARNY,

1992).

Após o estudo de Pennes (1948) e à medida de seu uso em diversos sistemas biológicos, novos modelos foram propostos para descrever de maneira mais realista o processo de bio-transferência de calor (NAKAYAMA; KUWAHARA, 2008), (MITCHELL; MYERS, 1968), (KELLER; SEILER, 1971), (WULFF, 1974), (KLINGER, 1978), (CHEN; HOLMES, 1980), (KLINGER, 1978), (WEINBAUM; JIJI, 1985), (ROETZEL; XUAN, 1998).

Porém, estes modelos apesar de um maior rigor na análise matemática, também possuem alta complexidade e pouca generalidade. Por esta razão e devido à sua simplicidade, a equação de Pennes continua sendo a mais usada para descrever a transferência de calor e a distribuição da temperatura em tecidos biológicos vivos.

Em 1956, Lawson descobriu que a temperatura da pele sobre um câncer na mama era maior que a do tecido normal. Ele também mostrou que o sangue venoso que drena o tumor maligno é frequentemente mais quente do que o fornecido pelo sistema arterial (AMALU *et al.*, 2006).

De acordo com a Sociedade Brasileira de Mastologia (2014), o diagnóstico de câncer de mama somente pode ser estabelecido mediante uma biópsia da área suspeita analisada previamente por um exame clínico (médico) ou por exame de imagens (mamografia, ultra-som ou ressonância).

Segundo o Instituto Nacional do Câncer - INCA, o crescente aumento do número de casos novos de câncer fará com que não haja recursos suficientes para suprir as necessidades de diagnóstico, tratamento e acompanhamento. O câncer de mama é o segundo tipo mais frequente no mundo e o mais comum entre as mulheres, a sobrevida média após cinco anos é de 61% (INCA, 2014).

Justifica-se assim, a importância do estudo para o desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas usadas na prevenção e tratamento da doença, constituindo uma questão de saúde pública.

Este trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de modelos biotérmicos e de técnicas para obtenção de parâmetros da equação de Pennes, visando o estudo dos processos de transferência de calor que ocorrem no corpo humano e contribuir com o diagnóstico precoce do câncer de mama analisando-se a temperatura superficial da mama. Nesse sentido, obtém-se a solução analítica pelo método das funções de Green para o modelo biotérmico unidimensional transiente e a solução numérica usando o método dos volumes finitos e o software comercial *COMSOL* para os casos 1D, 2D e 3D transiente e 2D permanente.

Uma vez obtidas as soluções, analisam-se o comportamento dinâmico dos diversos parâmetros presentes na equação de Pennes: como perfusão sanguínea e metabolismo. Desenvolvem-

se também técnicas de problema inverso para a obtenção de parâmetros presentes na equação da biotransferência de calor: como a estimativa da geração de calor metabólico de um modelo biotérmico 1D. Este procedimento é básico para a estimativa da presença de tumor na mama.

Apresenta-se no capítulo 2 uma breve revisão de trabalhos que usam a equação de Pennes para a solução de problemas envolvendo a biotransferência de calor.

O capítulo 3 trata da fundamentação teórica, apresentando as etapas de obtenção das soluções 1D, 2D e 3D para a equação da biotransferência de calor.

As validações das soluções obtidas para o problema direto da equação de Pennes são mostradas no capítulo 4, assim como a análise do efeito da perfusão sanguínea e metabolismo no processo de biotransferência de calor.

No capítulo 5 apresenta-se o procedimento para a execução das técnicas de soluções analíticas usadas para a estimativa do perfil da geração de calor metabólico, bem como os resultados do problema inverso.

O capítulo 6 traz as conclusões obtidas neste trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Apresenta-se neste capítulo uma revisão da literatura à cerca dos trabalhos envolvendo o fenômeno da biotransferência de calor, tais como: Soluções para modelos 1D, 2D e 3D da equação de Pennes; análises considerando o efeito do pulso de calor sobre o tecido vivo; estudos relacionados à mama, ao olho e cérebro humano, estimativas de parâmetros da equação de Pennes.

Como mencionado, o trabalho pioneiro de Pennes (1948) propôs uma relação quantitativa que descreve a transferência de calor em tecidos e órgãos humanos, incluindo os efeitos do fluxo sanguíneo através da equação da biotransferência de calor. O modelo matemático linear obtido neste estudo representa o balanço de energia no interior dos tecidos biológicos através da interação da perfusão sanguínea e metabolismo. A Eq. 2.1 representa a equação da biotransferência de calor de Pennes.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + w \rho_s c_s (T_a - T) + Q_m \quad (2.1)$$

onde ρ , c e k representam respectivamente, a massa específica, o calor específico e a condutividade térmica do tecido. As propriedades w , ρ_s e c_s , representam respectivamente, a perfusão sanguínea, a massa específica e o calor específico do sangue. Ainda, nesta equação Q_m é a geração de calor metabólico, T a temperatura do tecido e T_a é a temperatura arterial.

Vyas & Rustgi (1992) usam o método das funções de Green para obtenção da solução da equação de Pennes bidimensional em coordenadas cilíndricas, sendo o método da quadratura de Gauss usado para a solução numérica das integrais. As propriedades térmicas do músculo e do fígado bovino foram usadas para a comparação com dados disponíveis na literatura. Embora existam ainda a presença de discrepâncias significativas, a comparação com dados experimentais da literatura se mostrou satisfatória.

Usando também o método das funções de Green, Liu & Deng (2001) solucionam analiticamente a equação unidimensional de Pennes. Neste trabalho propõe-se um modelo de perturbação no termo da perfusão sanguínea para caracterizar a variação da temperatura em tecidos vivos. Os resultados deste estudo mostram que pequenas perturbações na perfusão sanguínea provocam variações de temperaturas significativas na superfície do tecido.

Rodrigues *et al.* (2013) resolveram analiticamente a equação de Pennes unidimensional transiente usando a série de Bessel, desenvolvendo o problema em multicamadas. Os resultados obtidos na solução analítica do modelo em multicamadas (cérebro, osso e couro cabeludo) foram comparados com a solução numérica do método dos elementos finitos no *COMSOL Multiphysics v4.1©*.

Jaunich *et al.* (2008) propõe um modelo para analisar experimentalmente e numericamente a biotransferência de calor durante pulsos de calor por irradiação emitido por um laser em frações de segundos. O experimento usou um tecido fantasma de uma e três camadas. O modelo matemático considerou a equação de Pennes e também o efeito do fluxo de calor por radiação. Na solução do problema usou-se o método das ordenadas discretizadas no tempo (TDOM) e o método preditor-corretor de MacCormack's. Os resultados indicam que o modelo de condução de calor hiperbólico é o mais indicado para este tipo de fenômeno, por levar em consideração o tempo de relaxamento do tecido. O autor enfatiza a importância de se estudar a formulação de condução de calor hiperbólica, onde são emitidos pulsos de calor num pequeno espaço de tempo, proporcionando um aporte de energia significativo, e ajudando a evitar muitos danos térmicos às regiões onde não deveriam ser afetadas pelo calor do laser.

Também considerando o efeito de uma fonte de calor externa originada por um laser, Absalan *et al.* (2012) resolveram numericamente (método dos elementos finitos) o modelo de transferência de calor em tecidos vivos usando a equação de Pennes em coordenadas cilíndricas. O modelo proposto possui três regiões (gordura, glândula e tumor). Os resultados evidenciaram a rápida absorção do calor emitido pelo laser nas regiões do tecido vivo.

Ng & Sudharsan (2001) realizaram um estudo comparativo entre imagens termográficas e simulação numérica do fenômeno da biotransferência de calor na mama, além de analisar numericamente o efeito do tratamento de estresse causado pelo frio no tecido vivo. O trabalho experimental usou o campo de temperatura obtido através de imagens térmicas da mama de três pacientes com diagnósticos distintos de câncer. Uma simulação numérica baseada no método dos elementos finitos foi realizada, onde considerou-se várias camadas de tecidos e a introdução do tumor nas simulações. O trabalho concluiu que os resultados numéricos ainda estão distantes da detecção independente, no que diz respeito a presença de anomalias no

corpo humano.

O trabalho realizado por Bezerra *et al.* (2013) comparou o campo de temperaturas adquirido por imagens termográficas das mamas de pacientes com simulações numéricas, e realizou em seguida a estimativa da condutividade térmica e perfusão sanguínea tanto do tecido saudável como do tumor na mama. As imagens térmicas foram obtidas através de uma câmera de infravermelho FLIR S45 seguindo um determinado protocolo. Para a simulação numérica, criou-se um modelo geométrico semelhante a mama no software comercial *FLUENT*. Usou-se o método da programação sequencial quadrática (SQP) para resolver o problema inverso da biotransferência de calor, e assim estimar os parâmetros. Os resultados da estimativa dos parâmetros tiveram uma discrepância variando entre 0,09% à 41,1%. A justificativa para os maiores erros relaciona-se à presença de gordura em mamas de alguns pacientes.

Mital & Pidaparti (2008) realizaram a simulação térmica bidimensional do tumor de mama e estimaram parâmetros da equação de Pennes. Para a simulação do problema direto da biotransferência de calor usaram um software comercial baseado em elementos finitos (*ANSYS*). Neste caso, usou-se o método das redes neurais artificiais (RNA) para mapear a relação dos parâmetros (profundidade, tamanho e geração de calor do tumor) e usou-se o algoritmo genético para a estimativa dos parâmetros do tumor.

Mitra & Balaji (2010) estimaram a posição e o tamanho de um tumor esférico na mama usando temperaturas obtidas na superfície da mama. Inicialmente realizaram uma simulação numérica baseada no software comercial *COMSOL* para geração das temperaturas na superfície, e em seguida, baseando-se em redes neurais artificiais, estimaram os parâmetros. Obtiveram uma precisão de 90% na posição e 95% no raio para uma taxa de geração de calor constante. Considerando a taxa de geração de calor variável, obtiveram uma precisão de 88% e 98% respectivamente.

Narasimhan & Jha (2011) analisaram a biotransferência de calor a partir da equação de Pennes para o processo onde o olho humano é submetido a radiação por laser. Um modelo tridimensional da fisiologia do olho humano foi construído usando o software *GAMBIT* e resolvido através do método dos volumes finitos pelo *FLUENT*. Entre os resultados obtidos, um deles mostrou que no processo de irradiação sequencial a temperatura de pico é 0,2°C maior que na irradiação simultânea.

O trabalho de Silva, Lyra & Lima (2013) também resolve computacionalmente a equação de Pennes, estudando o efeito da irradiação a laser no olho humano portador de um melanoma de coróide, determinando o dano térmico no tecido. Através de uma imagem de ultrassom, construiu-se um modelo bidimensional para o problema, usando-se o software *FLUENTE*. Os autores concluem que é possível determinar o intervalo de tempo necessário para a radiação

produzir danos térmicos irreversíveis ao tecido tumoral, com os menores prejuízos possíveis aos tecidos saudáveis.

Outro trabalho envolvendo a transferência de calor no olho humano é realizado por Silva *et al.* (2012) usando o método dos volumes finitos. Um modelo axissimétrico bidimensional transiente em coordenadas cilíndricas foi descrito para obtenção dos resultados da análise térmica dos tecidos oculares na presença de implantes do tipo subretinal e epirretinal. Os resultados mostraram que ambos os tipos de implantes demonstraram danos térmicos semelhantes, porém no caso do uso de prótese epirretinal foi constatado uma dissipação de calor superior ao subretinal.

Mishra, Das & Singh (2013) usando a equação de Pennes unidimensional identificaram a taxa de perfusão e a localização do tumor usando o método dos volumes finitos, para simulações do cérebro e peito humano. O problema inverso, foi aplicado em diversas situações para a posição do tumor, e em todas obteve-se a taxa de perfusão sanguínea com sucesso. Para a estimativa da localização, os resultados foram bons, com erros de no máximo 0,4%. Ainda neste trabalho, o autor mostra que o efeito do tumor no cérebro, eleva a temperatura na região em até 1,3 °C, e para o caso do peito, a temperatura aumenta em 2,9%.

No estudo de Paruch & Majchrak (2007) é feita a estimativa dos parâmetros térmicos e geométricos da região do tumor, usando a técnica dos algoritmos evolutivos e o método dos elementos de contorno na equação de Pennes, para os casos 2D e 3D. O problema inverso é solucionado para três situações distintas: a primeira, estima-se os parâmetros térmicos; a segunda, identifica-se o tamanho e a localização do tumor; e a terceira solução, estima-se todos os parâmetros simultaneamente. A técnica se mostrou eficiente, sendo a localização do tumor o procedimento mais sensível a erros (9%).

Lopes *et al.* (2008) resolve numericamente o problema da biotransferência de calor durante o procedimento clínico de hipertermia. Neste modelo a equação de Pennes bidimensional transiente em coordenadas retangulares é adotada, considerando o efeito do metabolismo, perfusão sanguínea e da irradiação externa. Empregaram-se várias técnicas para a estimativa da perfusão sanguínea, tais como: Levenberg-Marquadt, Gradiente Conjugado, Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, Evolução Diferenciada e Enxame de Partículas. A análise dos resultados indica, dentro dos critérios avaliados, que é possível estimar a perfusão como parâmetro em problema 1D. Para o caso em que a perfusão possui variação bidimensional, o Método do Gradiente Conjugado com Problema Adjunto apresentou limitações. Entretanto, sem a inserção de ruídos nas medidas simuladas, o método foi capaz de localizar os tumores.

Mishra & Das (2013) realizaram a estimativa da taxa de perfusão sanguínea e da localização do tumor através do método dos volumes finitos, acoplado com a técnica de resolução

de problemas inversos do algoritmo genético, em uma geometria retangular bidimensional. Os resultados para a estimativa dos parâmetros individualmente foram bons, com erros em torno de 1,5%, porém, para a estimativa simultânea dos parâmetros, os erros entre os valores obtidos do problema direto e o problema inverso chegaram à 5,5%.

Observa-se que maioria dos trabalhos existentes não usam uma geometria adequada para a simulação dos diversos casos. Outro problema relaciona-se às propriedades térmicas usadas (condutividade térmica, massa específica, calor específico, perfusão sanguínea e taxa de geração metabólico). Embora seja possível a construção de modelos complexos que considerem praticamente todos os efeitos físicos presente na biotransferência de calor, a obtenção das propriedades térmicas reais dos tecidos, e da sua geração metabólica representam ainda um grande desafio e são fundamentais para a detecção da presença de tumores.

Assim, este trabalho busca além de desenvolver modelos térmicos para a biotransferência de calor, a proposição e o desenvolvimento de técnicas inversas que possam ser capazes de obter as propriedades térmicas de um tecido, como k , α , e c_p , e do calor gerado devido a ação metabólica de um tumor. Representaria, nesse caso, uma ferramenta importante para a construção futura de uma técnica de detecção precoce do câncer de mama.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

3.1 Câncer de Mama

Nesta seção são apresentados alguns conceitos relacionados à região da mama, o câncer de mama e os principais exames utilizados para o diagnóstico desta doença.

3.1.1 Estrutura da Mama

A Figura 3.1 apresenta a anatomia da mama que é basicamente constituída por três tipos de tecidos: o glandular, o fibroso e o adiposo. O tecido glandular (lobos mamários), responsável pela produção do leite, é formado por unidades secretoras chamadas ácinos que se interligam por um conjunto de canalículos ramificados (ductos lactíferos) - que drenam o leite produzido nos ácinos até o mamilo. O tecido fibroso tem a função de sustentação das estruturas internas. O tecido adiposo (gordura), por sua vez, além de revestir toda a glândula, preenche os espaços entre os ácinos, os ductos e as traves fibrosas, contribuindo de maneira importante para a forma, volume e contorno das mamas (WINNIKOW, 2014). Assim como os outros órgãos do corpo humano, nas mamas também se encontram os vasos sanguíneos, que tem a função de irrigá-la com sangue, e os vasos linfáticos onde ocorre a circulação da linfa. A linfa é uma substância líquida de tom claro e que tem sua função bastante semelhante a do sangue de carregar nutrientes para diversas áreas do corpo humano e de recolher as substâncias que sejam consideradas indesejáveis ao organismo (WINNIKOW, 2014).

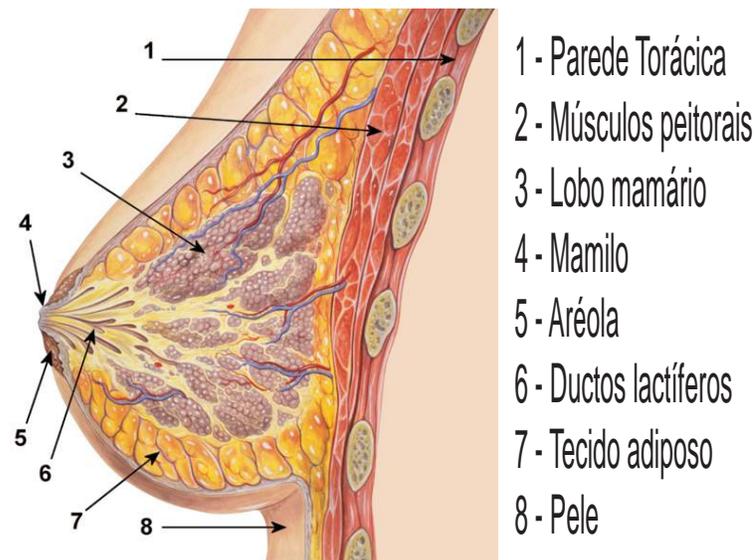


Figura 3.1: Anatomia da mama (WINNIKOW, 2014).

3.1.2 O Câncer

O câncer de mama consiste em um tumor maligno que se desenvolve a partir de células da mama. Geralmente, ele começa nas células do epitélio que reveste a camada mais interna do ducto mámario. Raramente o câncer de mama pode começar em outros tecidos, tais como o adiposo e o fibroso da mama (MASTOLOGIA, 2014).

O câncer de mama pode ser *in situ*, aquele em que ainda não há risco de invasão e metástase, com chances de cura de aproximadamente 100%. Mesmo os tumores invasivos (quando invadem a membrana basal da célula) podem ser curados se o diagnóstico for estabelecido em fase precoce (MASTOLOGIA, 2014).

Segundo o ONCOGUIA (2014), os tipos mais comuns de câncer de mama são:

- **Carcinoma ductal *in situ*** (Fig. 3.2) é considerado não invasivo ou câncer de mama pré-invasivo. A diferença entre o carcinoma ductal *in situ* e carcinoma invasivo é que as células não se espalham através dos ductos para o tecido mamário adjacente. O carcinoma ductal *in situ* é considerado um pré-câncer, pois em alguns casos pode se tornar um câncer invasivo. Cerca de 20% dos novos casos de câncer de mama são de carcinoma ductal *in situ*. Quase todas as mulheres neste estágio da doença podem ser curadas.

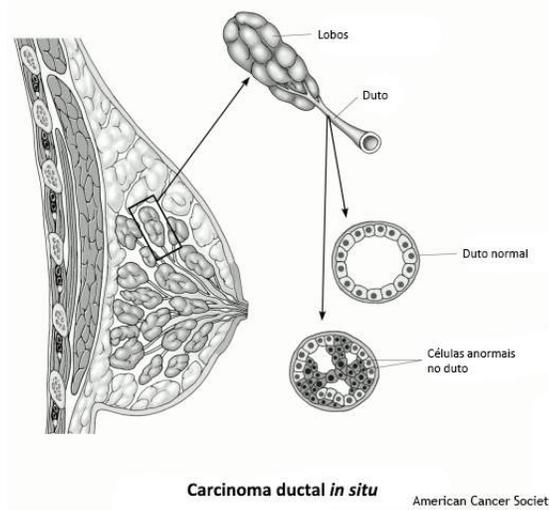


Figura 3.2: Carcinoma Ductal ONCOGUIA (2014).

- **Carcinoma ductal invasivo** é o tipo mais comum de câncer de mama. Inicia-se nos ductos lactíferos, rompe a parede desse ducto e cresce no tecido adiposo da mama. Pode espalhar-se (metástase) para outras partes do corpo através do sistema linfático e da circulação sanguínea. Cerca de 80% dos cânceres de mama invasivos correspondem ao carcinoma ductal invasivo.
- **Carcinoma lobular *in situ*** (Fig. 3.3) - as células se assemelham com as células cancerosas que crescem nos lobos das glândulas produtoras de leite, mas não se desenvolvem através da parede dos lobos.

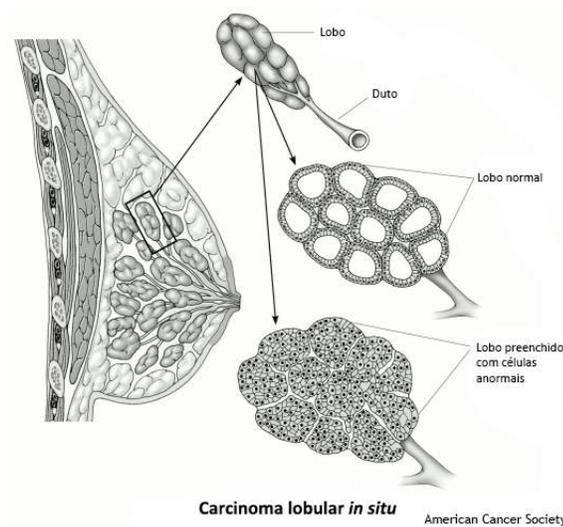


Figura 3.3: Carcinoma Lobular ONCOGUIA (2014).

- **Carcinoma lobular invasivo** começa nas glândulas produtoras de leite (lobos). Assim como o carcinoma ductal invasivo pode se espalhar para outras partes do corpo. Cerca de 10% dos cânceres de mama invasivos correspondem ao carcinoma lobular invasivo. Este tipo de câncer pode ser mais difícil de ser detectado na mamografia do que o carcinoma ductal invasivo.

3.1.3 Diagnóstico para o câncer de mama

A detecção de alterações na mama pode ser realizada por autoexame, exame clínico (médico) ou exame de imagens. A indicação de que a alteração na mama se trata de um câncer, somente é realizada através de biópsia na região suspeita (HCBARRETOS, 2014).

Os exames baseados em imagens para o auxílio ao diagnóstico de doenças da mama podem ser classificados como estruturais e funcionais. Os exames estruturais permitem a visualização de estruturas internas da mama, os principais são mamografia, ultrassom e ressonância magnética. Os exames funcionais permitem a visualização do funcionamento dos órgãos e o fluxo de líquidos, tais como ultrassom, ressonância magnética e termografia (BEZERRA *et al.*, 2013).

A termografia caracteriza-se pelo uso de imagens termográficas adquiridas por uma câmara térmica capaz de medir simultaneamente a temperatura em diversos pontos, detectando a radiação infravermelha emitida pelos corpos. É economicamente mais viável, quando comparado com os métodos tradicionais, tais como mamografia, ultrassom e ressonância magnética.

Portanto, como este trabalho visa o diagnóstico precoce do câncer de mama através do uso de temperaturas na superfície da mama (imagens termográficas simuladas), faz-se necessário o entendimento do fenômeno de transferência de calor nos tecidos vivos através da equação da biotransferência de calor.

3.2 Equação da Biotransferência de Calor

A Equação 2.1 que caracteriza a transferência de calor nos organismos vivos, também conhecida como equação de Pennes (PENNES, 1948), também pode ser escrita como:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q_p + Q_m + Q_e = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

onde Q_p é a fonte de calor devido à perfusão sanguínea, Q_m é a taxa volumétrica de geração de calor metabólico e Q_e é a fonte externa de calor.

Ou seja, na realidade a equação de Pennes é representada pela equação da difusão de calor acrescida dos termos de geração de calor que modelam a perfusão sanguínea e o metabolismo.

A fonte de calor devida à perfusão sanguínea (Q_p) caracteriza-se pela transferência de calor convectiva efetuada pelo sangue através da vascularização capilar presente nos tecidos vivos, que é proporcional a diferença de temperatura do sangue arterial que entra no tecido e da temperatura do sangue venoso que sai do tecido (CHARNY, 1992). Este termo é dado pela Eq. 3.2 como

$$Q_p = w\rho_s c_s (T_a - T) \quad (3.2)$$

onde w é a taxa de perfusão sanguínea, ρ_s a massa específica do sangue, c_s o calor específico do sangue e T_a a temperatura do sangue arterial.

No caso da geração de calor metabólico (Q_m), define-se como a taxa de deposição de energia por unidade de volume. O termo de fonte externa (Q_e) se deve a qualquer meio de aquecimento, como sementes ferromagnéticas e radiação eletromagnética, incluindo radiofrequência, microondas, ultra-som e laser.

3.2.1 Solução Analítica Unidimensional - Regime Transiente

A Figura 3.4 representa o modelo unidimensional usado para a obtenção da solução da equação de biotransferência de calor. Uma vez que o problema biotérmico unidimensional à ser analisado deve representar a transferência de calor em um tecido humano (mama), simula-se um corpo composto por camadas de tecidos normais (saudáveis) e uma camada onde encontra-se um tumor, uma superfície é exposta a um meio convectivo enquanto a outra mantém uma temperatura constante e prescrita dada pela temperatura interna do corpo.

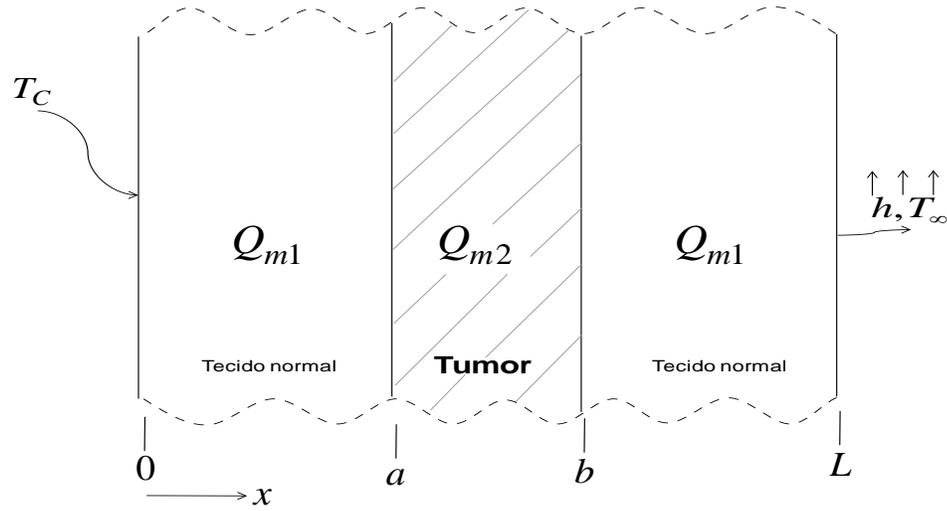


Figura 3.4: Modelo unidimensional representativo de um tecido exposto a um meio convectivo.

Assim, o problema representado pela Eq. 3.4 pode ser descrito pela equação de Pennes como sendo:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + w \rho_s c_s (T_a - T) + Q_m = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.3a)$$

e sujeita às condições de contorno, em $x = 0$

$$T(0, t) = T_c \quad (3.3b)$$

em $x = L$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T - T_\infty) \quad (3.3c)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = T_0 \quad (3.3d)$$

Observa-se na Fig. 3.4 que existem dois termos distintos de geração de calor metabólico, Q_{m1} e Q_{m2} que têm a função de simular o metabolismo normal e outro originado por um tumor.

Para a solução da Eq. 3.3a, propõe-se primeiramente uma mudança de variável dada por:

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty \quad (3.4)$$

As Eqs. 3.3 podem ser escritas como

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2(\theta + T_\infty) + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.5a)$$

e sujeita às condições de contorno, em $x = 0$

$$\theta(0, t) = T_c - T_\infty \quad (3.5b)$$

em $x = L$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(\theta) \quad (3.5c)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, 0) = T_0 - T_\infty, \quad (3.5d)$$

onde $Q = w\rho_s c_s T_a + Q_m$ e $m^2 = \frac{w\rho_s c_s T_a}{k}$.

Observando que $Q_m + w\rho_s c_s(T_a - T_\infty) = Q'$, a Eq. 3.5a pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \theta + \frac{Q'}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.6)$$

Uma última transformação é necessária para a eliminação do termo “ $m^2\theta$ ” da Eq. 3.6. Define-se assim uma nova variável $W(x,t)$ como sendo:

$$W(x, t) = \theta(x, t)e^{m^2\alpha t} \quad (3.7)$$

Assim, substituindo a Eq.3.7 nas Eqs. 3.6, 3.5b, 3.5c e 3.5d, obtêm-se

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{k}Q'e^{m^2\alpha t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (3.8a)$$

sujeito às condições de contorno, em $x = 0$

$$W(0, t) = (T_c - T_\infty)e^{m^2\alpha t} \quad (3.8b)$$

em $x = L$

$$-k \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(W) \quad (3.8c)$$

e à condição inicial

$$W(x, 0) = T_0 - T_\infty \quad (3.8d)$$

As Eqs. 3.8a podem ser resolvidas aplicando-se o método das funções de Green (BECK *et al.*, 1992), ou seja, a solução pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \int_{x'=0}^L G(x, t|x', \tau)|_{\tau=0} W(x', 0) dx' \\ &+ \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L G(x, t|x', \tau) Q' e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^t W(0, t) \frac{\partial G(x, t|x', \tau)}{\partial x'} \Big|_{x'=0} d\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde o primeiro termo refere-se à temperatura inicial, o segundo à geração de calor metabólico e o último à condição de contorno em $x=0$ de temperatura prescrita.

Usando a nomenclatura proposta por Beck *et al.* (1992), identifica-se o problema biotérmico como sendo X13, onde o índice 1 refere-se à temperatura prescrita e o 3 à convecção de calor. Assim, a função de Green do problema dada por (BECK *et al.*, 1992):

$$G_{X13}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin(\frac{\beta_n x}{L}) \sin(\frac{\beta_n x'}{L})}{\beta_n^2 + B^2 + B} \quad (3.10)$$

onde $\beta_n \cot \beta_n = -B$ e $B = \frac{hL}{k}$, são usados para obtenção do autovalor β_n .

Reescrevendo o primeiro termo da Eq. 3.9, obtém-se

$$\begin{aligned} W_1(x, t) &= \int_{x'=0}^L G(x, t|x', t - \tau)|_{\tau=0} W(x, 0) dx' \\ &= \int_{x'=0}^L (T_0 - T_\infty) G_{X13}(x, t|x', t - \tau)|_{\tau=0} dx' \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considerando as três regiões distintas envolvendo a geração de calor, obtêm-se

$$\begin{aligned} W_{2a}(x, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^a G(x, t|x', t - \tau) Q'_a e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^a G_{X13}(x, t|x', t - \tau) Q'_a e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} W_{2b}(x, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b G(x, t|x', t - \tau) Q'_b e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b G_{X13}(x, t|x', t - \tau) Q'_b e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \end{aligned} \quad (3.12b)$$

$$\begin{aligned} W_{2c}(x, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=b}^L G(x, t|x', t - \tau) Q'_c e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=b}^L G_{X13}(x, t|x', t - \tau) Q'_c e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \end{aligned} \quad (3.12c)$$

onde Q'_a , Q'_b e Q'_c representam respectivamente os domínios $[0 : a]$, $[a : b]$ e $[b : L]$.

O terceiro termo da Eq. 3.9, pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} W_3(x, t) &= \alpha \int_{\tau=0}^t W(0, t) \frac{\partial G(x, t|x', \tau)}{\partial x'} \Big|_{x'=0} d\tau \\ &= \alpha \int_{\tau=0}^t (T_c - T_\infty) e^{m^2 \alpha \tau} \frac{\partial G_{X13}(x, t|x', \tau)}{\partial x'} \Big|_{x'=0} d\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo a função de Green dada pela Eq. 3.10 nas Eqs. 3.11, 3.12a, 3.12b, 3.12c e 3.13, obtêm-se

$$W_1(x, t) = \int_{x'=0}^L (T_0 - T_\infty) \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n x'}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} \Big|_{\tau=0} dx' \quad (3.14a)$$

$$W_{2a}(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^a \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n x'}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} Q'_a e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \quad (3.14b)$$

$$W_{2b}(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha(t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n x'}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} Q'_b e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \quad (3.14c)$$

$$W_{2c}(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=b}^L \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha(t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n x'}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} Q'_c e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \quad (3.14d)$$

$$W_3(x, t) = \alpha \int_{\tau=0}^t (T_c - T_\infty) e^{m^2 \alpha \tau} \frac{\partial^2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha(t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n x'}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} \Big|_{x'=0} d\tau \quad (3.14e)$$

Resolvendo as respectivas integrais, obtém-se

$$W(x, t) = W_1 + W_{2a} + W_{2b} + W_{2c} + W_3 \quad (3.15)$$

ou seja

$$\begin{aligned} W(x, t) &= -2(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos(\beta_n) - 1]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B)} \\ &= \frac{-2L^2 Q'_a}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right) - 1]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \\ &= \frac{-2L^2 Q'_b}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right)]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \\ &= \frac{-2L^2 Q'_c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos(\beta_n) - \cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right)]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \\ &= 2(T_c - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{\beta_n (\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)}{(\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

e retornando à variável original $T(x, t)$ (ver Eqs. 3.4 e 3.7), obtém-se

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= W(x, t) e^{-m^2 \alpha t} \\ T(x, t) - T_\infty &= W(x, t) e^{-m^2 \alpha t} \\ T(x, t) &= W(x, t) e^{-m^2 \alpha t} + T_\infty \end{aligned} \quad (3.17)$$

ou seja, a distribuição de temperatura para o problema apresentado na Fig. 3.4 é dada por

$$\begin{aligned}
T(x, t) = & \left\{ -2(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos(\beta_n) - 1]}{\beta_n(\beta_n^2 + B^2 + B)} \right. \\
& - \frac{2L^2 Q'_a}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right) - 1]}{\beta_n(\beta_n^2 + B^2 + B)(\beta_n^2 + m^2 L^2)} \\
& - \frac{2L^2 Q'_b}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right)]}{\beta_n(\beta_n^2 + B^2 + B)(\beta_n^2 + m^2 L^2)} \\
& - \frac{2L^2 Q'_c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos(\beta_n) - \cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right)]}{\beta_n(\beta_n^2 + B^2 + B)(\beta_n^2 + m^2 L^2)} \\
& \left. + 2(T_c - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{\beta_n(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)}{(\beta_n^2 + B^2 + B)(\beta_n^2 + m^2 L^2)} \right\} e^{-m^2 \alpha t} + T_\infty
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.2.2 Solução Numérica - Método dos Volumes Finitos

O Método dos Volumes Finitos é definido como a integração no espaço e no tempo da equação diferencial na forma conservativa em um dos volumes de controle (PATANKAR, 1980). O método usa a equação diferencial na sua forma integral e para isto, torna-se necessário a discretização do domínio do problema estudado. Assim, divide-se o domínio em um número finito e discreto de volumes de controle. Em cada um destes deve ser aplicada a equação de conservação. No processo de discretização é usado uma malha estruturada do tipo nós e faces centradas. Tem-se também a representação de um volume finito típico para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional, onde os índices em maiúsculo representam os volumes internos e os índices em minúsculos representam as faces.

A principal característica da malha estruturada é que cada volume interno tem sempre o mesmo número de vizinhos e a numeração destes tem uma seqüência natural. A discretização em malhas estruturadas apresenta uma série de vantagens para a implementação, uma vez que a regra de ordenação dos elementos simplifica as rotinas e de acordo com Maliska (1995), a matriz resultante tem diagonais fixas, o que possibilita a aplicação de diversos métodos encontrados na literatura.

3.2.2.1 Modelo Unidimensional - Regime Transiente

A Figura 3.5 apresenta o problema unidimensional mostrado anteriormente na Fig 3.4, porém com a discretização em volumes finitos.

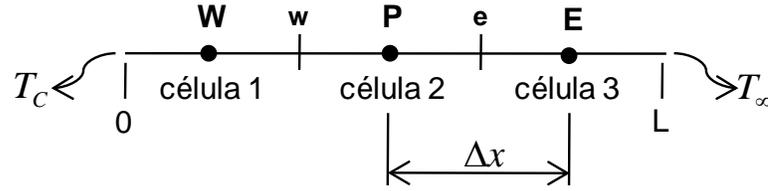


Figura 3.5: Volume de controle - Modelo unidimensional em volumes finitos.

As Figuras 3.6 e 3.7 mostram o volume de controle para as condições de contorno do problema.

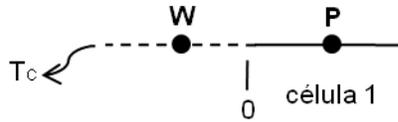


Figura 3.6: Condição de contorno 1: Temperatura prescrita.

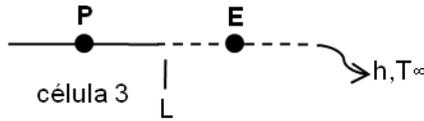


Figura 3.7: Condição de contorno 2: Convecção térmica.

Portanto a Eq. 3.3a pode ser integrada no volume de controle da seguinte forma (MALISKA, 1995):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a - T) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{Q_m}{k} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (3.19)$$

Após a discretização, e aproximando os volumes finitos através da interpolação linear baseada no esquema de diferenças centradas (FERZIGER; PERIC, 2002), temos a solução explícita da equação unidimensional de Pennes:

$$T_P^{n+1} = T_P^n + \alpha \Delta t \left[\frac{T_E^n - 2T_P^n + T_W^n}{\Delta x^2} + \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a^n - T_P^n) + \frac{Q_m}{k} \right] \quad (3.20)$$

A partir da condição de contorno dada pela Figura 3.6, chega-se ao seguinte balanço

térmico:

$$\begin{aligned}\frac{T_P + T_W}{2} &= T_c \\ T_W &= 2T_c - T_P\end{aligned}\tag{3.21}$$

Para a condição de contorno mostrada na Figura 3.7. tem-se:

$$\begin{aligned}-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} &= h(T - T_\infty) \\ -k \frac{\partial(T_f - T_P)}{\partial \Delta x/2} &= h(T_f - T_\infty) \\ T_f &= \frac{h\Delta x T_\infty + 2kT_P}{2k + h\Delta x} \\ \frac{T_E + T_P}{2} &= T_f \\ T_E &= 2T_f - T_P \\ T_E &= 2 \left(\frac{h\Delta x T_\infty + 2kT_P}{2k + h\Delta x} \right) - T_P\end{aligned}\tag{3.22}$$

Os termos com índice "n" indicam dados no tempo presente, e com "n + 1" os dados à serem calculados para o instante adicional.

Observa-se que a Eq. 3.20 é explícita, pois as temperaturas nodais desconhecidas, num certo instante, são determinadas exclusivamente pelas temperaturas nodais conhecidas no instante anterior. Ou seja, o cálculo das temperaturas desconhecidas é direto. Uma vez que a temperatura em cada nó é conhecida no instante $t = 0$, pelas condições iniciais, o cálculo inicia em $t = i\Delta t$, e usa-se a Eq. 3.23 para determinar a distribuição de temperaturas transientes avançando-se no tempo, mediante os intervalos Δt .

A exatidão da solução no método de volumes finitos pode ser melhorada pela diminuição dos valores de Δx e Δt . Como é natural, o número de pontos nodais interiores que devem ser considerados aumenta com a diminuição de Δx , e o número de intervalos de tempo necessários para levar a solução até um instante final definido aumenta com o decréscimo de Δt . Portanto, o tempo de computação aumenta com a diminuição de Δx e Δt . Para impedir o surgimento de resultados errôneos, em virtude de oscilações numéricas que provoca divergência da solução, o valor escolhido para Δt deve ficar abaixo de um certo limite, que depende de Δx e de outros parâmetros do sistema. Essa dependência é conhecida como critério de estabilidade. O critério de estabilidade para este problema pode ser facilmente encontrado em Incropera *et al.* (2008), e no caso de uma face submetida a convecção térmica,

é dado por:

$$Fo(1 + Bi) \leq \frac{1}{2} \quad (3.23)$$

Onde Fo e Bi são respectivamente, os números de Fourier e Biot na forma discreta finita, e são definidos pelas Eqs. 3.24 e 3.25.

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (3.24)$$

$$Bi = \frac{h \Delta x}{k} \quad (3.25)$$

Adota-se a Eq. 3.23 na escolha do valor máximo admissível de Fo , e calcula-se o Δt a partir da Eq. 3.24.

3.2.2.2 Modelo Bidimensional - Regime Transiente

A Figura 3.8 representa um modelo bidimensional do tecido (mama) com todas as superfícies expostas a um meio convectivo, exceto a face interna que possui a temperatura prescrita T_c . Nesse caso, o tumor é representado como um termo de geração superficial em uma determinada região (Q_{m2}), enquanto o metabolismo normal é representado por uma geração uniforme em todo o domínio (Q_{m1}).

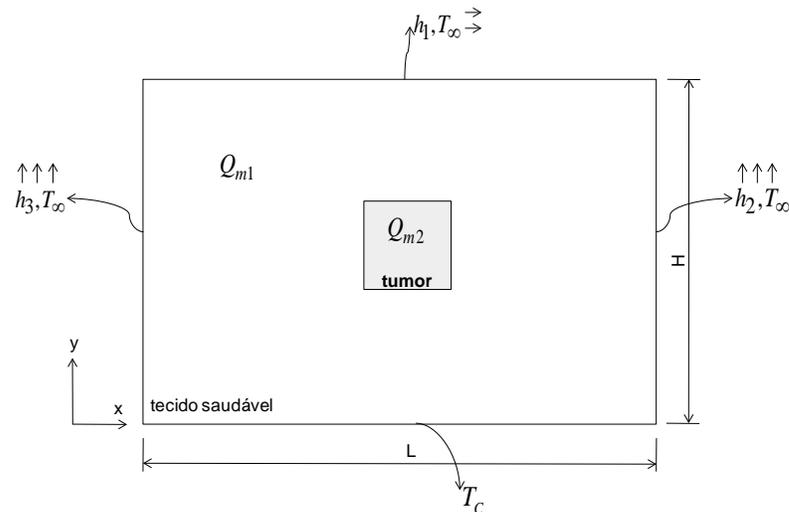


Figura 3.8: Modelo bidimensional de um tecido exposto a um meio convectivo.

Assim, a versão bidimensional da equação de Pennes pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{w\rho_s c_s}{k}(T_a - T) + \frac{Q_m}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.26a)$$

sujeita às condições de contorno na direção x

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad +k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.26b)$$

e às condições de contorno na direção y

$$T(x, 0, t) = T_c \quad (3.26c)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = h(T - T_\infty) \quad (3.26d)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, 0) = T_0 \quad (3.26e)$$

A especificação das condições de contorno na direção x (Eqs. 3.26c e 3.26d) deve-se à geração de calor ser assumida no centro do plano em determinada posição y , por exemplo, $y = H$, enquanto as extremidades do eixo x estão longe das fontes de calor, a simetria portanto é usada.

A discretização das células para a obtenção da solução deste problema é apresentada na Fig. 3.9, neste caso, 8 balanços térmicos são necessários. Ainda nesta figura, verifica-se a relação existente entre as células de volume finito, onde P, W, E, N e S são as nomenclaturas usadas para caracterizar a célula central e suas respectivas células vizinhas em todas as direções.

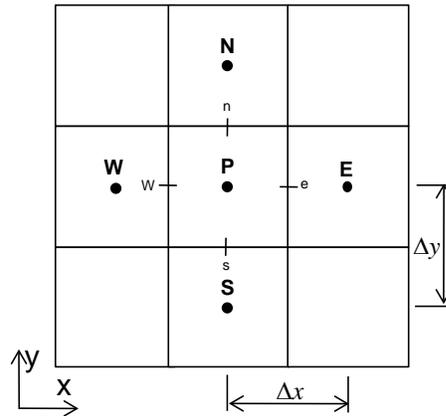


Figura 3.9: Discretização dos volumes finitos para o problema 2D.

Assim, a Eq. 3.26a integrada no volume de controle é dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a - T) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{Q_m}{k} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (3.27)$$

E ontém-se a discretização das células, como

$$T_P^{n+1} = T_P^n + \alpha \Delta t \left[\frac{T_E^n - 2T_P^n + T_W^n}{\Delta x^2} + \frac{T_N^n - 2T_P^n + T_S^n}{\Delta y^2} + \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a^n - T_P^n) + \frac{Q_m}{k} \right] \quad (3.28)$$

E o critério de estabilidade para o caso 2D é dado por

$$Fo(2 + Bi) \leq \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

Para determinação dos números de Fourier (Fo) e Biot (Bi), considera-se o maior valor entre encontrado entre Δx e Δy para o incremento espacial.

3.2.2.3 Modelo Tridimensional - Regime Transiente

Analogamente aos casos anteriores, a Fig. 3.10 apresenta a geometria cúbica usada para modelar o problema da biotransferência de calor tridimensional. Neste caso, o modelo bio-térmico representa um tecido com todas as faces submetidas a um meio convectivo, exceto a superfície interna que possui a temperatura prescrita T_c .

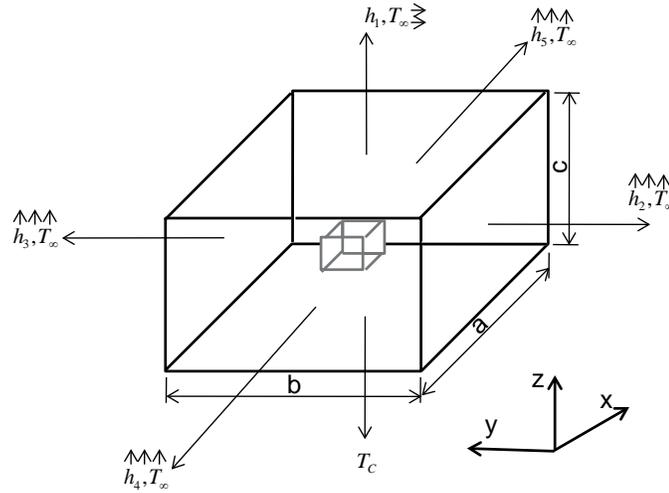


Figura 3.10: Modelo Tridimensional de um tecido exposto a um meio convectivo.

Assim, a equação governante é escrita como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{w\rho_s c_s}{k}(T_a - T) + \frac{Q_m}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.30a)$$

sujeita às condições de contorno na direção x

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad +k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad (3.30b)$$

sujeita às condições de contorno na direção y

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad +k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (3.30c)$$

e às condições de contorno na direção z

$$T(x, y, 0, t) = T_c \quad (3.30d)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=c} = h(T - T_\infty) \quad (3.30e)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = T_0 \quad (3.30f)$$

A discretização das células para a obtenção da solução deste problema tridimensional, será feita conforme mostra a Figura 3.11. Neste caso, existem 26 balanças térmicas diferentes nas fronteiras do modelo 3D.

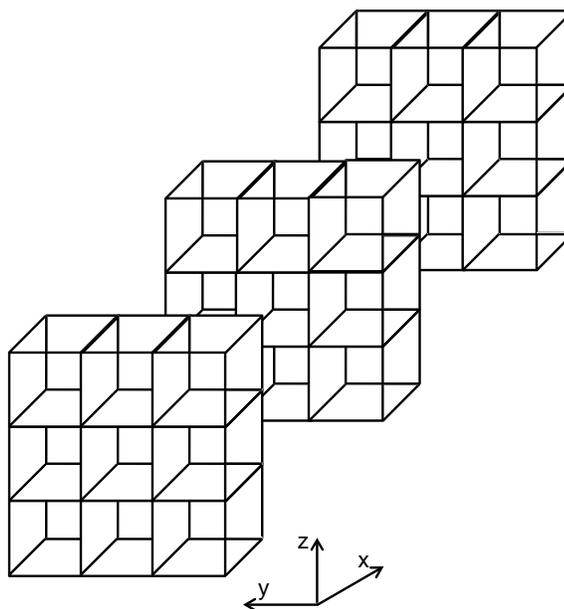


Figura 3.11: Discretização dos volumes finitos para o problema 3D.

A relação de cada célula com suas vizinhanças é mostrado na Figura 3.12, onde acrescenta-se na nomenclatura mostrada para as células para o problema 2D, as células T e B.

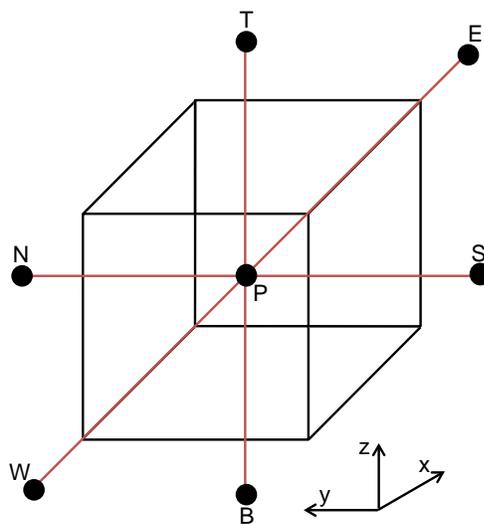


Figura 3.12: Volume finito da célula central e suas vizinhanças - Modelo 3D.

A Eq. 3.30a integrada no volume de controle é dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a - T) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{Q_m}{k} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (3.31)$$

Feita a discretização das células, a Eq. 3.31, resulta na seguinte solução explícita:

$$T_P^{n+1} = T_P^n + \alpha \Delta t \left[\frac{T_E^n - 2T_P^n + T_W^n}{\Delta x^2} + \frac{T_N^n - 2T_P^n + T_S^n}{\Delta y^2} + \frac{T_T^n - 2T_P^n + T_B^n}{\Delta z^2} + \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a^n - T_P^n) + \frac{Q_m}{k} \right] \quad (3.32)$$

Nesse caso, o critério de estabilidade para o caso 3D é dado pela Eq. 3.33.

$$Fo(3 + Bi) \leq \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

Analogamente, para determinação dos números de Fourier (Fo) e Biot (Bi), o maior valor encontrado entre Δx , Δy e Δz é usado para o incremento espacial.

3.2.2.4 Modelo Bidimensional - Regime Permanente

Observa-se que as características e comportamento térmico do corpo humano são únicas. Por exemplo, a perfusão sanguínea trabalha sempre no sentido da redução da temperatura do corpo. O metabolismo por sua vez depende de vários fatores e interfere também diretamente nesta temperatura. Por sua vez, em estado de repouso, as condições externas representam a maior perturbação em termos de regime térmico. Surge a questão: Uma eventual presença de tumor seria melhor identificada em regime permanente ou transiente? Esta questão indica que uma análise em regime permanente se torna importante para a investigação de técnicas de identificação da localização de um possível tumor (fonte de geração) ou mesmo da condutividade térmica do meio.

Usando o mesmo problema apresentado pela Fig. 3.8, a equação de Pennes para um problema em coordenadas retangulares bidimensional permanente é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a - T) + \frac{Q_m}{k} = 0 \quad (3.34)$$

Analogamente, a Eq. 3.34 integrada no volume de controle é dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{w\rho_s c_s}{k} (T_a - T) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{Q_m}{k} d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

Similarmente, a discretização das células, o resultado da Eq. 3.35 é a seguinte solução implícita em volumes finitos:

$$\frac{T_E^n - 2T_P^n + T_W^n}{\Delta x^2} + \frac{T_N^n - 2T_P^n + T_S^n}{\Delta y^2} + \frac{w\rho_s c_s}{k}(T_a^n - T_P^n) + \frac{Q_m}{k} = 0 \quad (3.36)$$

3.2.3 Solução Numérica - *COMSOL*

O *COMSOL Multiphysics* é um software comercial de simulação para várias aplicações na física e engenharia baseado no método dos elementos finitos. Neste trabalho, usou-se também uma interface física para a equação da biotransferência de calor existente para simular efeitos térmicos no tecido humano e em outros sistemas biológicos (COMSOL, 2014).

A resolução do problema usando este software pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Seleção da dimensão espacial do problema;
2. Inserção da física do problema (para este trabalho, a opção foi a biotransferência de calor);
3. Seleção do tipo de estudo (por exemplo: transiente ou estacionário);
4. Escolha da geometria a ser usada;
5. Adição do tipo de material ao(s) domínio(s) do problema;
6. Inserção das condições de contorno e iniciais do problema;
7. Escolha da malha;
8. Cálculo;
9. Apresentação dos resultados;

Os modelos 1D, 2D e 3D foram, nesse caso, também resolvidos usando o software *COMSOL*, e serão apresentados nos resultados desta dissertação.

Capítulo 4

Resultados: Problema Direto

Apresenta-se neste capítulo os resultados obtidos para os modelos biotérmicos descritos no capítulo anterior.

Como já descrito, obteve-se para o modelo biotérmico 1D a solução analítica enquanto as soluções numéricas em volumes finitos e em elementos finitos (*COMSOL*) foram obtidos para todos os modelos.

Assim, o procedimento de comparação entre as várias soluções tem o objetivo de validação dos modelos numéricos considerando a solução analítica como exata. Ou seja, as soluções numéricas 2D e 3D são validadas através de seu uso no problema 1D cujas soluções são comparadas com a solução exata. A solução 2D também foi comparada com a literatura.

A solução exata, por sua vez, é validada usando-se o procedimento de verificação intrínseca proposto por Beck *et al.* (1992) e é apresentado no anexo B.

As soluções dos problemas biotérmicos dos casos 1D, 2D e 3D foram obtidas considerando propriedades térmicas de células da mama encontradas na literatura (Tab. 4.1), e são apresentadas analisando-se também alguns fatores que podem influenciar na distribuição de temperatura no corpo, como por exemplo a presença ou não do tumor no domínio do problema, o volume (tamanho) e a localização do tumor e a alteração das condições iniciais de temperatura do corpo e ambiente.

Tabela 4.1: Propriedades biotérmicas para o domínio que simula a mama (GAUTHERIE, 1980).

Propriedades	Símbolo	Tecido normal	Tumor
Condutividade térmica (W/mK)	k	0,42	0,42
Perfusão sanguínea ($ml/s/ml$)	w	0,00018	0,009
Densidade (kg/m^3)	ρ	920	920
Calor específico (J/kgK)	c	3000	3000
Geração de calor metabólico (W/m^3)	Q_m	450	29000

Considerou-se ainda no estudo de Gautherie (1980), a temperatura arterial do sangue, ambiente, e a convecção térmica como $37^\circ C$, $20^\circ C$ e $5 \frac{W}{m^2K}$, respectivamente. Como mencionado, estes dados são usados para todos os modelos biotérmicos, com as exceções mencionadas durante o texto.

4.1 Solução Unidimensional - Regime Transiente

Apresenta-se inicialmente os resultados da solução do modelo biotérmico 1D. Os valores dos parâmetros presentes na equação são apresentados na Tab. 4.2.

Para plataforma *MATLAB*® usou-se a implementação da solução analítica e da solução numérica em volumes finitos. Os gráficos para a comparação com as três técnicas foram também construídos a partir desta plataforma.

Tabela 4.2: Parâmetros para o modelo biotérmico 1D.

Parâmetros	Símbolo	Valores
Temperatura inicial	T_0	$37^\circ C$
Temperatura prescrita	T_c	$37^\circ C$
Comprimento total	L	0,05 m
Comprimento do tumor	[a:b]	0,01 m
Posição inicial do tumor	a	0,02 m
Posição final do tumor	b	0,03 m

4.1.1 Validação para problema com perfusão sanguínea constante

As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam a comparação entre as soluções analítica, numérica (método dos volumes finitos - MVF) e o COMSOL para os tempos de 60, 300 e 600s, res-

pectivamente. Observa-se que estes resultados são obtidos considerando valores da perfusão sanguínea iguais em ambas as regiões da mama. Nota-se que as temperaturas encontradas nas três soluções apresentam valores idênticos ao longo do domínio do corpo.

As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam a diferença entre as respectivas soluções numéricas relativas à solução analítica, sendo o maior desvio obtido de $0,047\text{ }^{\circ}\text{C}$ referente à simulação de 600s entre o MVF e a solução analítica.

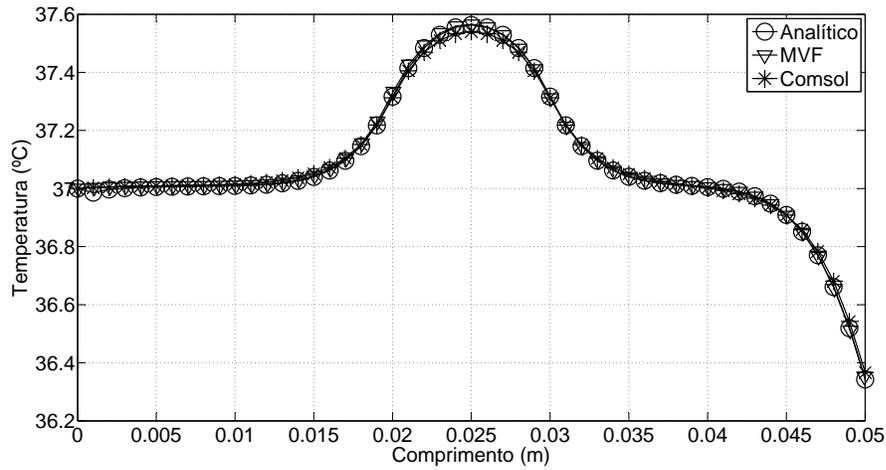


Figura 4.1: Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando os modelos analítico, MVF e COMSOL após 60s para o problema com perfusão constante 1D.

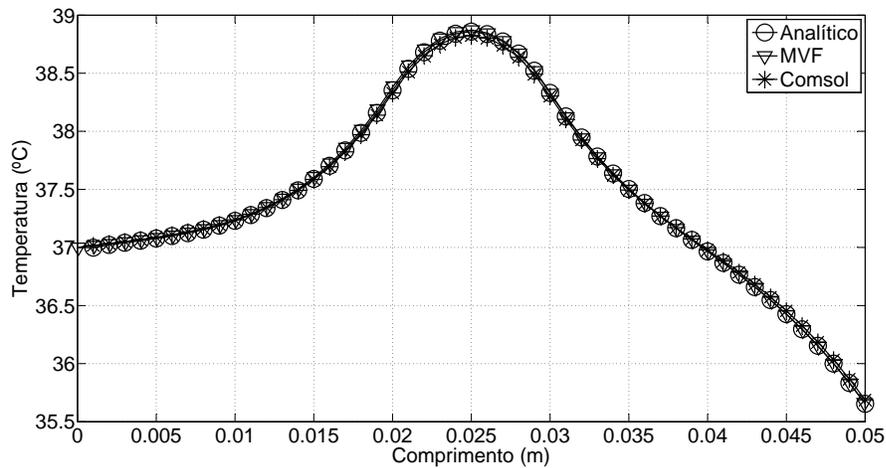


Figura 4.2: Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando os modelos analítico, MVF e COMSOL após 300s para o problema com perfusão constante 1D.

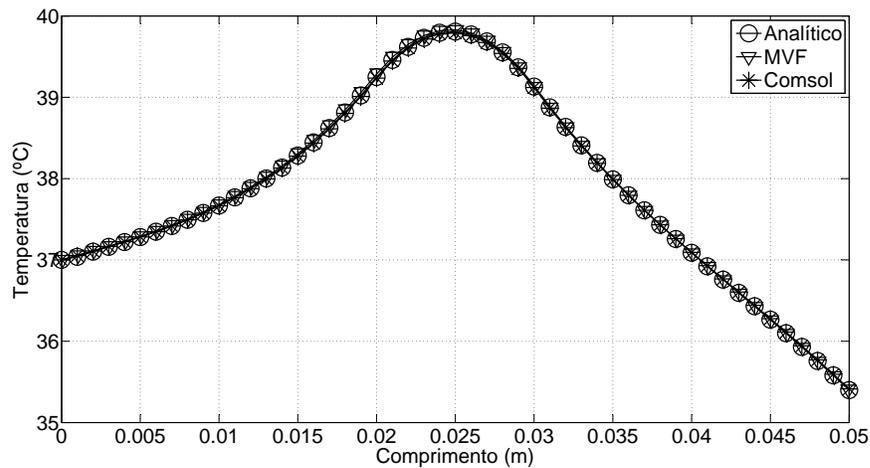


Figura 4.3: Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando os modelos analítico, MVF e COMSOL após 600s para o problema com perfusão constante 1D.

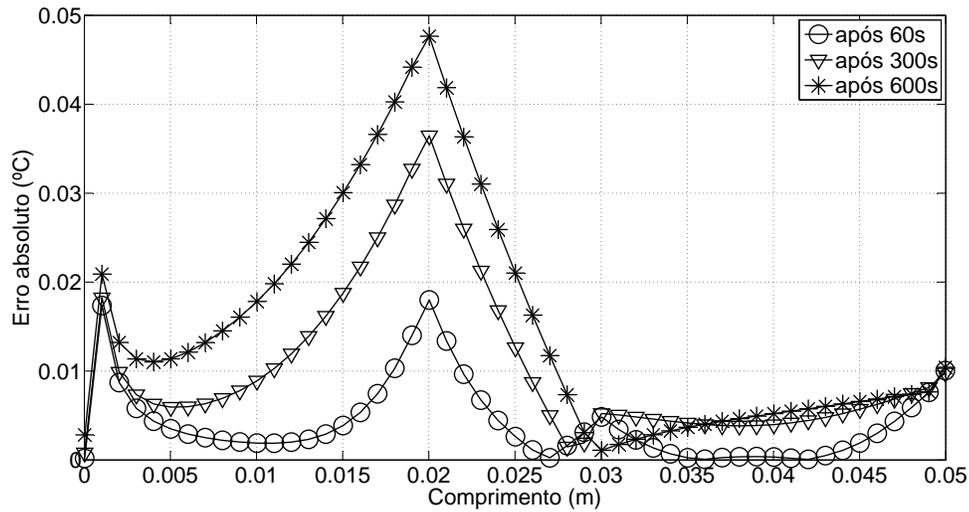


Figura 4.4: Erro absoluto entre as temperaturas obtidas da solução analítica e do MVF para o problema com perfusão constante 1D.

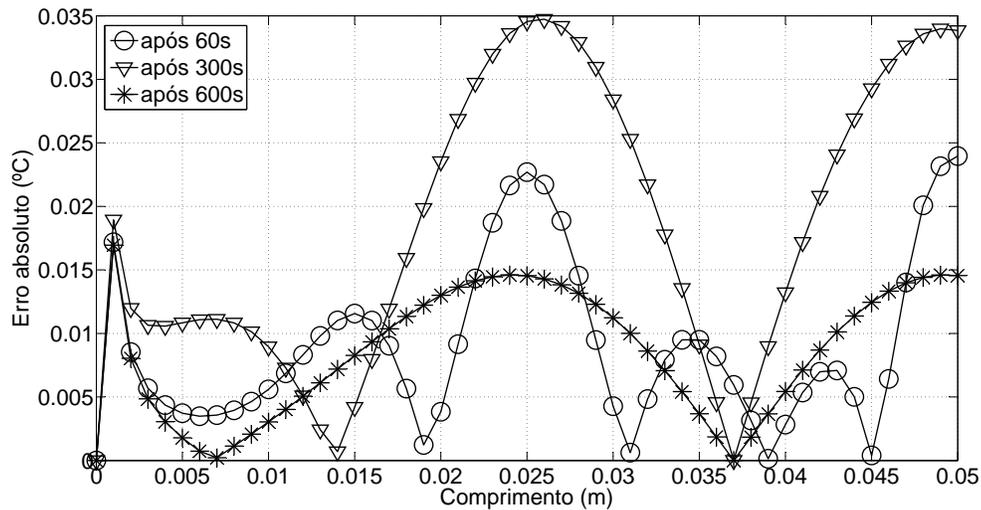


Figura 4.5: Erro absoluto entre as temperaturas obtidas da solução analítica e do COMSOL para o problema com perfusão constante 1D.

Ainda em relação a 4.4, o pico de erro verificado em $x \simeq 0,02m$ pode ser justificado por conta da solução em volumes finitos se tratar de uma aproximação numérica, e no momento da inserção do tumor (posicionado de $x = 0,02$ até $0,03m$) é necessário realizar-se aproximações numéricas, resultando exatamente no ponto onde inicia-se a presença do tumor o erro máximo.

4.1.2 Validação para problema com perfusão sanguínea variável

No corpo biológico, a perfusão sanguínea possui diferentes valores em cada região. Por exemplo, a perfusão sanguínea no tecido saudável é diferente da região tumoral. A solução analítica obtida neste trabalho por meio do método das funções de Green é válida apenas para valores de perfusão sanguínea constante em todo o domínio do corpo. Nas próximas subseções, apenas resultados numéricos são apresentados para o problema considerando perfusão sanguínea do tumor diferente do restante do corpo saudável.

As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam os resultados obtidos para a simulação feita com o MVF e COMSOL usando o valor de w_s (perfusão sanguínea) na região $[a : b]$ igual à $0,009 \text{ s}^{-1}$ para os tempos de 60, 300 e 600s, respectivamente. Os valores encontrados mostram que as temperaturas ao longo do domínio são equivalentes entre as duas soluções.

A Figura 4.9 apresenta a diferença de temperatura entre as temperaturas obtidas pelo MVF e *COMSOL*, sendo o maior desvio obtido de $0,039 \text{ }^\circ\text{C}$ referente à simulação de 60s. Nota-se ainda que a diferença entre as soluções diminui à medida que avança-se no tempo, para a simulação de 600s o maior desvio é de $0,018 \text{ }^\circ\text{C}$.

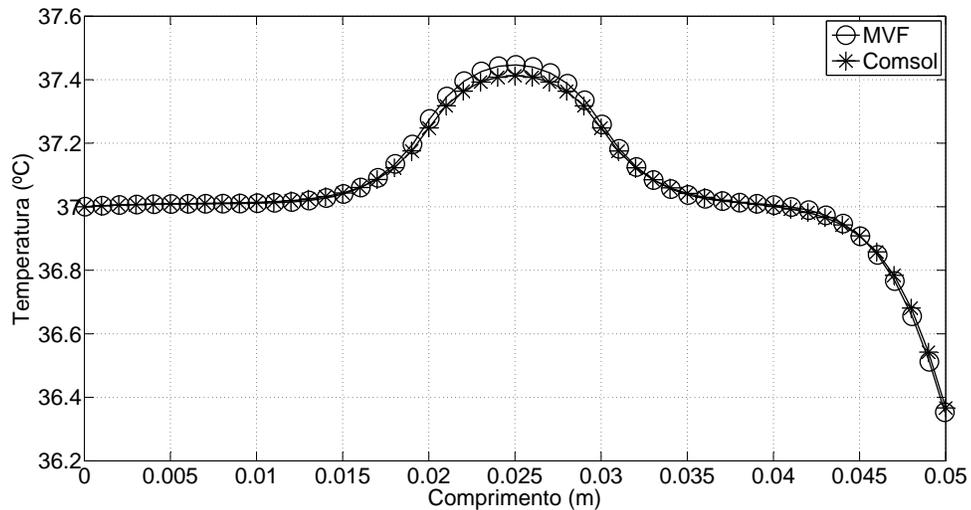


Figura 4.6: Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando MVF e COMSOL após 60s para o problema com perfusão variável 1D.

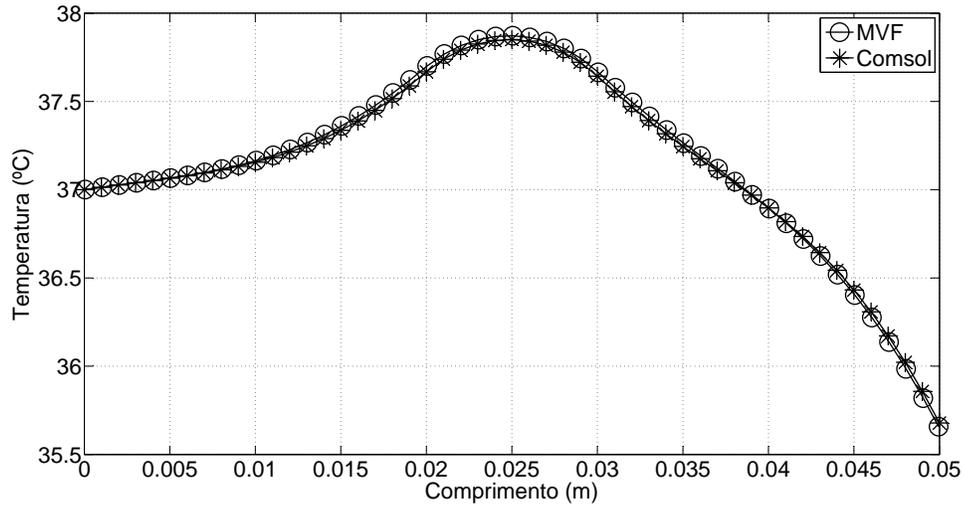


Figura 4.7: Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando MVF e COMSOL após 300s para o problema com perfusão variável 1D.

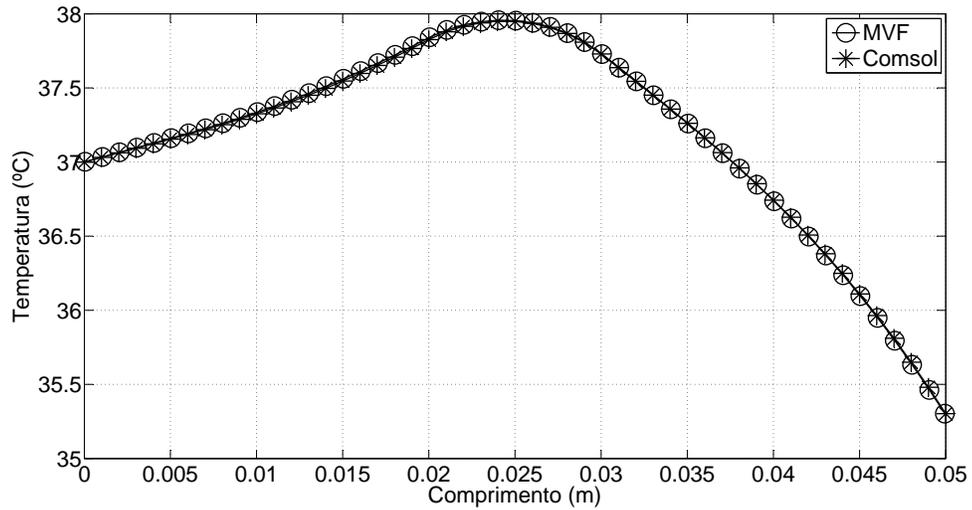


Figura 4.8: Distribuição das temperaturas ao longo do domínio usando MVF e COMSOL após 600s para o problema com perfusão variável 1D.

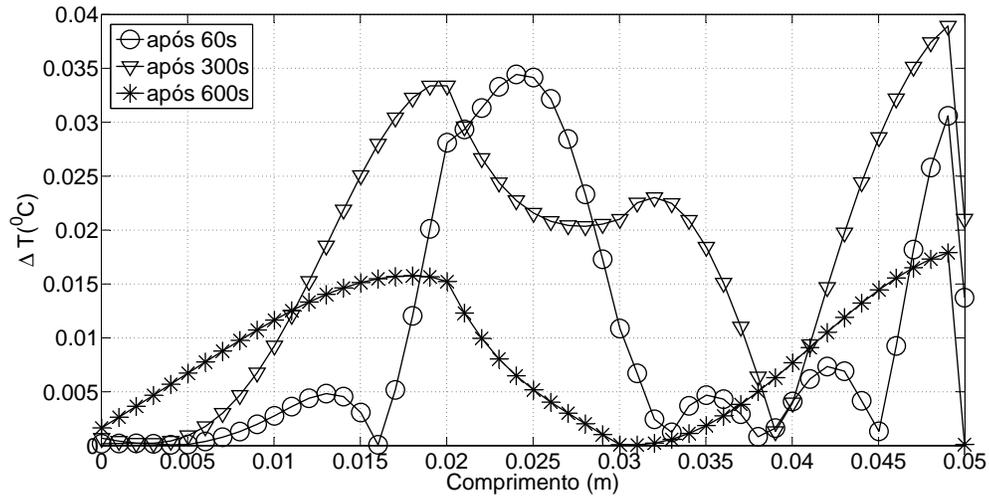


Figura 4.9: Diferença de temperaturas entre as soluções obtidas do MVF e COMSOL para o problema com perfusão variável 1D.

4.1.3 Perfusão constante X Perfusão variável

Nas Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 mostra-se as temperaturas no corpo, considerando apenas uma perfusão sanguínea, e também o caso onde a perfusão é variável. Nota-se o efeito que a perfusão sanguínea possui na região em que seu valor se torna mais elevado, diminuindo a temperatura no local em até aproximadamente $3^{\circ}C$ para a presente simulação.

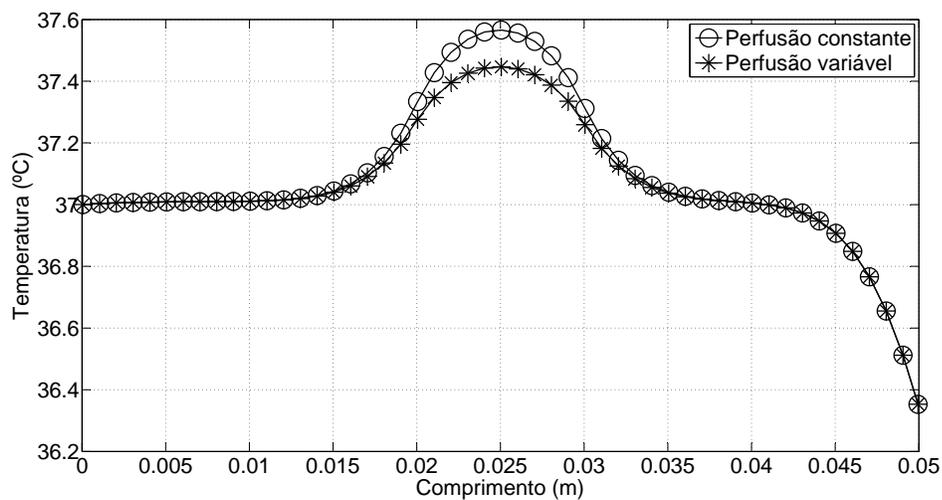


Figura 4.10: Comparação Perfusão constante x Perfusão variável após 60s (MVF).

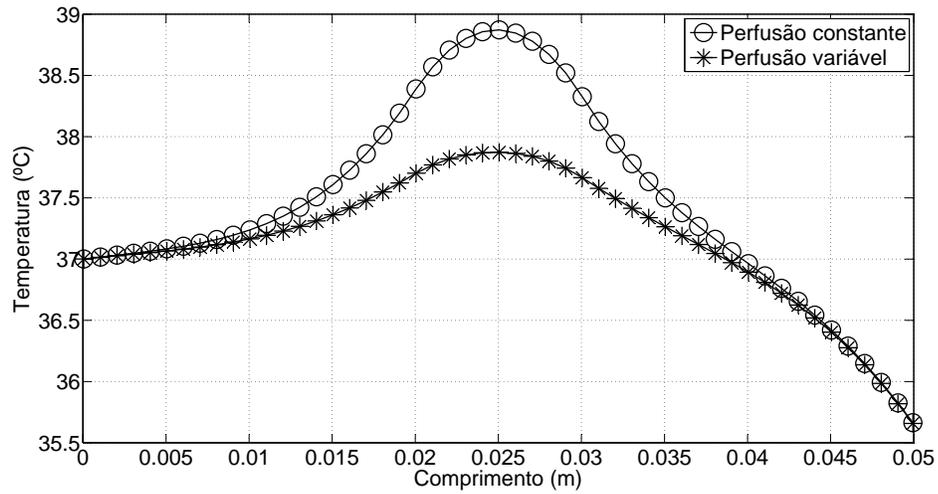


Figura 4.11: Comparação Perfusão constante x Perfusão variável após 300s (MVF).

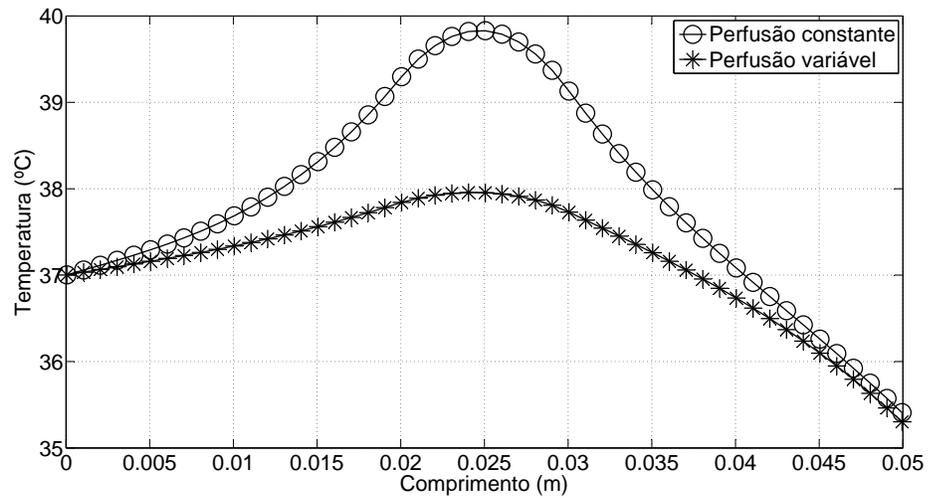


Figura 4.12: Comparação Perfusão constante x Perfusão variável após 600s (MVF).

Observa-se que à medida que avança-se no tempo, a diferença entre as temperaturas simuladas na região tumoral tende a aumentar, ou seja, a perfusão sanguínea quando considerada maior na região onde o tumor está localizado, aumenta a dissipação do calor nesta região, assim diminuindo a temperatura.

4.1.4 Efeito da temperatura na superfície alterando a posição do tumor

A localização do tumor no corpo também é um parâmetro importante para avaliar-se na transferência de calor em tecidos biológicos. As Figs. 4.13, 4.14 e 4.15 apresentam os modelos esquemáticos onde três posições distintas para um tumor de 1cm são consideradas. Neste caso, realiza-se simulações considerando apenas a presença de um tumor por vez.

Para uma simulação de 600s, a Fig. 4.16 apresenta o efeito de Q_{m2} (geração metabólica na região do tumor) na evolução das temperaturas ao longo do domínio, mudando a localização do tumor. Note que na Fig. 4.17 o aumento significativo de temperatura na superfície se acentua apenas quando a região do tumor está a 1 cm da superfície.

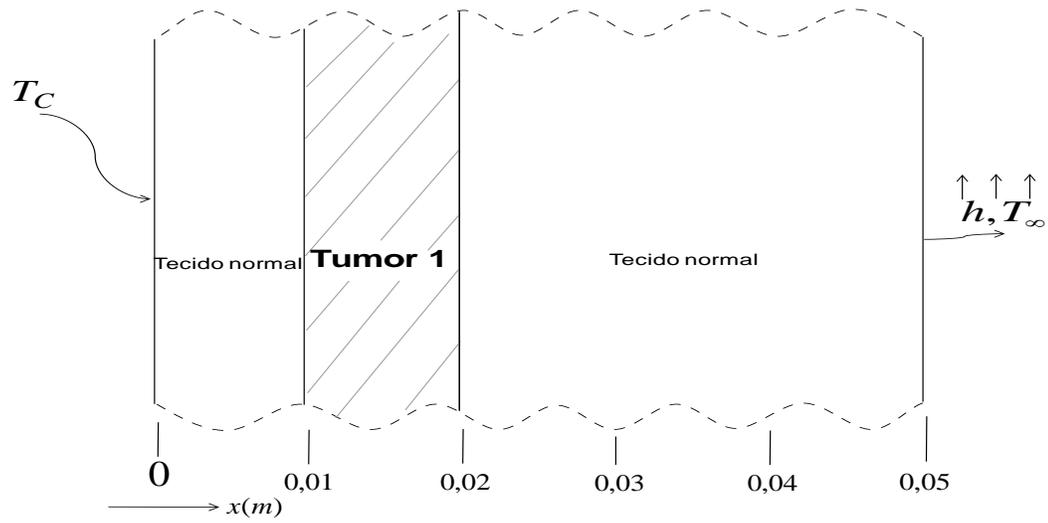


Figura 4.13: Modelo esquemático 1D ilustrando a localização do tumor 1.

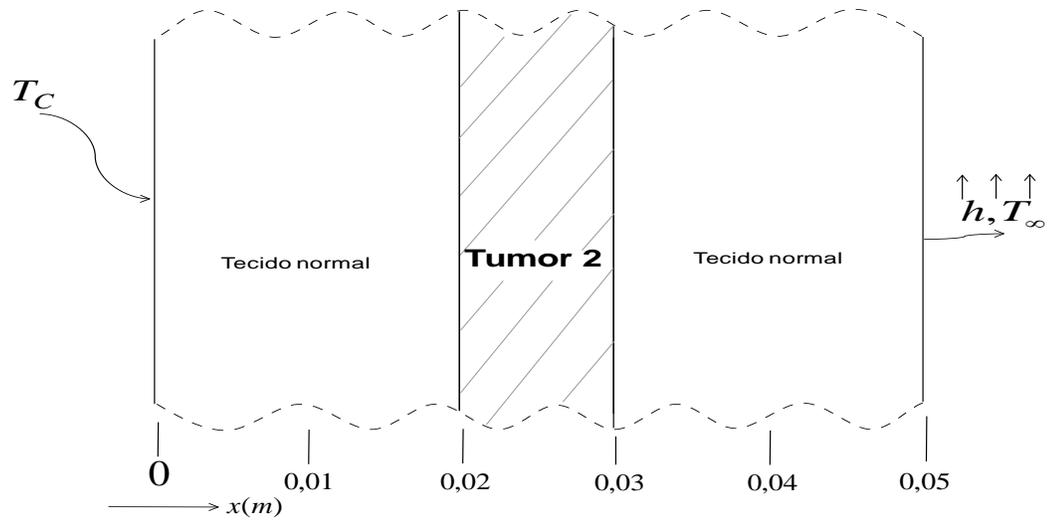


Figura 4.14: Modelo esquemático 1D ilustrando a localização do tumor 2.

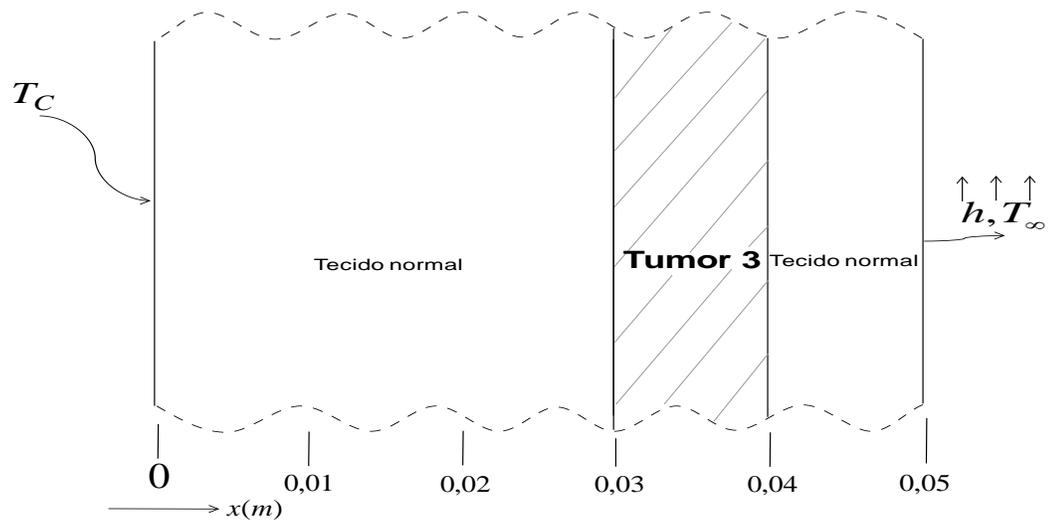


Figura 4.15: Modelo esquemático 1D ilustrando a localização do tumor 3.

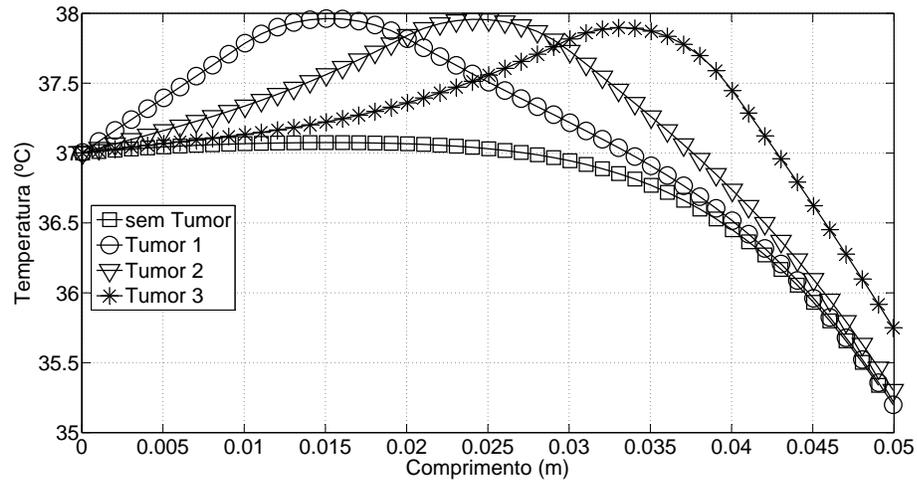


Figura 4.16: Distribuição das temperaturas ao longo do comprimento para diferentes posições do tumor após 600s (MVF).

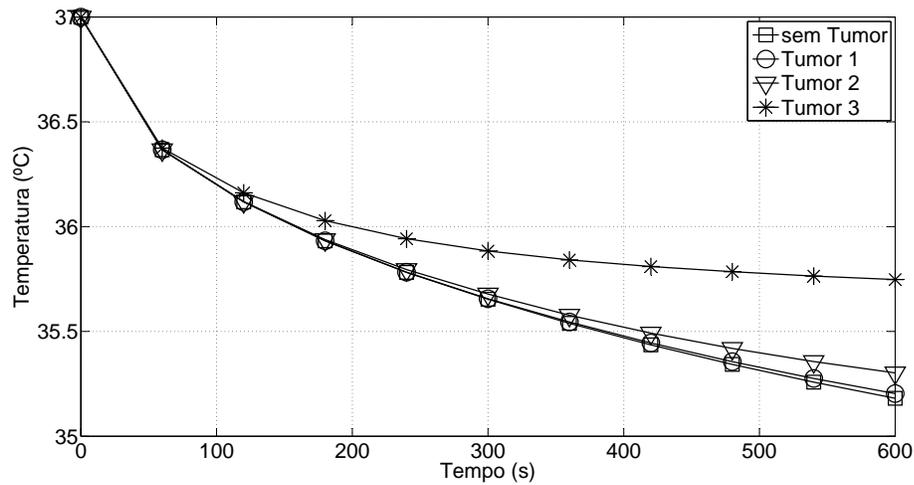


Figura 4.17: Temperaturas na superfície para diferentes posições do tumor após 600s (MVF).

4.1.5 Efeito da temperatura na superfície alterando o tamanho do tumor

Assim como a localização, o tamanho de um tumor também deve ser analisado para uma melhor compreensão do fenômeno da biotransferência de calor. As Figs. 4.18, 4.19 e 4.20 apresentam os modelos esquemáticos onde três tamanhos distintos para um tumor centralizado em $x = 0,04m$ são considerados. Realiza-se simulações considerando um tumor por vez.

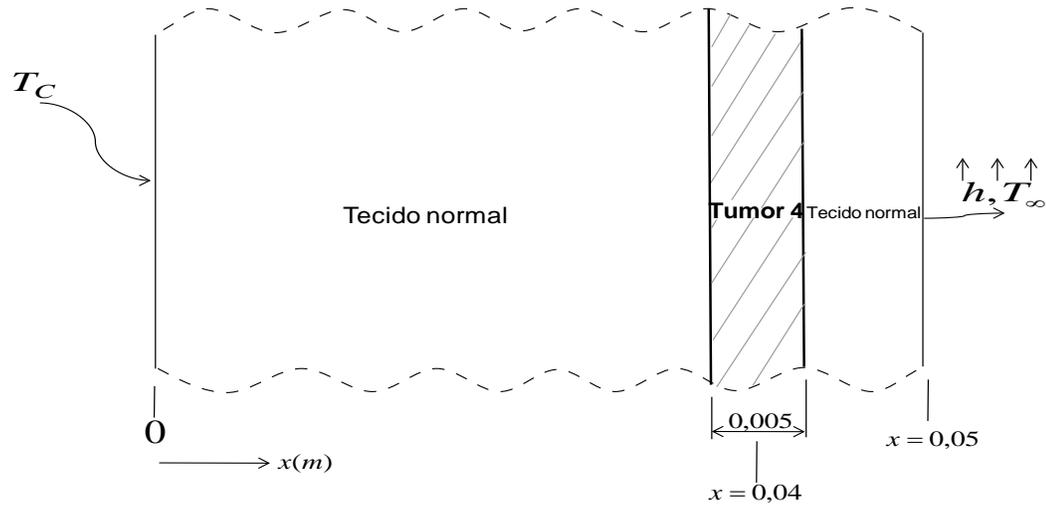


Figura 4.18: Modelo esquemático 1D ilustrando o tamanho do tumor 4.

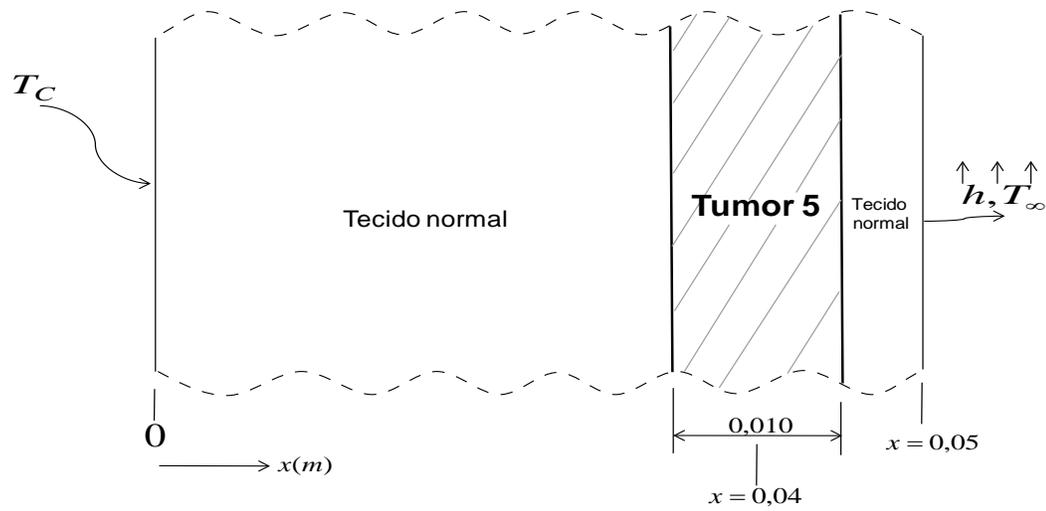


Figura 4.19: Modelo esquemático 1D ilustrando o tamanho do tumor 5.

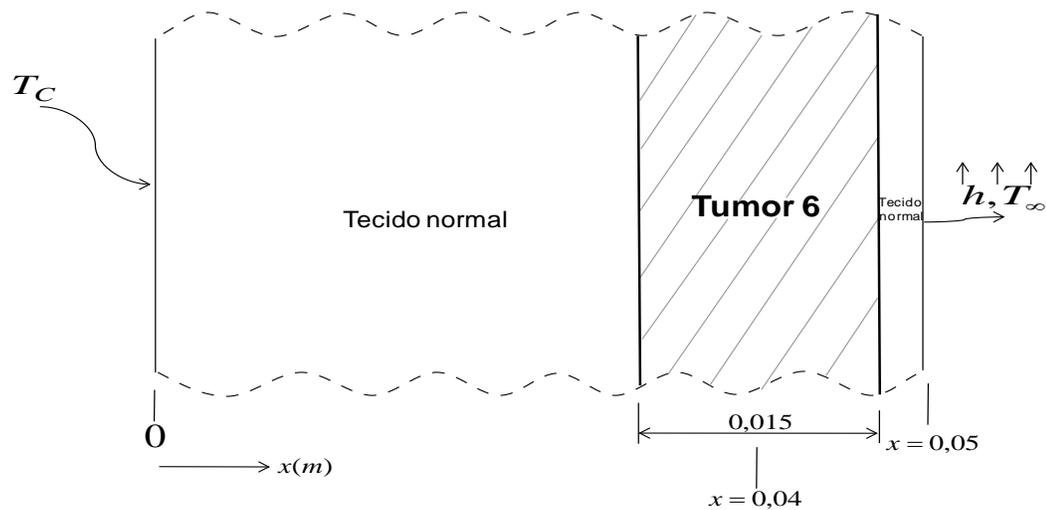


Figura 4.20: Modelo esquemático 1D ilustrando o tamanho do tumor 6.

A Figura 4.21 apresenta a distribuição das temperaturas ao longo do domínio do corpo, causado pela variação do tamanho de um tumor centralizado em $x = 0,04$ m. Observa-se na Fig. 4.22 a mudança de temperatura provocada na superfície do corpo em virtude da alteração do tamanho do tumor, aumentando em até $1,5$ °C para o caso do "tumor 6".

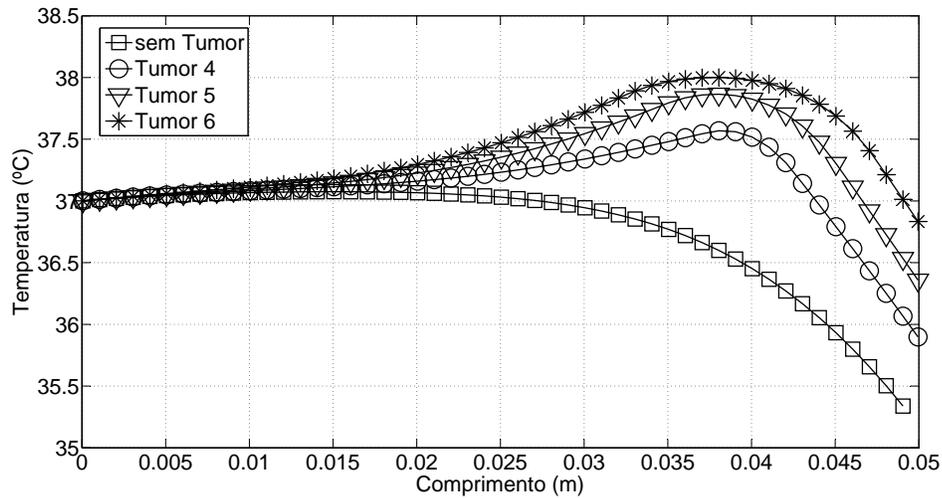


Figura 4.21: Distribuição das temperaturas ao longo do comprimento para diferentes dimensões do tumor centralizado em $x = 0,04$ m após 600s (MVF).

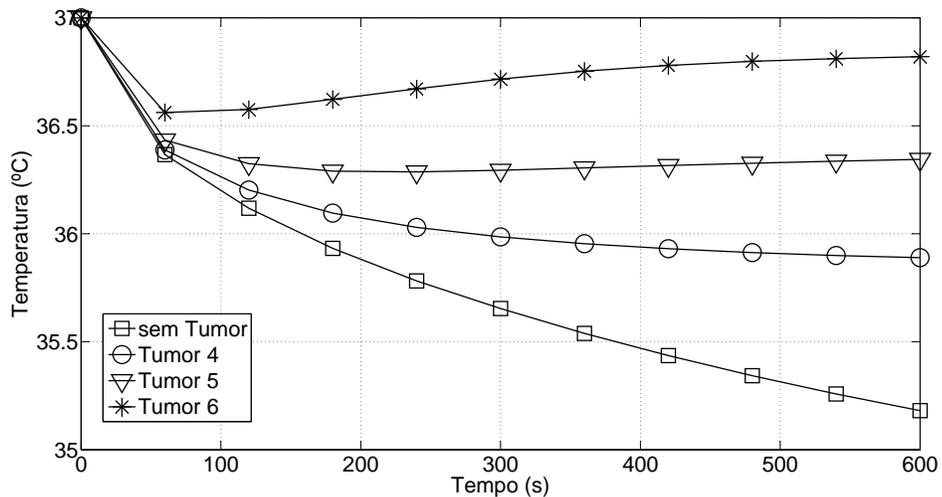


Figura 4.22: Temperaturas na superfície para diferentes dimensões do tumor centralizado em $x = 0,04$ m após 600s (MVF).

4.2 Solução Bidimensional - Regime Transiente

O modelo biotérmico 2D foi solucionado usando o método dos volumes finitos e o *COM-SOL*. A Fig. 4.23 apresenta o modelo esquemático usado para a simulação, onde são feitos dois cortes, na direção x e y, para melhor verificação e validação dos resultados. Onde $h1 = h2 = h3 = 5 \frac{W}{m^2K}$. Os parâmetros usados estão presentes na Tab. 4.3.

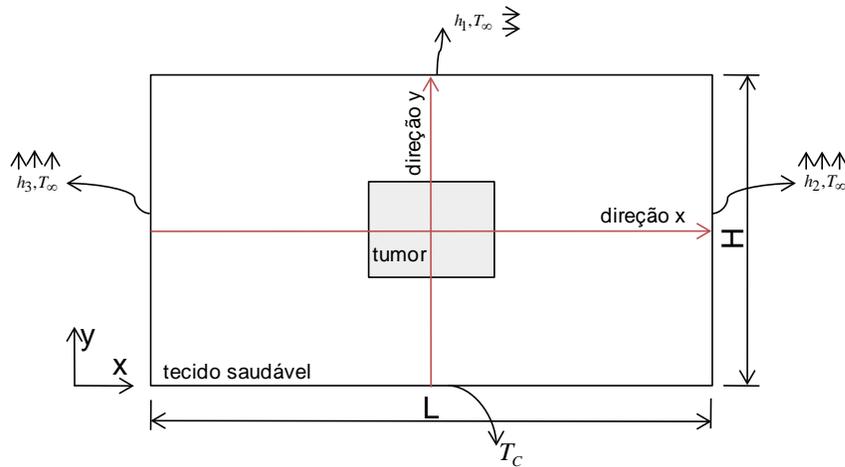


Figura 4.23: Desenho esquemático do modelo biotérmico 2D usado para validação dos resultados.

Tabela 4.3: Parâmetros para o modelo biotérmico 2D.

Parâmetros	Símbolo	Valores
Temperatura inicial	T_0	$37^{\circ}C$
Temperatura prescrita	T_c	$37^{\circ}C$
Largura	L	0,1 m
Altura	H	0,05 m
Área do tumor		(0,01m x 0,01m)
Posição inicial do tumor em x	x_1	0,045 m
Posição final do tumor em x	x_2	0,055 m
Posição inicial do tumor em y	y_1	0,02 m
Posição final do tumor em y	y_2	0,03 m

4.2.1 Convergência de Malha

As Figuras 4.24 e 4.25 apresentam os resultados em MVF para as malhas 100x50, 200x100 e 300x150, e também usando o *COMSOL* com uma opção de malha 205x108. Considerou-se a malha de 200x100 como a malha convergente a partir da qual malhas mais refinadas não produzem resultados com diferença significativa. A Fig. 4.26 apresenta a diferença de temperatura entre a malha selecionada e a de 300x150, comprovando dessa forma que a variação entre os valores é mínima. Observa-se na Fig. 4.27 que a variação entre os resultados encontrados pelo MVF e *COMSOL* é no máximo de 0,04 °C.

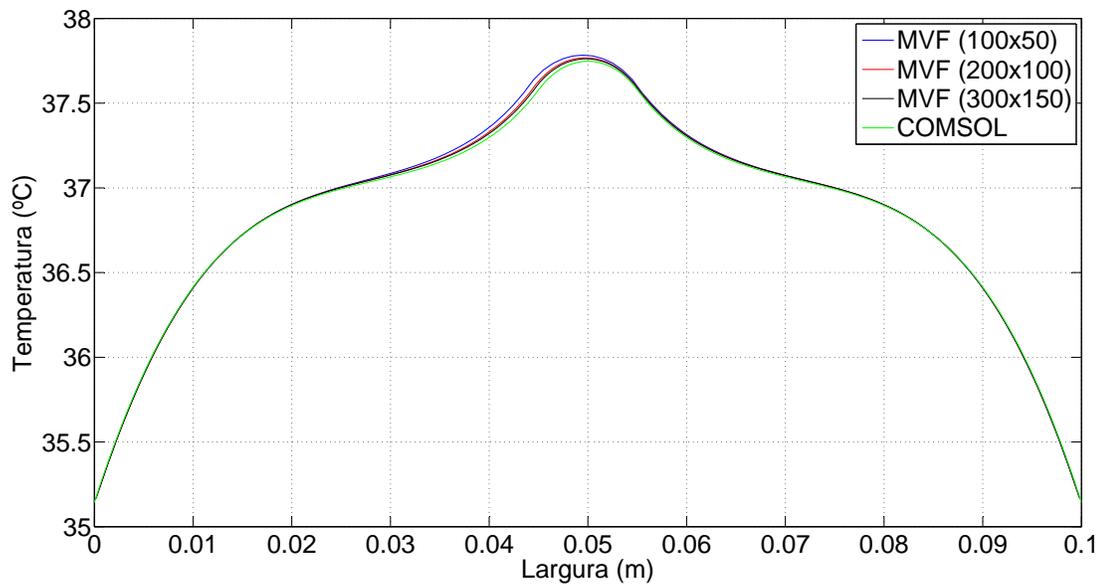


Figura 4.24: Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção x em $y=0,025\text{m}$ após 600s - Modelo 2D transiente.

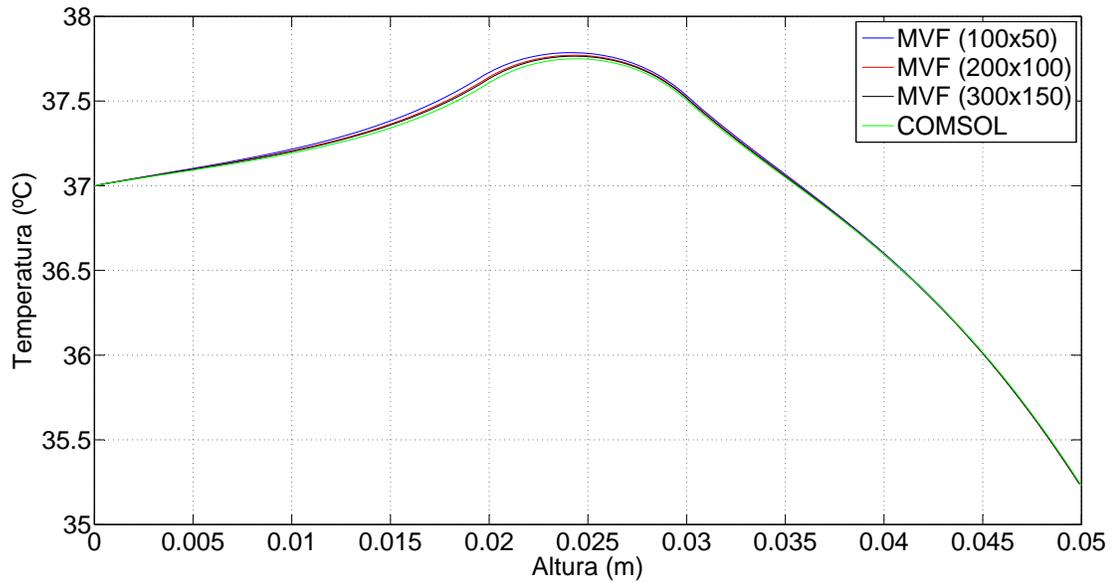
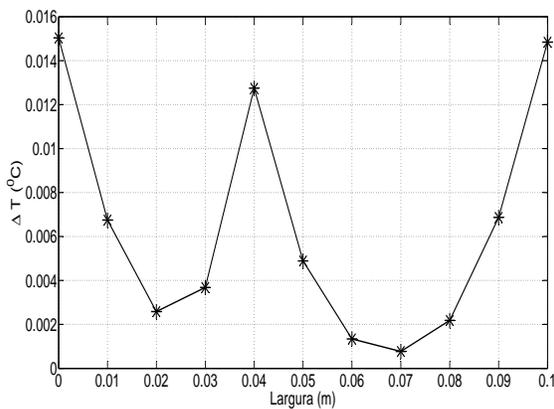
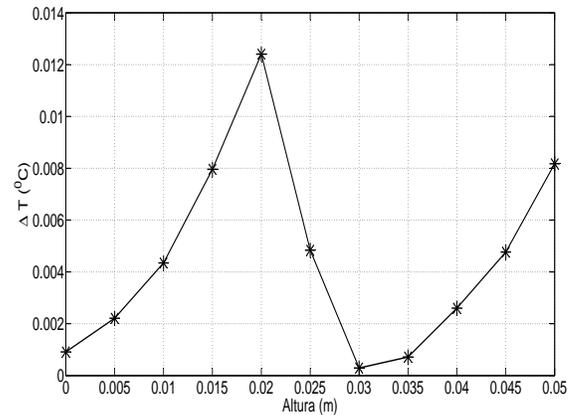


Figura 4.25: Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção y em $x=0,05\text{m}$ após 600s - Modelo 2D transiente.



(a) direção x



(b) direção y

Figura 4.26: Diferença de temperaturas entre as malhas 200x100 e 300x150 após 600s - Modelo 2D transiente.

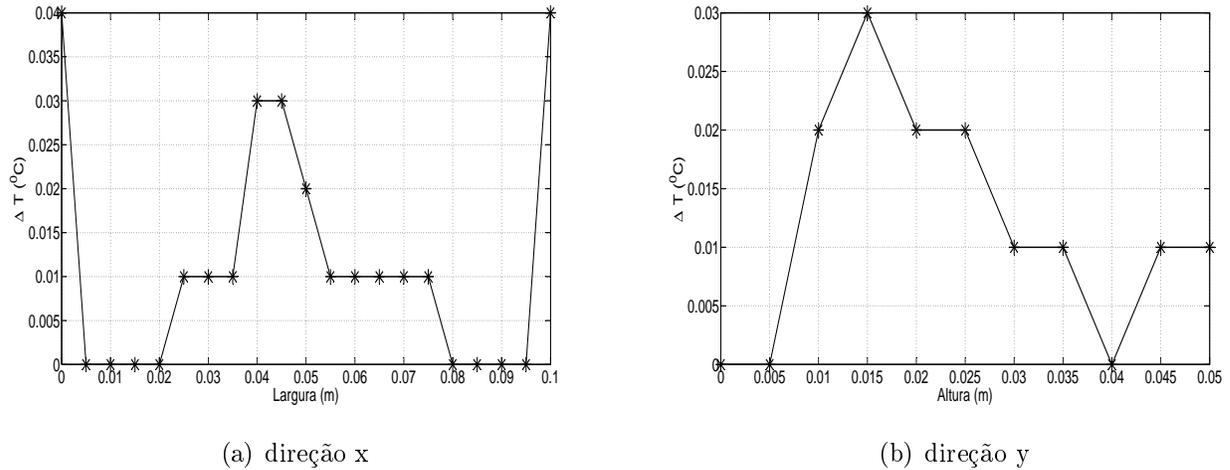


Figura 4.27: Diferença de temperaturas entre o MVF e COMSOL após 600s - Modelo 2D.

4.2.2 Validação da solução

4.2.2.1 Verificação com a solução analítica unidimensional

A verificação física da solução bidimensional em MVF pode ser feita através da redução do problema, sob certas condições, a um problema unidimensional. Observa-se na Fig. 4.28 que se h_2 e h_3 forem muito pequenos e a largura do tumor considerada igual a dimensão total do corpo em x , o problema 2D adquire características unidimensionais, uma vez que o calor existente no sistema será forçado a ser conduzido apenas na direção y . A Figura 4.29 apresenta uma comparação entre os resultados analítico 1D e o problema 2D reduzido usando perfusão sanguínea constante em todo corpo igual a $0,00018 \text{ s}^{-1}$. A Fig. 4.30 mostra o desvio obtido entre as duas soluções, observando assim uma boa concordância entre os resultados para a evolução das temperaturas ao longo da direção y , sendo o resíduo máximo encontrado de $0,04 \text{ }^\circ\text{C}$.

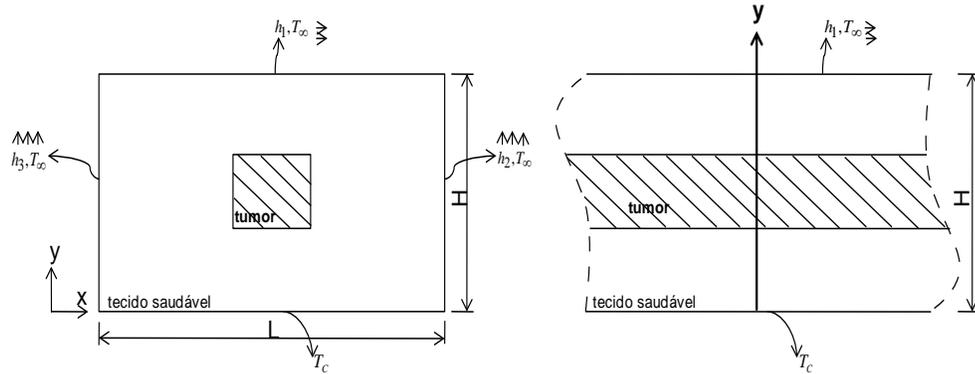


Figura 4.28: Problema bidimensional reduzido para um caso 1D na direção y .

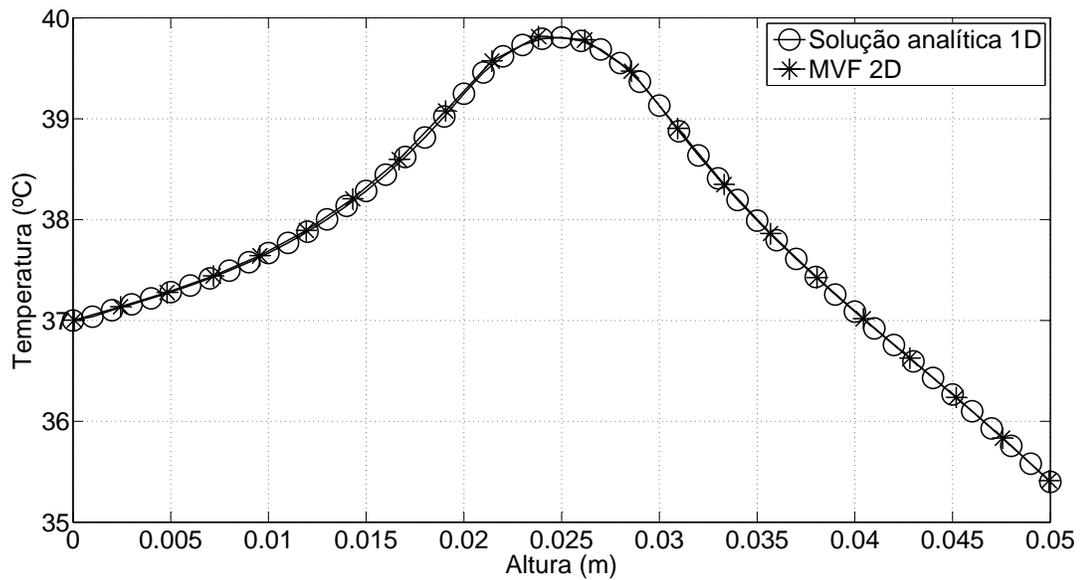


Figura 4.29: Verificação entre as solução 1D analítico e MVF 2D na direção y , $h_2 = h_3 = 0,0001[W/m^2K]$.

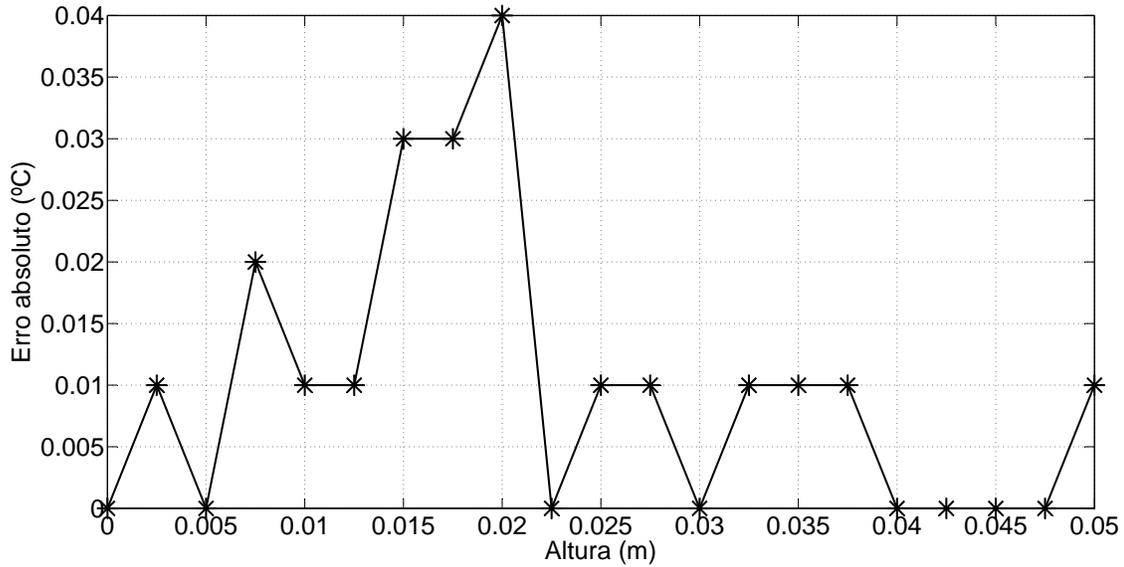


Figura 4.30: Desvio entre as solução 1D analítico e MVF 2D na direção y.

4.2.2.2 Comparação com resultados da literatura

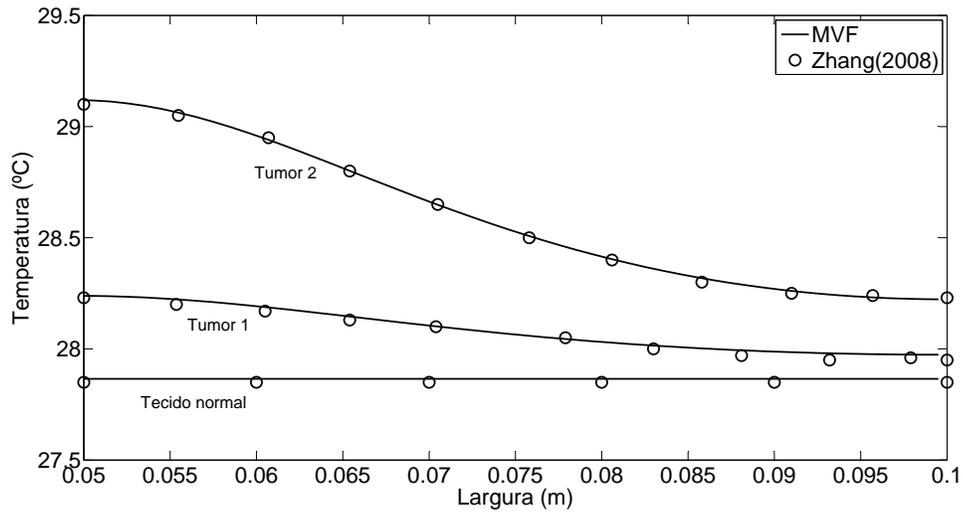
Optou-se também em validar os resultados bidimensionais em regime transiente através do trabalho de Zhang (2008) que usa o método térmico Lattice Boltzmann para resolver a equação de Pennes 2D considerando $h_2 = h_3 = 0$, ainda com alguns dados de entrada diferentes do proposto inicialmente neste capítulo. Portanto, exclusivamente nesta subseção usaremos os dados da Tab. 4.4 e os mencionados no próximo parágrafo.

Tabela 4.4: Propriedades para validação da solução MVF 2D com Zhang (2008).

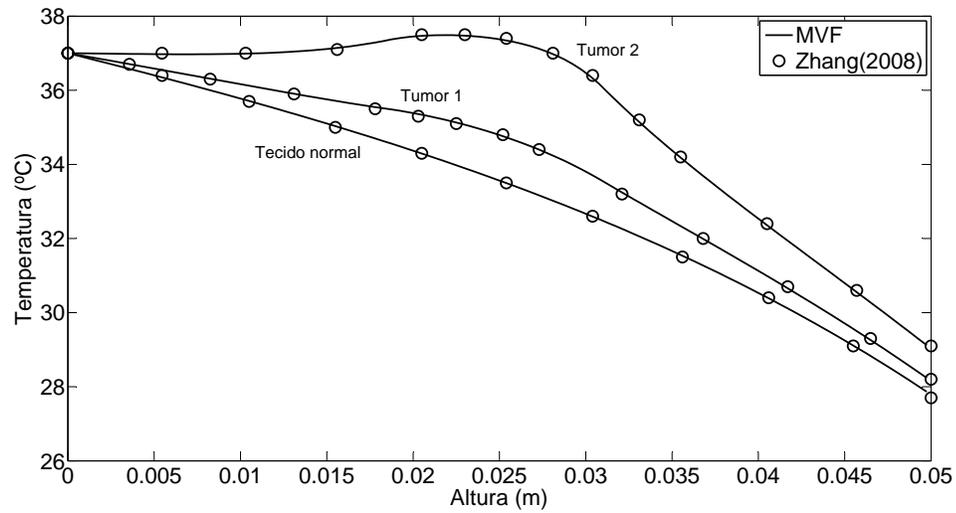
Propriedades	Símbolo	Tecido normal	Tumor1	Tumor2
Condutividade térmica (W/mK)	k	0,5	0,5	0,5
Densidade (kg/m^3)	ρ	1052	1052	1052
Calor específico (J/kgK)	c	3800	3800	3800
Perfusão sanguínea ($ml/s/ml$)	w	0,0001	0,001	0,01
Geração de calor metabólico (W/m^3)	Q_m	400	4000	40000

A largura (L) é 10 cm, a altura (H) é 5 cm, o tamanho do tumor é de (L/4 x L/4) centralizado no centro do modelo apresentado pela Fig. 4.23. Ainda no estudo de Zhang (2008), a temperatura arterial do sangue, prescrita, ambiente, e a convecção térmica h_1 foram consideradas de $37^\circ C$, $37^\circ C$, $20^\circ C$ e $20 \frac{W}{m^2K}$, respectivamente.

A Fig. 4.31 mostra os resultados deste trabalho confrontados com o de Zhang (2008). Observa-se na Fig. 4.32 que o maior desvio foi de $0,06^{\circ}\text{C}$, validando o modelo numérico proposto.

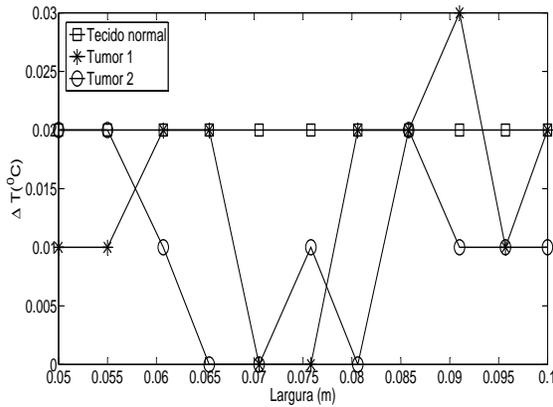


(a) Temperaturas na direção x.

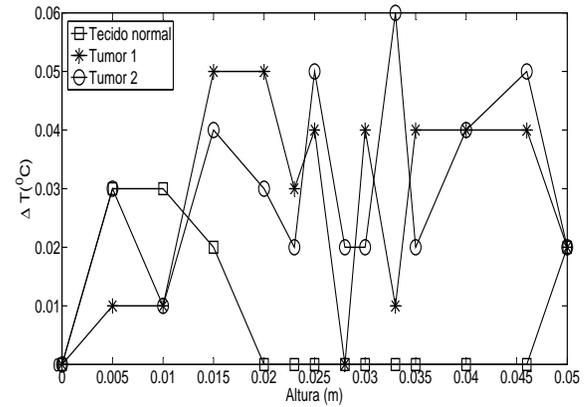


(b) Temperaturas na direção y.

Figura 4.31: Comparação do resultado do presente trabalho com os valores encontrados por Zhang (2008) - Modelo 2D transiente.



(a) Direção x.



(b) Direção y.

Figura 4.32: Diferença entre as temperaturas do presente trabalho com Zhang (2008) - Modelo 2D transiente.

4.2.3 Efeito da temperatura na superfície alterando a posição do tumor

Assim como visto no modelo biotérmico 1D, a variação da temperatura na superfície ($y = H = 0,05\text{m}$) do corpo dependendo da localização do tumor também será investigada usando o modelo bidimensional. A Tab. 4.5 mostra a localização dos três tumores usados nesta simulação. As Figuras 4.33, 4.34, 4.35 e 4.36 apresentam a distribuição de temperaturas na superfície externa do corpo com um tumor de (1,0 cm x 1,0 cm) posicionado em diferentes regiões após simulações de 0, 10, 20, 30, 40, 50 e 60 min usando o *COMSOL*.

Tabela 4.5: Localização dos tumores - Modelo 2D.

Tumores	x_1	x_2	y_1	y_2
Tumor 1	0,045m	0,055m	0,01m	0,02m
Tumor 2	0,045m	0,055m	0,02m	0,03m
Tumor 3	0,045m	0,055m	0,03m	0,04m

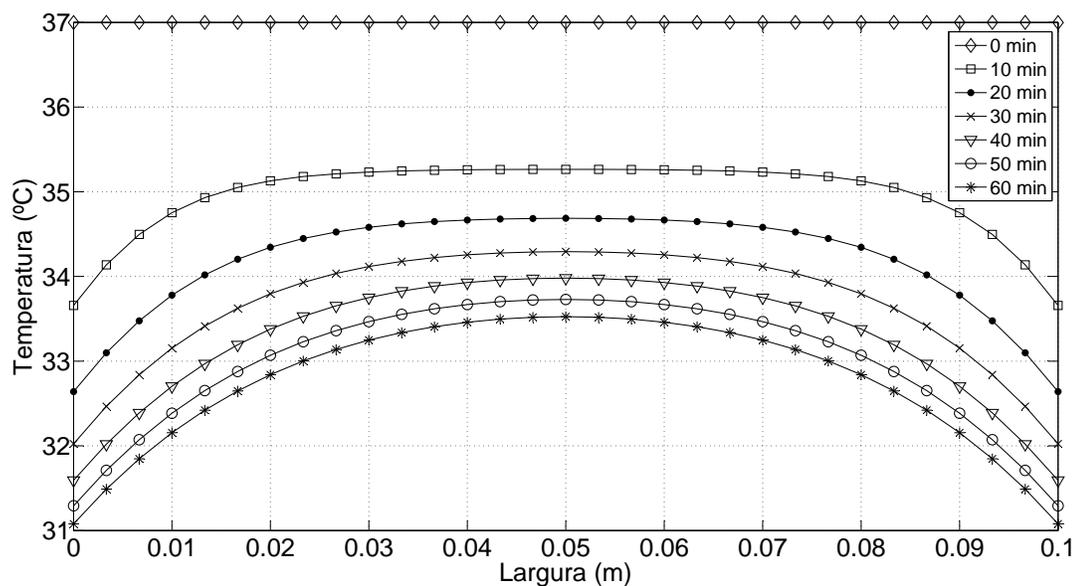


Figura 4.33: Temperaturas na superfície do corpo sem tumor em vários instantes de tempo - Modelo 2D.

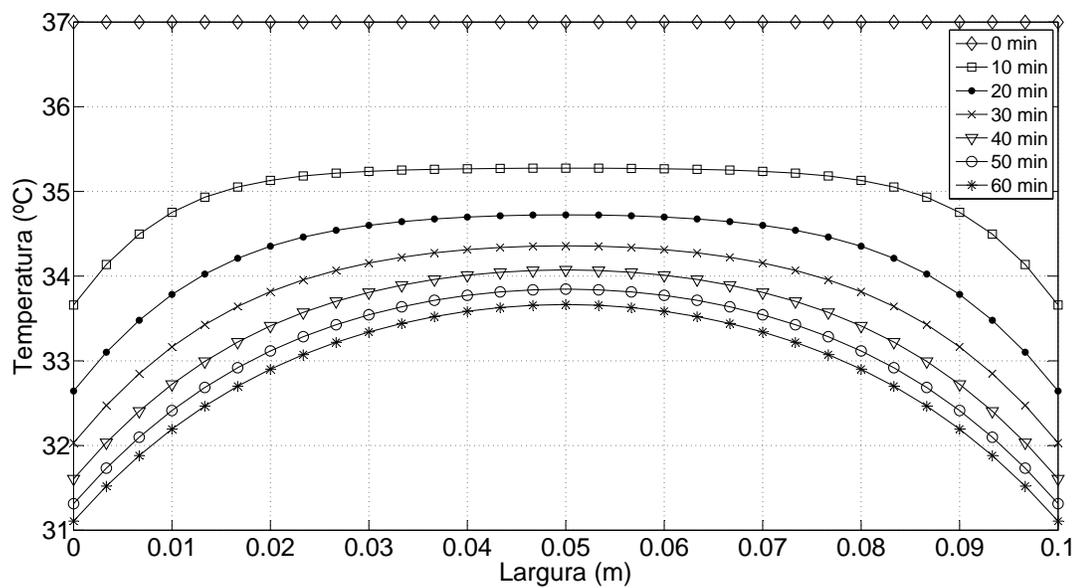


Figura 4.34: Temperaturas na superfície do corpo com o tumor 1 em vários instantes de tempo - Modelo 2D.

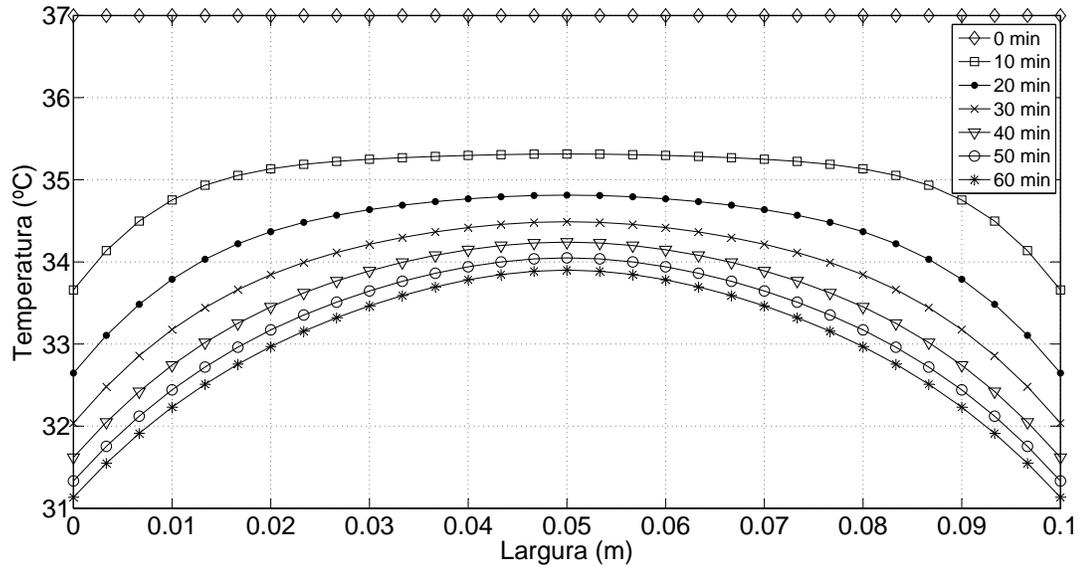


Figura 4.35: Temperaturas na superfície do corpo com o tumor 2 em vários instantes de tempo - Modelo 2D.

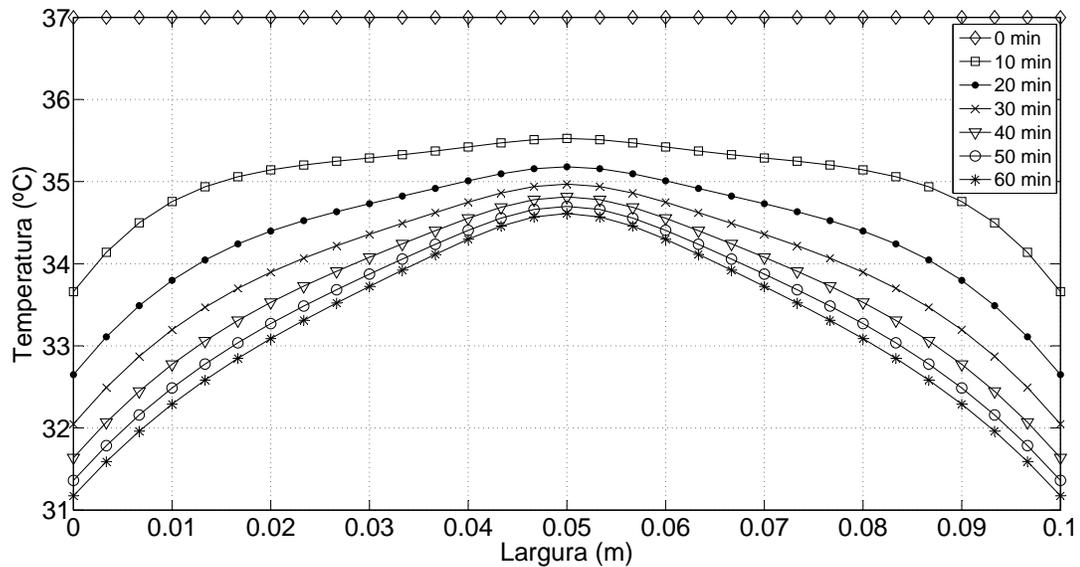


Figura 4.36: Temperaturas na superfície do corpo com o tumor 3 em vários instantes de tempo - Modelo 2D.

Observa-se que à medida que avança-se no tempo, as simulações para um corpo sem tumor, ou com tumor localizado entre 1 e 2 cm, ou 2 e 3 cm, não apresentam nenhuma perturbação significativa na superfície. Mas no caso de um tumor posicionado a 1 cm da

superfície ($y_1 = 3\text{cm}$ e $y_2 = 4\text{cm}$) é possível verificar de forma acentuada uma variação de temperatura na região central. A Tab. 4.7 apresenta como ocorrem as variações de temperaturas na superfície tomando como referência o ponto central em $x = 0,05\text{m}$ e $y = 0,05\text{m}$.

Tabela 4.6: Variação de temperatura na superfície do corpo com um tumor posicionado em $x_1 = 0,045$ e $x_2 = 0,055$, em varios instantes de tempo - Modelo 2D.

Tempo	sem tumor	$y_1 = 1\text{cm}$ e $y_2 = 2\text{cm}$	$y_1 = 2\text{cm}$ e $y_2 = 3\text{cm}$	$y_1 = 3\text{cm}$ e $y_2 = 4\text{cm}$
0 min	0°C	0°C	0°C	0°C
10 min	0°C	0°C	$0,01^\circ\text{C}$	$0,26^\circ\text{C}$
20 min	0°C	0°C	$0,03^\circ\text{C}$	$0,49^\circ\text{C}$
30 min	0°C	0°C	$0,07^\circ\text{C}$	$0,68^\circ\text{C}$
40 min	0°C	0°C	$0,09^\circ\text{C}$	$0,83^\circ\text{C}$
50 min	0°C	0°C	$0,12^\circ\text{C}$	$0,97^\circ\text{C}$
60 min	0°C	0°C	$0,14^\circ\text{C}$	$1,09^\circ\text{C}$

Verifica-se na tabela acima que para um corpo bidimensional com tumor de 1 cm^2 , a 1 cm da superfície, há uma variação de temperatura de aproximadamente $0,5^\circ\text{C}$ após 20 min de simulação, e mais de $1,0^\circ\text{C}$ após 60 min .

4.2.4 Efeito da temperatura na superfície alterando o tamanho do tumor

As Figuras 4.37, 4.38 e 4.39 apresentam as temperaturas na superfície do corpo com um tumor centralizado em $x = 0,05\text{ m}$ e $y = 0,035\text{ m}$, e dimensões de $(0,5\text{cm} \times 0,5\text{cm})$, $(0,75\text{cm} \times 0,75\text{cm})$ e $(1,25\text{cm} \times 1,25\text{cm})$, respectivamente, após simulações em vários instantes de tempo usando o *COMSOL*. Observa-se que o efeito de um tumor de $(0,75\text{cm} \times 0,75\text{cm})$ é suficiente para alterar as temperaturas na superfície do corpo.

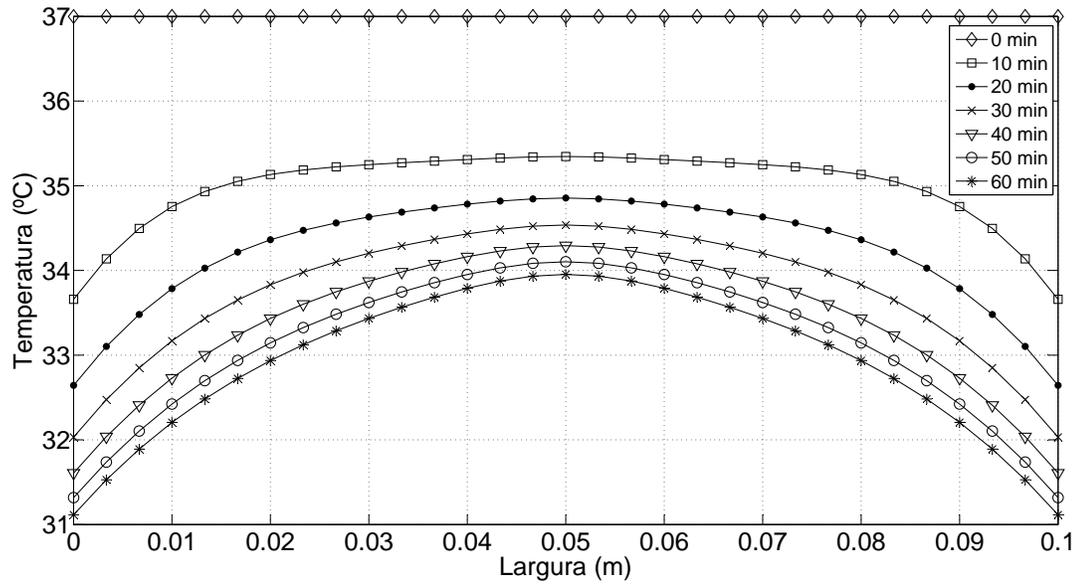


Figura 4.37: Temperaturas na superfície do corpo com um tumor de (0,5cm x 0,5cm), cujo o centro está posicionado em $x=0,05$ m $y=0,035$ m em vários instantes de tempo - Modelo 2D.

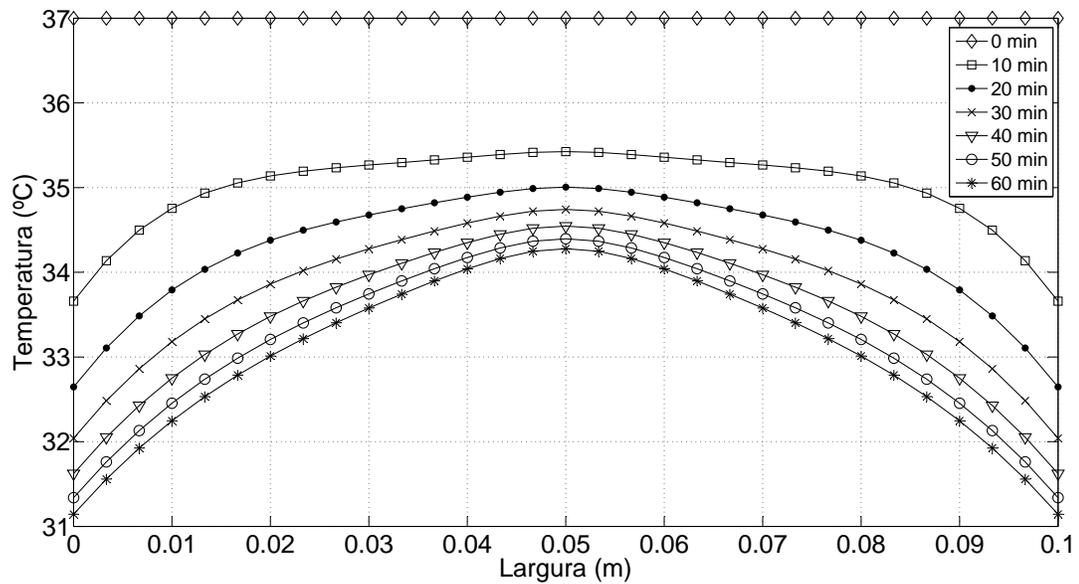


Figura 4.38: Temperaturas na superfície do corpo com um tumor de (0,75cm x 0,75cm), cujo o centro está posicionado em $x=0,05$ m $y=0,035$ m em vários instantes de tempo - Modelo 2D.

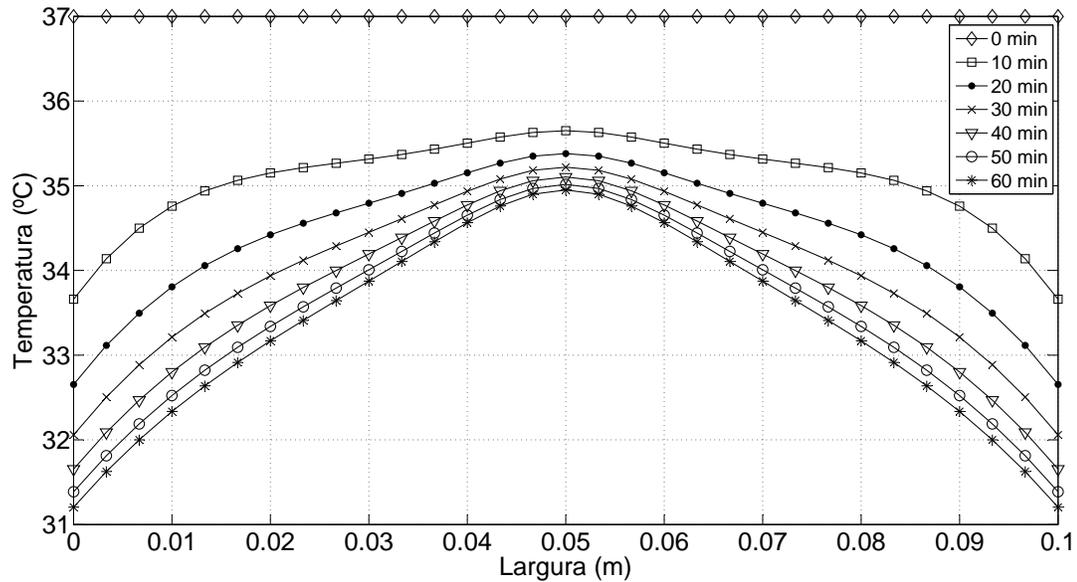


Figura 4.39: Temperaturas na superfície do corpo com um tumor de (1,25cm x 1,25cm), cujo o centro está posicionado em $x=0,05$ m $y=0,035$ m em vários instantes de tempo - Modelo 2D.

A Tabela 4.7 apresenta as variações de temperatura na superfície do corpo, para os três tamanhos de tumores simulados anteriormente centralizados em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m, e ainda usando a simulação feita na subseção anterior do tumor de (1,0cm x 1,0cm) centralizado no mesmo ponto. Percebe-se que para um tumor de (0,5cm x 0,5cm) uma variação de temperatura de quase $0,5^{\circ}C$ é notada apenas após 60 min de simulação, já para as dimensões de (0,75cm x 0,75cm), (1,00cm x 1,00cm) e (1,25cm x 1,25cm), a mesma variação de temperatura acontece após aproximadamente 30 min, 20 min e 10 min, respectivamente.

Tabela 4.7: Variação de temperatura na superfície do corpo possuído por um tumor centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m, em varios instantes de tempo - Modelo 2D.

Tempo (min)	sem tumor	tumor de (0,50cm x 0,50cm)	tumor de (0,75cm x 0,75cm)	tumor de (1,00cm x 1,00cm)	tumor de (1,25cm x 1,25cm)
0	$0^{\circ}C$	$0^{\circ}C$	$0^{\circ}C$	$0^{\circ}C$	$0^{\circ}C$
10	$0^{\circ}C$	$0,08^{\circ}C$	$0,16^{\circ}C$	$0,26^{\circ}C$	$0,39^{\circ}C$
20	$0^{\circ}C$	$0,16^{\circ}C$	$0,31^{\circ}C$	$0,49^{\circ}C$	$0,69^{\circ}C$
30	$0^{\circ}C$	$0,25^{\circ}C$	$0,45^{\circ}C$	$0,68^{\circ}C$	$0,93^{\circ}C$
40	$0^{\circ}C$	$0,31^{\circ}C$	$0,56^{\circ}C$	$0,83^{\circ}C$	$1,12^{\circ}C$
50	$0^{\circ}C$	$0,38^{\circ}C$	$0,66^{\circ}C$	$0,97^{\circ}C$	$1,29^{\circ}C$
60	$0^{\circ}C$	$0,43^{\circ}C$	$0,76^{\circ}C$	$1,09^{\circ}C$	$1,43^{\circ}C$

4.3 Solução Bidimensional - Regime Permanente

4.3.1 Convergência de Malha

As Figuras 4.49 e 4.50 apresentam os resultados em MVF, usando os cortes mostrados anteriormente pela Fig. 4.23, para uma malha 160x80, 200x100 e 240x120, e também usando o *COMSOL* com uma opção de malha 205x108. Considerou-se a malha de 200x100 como a convergente a partir da qual malhas mais refinadas não produzem resultados com diferenças significativas, a Fig. 4.42 apresenta o resíduo encontrado entre a malha 200x100 e a 240x120. Observa-se na Fig. 4.43 uma diferença máxima de temperatura encontrada entre os resultados do MVF e *COMSOL* de aproximadamente $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

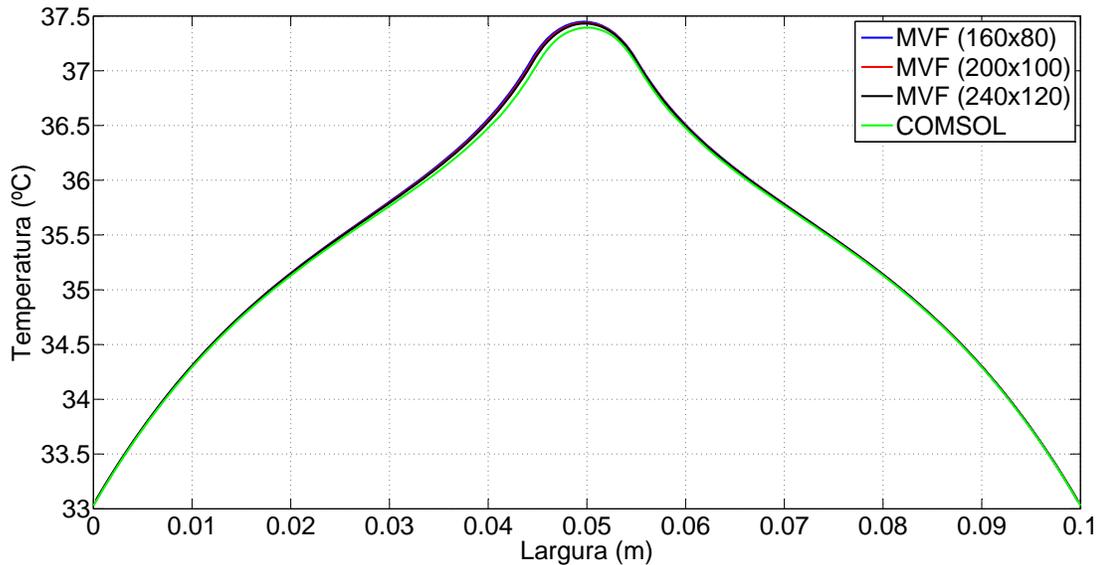


Figura 4.40: Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção x , em $y=0,025\text{m}$ após 600s - Modelo 2D permanente.

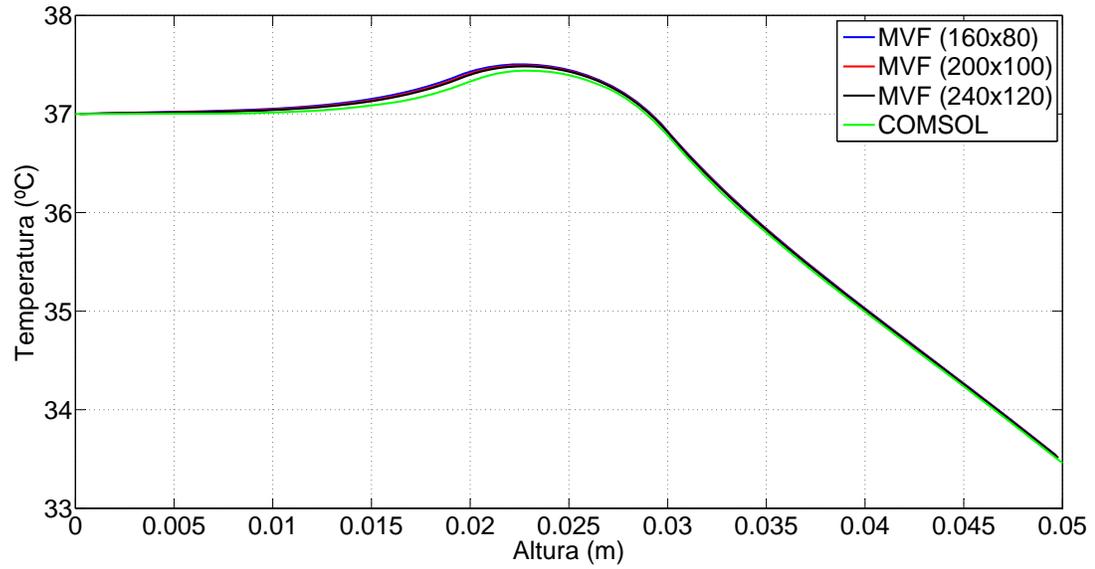
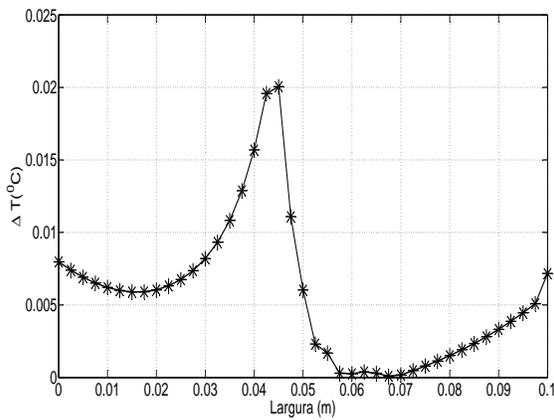
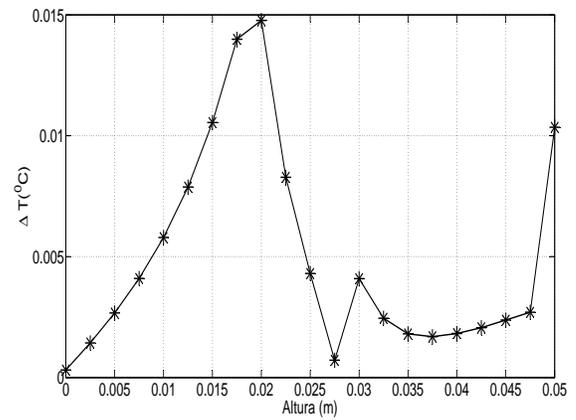


Figura 4.41: Distribuição das temperaturas calculadas com diversas malhas na direção y, em $x=0,05\text{m}$ após 600s - Modelo 2D permanente.



(a) Direção x.



(b) Direção y.

Figura 4.42: Diferença entre as temperaturas das malhas 240x120 e 200x100 em MVF - Modelo 2D permanente.

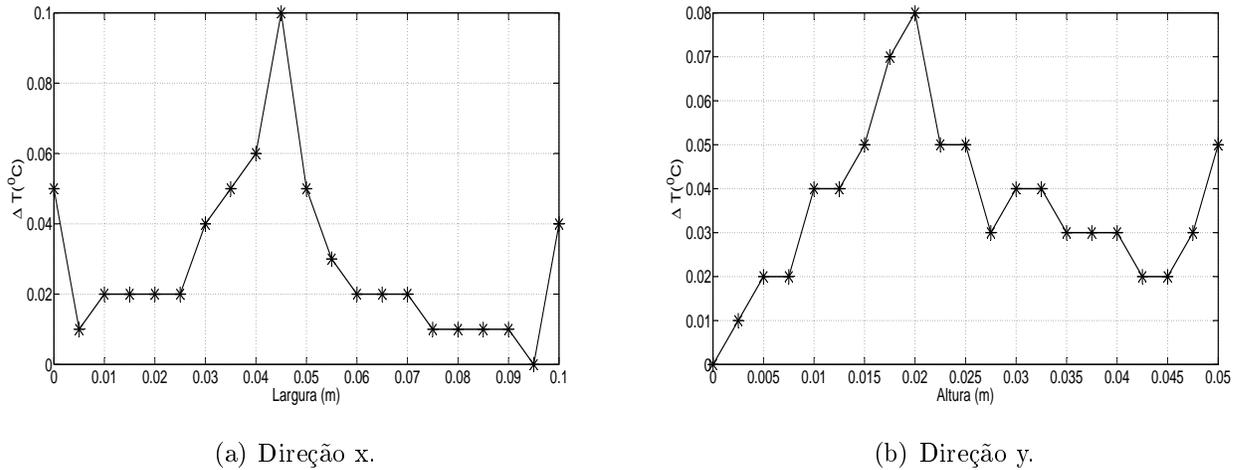


Figura 4.43: Diferença entre as temperaturas da malha 200x100 do MVF e o *COMSOL* - Modelo 2D permanente.

4.3.2 Efeito da temperatura na superfície alterando a posição do tumor

As Figuras 4.44, 4.45, 4.46 e 4.47 apresentam a distribuição de temperaturas usando MVF tanto para o corpo bidimensional sem tumor, como também alterando-se a localização do tumor de acordo com as informações anteriormente mencionadas pela Tab. 4.5, considerando o fenômeno da biotransferência de calor em regime permanente. Observa-se uma perturbação gerada na superfície ($y = H = 0,05$ m) do corpo para as condições presentes a partir do posicionamento do tumor 2 (a 2 cm da superfície), e mais significativamente na presença do tumor 3 (à 1cm da superfície), a Fig. 4.48 apresenta o comportamento das temperaturas na superfície em cada situação, e a Tab. 4.8 mostra as variações de temperatura causadas num ponto central da superfície ($x = 0,05$ m e $y = 0,05$ m).

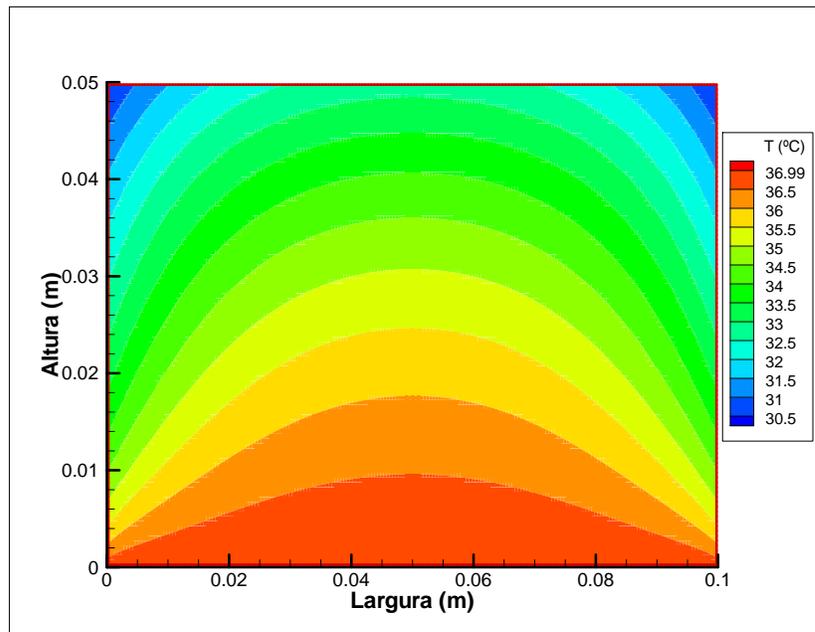


Figura 4.44: Distribuição de temperaturas no domínio sem tumor - Modelo 2D permanente.

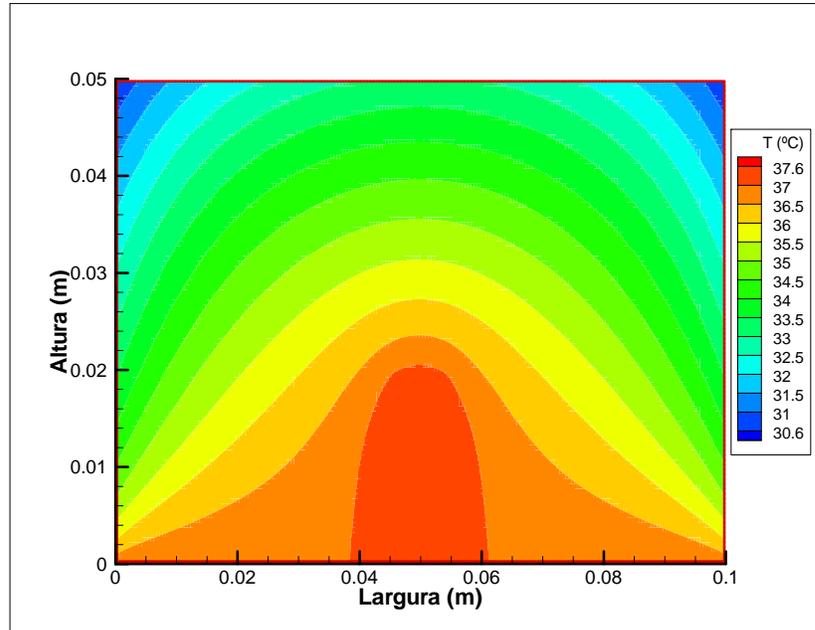


Figura 4.45: Distribuição de temperaturas no domínio com tumor 1 - Modelo 2D permanente.

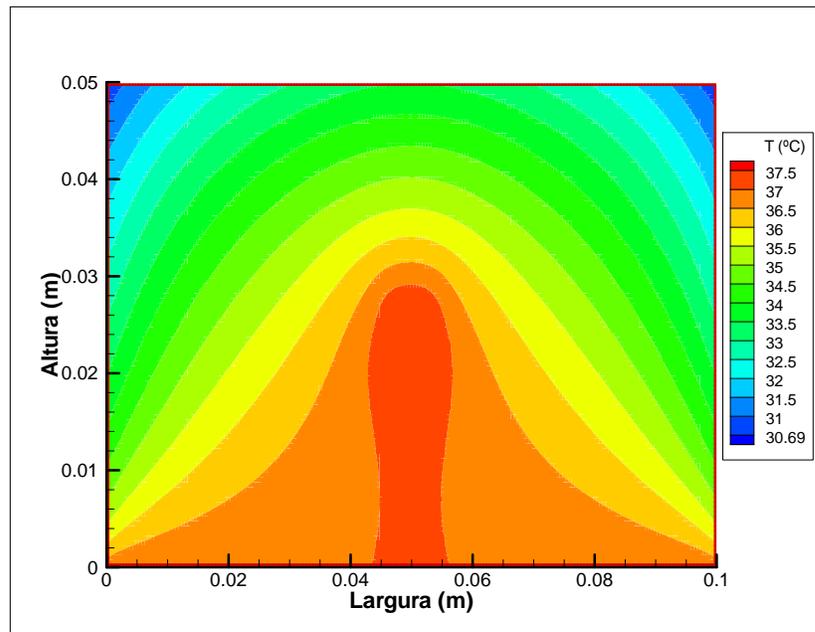


Figura 4.46: Distribuição de temperaturas no domínio com tumor 2 - Modelo 2D permanente.

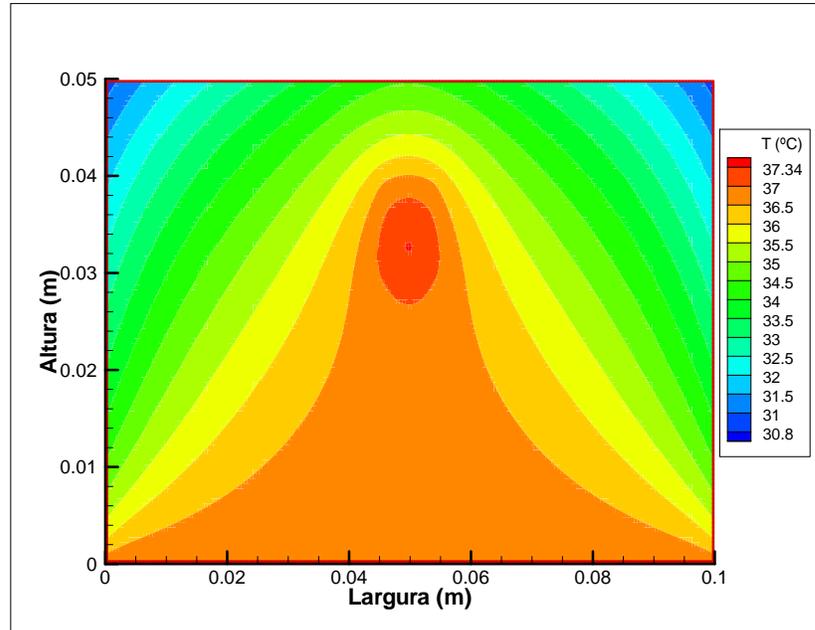


Figura 4.47: Distribuição de temperaturas no domínio com tumor 3 - Modelo 2D permanente.

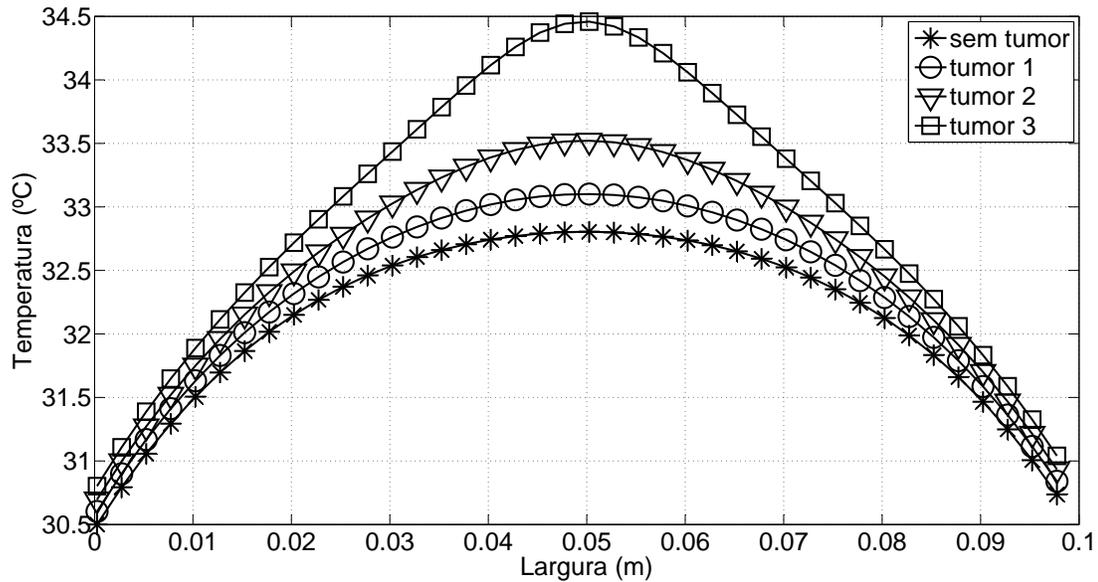


Figura 4.48: Temperaturas na superfície do domínio com um tumor de (1,0cm x 1,0cm) localizado em várias regiões - Modelo 2D permanente.

Tabela 4.8: Variação de temperatura na superfície usando diferentes localizações de tumores - Modelo 2D permanente.

Tumores	Variação de temperatura em $x = 0,05 \text{ m}$ e $y = 0,05 \text{ m}$
Sem tumor	0°C
Tumor 1	$0,30^{\circ}\text{C}$
Tumor 2	$0,72^{\circ}\text{C}$
Tumor 3	$1,66^{\circ}\text{C}$

Observa-se assim que a presença de um possível tumor (geração metabólica anormal) é capaz de produzir um gradiente de temperatura superficial significativo e que possa ser identificado por um sensor de temperatura (infravermelho).

4.3.3 Efeito da temperatura na superfície alterando o tamanho do tumor

As Figuras 4.49, 4.50 e 4.51 apresentam a distribuição de temperaturas para um tumor com três dimensões diferentes, sendo respectivamente (0,5cm x 0,5cm), (0,75cm x 0,75cm) e (1,25cm x 1,25cm), centralizado em $x = 0,05 \text{ m}$ e $y = 0,035 \text{ m}$ após simulações através do

MVF. Verifica-se novamente, assim como no modelo 2D transiente, o aumento significativo da perturbação na temperatura da superfície à medida que o tumor cresce. A Fig. 4.52 apresenta o comportamento das temperaturas na superfície ($y = 0,05$ m) em cada situação, e a Tab. 4.9 mostra as variações de temperatura causadas num ponto central da superfície ($x = 0,05$ m e $y = 0,05$ m).

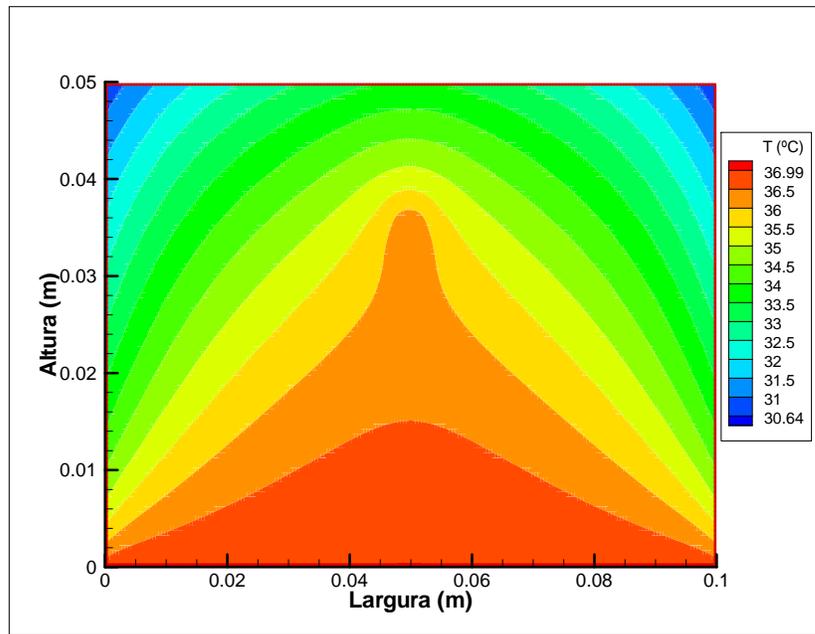


Figura 4.49: Distribuição de temperaturas no domínio com tumor de (0,5 cm x 0,5 cm) centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.

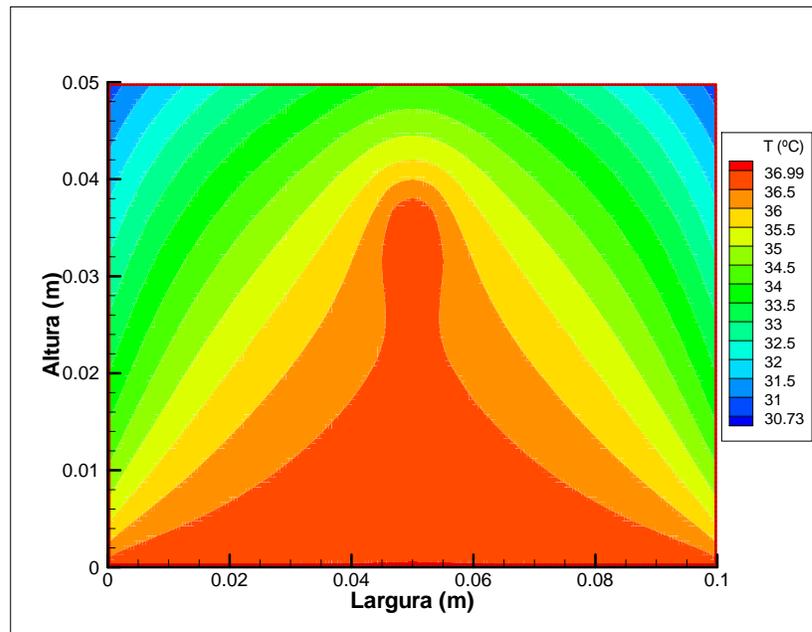


Figura 4.50: Distribuição de temperaturas no domínio com tumor de (0,75 cm x 0,75 cm) centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.

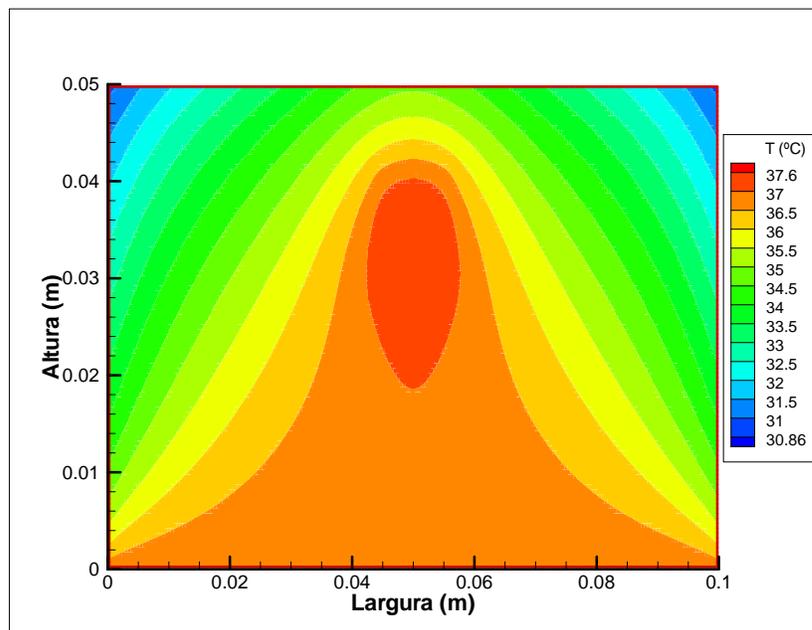


Figura 4.51: Distribuição de temperaturas no domínio com tumor de (1,0 cm x 1,0 cm) centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.

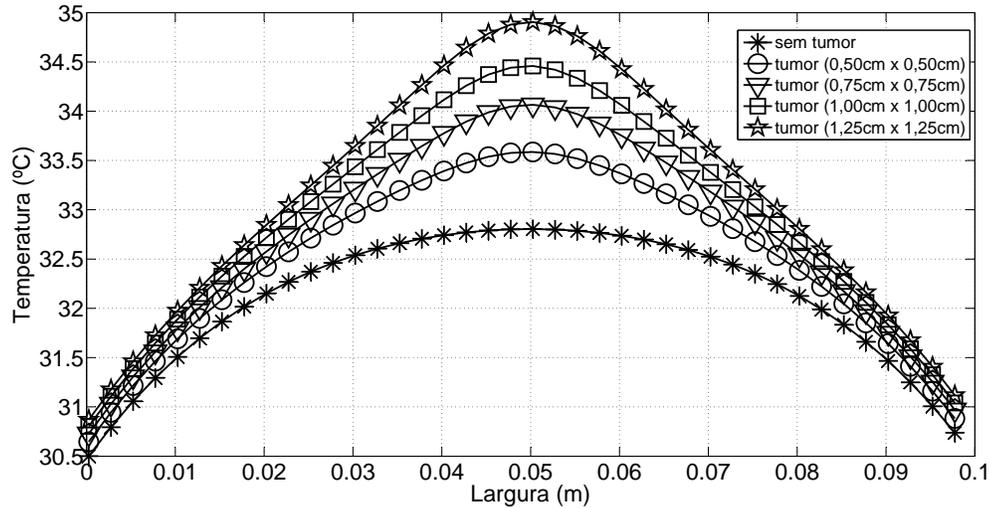


Figura 4.52: Temperaturas na superfície do domínio com um tumor de várias dimensões centralizado em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.

Tabela 4.9: Variação de temperatura na superfície usando diferentes dimensões de tumores centralizados em $x = 0,05$ m e $y = 0,035$ m - Modelo 2D permanente.

Tumores	Variação de temperatura
Sem tumor	$0^{\circ}C$
(0,50 cm x 0,50 cm)	$0,79^{\circ}C$
(0,75 cm x 0,75 cm)	$1,25^{\circ}C$
(1,00 cm x 1,00 cm)	$1,66^{\circ}C$
(1,25 cm x 1,25 cm)	$2,11^{\circ}C$

4.4 Solução Tridimensional - Regime Transiente

4.4.1 Coordenadas Retangulares

Como mencionado, obteve-se a solução do problema tridimensional da biotransferência de calor usando-se MVF e *COMSOL*. A Fig. 4.53 apresenta o modelo esquemático usado, onde $a = b = 0,01$ m e $c = 0,05$ m, e o tumor de (1,0 cm x 1,0 cm x 1,0 cm) situado no centro do cubo maior. A Tab. 4.10 mostra os parâmetros auxiliares para a solução do problema. Nota-se, nesta figura, três cortes, um em cada eixo, de uma superfície à outra, passando pelo centro do tumor.

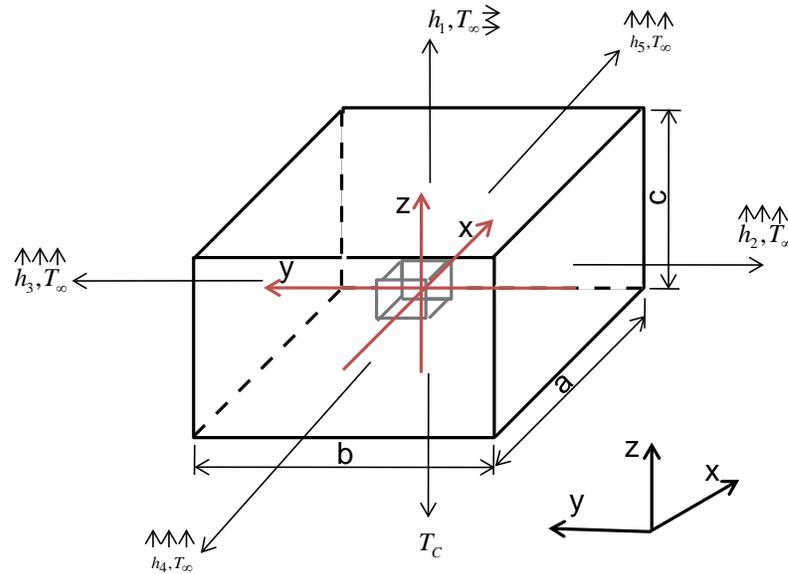


Figura 4.53: Modelo esquemático 3D.

Tabela 4.10: Propriedades e parâmetros físicos e geométricos para o problema 3D em coordenadas retangulares.

Parâmetros	Símbolo	Valores
Temperatura inicial	T_0	$37^\circ C$
Temperatura prescrita	T_c	$37^\circ C$
Profundidade	a	0,1 m
Largura	b	0,1 m
Altura	c	0,05 m
Volume do tumor		(1,0 cm x 1,0 cm x 1,0 cm)
Posição inicial do tumor em x	x_1	0,045 m
Posição final do tumor em x	x_2	0,055 m
Posição inicial do tumor em y	y_1	0,045 m
Posição final do tumor em y	y_2	0,055 m
Posição inicial do tumor em z	z_1	0,02 m
Posição final do tumor em z	z_2	0,03 m

4.4.1.1 Convergência de Malha

As Figuras 4.54, 4.55 e 4.56 apresentam os resultados para uma simulação de 60s usando o MVF para as malhas $300 \times 300 \times 150$, $400 \times 400 \times 200$ e $500 \times 500 \times 250$, e também o *COMSOL*

com uma malha $379 \times 370 \times 185$. Considerou-se a malha de $400 \times 400 \times 200$ como a convergente a partir da qual malhas mais refinadas não produzem resultados diferentes (ver Fig. 4.57). Nota-se uma diferença de temperatura máxima entre os resultados do MVF e *COMSOL* de aproximadamente $0,03^\circ\text{C}$, como se observa na Fig. 4.58.

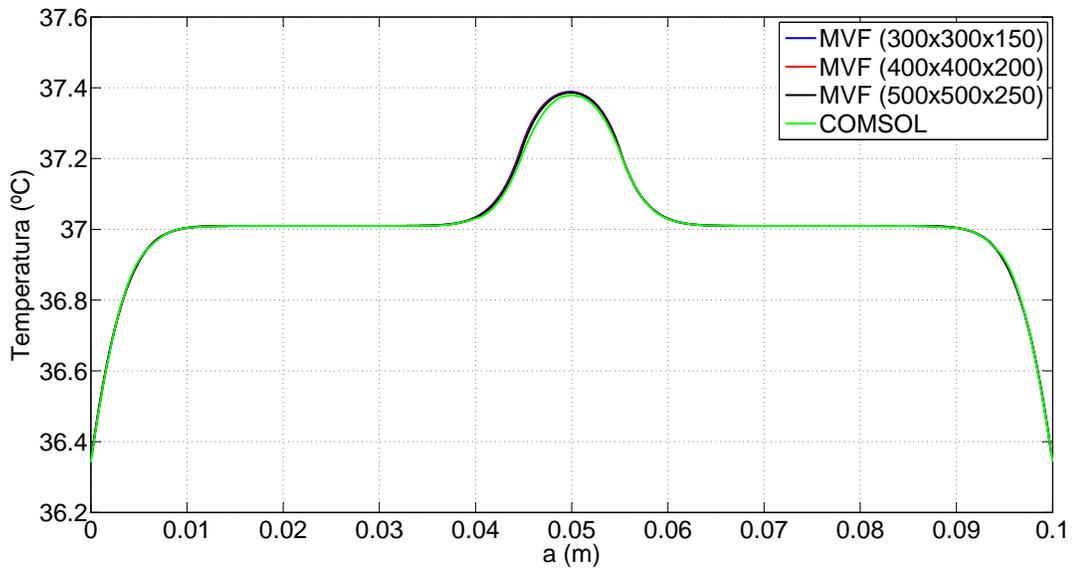


Figura 4.54: Evolução das temperaturas na direção x após 60s - Modelo 3D.

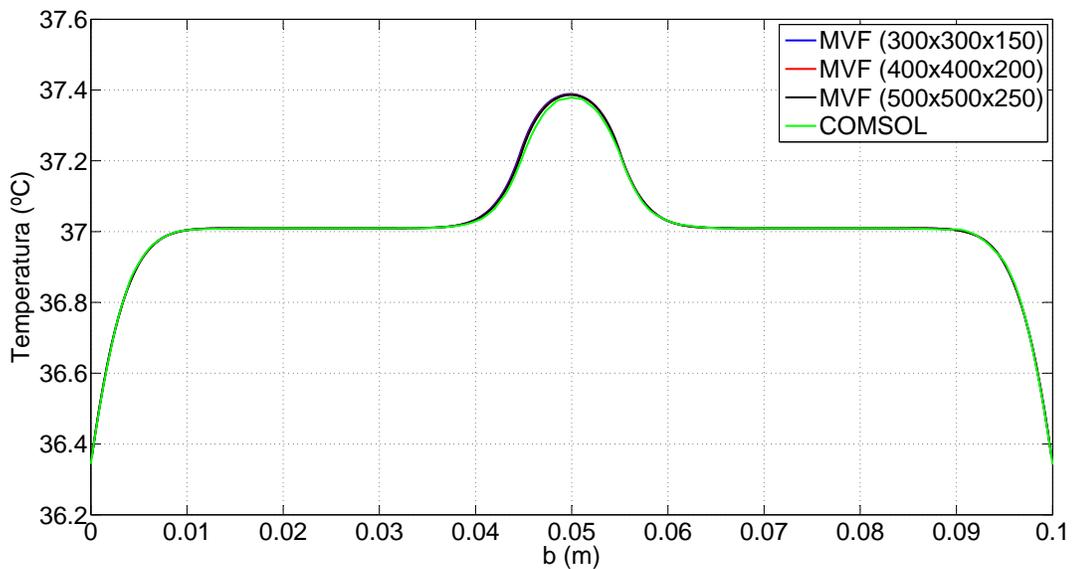


Figura 4.55: Evolução das temperaturas na direção y após 60s - Modelo 3D.

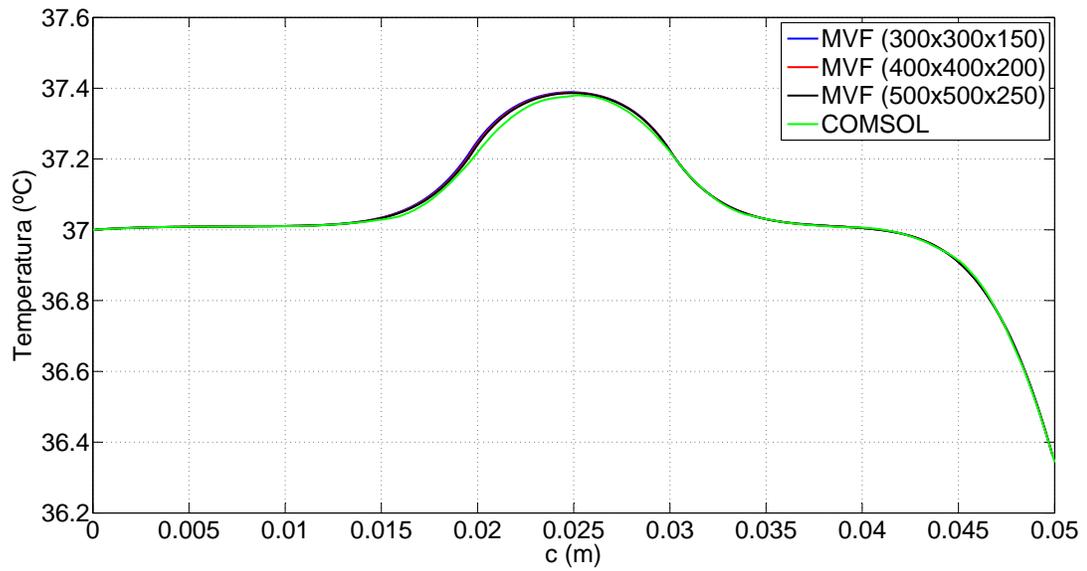
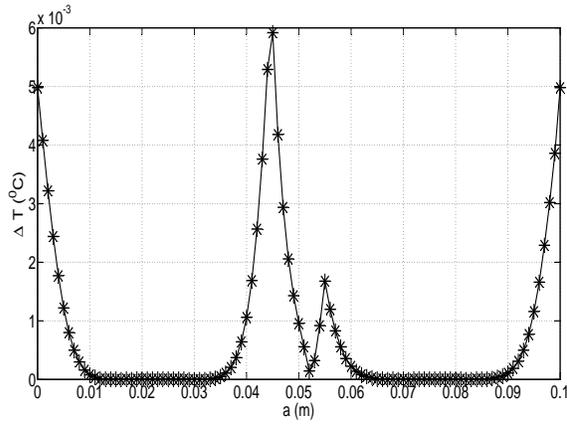
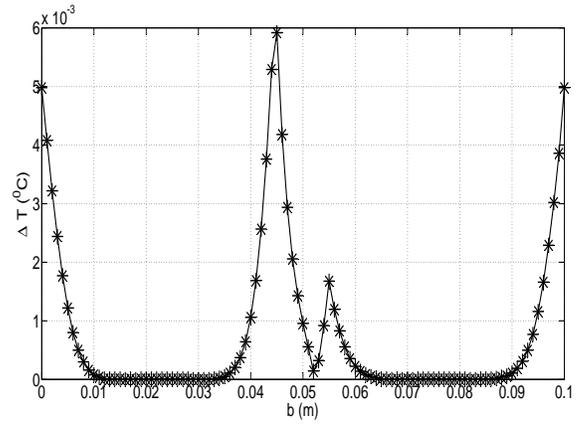


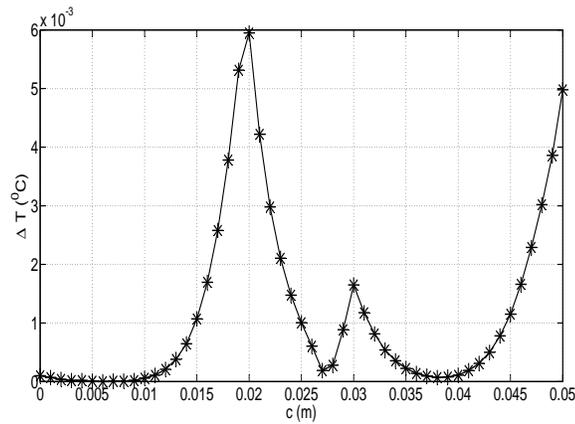
Figura 4.56: Evolução das temperaturas na direção z após 60s - Modelo 3D.



(a) Direção x.



(b) Direção y.



(c) Direção z.

Figura 4.57: Diferença entre as temperaturas das malhas $500 \times 500 \times 250$ e $400 \times 400 \times 200$ do MVF - Modelo 3D.

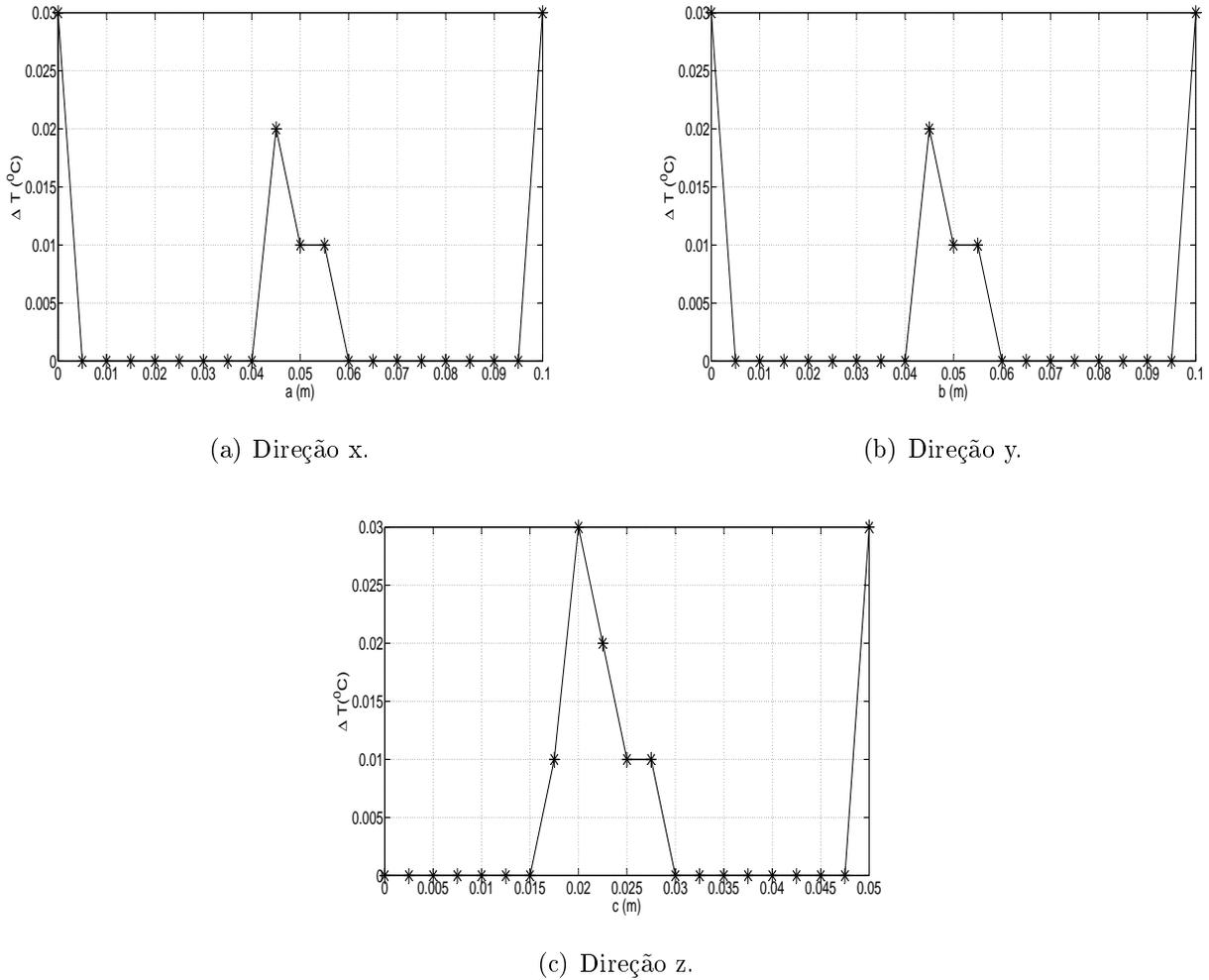


Figura 4.58: Diferença entre as temperaturas da malha 400x400x200 do MVF e o *COMSOL* - Modelo 3D.

4.4.1.2 Verificação com a solução analítica 1D

Assim como foi realizada para o problema 2D transiente, a verificação física da solução tridimensional em MVF também é feita reduzindo-se o problema, sob certas condições, a um problema unidimensional. Observa-se na Fig. 4.53 que se h_2 , h_3 , h_4 , e h_5 forem muito pequenos e as dimensões em x e y do tumor forem as mesmas do corpo, o problema 3D adquire características unidimensionais uma vez que o calor existente no sistema será forçado a ser conduzido apenas na direção z, como mostrado na Fig. 4.59. A Fig. 4.60 apresenta uma comparação entre os resultados analítico 1D e numérico 3D usando perfusão sanguínea constante em todo o domínio igual a $0,00018 \text{ s}^{-1}$, onde a diferença de temperatura máxima encontrada foi de $0,004^\circ\text{C}$, como mostrado na Fig. 4.61.

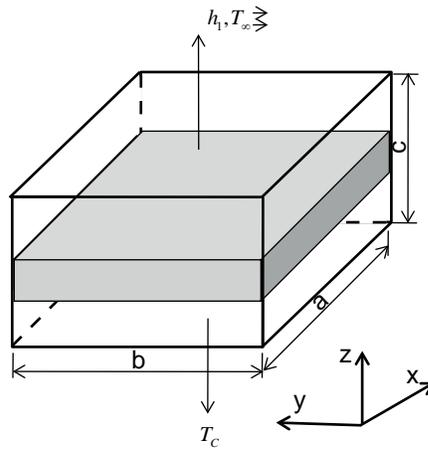


Figura 4.59: Redução do problema tridimensional para um caso 1D na direção z .

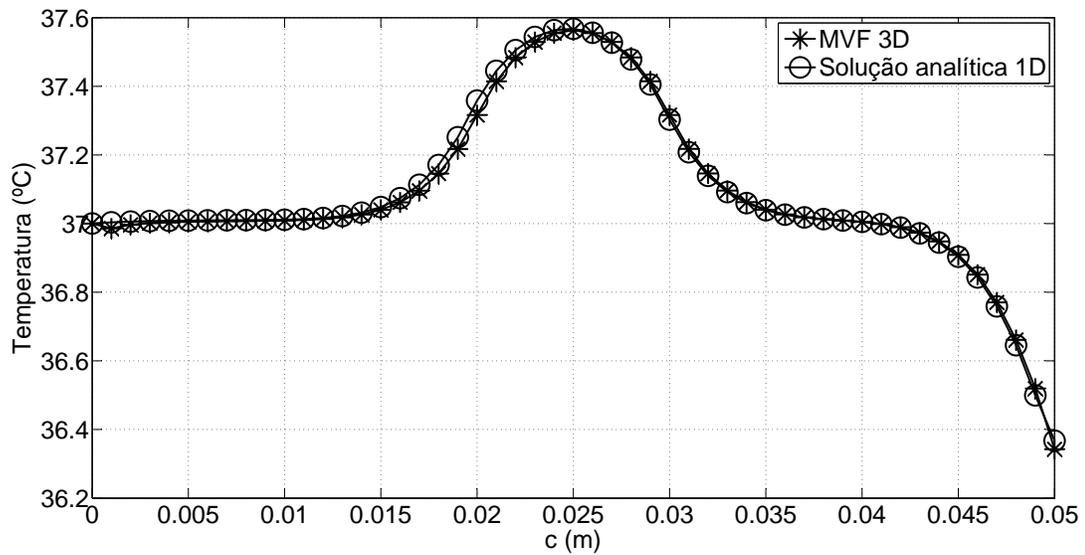


Figura 4.60: Verificação intrínseca entre as solução 1D analítico e MVF 3D na direção z , usando $h_2, h_3, h_4, e h_5 = 0,0001[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$.

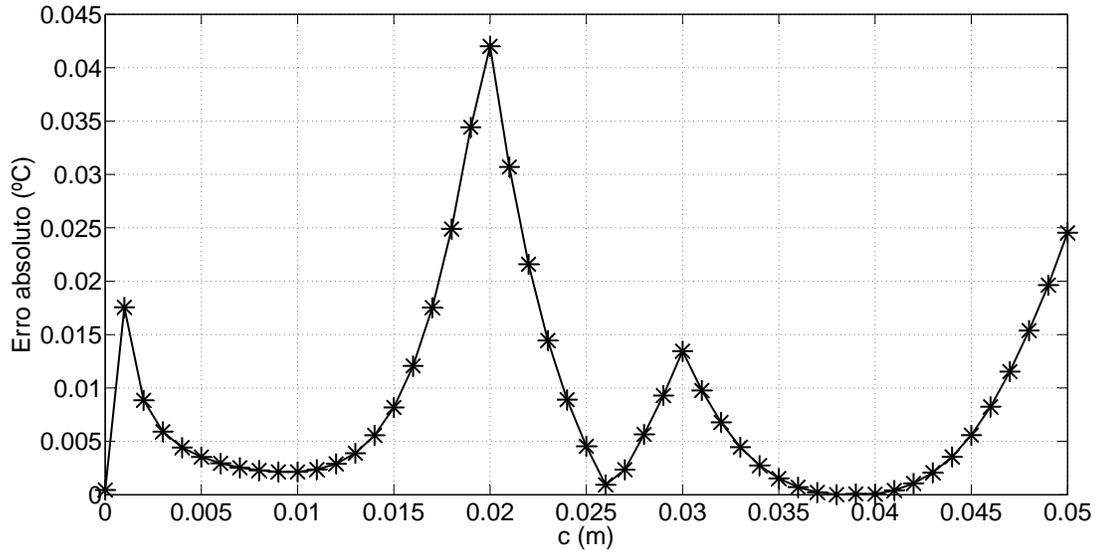


Figura 4.61: Erro absoluto entre as temperatura das solução 1D analítico e MVF 3D na direção z , usando h_2, h_3, h_4 , e $h_5 = 0,0001[W/m^2K]$.

Uma vez que o estudo precedente indica uma sensibilidade razoável para a detecção da localização, tamanho e intensidade de um tumor, o passo seguinte é a simulação de corpos que possuam uma geometria o mais próximo possível de uma mama. Nesse sentido, uma semi-esfera foi analisada. Nesse caso, como o método dos volumes finitos implementado em *MATLAB* se mostrou com alto custo computacional, somente o *COMSOL* foi usado. A escolha do *COMSOL* também se deve à sua flexibilidade em trabalhar com geometrias irregulares ou mesmo de sua capacidade de importar geometrias pré-definidas, como por exemplo, uma imagem digitalizada de um scanner 3D, o que abre a possibilidade de se modelar uma mama digitalizada.

4.4.2 Coordenadas Esféricas

Como mencionado, simula-se usando o *COMSOL* a biotransferência de calor envolvendo um modelo biotérmico semi-esférico de raio igual a 5 cm com a presença de tumor esférico de raio igual a 1 cm, como mostrado na Fig. 4.62. As condições de contorno, neste caso, refletem de forma mais aproximada as condições reais de uma mama, ou seja, considera-se que a superfície interna esteja a uma temperatura prescrita (T_c), enquanto a externa encontra-se exposta a um meio convectivo.

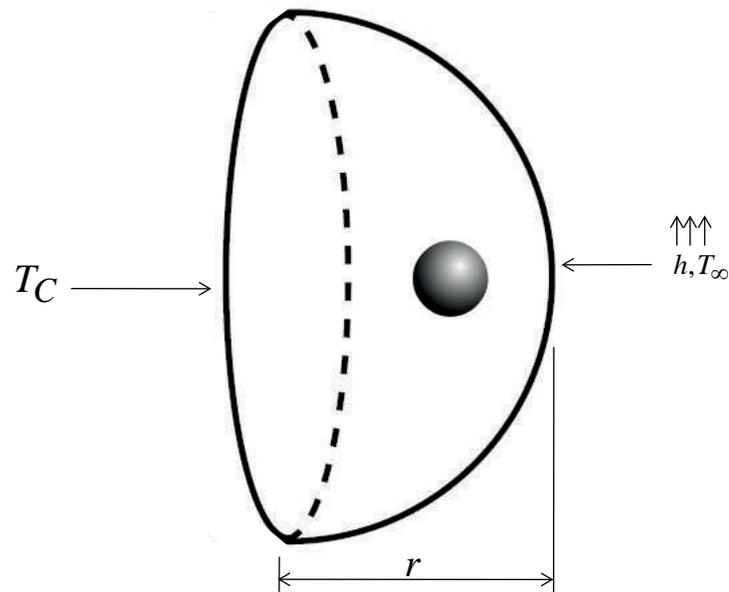


Figura 4.62: Geometria semi-esférica - Modelo 3D.

Analisa-se aqui dois casos distintos para o fenômeno da transferência de calor em tecidos vivos, na tentativa de buscar métodos que possam aumentar a perturbação das temperaturas na superfície provocada pela presença de um tumor, facilitando a detecção de alguma anomalia por um sensor de temperatura (infravermelho). O primeiro caso usará todas as propriedades mencionadas no início do capítulo anterior retiradas de Gautherie (1980), e ainda $T_0 = 37^\circ C$, $T_c = 37^\circ C$ e $T_\infty = 20^\circ C$ e $h = 5 \frac{W}{m^2 K}$. No segundo caso, alteram-se apenas a temperatura inicial do corpo T_0 para $15^\circ C$, e a temperatura ambiente será considerada igual a $30^\circ C$. A Fig. 4.63 ilustra um corte na superfície externa do corpo, o qual será usado para demonstração dos resultados a seguir.

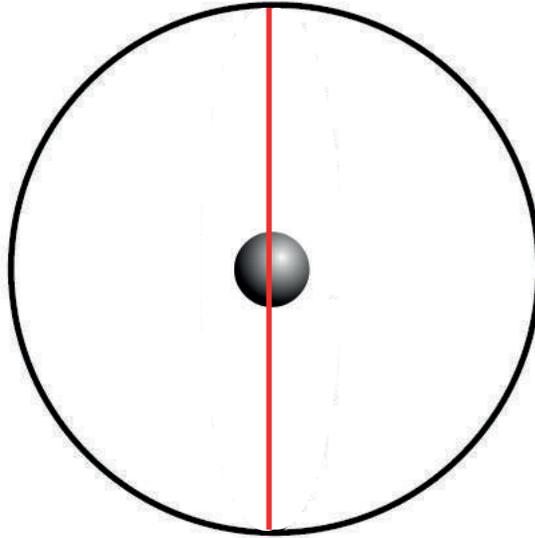


Figura 4.63: Corte na superfície externa da semi-esfera - Modelo 3D.

4.4.2.1 Caso 1

As Figuras 4.64, 4.65 e 4.66 apresentam a distribuição de temperaturas respectivamente para uma mama sem tumor, com tumor localizado a 2 cm e 1 cm da superfície externa, para os tempos de 0s, 120s, 240s, 360s, 480s e 600s. Nota-se uma variação de temperatura na superfície muito pequena quando comparada a simulação de uma mama sem tumor e com tumor a 2cm, já para o caso onde sua localização está a 1cm, a perturbação causada na superfície chega a 0,26 °C.

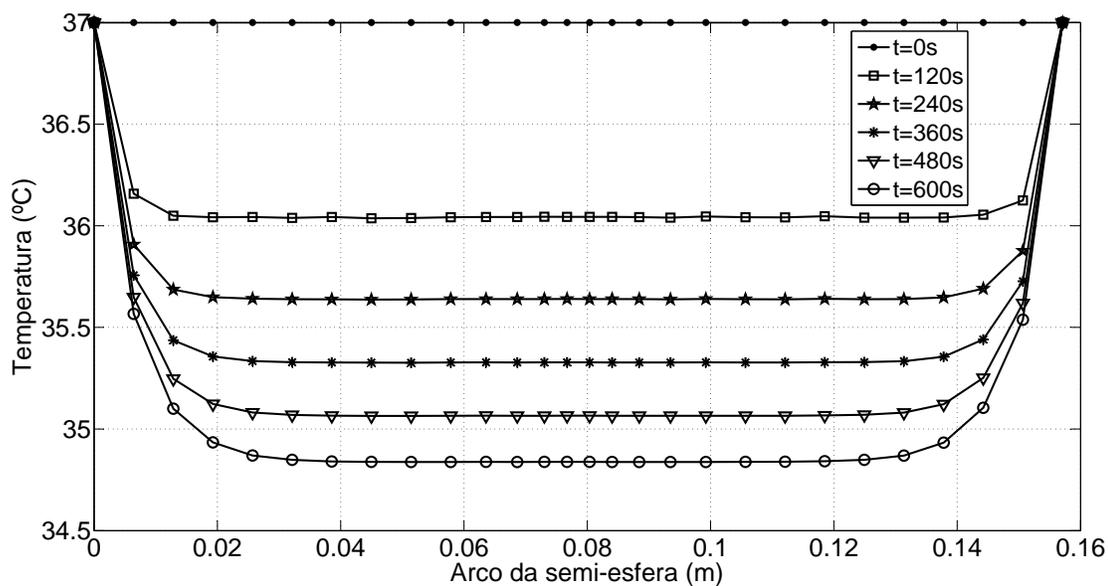


Figura 4.64: Temperatura na superfície da mama sem tumor para o caso 1 - Modelo 3D.

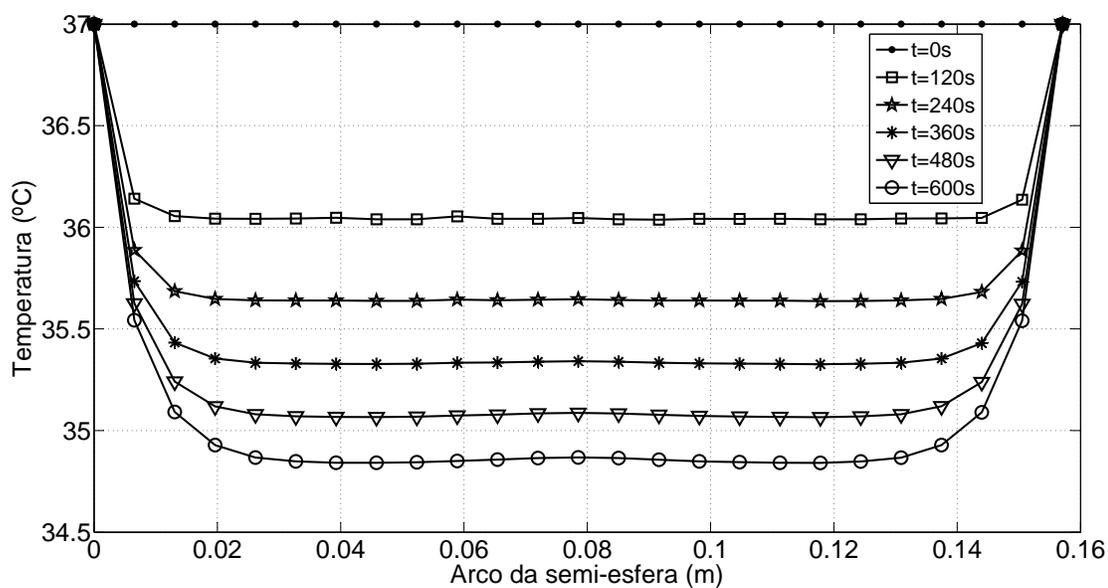


Figura 4.65: Temperatura na superfície da mama com tumor a 2 cm para o caso 1 - Modelo 3D.

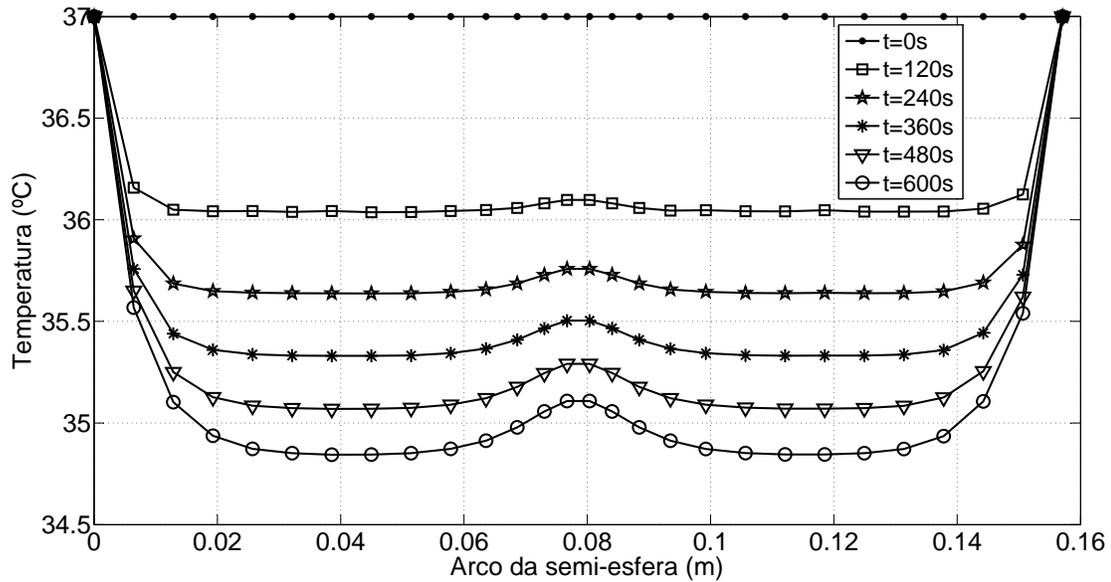


Figura 4.66: Temperatura na superfície da mama com tumor a 1 cm para o caso 1 - Modelo 3D.

4.4.2.2 Caso 2

Uma alternativa para provocar uma perturbação ainda maior nas temperaturas da superfície da mama seria mudar algumas condições do problema, $T_0 = 15^\circ C$ e $T_\infty = 30^\circ C$. As Figuras 4.67, 4.68 e 4.69 apresentam a distribuição de temperaturas para uma mama sem tumor, com tumor localizado à 2 cm e 1 cm da superfície externa, para os tempos de 0s, 120s, 240s, 360s, 480s e 600s. Nota-se da mesma forma do caso anterior, uma variação de temperatura na superfície muito pequena quando comparada a simulação de uma mama sem tumor e com tumor à 2cm. Já para o caso onde sua localização está à 1cm, a perturbação causada na superfície chega a $2,93^\circ C$.

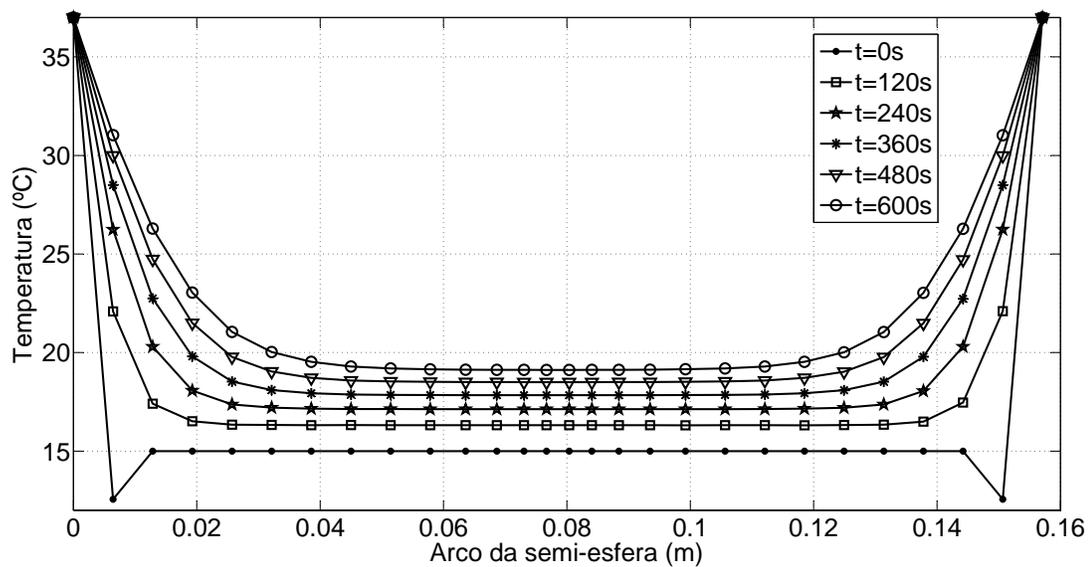


Figura 4.67: Temperatura na superfície da mama sem tumor para o caso 2 - Modelo 3D.

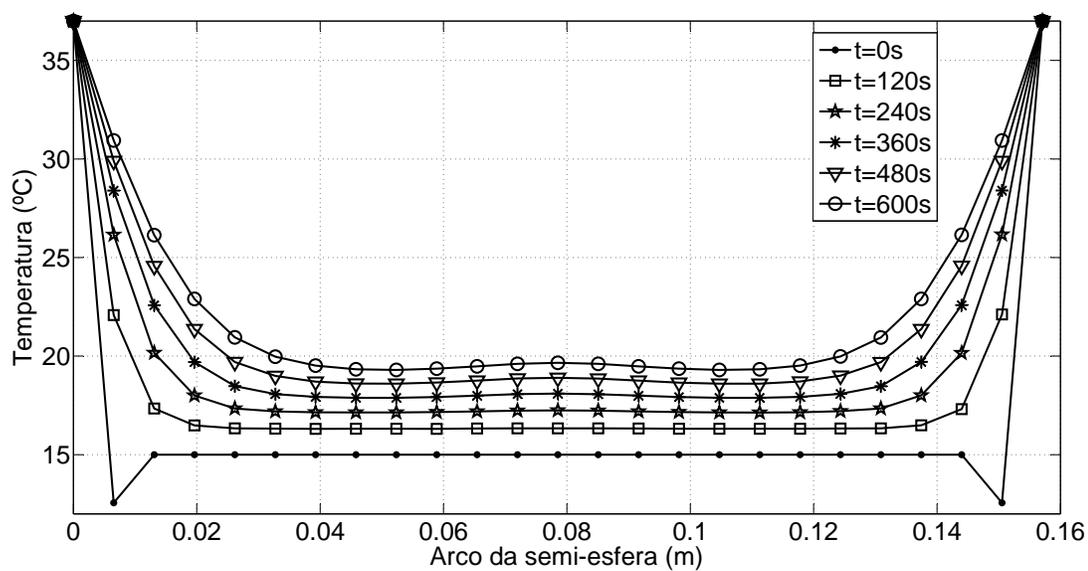


Figura 4.68: Temperatura na superfície da semi-esfera com tumor a 2 cm para o caso 2 - Modelo 3D.

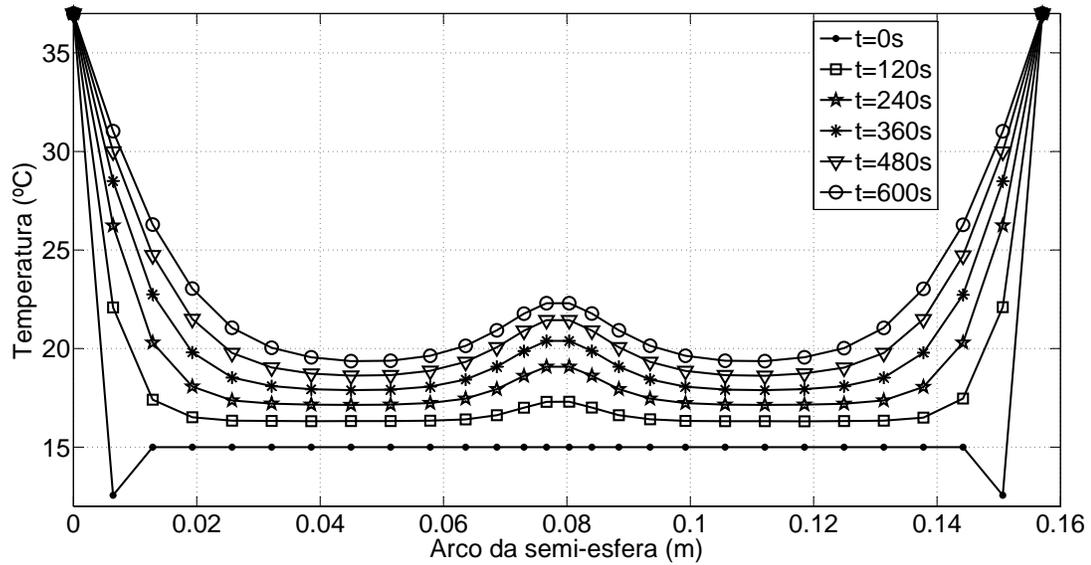


Figura 4.69: Temperatura na superfície da semi-esfera com tumor a 1 cm para o caso 2 - Modelo 3D.

As Tabelas 4.11 e 4.12 apresentam as variações máximas de temperatura existentes na superfície externa da mama com um tumor à 2 cm e 1 cm dessa superfície. Verifica-se que para um tumor à 2cm da superfície, quando usou-se as condições do caso 1, não pôde-se notar nenhuma variação de temperatura significativa, ao contrário do caso 2, que nota-se uma pequena mudança de temperatura $0,36\text{ }^{\circ}\text{C}$ na superfície após 600s de simulação. Na inserção de um tumor à 1 cm da superfície, usando-se o caso 1, é possível perceber uma pequena variação de temperatura após 600s, porém através do caso 2, em apenas 120s de simulação uma mudança de temperatura de quase $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ é provocada na superfície da mama.

Tabela 4.11: Variação máxima das temperaturas superficiais da mama com um tumor localizado à 2 cm da superfície.

Tempo (s)	caso 1 $\Delta T(^{\circ}\text{C})$	caso 2 $\Delta T(^{\circ}\text{C})$
0	0	0
120	0	0,03
240	0,01	0,11
360	0,01	0,22
480	0,02	0,30
600	0,03	0,36

Tabela 4.12: Variação máxima das temperaturas superficiais da mama com um tumor localizado à 1 cm da superfície.

Tempo (s)	caso 1 $\Delta T(^{\circ}C)$	caso 2 $\Delta T(^{\circ}C)$
0	0	0
120	0,06	0,96
240	0,12	1,93
360	0,17	2,47
480	0,22	2,79
600	0,27	2,92

Observa-se que existem possibilidades de provocar uma variação de temperatura superficial de uma mama com tumor, como por exemplo, resfriando-se o corpo à uma baixa temperatura e/ou expondo-o à um meio com temperatura mais elevada e/ou também colocando-o num meio mais convectivo, causando dessa forma um maior aquecimento na superfície da mama naquela direção onde um possível tumor está localizado. Isso é fundamental para que em trabalhos futuros feitos experimentalmente, seja de fato possível perceber essas alterações na superfície do corpo.

A seguir, serão apresentadas técnicas de problemas inversos visando a estimativa do perfil da geração de calor metabólico tumoral.

Capítulo 5

Uso de Soluções Analíticas em Problemas Inversos aplicados a equação da biotransferência de calor

Como já mencionado, uma das motivações deste trabalho refere-se ao desenvolvimento de técnicas de problemas inversos voltados à biotransferência de calor em tecidos vivos. Neste capítulo, serão usados dois métodos para as estimativas da localização e intensidade da geração de calor metabólico presente no tumor para o caso unidimensional. As propriedades usadas para a execução dos problemas inversos serão as mesmas do início do capítulo anterior, retirados do trabalho de Gautherie (1980), onde será considerado $T_0 = 37^\circ C$, $T_c = 37^\circ C$, e o comprimento do corpo (mama) igual à 6 cm. Uma observação importante, é que por serem originados da solução analítica deste trabalho, os métodos para o problema inverso são limitados ao uso de perfusão sanguínea constante ao longo do domínio do corpo ($w_s = 0,00018 \text{ s}^{-1}$).

5.1 Abordagem do problema direto: estimativa do perfil da geração de calor metabólico presente no tumor de um corpo

Observa-se que o modelo analítico 1D abordado no capítulo 3 todas as integrais de geração de calor dependem dos valores de pelo menos uma posição do tumor (a ou b). Assim, para uma maior generalidade e aplicação a Fig. 5.1 apresenta o modelo unidimensional usado para a resolução do problema inverso proposto neste capítulo. Nesse sentido, admite-se que

o domínio de 0 à L sofre o efeito da geração metabólica (Q_{m1}), que diz respeito ao corpo saudável (sem tumor) e que existe uma geração de calor referente ao metabolismo na região de **a** até **b** do tumor (Q_m).

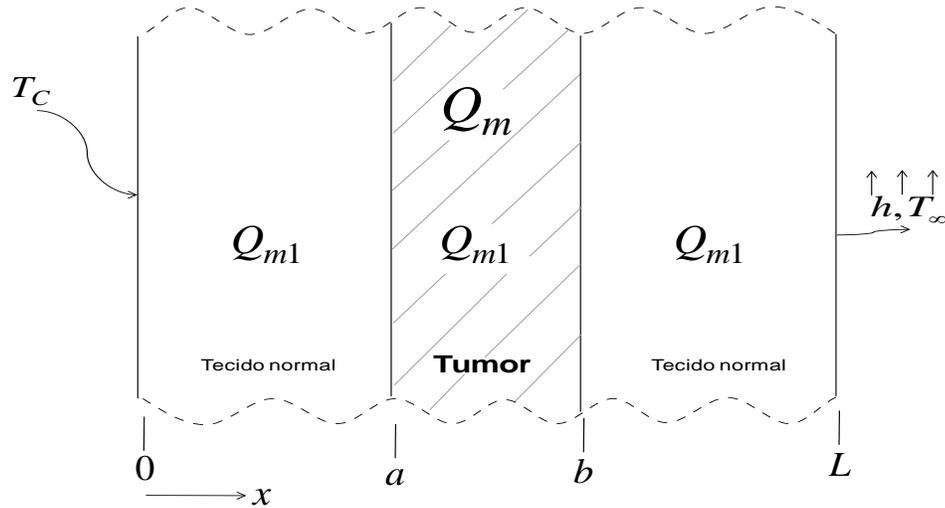


Figura 5.1: Modelo biotérmico 1D para o problema inverso.

Observa-se ainda que para compensar a dupla existência de gerações de calor metabólicos na região [a:b], para a solução integral referente à região tumoral, usa-se Q_{m2} que será a diferença entre as duas gerações Q_m e Q_{m1} . Isso é necessário pois também haverá uma integral de geração englobando todo o domínio usando-se o valor de Q_{m1} .

$$Q_{m2} = Q_m - Q_{m1} \quad (5.1)$$

Para a solução deste problema direto será novamente usado o método das funções de Green. Lembrando que os valores das gerações de calor usados dentro das integrais são dados por:

$$Q'_{m1} = Q_{m1} + w\rho_s c_s (T_a - T_{\infty}) \quad (5.2a)$$

$$Q'_{m2} = Q_{m2} + w\rho_s c_s (T_a - T_{\infty}) \quad (5.2b)$$

A solução da equação de Pennes para o modelo biotérmico (Fig. 5.1), usando o método

das funções de Green, é dada por:

$$\begin{aligned}
W(x, t) &= \int_{x'=0}^L Gx_{13}(x, t|x', t - \tau)|_{\tau=0} W(x', 0) dx' \\
&+ \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L Gx_{13}(x, t|x', t - \tau) Q'_{m1} e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\
&+ \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b Gx_{13}(x, t|x', t - \tau) Q'_{m2} e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\
&+ \alpha \int_{\tau=0}^t W(0, t) \frac{\partial Gx_{13}(x, t|x', t - \tau)}{\partial x'} |_{x'=0} d\tau
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Nota-se que apenas o terceiro termo que representa a geração de calor do tumor é dependente da localização **a** e **b**.

A solução geral da Eq. 5.3 pode ser escrita por:

$$W(x, t) = W_1(x, t) + W_2(x, t) + W_3(x, t) + W_4(x, t) \tag{5.4}$$

Aplicando-se as definições dadas pelas Eqs. 3.4 e 3.7, obtém-se

$$T(x, t) = (W_1(x, t) + W_2(x, t) + W_3(x, t) + W_4(x, t)) e^{-m^2 \alpha t} + T_\infty \tag{5.5}$$

Assim, usando o mesmo procedimento do capítulo 3, obtém-se

$$\begin{aligned}
W_1(x, t) &= \int_{x'=0}^L Gx_{13}(x, t|x', t - \tau)|_{\tau=0} W(x, 0) dx' \\
&= \int_{x'=0}^L \frac{2(T_0 - T_\infty)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin(\frac{\beta_n x}{L}) \sin(\frac{\beta_n x'}{L})}{\beta_n^2 + B^2 + B} dx' \\
&= -2(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin(\frac{\beta_n x}{L}) [\cos(\beta_n) - 1]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B)}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
W_2(x, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L Gx_{13}(x, t|x', t - \tau) Q'_{m1} e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\
&= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin(\frac{\beta_n x}{L}) \sin(\frac{\beta_n x'}{L})}{\beta_n^2 + B^2 + B} Q'_{m1} e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\
&= \frac{-2L^2 Q'_{m1}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin(\frac{\beta_n x}{L}) [\cos(\beta_n) - 1]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
W_3(x, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b Gx_{13}(x, t|x', t - \tau) Q'_{m2} e^{m^2 \alpha \tau} dx' d\tau \\
&= \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n x'}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} Q'_{m2} e^{m^2 \alpha t} dx' d\tau \quad (5.8) \\
&= \frac{-2L^2 Q'_{m2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right)]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_4(x, t) &= \alpha \int_{\tau=0}^t W(0, t) \frac{\partial Gx_{13}(x, t|x', \tau)}{\partial x'} \Big|_{x'=0} d\tau \\
&= \alpha \int_{\tau=0}^t (T_c - T_{\infty}) e^{m^2 \alpha \tau} \frac{2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \frac{\beta_n (\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} d\tau \quad (5.9) \\
&= 2(T_c - T_{\infty}) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{\beta_n (\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)}{(\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)}
\end{aligned}$$

Observa-se que a Eq. 5.5 pode ser também escrita da seguinte forma

$$T^*(x, t) = (T(x, t) - T_{\infty}) e^{m^2 \alpha t} - (W_1(x, t) + W_2(x, t) + W_4(x, t)) = W_3(x, t) \quad (5.10)$$

e portanto

$$T^*(x, t) = \frac{-2L^2 Q'_{m2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right)]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \quad (5.11)$$

Onde $T^*(x, t) = W_3$ é a variável usada para a execução das técnicas de problema inverso propostas neste trabalho.

Observa-se que uma vez conhecidas as propriedades térmicas, o metabolismo de uma célula normal e a evolução de temperatura $T(x_i, t)$ medida experimentalmente em uma determinada posição x_i da mama, a variável $T^*(x, t)$ será função apenas da geração do tumor e sua posição, ou seja

$$T^*(x, t) = f(Q_m, a, b) \quad (5.12)$$

O método da função transferência e da função especificada sequencial serão usados para as estimativas dos parâmetros Q_m , a e b . As técnicas são descritas a seguir.

5.2 Método da função transferência

Segundo Fernandes (2013) as funções transferência podem ser usadas para caracterizar a relação entre entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ de um sistema dinâmico representado pela Fig. 5.2. É possível assim fazer uma equivalência entre sistemas dinâmicos e problemas de condução de calor, onde o fluxo de calor representa a entrada (excitação) do sistema, e a temperatura $T^*(x, t)$ representa a resposta (causa) a esse fluxo.

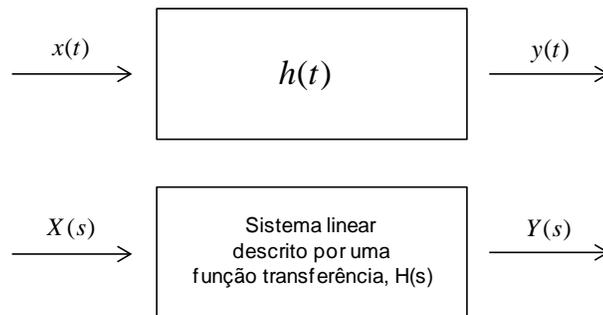


Figura 5.2: Sistema dinâmico de uma entrada e uma saída (FERNANDES, 2013).

O uso da transformada de Laplace facilita a análise de sistemas dinâmicos, por fornecer a relação matemática entre entrada e saída do sistema dinâmico (FERNANDES, 2013). Assim, a Eq. 5.13 expressa a relação entre entrada e saída no domínio da variável complexa 's' para um sistema dinâmico como

$$Y(s) = H(s).X(s) \quad (5.13)$$

Aplicando-se o teorema da convolução à Eq. 5.13, a saída do sistema $y(t)$ é dada pela convolução entre $h(t)$ e $x(t)$, representada simbolicamente pelo operador $(*)$, ou seja, a integral de convolução fornece a relação entre entrada e saída no domínio do tempo, e é dada por:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s).X(s)] = h(t) * x(t) \quad (5.14)$$

As Eqs. 5.13 e 5.14 são relações fundamentais para o método de obtenção da função transferência analítica por meio de funções de Green, e conseqüentemente a proposta de solução de problema inverso em transferência de calor.

Como aqui o interesse é a estimativa do valor da geração de calor metabólico do tumor, a metodologia proposta por Fernandes (2013) será levemente modificada.

A Eq. 5.15 expressa a integral de convolução em termos de geração de calor (entrada) e temperatura (resposta).

$$T^*(x, t) = h(x, t) * Q_m(x, t) = \int_0^t h(t - \tau)Q_m(\tau)d\tau \quad (5.15)$$

onde e a função $h(x, t)$ é igual a 0 para $\tau < 0$.

A Eq. 5.16 representa a transformada de Laplace da resposta impulsiva do sistema que pode ser usada para definir a função transferência de um sistema.

$$H(s) = \mathcal{L}^{-1}[h(t)] \quad (5.16)$$

Como a função transferência é independente do par entrada/resposta, Fernandes (2013) propõe como sinal de entrada (geração de calor) a função Delta de Dirac, $Q_m(t) = \delta(t)$, assim fica:

$$T^*(x, t) = h(x, t) * \delta(t) = \int_0^t h(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = h(x, t) \quad (5.17)$$

Usando a propriedade de elemento neutro da convolução, $h * \delta = h$, obtém-se a resposta impulsiva sem a necessidade de resolver a integral apresentada na Eq. 5.17.

O problema de biotransferência de calor 1D, e a teoria de sistema dinâmico de uma entrada e uma saída podem ser relacionados a partir das Eqs. 5.11 e 5.17. Através da relação entre as duas equações, obtém-se a resposta impulsiva, $h(x, t)$. Assim,

$$T^*(x, t) = W_3 = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b G_{x_{13}}(x, t|x', t - \tau)Q'_{m2}e^{m^2\alpha\tau} dx' d\tau \quad (5.18)$$

onde faremos $Q'_{m2}e^{m^2\alpha\tau} = Q(\tau)$. Assim, pode-se escrever

$$T^*(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b G_{x_{13}}(x, t|x', t - \tau)Q(\tau)dx' d\tau \quad (5.19)$$

E ainda definindo $Q(\tau)$ como $Q(\tau) = \delta(\tau)$, obtém-se

$$T^*(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=a}^b G_{x_{13}}(x, t|x', t - \tau)\delta(\tau)dx' d\tau = \frac{\alpha}{k} \int_{x'=a}^b G_{x_{13}}(x, t|x', t)dx' \quad (5.20)$$

Dessa forma, comparando-se as Eqs. 5.17 e 5.20, pode-se determinar a resposta impulsiva para o problema em questão, como sendo:

$$h(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{x'=a}^b Gx_{13}(x, t|x', t) dx' = \frac{-2\alpha}{k} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\beta_n^2 \alpha t}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right)]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B)} \quad (5.21)$$

em termos do par geração de calor metabólico e temperatura (experimental ou hipotética), tem-se:

$$\mathcal{L}[T^*(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t) * Q_m(t)] \Rightarrow T^*(x, s) = H(x, s) \cdot Q_m(s) \quad (5.22)$$

Como no domínio de Laplace, a operação entre $H(x, s)$ e $Q_m(s)$ trata-se de uma multiplicação, obtém-se

$$Q_m(s) = \frac{1}{H(x, s)} \cdot T^*(x, s) \quad (5.23)$$

Ou ainda, pode-se obter $Q_m(\tau)$ no domínio do tempo aplicando-se a transformada inversa de Laplace, ou seja

$$\mathcal{L}^{-1}[Q_m(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{H(x, s)} \cdot T^*(x, s)\right] \Rightarrow Q_m(t) = \frac{1}{h(x, t)} * T^*(x, t) \quad (5.24)$$

A Figura 5.3 representa a solução inversa do sistema dinâmico ou seja, a obtenção da geração de calor metabólico como resposta do sistema, cuja a entrada passa a ser a temperatura (T^*), e a função transferência dada por $\frac{1}{H}$.

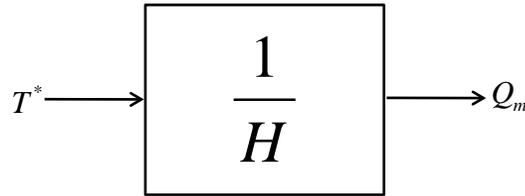


Figura 5.3: Diagrama de blocos para o problema inverso (FERNANDES, 2013).

A obtenção da geração de calor metabólico através desta técnica se dará por meio da resposta impulsiva analítica e pelo conhecimento da distribuição de temperatura (T^*). E as operações demonstradas pelas Eqs. 5.22, 5.23 e 5.24 serão realizadas por funções existentes

no *MATLAB* respectivamente por: convolução (*deconv*), transformada de Fourier (*fft*) e transformada inversa de Fourier (*ifft*).

5.2.1 Análise e discussão de resultados

Apresenta-se a seguir as tentativas em estimar o perfil da geração de calor metabólico presente numa região tumoral interna no corpo unidimensional. As temperaturas foram simuladas usando o *COMSOL* com o tempo de 1200s. A escolha deste período de tempo baseou-se nos resultados apresentados no capítulo 4, que evidenciaram o atraso de tempo existente para a superfície do corpo sofrer uma perturbação em virtude da presença de um tumor.

A Figura 5.4 mostra o esquema usado para a execução do método da função transferência, onde a região do tumor compreende o intervalo de $a = 0,04$ m até $b = 0,05$ m. Nota-se que as temperaturas serão coletadas ao longo do tempo em duas posições distintas, em T_1^* que encontra-se no centro do tumor ($x = 0,045$ m) e T_2^* que está na superfície do corpo ($x = L = 0,06$ m).

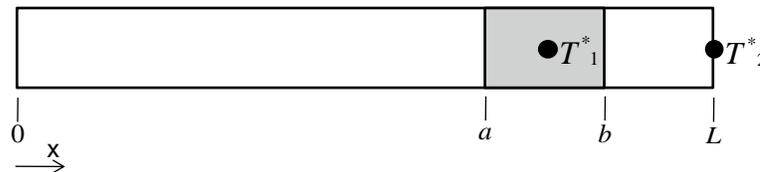


Figura 5.4: Desenho esquemático do modelo 1D usado no método da função transferência.

A execução do método da função transferência pode-se ser resumido nos seguintes passos, desde a resolução do problema direto até a estimativa do parâmetro:

1. Define-se os parâmetros do problema direto.
2. Soluciona-se o problema direto.
3. Obtenção das temperaturas T_1^* e T_2^* .
4. Execução do método da função transferência usando *MATLAB*.
5. Estimativa da geração de calor metabólico.

A seguir, serão analisadas duas situações distintas, a primeira trata-se da verificação da técnica para temperaturas coletadas num corpo saudável, no segundo verifica-se os resultados para um corpo que possua em seu interior a presença de um tumor.

5.2.1.1 Corpo sem tumor

Questiona-se nesse momento: Qual seria o resultado estimado pelo método da função transferência para um caso onde temperaturas são coletadas onde não há um tumor?

A Figura 5.5 apresenta a distribuição de temperaturas ao longo do domínio de um corpo sem tumor, ou seja, apenas a geração de calor metabólico referente ao tecido saudável, $Q_{m1} = 450 \frac{W}{m^3}$, é inserida no problema direto, após 1200s. Os perfis de temperaturas ao longo do tempo, coletados pelos sensores T_1^* e T_2^* são apresentados na Fig. 5.6.

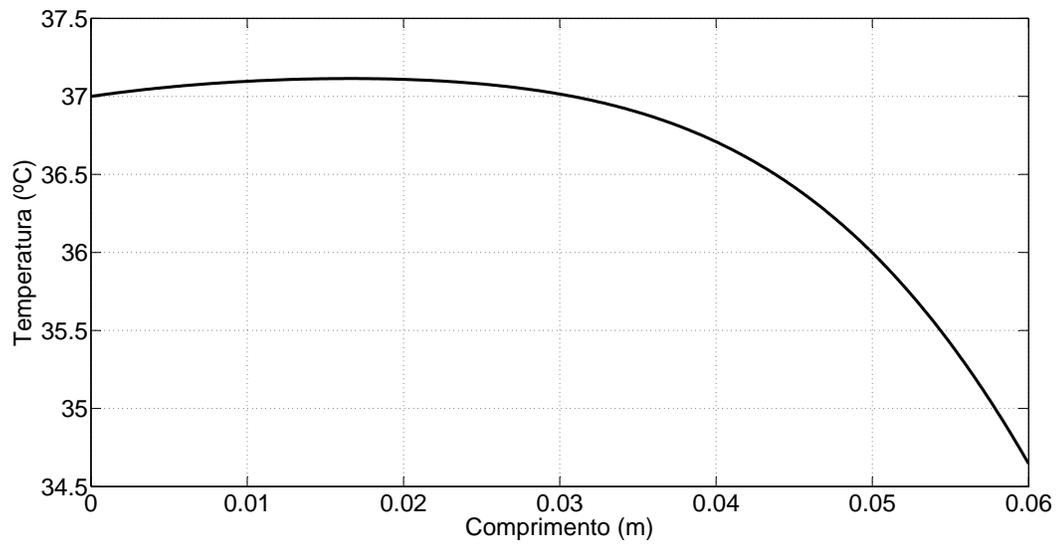


Figura 5.5: Distribuição de temperaturas ao longo do domínio de um corpo sem tumor após 1200s.

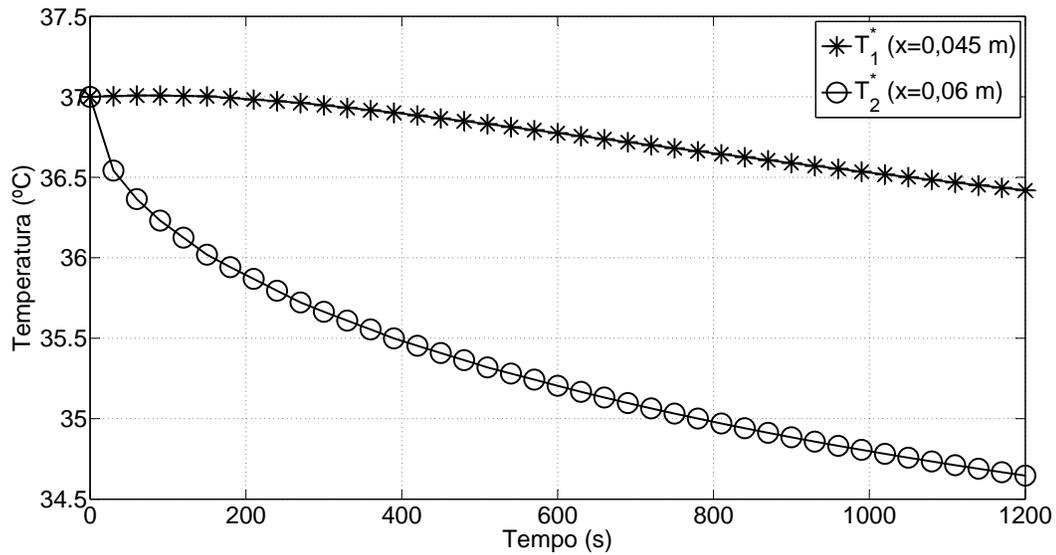


Figura 5.6: Temperaturas T_1^* e T_2^* obtidas no corpo sem tumor após 1200s.

Após a obtenção dos perfis das temperaturas T_1^* e T_2^* pelo problema direto, a estimativa da geração de calor será realizada usando as informações de cada sensor por vez, ou seja o problema inverso é resolvido duas vezes de formas distintas, a primeira através das temperaturas T_1^* , e a outra usando-se T_2^* .

A Figura 5.7 apresenta a estimativa para a geração de calor metabólico, considerando as temperaturas e funções transferências calculadas para cada ponto mostrado na Fig. 5.4. Lembrando que para este caso, a única geração de calor metabólico existente no corpo é a do tecido normal em todo o domínio. Os resultados mostram que apenas usando as temperaturas do ponto T_1^* foi possível encontrar valores satisfatórios para a geração de calor igual a 489 ($\frac{W}{m^3}$). Usando-se o sensor T_2^* , encontra-se valores negativos para a geração de calor, o que não satisfaz o problema.

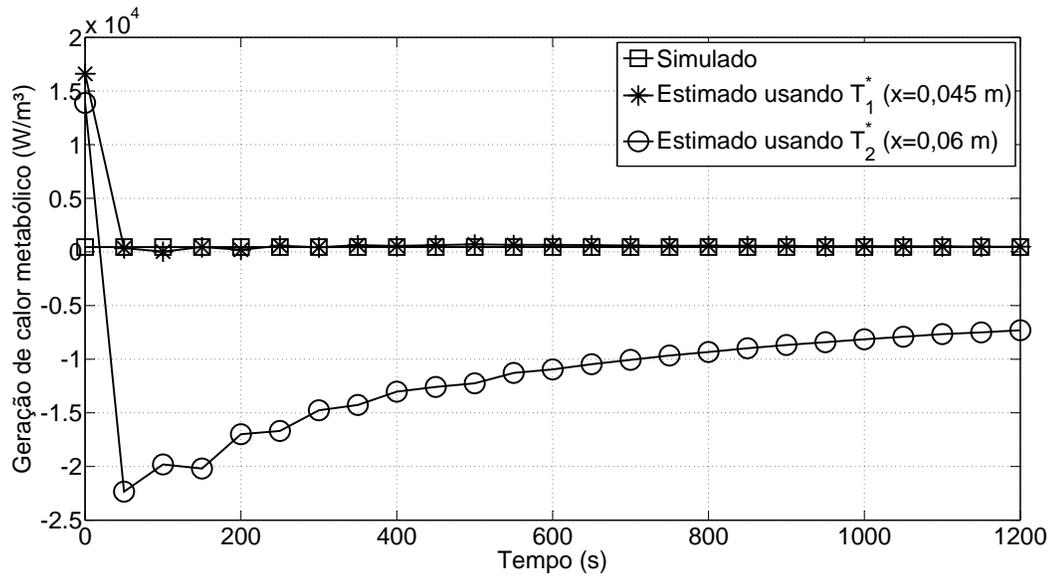


Figura 5.7: Geração de calor metabólico estimado por temperaturas e função transferência calculadas em $x = 0,045$ m e $x = 0,06$ m para o corpo sem tumor após 1200s.

Como se esperava, nota-se que o método da função transferência não encontrou nenhuma geração de calor anormal (tumoral), apenas estimou pequenos valores originados pela condição natural do tecido (aproximadamente $450 \frac{W}{m^3}$) através do perfil de temperatura do sensor T_1^* .

5.2.1.2 Corpo com tumor

Observa-se que para temperaturas coletadas em T_1^* no corpo saudável, a função transferência conseguiu estimar um perfil de geração de calor normal. A seguir temperaturas serão coletadas simulando a biotransferência de calor para um corpo com tumor localizado conforme mostrado na Fig. 5.4.

A Figura 5.8 apresenta a distribuição de temperaturas ao longo do domínio do corpo com tumor ($Q_m = 29000 \frac{W}{m^3}$), após 1200s. Os perfis de temperaturas ao longo do tempo, coletados pelos sensores T_1^* e T_2^* para este novo caso, são apresentados na Fig. 5.9.

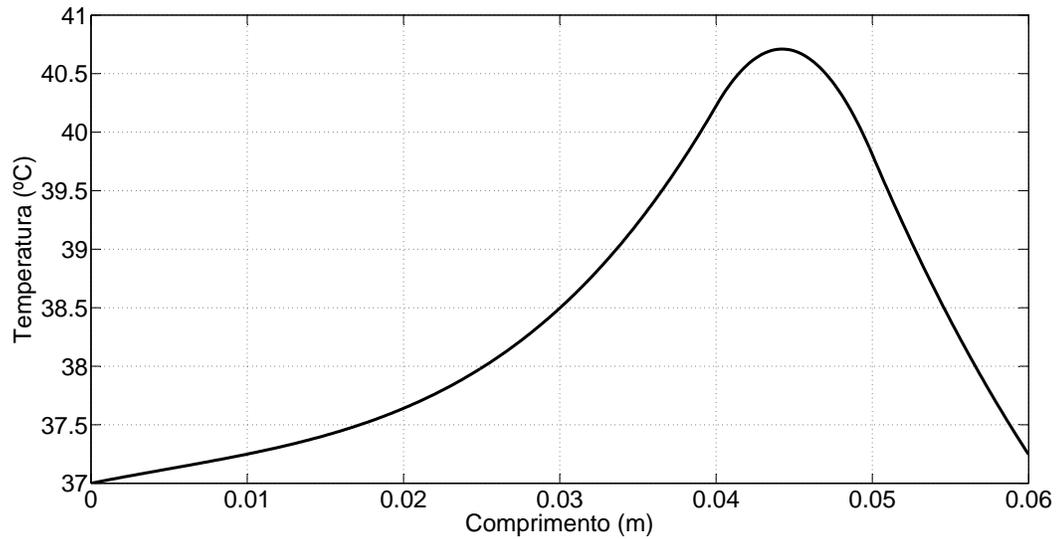


Figura 5.8: Campo de temperaturas ao longo do domínio de um corpo com tumor após 1200s.

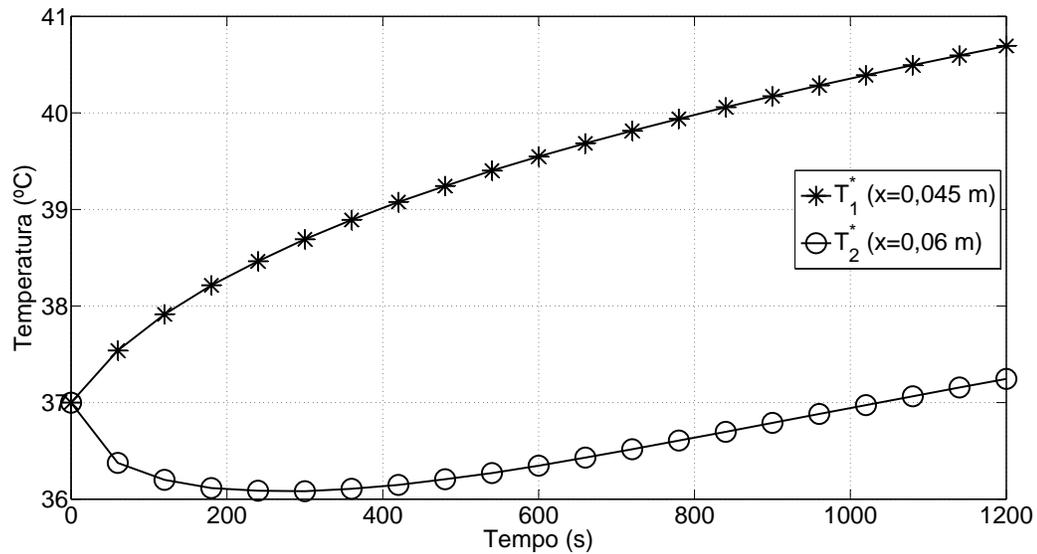


Figura 5.9: Temperaturas obtidas no corpo com tumor após 1200s.

Como realizado para o caso sem tumor, após obter-se os perfis de temperaturas T_1^* e T_2^* pelo problema direto, efetua-se a estimativa da geração de calor usando-se as informações de cada sensor por vez.

A Figura 5.10 apresenta a estimativa para a geração de calor metabólico usando T_1^* e em outro momento T_2^* . Os resultados mostram que ao usar-se o perfil de temperaturas do sensor T_1^* , foi novamente possível determinar valores satisfatórios para a geração de calor, ou seja,

como neste caso inseriu-se um tumor no problema, o método conseguiu estimar um perfil de geração de calor metabólico de aproximadamente $29000 \frac{W}{m^3}$. Usando-se o sensor T_2^* , não foi possível determinar valores coerentes com os de interesse.

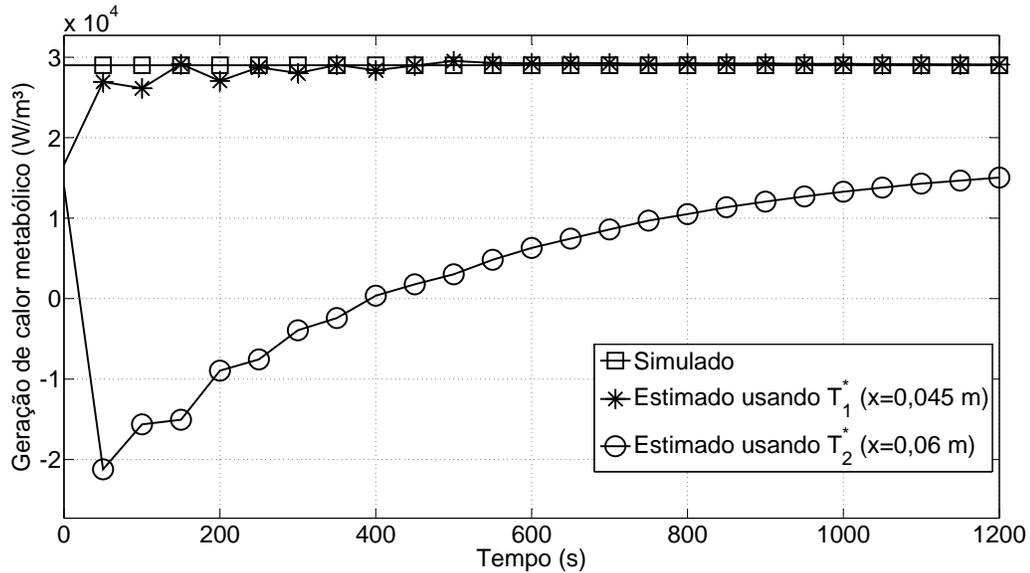


Figura 5.10: Geração de calor metabólico estimado por temperaturas e função transferência calculadas em $x = 0,045 \text{ m}$ e $x = 0,06 \text{ m}$.

Após a apresentação destes resultados, pode-se afirmar que o método da função transferência usado para estimar o perfil da geração de calor metabólico, não satisfaz a complexidade real à qual o problema exige. Isto porque, na prática quando formos determinar um possível tumor presente em uma mama por exemplo, a única temperatura disponível será a superficial do corpo, e o resultado encontrado na Fig. 5.10 mostrou que a técnica não foi capaz a princípio de estimar tal parâmetro, apenas foi possível determinar o valor da geração quando usou-se um sensor dentro do corpo.

A ineficácia do método pode ser explicado em virtude do momento em que se obtém a função transferência $h(x,t)$, pois neste passo (ver Eq. 5.19) é necessário resolver uma integral fechada no intervalo $[a:b]$, ou seja, resolvendo-se a integral, o problema inverso fica limitado em conseguir estimar o valor da geração apenas usando temperaturas e função transferência calculadas neste intervalo. Segundo Fernandes (2013), a resposta impulsiva do sistema, h , é independente do par entrada/saída (geração/temperatura) do sistema dinâmico. Porém, em seu trabalho a obtenção da resposta impulsiva não envolve a integração do termo de geração de calor, mas a avaliação do fluxo de calor no ponto (superfície)

Dessa forma, faz-se necessário outra técnica para a solução do problema inverso. Na

próxima seção usa-se o método da função especificada para a estimativa do perfil da geração de calor metabólico tumoral.

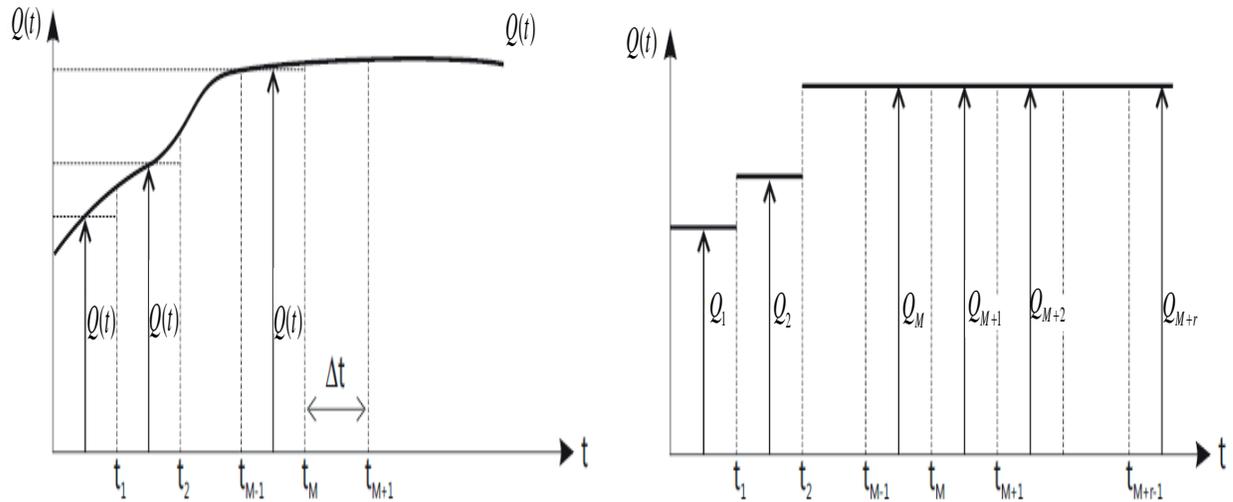
5.3 Método da função especificada sequencial

O método da função especificada trata o problema inverso em condução de calor assumindo uma forma funcional da variação do fluxo de calor. Essa função pode ser uma sequência de segmentos constantes, segmentos lineares ou assumir formas como parábolas, cúbicas ou exponenciais (BECK; BLACKWELL; ST. CLAIR, 1995). Outras variações possíveis neste método são: i) estimar simultaneamente todos os parâmetros para o intervalo total no domínio; ii) estimar os parâmetros de forma sequencial. No caso deste trabalho, será usado o método da função especificada para as estimativas da localização e intensidade da geração de calor metabólico tumoral da equação de Pennes de forma sequencial.

A seguir são apresentados alguns conceitos básicos para a implementação do procedimento sequencial.

1. Uma forma funcional para a geração de calor metabólico $Q(t)$ é assumida para tempos iguais a $t_{M+1}, t_{M+2}, t_{M+3}, \dots, t_{M+r-1}$ sendo que para $t < t_{M+1}$ o valor de Q é conhecido;
2. Uma minimização de uma função erro quadrático é usada para esses tempos;
3. Componentes de gerações de calor são estimados para a forma funcional assumida;
4. Somente a primeira componente Q_M é retida;
5. M é aumentado em um passo e o procedimento é repetido.

A Figura 5.11(a) apresenta uma geração de calor desconhecida a ser estimada enquanto a Fig. 5.11(b) representa o modelamento da geração de calor para r tempos futuros. Ou seja, as componentes estimadas de geração de calor $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{M-1}$ são consideradas previamente estimadas e são denotadas $Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*, \dots, Q_{M+r-1}^*$.



(a) Geração de calor imposta de forma arbitrária (b) Modelamento da geração de calor imposta constante para $r-1$ tempos futuros

Figura 5.11: Geração de calor interna presente no corpo.

Para aumentar a estabilidade do algoritmo inverso, as componentes de geração de calor são assumidas iguais a

$$Q_{M+1} = Q_{M+2} = \dots = Q_{M+r-1}$$

A técnica consiste no uso do método dos mínimos quadrados para a redução do erro entre as temperaturas calculadas e medidas para apenas o tempo atual e alguns passos de tempo futuros, ou seja, na minimização da Eq. 5.25.

$$S = \sum_{i=1}^r (T^*(t_{M+i-1}) - Y(t_{M+i-1}))^2 \quad (5.25)$$

Sendo T^* e Y respectivamente temperaturas teóricas e medidas experimentalmente, num ponto qualquer do corpo.

Assim derivando a Equação (5.25) em relação a Q_M , e igualando o resultado a zero, obtém-se a equação de recorrência para Q_M como sendo

$$Q_M = \sum_{i=1}^r K_i \left(Y_{M+i-1} - T_{M+i-1}^* \Big|_{Q_M=\dots=0} \right)^2 \quad (5.26)$$

com

$$K_i = \frac{\phi_i}{\sum_{j=1}^r \phi_j^2} \quad (5.27)$$

Onde ϕ_i é chamado de coeficiente de sensibilidade do sistema, e definido por

$$\phi_{i-j} = \frac{\partial T_i^*}{\partial Q_j} \quad i \geq j \quad e \quad \phi_{i-j} = 0 \quad i < j \quad (5.28)$$

sendo $\Delta\phi_j = \sum_{i=1}^{j-1} \Delta\phi_i$ e T as temperaturas teóricas calculadas a partir do conhecimento de Q_i com $i < M + i - 1$.

Nesse trabalho, T_i^* é definido pela Eq. 5.11, e Q_j é igual a Q'_{m2} , logo o coeficiente de sensibilidade do sistema é dado por:

$$\phi_i = \frac{\partial \left(\frac{-2L^2 Q'_{m2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{\frac{-\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin(\frac{\beta_n x}{L}) [\cos(\frac{\beta_n b}{L}) - \cos(\frac{\beta_n a}{L})]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \right)}{\partial Q'_{m2}} \quad (5.29)$$

Resolvendo a Eq. 5.29, encontra-se a expressão que define o coeficiente de sensibilidade.

$$\phi_i = \frac{-2L^2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{m^2 \alpha t} - e^{\frac{-\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin(\frac{\beta_n x}{L}) [\cos(\frac{\beta_n b}{L}) - \cos(\frac{\beta_n a}{L})]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \quad (5.30)$$

A seguir, são analisados e discutidos os resultados encontrados para a estimativa do perfil da geração de calor metabólico do tumor no corpo, usando apenas as temperaturas da superfície.

5.3.1 Análise e discussão de resultados

Em virtude da grande dificuldade na solução direta de um problema inverso de múltiplas variáveis por conta da presença de mínimos locais, optou-se nesta abordagem pela estimativa da localização e valor da geração de calor metabólico do tumor, porém considerando o tamanho do tumor conhecido (1 cm) para um corpo de comprimento $L = 6$ cm, como apresentado na Fig. 5.12.

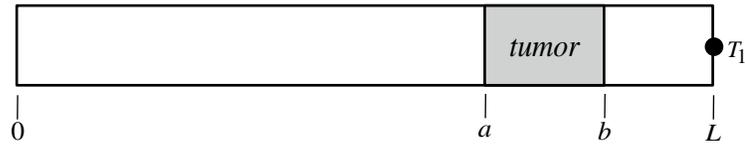


Figura 5.12: Desenho esquemático do modelo 1D usado no método sequencial.

A estimativa do perfil da geração de calor metabólico tumoral usando a função especificada sequencial, pode ser exemplificada através dos seguintes passos:

1. Define-se as propriedades e parâmetros do problema direto, inclusive determinando o termo de geração (tamanho, localização e magnitude).
2. Soluciona-se o problema direto usando o *COMSOL* para um tempo de 1200s.
3. Obtenção das temperaturas do sensor T_1 mostrado na Fig. 5.12.
4. As temperaturas “*experimentais*” T_1 são usadas no método sequencial com 200 tempos futuros para a estimativa da localização e magnitude do termo de geração.
5. A magnitude da geração de calor metabólico tumoral é estimada supondo-se que o tumor esteja em cada posição pré-estabelecida (0 a 1, 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4 e 5 a 6).
6. Uma vez encontrados os termos de geração para cada posição assumida, novos perfis de temperatura para a superfície externa são calculados.
7. Nesse caso, apenas o perfil correspondente à real localização do tumor obterá a melhor concordância com a temperatura “experimental”.
8. Esta melhor concordância é obtida através do cálculo do coeficiente de correlação de Pearson entre os perfis de temperatura estimado e “*experimental*” (GIBBONS; CHAKRABORTI, 2003).
9. Ao final, determina-se a localização e a magnitude do tumor.

5.3.1.1 Corpo sem tumor

Primeiramente, será executado o método da função especificada sequencial para um corpo saudável de 6 cm, ou seja, sem presença de tumor internamente (apenas considerando o efeito da geração de calor metabólico normal, $Q_{m1} = 450 \frac{W}{m^3}$) após 1200s. Após a obtenção das temperaturas “*experimentais*” T_1 , as gerações de calor metabólico são estimadas usando 6

intervalos diferentes (0 a 1, 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, 4 a 5 e 5 a 6) para a suposta localização do tumor, como apresentado pela Fig. 5.13. Observa-se que para qualquer intervalo hipotético, é retornado um perfil de geração metabólica.

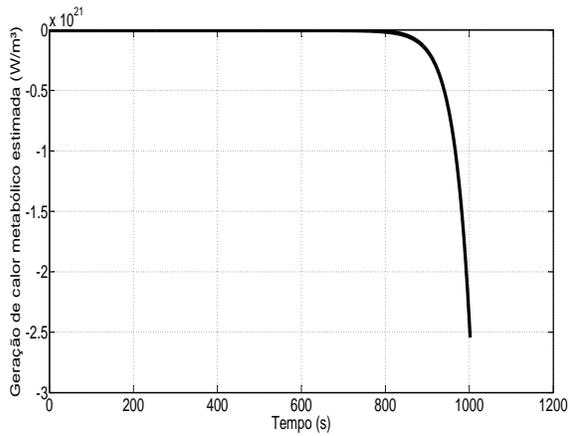
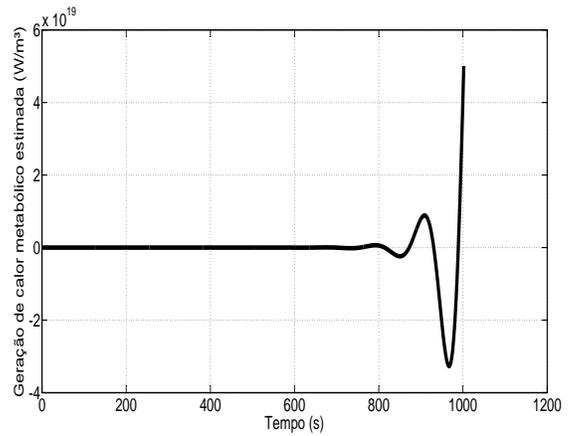
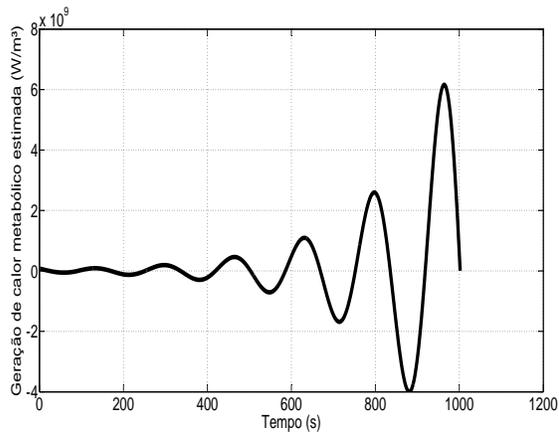
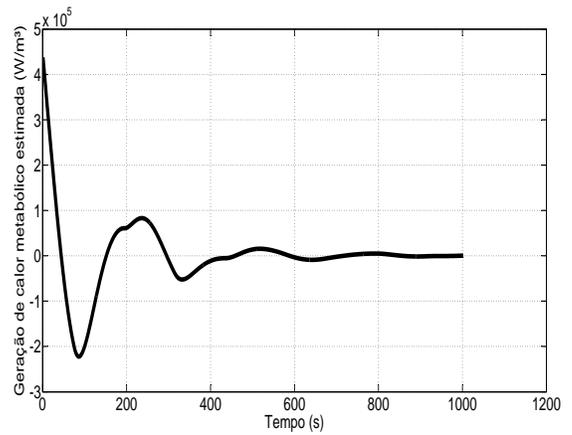
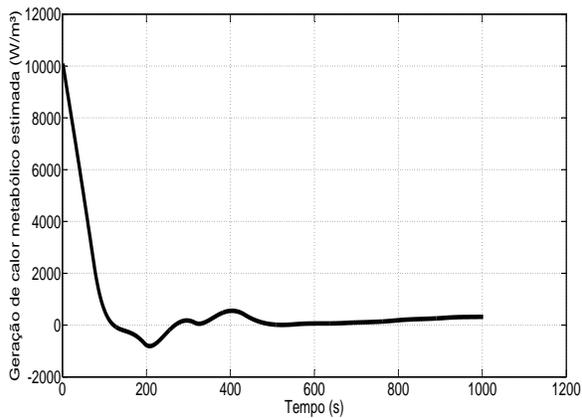
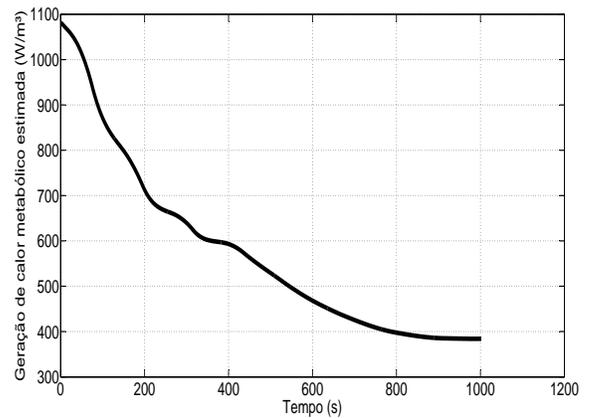
(a) Tentativa com $a=0$ e $b=0,01$ m(b) Tentativa com $a=0,01$ m e $b=0,02$ m(c) Tentativa com $a=0,02$ m e $b=0,03$ m(d) Tentativa com $a=0,03$ m e $b=0,04$ m(e) Tentativa com $a=0,04$ m e $b=0,05$ m(f) Tentativa com $a=0,05$ m e $b=0,06$ m

Figura 5.13: Tentativa na estimativa da geração de calor metabólico para um corpo sem presença de tumor, usando seis intervalos hipotéticos diferentes (1200s).

Após encontrar os perfis de geração de calor para cada posição pré-estabelecida, novos perfis para a temperatura superficial externa são calculados. Um estudo à cerca do coeficiente de correlação de Pearson entre as temperaturas estimadas e “*experimentais*” é realizado.

O coeficiente de correlação de Pearson (r) ou coeficiente de correlação produto-momento mede o grau da correlação linear entre duas variáveis quantitativas. É um índice adimensional com valores situados entre -1,0 e 1,0, e ainda reflete a intensidade de uma relação linear entre dois conjuntos de dados (GIBBONS; CHAKRABORTI, 2003). Onde:

- $r = 1$: Correlação perfeita positiva entre as duas variáveis.
- $r = -1$: Correlação negativa perfeita entre as duas variáveis - Isto é, se uma aumenta, a outra sempre diminui.
- $r = 0$: Significa que as duas variáveis não dependem linearmente uma da outra. No entanto, pode existir uma outra dependência que seja "não linear". Assim, este deve ser investigado por outros meios.

Realizou-se a correlação entre as temperaturas estimadas e “*experimentais*” usando a função *corr* do *MATLAB*. A Tab. 5.1 apresenta os resultados obtidos para este estudo. Verifica-se que a correlação entre as temperaturas obtidas para as gerações de calor estimadas nos intervalos [0,03 : 0,04] m, [0,04 : 0,05] m e [0,05 : 0,06] m tiveram valores iguais a 0,9999, sendo que as magnitudes encontradas foram 333, 320 e 384 $\frac{W}{m^3}$ respectivamente. Estes valores estimados são aproximadamente iguais ao metabolismo normal do corpo (450 $\frac{W}{m^3}$), porém o mais interessante nesta análise é saber que tal intensidade de geração de calor não refere-se a uma geração de calor anormal, ou seja, da magnitude referente ao tumor (29000 $\frac{W}{m^3}$).

Tabela 5.1: Correlação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para 6 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo sem tumor após 1200s.

Localização do tumor [a:b]	Geração de calor metabólico estimada	Correlação
[0,00 : 0,01] m	-2,544116E+021	0,6508
[0,01 : 0,02] m	5,008781E+019	-0,7093
[0,02 : 0,03] m	3,453237E+006	-0,7626
[0,03:0,04] m	3.335232E+002	0,9999
[0,04:0,05] m	3.204409E+002	0,9999
[0,05:0,06] m	3.840668E+002	0,9999

A Figura 5.14 apresenta a comparação entre as gerações de calor metabólico normal “*experimental*” e estimada.

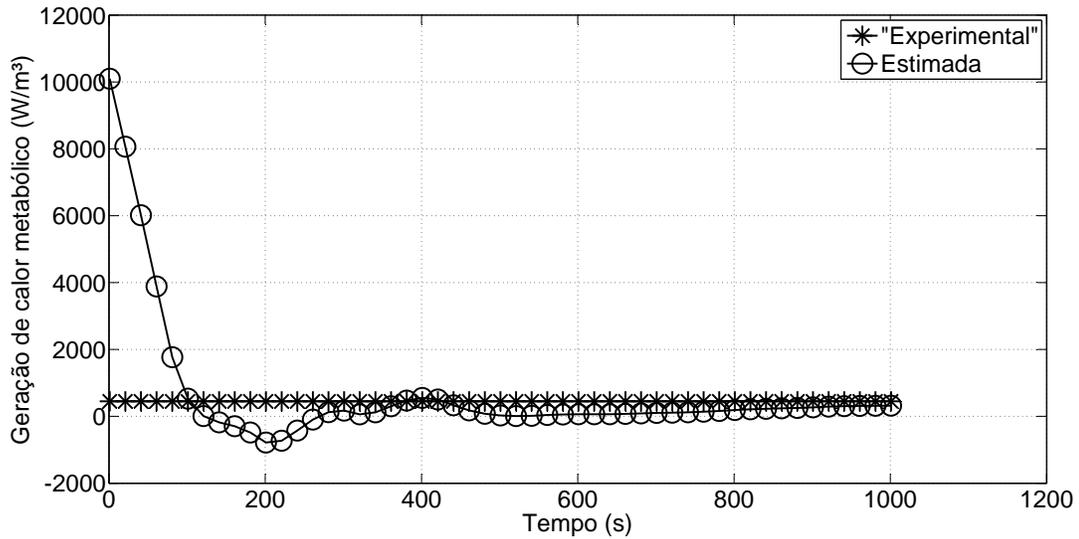


Figura 5.14: Comparação entre as gerações de calor metabólico “*experimental*” e estimada para um corpo sem presença de tumor no tempo de 1200s.

A Figura 5.15 apresenta a comparação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas usando o perfil de geração encontrado pelo método sequencial.

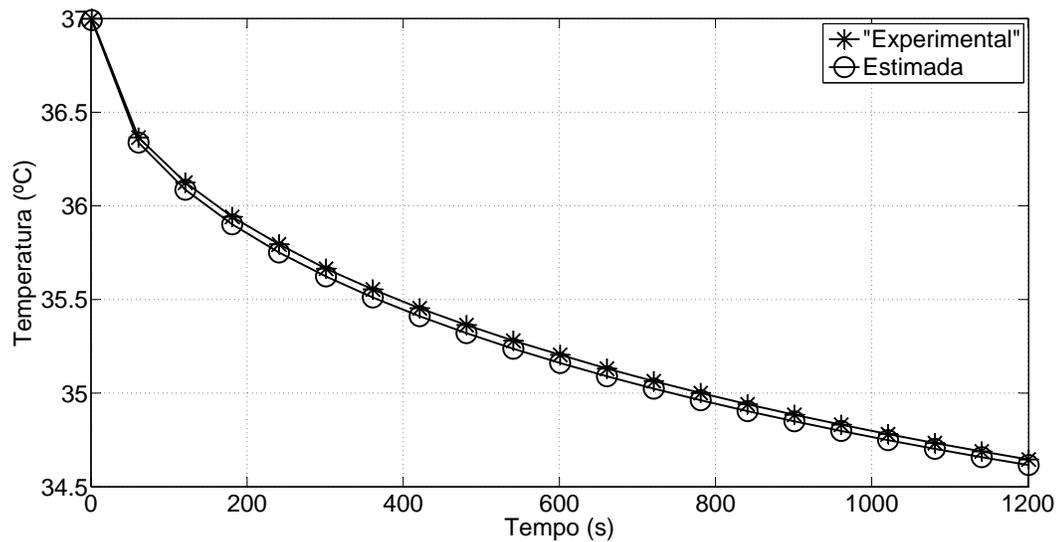


Figura 5.15: Comparação entre as temperaturas “*experimental*” e estimada para um corpo sem presença de tumor no tempo de 1200s.

A Figura 5.16 apresenta o erro absoluto encontrado entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas.

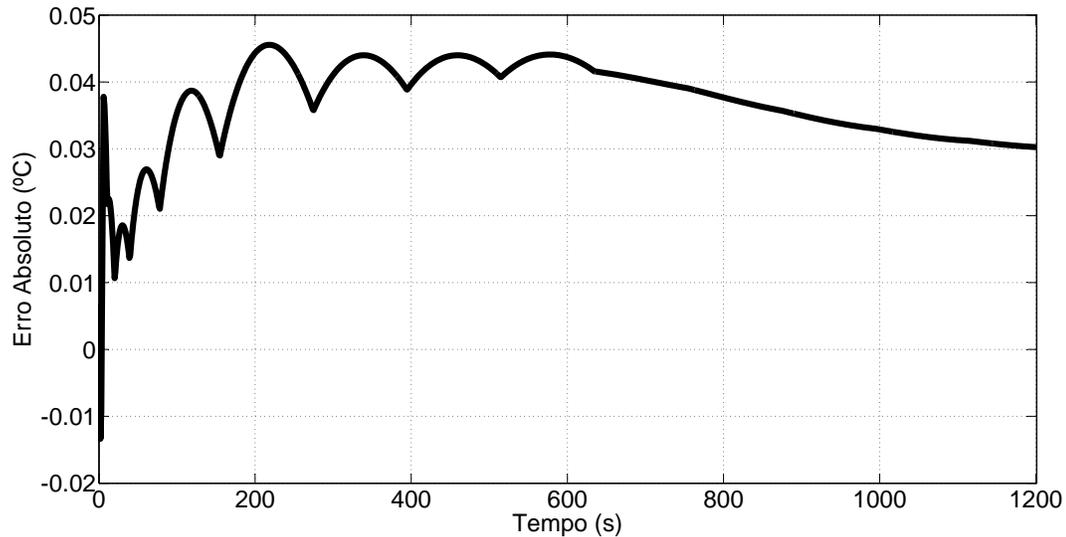


Figura 5.16: Resíduos entre as temperaturas “experimental” e estimada para um corpo sem presença de tumor no tempo de 1200s.

Observa-se que usando o método sequencial para a estimativa do perfil da geração de calor metabólico tumoral para um corpo sem tumor, foram determinados apenas perfis de gerações de calor normal para três intervalos, conforme a Tab. 5.1, o que era de fato esperado. Ou seja, pode-se afirmar que quando o problema direto não possuir presença de tumor, o método sequencial juntamente com o estudo de correlação não determinará nenhum perfil anormal de geração de calor metabólico. A seguir, será simulado um problema de um corpo que possui tumor internamente.

5.3.1.2 Corpo com tumor

Analisa-se a seguir o problema onde um tumor ($Q_m = 29000 \frac{W}{m^3}$) está localizado de 4 a 5 cm no corpo. Usando o mesmo procedimento do caso anterior, as temperaturas T_1 são obtidas do problema direto, e em seguida, as gerações de calor metabólico são estimadas usando os mesmos 6 intervalos hipotéticos para a localização do tumor, como apresentado pela Fig. 5.17.

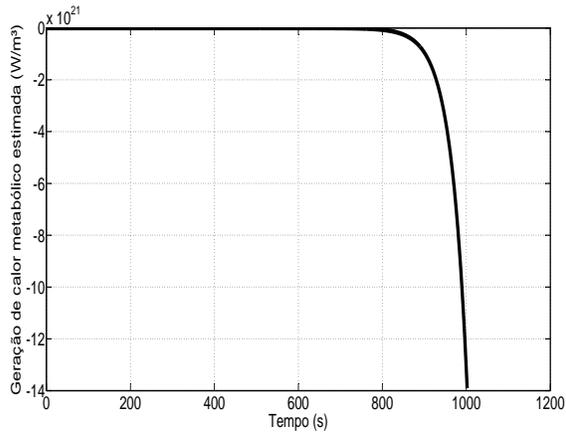
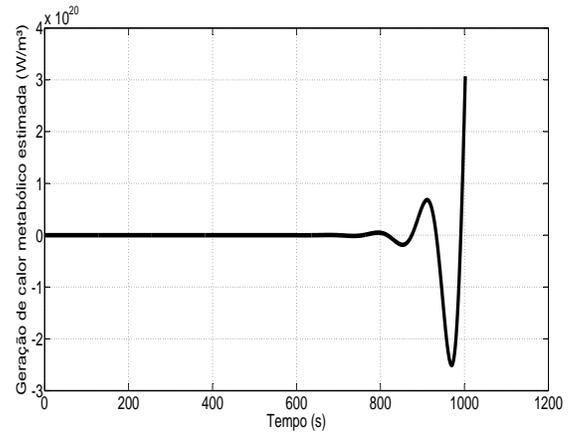
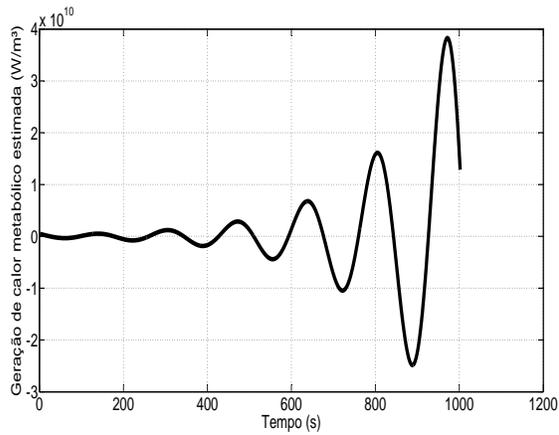
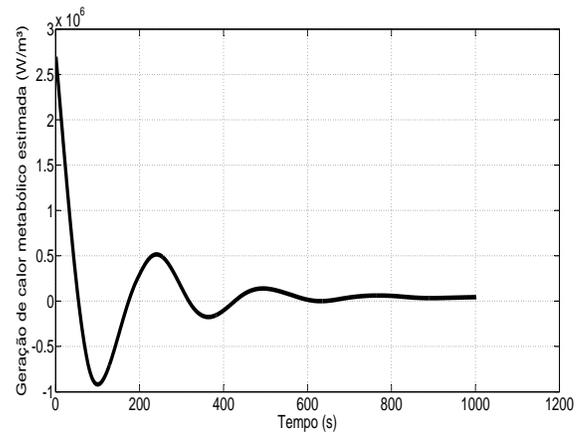
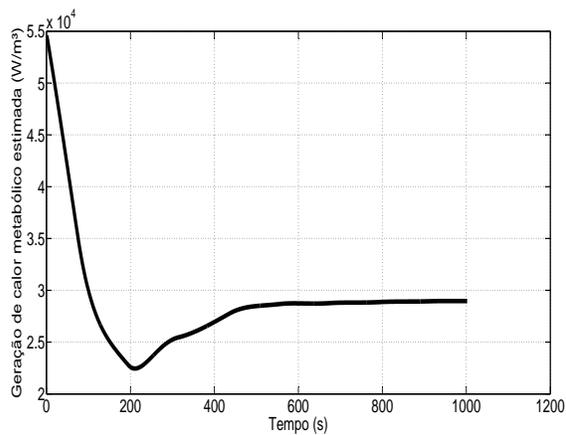
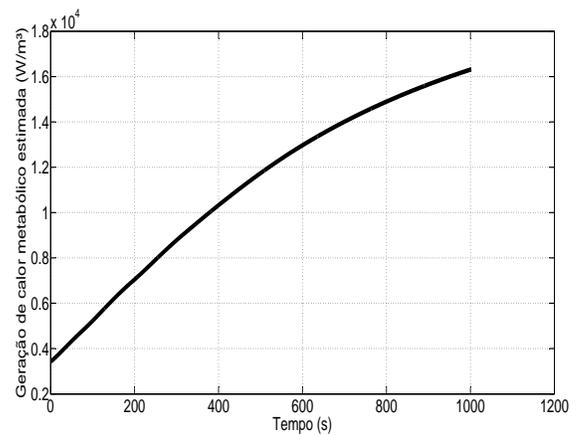
(a) Tentativa com $a=0$ e $b=0,01$ m(b) Tentativa com $a=0,01$ m e $b=0,02$ m(c) Tentativa com $a=0,02$ m e $b=0,03$ m(d) Tentativa com $a=0,03$ m e $b=0,04$ m(e) Tentativa com $a=0,04$ m e $b=0,05$ m(f) Tentativa com $a=0,05$ m e $b=0,06$ m

Figura 5.17: Tentativa na estimativa da geração de calor metabólico para um tumor posicionado de 4 à 5 cm, usando seis intervalos hipotéticos diferentes (1200s).

A Tab. 5.2 apresenta os resultados da correlação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas pelo método sequencial. Verifica-se que a correlação usando o intervalo que compreende $a = 0,04$ m e $b = 0,05$ m igual a 0,9973 determina que o perfil de geração de calor encontrado é o estimado para o problema, onde a magnitude encontrada é igual a $28966 \frac{W}{m^3}$, ou seja, apenas um erro de 0,1% existente entre o valor estimado e o “*experimental*” da geração do tumor.

Tabela 5.2: Correlação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para 6 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo com tumor localizado em $[0,04 : 0,05]m$ após 1200s.

Localização do tumor [a:b]	Geração de calor metabólico estimada	Correlação
[0,00 : 0,01] m	-1,390275E+022	-0,8785
[0,01 : 0,02] m	3,070347E+020	0,9176
[0,02 : 0,03] m	1,287933E+010	0,9477
[0,03 : 0,04] m	4,389649E+004	0,3239
[0,04:0,05] m	2,896647E+004	0,9989
[0,05 : 0,06] m	1,632095E+004	0,8298

A Figura 5.18 apresenta a comparação entre a geração de calor metabólico tumoral “*experimental*” e estimada.

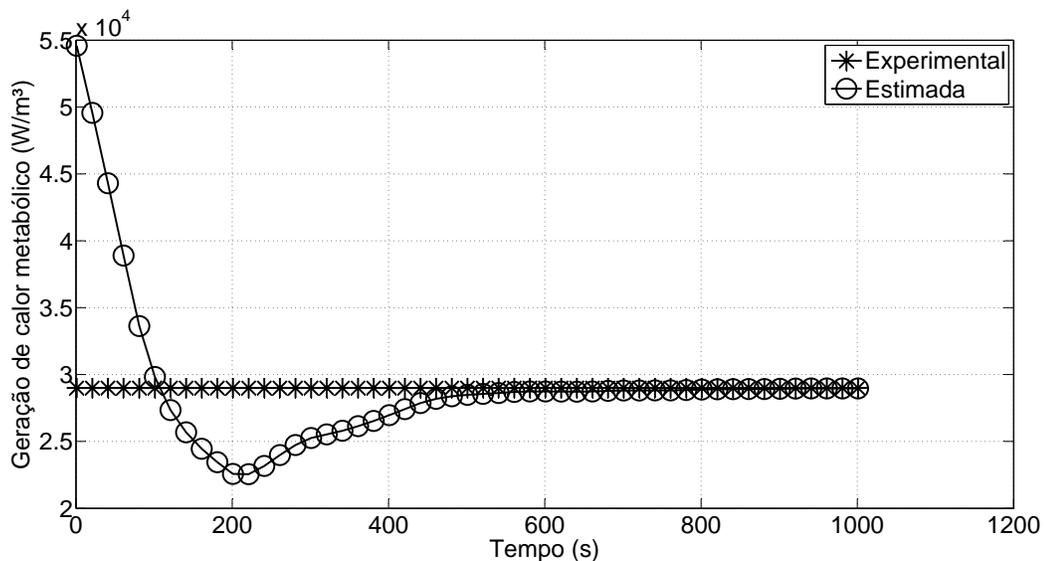


Figura 5.18: Comparação entre as gerações de calor metabólico “*experimental*” e estimada para um tumor posicionado no intervalo $[4:5]cm$ no tempo de 1200s.

A Figura 5.19 mostra a comparação entre as temperaturas “*experimentais*” no *COMSOL* e estimadas usando o perfil de geração encontrado pelo método sequencial.

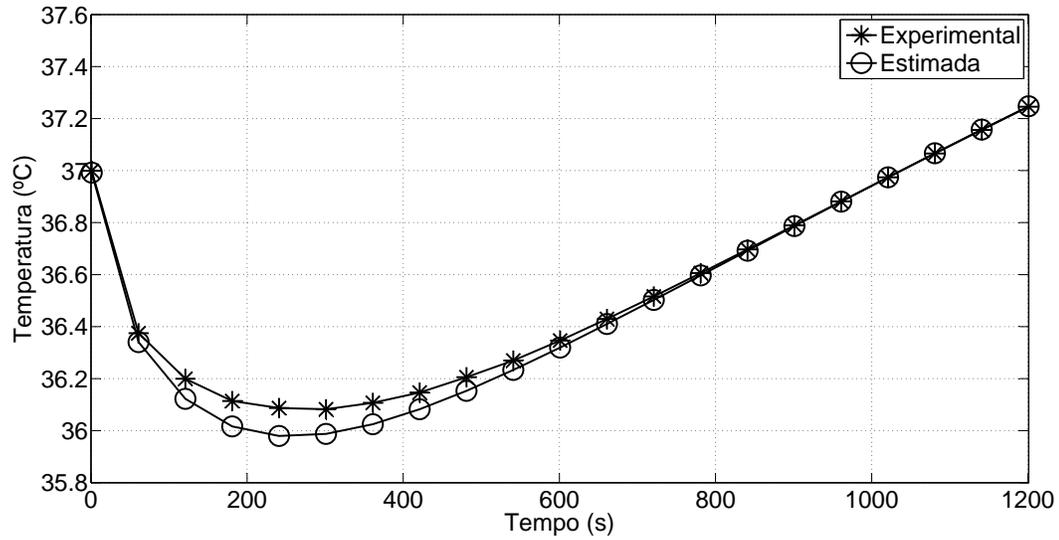


Figura 5.19: Comparação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [4:5]cm no tempo de 1200s.

A Figura 5.20 apresenta o erro absoluto encontrado entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas.

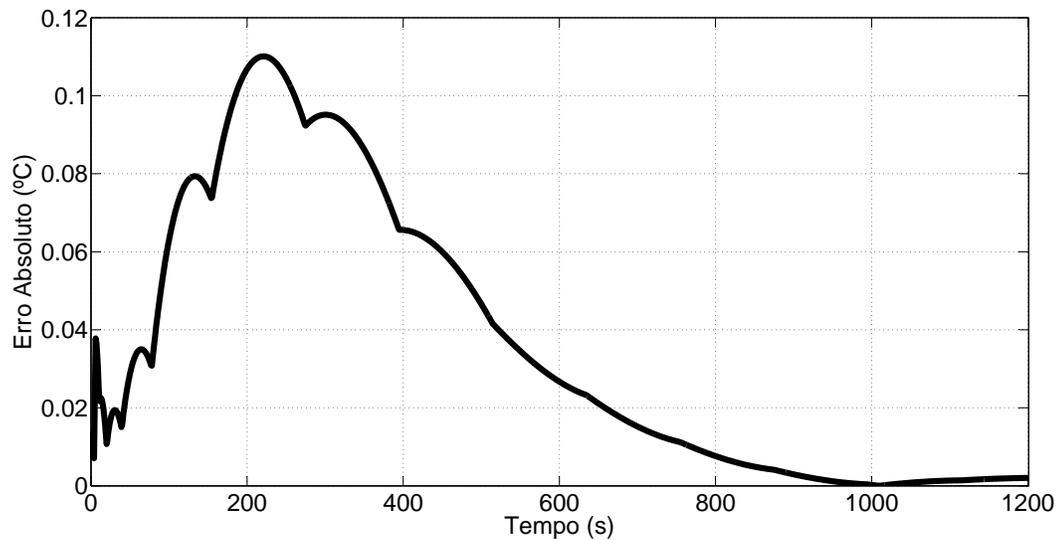


Figura 5.20: Resíduos entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [4:5]cm no tempo de 1200s.

Obtém-se assim a determinação da localização e da magnitude da geração de calor metabólico no tumor. Porém, usou-se apenas 6 intervalos hipotéticos de 1cm para tentar encontrar o perfil desejado. Assim propõe-se uma discretização mais refinada juntamente com o estudo de correlação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para um total de 51 possíveis localizações do tumor no corpo, por exemplo: $[0:0,01]$ m, $[0,001;0,011]$ m, $[0,002:0,012]$ m, ... $[0,049:0,059]$ m e $[0,05:0,06]$.

A Tab. 5.3 apresenta os resultados obtidos nesta nova análise. Verifica-se que a correlação para o intervalo que compreende $a = 0,04$ m e $b = 0,05$ m igual a $0,9989$ é novamente o perfil de geração de calor que melhor correlacionou-se com os dados “*experimentais*” após 1200s.

Tabela 5.3: Correlação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para 51 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo com tumor localizado em $[0,04 : 0,05]m$ após 1200s.

Localização do tumor [a:b]	Geração de calor metabólico estimada	Correlação
$[0,000 : 0,010]$ m	-1,390275E+022	-0,8785
$[0,001 : 0,011]$ m	-1,464607E+032	-0,8817
$[0,002 : 0,012]$ m	2,919404E+022	0,8852
$[0,003 : 0,013]$ m	-3,936050E+024	-0,8890
$[0,004 : 0,014]$ m	-3,320812E+037	-0,8930
$[0,005 : 0,015]$ m	3,177749E+024	0,8971
$[0,006 : 0,016]$ m	-2,641758E+028	-0,9012
$[0,007 : 0,017]$ m	-1,315053E+033	-0,9054
$[0,008 : 0,018]$ m	-3,610035E+026	-0,9096
$[0,009 : 0,019]$ m	-1,873550E+033	-0,9136
$[0,010 : 0,020]$ m	3,070347E+020	0,9176
$[0,011 : 0,021]$ m	-1,428053E+022	-0,9215
$[0,012 : 0,022]$ m	-3,597263E+017	-0,9253
$[0,013 : 0,023]$ m	4,054504E+017	0,9288
$[0,014 : 0,024]$ m	-2,720331E+016	-0,9322
$[0,015 : 0,025]$ m	-2,143013E+015	-0,9354
$[0,016 : 0,026]$ m	5,124110E+013	0,9384
$[0,017 : 0,027]$ m	2,907478E+013	0,9411
$[0,018 : 0,028]$ m	-6,695698E+011	-0,9436
$[0,019 : 0,029]$ m	-3,336389E+011	-0,9458
$[0,020 : 0,030]$ m	1,287933E+010	0,9477
$[0,021 : 0,031]$ m	5,946055E+009	0,9493

[0, 022 : 0, 032] m	-2,533351E+008	-0,9505
[0, 023 : 0, 033] m	-1,545306E+008	-0,9513
[0, 024 : 0, 034] m	5,956110E+006	0,9537
[0, 025 : 0, 035] m	5,784717E+006	0,9537
[0, 026 : 0, 036] m	-2,291850E+004	-0,7528
[0, 027 : 0, 037] m	-2,482274E+005	-0,9140
[0, 028 : 0, 038] m	2,657091E+004	-0,3894
[0, 029 : 0, 039] m	5,914800E+004	0,5954
[0, 030 : 0, 040] m	4,389649E+004	0,3239
[0, 031 : 0, 041] m	3,915561E+004	0,3249
[0, 032 : 0, 042] m	3,878738E+004	0,4998
[0, 033 : 0, 043] m	3,802219E+004	0,6504
[0, 034 : 0, 044] m	3,677711E+004	0,7629
[0, 035 : 0, 045] m	3,548483E+004	0,8509
[0, 036 : 0, 046] m	3,421840E+004	0,9158
[0, 037 : 0, 047] m	3,293741E+004	0,9589
[0, 038 : 0, 048] m	3,162803E+004	0,9842
[0, 039 : 0, 049] m	3,030044E+004	0,9964
[0,040 : 0,050] m	2,896647E+004	0,9989
[0, 041 : 0, 051] m	2,763299E+004	0,9944
[0, 042 : 0, 052] m	2,630393E+004	0,9849
[0, 043 : 0, 053] m	2,498277E+004	0,9715
[0, 044 : 0, 054] m	2,367335E+004	0,9553
[0, 045 : 0, 055] m	2,237992E+004	0,9369
[0, 046 : 0, 056] m	2,110701E+004	0,9168
[0, 047 : 0, 057] m	1,985946E+004	0,8955
[0, 048 : 0, 058] m	1,864241E+004	0,8734
[0, 049 : 0, 059] m	1,746117E+004	0,8512
[0, 050 : 0, 060] m	1,632095E+004	0,8298

Para tentar-se garantir ainda mais a eficácia da técnica, simula-se um tumor posicionado numa nova região (entre 0,03 m e 0,04 m) dentro do corpo já estudado em 1200s. A Tab. 5.4 apresenta os valores encontrados de geração de calor metabólico para cada um dos 51 intervalos hipotéticos do tumor. Após feita a correlação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas, chega-se exatamente no intervalo $[0, 03 : 0, 04]m$ como o melhor correlacionado, cuja a magnitude de geração de calor encontrada é igual a $29160 \frac{W}{m^3}$, ou seja, um erro de 0,5

% existente entre a geração do tumor “*experimental*”.

Tabela 5.4: Correlação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para 51 perfis diferentes de geração de calor metabólico tumoral para um corpo com tumor localizado em $[0,03 : 0,04]m$ após 1200s.

Localização do tumor [a:b] m	Geração de calor metabólico estimada	Correlação
[0,000 : 0,010] m	-3,681123E+021	0,2680
[0,001 : 0,011] m	-3,842114E+031	0,2720
[0,002 : 0,012] m	7,621268E+021	-0,2766
[0,003 : 0,013] m	1,064279E+024	0,2817
[0,004 : 0,014] m	-8,873717E+036	0,2872
[0,005 : 0,015] m	9,195917E+023	-0,2931
[0,006 : 0,016] m	-7,323891E+027	0,2994
[0,007 : 0,017] m	-3,686461E+032	0,3060
[0,008 : 0,018] m	-9,869593E+025	0,3129
[0,009 : 0,019] m	-5,443487E+032	0,3202
[0,010 : 0,020] m	7,580628E+019	-0,3277
[0,011 : 0,021] m	-2,753727E+021	0,3355
[0,012 : 0,022] m	-9,011918E+016	0,3435
[0,013 : 0,023] m	1,022074E+017	-0,3519
[0,014 : 0,024] m	-6,151656E+015	0,3605
[0,015 : 0,025] m	-5,365326E+014	0,3694
[0,016 : 0,026] m	8,206979E+012	-0,3785
[0,017 : 0,027] m	7,473057E+012	-0,3880
[0,018 : 0,028] m	-1,038543E+011	0,3978
[0,019 : 0,029] m	-8,341257E+010	0,4078
[0,020 : 0,030] m	2,146924E+009	-0,4181
[0,021 : 0,031] m	1,433661E+009	-0,4288
[0,022 : 0,032] m	-4,985003E+007	0,4413
[0,023 : 0,033] m	-3,730763E+007	0,4528
[0,024 : 0,034] m	1,571892E+006	-0,4264
[0,025 : 0,035] m	1,549669E+006	-0,4433
[0,026 : 0,036] m	1,502246E+004	0,9424
[0,027 : 0,037] m	-5,809964E+004	0,7475
[0,028 : 0,038] m	2,036811E+004	0,9735
[0,029 : 0,039] m	3,314651E+004	0,9951

[0,030 : 0,040] m	2,916009E+004	0,9967
[0, 031 : 0, 041] m	2,687245E+004	0,9947
[0, 032 : 0, 042] m	2,581425E+004	0,9863
[0, 033 : 0, 043] m	2,473995E+004	0,9729
[0, 034 : 0, 044] m	2,353489E+004	0,9556
[0, 035 : 0, 045] m	2,230303E+004	0,9342
[0, 036 : 0, 046] m	2,108150E+004	0,9087
[0, 037 : 0, 047] m	1,987256E+004	0,8801
[0, 038 : 0, 048] m	1,867893E+004	0,8499
[0, 039 : 0, 049] m	1,750749E+004	0,8202
[0, 040 : 0, 050] m	1,636527E+004	0,7933
[0, 041 : 0, 051] m	1,525779E+004	0,7717
[0, 042 : 0, 052] m	1,418944E+004	0,7587
[0, 043 : 0, 053] m	1,316406E+004	0,7574
[0, 044 : 0, 054] m	1,218507E+004	0,7706
[0, 045 : 0, 055] m	1,125543E+004	0,8002
[0, 046 : 0, 056] m	1,037742E+004	0,8445
[0, 047 : 0, 057] m	9,552529E+003	0,8961
[0, 048 : 0, 058] m	8,781457E+003	0,9414
[0, 049 : 0, 059] m	8,064109E+003	0,9675
[0, 050 : 0, 060] m	7,399682E+003	0,9712

A Figura 5.21 apresenta a comparação entre a geração de calor metabólico tumoral “*experimental*” e estimada. Percebe-se que a princípio, a grandeza identificada no gráfico é de 10^5 , fato que pode ser justificado mediante a dificuldade inicial do método em estimar o valor correto da geração de calor. A Fig. 5.22 mostra o mesmo resultado, porém permitindo observar melhor a estimativa da magnitude estimada.

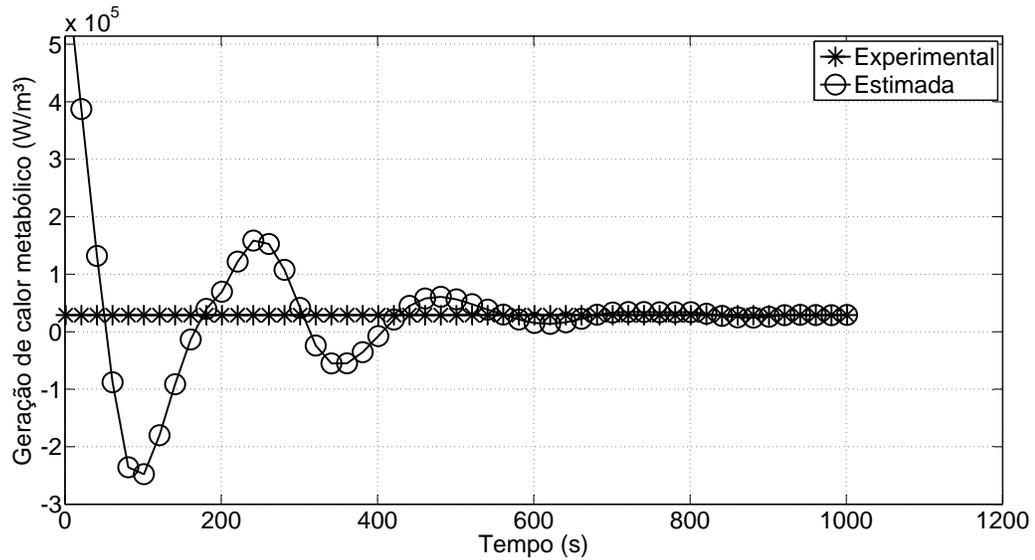


Figura 5.21: Comparação entre as gerações de calor metabólico simulada e estimada para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s.

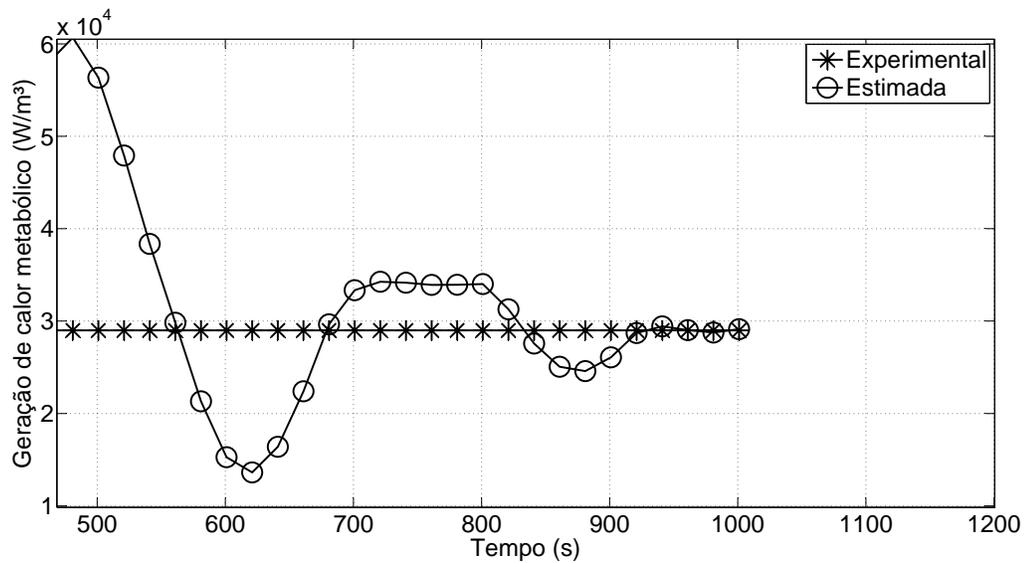


Figura 5.22: Comparação entre as gerações de calor metabólico simulada e estimada para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s, com zoom.

A Figura 5.23 mostra a comparação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas usando o perfil de geração encontrado pelo método sequencial.

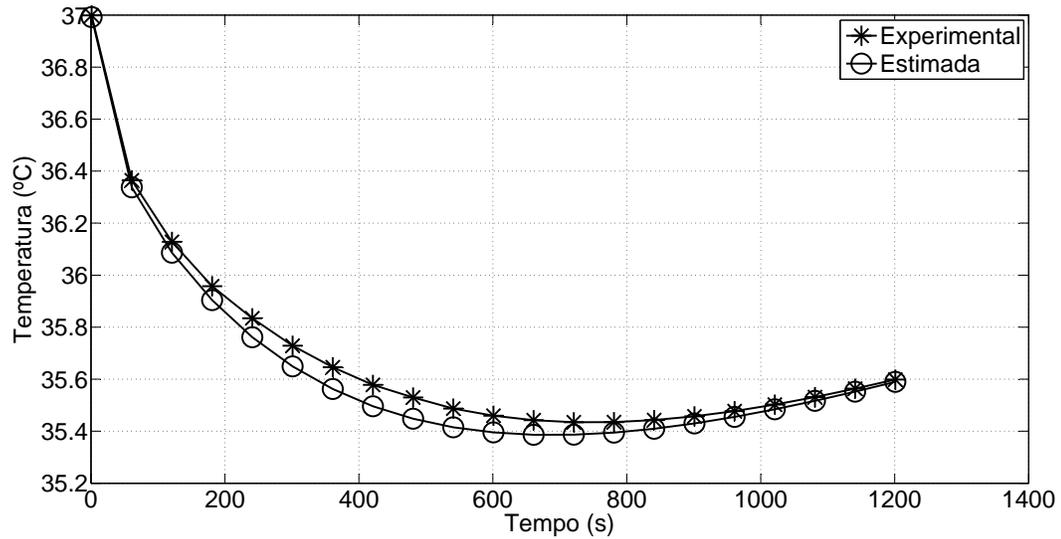


Figura 5.23: Comparação entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s.

A Figura 5.24 apresenta o erro absoluto encontrado entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas.

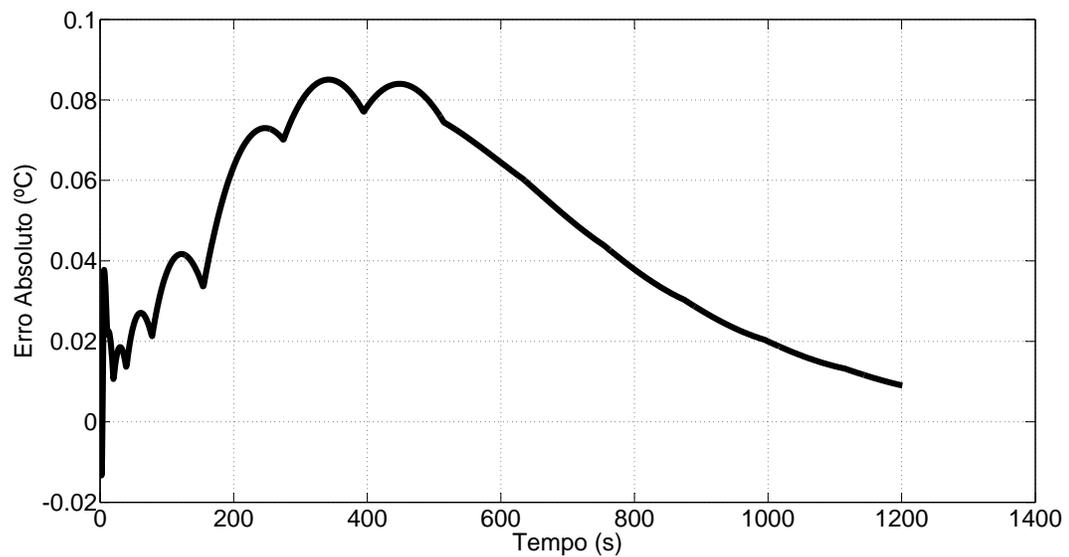


Figura 5.24: Resíduos entre as temperaturas “*experimentais*” e estimadas para um tumor posicionado no intervalo [3:4]cm no tempo de 1200s.

Após a apresentação dos resultados usando a técnica da função especificada sequencial acoplada ao estudo de correlação, pode-se afirmar que o método é eficaz para estimar a loca-

lização e magnitude da geração de calor metabólico presente no tumor, apenas necessitando de temperaturas coletadas na superfície externa do corpo. Realizando-se uma simulação de um corpo sem tumor, não esperava-se nenhuma estimativa de geração de calor tumoral, e o método não determinou nenhum perfil anormal de metabolismo. No entanto, incluindo-se um tumor dentro do corpo, a técnica estimou corretamente tanto a localização quanto a magnitude do metabolismo tumoral. Dessa forma, pode-se futuramente aplicar esta técnica para a obtenção do perfil de geração de calor do tumor em várias situações, por exemplo: um caso experimental *in vitro*.

Capítulo 6

Conclusão

Apresentou-se nesse trabalho, alguns modelos térmicos da biotransferência de calor. Soluções analíticas e numéricas (1D, 2D e 3D) destes modelos foram desenvolvidas com o objetivo de proporcionarem uma ferramenta para a obtenção de parâmetros físicos presentes na equação de Pennes. Um exemplo é o termo de geração metabólica que simula a presença de um tumor em tecidos vivos.

As diversas soluções numéricas foram validadas através de comparação com soluções exatas ou da literatura.

Os resultados evidenciam que dependendo dos parâmetros do tumor como tamanho e posição, têm-se respostas bem distintas na variação da temperatura superficial do corpo. Porém, é possível afirmar que a detecção de perturbação da temperatura na superfície de um corpo possuindo uma geração de calor interna diferenciada (maior que a normal) pode ser diagnosticada dependendo das condições de tamanho, localização e malignidade desse tumor.

Outro resultado obtido no modelo 3D semi-esférico, refere-se às características dinâmicas, onde uma perturbação ainda maior na temperatura da superfície do corpo pode ser provocada mediante a mudança por exemplo das condições iniciais de temperatura do corpo e ambiente.

Os resultados das estimativas da localização e magnitude da geração de calor metabólico do tumor usando o método sequencial juntamente com o estudo de correlação foram satisfatórios, tornando assim, tal técnica com potencial de aplicação em casos experimentais *in vitro*. Com possibilidade também de aplicação em vivo, uma vez que a análise feita considerou as regiões de baixa sensibilidade, como encontradas em casos reais.

Propostas de trabalhos futuros

Obtenção da solução analítica 1D em multicamadas, ou seja, considerando a mudança de propriedades térmicas ao longo do domínio no corpo para a simulação de epiderme, gordura e perfusão por exemplo.

Desenvolver soluções analíticas 2D e 3D para contribuir em futuras técnicas desenvolvidas em problemas inversos em condução de calor.

Estimativa do perfil de geração de calor metabólico tumoral em experimentos *in vitro*.

Construção de modelos fantasmas que possuam características semelhantes às encontradas em tecidos vivos.

Obtenção de geometrias reais da mama via scanner ou imagens térmicas com marcadores.

Obtenção das propriedades térmicas de tecidos *in vivo*.

Estudar propriedades mecânicas do tumor.

Referências Bibliográficas

ABSALAN, H. *et al.* Simulation and investigation of quantum dot effects as internal heat-generator source in breast tumor site. *Journal of Thermal Biology*, v. 37, n. 7, p. 490–495, November 2012.

ADAMS, F. *The Genuine Works of Hippocrates*. London: New York, W. Wood and company, 1849.

AMALU, W. C. *et al.* The biomedical engineering handbook - medical devices and systems. In: _____. 3. ed. [S.l.]: CRC Press, 2006. cap. Infrared imaging of the breast - An overview.

BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; ST. CLAIR, C. R. *Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems*. New York, NY: Wiley-Interscience, 1995.

BECK, J. V. *et al.* *Heat Conduction Using Green's Function*. Washington, DC: Hemisphere Publishing, 1992.

BEZERRA, L. *et al.* Estimation of breast tumor thermal properties using infrared images. *Signal Processing*, v. 93, n. 10, p. 2851–2863, October 2013.

CHARNY, C. K. Bioengineering heat transfer. In: _____. [S.l.]: Academic Press, Inc, 1992. v. 22, cap. Mathematical models of bioheat transfer, p. 19–155.

CHATO, J. C. Bioengineering heat transfer. In: _____. [S.l.]: Academic Press, Inc, 1992. v. 22, cap. A view of the history of heat transfer in bioengineering, p. 1–18.

CHEN, M. M.; HOLMES, K. R. Microvascular contributions in tissue heat transfer. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 335, p. 137–150, 1980.

COMSOL, M. *Aquecimento biológico*. 2014. [Http://www.br.comsol.com/heat-transfer-module](http://www.br.comsol.com/heat-transfer-module).

FERNANDES, A. P. *Função transferência analítica aplicada à solução de problema inverso em condução de calor*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. 3. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

- GAUTHERIE, M. Thermopathology of breast cancer: Measurement and analysis of in vivo temperature and blood flow. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 335, p. 383–415, March 1980.
- GIBBONS, J. D.; CHAKRABORTI, S. *Nonparametric Statistical Inference*. 4. ed. New York, NY: Marcel Dekker, Inc., 2003.
- HCBARRETOS. *Câncer de mama*. 2014. [Http://www.hcancerbarretos.com.br/pesquisas/92-paciente/tipos-de-cancer/cancer-de-mama/163-como-realizar-o-diagnostico-do-cancer-de-mama](http://www.hcancerbarretos.com.br/pesquisas/92-paciente/tipos-de-cancer/cancer-de-mama/163-como-realizar-o-diagnostico-do-cancer-de-mama).
- INCA. *Incidência de câncer no Brasil*. 2014. [Http://www.inca.gov.br/estimativa/2014](http://www.inca.gov.br/estimativa/2014).
- INCROPERA, F. P. *et al. Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 6. ed. [S.l.]: WILEY INDIA PVT LTD, 2008.
- JAUNICH, M. *et al.* Bio-heat transfer analysis during short pulse laser irradiation of tissues. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, n. 23-24, p. 5511–5521, November 2008.
- KELLER, K. H.; SEILER, L. An analysis of peripheral heat transfer in man. *Journal of Applied Physiology*, v. 30, n. 5, p. 779–786, 1971.
- KLINGER, H. G. Heat transfer in perfused biological tissue - ii. the "macroscopic" temperature distribution in tissue. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 40, p. 183–199, 1978.
- LIU, J.; DENG, Z.-S. Blood perfusion-based model for characterizing the temperature fluctuation in living tissues. *Physica A*, v. 300, n. 3-4, p. 521–530, March 2001.
- LOPES, C. *et al.* Inverse problem of estimation of the blood perfusion coefficient in cancerous tissues subjected to hyperthermic treatments. *International Conference on Engineering Optimization*, June 2008.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Rio de Janeiro: LTC, 1995.
- MASTOLOGIA, S. B. de. *Câncer de mama*. 2014. [Http://www.sbmastologia.com.br/](http://www.sbmastologia.com.br/).
- MISHRA, S. C.; DAS, K. Estimation of tumor characteristics in a breast tissue with known skin surface temperature. *Journal of Thermal Biology*, v. 38, n. 6, p. 311–317, August 2013.
- MISHRA, S. C.; DAS, K.; SINGH, R. Numerical analysis for determination of the presence of a tumor and estimation of its size and location in a tissue. *Journal of Thermal Biology*, v. 38, n. 1, p. 32–40, January 2013.
- MITAL, M.; PIDAPARTI, R. M. Breast tumor simulation and parameters estimation using evolutionary algorithms. *Modeling and Simulation in Engineering*, v. 2008, n. 4, February 2008.

- MITCHELL, J. W.; MYERS, G. E. An analytical model of the countercurrent heat exchange phenomena. *Biophysical Journal*, v. 8, p. 897–911, 1968.
- MITRA, S.; BALAJI, C. A neural network based estimation of tumor parameters from a breast thermogram. *International Journal Heat and Mass Transfer*, v. 53, n. 21-22, p. 47–4727, October 2010.
- NAKAYAMA, A.; KUWAHARA, F. A general bioheat transfer model based on the theory of porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, n. 11-12, p. 3190–3199, June 2008.
- NARASIMHAN, A.; JHA, K. K. Three-dimensional bio-heat transfer simulation of sequential and simultaneous retinal laser irradiation. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 50, n. 7, p. 1191–1198, July 2011.
- NG, E. Y. K.; SUDHARSAN, N. M. Effect of blood flow, tumor and cold stress in a female breast: a novel time-accurate computer simulation. *Journal of Engineering in Medicine*, v. 215, p. 393–404, April 2001.
- ONCOGUIA. *Tipos de câncer de mama*. 2014. [Http://www.oncoguia.org.br/conteudo/tipos-de-cancer-de-mama/1382/34/](http://www.oncoguia.org.br/conteudo/tipos-de-cancer-de-mama/1382/34/).
- PARUCH, M.; MAJCHRAK, E. Identification of tumor region parameters using evolutionary algorithm and multiple reciprocity boundary element method. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 20, n. 5, p. 647–655, August 2007.
- PATANKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. [S.l.]: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- PENNES, H. H. Analysis on tissue arterial blood temperature in the resting human forearm. *Applied Physiology*, v. 1, n. 2, p. 93–122, August 1948.
- RODRIGUES, D. *et al.* Study of the one dimensional and transient bioheat transfer equation: Multi-layer solution development and applications. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 62, p. 153–162, July 2013.
- ROETZEL, W.; XUAN, Y. Transient response of the human limb to an external stimulant. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 41, n. 1, p. 229–239, 1998.
- SILVA, G. da *et al.* The use of an axisymmetric formulation of the finite volume method for the thermal analysis of the retina and ocular tissues following implantation of retinal prosthesis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 34, n. 3, p. 308–313, July 2012.
- SILVA, J. D. da; LYRA, P. R. M.; LIMA, R. C. F. de. Análise computacional do dano térmico no olho humano portador de um melanoma de coróide quando submetido à termoterapia transpupilar a laser. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, v. 29, n. 1, p. 57–69, 2013.

VYAS, R.; RUSTGI, M. L. Green's function solution to the tissue bioheat equation. *Journal of Medical Physics*, v. 19, n. 5, p. 1319–1324, 1992.

WEINBAUM, S.; JIJI, L. M. A new simplified bioheat equation for the effect of blood flow on local average tissue temperature. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 107, n. 2, p. 131–139, 1985.

WINNIKOW, E. *Anatomia da mama*. 2014. [Http://www.centrodemama.com.br/](http://www.centrodemama.com.br/).

WULFF, W. The energy conservation equation for living tissue. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 21, p. 494–495, November 1974.

ZHANG, H. Lattice boltzmann method for solving bioheat equation. *Physics in Medicine and Biology*, v. 53, n. 15-23, 2008.

Anexo A

Mudanças de variáveis a partir da equação de Pennes 1D

Apresenta-se neste anexo o desenvolvimento matemático para a obtenção das mudanças de variáveis necessárias para a solução unidimensional da equação de Pennes usando funções de Green. A equação de Pennes 1D é dada por:

$$k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + w \rho_s c_s (T_a - T(x, t)) + Q_m = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

Onde as condições de contorno são:

$$T(0, t) = T_c \quad (\text{A.2a})$$

$$-k \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = h(T(x, t) - T_\infty) \quad (\text{A.2b})$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = T_0 \quad (\text{A.2c})$$

Fazendo $m^2 = \frac{w \rho_s c_s}{k}$ e $Q = w \rho_s c_s T_a + Q_m$, dividindo a Eq. A.1 por k , e sabendo que $\frac{\rho c}{k} = \frac{1}{\alpha}$, fica:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - m^2 T(x, t) + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

A partir deste momento necessitaremos de duas mudanças de variáveis para que seja possível a aplicação das funções de Green. A primeira mudança de variável é dada pela Eq. A.4.

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty \quad (\text{A.4})$$

Derivando a Eq. A.4 pela primeira vez em relação à x , tem-se

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

Derivando a Eq. A.5 em relação à x , obtém-se

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{A.6})$$

E derivando a Eq. A.4 em relação à t , tem-se

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

Substituindo as Eqs. A.5, A.6 e A.7 na Eq. A.3, fica:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - m^2(\theta(x, t) + T_\infty) + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

Reescrevendo a Eq. A.8

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - m^2\theta(x, t) + \frac{Q - m^2kT_\infty}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

Para facilitar a manipulação da Eq. A.9, faz-se $Q' = Q - m^2kT_\infty$, assim:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - m^2\theta(x, t) + \frac{Q'}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

Onde Q' é expresso por:

$$Q' = Q - m^2kT_\infty \Rightarrow Q' = w\rho_s c_s T_a + Q_m - \frac{w\rho_s c_s k T_\infty}{k} \Rightarrow Q' = Q_m + w\rho_s c_s (T_a - T_\infty)$$

Reescrevendo Eq. A.9

As condições de contorno após a mudança para variável $\theta(x, t)$, são dadas por:

$$\theta(0, t) = T(0, t) - T_\infty \Rightarrow \theta(0, t) = T_c - T_\infty \quad (\text{A.11a})$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(\theta(x, t) + T_\infty - T_\infty) \Rightarrow -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(\theta(x, t)) \quad (\text{A.11b})$$

e à condição inicial

$$\theta(x, 0) = T(x, 0) - T_\infty \Rightarrow \theta(x, 0) = T_0 - T_\infty \quad (\text{A.11c})$$

A segunda e última mudança de variável é proposta por Beck *et al.* (1992), e expressa pela Eq. A.12.

$$\theta(x, t) = W(x, t)e^{-m^2\alpha t} \quad (\text{A.12})$$

Derivando-se a Eq. A.12 em relação à x , obtém-se

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} e^{-m^2\alpha t} \quad (\text{A.13})$$

Derivando-se a Eq. A.13 em relação à x , obtém-se

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} e^{-m^2\alpha t} \quad (\text{A.14})$$

E derivando a Eq. A.12 em relação à t , tem-se

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} e^{-m^2\alpha t} + W(x, t)(-m^2\alpha)e^{-m^2\alpha t} \quad (\text{A.15})$$

Finalmente, substituindo as Eqs. A.13, A.14 e A.15 na Eq. A.10, tem-se

$$\frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} e^{-m^2\alpha t} - m^2 W(x, t) e^{-m^2\alpha t} + \frac{Q'}{k} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} e^{-m^2\alpha t} + W(x, t)(-m^2\alpha)e^{-m^2\alpha t} \right] \quad (\text{A.16})$$

Multiplicando a Eq. A.16 por $e^{m^2\alpha t}$, obtém-se

$$\frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + \frac{Q'}{k} e^{m^2\alpha t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \quad (\text{A.17})$$

Logo, após a mudança para a variável "W(x,t)", as condições de contorno são dadas por:

$$W(0, t) = \theta(0, t)e^{m^2\alpha t} \Rightarrow W(0, t) = (T_c - T_\infty)e^{m^2\alpha t} \quad (\text{A.18a})$$

$$-k \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} e^{-m^2\alpha t} \Big|_{x=L} = hW(x, t)e^{-m^2\alpha t} \Rightarrow -k \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = hW(x, t) \quad (\text{A.18b})$$

e à condição inicial

$$W(x, 0) = \theta(x, 0)e^{m^2\alpha 0} \Rightarrow W(x, 0) = T_0 - T_\infty \quad (\text{A.18c})$$

Anexo B

Verificação da solução da equação de Pennes

Apresenta-se neste anexo a verificação entre a solução obtida para a equação de Pennes 1D usando funções de Green e a equação clássica da difusão de calor.

A equação unidimensional da difusão de calor é dada por:

$$k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + Q_m = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (\text{B.1})$$

Onde as condições de contorno são:

$$T(0, t) = T_c \quad (\text{B.2a})$$

$$-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T(x, t) - T_\infty) \quad (\text{B.2b})$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = T_0 \quad (\text{B.2c})$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty \quad (\text{B.3})$$

A Eq. B.1 pode ser escrita por

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + \frac{Q_m}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \quad (\text{B.4})$$

Sujeita as condições de contorno

$$\theta(0, t) = T(0, t) - T_\infty \Rightarrow \theta(0, t) = T_c - T_\infty \quad (\text{B.5a})$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(\theta(x, t) + T_\infty - T_\infty) \Rightarrow -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(\theta(x, t)) \quad (\text{B.5b})$$

e à condição inicial

$$\theta(x, 0) = T(x, 0) - T_\infty \Rightarrow \theta(x, 0) = T_0 - T_\infty \quad (\text{B.5c})$$

A solução da equação clássica da difusão de calor usando o método das funções de Green é dada por:

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \left\{ -2(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos(\beta_n) - 1]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B)} \right. \\ & \frac{-2L^2 Q_1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right) - 1]}{\beta_n^3 (\beta_n^2 + B^2 + B)} \\ & \frac{-2L^2 Q_2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right)]}{\beta_n^3 (\beta_n^2 + B^2 + B)} \\ & \frac{-2L^2 Q_1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos(\beta_n) - \cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right)]}{\beta_n (\beta_n^3 (\beta_n^2 + B^2 + B))} \\ & \left. + 2(T_c - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{L^2}}) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B)} \right\} e^{-m^2 \alpha t} + T_\infty \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Para realizar-se as devidas comparações entre as duas soluções, será considerado o termo de perfusão sanguínea da solução da equação de Pennes obtida no capítulo 3 igual a zero. Todas as outras propriedades e parâmetros são as mesmas mencionadas no início do capítulo 4. As Fig. B.1, B.2 e B.3 apresentam a comparação entre as soluções clássica e da biotransferência de calor. Observa-se que não há erro entre as soluções, tornando assim a solução da

equação de Pennes válida para os estudos realizados neste trabalho.

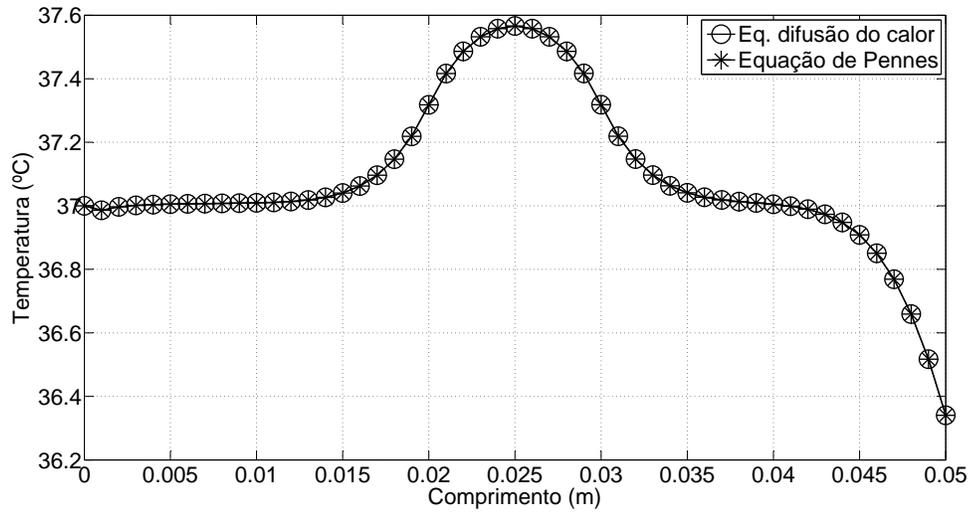


Figura B.1: Evolução das temperaturas ao longo do domínio usando as soluções analíticas da equação clássica da difusão de calor e a equação da biotransferência de calor considerando o termo de perfusão nulo após 60s.

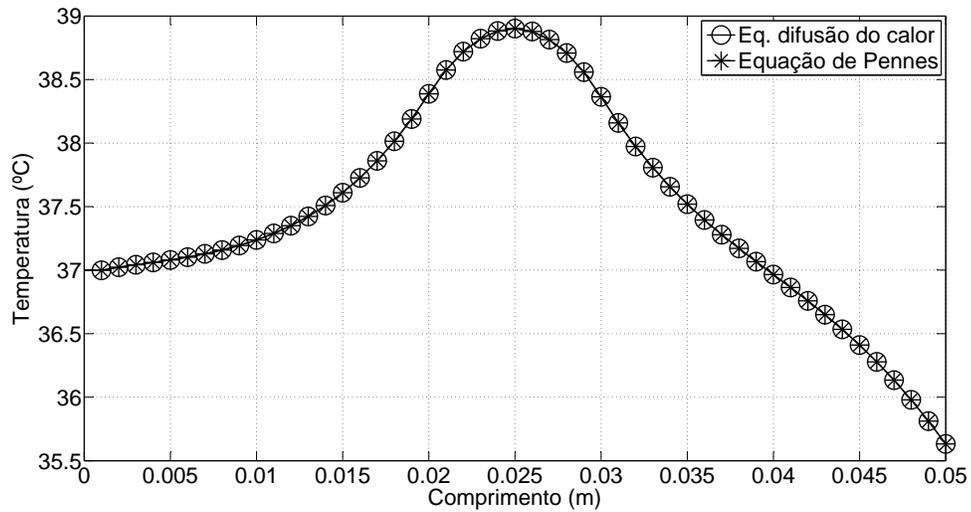


Figura B.2: Evolução das temperaturas ao longo do domínio usando as soluções analíticas da equação clássica da difusão de calor e a equação da biotransferência de calor considerando o termo de perfusão nulo após 300s.

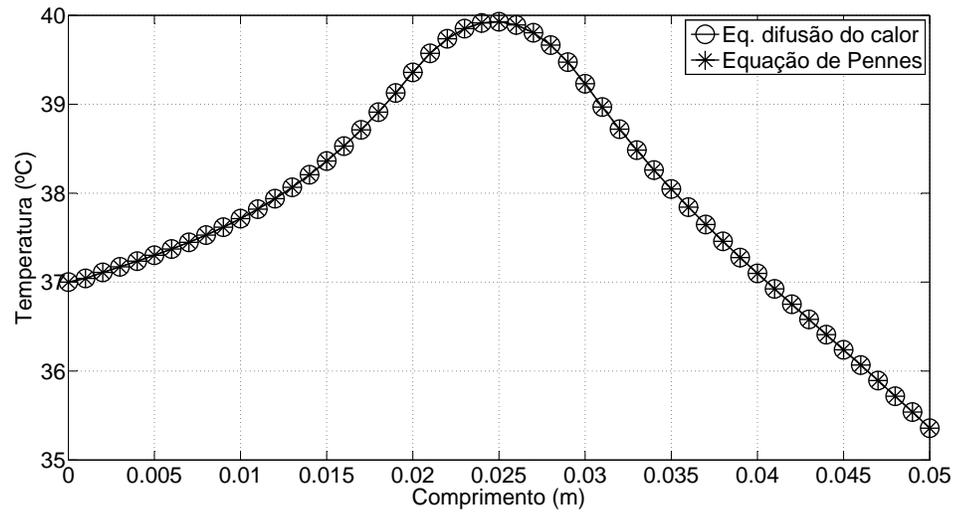


Figura B.3: Evolução das temperaturas ao longo do domínio usando as soluções analíticas da equação clássica da difusão de calor e a equação da biotransferência de calor considerando o termo de perfusão nulo após 600s.