

**POLLIANA CÂNDIDA OLIVEIRA MARTINS**

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO  
VISCOELÁSTICO NO FENÔMENO AEROELÁSTICO  
DE FLUTTER**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2014**

*Página intencionalmente deixada em branco*

**POLLIANA CÂNDIDA OLIVEIRA MARTINS**

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO  
VISCOELÁSTICO NO FENÔMENO AEROELÁSTICO DE FLUTTER**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

**Área de Concentração:** Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

**Orientador:** Prof. Domingos Alves Rade

**Coorientador:** Prof. Flávio Donizeti Marques (EESC-USP)

**UBERLÂNDIA – MG**

**2014**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- 
- M386e  
2014
- Martins, Polliana Cândida Oliveira, 1989-  
Estudo da influência do amortecimento viscoelástico no Fenômeno Aeroelástico de Flutter / Polliana Cândida Oliveira Martins. - 2014.  
148 f. : il.
- Orientador: Domingos Alves Rade.  
Coorientador: Flávio Donizeti Marques.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Aeroelasticidade - Teses. 3. Viscoelasticidade - Teses. 4. Amortecimento - Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. Marques, Flávio Donizeti. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

**POLLIANA CÂNDIDA OLIVEIRA MARTINS**

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO  
VISCOELÁSTICO NO FENÔMENO AEROELÁSTICO DE FLUTTER**

Dissertação **APROVADA** pelo programa  
de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da  
Universidade Federal de Uberlândia.

**Área de Concentração:** Mecânica dos Sólidos e  
Vibrações.

Banca Examinadora

---

Prof. Dr. Domingos Alves Rade - UFU- Orientador

---

Prof. Dr. Flavio Donizeti Marques – EESC - USP

---

Prof. Dr. Roberto Gil Annes da Silva - ITA

---

Prof. Dr. Valder Steffens Junior - UFU

**Uberlândia, 28 de Fevereiro de 2014**

*Página intencionalmente deixada em branco*

## AGRADECIMENTOS

A todos os membros do Laboratório de Mecânica das Estruturas José Eduardo Tannús Reis, em especial aos alunos de iniciação científica, mestrandos e doutorandos, que viveram intensamente esses dias de luta e pesquisa. Saúdo especialmente a Karina Mayumi Tsuruta, Edson Hideki Koroishi, Marco Túlio Santana Alves, Leonardo Sanches, Thiago de Paula Sales, Thales Renato Trevilato. Mais do que colegas de trabalho, amigos. Obrigada pelos ensinamentos de vida, pelas contribuições e pelo fato de fazerem o nosso ambiente de trabalho mais agradável e divertido.

Ao meu orientador, Domingos Alves Rade, pela já longa parceria, meus agradecimentos por todo o conhecimento e dedicação a mim cedidos.

Ao meu coorientador Flávio Marques, que me ajudou a compreender um pouco mais desse mundo sustentado por asas.

A todos os professores com os quais eu tive o prazer de aprender, em especial os professores Valder Steffen Junior, Antônio Marcos de Lima, Roberto Gil Annes da Silva, que colaboraram na minha formação pessoal e profissional.

Aos familiares que apoiaram e entenderam a importância dessa fase complexa da minha formação.

A Universidade Federal de Uberlândia, em especial à Faculdade de Engenharia Mecânica e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela acolhida desde o início da graduação até a conclusão dessa dissertação.

A CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo auxílio financeiro.

A Deus, pela renovação da força e vontade de fazer melhor todos os dias.

*Página intencionalmente deixada em branco*

MARTINS, P.C.O.. **Estudo da Influência do Amortecimento Viscoelástico no Fenômeno Aeroelástico de *Flutter***. 2014. 148f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## RESUMO

O presente trabalho investiga a influência do amortecimento viscoelástico sobre o fenômeno de instabilidade aeroelástica do tipo *flutter*. A análise de estabilidade aeroelástica é realizada utilizando modelos de seção típica de dois e três graus de liberdade. No primeiro modelo, são considerados os movimentos verticais e de rotação do aerofólio ao passo que, no segundo caso, a rotação de uma superfície de controle associada também é considerada. O amortecimento viscoelástico é introduzido nas molas que formam a suspensão do aerofólio. No que diz respeito à modelagem aerodinâmica, é assumida a teoria não estacionária, a qual considera os efeitos de esteira associados ao escoamento de ar. O método de solução de *flutter* empregado é o Método k, ou Método V-g. O objetivo geral desse trabalho é avaliar a influência do comportamento viscoelástico na velocidade crítica de *flutter*, especialmente visando comprovar a possibilidade de que o aumento do amortecimento proporcionado pelo material viscoelástico possa ampliar a margem de estabilidade dinâmica. As equações do movimento são modificadas para levar em conta a dependência do comportamento viscoelástico em relação à frequência e à temperatura, utilizando os conceitos de módulo complexo e fator de deslocamento. Quando a análise é feita no domínio do tempo, é utilizado o modelo de derivadas fracionárias para representar o comportamento viscoelástico, associada a uma aproximação por funções racionais da aerodinâmica envolvida. As simulações numéricas levam a concluir que a inserção do amortecimento viscoelástico pode aumentar efetivamente a faixa de estabilidade do modelo assumido. Ainda, por meio de avaliações paramétricas realizadas observa-se a forte dependência do comportamento aeroviscoelástico em relação à temperatura de operação e às características geométricas dos dispositivos viscoelásticos.

---

Palavras Chave: Aeroelasticidade, Flutter, Viscoelasticidade, Amortecimento.

*Página Intencionalmente deixada em branco*

MARTINS, P.C.O.. **A Study of the Influence of Viscoelastic Damping on Aeroelastic Flutter Phenomenon.** 2014. 148f. M.Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

## ABSTRACT

This work proposes an investigation of the influence of viscoelastic damping on the dynamic aeroelastic behavior of aeronautical systems. The stability analysis is made by using typical section models with two and three degrees of freedom. In the first one plunge and pitch motions are considered and in the second the rotation of a control surface is also included. The viscoelastic damping is introduced in the system as dissipative devices which act as viscoelastic springs. Regarding the aerodynamic modeling, it is assumed unsteady theory, which considers the vorticity effects associated to air flow. The k method is used to calculate the flutter boundaries. The goal of this work is to evaluate the influence of viscoelastic behavior on critical *flutter* speed. The equations of motion are modified to take into account the dependence of the viscoelastic behavior with respect to frequency and temperature, using the concepts of complex modulus and shift factor. In the time domain analyses it is used the fractional derivative model to represent the viscoelastic behavior, associated to a rational function approximation of the aerodynamics. The numerical simulations lead to conclude that the viscoelastic damping can effectively increase the *flutter* speed range. Furthermore, the parametric evaluation conducted shows the strong dependence of the aeroviscoelastic behavior with respect to temperature and geometry of the viscoelastic suspension devices.

---

Keywords: Aeroelasticity, Flutter, Viscoelasticity, Damping.

*Página Intencionalmente deixada em branco*

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Arábicos

$a$	Fator de Posicionamento do centro elástico
$a_{\infty} [m / s]$	Velocidade do som
$b [m]$	Semicorda do aerofólio
$c [m]$	Corda média da seção típica
$d_1, d_2, d_3 [m]$	Dimensões do material viscoelástico
$e$	Fator de posicionamento do centro de massa
$f$	Fator de posicionamento do ponto de pivotamento da superfície de controle
$g$	Amortecimento fictício característico do método K.
$h [m]$	Grau de liberdade de deslocamento.
$k$	Frequência reduzida aerodinâmica
$k_h, k_{\alpha}, k_{\beta} [N / m]$	Rigidez das Molas de translação, rotação da superfície principal e da superfície de controle.
$k_{vh}, k_{v\alpha}, k_{v\beta} [N / m]$	Rigidez viscoelástica das molas de translação, rotação da superfície principal e da superfície de controle.
$m$	Número de Mach
$m_a [Kg]$	Massa do Aerofólio
$p_{\infty} [N / m^2]$	Pressão dinâmica
$r_{\alpha}, r_{\beta}$	Raio de giração da seção principal e da superfície de controle
$A [N]$	Força tangencial
$C(k)$	Função de Theodorsen
$C_L, C_M, C_D$	Coeficientes de sustentação, de momento e de arrasto
$D [N]$	Força de arrasto aerodinâmico
$E [Pa]$	Módulo de elasticidade
$E_{ij}$	Erro quadrático da aproximação por funções racionais

$E_0 [Pa]$	Módulo estático do material viscoelástico
$E_\infty [Pa]$	Módulo dinâmico do material viscoelástico
$F(\sigma_0, t)$	Função de fluência do material viscoelástico
$G(t)$	Função módulo do material viscoelástico
$G(\omega)$	Módulo complexo do material viscoelástico
$G'(\omega)$	Módulo de armazenamento do material viscoelástico
$G''(\omega)$	Módulo de perda do material viscoelástico
$J_0, J_1, Y_0, Y_1$	Funções de Bessel
$K [J]$	Energia cinética
$L [N], M_\alpha [Nm] e M_\beta [Nm]$	Força aerodinâmica, momento aerodinâmico de arfagem e momento aerodinâmico de superfície de controle.
$\bar{L}, \bar{M}_\alpha, \bar{M}_\beta$	Força e momentos aerodinâmicos adimensionalizado
$N [N]$	Força normal
$N_r$	Número de termos de atraso
$N_m$	Numero de modos
$N_{es}$	Numero de estados
$R(\varepsilon_0, t)$	Função relaxação
$Re$	Número de Reynolds
$S [m^2]$	Área de referência
$S_\alpha, S_\beta [m^3]$	Momentos estáticos da superfície principal e da superfície de controle
$T [K]$	Temperatura
$T_0 [K]$	Temperatura de referência do material viscoelástico
$T_1, T_2, \dots, T_{14}$	Constantes de Theodorsen
$V [J]$	Energia potencial
$[A]$	Matriz dinâmica

$[A(k)]$	Matriz aerodinâmica exata
$[\hat{A}(k)]$	Matriz aerodinâmica aproximada
$[B]$	Matriz de entrada
$[B_c]$	Matriz de amortecimento circulatória
$[B_e]$	Matriz de entrada do modelo aeroviscoelástico em derivadas fracionárias.
$[B_{nc}]$	Matriz de amortecimento não circulatória
$[C]$	Matriz de amortecimento
$[D]$	Matriz de transmissão direta
$[D_v]$	Matriz dinâmica aeroviscoelástica
$[K]$	Matriz de rigidez
$[K_v]$	Matriz de rigidez viscoelástica
$[K_c]$	Matriz de rigidez circulatória
$[M]$	Matriz de massa
$[M_{nc}]$	Matriz de massa não circulatória
$R[N]$	Força resultante aerodinâmica
$\{q(t)\}$	Vetor de coordenadas generalizadas
$\{u\}$	Vetor de entradas
$\{x(t)\}, \{\dot{x}(t)\} e \{\ddot{x}(t)\}$	Vetores dos graus de liberdade em deslocamento, velocidade e aceleração
$\{x_A(t)\}$	Vetor de termos de atraso
$\{F(t)\}$	Forças externas
$\{P\}$	Força cisalhante atuando no material viscoelástico
$\{Q(t)\}$	Vetor de forças generalizadas

**Gregos**

$\alpha[rad], \beta[rad]$	Graus de liberdade rotação da superfície principal e rotação da superfície de controle.
$\delta[m]$	Deslocamento linear do material viscoelástico
$\rho_{\infty}[kg / m^3]$	Densidade do ar
$\{\xi(t)\}$	Vetor de estados
$\mu$	Massa aparente
$\gamma$	Termo de atraso
$\omega[rad / s]$	Frequência
$\omega_h, \omega_{\alpha} e \omega_{\beta}[rad / s]$	Frequências naturais associadas aos movimentos de translação, rotação e rotação da superfície de controle
$\phi(t)$	Função de Wagner
$\gamma(x)$	Função vorticidade
$\lambda$	Autovalor
$\sigma(t)$	Tensão normal
$\varepsilon(t)$	Deformação
$\omega_r$	Frequência reduzida
$\alpha_t$	Fator de deslocamento viscoelástico
$\tau$	Tempo adimensional
$\delta W$	Trabalho virtual

## SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS.....</b>	<b>v</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>ix</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>xi</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>xiii</b>
<b>SUMÁRIO .....</b>	<b>xvii</b>
<b>CAPÍTULO I.....</b>	<b>21</b>
<b>1.1 Contextualização e motivações.....</b>	<b>21</b>
<b>1.2 Objetivos .....</b>	<b>28</b>
<b>1.3 Organização do Trabalho.....</b>	<b>28</b>
<b>CAPÍTULO II .....</b>	<b>31</b>
<b>2.1 Supressão de fenômenos aeroelásticos.....</b>	<b>31</b>
<b>2.2 Viscoelasticidade aplicada no controle passivo de vibrações estruturais.....</b>	<b>36</b>
<b>CAPÍTULO III.....</b>	<b>39</b>
<b>3.1 Princípios de aerodinâmica .....</b>	<b>41</b>
3.1.1 <i>Aerodinâmica estacionária .....</i>	<i>44</i>
3.1.2 <i>Aerodinâmica não-estacionária .....</i>	<i>46</i>
3.1.3 <i>Aerodinâmica quasi-estacionária .....</i>	<i>53</i>
<b>3.2 Análise de estabilidade aeroelástica do tipo flutter .....</b>	<b>54</b>
3.2.1 <i>Métodos de cálculo de flutter .....</i>	<i>54</i>
<b>3.3 Análise Aeroelástica no domínio do tempo.....</b>	<b>58</b>

3.3.1	<i>Aproximação por funções racionais.....</i>	59
3.3.2	<i>Representação em espaço de estados.....</i>	62
<b>CAPÍTULO IV.....</b>		<b>65</b>
4.1	<b>Introdução à viscoelasticidade linear.....</b>	<b>65</b>
4.1.1	<i>Material viscoelástico comercial 3M ISD112® .....</i>	<i>71</i>
4.2	<b>Modelo Derivativo Fracionário .....</b>	<b>74</b>
<b>CAPÍTULO V .....</b>		<b>77</b>
5.1	<b>Modelo de seção típica de dois graus de liberdade .....</b>	<b>77</b>
5.1.1	<i>Incorporação das molas viscoelásticas ao modelo de 2 GDL.....</i>	<i>84</i>
5.2	<b>Modelo de seção típica com superfície de controle.....</b>	<b>87</b>
5.2.1	<i>Incorporação das molas viscoelásticas no modelo de 3 GDL.....</i>	<i>92</i>
5.3	<b>Análise de respostas no domínio do tempo.....</b>	<b>93</b>
<b>CAPÍTULO VI.....</b>		<b>95</b>
6.1	<b>Simulações com modelo de seção típica de dois graus de liberdade.....</b>	<b>95</b>
6.1.1	<i>Influência da natureza do escoamento de ar.....</i>	<i>96</i>
6.1.2	<i>Análise comparativa entre a seção típica aeroelástica e a seção aeroviscoelástica. ....</i>	<i>98</i>
6.1.3	<i>Avaliação da influência do amortecimento viscoelástico.....</i>	<i>101</i>
6.1.4	<i>Influências Paramétricas no comportamento do dispositivo viscoelástico.....</i>	<i>105</i>
6.1.4.1	<i>Análise da influência da variação da temperatura no modelo aeroviscoelástico.....</i>	<i>105</i>
6.1.4.2	<i>Influência das características geométricas dos dispositivos viscoelásticos</i>	
110		
6.1.5	<i>Análise de estabilidade no domínio do tempo.....</i>	<i>111</i>

6.1.5.1	<i>Análise do sistema aeroelástico no espaço de estados.</i>	113
6.1.5.2	<i>Análise do sistema aeroviscoelástico.</i>	117
<b>6.2</b>	<b>Seção típica incluindo superfície de controle.</b>	<b>122</b>
6.2.1	<i>Análise comparativa entre sistema aeroelástico e sistema aeroviscoelástico.</i>	123
6.2.2	<i>Análise da inserção de dispositivo viscoelástico na junção aerofólio-superfície de controle.</i>	125
6.2.3	<i>Análise temporal da seção típica de três graus de liberdade.</i>	126
6.2.3.1	<i>Análise do sistema aeroelástico.</i>	129
6.2.3.2	<i>Análise do sistema aeroviscoelástico.</i>	133
<b>CAPÍTULO VII</b>		<b>137</b>
<b>CAPÍTULO VIII</b>		<b>141</b>

*Página Intencionalmente deixada em branco*

# CAPÍTULO I

## Introdução

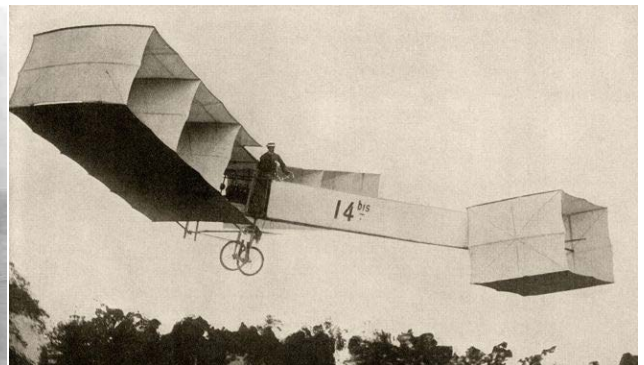
### 1.1 Contextualização e motivações

A história da aeronáutica é relativamente recente, datando do início do século passado. Ainda há muitas divergências a respeito da autoria do primeiro voo de uma aeronave; alguns creditam este feito ao brasileiro Santos Dumont e outros defendem o pioneirismo dos irmãos Wright (Fig. 1.1).

Mas, independentemente dessa controvérsia, o antigo desejo de voar do homem foi alcançado e hoje inúmeras atividades seriam impossíveis sem essa capacidade. As aeronaves assumiram, com o passar dos anos, um papel essencial na atividade humana, desde o provimento de transporte eficiente e seguro, tanto de pessoas quanto de mercadorias, até em sistemas de defesa, monitoramento e segurança militar.



(a)



(b)

Figura 1.1 – (a) Irmãos Wright no Flyer e (b) Santos Dumont no 14 Bis. (DISCOVERY BRASIL, 2013).

Foi justamente em aplicações militares, durante as grandes guerras mundiais, que ocorreu um salto tecnológico significativo na aviação. Primeiramente, as aeronaves eram utilizadas para espionagem das táticas inimigas até quando se percebeu a possibilidade de utilizá-las como armas em combate direto. Com o fim da Primeira Grande Guerra, a tecnologia aeronáutica até então desenvolvida foi utilizada para prover transporte de passageiros, dando origem à Era de Ouro da Aviação, ocorrida no período entre as duas guerras mundiais. Com a chegada da Segunda Guerra Mundial, a história da aviação foi marcada pela utilização dos primeiros bombardeiros e dos primeiros aviões de caça.

Apesar do grande avanço dado neste período, ainda hoje há um grande esforço de engenheiros e projetistas para desenvolvimento de tecnologias focadas na melhoria de desempenho geral de aeronaves, seja para aplicação militar, seja para aeronaves de uso civil. Várias vertentes de pesquisa em aeronáutica se destacam, buscando soluções para alcançar eficiência, economia e segurança e ainda cumprir requisitos de sustentabilidade que hoje fazem parte dos objetivos das empresas.

Nesse processo, uma forte tendência observada consiste na redução de peso das aeronaves, viabilizando melhor relação entre carga paga e consumo de combustível. Isso se dá, na maior parte das vezes, pela utilização de materiais mais leves e com resistência apropriada.

A interação das cargas impostas pelo escoamento aerodinâmico com as forças elásticas e inerciais atuantes sobre as estruturas das aeronaves é objeto de estudo da aeroelasticidade. (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996, COOPER; WRIGTH, 2007; FUNG, 1993, DOWELL *et al.*, 2004).

A aeroelasticidade e suas decorrências passaram a ser levadas em consideração a partir do início da Segunda Guerra Mundial, visto que as aeronaves até então operavam em velocidades baixas e eram constituídas de materiais rígidos e pesados, fato esse que evitava a ocorrência de tais fenômenos (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996).

Os fenômenos aeroelásticos mais comuns são a divergência, o *flutter*, o *buffeting* e a resposta à rajada.

A divergência é um fenômeno de aeroelasticidade estática, ou seja, no qual as forças inerciais são desprezíveis. Ocorre quando a pressão dinâmica do escoamento realimenta a superfície de sustentação de tal forma que os deslocamentos da estrutura atingem o limite de sua resistência, levando-a ao colapso. A aeronave X-29 (Fig. 1.2), desenvolvida com

enflechamento negativo (para frente), foi uma aeronave militar que apresentou esse tipo de problema.

O *buffeting* consiste em uma excitação que é relacionada às esteiras de escoamento oriundas das asas, motores e fuselagem, as quais produzem impulsos aerodinâmicos que ocasionam vibrações transientes na estrutura da aeronave, de forma mais recorrente no estabilizador vertical. É um fenômeno comum em aeronaves militares, que por voarem em condições de voo particulares (grandes velocidades e grandes ângulos de ataque) geram esteiras de grande magnitude.



Figura 1.2 - Aeronave X-29 que apresentou problemas de divergência devido a seu enflechamento negativo.(WARBIRDSNEWS, 2013).

As respostas dinâmicas ocorrem quando a aeronave é sujeita a rajadas de ar, ou então de outro tipo de força transiente como, por exemplo, o lançamento de mísseis, ocorrência de ondas de choque ou qualquer outro tipo de carregamento dinâmico. Os casos mais comuns são aqueles onde a rajada é oriunda de algum tipo de formação climática adjacente à aeronave em voo. Um caso recente que pode exemplificar a importância desse tipo de estudo é o do voo AF447, rota Rio de Janeiro - Paris, sob responsabilidade da Air France, empresa de linha aérea francesa. No relatório técnico do acidente foram listadas as causas que levaram à queda do avião e dentre elas se encontra a passagem por uma região de instabilidade climática que levou à quebra do leme. De acordo com o relatório enviado às autoridades brasileiras, verificou-se que durante o voo houve uma dificuldade no manejo da aeronave durante

turbulência a elevadas altitudes, visto que foram verificados comandos exagerados de rolagem de nariz para cima, executados pelo piloto. Somando-se a isso, a indicação errônea dada pelo congelamento dos tubos de Pitot, e a instabilidade gerada pelos comandos bruscos, prejudicaram o correto diagnóstico da situação por parte da tripulação (BEA, 2013).

O fenômeno aeroelástico de *flutter* é classificado pela maioria dos autores como o problema aeroelástico dinâmico de maior importância e é aquele mais ocupa lugar mais frequente nos estudos em aeroelasticidade (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996; DOWELL *et al.*, 2004). Um caso interessante e clássico a ser citado quando se fala de *flutter* ocorreu na ponte de Tacoma Narrows. A estrutura foi levada ao colapso estrutural devido a um escoamento de ar que interagiu com as propriedades elásticas e inerciais da ponte, conforme pode ser observado na Fig.1.3.

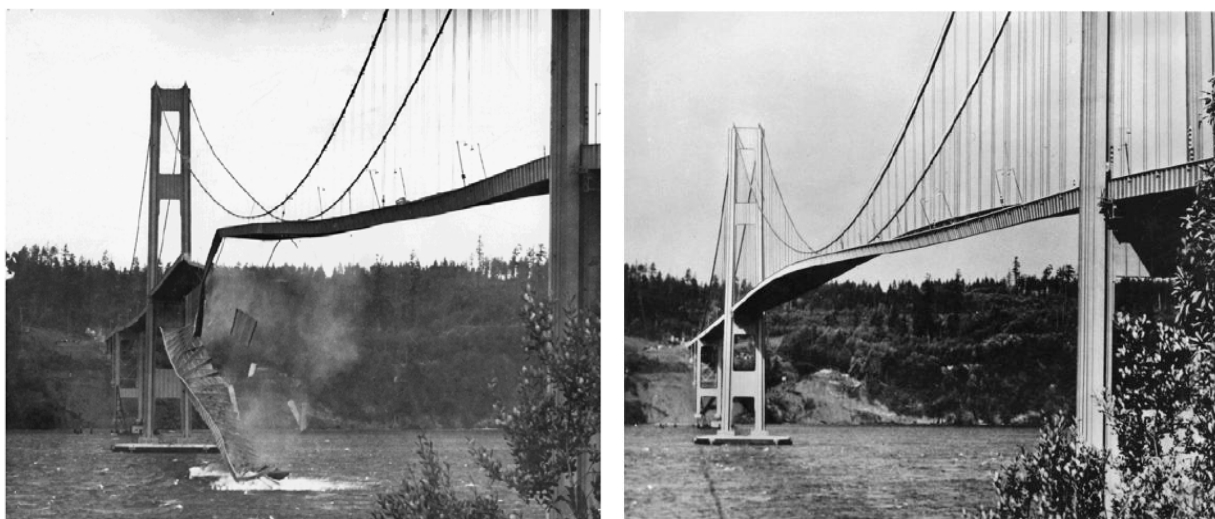


Figura 1.3 - Fenômeno aeroelástico de *flutter* ocorrendo na ponte de Tacoma Narrows (UNIVERSITY LIBRARIES, 2013).

Tratando-se de problemas em aeronaves, credita-se a queda do voo doméstico 542 da Braniff Airways no ano de 1959, em uma aeronave Lockheed Electra, similar à mostrada na Fig. 1.4, a uma falha na asa esquerda devida a oscilações de flexão autoexcitadas (*whirl flutter*) que levaram a aeronave ao colapso estrutural.



Figura 1.4 – Lockheed L-188 Electra (AEROFAVOURITES, 2013).

Dadas as motivações para estudo de prevenção de fenômenos aeroelásticos, vários pesquisadores têm concentrado esforços em buscar a prevenção desses fenômenos e soluções têm sido analisadas para viabilizar sua supressão. Uma vertente razoável consiste na inserção de mecanismos de controle de vibrações.

No controle do tipo ativo, sensores são posicionados na estrutura e por interpretação desses sinais, atuadores são acionados de forma a aplicar algum tipo de força na estrutura, de modo a prevenir o comportamento indesejado. Já no controle do tipo passivo há inserção de materiais ou dispositivos com capacidade de dissipar energia vibratória (amortecedores viscosos ou viscoelásticos, absorvedores dinâmicos de vibração, por exemplo). Pode-se ainda mesclar as duas técnicas em um tipo de controle híbrido.

Embora sejam atrativas, nas técnicas de controle do tipo ativo há dificuldades na aplicação e posicionamento de sensores e atuadores; o custo associado a essa técnica (manutenção, montagem e operação) é relativamente alto; é necessário investir em fontes de potência alternativa, caso haja falta de energia elétrica necessária para o desempenho desse mecanismo (CASCIATI; MAGONETTE; MARAZZI, 2006); no caso de ocorrência de falha do sistema de controle, este pode tornar-se instável, com consequências catastróficas. Dessa forma, o controle passivo ainda é mais desejado, por se tratar de uma alternativa mais simples, barata e segura.

Dentre as estratégias utilizadas para prover controle passivo, inclui-se o uso dos materiais viscoelásticos, que têm a capacidade de dissipar energia vibratória na forma de calor. Esse tipo de material vem sendo frequentemente utilizado nas indústrias de construção civil, aeronáutica, aeroespacial e automobilística (RAO, 2003). Surpreendentemente, a maior

parte de estudos em prevenção aeroelástica é de caráter ativo (SONG; FENG-MING, 2012). Pouco se têm visto a respeito de investigação do uso de técnicas passivas, como inserção de amortecimento do tipo viscoelástico como estratégia de controle.

A maior parte dos polímeros exhibe propriedade viscoelástica. Tal classe de materiais é extremamente ampla e uma gama de produtos comerciais dessa natureza encontra-se disponível no mercado. Alguns exibem combinações específicas para aplicações mais precisas, englobando casos que envolvem desde componentes eletrônicos até grandes estruturas de engenharia civil.

No que tange à forma de aplicação desses materiais, pode-se indicar as fitas de material viscoelástico, como na Fig. 1.5 que são comumente encontradas no mercado. Encontram-se também amortecedores (ou coxins) que fazem uso de viscoelasticidade para diversas utilizações, conforme mostrado na Fig.1.6

Uma aplicação de materiais viscoelásticos na indústria aeronáutica pode ser exemplificada pelos dispositivos SMACSONIC<sup>®</sup>, da fabricante SMAC<sup>®</sup>, que consiste em uma fita constituída de três camadas, sendo uma camada de carbono ou alumínio, um núcleo de material viscoelástico e uma camada adesiva. Esses dispositivos são acoplados na fuselagem com finalidade de supressão de ruído, conforme mostrado na Fig. 1.7

Para construir modelos matemáticos representativos dos fenômenos relacionados à viscoelasticidade, deve-se levar em conta que esse tipo de material é sensível a variações ambientais e operacionais, principalmente à temperatura e à frequência de vibração (JONES, 2001, De LIMA, 2003).

Já em relação ao modelo e equações do movimento de aeronaves flexíveis, é comum a consideração de pequenos deslocamentos angulares para linearização das equações. Modelos de seção típica são equivalentes a modelos de asa de envergadura infinita, por não considerarem efeitos de ponta de asa. Apesar da utilização de modelos de seção típica para representação de uma superfície aeronáutica ser uma aproximação, é usual o emprego desse tipo de modelo para fins de evidenciamento e análise de fenômenos aeroelásticos, haja vista que a construção dos modelos aerodinâmico e estrutural de aeronaves completas não é trivial; existem programas comerciais que possibilitam essa construção e a extensão daquilo que é desenvolvido a partir de uma seção típica.

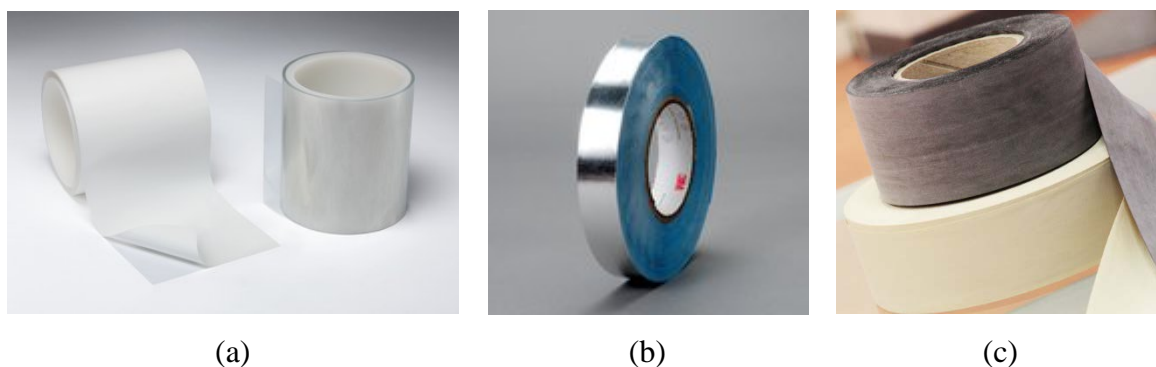


Figura 1.5 - Fitas de material viscoelástico. (a) e (b) fabricadas pela 3M<sup>®</sup> (3M, 2013); (c) fabricada pela SMAC<sup>®</sup> (SMAC, 2013).

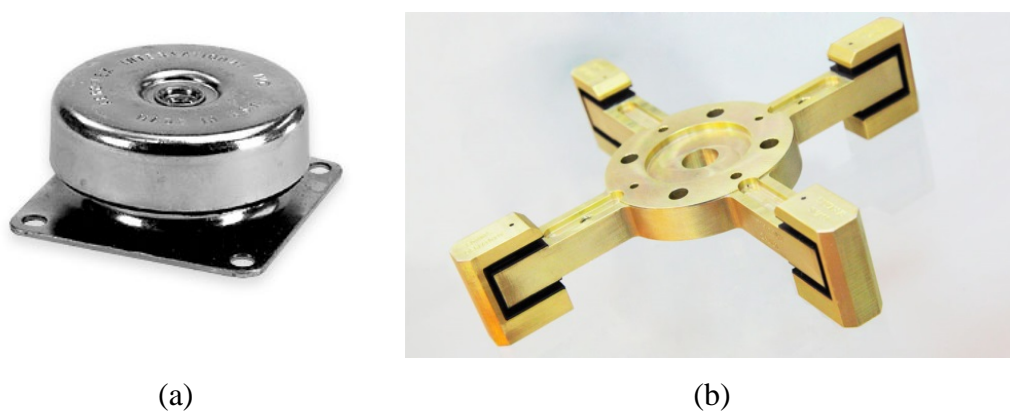


Figura 1.6 - Dispositivos isoladores de vibrações: (a) para máquinas rotativas (ISOTECH, 2013), (b) para satélites (SMAC, 2013).



Figura 1.7 - Aplicação de camada viscoelástica composta em fuselagem de aeronave com finalidade de supressão de ruído (SMAC, 2013).

A motivação para o estudo apresentado nesse trabalho reside na constatação de que dispositivos viscoelásticos discretos ou tratamentos viscoelásticos superficiais são frequentemente utilizados para a atenuação de vibrações. Assim, torna-se importante avaliar a influência da inclusão destes dispositivos sobre a ocorrência de *flutter*, de modo que esta influência venha a ser considerada em projetos aeroelásticos, o que pode proporcionar melhorias no desempenho e redução de custos dos projetos aeronáuticos.

Ainda, o presente trabalho enquadra-se no esforço que está sendo empreendido pelo Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst) para a consolidação da pesquisa na área de Engenharia Aeronáutica, e constitui uma extensão dos trabalhos anteriormente desenvolvidos ao longo de mais de uma década, voltados ao controle de vibrações utilizando materiais viscoelásticos, os quais foram objeto de dissertações e teses, e geração de número significativo de publicações.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral dessa dissertação de mestrado é o estudo de procedimentos passivos de controle de instabilidades aeroelásticas dinâmicas (*flutter*) em estruturas aeronáuticas. Em específico, visa-se à realização de um estudo numérico acerca da influência do amortecimento viscoelástico sobre as velocidades de *flutter*, a partir de modelos de seção típica. Deseja-se apreciar a viabilidade dessa aplicação, realizando o estudo da influência de um conjunto de fatores que influenciam o comportamento do sistema proposto.

## 1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho está organizado em oito capítulos, sendo que este primeiro capítulo apresenta aspectos introdutórios, contextualizando o assunto e apresentando as motivações para a realização do trabalho.

O Capítulo 2 é dedicado a uma revisão bibliográfica. São apresentados sinteticamente os trabalhos que foram utilizados para prover embasamento teórico necessário para o desenvolvimento desse estudo. As referências bibliográficas são divididas entre aquelas que tratam da aeroelasticidade e de formas de supressão de instabilidades aeroelásticas, e aquelas que tratam de trabalhos que lidam com viscoelasticidade aplicada ao controle de vibrações.

O Capítulo 3 traz a fundamentação teórica em aeroelasticidade, necessária para compreensão e desenvolvimento do trabalho de pesquisa.

Em seguida, o Capítulo 4 enfoca a teoria de viscoelasticidade e a modelagem associada.

O Capítulo 5 trata da construção dos modelos matemáticos aeroviscoelásticos de seção típica a serem posteriormente empregados.

O Capítulo 6 apresenta os resultados oriundos das simulações numéricas realizadas de acordo com os modelos desenvolvidos no capítulo precedente. São feitas análises para o caso de modelos de dois e três graus de liberdade, avaliando-se variações paramétricas e suas consequências nos resultados de instabilidade aeroelástica associada.

O Capítulo 7 traz as conclusões e as propostas de continuidade do trabalho de pesquisa.

Finalmente, o Capítulo 8 apresenta as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

*Página Intencionalmente deixada em branco*

## CAPÍTULO II

### Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica relacionada aos temas abordados nessa dissertação, tratando dos trabalhos que mais diretamente contribuem para o desenvolvimento desta pesquisa.

Dois tópicos principais são enfatizados nesse capítulo. O primeiro deles trata das pesquisas relevantes no tocante à supressão de fenômenos aeroelásticos e o segundo trata de estudos que utilizam materiais viscoelásticos para o controle de vibrações.

#### 2.1 Supressão de fenômenos aeroelásticos

As obras de Bisplinghoff; Ashley; Halfman (1996) e Fung (1993) são referências consolidadas na área de aeroelasticidade, sendo estes os livros-texto mais disseminados na área. Grande parte de ambas as obras é dedicada à teoria de vibrações de sistemas mecânicos aplicada a sistemas aeronáuticos como, por exemplo, o cálculo de modos de vibração e frequências naturais de sistemas aeronáuticos, além de deformações em estruturas aeronáuticas sujeitas a carregamentos estáticos e dinâmicos. Após essa revisão, Bisplinghoff; Ashley; Halfman (1996) iniciam as teorias acerca do escoamento aerodinâmico e suas consequências, passando primeiramente por escoamento estacionário para, em um segundo momento, considerar o caso mais complexo de não-estacionariedade. Um capítulo único é dedicado exclusivamente ao fenômeno aeroelástico de *flutter*, no qual são discutidas as características do sistema clássico de dois graus de liberdade.

Na obra de Fung (1993) também é dado enfoque a esse fenômeno aeroelástico, três capítulos sendo dedicados ao assunto. Outra semelhança entre ambas as obras é a presença de capítulos voltados aos procedimentos experimentais para análise aeroelástica.

A obra de Hodges e Pierce (2002) consiste em uma abordagem introdutória, direcionada para aplicação de cunho simples e prático em aeroelasticidade e dinâmica estrutural. Sucintamente, o livro traz três capítulos, sendo o primeiro deles uma introdução à dinâmica estrutural, seguindo-se o capítulo que trata de aeroelasticidade estática e o capítulo que aborda a instabilidade dinâmica de *flutter*, tratando de modelagem de sistemas simples e ainda abordando os métodos clássicos como método k e o método p-k.

Dowell *et al.* (2004) focam o estudo de diversos problemas envolvendo aeroelasticidade. Um capítulo é reservado ao estudo de aeroelasticidade em estruturas civis; outro é focado na resposta aeroelástica de rotores; outro ainda concentra esforços na análise de turbomáquinas e os problemas relacionados com aeroelasticidade. Os autores também disponibilizam um capítulo (assim como Bisplinghoff; Ashley; Halfman (1996) e Fung (1993) ) para tratar de experimentos em aeroelasticidade, discutindo sua necessidade e as lições aprendidas em experimentos. Há que se destacar também a abordagem de não linearidades, que estão cada vez mais presentes em aeroelasticidade (e na maior parte dos estudos em engenharia).

O livro de Cooper e Wright (2007) também é relativamente recente. Estudos de casos de modelos simplificados em aeronáutica são utilizados para introduzir o leitor aos conceitos básicos de teoria das vibrações, para então, na segunda parte da obra, tratar definitivamente as teorias em aeroelasticidade. Muitos casos clássicos também são analisados e estendidos para análises mais complexas. Todavia, os autores não dão enfoque a teorias aerodinâmicas em sua origem, ou seja, utilizam essas equações já prontas para dar enfoque propriamente à aeroelasticidade, mas fornecem as referências necessárias caso o leitor deseje conhecer mais a respeito desse assunto. Métodos clássicos de cálculo de *flutter* são apresentados e comparados, além de teorias básicas para análise tridimensional. São discutidos brevemente os casos de *flutter* cônico e *flutter* de superfícies de controle; comentários também são tecidos a respeito de *flutter* em regimes transônicos e supersônicos. Um capítulo também dá enfoque a aeroservoelasticidade aplicada a casos simples, além de se dedicarem vários capítulos à análise de cargas aerodinâmicas e um capítulo à análise de manobras em solo. Há ainda que se destacar a terceira e última parte da obra que fala de forma geral a respeito do procedimento de certificação de aeronaves no tocante a requisitos de aeroelasticidade. Outro diferencial do

livro é a apresentação de rotinas de programação para casos específicos de estudos de fenômenos de aeroelasticidade nos anexos.

O estudo de aeroelasticidade possui notórias referências nos trabalhos de Theodorsen, que ainda contribuem para pesquisas recentes, apesar de datarem de meados da década de 1930 e 1940. No NACA Report 496 (THEODORSEN, 1934) o autor visa à determinação das forças aerodinâmicas em seções típicas e apresenta a solução do problema identificado por Funções de Bessel, dando origem à função que leva seu nome, a *Função de Theodorsen*. Com base no conhecimento das forças aerodinâmicas são então investigados os mecanismos que causam instabilidade, utilizando o parâmetro *frequência reduzida*. Já no NACA Report 685 (THEODORSEN; GARRICK, 1940) os autores reapresentam a formulação anterior de uma forma julgada mais adequada para avaliar o problema de *flutter* via estudo sistemático de efeitos de diversos parâmetros. O trabalho também apresenta análises experimentais em asas engastadas com e sem superfícies de controle. O procedimento experimental é utilizado para avaliar a fidelidade do modelo teórico e também para analisar a adaptabilidade dessas formulações aos problemas tridimensionais.

A supressão do *flutter* ou mesmo o aumento da velocidade de escoamento na qual ele ocorre, sem geração de penalidades como adição significativa de massa, pode gerar um grande impacto no sentido de melhorar o desempenho de aviões modernos e sua capacidade de atuar até o limite de seu envelope de operação. Isso pode culminar em aumento considerável de sua eficiência e, ao mesmo tempo, aumentar as chances de sobrevivência em ambiente de combate (MARZOCCA; LIBRESCU; SILVA, 2002).

Devido à importância da prevenção do *flutter*, pesquisas consideráveis têm sido desenvolvidas nas últimas décadas a fim de desenvolver e avaliar a capacidade de vários conceitos de controle de *flutter*.

Muitos trabalhos na área de controle ativo de *flutter* são encontrados na literatura. Toda supressão ativa de *flutter* necessita de sensores para detectar o movimento da superfície de controle e para ativá-la de acordo com uma lei de controle pré-definida (NISSIN; BURKEN, 1988).

Librescu; Marzocca; Silva (2005) enfatizam a análise de controle ativo de *flutter* envolvendo correção do atraso no controle *feedback* (retroalimentado), um dos problemas de controle ativo, dada as não-linearidades envolvidas. Dão enfoque a aspectos relacionados ao estudo de aeroelasticidade associado a sistemas de controle em malha aberta e em malha fechada, em uma superfície bidimensional imersa em escoamento incompressível. As

implicações da presença do atraso no controle *feedback* no limite de instabilidade são investigadas e verifica-se que este atraso pode ser prejudicial do ponto de vista de previsão da resposta aeroelástica, mas benéfico do ponto de vista de instabilidade de *flutter*, mas apenas para pequenos atrasos.

Nissin e Burken, (1988) apresentam um método baseado no conceito de energia aerodinâmica para determinar a localização de maior efetividade para supressão de *flutter*; dessa forma, não é necessário utilizar nenhuma lei de controle associada. Esse método permite determinar a distribuição, sobre diferentes superfícies do avião, da energia entrando no sistema como um resultado da instabilidade de *flutter*.

Waszak e Srinathkuman (1992) trabalharam na validação teórica e experimental de uma lei de controle para operar um sistema de controle ativo de um modelo de asa flexível ensaiado em túnel de vento. A abordagem do projeto consiste em um entendimento fundamental do mecanismo de *flutter*, para a formulação de uma lei de controle mais simplificada e eficaz possível. Nos resultados encontrados no ensaio, o controlador de *flutter* foi capaz de suprimir dois modos de *flutter*, sendo combinado com um controlador de manobra de rolagem, a fim prover maior eficiência no caso de manobras rápidas dessa natureza.

Mais recentemente, Zhang e Ye (2010) apresentaram um estudo a respeito dos efeitos da superfície de controle no fenômeno de instabilidade de *flutter* em escoamento transônico e verificaram que os procedimentos comuns como balanceamento estático das superfícies de controle podem ajudar a estender os limites de estabilidade da aeronave, mesmo em regime transônico.

Ainda, uma vertente em controle ativo consiste na utilização de materiais inteligentes, mais especialmente materiais piezelétricos, para supressão de fenômenos aeroelásticos. Ardelean *et al.* (2006) propõem controle ativo de *flutter* por meio de atuadores piezoelétricos do tipo V-Stack (projetado e testado na Universidade Duke). O atuador é incorporado à superfície de controle de uma seção de asa para análise experimental e são encontrados resultados satisfatórios no que diz respeito à atuação do dispositivo piezelétrico e, conseqüentemente, da superfície de controle. Verificou-se aumento de velocidade de *flutter* de aproximadamente 30% quando da operação em malha fechada.

O *flutter* de painel (*panel flutter*) é uma instabilidade dinâmica que ocorre nos painéis que recobrem superfícies aeronáuticas. Os casos mais comuns ocorrem em foguetes. Koo e Hwang (2004) se dedicaram ao estudo desse tipo de *flutter*, analisando os efeitos do

amortecimento histerético e aerodinâmico no *flutter* de painéis fabricados com material composto. Os autores concluem que tais efeitos são fortemente dependentes da orientação das fibras do material, pois o modo de *flutter* também é dependente dessa orientação. A respeito do amortecimento estrutural, verifica-se que este tem forte participação na instabilidade de *flutter* quando o amortecimento aerodinâmico é baixo, mas pode não afetar os limites de *flutter* quando há altos níveis de amortecimento.

No que diz respeito a amortecimento passivo, poucos trabalhos são encontrados na literatura, em comparação com o número de estudos de enfoque ativo. No trabalho de Reed; Cazier Jr; Fougner Jr (1980), propõe-se a introdução de um sistema chamado *pilone desacoplado* (*decoupled pylon*). Aeronaves militares muitas vezes têm como requisitos de missão o carregamento externo de cargas acopladas às asas, em diversas configurações (reservatórios de combustível, armamento, por exemplo). Essas cargas têm potencial de diminuir a velocidade de *flutter* da aeronave, e com isso reduzir efetivamente seu desempenho. A proposta do pylon desacoplado é, então, associar uma suspensão, com amortecimento e rigidez assistidos por um sistema de controle ativo retroalimentado em baixa frequência. Essa suspensão isola dinamicamente a asa dos efeitos de inércia das cargas ali colocadas, aumentando a faixa de estabilidade da aeronave.

No trabalho de Lacarbonara e Cetraro (2011) é proposta a inserção de um absorvedor de vibração dito visco-histerético para aumento da velocidade crítica de *flutter*. Esse sistema passivo consiste em um arranjo paralelo de amortecedores e um elemento histerético. São estudados os efeitos da inserção desse dispositivo nas condições de pré e pós *flutter*.

Vêm tomando espaço nos últimos anos técnicas ditas semiativas. Yang; Zhao; Jiang (1995) propõe um controle do tipo semiativo para um sistema de *flutter* não linear de dois graus de liberdade em malha fechada. Os autores baseiam-se na suposição que oscilações de baixa amplitude não levam ao colapso imediato da estrutura sendo, portanto, controláveis por um elemento de rigidez não linear, que responde de acordo com o movimento da estrutura. A verificação da validade desse tipo de controle é feita em túnel de vento.

Uma vez que técnicas ativas e semiativas envolvendo leis de controle estão cada vez evidentes, abordagens de fenômenos aeroelásticos tratados no domínio do tempo têm se mostrado cada vez mais atrativas, uma vez que a representação no espaço de estados é conseguida. A abordagem de fenômenos aeroelásticos no domínio do tempo tem sua dificuldade residente na modelagem apropriada, no referido domínio, da aerodinâmica não estacionária envolvida. Peters (2008) apresenta em seu trabalho uma revisão a respeito dos

trabalhos de maior destaque relacionados a modelos de escoamento incompressível e não estacionário, para caso bidimensional.

O trabalho de Karpel (1982) pode ser considerado como referência em análise temporal de *flutter*. O autor apresenta um projeto de um sistema de controle para supressão ativa de *flutter* e alívio de cargas de rajada, utilizando uma aproximação racional da aerodinâmica não estacionária, construindo as equações matriciais do movimento com coeficientes constantes. O autor ainda apresenta brevemente a proposta de Roger (ROGER, 1977) para aproximação por funções racionais para, por fim, introduzir o método dos estados mínimos (*minimum state*), que é a proposta de maior destaque em seu trabalho, visto que consiste em uma aproximação da aerodinâmica não estacionária que utiliza um número bem menor de termos de atraso, culminando em matrizes de espaço de estados de ordem bem menor, quando comparadas às geradas pelo método de Roger.

O trabalho de dissertação de mestrado de Silva (1994) é dedicado à análise de estabilidade de aeronaves de asa fixa no domínio do tempo. A abordagem consiste na solução do problema aeroelástico no domínio da frequência para obtenção das matrizes aerodinâmicas exatas, calculadas conforme modelo de Theodorsen, a fim de utilizar esses dados para aproximação, por intermédio de um polinômio de Padé, de uma matriz aerodinâmica dita aproximada, passível de transformação inversa de Laplace para correta expansão e análise em espaço de estados.

Ainda, Neuhaus *et al.* (2009) utilizam a aproximação de Roger para aerodinâmica não estacionária a fim de calcular fronteiras de estabilidade de construções civis como pontes, uma vez que tais estruturas também estão sujeitas a instabilidades aeroelásticas.

## **2.2 Viscoelasticidade aplicada no controle passivo de vibrações estruturais**

O estudo de fenômenos ligados à viscoelasticidade não é recente, embora vários trabalhos atuais tratem de sua modelagem e aplicação para diversos fins, tendo o maior destaque no controle de vibrações estruturais. A grande vantagem observada para essa classe de materiais consiste na simplicidade de aplicação e principalmente na condição de dissipação contínua sob solicitações cíclicas, caracterizada por laços de histerese.

Alguns dos trabalhos na forma de livros que apresentam maior relevância na área são as obras de Lakes (2009), Ferry (1980), Jones (2001) e Nashif, Jones e Henderson (1985).

A obra de Lakes (2009) aborda desde princípios da viscoelasticidade e suas abordagens históricas, até as clássicas teorias lineares, comportamento dinâmico viscoelástico e métodos experimentais de determinação das características viscoelásticas. Todavia, especial destaque deve ser dado ao capítulo que abrange as aplicações e casos estudados, onde é possível observar a ampla utilização de materiais viscoelásticos.

Ferry (1980) também lida com aspectos fenomenológicos da viscoelasticidade, além de focar a caracterização de tais materiais experimentalmente. O autor ainda dedica capítulos especiais à caracterização de materiais viscoelásticos líquidos e materiais muito rígidos, além de outros aspectos mais avançados.

Já Nashif; Jones; Henderson (1985) e Jones (2001) escrevem suas obras com foco totalmente dedicado à aplicação de amortecimento de vibrações via viscoelasticidade, passando primeiramente por uma breve revisão histórica no que diz respeito ao amortecimento, para fazer introdução da viscoelasticidade linear e os efeitos de variações ambientais bem como da caracterização experimental do módulo viscoelástico. Um diferencial deste livro é a apresentação, no seu final, de rotinas computacionais que podem ser úteis para análise de viscoelasticidade e assuntos associados.

Alguns trabalhos de dissertação de mestrado e tese de doutorado também são dedicados ao estudo da viscoelasticidade associada à condição de dissipação de energia e, conseqüente, supressão de fenômeno aeroelástico.

Em sua dissertação de mestrado, De Lima (2003) apresenta uma ampla revisão dos modelos viscoelásticos clássicos e modernos, e dos procedimentos de incorporação do comportamento viscoelástico em modelos de elementos finitos. A dissertação aborda, ainda, procedimentos de identificação de parâmetros de modelos viscoelásticos a partir de dados experimentais e inclui numerosas simulações numéricas. Os resultados de algumas delas são comparados com resultados obtidos por ensaios experimentais.

Na dissertação de mestrado de Sales (2012) o amortecimento viscoelástico é utilizado com finalidade de supressão passiva de fenômenos vibratórios em sistemas multicorpos flexíveis. No que concerne ao modelo viscoelástico, são apresentados modelos modernos para comportamento desses materiais, como aqueles baseados em campos de deslocamento anelásticos, além da obtenção do módulo complexo pela forma tabulada, ou então o modelo de Golla-Hughes-McTavish para, por fim, apresentar o modelo de derivadas fracionárias, sendo que o último é adotado para análise temporal dos casos numéricos abordados. Aplicações numéricas são realizadas, sendo a primeira delas relacionada a um mecanismo

plano de quatro barras flexíveis, e a segunda tratando da análise de um satélite artificial com painéis flexíveis. Em ambos os casos foram apresentados resultados que reforçam a aplicação de materiais de tal natureza para supressão passiva de fenômenos vibratórios.

Webster e Semke (2003) utilizam um sistema passivo com material viscoelástico para minimizar efeitos de vibração prejudiciais à resolução de imagens, para casos de sensoriamento remoto.

De Lima; Rade; Léopore Neto (2009) apresentam uma metodologia de modelagem de sistemas estruturais associados a amortecedores viscoelásticos. O comportamento dinâmico do sistema é previsto com base no conhecimento de um conjunto de funções resposta em frequência da estrutura principal, as quais podem ser conseguidas numericamente ou experimentalmente.

Encontram-se também na literatura trabalhos que utilizam as propriedades viscoelásticas para redução de vibrações oriundas de abalos sísmicos, como o de Yokota *et al.* (1992).

Vários artigos também tratam de abordagens para inclusão de modelos viscoelásticos em modelos de elementos finitos, permitindo a simulação de respostas no domínio do tempo. Galúcio; Dêu; Ohayon (2004) apresentam a modelagem de vigas sanduíche contendo núcleo composto de material viscoelástico. O modelo para o material viscoelástico é baseado na teoria de derivadas fracionárias. Os autores apresentam um algoritmo para solução das equações do movimento no domínio do tempo. É observada a diminuição da amplitude das oscilações da viga proposta, quando comparadas aos resultados da viga puramente elástica. Outros autores, como Schmidt e Gaul (2002) também trabalham com a formulação das equações constitutivas do material viscoelástico via derivadas fracionárias.

Alguns trabalhos ainda propõem controle híbrido de vibrações, via associação de material viscoelástico e material piezelétrico, como apresentado no trabalho de Trindade e Benjeddou (2002) e Trindade (2007).

## CAPÍTULO III

### Fundamentos de Aeroelasticidade

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos básicos da aeroelasticidade, necessários para o entendimento das próximas seções desta dissertação.

A aeroelasticidade tem como objeto de estudo os fenômenos decorrentes da interação entre as forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas às quais um corpo fica sujeito quando interage com um fluido.



Figura 3.1 – Triângulo de Collar. Adaptado de Bisplinghoff; Ashley; Halfman (1996).

Para visualizar melhor a abrangência desse nicho de estudos foi proposto o triângulo de Collar, ilustrado na Fig. 3.1. Da interação entre as forças elásticas e as inerciais, são observadas as vibrações mecânicas e a dinâmica estrutural, ao passo que da ligação entre as forças aerodinâmicas devidas ao escoamento e das forças inerciais são gerados fenômenos que abrangem a estabilidade Dinâmica. O resultado da junção dos esforços elásticos somados somente aos aerodinâmicos dá origem a um subcampo de estudo que é dito **Aeroelasticidade Estática**, que compreende os fenômenos de divergência, reversão de controle. Todavia, quando são levadas em consideração tanto as forças inerciais quanto as forças elásticas e as aerodinâmicas, tem-se o que é denominado **Aeroelasticidade Dinâmica**, cuja abrangência compreende os fenômenos de resposta dinâmica, *buffeting* e aquele que é mais interessante para esse estudo, o *flutter*.

Outra forma bastante utilizada para classificação dos fenômenos em aeroelasticidade consiste em interpretá-los como relacionados à estabilidade ou relacionados à resposta aeroelástica, conforme esquematização apresentada na Fig. 3.2.

<b><u>Estabilidade</u></b>	<b>Dinâmica</b> – <i>Flutter</i> .
	<b>Estática</b> – Divergência.
<b><u>Resposta</u></b>	<b>Dinâmica</b> – Resposta a Rajada e <i>Buffeting</i> .
	<b>Estática</b> – Redistribuição de Carregamento, Reversão de Controle.

Figura 3.2 – Esquematização da classificação dos fenômenos aeroelásticos.

Embora os fenômenos supracitados sejam clássicos, há que se considerar também outras áreas de estudos relacionadas à aeroelasticidade como, por exemplo, a aeroservoelasticidade, na qual leis de controle relacionadas à atuação de superfícies de controle são levadas em consideração; há também a aerotermoelasticidade que considera a temperatura atuando sobre as propriedades aeroelásticas, entre outras.

No que diz respeito à modelagem de sistemas aeroelásticos, vale ressaltar que, sob um conjunto de hipóteses, estes não fogem à forma geral dos sistemas dinâmicos lineares e podem ser modelados matematicamente conforme Eq.(3.1):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\}, \quad (3.1)$$

na qual  $\{x(t)\}$  é o vetor de coordenadas generalizadas,  $[M]$  representa a matriz de massa,  $[C]$  o amortecimento viscoso,  $[K]$  a rigidez do sistema dinâmico. Já o vetor  $\{F(t)\}$  representa as forças externas ao sistema. Especificamente em aeronáutica, essas forças podem ser subdivididas em três tipos clássicos, conforme Eq.(3.2):

$$\{F(t)\} = \{F_A(t)\} + \{F_G(t)\} + \{F_E(t)\}, \quad (3.2)$$

onde:

- $\{F_A(t)\}$  representa as forças aerodinâmicas;
- $\{F_G(t)\}$  as forças de rajada;
- $\{F_E(t)\}$  as forças externas não prescritas

Como nesse trabalho não será tratado amortecimento viscoso, nem tampouco serão levadas em consideração as forças de rajada e outras forças externas, o modelo geral a ser tratado reduz-se à forma apresentada na Eq.(3.3).

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F_A(t)\} \quad (3.3)$$

Nesse contexto, deve-se então tratar adequadamente a aerodinâmica envolvida no estudo de aeroelasticidade. Salienta-se ainda que, para análises estáticas, a parcela de inércia é desconsiderada.

### 3.1 Princípios de aerodinâmica

Para estudar aeroelasticidade e os fenômenos por ela englobados deve-se assumir um modelo representativo do escoamento aerodinâmico envolvido. Para tanto, algumas considerações dessa área devem ser feitas no decorrer deste trabalho. Aerodinâmica é sucintamente definida por Milne-Thompson (1973) como sendo a ciência que trata do movimento do ar e dos corpos sujeitos a um escoamento. Especificamente, para cálculo das condições de *flutter*, supõe-se que o aerofólio esteja submetido a um escoamento de ar que interage com a estrutura, gerando a sustentação necessária para prover voo.

Os fluidos em geral apresentam propriedades de viscosidade e compressibilidade e o ar não é uma exceção à regra. Todavia, se a velocidade de um corpo imerso no ar é relativamente inferior à velocidade do som no mesmo meio, tais efeitos podem ser desconsiderados para simplificação, visto que a variação de densidade resultante do movimento da estrutura imersa no fluido é desprezível, sendo possível classificar o escoamento como incompressível. No que tange à viscosidade do ar, também é razoável considerá-lo como não viscoso. Para fluidos como ar e água, os efeitos de viscosidade só têm real relevância na camada limite de escoamento, que se desenvolve inerentemente ao limite sólido do corpo. Além dessa camada, o escoamento não sofre efeitos pronunciados de viscosidade. Essa consideração só deve ser descartada em casos especiais nos quais a viscosidade, apesar de pequena, apresenta efeitos significativos no escoamento, o que pode muitas vezes ser evidenciado pelo destacamento da camada limite. Quando um fluido não apresenta efeitos significativos de compressibilidade e viscosidade ele é considerado como pertencente à classe dos fluidos perfeitos e esse é um lugar comum na tratativa de problemas aeroelásticos.

São fatores que interferem no comportamento aerodinâmico de uma superfície aerodinâmica:

- geometria da superfície de sustentação (ou basicamente da corda da seção típica considerada,  $c$ , no caso de análise de seções típicas ou superfícies de controle);
- ângulo de ataque ou atitude em relação ao escoamento, designado por  $\alpha$ ;
- condições físicas do escoamento, como densidade ( $\rho_\infty$ ), viscosidade ( $\mu$ ) e velocidade ( $U_\infty$ );

Outra condição relacionada à aerodinâmica do fluido tem a ver com a força que é exercida por este no corpo devido ao movimento relativo ao escoamento. Uma forma de interpretação da força aerodinâmica é dada pela soma vetorial de uma componente normal e outra tangencial à corda do aerofólio. Outra aproximação comum em aerodinâmica é negligenciar essa última grandeza, devido a sua pequena magnitude.

Todas as forças relacionadas à aerodinâmica que agem em um aerofólio estão ilustradas na Fig. 3.3. Essas quantidades podem ser sucintamente explicadas como:

- **L** – sustentação (*lift*), que é a força perpendicular à direção do movimento;
- **D** – arrasto (*Drag*): força na direção e sentido oposto ao movimento do corpo, caracterizada como força de atrito aerodinâmica;

- **M** – momento de arfagem (*pitch*), que consiste no momento em torno do eixo perpendicular à direção do movimento e ao vetor de sustentação, considerado positivo quando tende a levantar o bordo de ataque.
- **N** – força normal ao aerofólio;
- **R** – força resultante, decorrente do arrasto e da sustentação;
- **A** – força tangencial ao aerofólio, que, na maior parte das vezes, é desconsiderada.

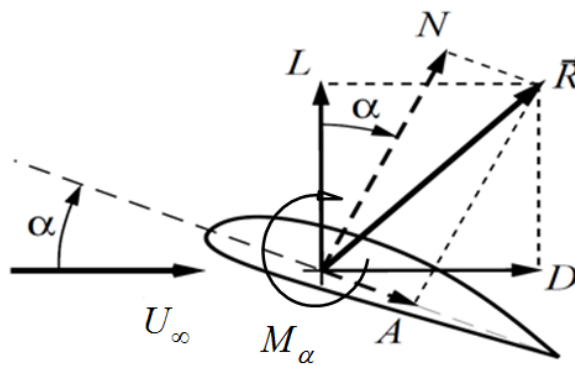


Figura 3.3 – Representação esquemática das forças e momentos aerodinâmicos em uma superfície de sustentação.

Especificamente em aeroelasticidade preocupa-se com a sustentação, o arrasto e o momento aerodinâmico. É útil também definir quantidades adimensionais relacionadas a essas três grandezas aerodinâmicas principais. Os três coeficientes primários são o coeficiente de sustentação  $C_L$ , o coeficiente de arrasto  $C_D$  e o coeficiente de momento  $C_M$ , que são funções do número de Reynolds, do número de Mach. A adimensionalização é dada introduzindo a pressão dinâmica  $p_\infty$  e fatores geométricos como área de referência ( $S$ ) e corda ( $c$ ). Os coeficientes aerodinâmicos adimensionais podem ser explicitados de acordo com as seguintes equações:

$$C_L = \frac{L}{p_\infty S}, \quad (3.4)$$

$$C_M = \frac{M}{p_\infty S c}, \quad (3.5)$$

$$C_D = \frac{D}{p_\infty S}. \quad (3.6)$$

Matematicamente, a sustentação aerodinâmica é expressa como função de algumas propriedades adimensionais comumente empregadas em análises aeroelásticas, conforme indicado na Eq.(3.7).

$$F = f(\alpha, Re, k, m) p_\infty, \quad (3.7)$$

onde:

- $\alpha$  é o ângulo de ataque;
- $Re = \frac{U_\infty l \rho}{\mu}$  é o número de Reynolds;
- $k = \frac{\omega b}{U_\infty}$  é a frequência reduzida ou Número de Strouhal;
- $a_\infty$  é a velocidade do som;
- $m = \frac{U_\infty}{a_\infty}$  é o número de Mach;
- $p_\infty = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$  é a pressão dinâmica do escoamento.

Feita essa abordagem introdutória, é necessária a adoção do modelo que representa o escoamento envolvido e, conseqüentemente, as expressões para a sustentação e momento aerodinâmicos. Há três regimes de escoamento passíveis de serem considerados, os quais consistem no escoamento **estacionário**, **quasi-estacionário** e **não estacionário**, sendo esse último o que compreende a formulação mais adequada para o caso em estudo, por considerar a variação dos esforços aerodinâmicos em relação ao tempo. Nas subseções seguintes serão feitas as considerações necessárias para propiciar o entendimento das conseqüências da adoção de cada regime.

### 3.1.1 Aerodinâmica estacionária

Na aerodinâmica estacionária, caso mais simplificado dentre os três supracitados, considera-se que o escoamento que circunda o aerofólio dê origem aos momentos e forças

aerodinâmicas independentes do tempo. De acordo com teorias aerodinâmicas, se o aerofólio é considerado esbelto, este pode ser substituído e entendido como uma distribuição contínua de vórtices. De acordo com o teorema de Kutta-Joukowski a sustentação gerada em cada elemento diferencial de corda, por unidade de comprimento de asa, é dado por:

$$dL = \rho_{\infty} U_{\infty} \Upsilon(x) dx, \quad (3.8)$$

na qual  $\Upsilon(x)$  é a magnitude da vorticidade naquele elemento diferencial,  $U_{\infty}$  e  $\rho_{\infty}$  são a velocidade e a densidade do escoamento de ar, respectivamente. Ao integrar-se entre o início e o fim da corda do aerofólio, tem-se a sustentação estacionária gerada e expressa segundo:

$$L = \rho_{\infty} U_{\infty} \int_0^c \Upsilon(x) dx. \quad (3.9)$$

Substituindo a magnitude da vorticidade apropriadamente de acordo com a teoria de aerofólios finos (para mais detalhes consultar Bisplinghoff; Ashley; Halfman (1996) e Theodorsen, (1934)), pode-se obter a expressão para sustentação e momento aerodinâmico estacionários (ANDERSON, 1991), segundo as Eqs. (3.10) e (3.11).

$$L = 2\pi\rho_{\infty}U_{\infty}^2 b\alpha, \quad (3.10)$$

$$M = -L\left(a + \frac{1}{2}\right)b. \quad (3.11)$$

Os coeficientes aerodinâmicos estacionários para o dado caso são então explicitados conforme:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_{\infty}U_{\infty}^2(2b)} = 2\pi\alpha, \quad (3.12)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_{\infty}U_{\infty}^2(2b)^2} = -\pi\alpha\left(a + \frac{1}{2}\right). \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Aerodinâmica não-estacionária

Quando o escoamento aerodinâmico é considerado não estacionário, é levada em consideração a influência do tempo relacionado ao movimento do fluido gerado pelo deslocamento de corpos sólidos em seu interior. De outra forma, pode-se dizer que a esteira aerodinâmica e sua influência na sustentação e momento do aerofólio são consideradas.

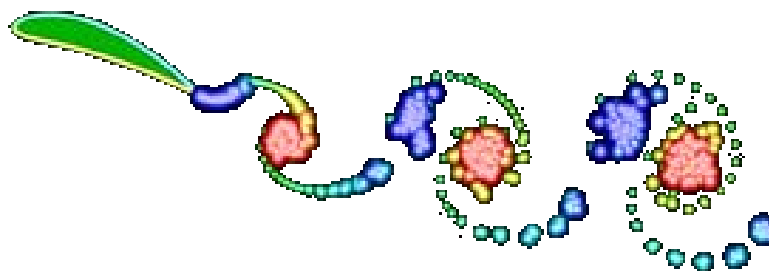


Figura 3.4 – Ilustração dos vórtices de esteira estendendo-se do aerofólio. Adaptado de (NYLANDER, 2013)

O movimento do fluido, induzido pelo movimento do aerofólio, pode ser entendido como a superposição de duas contribuições;

- **Parcela não circulatória:** que abrange os limites da superfície de sustentação, onde é comum a expressão do escoamento através de fontes e sumidouros;
- **Parcela circulatória:** é uma parcela de menor influência, dependente do tempo, resultante da modificação em relação ao estado de estacionariedade; está relacionada à vorticidade de uma esteira (Fig.3.4) que se estende do bordo de fuga da seção até o infinito.

Considerando ainda o já citado teorema de Kutta-Joukowski, para o caso onde há dependência do tempo, a representação da vorticidade não é tão simples como para a situação de estacionariedade. Os modelos de escoamento aerodinâmico não estacionários têm sua fundamentação embasada em soluções elementares da equação para o potencial aerodinâmico linearizado, em regime de escoamento incompressível. Os modelos mais utilizados são os de Theodorsen, Wagner, Küssner e Sears. O primeiro deles é aquele de uso mais comum e será o modelo utilizado nesse trabalho.

A teoria de Theodorsen consiste em um modelo aerodinâmico não estacionário de uma seção típica que apresenta movimento harmônico simples. O problema é tratado empregando

singularidades tipo fonte, sumidouros e vórtices elementares. Conforme comentado anteriormente, o aerofólio é modelado como uma placa plana e o efeito de salto de velocidade é simulado considerando uma distribuição de fontes e sumidouros no intradorso e no extradorso do aerofólio (THEODORSEN, 1934).

Esse trabalho não tem a pretensão de ilustrar a obtenção de forma detalhada das funções de sustentação e momento obtidas por Theodorsen. Para mais informações, o leitor pode consultar os trabalhos de Theodorsen (1934) e Theodorsen; Garrick. (1946).

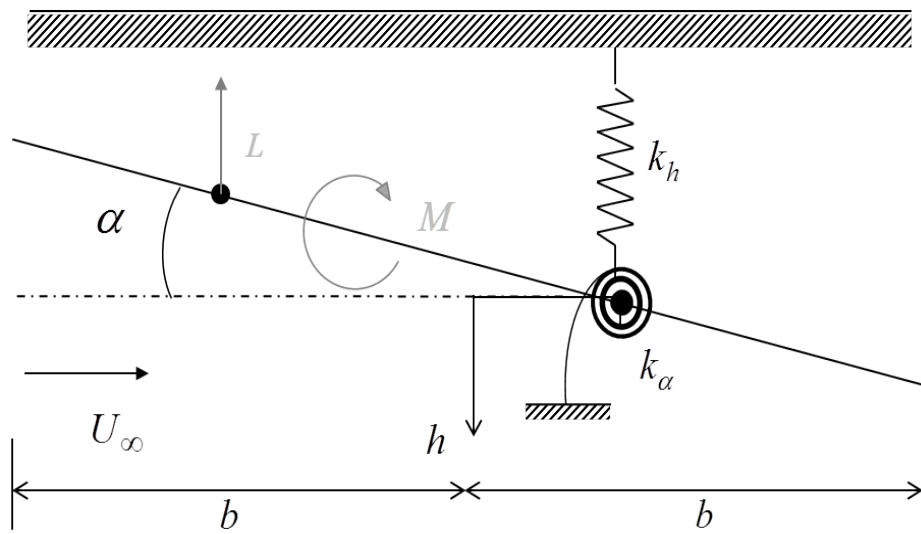


Figura 3.5 – Modelo aeroelástico de seção típica de 2 graus de liberdade.

Para aerofólio de dois graus de liberdade (Fig. 3.5) em caso de escoamento não estacionário, a sustentação e o momento gerados, de acordo com a formulação de Theodorsen são dados, por unidade de comprimento e área, conforme as Eqs. (3.14) e (3.15) (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN (1996), FUNG, (1993), COOPER; WRIGTH (2001), DOWELL *et al.*, 2005),

$$L = \pi \rho_{\infty} b^2 \left[ \ddot{h} + U_{\infty} \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho U_{\infty} b C(k) \left[ \dot{h} + U_{\infty} \alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \quad (3.14)$$

$$M = \pi \rho_{\infty} b^2 \left[ ba \ddot{h} - U_{\infty} b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho U_{\infty} b^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[ \dot{h} + U_{\infty} \alpha + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \quad (3.15)$$

onde  $C(k)$  é uma função complexa dependente da frequência reduzida,  $k$ , que pode ser representada como uma combinação de funções de Bessel do primeiro e segundo tipos, ou funções de Hankel, conforme Eq.(3.16).

A função de Theodorsen também é conhecida como função de deficiência de sustentação.

$$C(k) = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)} = \frac{H_1^2(k)}{H_1^2(k) + iH_0^2(k)} = F(k) + iG(k) \quad (3.16)$$

Outra aproximação também utilizada, de cunho mais numérico, é dada por:

$$C(k) = \begin{cases} -\frac{0,165}{1 - \frac{0,045}{k}i} - \frac{0,335}{1 - \frac{0,30}{k}i}, & k \leq 0,5 \\ 1 - \frac{0,165}{1 - \frac{0,041}{k}i} - \frac{0,335}{1 - \frac{0,32}{k}i}, & k > 0,5. \end{cases} \quad (3.17)$$

Supõe-se, por consequência, que as forças e momentos aerodinâmicos associados às amplitudes dos carregamentos aerodinâmicos possam ser computados como funções complexas lineares, com amplitudes de movimento dadas pelas Eq.(3.18) e (3.19),

$$\bar{L} = -\pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \left[ L_h \frac{\bar{h}}{b} + \left( L_\alpha - \left( \frac{1}{2} + a \right) L_h \right) \bar{\alpha} \right], \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{M} = \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 & \left[ \left( M_h - \left( \frac{1}{2} + a \right) L_h \right) \frac{\bar{h}}{b} + \right. \\ & \left. + \left( M_\alpha - \left( \frac{1}{2} + a \right) (L_\alpha + M_h) + \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right) \bar{\alpha} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

cujos coeficientes representam a não estacionariedade relacionada ao carregamento aerodinâmico, representando a sustentação e o momento. Tais coeficientes são dados por:

$$L_h = 1 - \frac{2C(k)}{k}i; \quad (3.20)$$

$$L_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1+2C(k)}{k}i - \frac{2C(k)}{k^2}; \quad (3.21)$$

$$M_h = \frac{1}{2}; \quad (3.22)$$

$$M_\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{k}i; \quad (3.23)$$

Outra representação comum para aerodinâmica não estacionária consiste na montagem das matrizes circulatorias e não circulatorias, conforme exposto a seguir:

$$\begin{Bmatrix} -Lb \\ M \end{Bmatrix} = \rho b^4 \left\{ [M_{nc}] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \left( \frac{V_0}{b} \right) ([B_{nc}] + C(k)[B_c]) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \left( \frac{V_0}{b} \right)^2 C(k)[K_c] \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix} \right\}, \quad (3.24)$$

onde:

$$[M_{nc}] = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a \\ \pi a & -\pi \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$[B_{nc}] = \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & -\pi \left( \frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} -2\pi & -2\pi \left( \frac{1}{2} - a \right) \\ 2\pi \left( \frac{1}{2} + a \right) & 2\pi \left( \frac{1}{2} - a \right) \left( \frac{1}{2} + a \right) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi \left( \frac{1}{2} + a \right) \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

As matrizes não circulatorias  $[M_{nc}]$  e  $[B_{nc}]$  representam, respectivamente, a matriz de massa aparente e a matriz de amortecimento aerodinâmico não circulatorio. A primeira não apresenta dependência da velocidade de escoamento e representa matematicamente a resistência do fluido que é bombeado em torno do aerofólio devido ao movimento harmônico deste. Já a segunda é representativa da resistência oferecida pelo ar ao movimento do fluido.

Por outro lado, as matrizes circulatorias de amortecimento  $[B_c]$  e rigidez  $[K_c]$  são ponderadas pela função de Theodorsen. A primeira relaciona a esteira de circulação e o atraso aerodinâmico associado, ao passo que a segunda pondera os deslocamentos do aerofólio.

Na Figura 3.6 tem-se o modelo aeroelástico de três graus de liberdade. Consiste em um aerofólio associado a uma superfície de controle, cuja rotação é dada pela grandeza  $\beta$ , ao passo que são mantidos os demais graus de liberdade de deslocamento vertical  $h$  e rotação da seção principal  $\alpha$ , como no esquema de dois graus de liberdade.

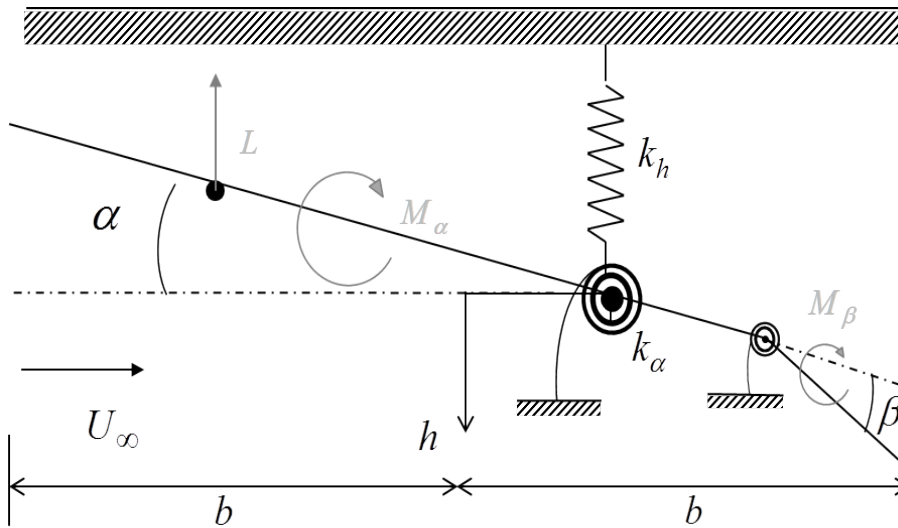


Figura 3.6 – Modelo aeroelástico de seção típica de 3 graus de liberdade.

A sustentação, momento aerodinâmico de rotação do aerofólio e da superfície de controle são dados por:

$$L = -\pi\rho b^2 \left[ \ddot{h} - ba\ddot{\alpha} - \frac{b}{\pi} T_1 \ddot{\beta} + U\dot{\alpha} - \frac{U}{\pi} T_4 \dot{\beta} \right] - 2\pi\rho U b C(k) Q, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
M_\alpha = \pi \rho b^2 \left[ b a \ddot{h} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} + \frac{b^2}{\pi} (T_7 + (c-a)T_1) \ddot{\beta} + \right. \\
\left. - U b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - \frac{U b}{\pi} \left( T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{1}{2}T_{11} \right) \dot{\beta} + \right. \\
\left. - \frac{U^2}{\pi} (T_4 + T_{10}) \beta \right] + 2\pi \rho U b^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) C(k) Q,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
M_\beta = \pi \rho b^2 \left[ \frac{b}{\pi} T_1 \ddot{h} - \frac{2b^2}{\pi} T_{13} \ddot{\alpha} + \left( \frac{b}{\pi} \right)^2 T_3 \ddot{\beta} + \frac{U b}{\pi} \left( 2T_9 + T_1 - \left( a - \frac{1}{2} \right) T_4 \right) \dot{\alpha} \right. \\
\left. + \frac{U b}{2\pi^2} T_4 T_{11} \dot{\beta} - \left( \frac{U}{\pi} \right)^2 (T_5 - T_4 T_{10}) \beta + \right] - \rho U b^2 T_{12} C(k) Q,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde,

$$Q = U \alpha + \dot{h} + \dot{\alpha} b \left( \frac{1}{2} - a \right) + \frac{U}{\pi} T_{10} \beta + \frac{b}{2\pi} T_{11} \dot{\beta}, \tag{3.32}$$

e as funções  $T_i$  até  $T_{13}$ :

$$T_1 = -\frac{1}{3} (2 + c^2) \sqrt{1 - c^2} + c \cos^{-1} c, \tag{3.33}$$

$$T_3 = -\left( \frac{1 - c^2}{8} \right) (5c^2 + 4) + \frac{1}{4} c \sqrt{1 - c^2} (7 + 2c^2) \cos^{-1} c - \left( \frac{1}{8} + c^2 \right) (\cos^{-1} c)^2, \tag{3.34}$$

$$T_4 = -\cos^{-1} c + c \sqrt{1 - c^2}, \tag{3.35}$$

$$T_5 = -(1 - c^2) - (\cos^{-1} c)^2 + 2c \sqrt{1 - c^2} \cos^{-1} c, \tag{3.36}$$

$$T_7 = \frac{1}{8} c \sqrt{1 - c^2} (7 + 2c^2) - \left( \frac{1}{8} + c^2 \right) \cos^{-1} c, \tag{3.37}$$

$$T_8 = -\frac{1}{3} (1 + 2c^2) \sqrt{1 - c^2} + c \cos^{-1} c, \tag{3.38}$$

$$T_9 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\sqrt{1 - c^2})^3}{3} + a T_4 \right], \tag{3.39}$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos^{-1} c, \quad (3.40)$$

$$T_{11} = (2-c)\sqrt{1-c^2} + (1-2c)\cos^{-1} c, \quad (3.41)$$

$$T_{11} = (2-c)\sqrt{1-c^2} + (1-2c)\cos^{-1} c, \quad (3.42)$$

$$T_{12} = (2+c)\sqrt{1-c^2} - (1+2c)\cos^{-1} c, \quad (3.43)$$

$$T_{13} = -\frac{1}{2}[T_7 + (c-a)T_1]. \quad (3.44)$$

A representação em forma de matrizes circulatorias e não circulatorias para o caso do modelo aeroelástico de três graus de liberdade exige modificação nas equações, conforme explicitado abaixo:

$$\begin{Bmatrix} -Lb \\ M_\alpha \\ M_\beta \end{Bmatrix} = \rho b^4 \left\{ \begin{aligned} & \begin{Bmatrix} [M_{nc}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\frac{h}{b}} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \left( \frac{V_0}{b} \right) ([B_{nc}] + C(k)[R][S_2]) \begin{Bmatrix} \dot{\frac{h}{b}} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} + \\ & + \left( \frac{V_0}{b} \right)^2 C(k)([K_c] + [R][S_1]) \begin{Bmatrix} \frac{h}{b} \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (3.45)$$

onde:

$$[M_{nc}] = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a & T_1 \\ \pi a & -\pi \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) & -2T_{13} \\ T_1 & -2T_{13} & \frac{T_3}{\pi} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$[B_{nc}] = \begin{bmatrix} 0 & -\pi & -T_4 \\ 0 & \pi\left(a - \frac{1}{2}\right) & -T_{16} \\ 0 & -T_{17} & -\frac{T_{19}}{\pi} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15} \\ 0 & 0 & -\frac{T_{18}}{\pi} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{T_{10}}{\pi} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1}{2} - a\right) & \frac{T_{11}}{2\pi} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} -2\pi & 2\pi\left(\frac{1}{2} + a\right) & -T_{12} \end{bmatrix}^T \quad (3.51)$$

### 3.1.3 Aerodinâmica quasi-estacionária

Na aerodinâmica quasi-estacionária são desconsiderados os efeitos de dependência da frequência. Se a superfície de sustentação se encontra em movimento relativo a um escoamento, as forças e momentos aerodinâmicos aos quais a mesma está sujeita variam com o tempo. Pode-se então assumir que a cada instante de tempo a estrutura tem comportamento uniforme, apresentando velocidade constante para quaisquer graus de liberdade que a represente. Esses valores são válidos em cada instante de tempo.

Em termos de modelagem matemática, a dependência da frequência pode ser excluída anulando o parâmetro de frequência reduzida ( $k \rightarrow 0$ ) e a parte imaginária da matriz aerodinâmica ( $Im[A] \rightarrow 0$ ) em nas equações anteriormente descritas para representar escoamento não estacionário.

O modelo aerodinâmico quasi-estacionário, apesar de ser atrativo por sua maior simplicidade, não é suficientemente representativo para análises de estabilidade ou resposta aeroelástica. Assim, um modelo aerodinâmico mais complexo, como o não estacionário, deve ser utilizado para análise da dependência das forças e momentos aerodinâmicos (COOPER; WRIGHT, 2007).

Com os modelos aerodinâmicos definidos, pode-se então partir para a determinação das equações do movimento do aerofólio e estabelecer metodologias para cálculo de estabilidade e resposta aeroelástica. Na sequência, o enfoque é dado à análise da estabilidade dinâmica de *flutter*, que é principal objeto de estudo desse trabalho.

### **3.2 Análise de estabilidade aeroelástica do tipo *flutter***

O fenômeno de *flutter* consiste no problema aeroelástico de maior destaque, e é aquele que concentra o maior número de pesquisas na área. Conhecendo as características geométricas da superfície aerodinâmica e o modelo aerodinâmico envolvido, deve-se estabelecer maneiras de calcular a velocidade de *flutter* para estabelecimento do envelope de voo da aeronave.

A análise de estabilidade aeroelástica e consequente determinação da velocidade crítica de *flutter* são imprescindíveis para a determinação de desempenho da aeronave, sendo um dos requisitos básicos no procedimento de certificação de aeronaves.

#### **3.2.1 Métodos de cálculo de *flutter***

Conforme discutido até o momento, a análise de *flutter* determina a faixa, medida em velocidade ou pressão dinâmica, da estabilidade dinâmica de sistemas aeroelásticos, ou seja, a velocidade máxima de segurança da aeronave. Para sistemas simples, nos quais a aerodinâmica é estacionária e não depende de velocidade nem tampouco da aceleração, uma varredura em velocidade pode ser feita, solucionando o problema de autovalores característico para cada uma das velocidades de interesse. As partes reais e imaginárias dos autovalores associados a cada uma das velocidades podem ser plotadas, criando o diagrama  $Vg_f$  (velocidade, amortecimento, frequência) para os modos de interesse.

Os métodos de cálculo de *flutter* mais clássicos são os métodos  $k$  e  $p-k$ . Várias derivações desses métodos são também encontradas na literatura, com a finalidade de

melhorar a precisão da estimação da velocidade de *flutter* ou então da previsão de amortecimento relativo. O método *g*, proposto por Chen (2000) é uma abordagem mais recente que vem ocupando espaço nas pesquisas que tratam de aeroelasticidade no tocante ao cálculo das fronteiras de estabilidade. A seguir, os três métodos citados são brevemente discutidos. Enfoque maior é dado ao método *k*, que será implementado nesse trabalho.

- **Método *k***

O método *k* (ou método V-g) consiste na inserção de um amortecimento estrutural fictício, por meio de uma modificação na rigidez. Substitui-se a matriz de rigidez do sistema  $[K]$  por uma matriz de rigidez complexa  $[K^*]$ , que inclui esse amortecimento, segundo:

$$[K^*] = (1 + ig)[K]. \quad (3.52)$$

O amortecimento *g*, apesar de ser um parâmetro introduzido, não será um parâmetro de entrada do sistema. Em outras palavras, o problema de autovalores será formulado de modo que, na resolução, o valor de *g* seja calculado. O problema de autovalores em apreço tem a forma:

$$\left[ \lambda[K] - \left[ \frac{1}{\mu}[A] + [M] \right] \right] \{x\} = \{0\}, \quad (3.53)$$

onde o autovalor é dado por:

$$\lambda = \frac{1 + ig}{\omega^2}. \quad (3.54)$$

Os valores de frequências do movimento e fatores de amortecimento associados são obtidos, para cada uma das frequências reduzidas de interesse e para cada um dos modos correspondentes, conforme:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{Re(\lambda)}}, \quad (3.55)$$

$$g_n = \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)}. \quad (3.56)$$

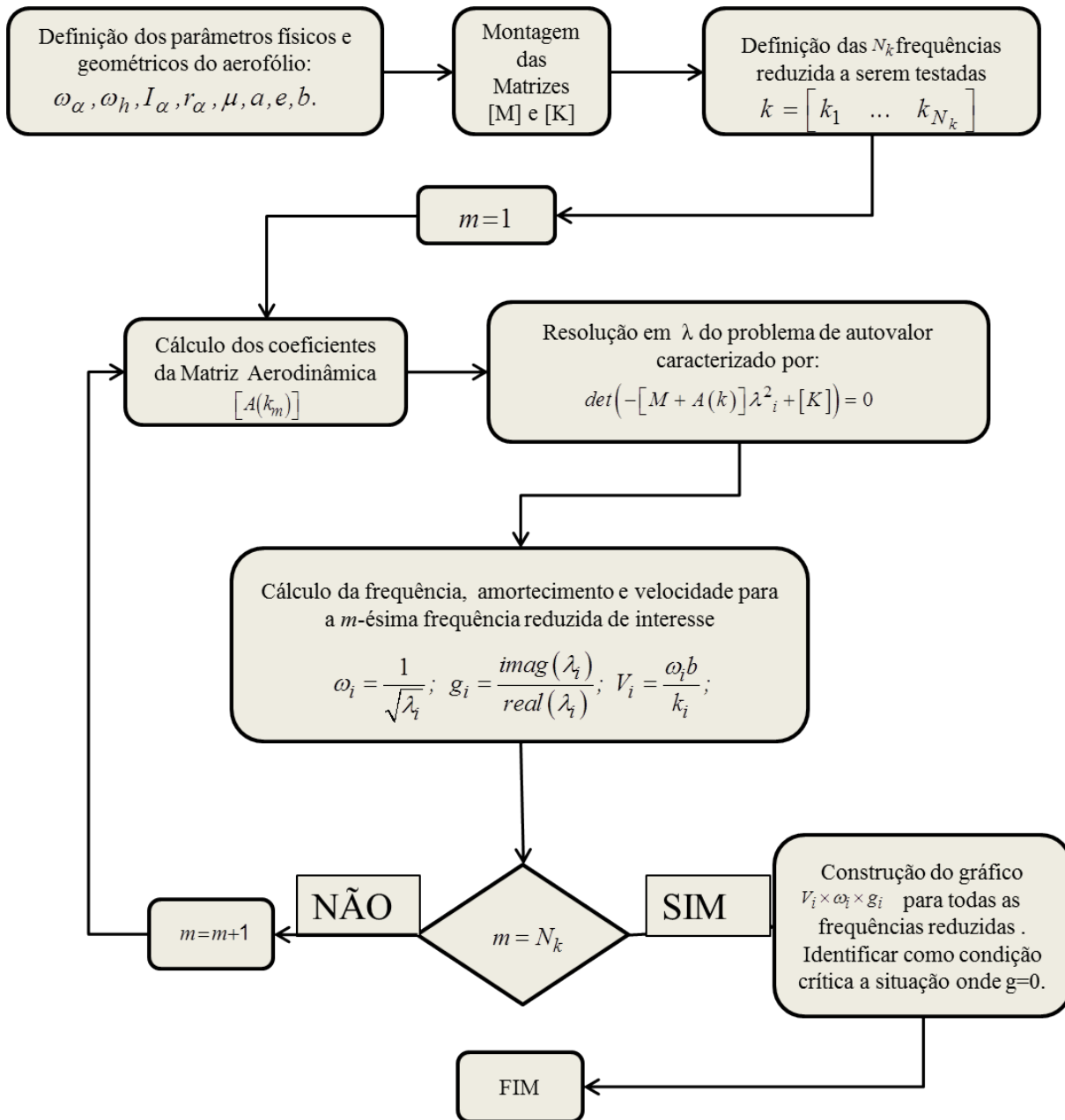


Figura 3.7 – Algoritmo para implementação do Método  $k$ .

Fazendo a varredura em uma faixa de valores de frequência reduzida, é possível resolver o problema de autovalor para cada um desses valores e, com a frequência associada, infere-se a velocidade equivalente a essa condição, uma vez que  $k = \omega b / V$ . Com esse conjunto de valores de frequência, amortecimento e velocidade, pode-se plotar o diagrama  $Vgf$ , que identifica o ponto de velocidade crítica, no qual o amortecimento é nulo.

Um algoritmo é apresentado sob a forma de diagrama de blocos na Fig.3.7 para facilitar o entendimento e a implementação do método.

Como observado, o Método  $k$  é de implementação relativamente simples e apresenta resultados razoáveis para estimativa das velocidades críticas. Todavia, o amortecimento calculado não é relacionável com o amortecimento físico real do sistema.

- **Método  $p-k$**

Ao contrário do método  $k$ , o método  $p-k$  não apenas determina as fronteiras de estabilidade como provê estimativas mais realistas de amortecimento em velocidades subcríticas, os quais podem ser utilizadas para estimativa dos valores reais e um possível monitoramento de experimentos de *flutter*.

O método  $p-k$  é um método iterativo. Para uma dada velocidade, supõe-se um valor de frequência do primeiro modo. Esse valor é utilizado para inferir uma frequência reduzida associada, necessária para cálculo da matriz aerodinâmica e as respectivas soluções da equação do movimento. De cada solução, obtém-se a frequência do modo, que é comparada àquela suposta inicialmente. Se o valor não atender a um requisito de tolerância, essa frequência é atualizada até a convergência dos valores para o primeiro modo. O mesmo é feito para o modo seguinte e, quando é alcançada a convergência de todos os modos de interesse, uma nova velocidade é dada, até que todos os valores de frequência de interesse sejam varridos.

Embora forneça aplicações mais realistas no que diz respeito ao amortecimento calculado, o Método  $p-k$  é mais caro computacionalmente, principalmente devido à necessidade de se atingir convergência satisfatória.

- **Método  $g$**

Além dos métodos supracitados, uma metodologia mais recente de cálculo de estabilidade aeroelástica, conhecida como Método  $g$  vem tomando destaque. Proposto por

(CHEN, 2000) é baseado no uso das propriedades analíticas aerodinâmicas e em uma perturbação em amortecimento. É utilizada uma técnica de varredura em frequência reduzida para cálculo das raízes de *flutter* e um corretor preditivo para garantir a robustez desse procedimento (JU e SUN (2009)).

Apesar de serem diferentes em seus equacionamentos, tanto o método  $p-k$  quanto o método  $g$  possuem o mesmo critério de estabilidade; as equações aeroelásticas são resolvidas e um dos autovalores com parte real positiva indica a ocorrência do *flutter*.

Como nesse trabalho de pesquisa não será utilizado o método  $g$  para cálculo das fronteiras de *flutter*, o leitor pode recorrer às obras de Chen (2000), Ju e Sun (2009) para obter mais detalhes sobre a implementação desse método.

### 3.3 Análise Aeroelástica no domínio do tempo

O modelo desenvolvido por Theodorsen no ano de 1934 com o intuito de explicar melhor os mecanismos de *flutter* é fundamentado em aproximações como a adoção de incompressibilidade e não viscosidade do fluido por meio de uma equação expressa diretamente no domínio da frequência. A abordagem clássica de *flutter* é baseada no cálculo dos coeficientes aerodinâmicos para movimento harmônico simples, em valores discretos de frequência reduzida.

Embora amplamente empregado, o modelo de Theodorsen não é adequado para associação a leis de controle que são usualmente construídas no domínio de Laplace. Dessa forma, é necessário adotar alternativas para representar a aerodinâmica não estacionária nesse domínio e em momento posterior empregar a transformada inversa de Laplace e conseguir representação aeroelástica no domínio do tempo.

A análise temporal de instabilidade dinâmica tem, como todo método, suas vantagens e desvantagens. A análise no tempo possibilita a visualização da resposta em deslocamento, velocidade e aceleração das coordenadas generalizadas envolvidas, possibilita estudo de entradas arbitrárias únicas ou múltiplas, variantes ou não com o tempo, e também pode ser apropriada para associação de leis de controle, dada a representação em espaço de estados. Todavia, essa expansão em espaço de estados dobra a ordem do sistema, tornando os cálculos mais caros do ponto de vista computacional.

Ao se falar em modelos no domínio do tempo, deve-se citar a função de deficiência de sustentação de Wagner comumente indicada por  $\phi(t)$  e que provê uma aproximação razoável para análise aeroelástica, sendo expressa por (JONES,(1940))

$$\phi(\tau) = 1 - \int_0^\infty \left\{ (J_0 - J_1)^2 + \sigma^2 (Y_0 - Y_1)^2 \right\}^{-1} e^{-\sigma\tau} d\sigma, \quad (3.57)$$

na qual  $J_0, J_1, Y_0$  e  $Y_1$  são funções de Bessel e  $\tau = Ut/b$  é o tempo adimensional.

Uma interpretação para a função de Wagner comumente encontrada na literatura consiste em afirmar que a mesma pode ser entendida como uma entrada do tipo degrau em ângulo de ataque. Salienta-se ainda que a mesma não possui representação no plano de Laplace. Jones (1940) propôs a seguinte representação da função de Wagner por um somatório de termos exponenciais, o que viabiliza a transformada de Laplace:

$$\phi(\tau) = 1 - 0.165e^{-0.0455\tau} - 0.355e^{-0.3\tau}. \quad (3.58)$$

Essa aproximação, quando associada à integral de Duhamel, possibilita análise aerodinâmica para movimentos quaisquer, ao contrário da proposta de Theodorsen onde há suposição de movimento harmônico (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Todavia, os modelos de Theodorsen e Wagner são relacionáveis por uma transformada de Fourier (THEODORSEN; GARRICK, 1940).

Com intuito de construir um modelo em espaço de estados, passa-se então à análise de uma representação mais robusta da aerodinâmica na forma de funções racionais em variáveis complexas, de forma que a transformação inversa das equações do movimento nesse domínio possibilite uma reconstrução do modelo.

### 3.3.1 Aproximação por funções racionais.

Com propósito de representação no domínio do tempo, deve-se escrever o carregamento aerodinâmico no domínio de Laplace. Para tanto, é utilizada a matriz de coeficientes aerodinâmicos, obtida no domínio da frequência. Dessa forma, pode-se aproximar os coeficientes generalizados aerodinâmicos por polinômios de Padé, da seguinte forma:

$$\left[ \hat{A}(ik) \right] = \left[ \hat{A}_0 \right] + ik \left[ \hat{A}_1 \right] - k^2 \left[ \hat{A}_2 \right] + \sum_{r=1}^{N_r} \left( \frac{ik}{ik + \gamma_r} \left[ \hat{A}_{r+2} \right] \right), \quad (3.59)$$

onde  $ik = s$  é a variável de Laplace.

Nota-se que o polinômio apresentado contém termos de primeira e segunda ordens, bem como termos de ordem nula. Assim como no modelo de Wagner, a representação por funções racionais também contém termos aerodinâmicos (ou termos de atraso) que são representados pela parte que contém o somatório.

A série de estados adicionais da aproximação por função racional tem por objetivo representar os termos circulatórios do escoamento não estacionário. A escolha do número de termos a ser adicionados,  $N_r$ , é de fundamental importância na eficiência do ajuste da matriz aerodinâmica. Essa escolha muitas vezes é empírica e depende do conhecimento do engenheiro a respeito do comportamento do sistema. O mesmo vale para os termos  $\gamma$ , que podem ser entendidos como polos escolhidos do sistema. São também muitas vezes chamados de *lags*. Roger (1977) percebeu que os coeficientes aerodinâmicos de influência seriam aproximados com maior eficiência se, em cada frequência reduzida, a aproximação fosse realizada como mesmo conjunto de valores de *lags* (KARPEL 1982).

A maior parte de trabalhos na literatura utiliza número de *lags*, para aproximação de Roger entre 4 e 8 (KARPEL, 1982, ABEL, 1994). A inserção de um número muito grande de termos de atraso prejudica a eficiência do método, pois a ordem da matriz é aumentada.

As matrizes  $[A_0]$  até  $[A_{N_r+2}]$  devem ser determinadas, em cada frequência reduzida, para aproximar a matriz aerodinâmica. O erro quadrático total, que consiste no somatório dos erros entre os termos da matriz aerodinâmica exata e da matriz aproximada, para cada uma das frequências reduzidas de interesse, é expresso segundo:

$$E_{ij} = \sum_{m=1}^{N_k} \frac{\left| \hat{A}_{ij}(ik_m) - A_{ij}^e(ik_m) \right|^2}{\max \left[ 1, \left| A_{ij}^e(ik_m) \right|^2 \right]}. \quad (3.60)$$

O modelo proposto por Roger (1977) para aproximar cada elemento da matriz aerodinâmica é baseado na minimização do erro quadrático dado na Eq.(3.61), a partir da

suposição de que o erro não sofre variação em relação aos coeficientes aproximados  $\hat{A}_{ij}(ik_m)$ . Matematicamente, pode-se expressar essa característica por meio da imposição de derivadas nulas em relação aos referidos coeficientes:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial \hat{A}_{ij}} = 0. \quad (3.61)$$

Para satisfazer tal condição, conclui-se que o vetor de coeficientes que aproxima o  $ij$ -ésimos elementos da matriz de aproximação, para uma dada frequência reduzida  $k$ , pode ser calculado segundo:

$$\{\hat{a}_{ij}\} = \left( [F]^T [\bar{F}] + [\bar{F}]^T [F] \right)^{-1} \left( [\bar{F}]^T \{A_{ij}^e\} + [F]^T \{\bar{A}_{ij}^e\} \right), \quad (3.62)$$

onde  $[F]$  é uma matriz de vetores concatenados, onde cada vetor corresponde a uma frequência reduzida de interesse, expresso segundo:

$$[F] = \begin{bmatrix} [F_1] \\ \vdots \\ [F_{N_k}] \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Os vetores  $\{F_m\}$  representados na Eq.(3.63) são calculados para cada uma das  $m = 1, 2, \dots, N_k$  frequências reduzidas na faixa de interesse, e são definidos segundo:

$$[F_m] = \begin{bmatrix} 1 & ik_m & k_m^2 & \frac{1}{ik_m + \gamma_r} & \dots & \frac{1}{ik_m + \gamma_{N_r}} \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

O vetor  $\{A_{ij}^e\}$  é formado pelas componentes  $ij$  da matriz exata avaliada em todas as frequências reduzidas na faixa de interesse, ao passo que  $\{\bar{A}_{ij}^e\}$  representa seu complexo conjugado.

O vetor aproximado resultante  $\{\hat{a}_{ij}\}$  tem ordem  $(N_r + 3) \times 1$  e pode ser expresso sob a forma:

$$\{\hat{a}_{ij}\} = [\hat{a}_{ij}^0 \quad \hat{a}_{ij}^1 \quad \hat{a}_{ij}^2 \quad \dots \quad \hat{a}_{ij}^{N_k+3}]^T. \quad (3.65)$$

Com base nos valores desses coeficientes, é possível inferir cada um dos termos  $\hat{A}_{ij}(k_m)$  da matriz aerodinâmica aproximada, segundo:

$$\hat{A}_{ij}(k_m) = a_{ij}^0 + a_{ij}^1 i k_m - a_{ij}^2 k_m^2 + \sum_{r=1}^{N_r} \left( \frac{ik}{ik_m + b_r} a_{ij}^{r+2} \right). \quad (3.66)$$

Fica calculada, portanto, a matriz aerodinâmica aproximada para a  $m$ -ésima frequência reduzida  $k$ . Vale ressaltar que, para o método de Roger, o número de estados da matriz aumentada, quando da expansão em espaço de estados, é dado por:

$$N_{es} = N_{modos} (2 + N_{lags}) \quad (3.67)$$

### 3.3.2 Representação em espaço de estados

Tendo sido definidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez estruturais, bem como os coeficientes do ajuste realizado por funções racionais, tem-se um sistema de equações do movimento no domínio do tempo expresso conforme:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = 2q_\infty b^2 \left[ [A_0]\{x(t)\} + [A_1]\left(\frac{b}{V}\right)\{\dot{x}(t)\} + [A_2]\left(\frac{b}{V}\right)^2 \{\ddot{x}(t)\} + \sum_{r=1}^{N_r} [A_{r+2}]\{x_A(t)\} \right] \quad (3.68)$$

com  $\{\dot{x}_A(t)\} = \{x(t)\} - \left(\frac{V_0}{b}\right)\{x_A(t)\}$ . Reordenando a Eq. (3.68), escreve-se:

$$[\tilde{M}]\{\ddot{x}(t)\} + [\tilde{C}]\{\dot{x}(t)\} + [\tilde{K}]\{x(t)\} - [\tilde{A}]\{x_A(t)\} = [0] \quad (3.69)$$

na qual:

$$[\tilde{M}] = [M] - \eta[\hat{A}_2]\left(\frac{b}{V}\right)^2 \quad (3.70)$$

$$[\tilde{C}] = [C] - \eta[\hat{A}_1]\left(\frac{b}{V}\right) \quad (3.71)$$

$$[\tilde{K}] = [K] - \eta[\hat{A}_0] \quad (3.72)$$

$$[\tilde{A}] = \left[ \eta \sum_{r=1}^{N_r} [\hat{A}_{r+2}] \right] \quad (3.73)$$

com  $\eta = 2q_\infty b^2$ .

Para expansão em espaço de estados, faz-se uma mudança de variáveis, fazendo  $\{\xi_1\} = \{x\}$  e  $\{\xi_2\} = \{\dot{x}\}$ , para os estados estruturais e  $\{\xi_3\} = \{x_a\}_1$  até  $\{\xi_{2+nlag}\} = \{x_a\}_{nlag}$  para os termos aerodinâmicos adicionais.

Com estas novas variáveis, obtém-se o sistema de equações do movimento sob a forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{2+nlag}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [Z] & [I] & [Z] & \dots & [Z] \\ -[\tilde{M}]^{-1}[\tilde{K}] & -[\tilde{M}]^{-1}[\tilde{C}] & [\tilde{M}]^{-1}[\hat{A}_3] & \dots & [\tilde{M}]^{-1}[\hat{A}_{nlag+2}] \\ [Z] & [I] & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\gamma_3[I] & [Z] & [Z] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [Z] & [I] & \dots & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\gamma_{nlag+2}[I] & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \vdots \\ \xi_{2+nlag}(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.74)$$

onde  $[Z]$  e  $[I]$  representam matrizes de zeros e matrizes identidade de ordem equivalente ao número de graus de liberdade do sistema.

De forma compacta, a Eq.(3.74) pode ser expressa como:

$$\{\dot{\xi}(t)\} = [A]\{\xi(t)\} \quad (3.75)$$

Ressalta-se ainda que a forma expressa na Eq.(3.75) é um caso particular de formulação geral em espaço de estados para sistemas lineares, que é comumente apresentada como na Eq.(3.76),

$$\begin{aligned} \{\dot{\xi}(t)\} &= [A]\{\xi(t)\} + [B]\{u\} \\ \{y\} &= [C]\{\xi(t)\} + [D]\{u\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde

- $\{u\}$  é o vetor com as entradas do sistema;
- $\{\xi(t)\}$  é o vetor de estados;
- $[A]$  é a matriz dinâmica do sistema ou matriz de estado;
- $[B]$  é a matriz de entrada;
- $[C]$  é a matriz saída;
- $[D]$  é a matriz de transmissão direta.

## **CAPÍTULO IV**

### **Fundamentos de Viscoelasticidade**

A viscoelasticidade é uma propriedade exibida por uma extensa variedade de materiais dentro dos grupo dos polímeros, englobando desde a borracha natural ou sintética até variados tipos de adesivos poliméricos e plásticos industriais. Tais materiais oferecem uma gama de opções para provimento amortecimento passivo e, conseqüente, supressão de vibração estrutural (JONES, 2001).

Dentro desse contexto, esforços têm sido empregados a fim de proporcionar eficientes aplicações de materiais viscoelásticos para a solução de problemas práticos de atenuação de vibração e ruído em engenharia. Contudo, frequentemente não são levadas em conta todas as particularidades desses materiais, o que pode levar em resultados insatisfatórios. Este fato ressalta a necessidade de se ter um adequado entendimento das características dos materiais viscoelásticos a fim de alcançar o desejado sucesso em suas aplicações.

#### **4.1 Introdução à viscoelasticidade linear**

Dentre da gama de materiais utilizados para suprimir fenômenos vibratórios, observa-se que os materiais viscoelásticos têm alcançado grande notoriedade nos últimos tempos. Uma grande variedade de polímeros, tanto naturais como sintéticos exibem comportamento caracterizado como viscoelástico.

Polímeros são materiais que apresentam uma organização atômica baseada em cadeias moleculares longas fortemente interconectadas. Dessa forma, quando estes materiais sofrem deformação, as interações moleculares dão origem a fenômenos macroscópicos como flexibilidade e dissipação de energia (amortecimento), que pode ser evidenciado quando

ocorre carregamento cíclico. O carregamento cíclico permite a observação da propriedade de histerese do material viscoelástico. Basicamente, quando o material é submetido a esforços cíclicos a deformação deve responder ciclicamente, em movimento de mesma frequência, mas defasado em relação à solitação. Se for plotada a deformação versus a tensão obtém-se um gráfico de forma elíptica, conforme mostra a Fig. 4.1. Tal comportamento é observado em plásticos, borrachas, acrílicos, silicones, epóxis, entre outros.

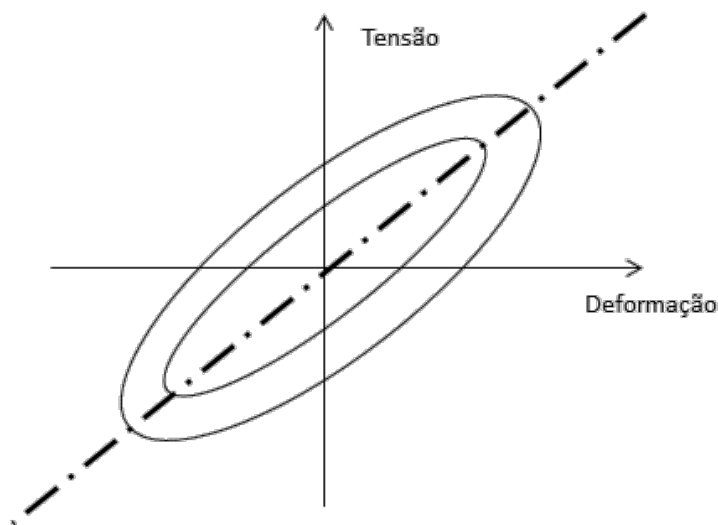


Figura 4.1 - Histerese característica de materiais poliméricos sujeitos a esforços cíclicos. Adaptado de (JONES, 2001).

As propriedades mecânicas de sólidos viscoelásticos não são trivialmente expressas na forma de modelos matemáticos. Nesse caso, muitas vezes é necessário adotar aproximações fenomenológicas (baseadas em conhecimento empírico) para descrever as propriedades do material (JONES, 2001).

O comportamento dos materiais viscoelásticos é comumente entendido como resultante da associação dos comportamentos de dois tipos fundamentais de materiais, sendo eles:

- **Sólido linear elástico:** a tensão é proporcional à deformação e é independente da taxa de deformação. O comportamento é regido pela Lei de Hooke, que pode ser escrita sob a forma:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad (4.1)$$

- **Fluido viscoso Newtoniano:** a tensão é proporcional à taxa de deformação cisalhante sendo regida pela equação:

$$\tau(t) = \mu \dot{\gamma}(t) \quad (4.2)$$

Na Eq. (4.1)  $E$  representa o módulo de elasticidade do material, e na Eq. (4.2)  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

No domínio do tempo, o comportamento desses materiais é representado pela *função de fluência*  $F(\sigma_0, t)$ , e pela *função de relaxação*,  $R(\varepsilon_0, t)$ . A primeira representa o comportamento da deformação exibida pelo material quando submetido a uma tensão constante,  $\sigma_0$ , ao passo que a segunda representa a evolução da tensão suportada pelo material quando este é submetido a uma deformação constante,  $\varepsilon_0$ . Ambas as funções estão ilustradas esquematicamente na Fig.4.2.

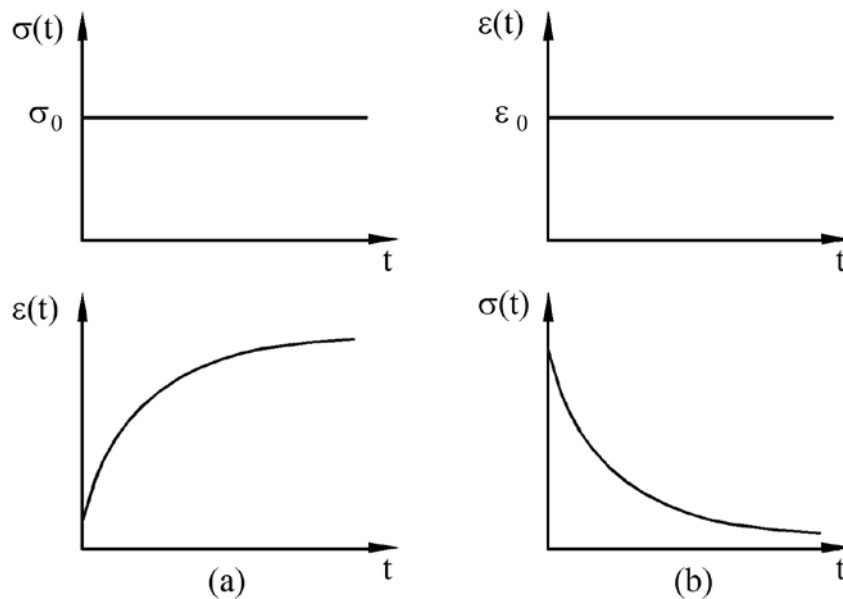


Figura 4.2 - Funções de fluência (a) e relaxação (b) do material viscoelástico.

Considerações adicionais devem ser feitas a respeito do comportamento das funções de fluência e de relaxação. Ambas assumem valor nulo para condições hipotéticas associadas a valores de tempo negativos. Para o tempo tendendo a zero pela direita ( $t \rightarrow 0^+$ ), e tendendo a infinito positivo ( $t \rightarrow +\infty$ ) são definidas as condições instantâneas e de equilíbrio,

respectivamente, tanto para função de fluência como para a função de relaxação (SALES, 2012).

Das definições exibidas para as funções de fluência e relaxação pode-se inferir que a resposta de um material viscoelástico pode ser dada a partir de funções de tensão e deformação do tipo degrau. No domínio do tempo, esta resposta pode ser expressa pela seguinte relação na forma de integral de convolução, particularizada aqui para o caso de solitação uniaxial (CHRISTENSEN, 1982),

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad (4.3)$$

onde a variável  $\sigma(t)$  é a componente de tensão normal e a variável  $\varepsilon(t)$  é deformação em cisalhamento. A função  $G(t)$  é denominada função módulo do material viscoelástico. Vale observar que para a aplicação da relação acima em situações de estados multiaxiais de tensão basta que as grandezas escalares sejam substituídas por grandezas tensoriais.

Embora a integral de convolução particularizada para solitação uniaxial seja definida também para valores de tempo negativo, deve-se condicionar a mesma à condição de inexistência de deformação nesse intervalo, o que leva à expressão:

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon(0) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(\tau) d\tau. \quad (4.4)$$

Admitindo condições iniciais nulas, a aplicação da transformada de Fourier à Eq. (4.4) conduz à seguinte relação no domínio da frequência:

$$\sigma(\omega) = G(\omega)\varepsilon(\omega). \quad (4.5)$$

Como envolve quantidades complexas, a Eq. (4.5) pode ser escrita na seguinte forma alternativa:

$$\sigma(\omega) = [G'(\omega) + iG''(\omega)]\varepsilon(\omega), \quad (4.6)$$

ou ainda, como:

$$\sigma(\omega) = G'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]\varepsilon(\omega), \quad (4.7)$$

onde  $G'(\omega)$  e  $G''(\omega)$  consistem as partes real (módulo de armazenamento) e imaginária (módulo de perda) do módulo complexo do material viscoelástico, respectivamente. Já o fator de perda é dado por  $\eta(\omega) = G''(\omega)/G'(\omega)$ .

Sabe-se que maiores valores do fator de perda  $\eta$  significam maior capacidade de amortecimento, ou seja, maior capacidade de dissipação de energia pelo material.

Fatores ambientais e operacionais como pressão, pré-carga, vácuo, deterioração devida ao tempo, frequência de vibração, temperatura, entre outros fatores, afetam as características mecânicas dos materiais viscoelásticos. Os dois últimos, temperatura e frequência, são aqueles considerados os mais influentes.

As características do ambiente no qual o material viscoelástico está inserido é de essencial importância no projeto de dispositivos para o controle de vibrações e ruídos, para que os mesmos funcionem de forma satisfatória. Dentre os principais agentes influenciadores das características viscoelásticas, destaca-se a temperatura.

As quatro regiões características de um material viscoelástico em função da temperatura são apresentadas na Fig. 4.3, e são descritas abaixo.

- a) **região vítrea:** o fator de perda assume valores baixos, com aumento acentuada no com o aumento da temperatura. Já o módulo de armazenamento apresenta seu máximo valor, tendo uma ligeira queda até alcançar a próxima região.
- b) **região de transição:** o fator de perda alcança máximo valor e há acentuado decaimento do módulo de armazenamento com o aumento da temperatura.
- c) **região de borracha:** ambas as propriedades são aproximadamente constantes em função da temperatura e alcançam valores baixos.
- d) **região de fluxo:** o módulo de armazenamento continua diminuindo e o fator de perda cresce.

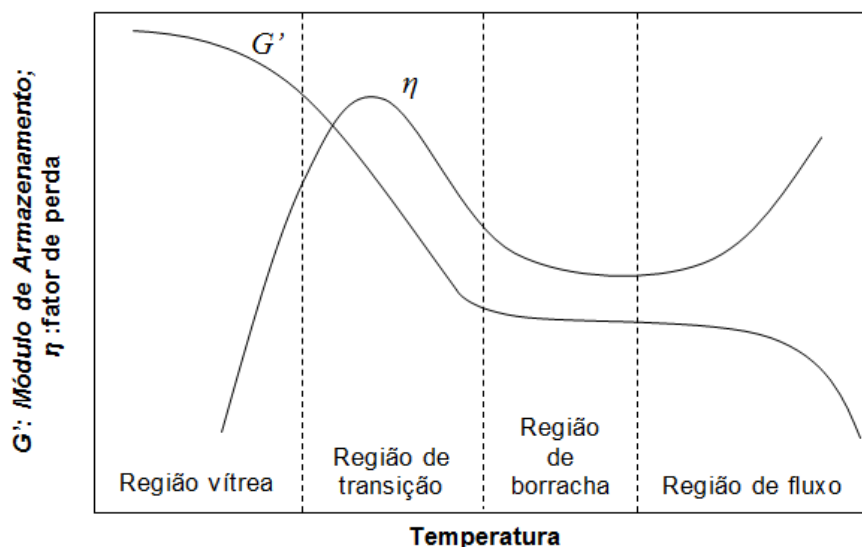


Figura 4.3 – Características viscoelásticas em função da temperatura (adaptado de (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985)).

Na Tab. 4.1 são listadas as faixas de temperaturas onde cada uma das regiões é definida, e os respectivos valores dos parâmetros viscoelásticos.

Tabela 4.1 - Faixas de temperatura e respectivos valores dos parâmetros  $G'$  e  $\eta$ . (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985))

	$G'$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\eta$	Temperatura
<b>região vítrea</b>	$> 10^{11}$	$< 10^{-2}$	$< 20$
<b>região de transição</b>	$10^3$ a $10^{11}$	$10^{-3}$ a 0,3	20-300
<b>região de borracha</b>	$< 10^3$	0,1 a 0,3	50-300

Quando observada a influência da frequência de excitação sobre o módulo de armazenamento e o fator de perda do material viscoelástico percebe-se comportamento oposto àquele observado na região de transição, conforme pode ser observado na Fig. 4.4.

Essa observação fornece embasamento para o Princípio da Equivalência Frequência Temperatura (PEFT), o qual é utilizado para estabelecer relações entre as variações das propriedades do material em função da frequência, com variações induzidas por alterações de temperatura, e vice-versa (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985).

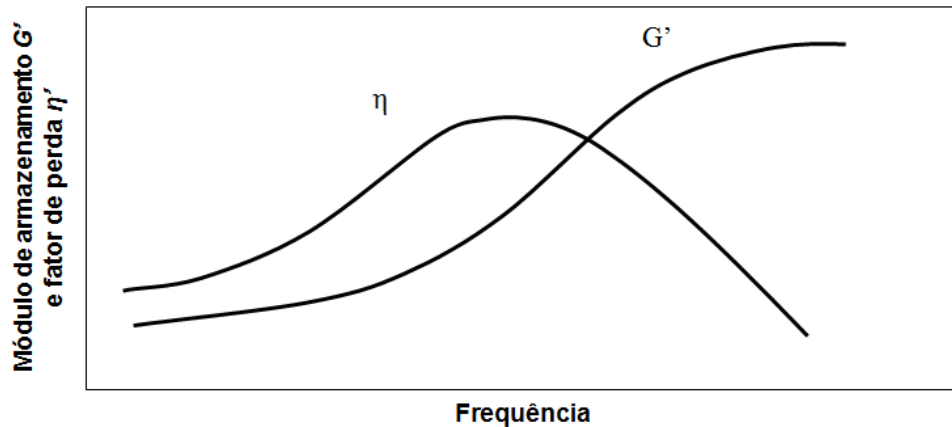


Figura 4.4 – Influência da frequência nas propriedades do material viscoelástico para temperatura de operação constante (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985).

O princípio da Equivalência Frequência-Temperatura toma como premissa a aceleração equivalente dos processos viscoelásticos quando sujeitos a uma variação de temperatura.

O PEFT é baseado na suposição de que o valor do módulo complexo, para qualquer par de valores de frequência e temperatura pode ser relacionado com o valor que ele assume para outro par temperatura-frequência, conforme:

$$G(\omega_r, T_0) = G(\omega, T), \quad (4.8)$$

na qual:

- $T$  é a temperatura de operação do material viscoelástico;
- $T_0$  é a temperatura de referência;
- $\omega_r = \alpha_T(T) \omega$  é a chamada *frequência reduzida*, sendo  $\alpha_T(T)$  o *fator de deslocamento* (*shift fator*).

Os materiais que atendem a Eq.(4.8) são denominados materiais termoreologicamente simples (LAKES, 2009).

#### 4.1.1 Material viscoelástico comercial 3M ISD112®

Conforme discutido anteriormente acerca do PEFT, dado o módulo viscoelástico para uma temperatura de referência, para outros valores da temperatura é necessário calcular o fator de deslocamento de modo que  $\omega_r = \alpha_T(T) \omega$ .

Para alguns materiais viscoelásticos disponíveis comercialmente são fornecidas as funções que determinam os fatores de deslocamento, obtidas experimentalmente ou por meio do ajuste de modelos empíricos. Especificamente para o material conhecido como ISD112<sup>®</sup>, comercializado pela companhia 3M, que será considerado posteriormente neste trabalho, o fator de deslocamento é dado segundo (DRAKE, SOOVERE, 1984):

$$\log_{10} \alpha_T = a \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_z} \right) + 2,303 \left( \frac{2a}{T_z} - b \right) \log_{10} \left( \frac{T}{T_z} \right) + \left( \frac{b}{T_z} - \frac{a}{T_z^2} - S_{AZ} \right) (T - T_z) \quad (4.9)$$

onde os coeficientes  $a$  e  $b$  são calculados conforme:

$$a = (D_B C_C - C_B D_C) / D_E \quad (4.10)$$

$$b = (C_A D_C - D_A C_C) / D_E \quad (4.11)$$

nas quais:

$$C_A = \left( \frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_z} \right)^2, \quad (4.12)$$

$$C_B = \frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_z} \quad (4.13)$$

$$D_A = \left( \frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_z} \right)^2 \quad (4.14)$$

$$D_B = \frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_z} \quad (4.15)$$

$$C_C = S_{AL} - S_{A0} \quad C_C = S_{AL} - S_{A0} \quad (4.16)$$

$$D_C = S_{AH} - S_{A0} \quad (4.17)$$

$$D_E = D_B C_A - C_B D_A \quad (4.18)$$

e o módulo complexo viscoelástico,

$$G_v(\omega_r, T_z) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_5 \left( \frac{f_r i}{B_3} \right)^{-B_6} + \left( \frac{f_r i}{B_3} \right)^{-B_4}}; \quad (4.19)$$

Os parâmetros indicados nas Eqs. (4.12) até (4.19) assumem os valores apresentados na Tab. 4.2 .

Na Fig. 4.5 são apresentadas graficamente as funções que descrevem as propriedades viscoelásticas e a função de deslocamento para o material ISD112.

Tabela 4.2 – Parâmetros associados ao material viscoelástico 3M ISD112®.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$B_1 [MPa]$	0,4307	$T_z [K]$	290
$B_2 [MPa]$	1200	$T_L [K]$	210
$B_3 [MHz]$	1,5403	$T_H [K]$	360
$B_4$	0,6847	$S_{A0} [1/K]$	0,05956
$B_5$	3,241	$S_{AL} [1/K]$	0,1474
$B_6$	0,180	$S_{AH} [1/K]$	0,009725

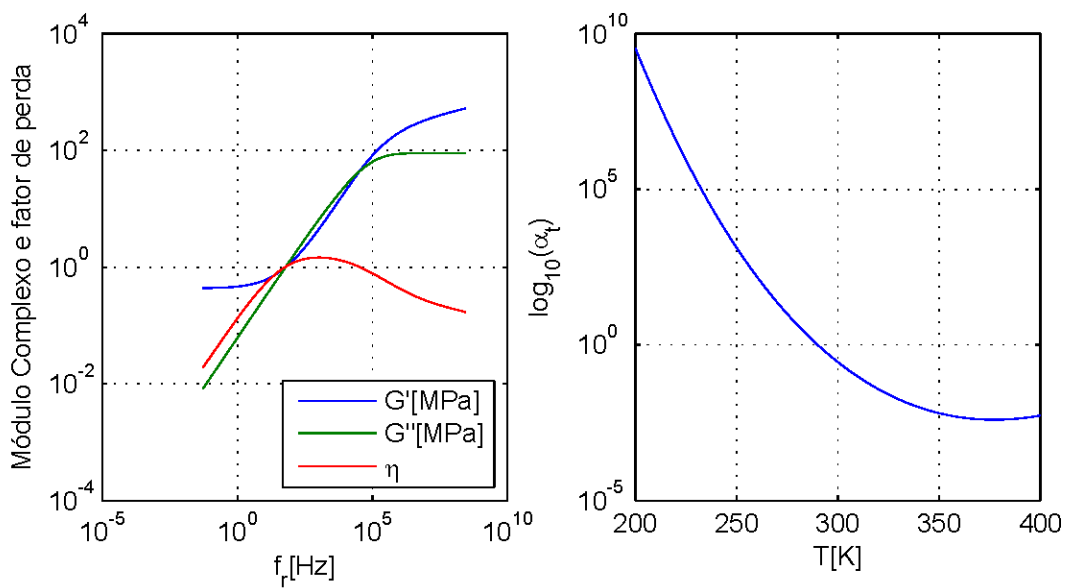


Figura 4.5 – Gráficos das propriedades viscoelásticas e da função de deslocamento para o material ISD112.

## 4.2 Modelo Derivativo Fracionário

Dentre os diversos modelos matemáticos desenvolvidos para representar o comportamento de materiais viscoelásticos (uma revisão é apresentada em (SALES, 2013)), os modelos baseados no conceito de derivadas fracionárias estão entre os considerados mais eficientes.

Basicamente, os modelos viscoelásticos baseados em derivadas fracionárias são obtidos a partir de uma substituição das derivadas de ordem inteira das equações constitutivas dos modelos clássicos por derivadas de ordem não inteira, as quais são definidas matematicamente no âmbito do Cálculo Fracionário. Essa abordagem é respaldada pela observação que as derivadas fracionárias possibilitam melhor representação do comportamento viscoelástico em largas bandas de frequência, sem que seja necessário identificar muitos parâmetros.

De acordo com Mainardi (2010), o primeiro registro da utilização das derivadas fracionárias para representar o comportamento dinâmico dos materiais data da década de 1950. Entretanto, foi só a partir dos anos 1980 que esses modelos ganharam destaque, especialmente através dos trabalhos de Bagley e Torvik (1983, 1985).

A associação do modelo de derivadas fracionárias com discretização por elementos finitos tem sido recentemente tratada por alguns autores. A abordagem sugerida por Galúcio; Dëu; Ohayon (2004) foi escolhida para representação do modelo viscoelástico nesse trabalho e encontra-se descrita a seguir.

Para desenvolvimento, assume-se um estado de tensão-deformação uniaxial, que é baseado na adoção do modelo fracionário constitutivo de Zener, expresso segundo:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad (4.20)$$

onde  $\tau$  representa o tempo de relaxação,  $E_0$  e  $E_\infty$  são, respectivamente, os módulos de baixa e alta frequência do material (ou módulos estático e dinâmico, respectivamente). A tensão é dada por  $\sigma(t)$ , ao passo que a deformação é designada por  $\varepsilon(t)$ . A definição do operador fracionário derivativo de Riemann-Liouville, com ordem  $\alpha$ , é dada por:

$$\frac{d^\alpha (f(t))}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^\alpha} ds. \quad (4.21)$$

Introduzindo a deformação anelástica, expressa segundo:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_\infty}, \quad (4.22)$$

a Eq.(4.20) pode ser escrita sob a forma

$$\bar{\varepsilon}(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)}{dt^\alpha} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t). \quad (4.23)$$

Deve se notar que  $\bar{\varepsilon}(t)$  desempenha o papel de uma variável interna. Salienta-se ainda que, com essa substituição, a expressão passa a ter apenas uma parcela dependente de uma derivada fracionária, o que simplifica o tratamento matemático e o processo de solução.

A discretização temporal de Grünwald-Letnikov é utilizada, de acordo com a seguinte aproximação feita para as derivadas fracionárias:

$$\frac{d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)}{dt^\alpha} \approx \Delta t^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n_p} A_{j+1} \bar{\varepsilon}(t - j\Delta t), \quad (4.24)$$

na qual passo de tempo é dado por  $\Delta t = t/n$ , com a condição  $n_p \leq n$ , sendo  $n_p$  o número de pontos escolhidos para o somatório e  $n$  o número de pontos na solução temporal. Os coeficientes de Grünwald podem ser calculados de acordo com:

$$A_{j+1}(\alpha) = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} = \frac{j-\alpha-1}{j} A_j(\alpha); \quad A_1(\alpha) = 1, \quad (4.25)$$

na qual  $\Gamma(\cdot)$  indica a função Gama e  $\alpha$  é a ordem da derivada fracionária.

Associando as Eqs.(4.22), (4.23) e (4.24), tem-se:

$$\sigma(t) = \left[ 1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right] E_0 \varepsilon(t) + c E_\infty \sum_{j=1}^{n_p} A_{j+1}(\alpha) \bar{\varepsilon}(t - j\Delta t). \quad (4.26)$$

O coeficiente adimensional  $c$  pode ser calculado sob a forma:

$$c = \frac{\tau^\alpha}{(\tau^\alpha + \Delta t^\alpha)} \quad (4.27)$$

Analisando a Eq.(4.26), pode-se dizer que a deformação do material viscoelástico, fixado num instante de tempo qualquer, tem maior relação com o histórico recente de seu comportamento do que com ocorrências que se deram mais anteriormente. Tal deformação pode ser incorporada a equações do movimento tradicionais onde as deformações são associadas à rigidez e as parcelas calculadas no tempo anterior (termos de Grünwald) podem ser associadas aos esforços externos, uma vez que já se conhece seu valor da iteração anterior, como mostrado na equação abaixo.

$$\begin{aligned} [M] \{ \ddot{x}(t) \} + \left[ [K] + \left( 1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) [K_v] \right] \{ x(t) \} = f(t) + \\ -c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{n_p} A_{j+1} [K_v] \bar{x}(t - j\Delta t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

na qual,  $[K_v]$  é a rigidez do material viscoelástico.

# CAPÍTULO V

## Modelagem Matemática de Sistemas Aeroelásticos e Aeroviscoelásticos

O presente capítulo diz respeito à construção dos modelos matemáticos que representam o comportamento aeroelástico de seções típicas. São apresentados aspectos de modelagem de aerofólios em geral, bem como as considerações e simplificações comumente assumidas para construção de tais modelos. Adicionalmente, tratar-se-á dos modelos de seção típica associados a materiais viscoelásticos, dando origem ao que serão denominados *modelos aeroviscoelásticos*, proposta essencial desse trabalho.

### 5.1 Modelo de seção típica de dois graus de liberdade

A Figura 5.1 representa um modelo de seção típica com dois graus de liberdade (GDL) associados ao movimento de arfagem (*pitch*), representado pelo ângulo  $\alpha$ , e o deslocamento vertical (*heave*), dado por  $h$ . A rotação é medida em relação ao ângulo de sustentação nula, ao passo que  $h$  é medido em relação ao centro elástico, considerando-se o sentido para baixo como positivo.

Na localização dos pontos de referência no aerofólio,  $AC$  é a indicação para centro aerodinâmico, localizado no primeiro quarto da corda, sendo o ponto onde a sustentação é aplicada. Já  $MC$  representa o centro de massa e  $EC$  é o centro elástico do aerofólio, onde os elementos de rigidez são fixados.

Para posicionamento dos pontos referenciados acima, são utilizadas variáveis adimensionais, compreendidas entre  $+1$  e  $-1$ , que são multiplicadas pela semicorda, indicada por  $b$ . Desta forma, o produto  $be$  indica a posição do centro de massa e  $ba$  localiza o centro elástico.

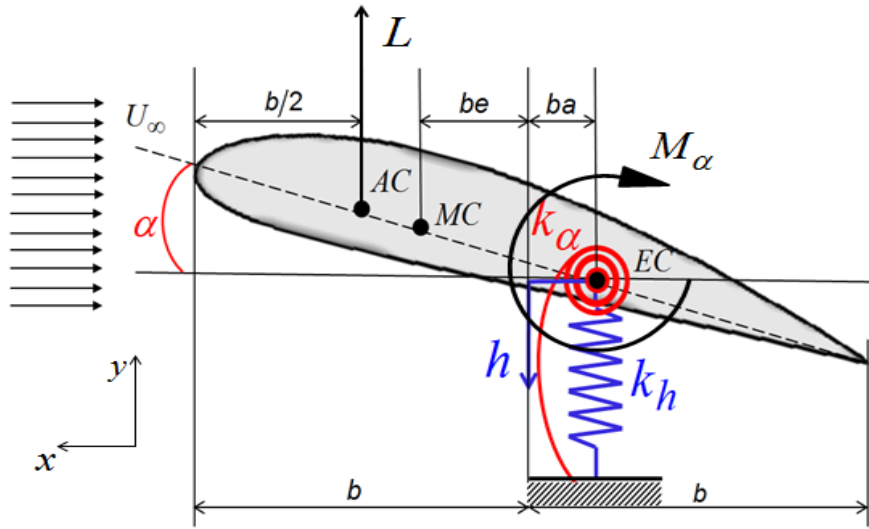


Figura 5.1 - Modelo físico de uma seção típica de 2 GDL.

O conjunto é sujeito a uma velocidade de escoamento de ar  $U_\infty$ , que apresenta massa específica  $\rho_\infty$ . As molas  $k_h$  e  $k_\alpha$  conferem rigidez associada aos graus de liberdade já discriminados. Não é considerado nenhum tipo de amortecimento estrutural ou atrito.

Uma vez estabelecidas as considerações de simplificação prévias do sistema, parte-se para construção do modelo matemático representativo, a ser descrito na forma de equações diferenciais do movimento.

Para tanto, serão utilizadas as Equações de Lagrange, expressas matematicamente pela Eq.(5.1), onde  $K$  é a energia cinética e  $V$  a energia potencial associada ao sistema, ao passo que  $q_i$  é a indicação da  $i$ -ésima coordenada generalizada assumida para representação dos respectivos graus de liberdade ( $h$  e  $\alpha$ ).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K - V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial (K - V)}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad (5.1)$$

Para a energia potencial, tem-se somente as parcelas associadas às molas de rotação e translação, que resultam em:

$$V = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_\alpha \alpha^2 \quad (5.2)$$

Tratando o aerofólio como um corpo rígido em movimento plano, a energia cinética pode ser expressa conforme Eq.(5.3):

$$K = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \rho(x) \dot{r}(x)^2 dx, \quad (5.3)$$

com  $\rho$  representando a massa específica do aerofólio e  $\dot{r}(x)$  a velocidade de um ponto genérico do aerofólio, cuja posição ao longo da corda é indicada por  $x$ . Esta velocidade é dada pela Eq.(5.4), considerando-se pequenos ângulos, para os quais a aproximação  $\tan \alpha = \alpha$  é válida.

$$\dot{r}(x) = -\dot{h} - (x - ba)\dot{\alpha}. \quad (5.4)$$

Substituindo Eq.(5.4) na Eq.(5.3), é possível obter a expressão para a energia cinética associada à seção típica sob a forma:

$$K = \frac{1}{2} \left( m_a \dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{\alpha}S_\alpha + \dot{\alpha}^2 I_\alpha \right), \quad (5.5)$$

onde a massa do aerofólio  $m_a$ , o momento estático  $S_\alpha$ , e o momento de inércia de massa, são definidos conforme Eq.(5.6), Eq. (5.7) e Eq.(5.8), respectivamente.

$$m_a = \int_{-b}^b \rho(x) dx, \quad (5.6)$$

$$S_\alpha = \int_{-b}^b \rho(x)(x - ba) dx, \quad (5.7)$$

$$I_\alpha = \int_{-b}^b \rho(x)(x - ba)^2 dx. \quad (5.8)$$

As forças generalizadas associadas aos graus de liberdade descritos podem ser derivadas do trabalho realizado pela sustentação aerodinâmica  $L$ , através do deslocamento virtual do centro aerodinâmico da seção típica e pelo momento de arfagem  $M_\alpha$  através de uma rotação virtual.

O trabalho virtual  $\delta W$  pode ser calculado conforme:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{Q}_i \delta \vec{q}_i, \quad (5.9)$$

onde as forças generalizadas são indicadas por  $Q_i$  e as coordenadas generalizadas representadas por  $q_i$ .

Sendo as coordenadas generalizadas representadas pelos graus de liberdade  $h$  e  $\alpha$ , pode-se inferir que a velocidade do centro aerodinâmico ( $\dot{h}_{AC}$ ) é dada por:

$$\dot{h}_{AC} = -\dot{h} + b\dot{\alpha} \left( \frac{1}{2} + a \right). \quad (5.10)$$

O deslocamento virtual do centro aerodinâmico pode ser facilmente obtido substituindo as velocidades por diferenciais indicados por  $\delta$ ; assim o deslocamento do centro aerodinâmico pode ser indicado segundo:

$$\delta h_{AC} = -\delta h + b\delta\alpha \left( \frac{1}{2} + a \right), \quad (5.11)$$

e o trabalho virtual pode ser então calculado de acordo com:

$$\delta W = L \left( -\delta h + b\delta\alpha \left( \frac{1}{2} + a \right) \right) + M_{\alpha_{AC}} \delta\alpha. \quad (5.12)$$

Da comparação das equações (5.9) e (5.12), decorre que as forças generalizadas resultam:

$$Q_h = -L \quad (5.13)$$

$$Q_\alpha = M_\alpha = M_{\alpha_{AC}} + b\left(\frac{1}{2} + a\right)L \quad (5.14)$$

Com base nos desenvolvimentos precedentes, obtém-se o seguinte conjunto de equações do movimento para a seção típica de dois graus de liberdade:

$$m_a \ddot{h}(t) + S_\alpha \ddot{\alpha}(t) + k_h h(t) = -L(t) \quad (5.15)$$

$$I_\alpha \ddot{\alpha}(t) + S_\alpha \ddot{h}(t) + k_\alpha \alpha(t) = M_\alpha(t) \quad (5.16)$$

O sistema de duas equações diferenciais dado pelas Eqs. (5.15) e (5.16) pode ser compactamente expresso na seguinte forma matricial clássica dos sistemas dinâmicos:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (5.17)$$

onde a matriz de massa  $[M]$ , de rigidez  $[K]$  e o vetor de esforços generalizados  $\{Q(t)\}$  são dados, respectivamente, por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_a & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} -L(t)b \\ M_\alpha(t) \end{Bmatrix}. \quad (5.20)$$

Para análise de estabilidade, vale lembrar que, em análises clássicas de *flutter*, assume-se que o movimento do aerofólio e os esforços aerodinâmicos sejam harmônicos com frequência  $\omega$ :

$$h(t) = \bar{h}e^{i\omega t}, \quad (5.21)$$

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} e^{i\omega t}, \quad (5.22)$$

$$L(t) = \bar{L} e^{i\omega t}, \quad (5.23)$$

$$M(t) = \bar{M} e^{i\omega t}. \quad (5.24)$$

Substituindo as expressões dadas nas Eq.(5.21) a (5.24) nas Eqs.(5.17), tem-se:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_a & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{L} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

Nesse ponto deve-se introduzir o carregamento aerodinâmico ao qual o aerofólio é sujeito. Em capítulos precedentes, já foi discutida a importância e as consequências da admissão de cada um dos regimes de escoamento. Para escoamento não estacionário, (discutido no Capítulo III), regime que será admitido para as simulações numéricas nos próximos capítulos, pode-se expressar o lado direito da Eq.(5.25) da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} -\bar{L}b \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} L_h & L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h \\ M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h & M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) (L_\alpha + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

na qual,

$$L_h = 1 - \frac{2i}{k} C(k), \quad (5.27)$$

$$L_\alpha = \frac{1}{2} - 1i \frac{(1 + 2C(k))}{k} - \frac{2C(k)}{k^2}, \quad (5.28)$$

$$M_h = \frac{1}{2}, \quad (5.29)$$

$$M_\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1i}{k}, \quad (5.30)$$

Substituindo a Eq.(5.26) na Eq.(5.25) e rearranjando os termos, são obtidas as seguintes equações adimensionais para o modelo de dois graus de liberdade:

$$\begin{bmatrix} \mu \left( 1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right) + L_h & \mu x_\alpha + L_\alpha - \left( \frac{1}{2} + a \right) L_h \\ \mu x_\alpha + M_h - \left( \frac{1}{2} + a \right) L_h & \left( \mu r_\alpha^2 \left( 1 - \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \right) + M_\alpha - \left( \frac{1}{2} + a \right) (L_\alpha + M_h) + \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

Convém nesse momento definir os seguintes parâmetros adimensionais:

- raio de giração  $r_\alpha$ ,  $x_\alpha$ , que indica a distância do centro de massa ao centro elástico;
- razão entre a massa do aerofólio e a massa de ar em torno dele, indicada por  $\mu$ ;
- frequência natural associada ao deslocamento vertical,  $\omega_h$ ;
- frequência natural associada ao movimento de rotação,  $\omega_\alpha$ , de acordo com as equações a seguir:

$$r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{m_a b^2}, \quad (5.32)$$

$$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{b m_a}, \quad (5.33)$$

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho_\infty b^2}, \quad (5.34)$$

$$\omega_h^2 = \frac{k_h}{m_a}, \quad (5.35)$$

$$\omega_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{I_\alpha}. \quad (5.36)$$

Pode-se compactar as equações do movimento do sistema aeroelástico no domínio da frequência, Eq. (5.25), na forma de um problema de autovalor, segundo:

$$\left[ [K] - \omega^2 \left[ [M] + \frac{1}{\mu} [A] \right] \right] \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{b} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.37)$$

ou, mais sucintamente, conforme Eq.(5.38),

$$[D] \{\bar{q}\} = 0, \quad (5.38)$$

onde:

$$[D] = [K] - \omega^2 \left[ [M] + \frac{1}{\mu} [A] \right]. \quad (5.39)$$

### 5.1.1 Incorporação das molas viscoelásticas ao modelo de 2 GDL

Conforme descrito em seções anteriores, deseja-se incorporar ao sistema aeroelástico dispositivos dissipadores de energia que consistem em molas viscoelásticas que hão de alterar a rigidez e o amortecimento do sistema de interesse. Conforme ilustrado nas Fig. 5.2(a) e Fig. 5.2 (b), tais dispositivos podem ser confeccionados sob a forma de apoios translacionais ou rotacionais, nos quais o material viscoelástico é inserido entre duas partes metálicas, de modo que o movimento do aerofólio induza deformações de cisalhamento na camada viscoelástica.

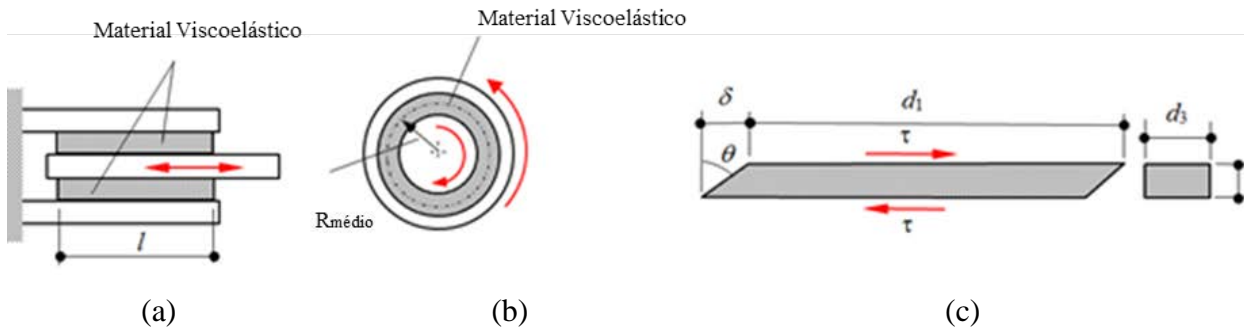


Figura 5.2 - Representação do dispositivo viscoelástico incorporado (a) no movimento translacional e (b) no movimento torcional; (c) deformação da camada viscoelástica.

Para modelagem do dispositivo viscoelástico, considera-se a Fig.5.2(c), 5.3 que ilustra uma camada de material viscoelástico e suas dimensões, indicadas por  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , as quais indicam o comprimento, a espessura e a largura da camada, respectivamente. A tensão cisalhante gerada no material viscoelástico devida ao deslocamento relativo entre as partes metálicas pode ser expressa segundo:

$$\tau = G_v(T, \omega)\theta, \quad (5.40)$$

onde  $G_v$  é o módulo viscoelástico complexo, cujo comportamento depende diretamente da temperatura e da frequência de operação, conforme descrito na Seção 4.2.1, e  $\theta$  é o ângulo de cisalhamento.

Partindo do fato que a tensão pode ser expressa como força por área cisalhada, ou seja,  $\tau = P/(d_1 d_3)$  e admitindo que o deslocamento sofrido pelo material seja suficientemente pequeno para permitir a aproximação  $\theta = \delta / d_1$ , partindo da Eq. (5.40) obtém-se:

$$\frac{P}{\delta} = \frac{d_1 d_3}{d_2} G_v(T, \omega), \quad (5.41)$$

na qual  $P$  é a força de cisalhamento.

Sendo o quociente força por deslocamento equivalente a um parâmetro de rigidez, para as molas viscoelásticas instaladas em ambos os graus de liberdade ( $k_{hv}$  e  $k_{\alpha v}$ ) os coeficientes podem ser calculadas conforme:

$$k_{hv} = p_h G_v(T, \omega), \quad (5.42)$$

$$k_{\alpha v} = p_\alpha G_v(T, \omega). \quad (5.43)$$

Os fatores geométricos da camada viscoelástica,  $p_h$  e  $p_\alpha$  representam a área cisalhada por unidade de espessura do material viscoelástico.

Com base na modelagem das molas viscoelásticas, fica caracterizado o sistema aeroviscoelástico ilustrado na Fig. 5.3 :um aerofólio convencional, semelhante ao apresentado



As frequências e parâmetros associados são calculados pela anulação do determinante característico associado à matriz dinâmica. Denotando por  $F$  a função que expressa este determinante, escreve-se:

$$F(\omega) = 0 \quad (5.47)$$

Vale observar que  $F(\omega)$  que não é um polinômio com coeficientes constantes. Assim, para calcular os valores das frequências associadas aos modos de vibração do sistema aeroviscoelástico, bem como da condição de velocidade crítica, será utilizado um procedimento de otimização, conforme será detalhado no Capítulo VI, que trata das simulações numéricas.

## 5.2 Modelo de seção típica com superfície de controle

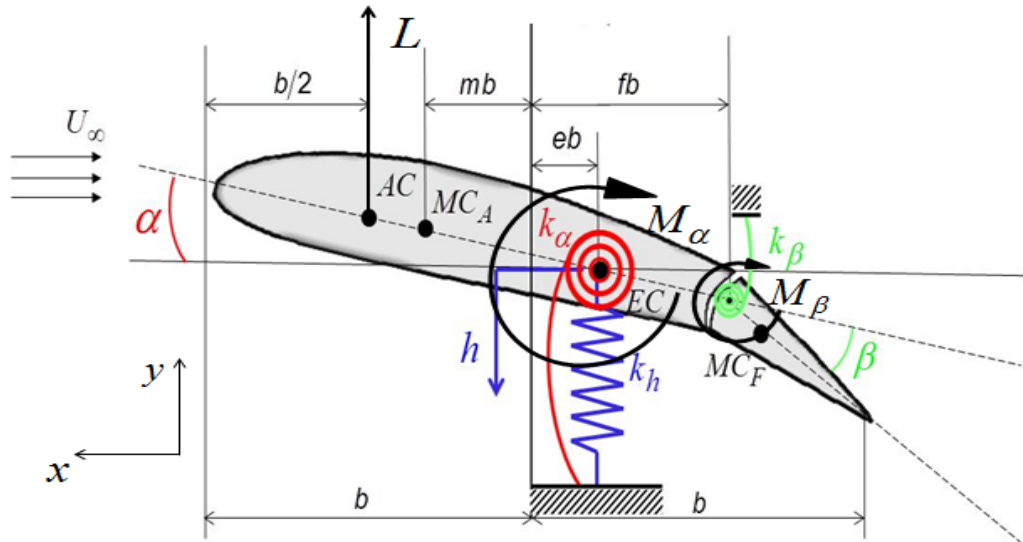


Figura 5.4– Seção típica com três graus de liberdade.

Nessa seção é apresentada a modelagem matemática da seção típica associada a uma superfície de controle, conforme ilustrado na Fig. 5.4. A variável  $\beta$  representa o grau de liberdade adicional associado ao ângulo de deflexão da superfície de controle em relação ao

aerofólio principal. O ponto de pivotamento é localizado em relação ao referencial pelo parâmetro adimensional  $f$ , de módulo sempre menor que a unidade.

Novamente será utilizada a formulação de Lagrange para obtenção das equações do movimento. A energia potencial elástica é dada pela soma das energias associadas a cada uma das três molas:

$$U = \frac{1}{2} \left( k_h h^2 + k_\alpha \alpha^2 + k_\beta \beta^2 \right), \quad (5.48)$$

na qual,  $k_h, k_\alpha$  e  $k_\beta$  representam a rigidez de cada mola relacionada ao respectivo grau de liberdade.

A velocidade para um ponto genérico do aerofólio é expressa de forma distinta para cada uma das duas partes que compõem a seção, segundo:

$$\dot{r}(x) \approx \begin{cases} -\dot{h} - (x - eb)\dot{\alpha} & (-b < x < c) \\ -\dot{h} - (x - eb)\dot{\alpha} - (x - fb)\dot{\beta} & (c < x < b). \end{cases} \quad (5.49)$$

A energia cinética da seção, incluindo agora a parcela associada à superfície de controle é apresentada na Eq.(5.50):

$$K = \frac{1}{2} \left( M\dot{h}^2 + I_\beta \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 I_\alpha \right) + \dot{h}\dot{\alpha} S_\alpha + \dot{h}\dot{\beta} S_\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \left( I_\beta + (f - e)bS_\beta \right), \quad (5.50)$$

onde o momento de inércia de massa  $I_\beta$  e o momento estático  $S_\beta$  associados à superfície de controle são, respectivamente, expressos sob a formas:

$$I_\beta = \int_{fb}^b \rho(x) (x - fb)^2 dx, \quad (5.51)$$

$$S_\beta = \int_{fb}^b \rho(x) (x - fb) dx. \quad (5.52)$$

Analogamente ao realizado para a seção típica de dois graus de liberdade, são calculados os esforços generalizados baseando-se no princípio do trabalho virtual, donde pode-se obter os esforços dados segundo:

$$Q_h = -L, \quad (5.53)$$

$$Q_\alpha = M_\alpha = M_{\alpha_{AC}} + b\left(\frac{1}{2} + a\right)L, \quad (5.54)$$

$$Q_\beta = M_\beta = M_{\beta_{AC}} + b\left(\frac{1}{2} + f\right)L. \quad (5.55)$$

Substituindo a Eq. (5.48), a Eq.(5.50) e a Eq. (5.53) na expressão das Equações de Lagrange (Eq.(5.1)), tem-se o seguinte conjunto de três equações do movimento:

$$m_a \ddot{h}(t) + S_\alpha \ddot{\alpha}(t) + S_\beta \ddot{\beta}(t) + k_h h(t) = -L(t), \quad (5.56)$$

$$I_\alpha \ddot{\alpha}(t) + S_\alpha \ddot{h}(t) + (I_\beta + (f - e)bS_\beta) \ddot{\beta}(t) + k_\alpha \alpha(t) = M_\alpha(t), \quad (5.57)$$

$$I_\beta \ddot{\beta}(t) + S_\beta \ddot{h}(t) + (I_\beta + (f - e)bS_\beta) \ddot{\alpha}(t) + k_\beta \beta(t) = M_\beta(t). \quad (5.58)$$

Pode-se expressar as Eqs. (5.56) a (5.58) matricialmente, conforme:

$$\begin{bmatrix} m_a & S_\alpha & S_\beta \\ S_\alpha & I_\alpha & (I_\beta + (f - e)bS_\beta) \\ S_\beta & (I_\beta + (f - e)bS_\beta) & I_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ M_\alpha \\ M_\beta \end{Bmatrix}. \quad (5.59)$$

Assumindo a condição harmônica escreve-se:

$$h(t) = \bar{h}e^{i\omega t} \quad (5.60)$$

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}e^{i\omega t} \quad (5.61)$$

$$\beta(t) = \bar{\beta}e^{i\omega t} \quad (5.62)$$

$$L(t) = \bar{h}e^{i\omega t} \quad (5.63)$$

$$M_\alpha(t) = \bar{M}_\alpha e^{i\omega t} \quad (5.64)$$

$$M_\beta(t) = \bar{M}_\beta e^{i\omega t} \quad (5.65)$$

Substituindo as Eqs. (5.60) a (5.62) e as Eq. (5.63) a (5.65) na Eq.(5.59), o sistema de equações matriciais do movimento no domínio da frequência toma a forma:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_a & S_\alpha & S_\beta \\ S_\alpha & I_\alpha & (I_\beta + (f-e)bS_\beta) \\ S_\beta & (I_\beta + (c-e)bS_\beta) & I_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\bar{L} \\ \bar{M}_\alpha \\ \bar{M}_\beta \end{Bmatrix}. \quad (5.66)$$

Assim como para o modelo de dois graus de liberdade, é assumido o regime de escoamento aerodinâmico não estacionário, conforme apresentado no Capítulo III.

A Eq. (5.67) mostra o modelo matemático resultante desta hipótese, representando as amplitudes dos momentos e da sustentação.

$$\begin{Bmatrix} -\bar{L}b \\ \bar{M}_\alpha \\ \bar{M}_\beta \end{Bmatrix} = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} L_h & L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h & L_\beta \\ \left(M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h\right) & \left(M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right)(L_\alpha + M_h)\right) & \left(M_\beta + \left(-L_\beta\left(\frac{1}{2} + a\right)\right)\right) \\ T_h & T_\alpha - T_h\left(\frac{1}{2} + a\right) & T_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix}, \quad (5.67)$$

onde:

$$L_\beta = -\frac{T_1}{\pi} + \frac{T_4}{k\pi}i - \frac{2C(k)T_{10}}{k^2\pi} + \frac{C(k)T_{11}}{k\pi}i, \quad (5.68)$$

$$M_\beta = \frac{T_1}{\pi} \left( (a-c) - \left( a + \frac{1}{2} \right) - \frac{i}{k} \right) + \frac{T_4}{k\pi} \left( \left( a + \frac{1}{2} \right) i - (a-c)i - \frac{i}{k} \right) +$$

$$-\frac{T_7}{\pi} + \frac{T_8}{k\pi} i - \frac{T_{10}}{k^2\pi} - \frac{T_{11}}{2\pi k} i, \quad (5.69)$$

$$T_h = \frac{T_1}{\pi} - \frac{T_{12}C(k)}{\pi k} i, \quad (5.70)$$

$$T_\alpha = \frac{T_1}{\pi} \left( \frac{i}{k} - \left( \frac{1}{2} + a \right) \right) - \frac{T_4}{\pi k} \left( \frac{1}{2} + a \right) i + \frac{2T_9}{\pi k} i - \frac{T_{12}C(k)}{\pi k} \left( i + \frac{1}{k} \right) + \frac{2T_{13}}{\pi}, \quad (5.71)$$

$$T_\beta = -\frac{T_3}{\pi^2} - \frac{T_5}{\pi^2 k^2} + \frac{T_{10}}{\pi^2 k^2} + \frac{T_{11}i}{2\pi^2 k} (T_4 - T_{12}C(k)). \quad (5.72)$$

Vale lembrar que as funções  $T_i$ , para  $i = 1, \dots, 13$  são definidas na Seção 3.2.2.

Substituindo a Eq.(5.67) na Eq.(5.66), expressam-se as equações adimensionais de *flutter* para o modelo incluindo a superfície de sustentação segundo:

$$\begin{bmatrix} \mu \left( 1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right) + L_h & \mu x_\alpha + L_\alpha - L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) & \mu x_\beta + L_\beta \\ \begin{pmatrix} \mu x_\alpha + M_h \\ -L_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} r_\alpha^2 \left( 1 - \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \right) + M_\alpha \\ -(L_\alpha + M_h) \left( \frac{1}{2} + a \right) + L_h \left( \frac{1}{2} + a \right)^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left( r_\beta^2 + (f-e)x_\beta \right) + \\ + M_\beta - L_\beta \left( \frac{1}{2} + a \right) \end{pmatrix} \\ \mu x_\beta + T_h & \begin{pmatrix} \left( r_\alpha^2 + (f-e)x_\alpha \right) + \\ + T_\alpha - T_h \left( \frac{1}{2} + a \right) \end{pmatrix} & r_\beta^2 \left( 1 - \frac{\omega_\beta^2}{\omega^2} \right) + T_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

Novamente, tem-se o problema de autovalor associado semelhante ao apresentado anteriormente para o modelo de dois graus de liberdade.



$$I_\beta \ddot{\beta}(t) + S_\beta \ddot{h}(t) + (I_\beta + (f - e) b S_\beta) \ddot{\alpha}(t) + k_{\beta v}(T, \omega) \beta(t) = M_\beta(t). \quad (5.79)$$

Por fim, o problema de autovalor associado a estas equações do movimento pode ser obtido de forma análoga ao apresentado na Eq. (5.40).

### 5.3 Análise de respostas no domínio do tempo

As equações do movimento para análise temporal serão associadas a aproximação por funções racionais da matriz aerodinâmica, conforme discutido anteriormente (Seção 3.3). Com as matrizes de massa e rigidez já definidas para os modelos de dois e três graus de liberdade (Eqs. (5.25) e (5.59)) é apenas necessário incorporar tais matrizes no modelo em espaço de estados, segundo:

$$\{\dot{\xi}(t+1)\} = [D_v] \{\xi(t+1)\} + [B_v] \{\xi(t)\}, \quad (5.80)$$

no qual o vetor de estados no tempo atual e no tempo anterior são dados por:

$$\{\dot{\xi}(t+1)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1(t+1) \\ \dot{\xi}_2(t+1) \\ \dot{\xi}_3(t+1) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{2+nlag}(t+1) \end{Bmatrix}; \quad (5.81)$$

$$\{\xi(t)\} = \begin{Bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \vdots \\ \xi_{2+nlag}(t) \end{Bmatrix}; \quad (5.82)$$

Conforme teoria apresentada no Capítulo III a respeito de aproximação por funções racionais e posterior expansão em espaço de estados, a matriz  $[D_v]$ , definida a seguir, incorpora as propriedades aerodinâmicas e dinâmicas do modelo de seção típica.

$$[D_v] = \begin{bmatrix} [Z] & [I] & [Z] & \dots & [Z] \\ -[\tilde{M}][\tilde{K}_v] & -[\tilde{M}][\tilde{C}] & [\tilde{M}][\hat{A}_3] & \dots & [\tilde{M}][\hat{A}_{nlag+2}] \\ [Z] & [I] & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\gamma_3[I] & [Z] & [Z] \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ [Z] & [I] & & \dots & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\gamma_{nlag+2}[I] \end{bmatrix}; \quad (5.83)$$

Ainda, de acordo com a modelagem viscoelástica temporal adotada, o comportamento viscoelástico é incluindo na matriz  $[\tilde{K}_v]$ , parcela associada ao tempo atual, e na matriz  $[B_v]$  que está associada ao tempo anterior, conforme:

$$[\tilde{K}_v] = [\tilde{K}] + \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0}\right) [K_v] \quad (5.84)$$

$$[B_v] = \begin{bmatrix} [Z] \\ -[\tilde{M}]^{-1} \left( -c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{n_p} A_{j+1} [K_v] \right) \\ \vdots \\ [Z] \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

## CAPÍTULO VI

### Simulações Numéricas

Nesta parte do trabalho são desenvolvidas aplicações numéricas para as seções típicas aeroelástica e aeroviscoelástica, as quais foram modeladas matematicamente no Capítulo V. Os resultados apresentados na primeira seção são referentes ao modelo de dois graus de liberdade, ao passo que na segunda seção o modelo que inclui a superfície de controle é explorado. A influência da inserção de amortecimento viscoelástico na velocidade crítica é estudada. Outra análise realizada consiste no estudo do comportamento do sistema aeroviscoelástico quando sujeito a variações paramétricas, mais especificamente relacionadas à temperatura e à geometria dos elementos viscoelásticos. Um modelo no domínio do tempo também é apresentado e são integradas as equações do movimento.

#### 6.1 Simulações com modelo de seção típica de dois graus de liberdade.

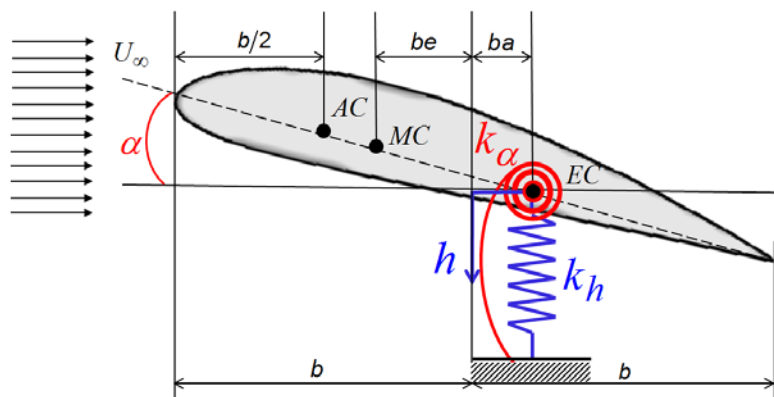


Figura 6.1 – Modelo aeroelástico de dois GDL adotado nas simulações numéricas.

O modelo de seção típica de dois graus de liberdade utilizado nas simulações é semelhante àquele apresentado no Capítulo V. O modelo é mais uma vez representado na Fig. 6.1 , e as propriedades físicas e geométricas adotadas para gerar os resultados numéricos são apresentadas na Tab. 6.1.

Tabela 6.1 - Propriedades físicas e geométricas do modelo de 2 GDL adotado nas simulações numéricas.

Parâmetro	Valor
Razão de massas ( $\mu$ )	75
Semicorda( $b$ )	0,15 m
Frequência natural de flexão ( $\omega_h$ )	55 rad/s
Frequência natural de torção ( $\omega_\alpha$ )	65 rad/s
Raio de giração ( $r$ )	$\sqrt{0,25} \text{ kg/m}^2$
Massa específica do ar ( $\rho$ )	1,225 kg/m <sup>3</sup>
Fator de posicionamento do centro de massa( $e$ )	0,1
Fator de posicionamento do centro elástico ( $a$ )	0,2

#### 6.1.1 Influência da natureza do escoamento de ar.

Conforme mencionado no Capítulo III, o escoamento de ar que envolve o aerofólio na condição de voo, gerando a força de sustentação e momento aerodinâmico pode ser modelado assumindo três diferentes regimes, correspondentes à aerodinâmica estacionária, quasi-estacionária e a não estacionária.

O modelo de seção típica de dois graus de liberdade foi então sujeito às três condições aerodinâmicas supracitadas. Os resultados estão apresentados na Fig .6.2, na forma de um diagrama  $V_{gf}$  – velocidade, amortecimento e frequência, para os três regimes aerodinâmicos de interesse. O Método  $k$  foi utilizado para cálculo de velocidade crítica de *flutter* (velocidade que define a fronteira entre da condição de estabilidade aerodinâmica) e os valores correspondentes são apresentados na Tab. 6.2. Ressalta-se que a condição crítica é indicada pela condição de amortecimento nulo.

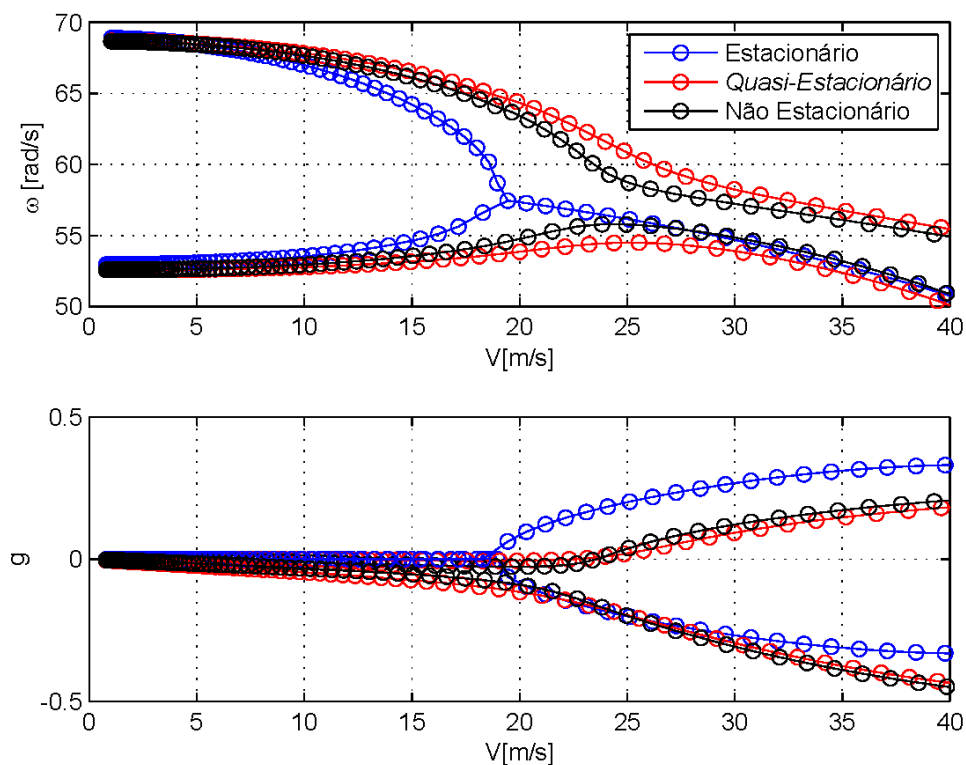


Figura 6.2 – Análise comparativa da frequência e amortecimento em função da velocidade crítica para os três regimes aerodinâmicos adotados.

Tabela 6.2 – Velocidades calculadas para cada um dos regimes de escoamento adotados.

Regime aerodinâmico adotado	Velocidade crítica calculada [m/s]
Escoamento estacionário	17,99
Escoamento quasi-estacionário	22,51
Escoamento não estacionário	23,56

Observa-se que os modelos estacionário e *quasi*-estacionário apresentam valores de velocidade crítica inferiores ao valor obtido para o regime não estacionário, podendo, dessa forma, ser considerados mais conservativos. Todavia, o acoplamento aeroelástico dos modos de vibração é mais evidente quando os efeitos devidos à esteira (termos circulatorios) são considerados. Além do mais, ao se considerarem sistemas com diversos graus de liberdade, os efeitos de esteira podem conduzir a acoplamentos adicionais, causando um estado inesperado de instabilidade aeroelástica.

Com base nessa discussão, o regime aerodinâmico utilizado nas simulações a serem apresentadas na sequência será do tipo não estacionário, dado que este regime, apesar de se fundamentar em uma teoria de maior complexidade, é o mais adequado para tratar de problemas aeroelásticos dinâmicos como o *flutter*.

### 6.1.2 Análise comparativa entre a seção típica aeroelástica e a seção aeroviscoelástica.

O Capítulo V discorreu a respeito da modelagem matemática de seções típicas. Na primeira parte, uma seção típica aeroelástica suportada por uma suspensão composta de elementos de mola puramente elásticas foi considerada. Subsequentemente, houve a inserção de um segundo dispositivo que também conferia dissipação de energia, sendo este último constituído de material viscoelástico, como ilustrado na Fig. 6.3(b). Nesse contexto, as propriedades descritas na Tab. 6.1 foram utilizadas para gerar resultados numéricos baseados na formulação matemática já detalhada.

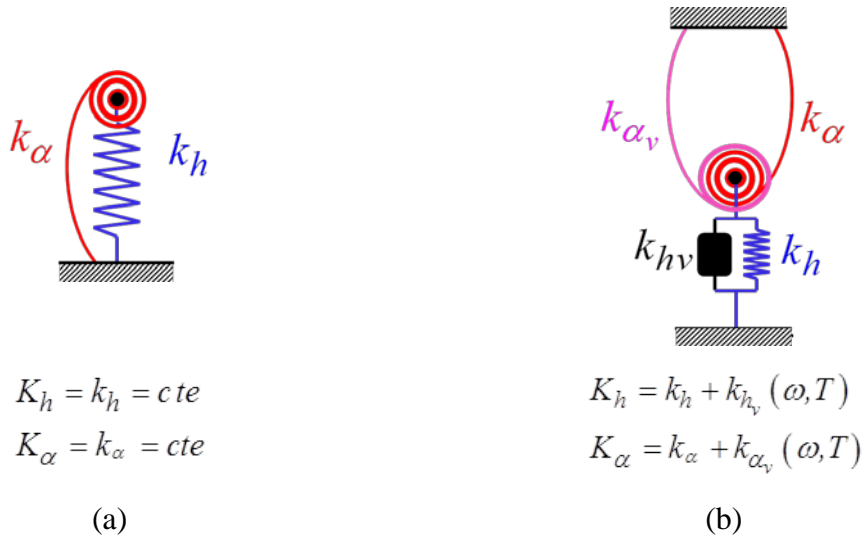


Figura 6.3 – Ilustração das suspensões utilizadas (a) suspensão da seção típica puramente elástica; (b) suspensão da seção típica aeroviscoelástica.

As equações do movimento para o sistema de dois graus de liberdade foram resolvidas numericamente utilizando o Método  $k$  para cálculo das condições críticas. Os resultados obtidos (diagramas  $V_{gf}$ ) constam na Fig. 6.4. Tais diagramas apresentam as frequências dos dois modos de vibração aeroelásticos da estrutura e o fator de amortecimento associado em função da velocidade, tanto para a seção aeroelástica quanto para a seção aeroviscoelástica.

Para esta última, foi considerada temperatura de 300K e fatores geométricos  $p_h = p_a = 1,0 \times 10^{-4}$ . O material viscoelástico utilizado é o ISD112®, para qual o módulo complexo é fornecido na Seção 4.2.1.

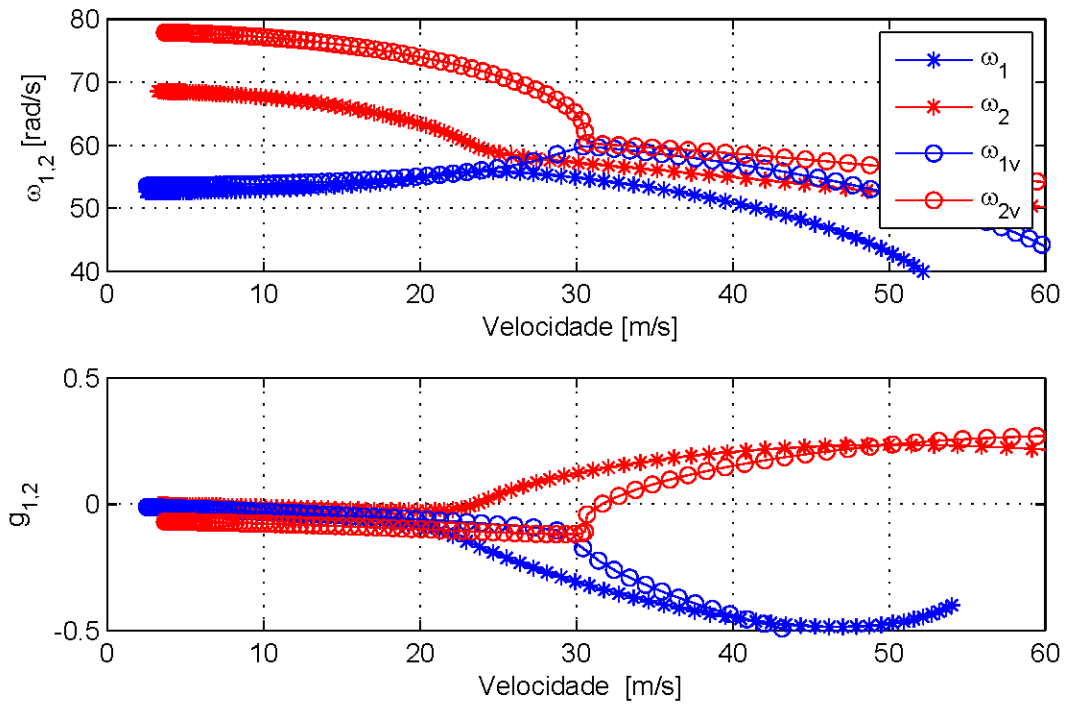


Figura 6.4 – Frequências de vibração e amortecimento dos dois modos relacionados à seção típica: comparação entre a seção típica aeroelástica e a seção típica aeroviscoelástica.

No que tange aos resultados em termos de envelope de operação, infere-se que a velocidade crítica de *flutter*, dada pela condição de nulidade do fator de amortecimento  $g$ , é de aproximadamente 23,56 m/s e é observada no segundo modo de vibração, para o caso onde foi considerada a seção típica aeroelástica. Para esse valor, a frequência equivalente é de 55,79 rad/s no primeiro modo e 59,56 rad/s no segundo modo e. Já para o caso onde as duas molas viscoelásticas foram adicionadas, a velocidade crítica passou a 31,68 m/s ainda no segundo modo de vibração e as frequências encontradas estabelecem valores equivalentes a 59,65 rad/s no primeiro modo e 60,15 rad/s no segundo.

O algoritmo apresentado na Fig. 6.5 compreende os passos seguidos para cálculo da velocidade crítica para os ambos os casos.

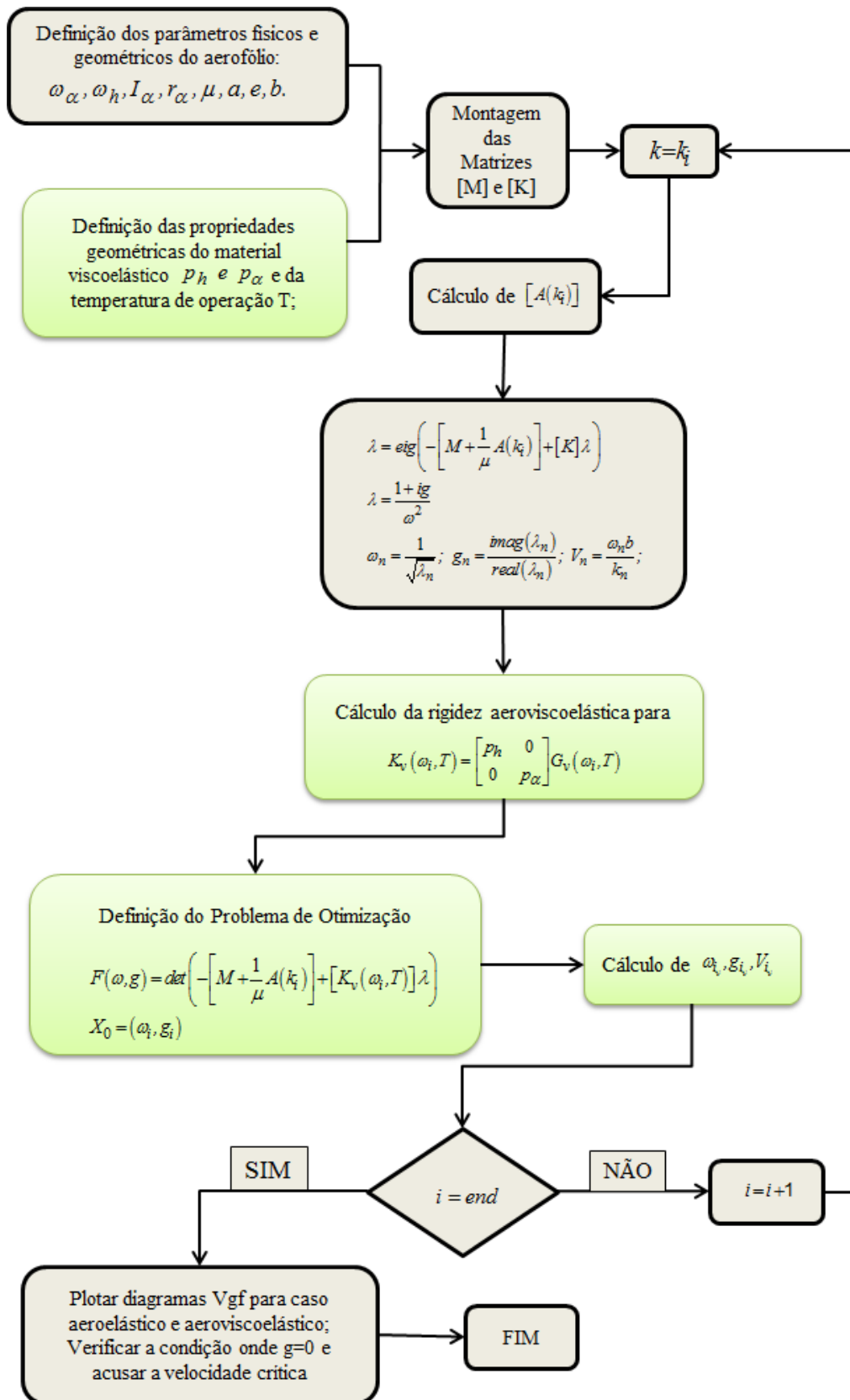


Figura 6.5 – Algoritmo representativo da rotina implementada pelo Método  $k$  para análise de estabilidade da seção típica aeroelástica e aeroviscoelástica.

Para o caso onde há presença de dispositivo viscoelástico a equação característica é resolvida por um procedimento de otimização, realizado com o auxílio da função *fsolve.m* do software comercial MATLAB®. A rotina é utilizada para resolução de sistemas de equações não lineares e o problema é resolvido pela minimização da soma dos quadrados dos resíduos do procedimento de otimização. A função objetivo, no referido caso, é definida pelo determinante da matriz dinâmica do sistema aeroviscoelástico e os pontos iniciais de busca são dados pelo autovalores do sistema aeroelástico.

Por se tratar de um procedimento de ajuste ótimo, faz-se necessário o cálculo e observação do resíduo da função objetivo. Conforme pode ser visto na Fig. 6.6, o resíduo do ajuste é da ordem de  $10^{-8}$ , ou seja, as variáveis calculadas satisfazem a condição de nulidade do determinante de *flutter*, o que comprova a validade dos valores apresentados.

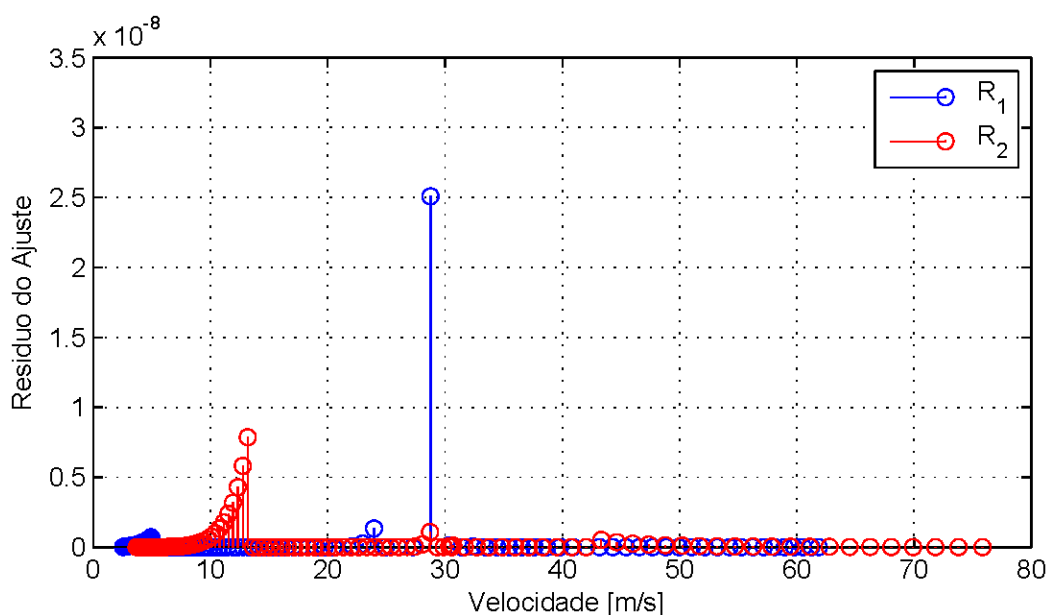


Figura 6.6 – Resíduo do ajuste da função de otimização.

### 6.1.3 Avaliação da influência do amortecimento viscoelástico

Conforme discutido anteriormente, o material viscoelástico apresenta propriedades de rigidez e de amortecimento dependentes de fatores como temperatura e frequência de operação. Assim, é pertinente questionar se a inserção desse tipo de material com a finalidade de supressão de vibração e, no caso em apreço, alteração da velocidade de *flutter*, tem sua contribuição preponderante devida à sua capacidade de amortecimento ou por sua contribuição à rigidez da suspensão. Nesse contexto, essa seção objetiva analisar a influência

mais atrativa do material viscoelástico, sua capacidade de amortecimento. Essa capacidade é dita de maior interesse, pois características exclusivas de rigidez podem ser fornecidas por meio de materiais tradicionais.

Para tal análise comparativa são simuladas três condições de suspensão do aerofólio: na primeira consideram-se as molas da suspensão com valores de rigidez determinados pela parte real do módulo complexo a frequência nula, ou seja, o módulo complexo assume um valor constante independente da frequência; na segunda condição será utilizada apenas a parte real do módulo complexo viscoelástico, que depende da frequência, ao passo que na terceira condição ambas as partes, real e imaginária, são consideradas. Simbolicamente, os casos considerados são representados da seguinte forma:

$$G_1 = G'(\omega = 0) \quad (6.1)$$

$$G_2 = G'(\omega) \quad (6.2)$$

$$G_3 = G'(\omega)(1 + i\eta) \quad (6.3)$$

Na definição destes cenários, considera-se que a parte imaginária do módulo complexo, associada ao fator de perda, quantifica a influência do amortecimento de modo que, quando apenas a parte real é considerada, tal influência é desconsiderada.

Nos dois últimos casos considerados a matriz dinâmica do sistema é dependente da frequência, caracterizando o problema de autovalor como não linear, sendo necessário utilizar um procedimento de otimização para calcular a resposta do sistema. Contudo, é necessária ainda a indicação de um ponto inicial de busca para realização da otimização. Para esta finalidade são utilizados os valores calculados para o primeiro caso, que caracteriza um problema de autovalor linear, haja vista a independência da matriz de rigidez em relação à frequência. Para o material viscoelástico ISD112<sup>®</sup>, o módulo complexo assume o valor de 0,4307 MPa na condição onde a frequência do sistema tende a zero. Esse valor é obtido tomando-se o limite, com  $\omega \rightarrow 0$  na Eq. (4.12) que determina o módulo complexo do material.

Foi considerada uma temperatura de 300K e fatores geométricos  $p_h = p_\alpha = 1,0 \times 10^{-3}$ .

A Fig.6.7 mostra os resultados obtidos para os três casos supracitados, em termos de valores de frequência de vibração e fator de amortecimento. As velocidades críticas

encontradas e os parâmetros a elas associados, nas três condições de simulação, são apresentados na Tab.6.3.

Pode-se observar que para o terceiro caso, comparado com os dois primeiros, a anulação de um dos fatores de amortecimento, que configura o limite de estabilidade, ocorre para velocidades de escoamento mais altas. Este fato confirma que o aumento da velocidade crítica é proporcionado pela característica de dissipação de energia associada ao amortecimento viscoelástico.

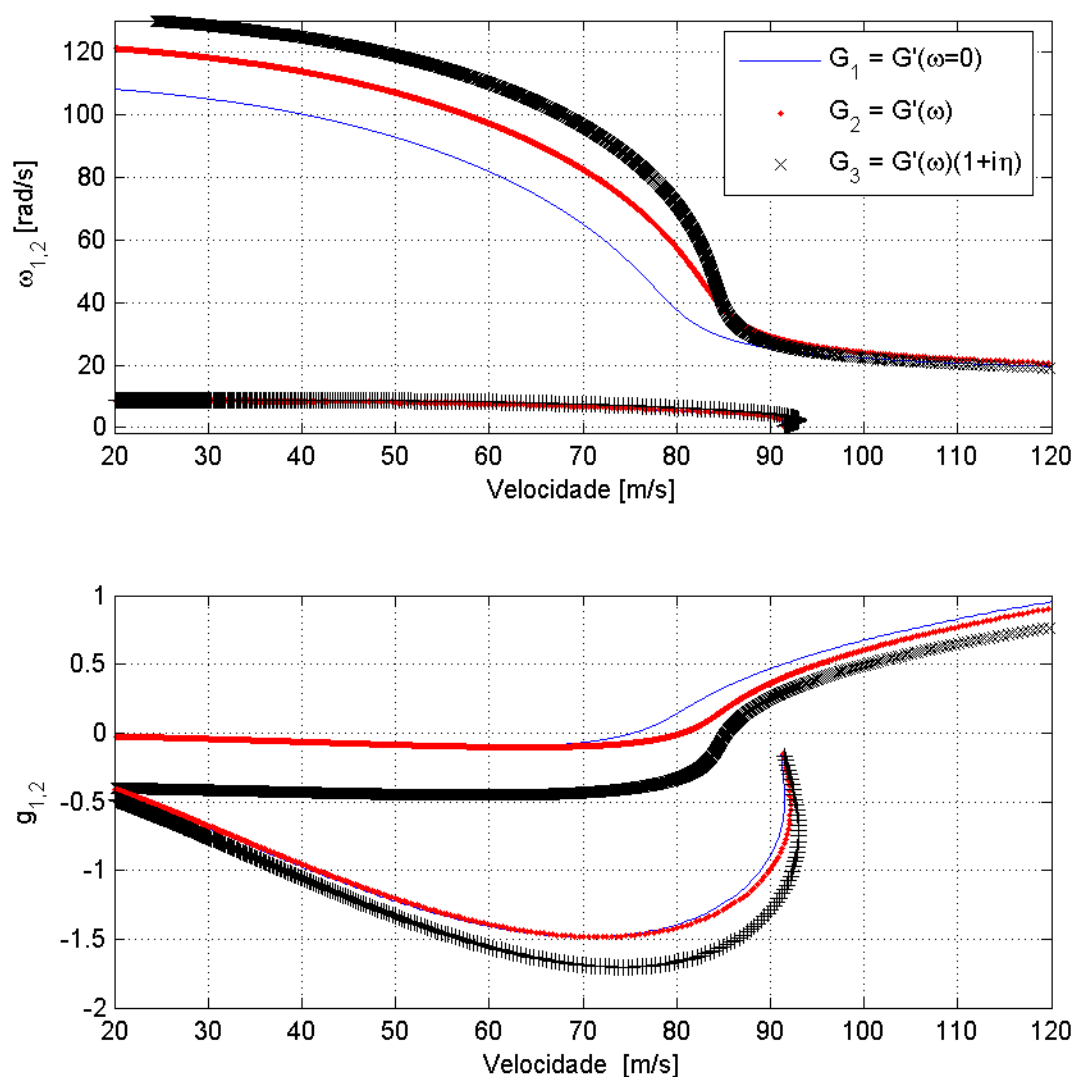
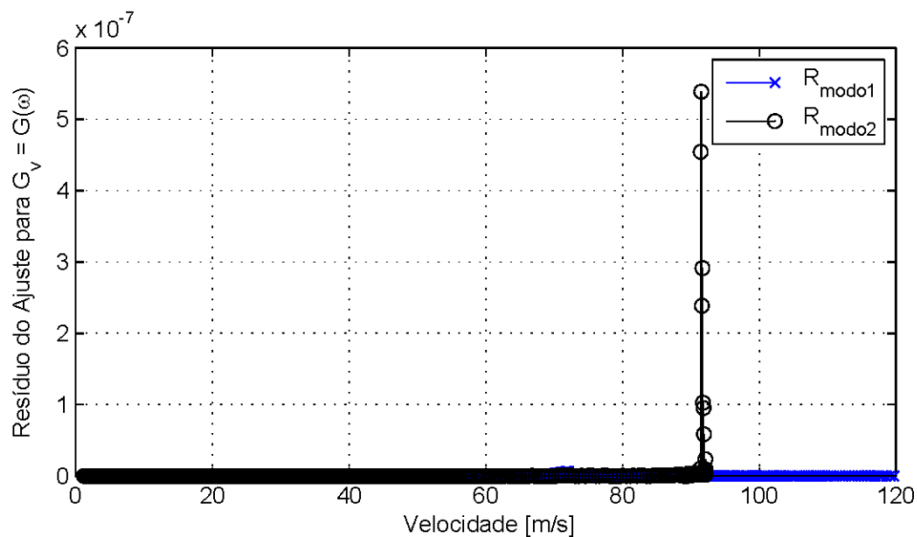
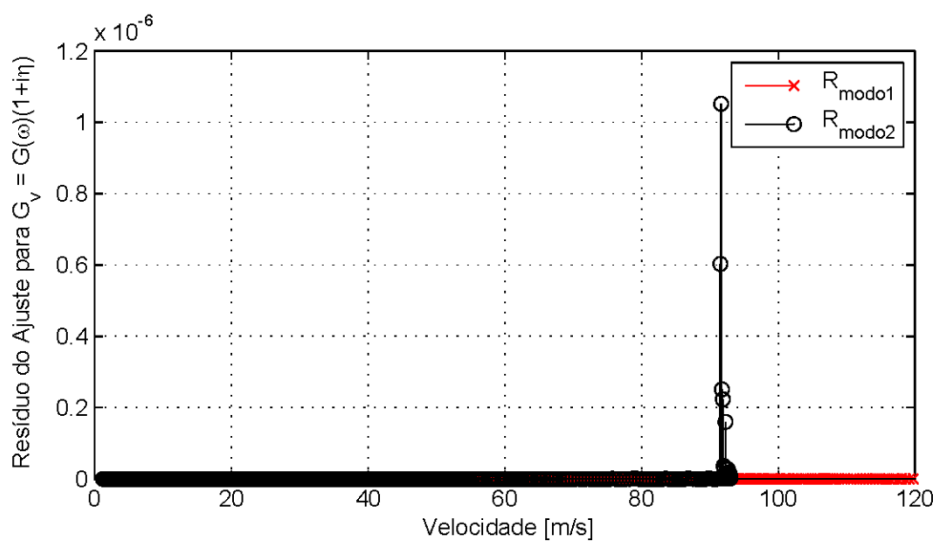


Figura 6.7 - Frequência e amortecimento: análise da influência do amortecimento associado ao material viscoelástico.

Tabela 6.3 – Valores críticos calculados para análise do amortecimento viscoelástico

Módulo Viscoelástico [Pa]	Velocidade crítica [m/s]	Frequência do primeiro modo [rad/s]	Frequência do segundo modo [rad/s]
$G_v = G'(\omega = 0)$	75,45	6,0280	51,6708
$G_v = G'(\omega)$	80,61	5,656	55,3160
$G_v = G'(\omega)(1+i\eta)$	85,32	5,574	37,0654

Figura 6.8 – Resíduo do procedimento de ajuste para o caso onde  $G_v = G'(\omega)$ .Figura 6.9 - Resíduo do procedimento de ajuste para condição onde  $G_v = G'(\omega)(1+i\eta)$ .

As Figs. 6.8 e 6.9 mostram os valores dos resíduos associados à resolução numérica do problema de autovalor, os quais são considerados satisfatoriamente baixos. Deve-se observar que como o primeiro caso constitui um problema onde o material viscoelástico apresenta módulo constante, que conduz a um problema de autovalor clássico, não se faz necessário um procedimento de otimização para cálculo da fronteira de estabilidade na referida condição.

#### 6.1.4 Influências Paramétricas no comportamento do dispositivo viscoelástico

##### 6.1.4.1 Análise da influência da variação da temperatura no modelo aeroviscoelástico.

Na presente seção, o foco do estudo é voltado para a influência da temperatura no comportamento viscoelástico e, conseqüentemente, nas condições críticas de *flutter*. Para analisar tais situações, variou-se a temperatura de operação em valores correspondentes a 265K, 273K, 290K, 300K, 315K, 330K e 350K. Tais valores compreendem a faixa de temperaturas válidas para o modelo experimental adotado para representar o módulo complexo do material ISD112®, que abrange temperaturas de 220 a 360K.

Para os valores de temperatura testados, foram traçados os gráficos das frequências e os fatores de amortecimento dos dois modos de vibração associados ao sistema em estudo. Da análise da Fig. 6.10 e da Tab. 6.4 verifica-se primeiramente que a temperatura exerce influência significativa no comportamento aeroelástico; na faixa de temperatura analisada, o decréscimo de temperatura amplia o domínio de estabilidade, ou seja, aumenta a velocidade de *flutter*. Observa-se também que, para temperaturas superiores a 300K as condições críticas não sofrem mudança significativa.

Tabela 6.4 – Valores velocidade e indicações do modo crítico para diferentes temperaturas.

Temperatura [K]	Velocidade de <i>flutter</i> [m/s]	Modo Crítico de <i>Flutter</i>
<b>265</b>	75,33	2
<b>273</b>	48,01	2
<b>290</b>	32,53	2
<b>300</b>	31,68	1
<b>315</b>	31,02	1
<b>330</b>	30,73	1
<b>350</b>	30,51	1

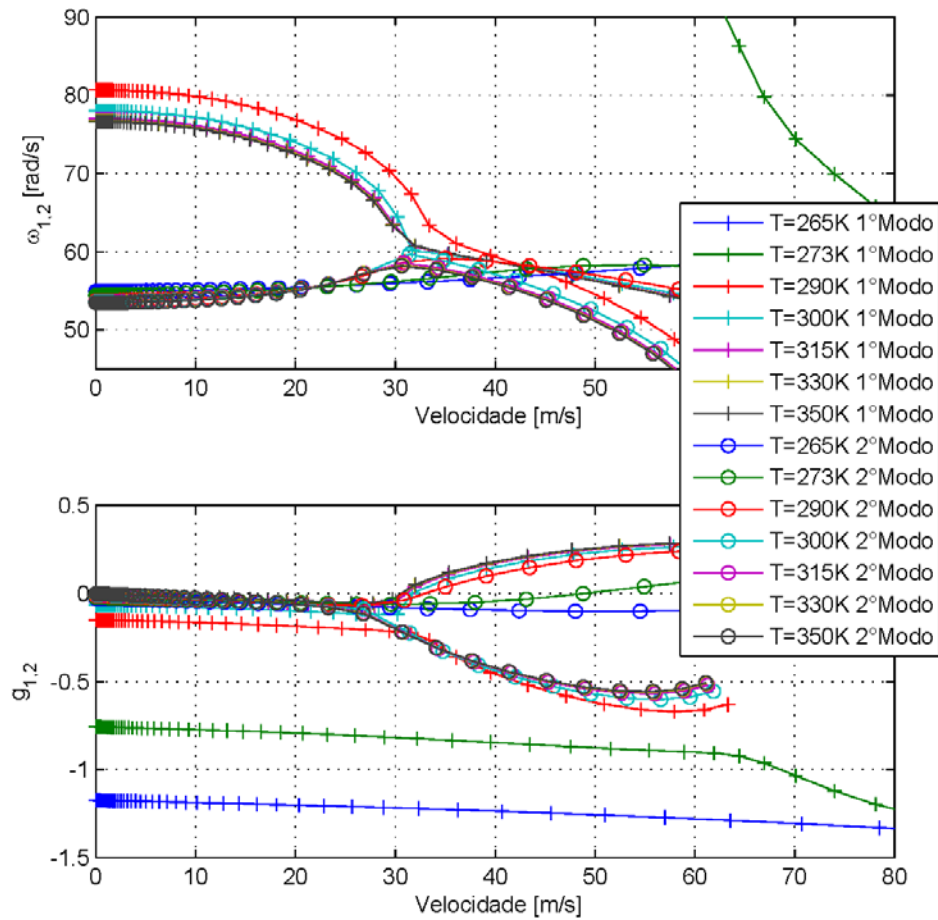


Figura 6.10 – Frequências e amortecimento do sistema aeroviscoelástico para diferentes valores de temperatura.

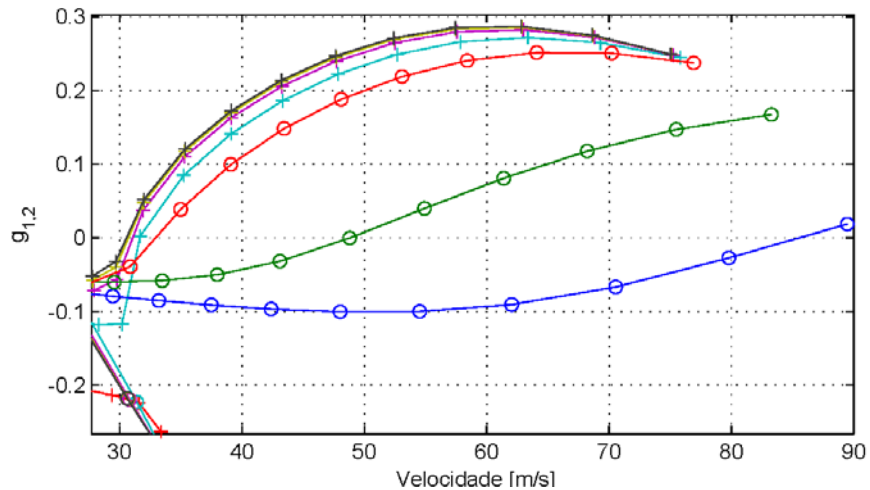


Figura 6.11 – Visão ampliada das curvas do fator de amortecimento na região de identificação da velocidade crítica.

Na Fig. 6.11 são exibidas ampliações das curvas mostradas na Fig.6.10. Nota-se que o modo de vibração crítico é modificado com o decaimento da temperatura. Para os dois

menores valores de temperaturas testados (265K e 273K), verifica-se a criticidade ocorrendo no segundo modo de vibração. Para valores de temperatura superiores àqueles, o modo crítico passa a ser o primeiro.

Para completa análise da influência da temperatura na resposta do sistema aeroviscoelástico, o algoritmo de cálculo foi executado para com valores de temperatura igualmente espaçados, compreendidos entre 265K e 350K. Foi então obtida uma visualização tridimensional do comportamento em frequência (Figs 6.12 e 6.14) e amortecimento (Figs 6.13 e 6.15) para os dois modos de vibração do sistema. É possível confirmar a grande influência da temperatura na determinação das condições críticas aeroviscoelásticas. Pode-se também notar que as maiores diferenças apresentadas nas figuras mencionadas são dadas para valores de temperatura menores, reforçando a ideia de que para valores acima de 300K o sistema sobre pequenas modificações. Os valores da velocidade de *flutter*, para cada temperatura, são mostrados graficamente na Fig. 6.16.

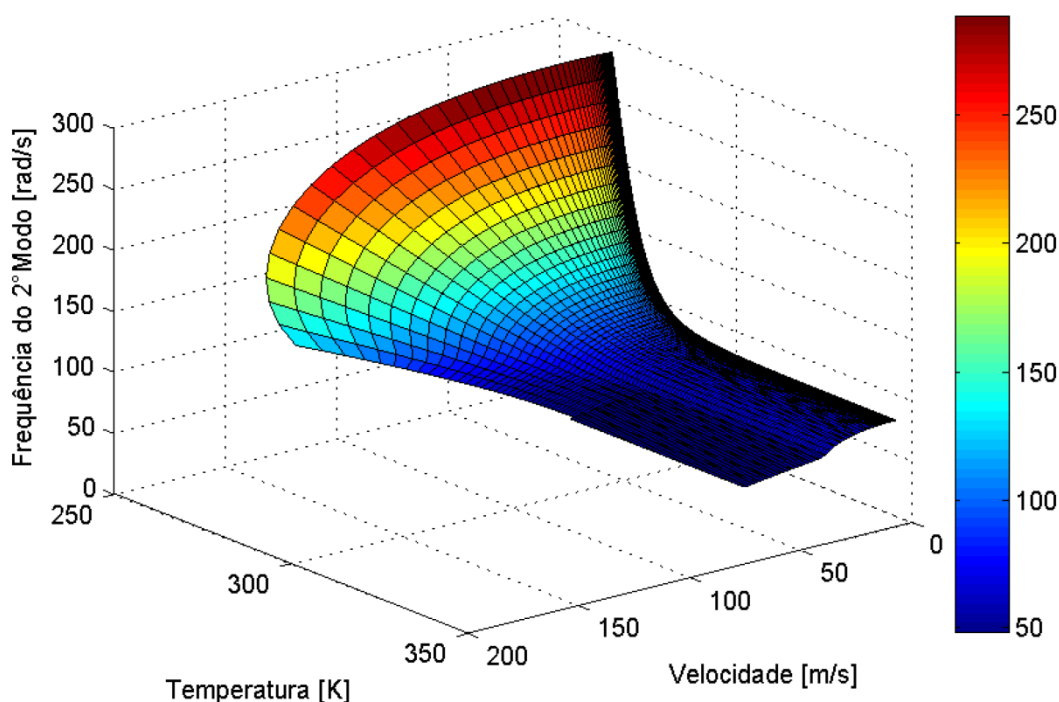


Figura 6.12 – Variação da frequência do primeiro modo de vibração com a velocidade e com a temperatura de operação.

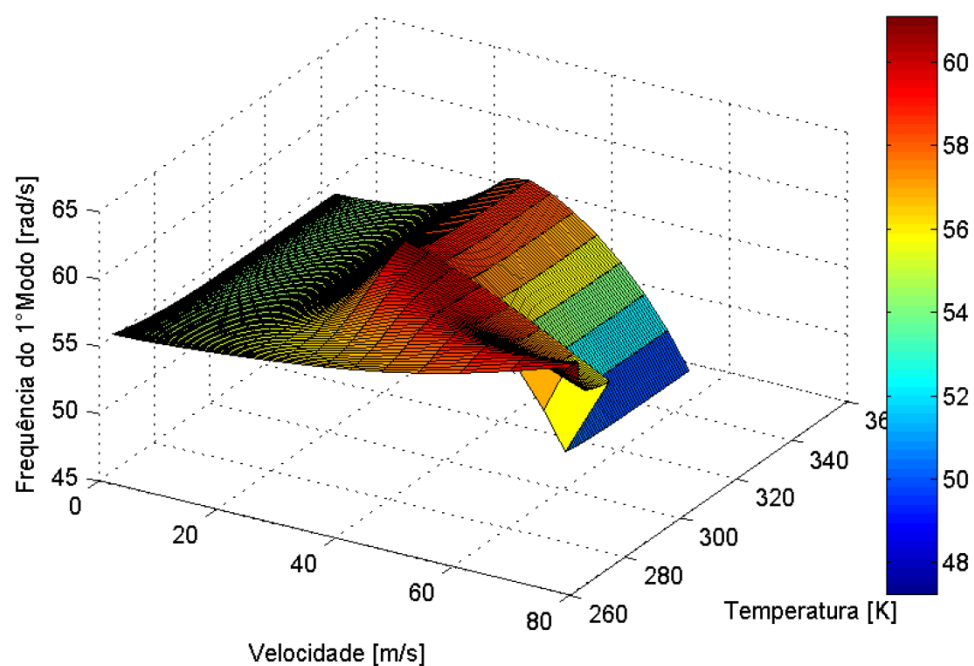


Figura 6.13 – Variação da frequência do segundo modo de vibração com a velocidade e com a temperatura de operação.

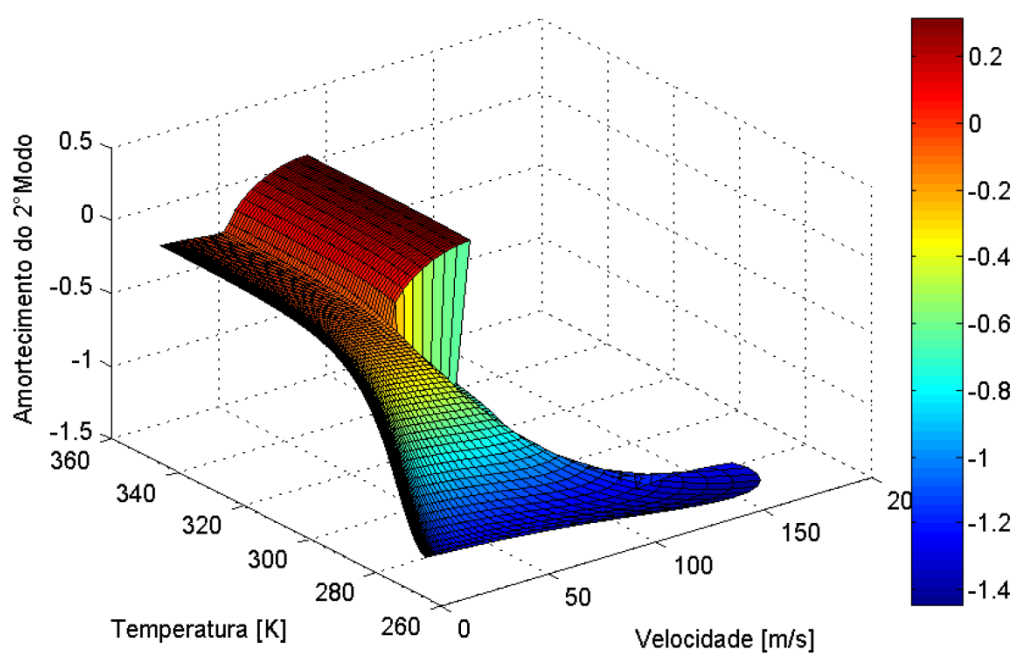


Figura 6.14 - Variação do amortecimento do primeiro modo de vibração com a velocidade e com a temperatura de operação.

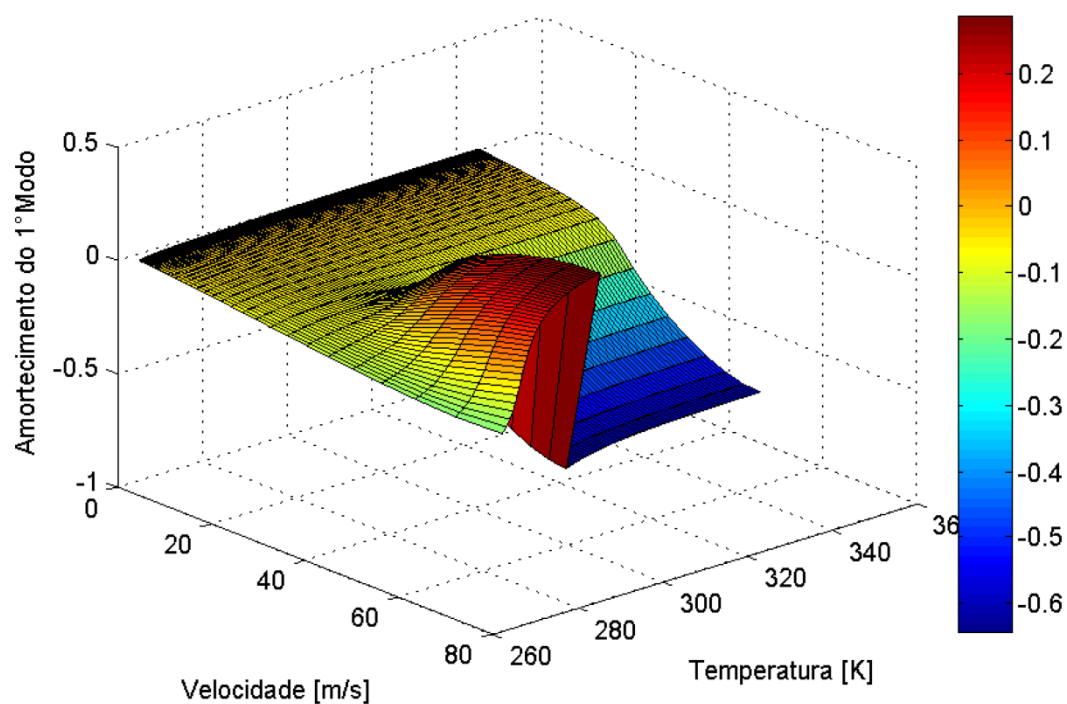


Figura 6.15 – Variação do amortecimento do segundo modo de vibração com a velocidade e com a temperatura de operação.

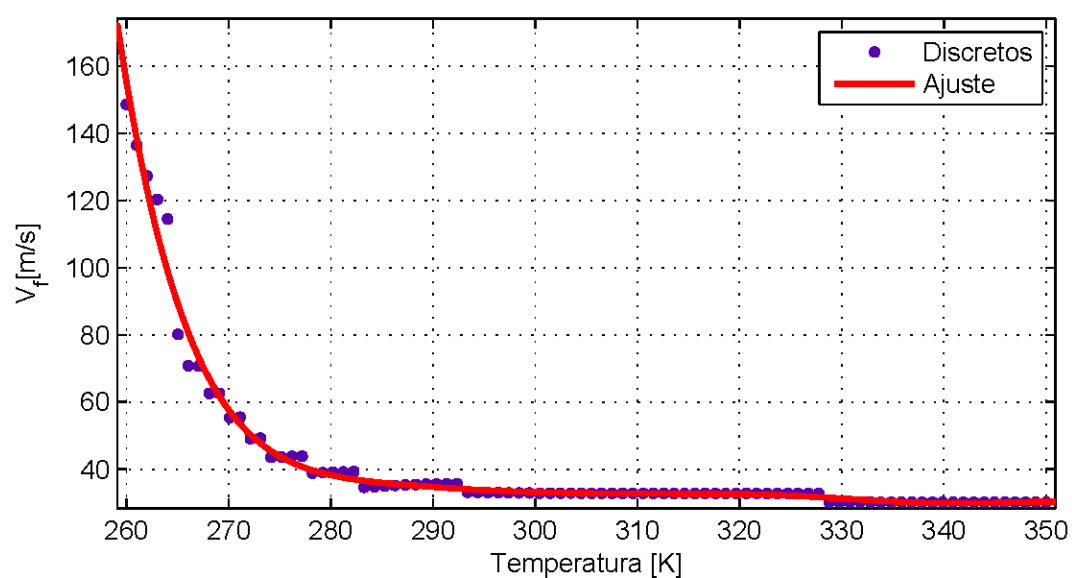


Figura 6.16 - Evolução da velocidade crítica de *flutter* em função da temperatura.

De forma geral, pode-se dizer que, na faixa de temperatura examinada, para o material viscoelástico considerado, a velocidade crítica de *flutter* é inversamente proporcional à

temperatura, ou seja, quanto menor a temperatura maior é a faixa de velocidades de operação estável do sistema aeroviscoelástico.

#### 6.1.4.2 Influência das características geométricas dos dispositivos viscoelásticos

Outra abordagem de interesse é a investigação da influência das características geométricas dos dispositivos viscoelásticos (determinada pelos fatores geométricos  $p_h$  e  $p_\alpha$ ) sobre as condições de estabilidade aeroelástica.

O sistema aeroviscoelástico foi submetido a um conjunto de valores de fatores geométricos, conforme descritos na Tab. 6.5, que se aplicam a ambas as molas (translação e rotação). Os valores de velocidade crítica de *flutter* calculados para cada um dos casos são apresentados na mesma tabela.

Na Fig. 6.17 é ilustrado o diagrama *Vgf* para os vários valores de fatores geométricos. Observa-se que a geometria influencia, de fato, a velocidade crítica de *flutter*, para uma mesma temperatura de operação, equivalente a 300K, tornando o envelope de estabilidade mais amplo com o aumento dos valores dos fatores geométricos.

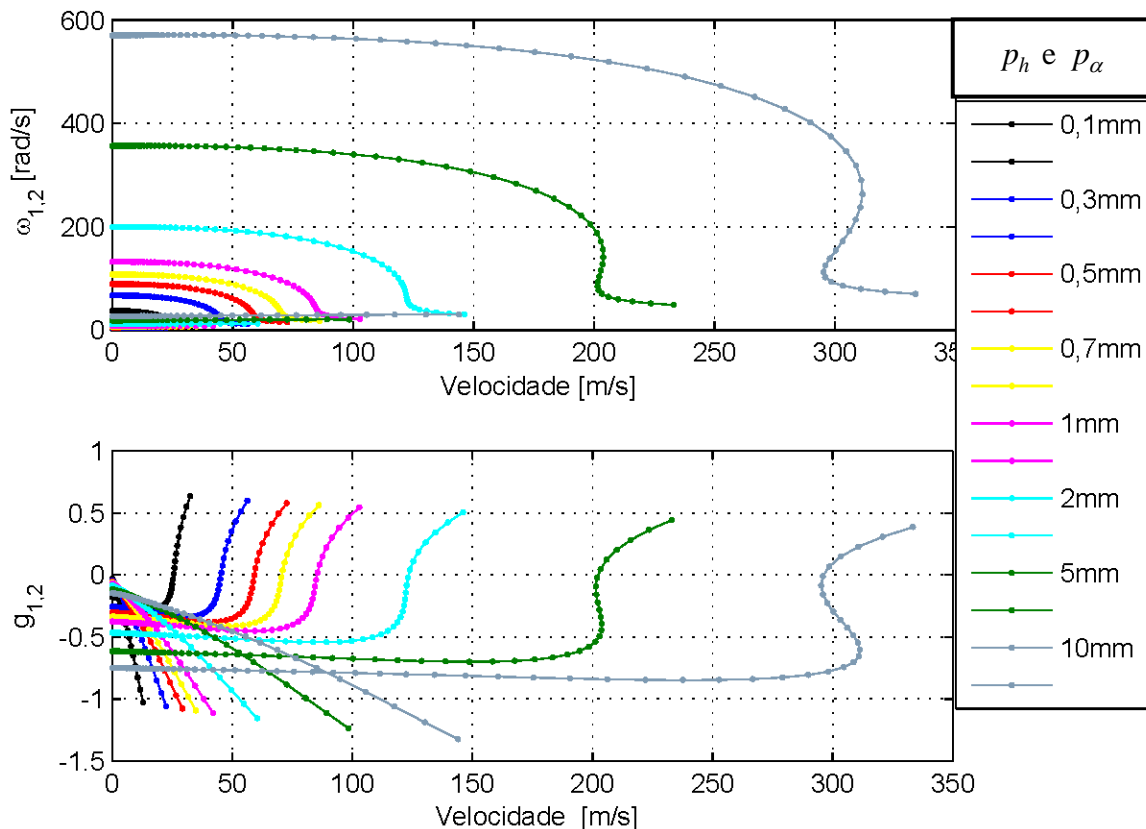


Figura 6.17 – Variações dos valores de frequência de vibração e fatores de amortecimento em função dos valores dos fatores geométricos.

Tabela 6.5 – Valores dos fatores geométricos e velocidade críticas associadas.

Fator geométrico ( $p_h=p_a$ )	Velocidade de <i>flutter</i>
[mm]	[m/s]
0,1	25,64
0,3	45,46
0,5	59,70
0,7	71,74
1,0	85,54
2,0	123,54
5,0	203,32
10,0	298,55

#### 6.1.5 Análise de estabilidade no domínio do tempo.

Após análise no domínio dos autovalores, objetiva-se explorar resultados de *flutter* no domínio temporal, nas mesmas condições outrora utilizadas para análise na frequência. A primeira dificuldade encontrada diz respeito ao modelo para escoamento não estacionário, que é apresentado no domínio dos números complexos, além de apresentar dependência do parâmetro  $k$  que é, por definição, associado à frequência de excitação. Para contornar esse problema, uma aproximação por funções racionais, equivalente ao método de Roger é implementada, conforme premissas e aspectos teóricos apresentados no Capítulo III. Quatro termos de atraso foram introduzidos no ajuste da aproximação da matriz aerodinâmica.

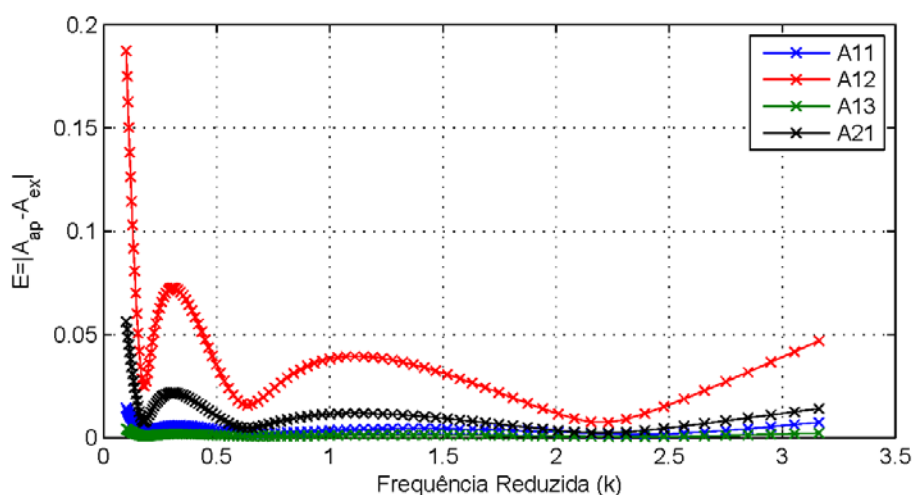


Figura 6.18 - Erros absolutos da aproximação por funções racionais em função da frequência reduzida.

O erro absoluto calculado na aproximação é ilustrado na Fig. 6.18 para cada elemento da matriz aerodinâmica, em função da frequência reduzida. Observa-se que os maiores erros foram encontrados para o elemento  $A_{12}$ , que relaciona o modo de torção do aerofólio com o de translação do mesmo. Observa-se mesma característica no elemento  $A_{21}$ . Deve-se notar também que os valores de erro mais altos são encontrados para frequências reduzidas baixas que indicam, conseqüentemente, altas velocidades. Os elementos  $A_{11}$  e  $A_{22}$  têm erros muito mais baixos.

Na Fig. 6.19 é possível visualizar os coeficientes aerodinâmicos exatos com aqueles aproximados por funções racionais, para cada valor de frequência reduzida considerada.

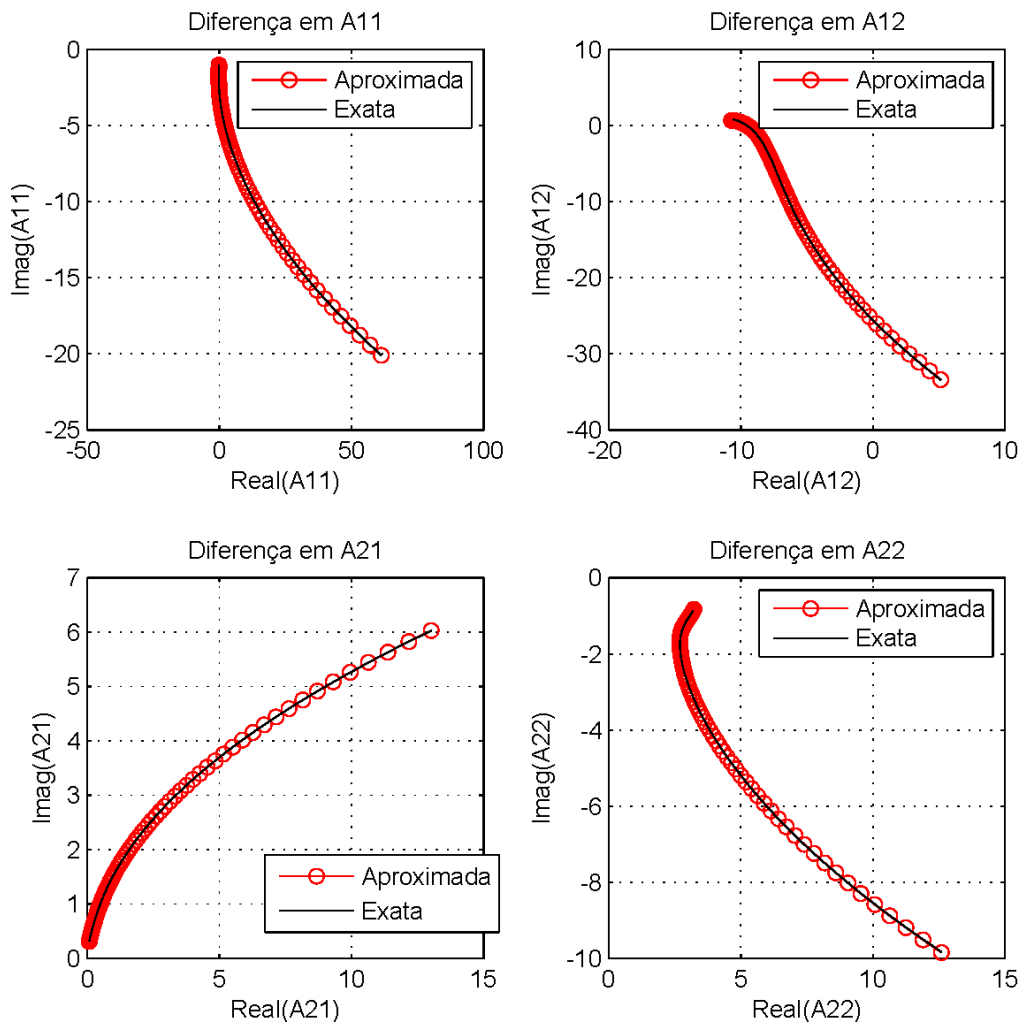


Figura 6.19 – Termos exatos da matriz aerodinâmica, confrontados com os termos aproximados por funções racionais.

#### 6.1.5.1 Análise do sistema aeroelástico no espaço de estados.

Como o sistema foi colocado na forma de espaços de estados, avaliou-se a estabilidade da matriz dinâmica, por meio de análise de autovalores. Dessa forma foi possível calcular a fronteira de estabilidade, dada por uma velocidade de *flutter* equivalente a 24,32m/s, obtida pela observação da condição de amortecimento nulo, semelhante ao método *k*. Tais condições podem ser visualizadas na Fig. 6.20.

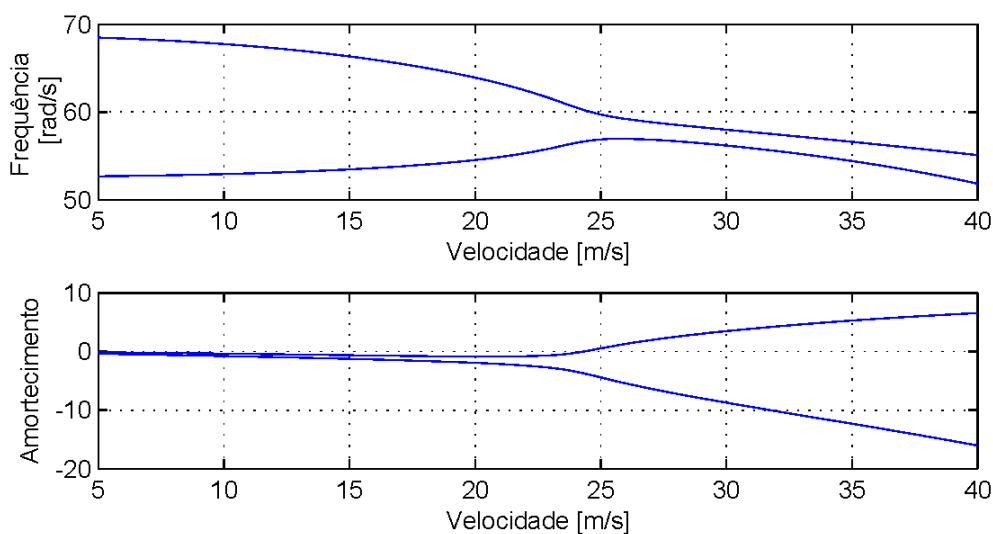


Figura 6.20 – Análise de autovalores em espaço de estados: Diagrama *Vgf*.

No que se diz respeito à integração das equações no movimento na forma expandida em espaço de estados, a metodologia de Runge-Kutta de 4ª ordem associada a uma condição inicial de deslocamento vertical de 1mm foi utilizada.

Para o sistema aeroelástico sem amortecimento viscoelástico, o modelo no domínio da frequência apresentou velocidade crítica equivalente a 23,56 m/s. No domínio do tempo, para a velocidade de 24,32m/s são observadas amplitudes constantes com o tempo, o que caracteriza um comportamento típico de iminência de *flutter*. Os termos de atraso (Fig. 6.22) também se apresentam na forma de oscilações do tipo harmônicas de amplitude constante na condição crítica. O primeiro termo de atraso é aquele que apresenta as maiores amplitudes seguido pelo segundo termo. Já os dois últimos termos apresentaram contribuições praticamente equivalentes.

O sistema aeroelástico também foi sujeito a uma velocidade de escoamento inferior à velocidade crítica para visualização da resposta no tempo. Na velocidade de 20m/s pode-se observar a resposta tipicamente amortecida nas Figs. 6.23 e 6.24.

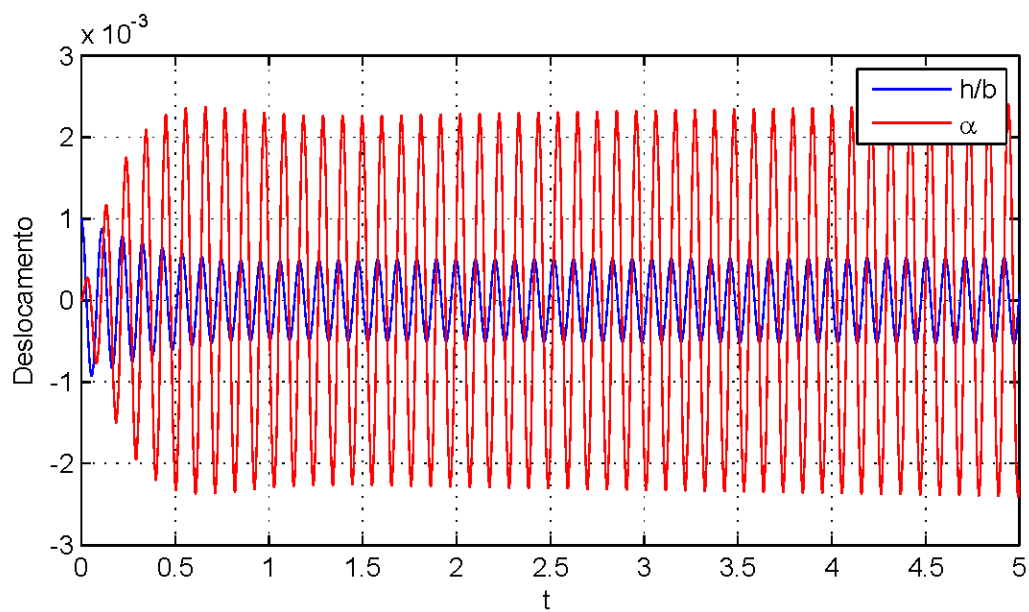


Figura 6.21 – Respostas temporais para velocidade de escoamento crítica.

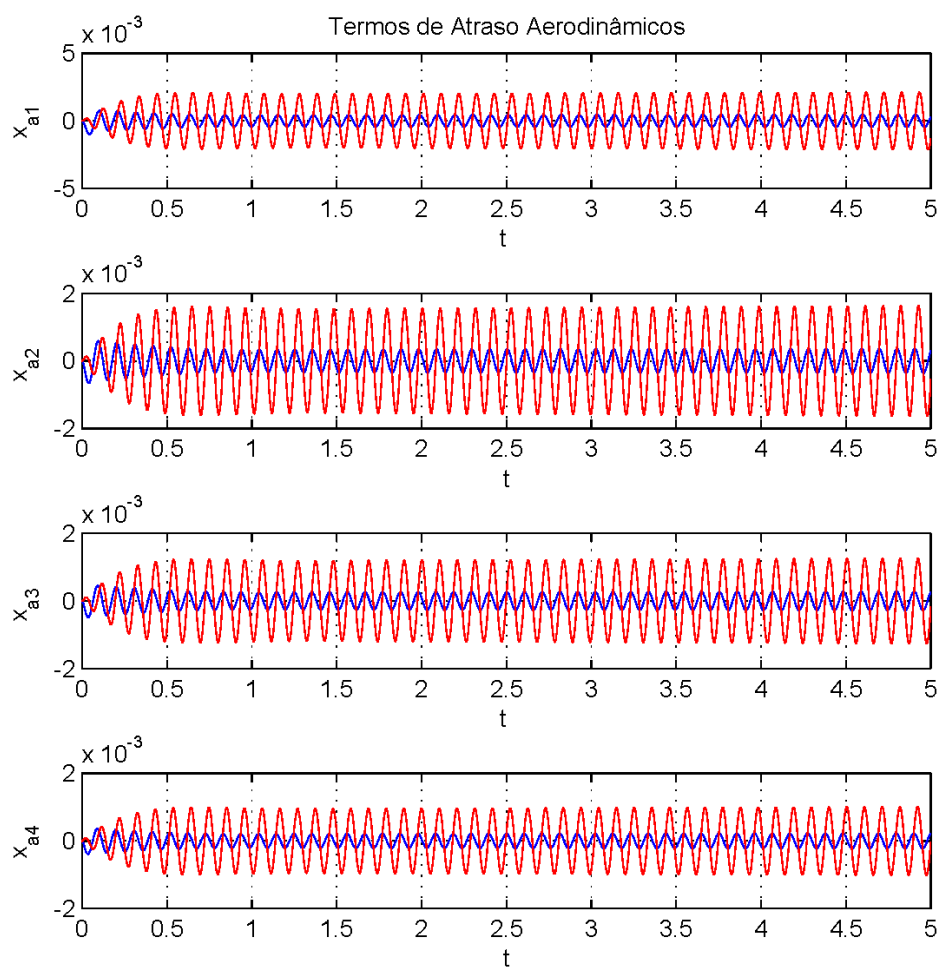


Figura 6.22 – Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição crítica.

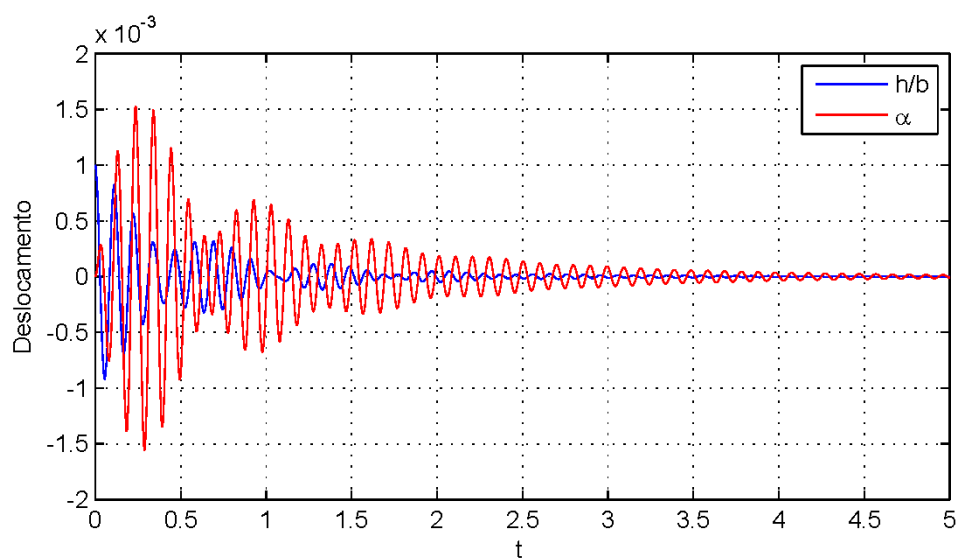


Figura 6.23 - Respostas temporais para velocidade de escoamento inferior à velocidade crítica.

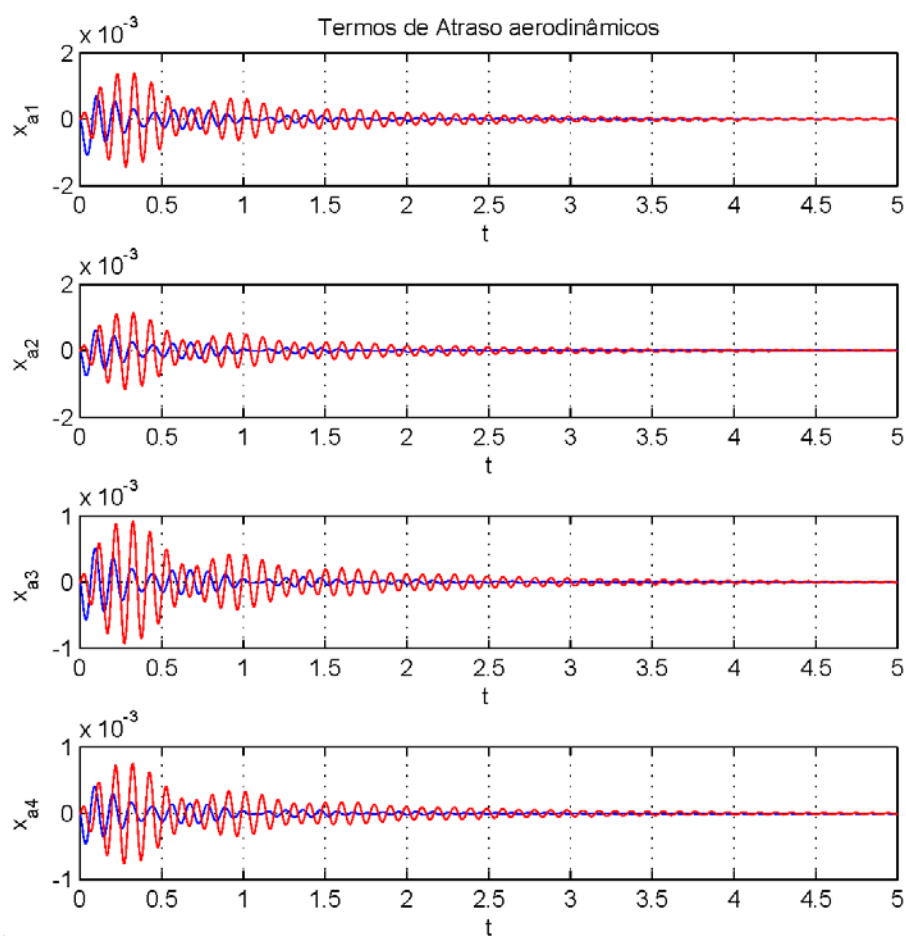


Figura 6.24 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos para velocidade de escoamento inferior à velocidade crítica.

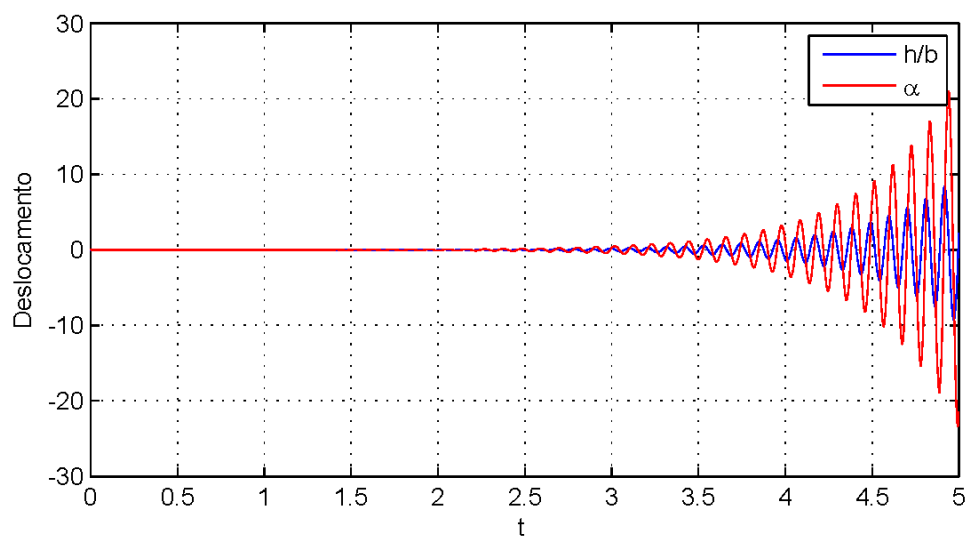


Figura 6.25 – Respostas temporais para velocidade de escoamento superior à velocidade crítica.

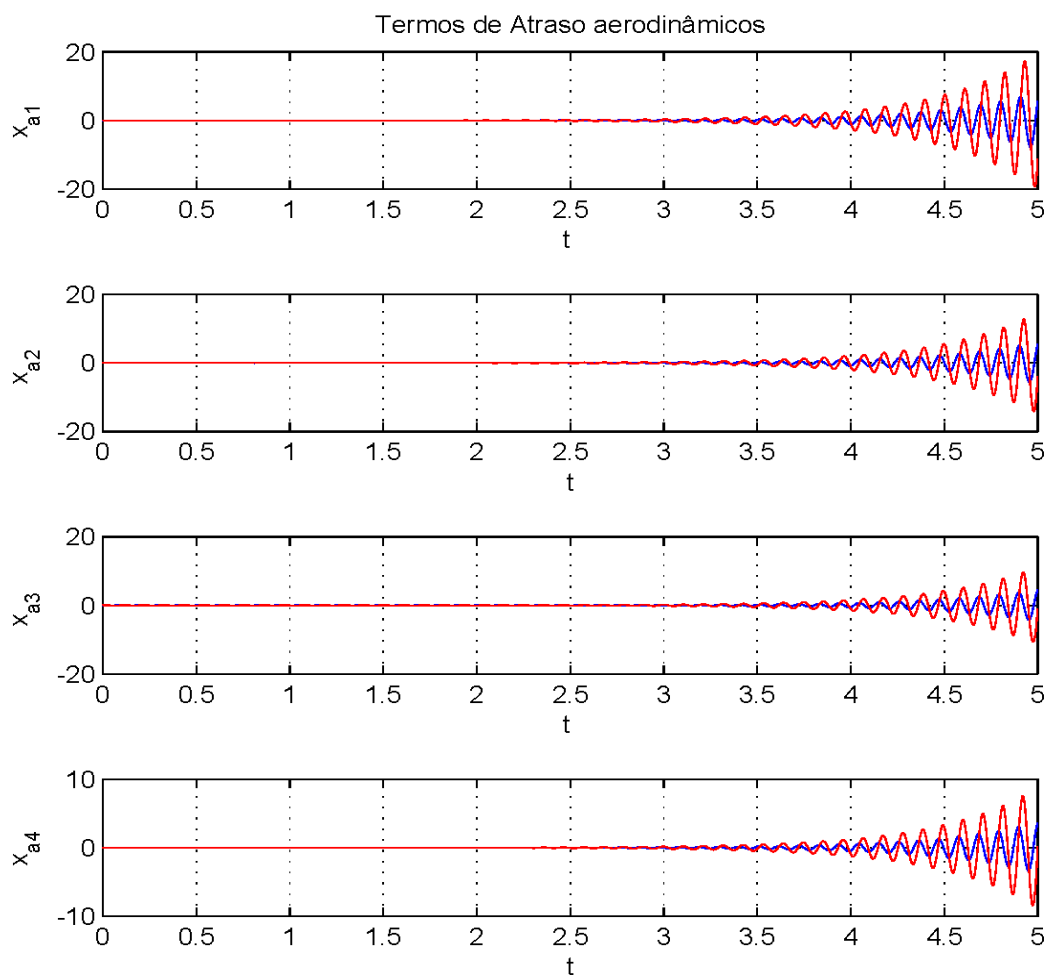


Figura 6.26 – Evolução dos termos de atraso aerodinâmicos na condição supercrítica.

Foi também verificada a condição pós-*flutter* do sistema, submetendo-o a uma velocidade de 27m/s, superior à velocidade crítica. Conforme se observa na Fig.6.25 , fica claramente caracterizada a situação de instabilidade, com amplitudes crescentes exponencialmente com o tempo. Comportamento similar é observado para os dos termos de atraso, ilustrados na Fig.6.26

#### 6.1.5.2 Análise do sistema aeroviscoelástico

Utilizou-se o modelo baseado em derivadas fracionárias, descrito no Capítulo IV, para viabilizar o procedimento de integração da equações do movimento do sistema aeroviscoelástico.

A seção típica aeroviscoelástica também foi submetida às mesmas condições anteriormente descritas para obtenção da resposta no tempo para a seção típica aeroelástica. Na Fig 6.27 é ilustrado um fluxograma que auxilia no entendimento do processo implementado para obtenção das respostas no tempo.

Na integração das equações do movimento, observou-se uma velocidade de estabilização das amplitudes de oscilação equivalente a 32,30 m/s, estabilizada após um período transiente de 0,75s, conforme mostrado na Fig.6.28. Foi também observado o comportamento dos termos de atraso aerodinâmicos, apresentado na Fig. 6.30

Em condição abaixo da velocidade crítica, com velocidade de escoamento de 27 m/s, observa-se estabilização completa das respostas em aproximadamente 2,5s, conforme ilustrado nas Figs. 6.30 e 6.31.

Para velocidade acima da velocidade crítica, com valor de 37m/s, observam-se as respostas mostradas na Fig.6.32 e os termos de atraso ilustrados na Fig. 6.33.

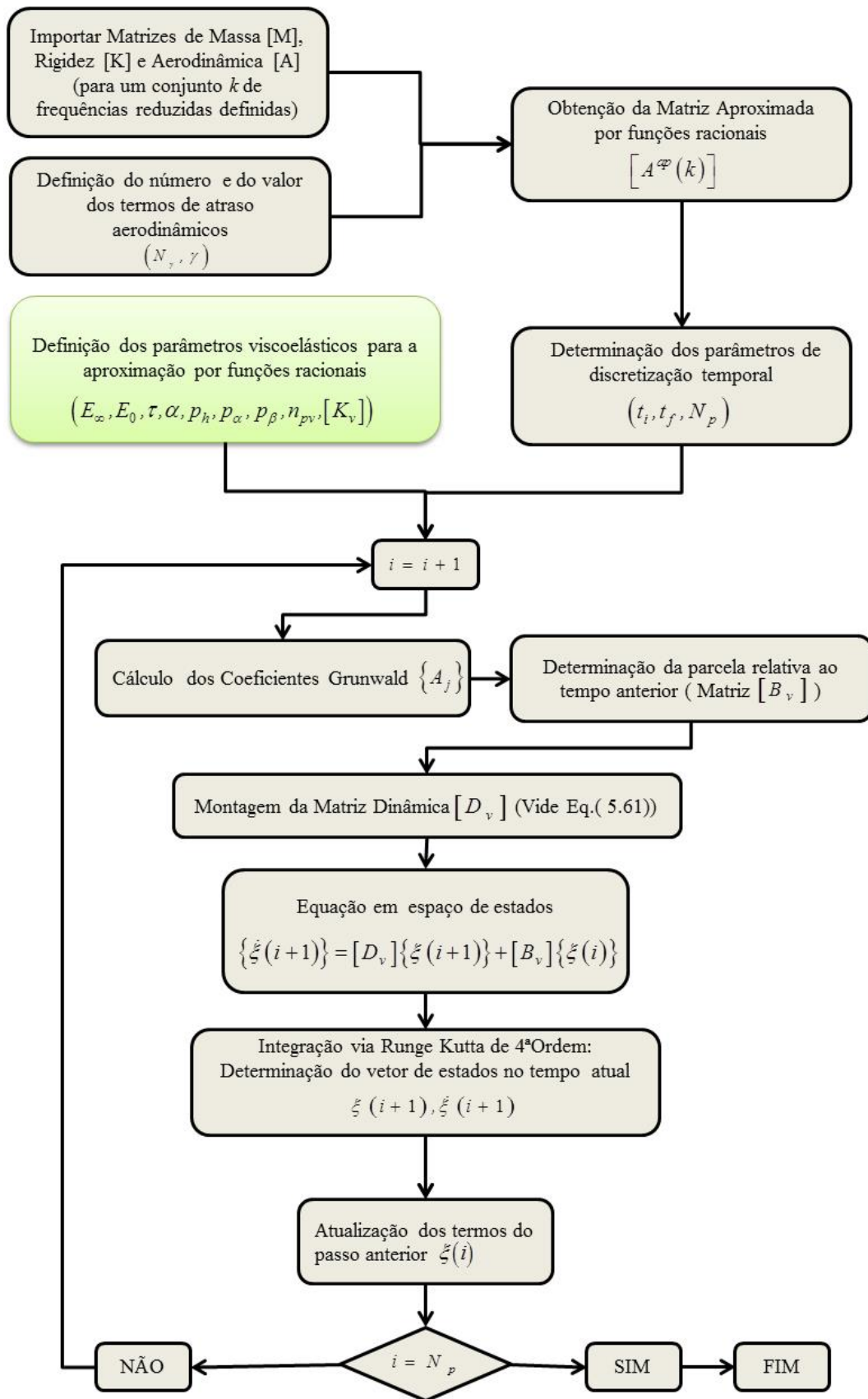


Figura 6.27 – Fluxograma ilustrativo da rotina implementada para análise aeroviscoelástica no domínio do tempo.

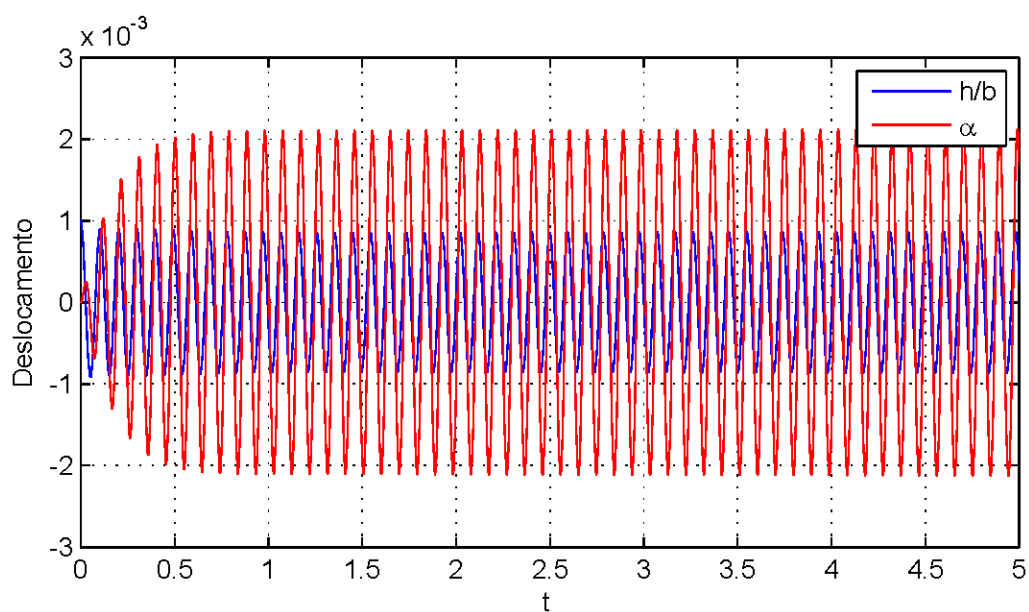


Figura 6.28 – Respostas temporais para velocidade de escoamento crítica.

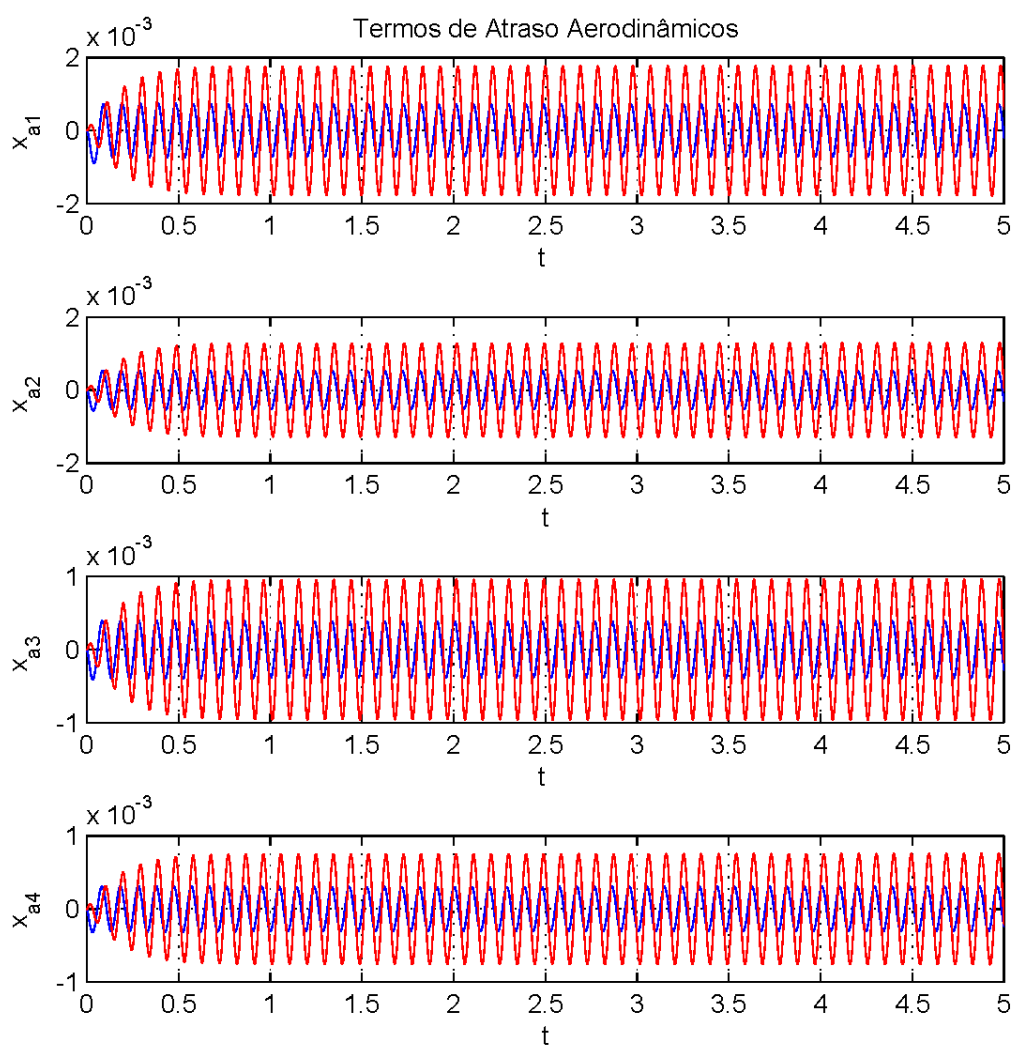


Figura 6.29 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição crítica.

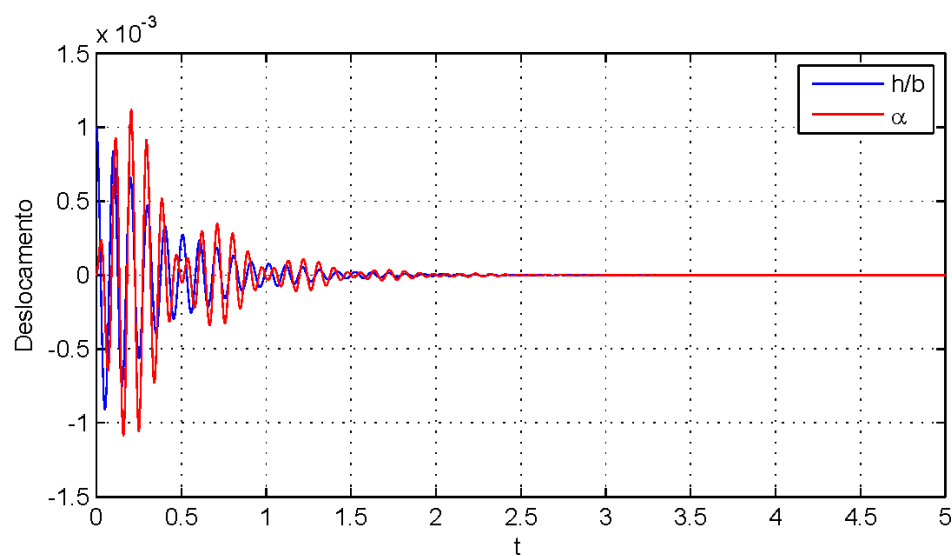


Figura 6.30 - Respostas temporais para velocidade de escoamento inferior à velocidade crítica.

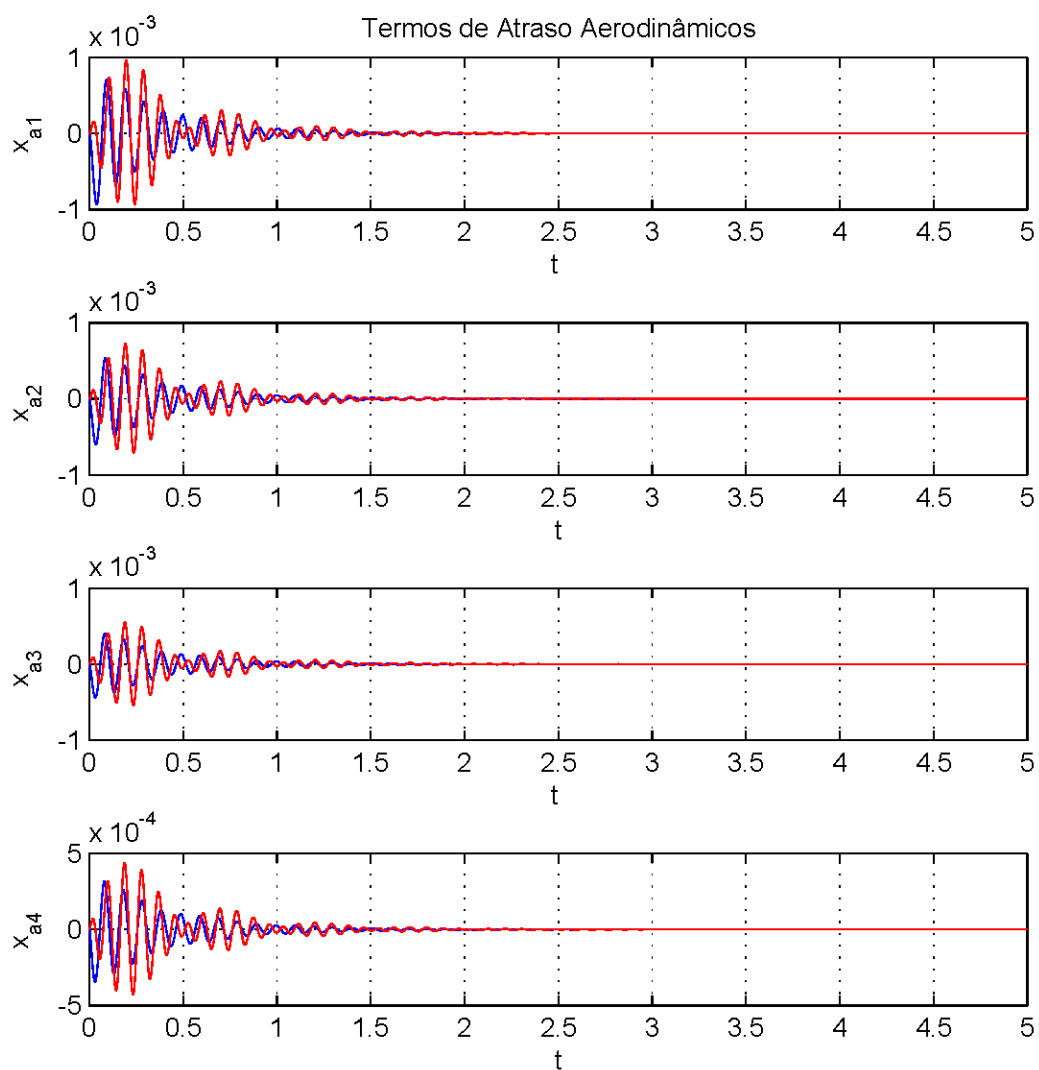


Figura 6.31 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição subcrítica

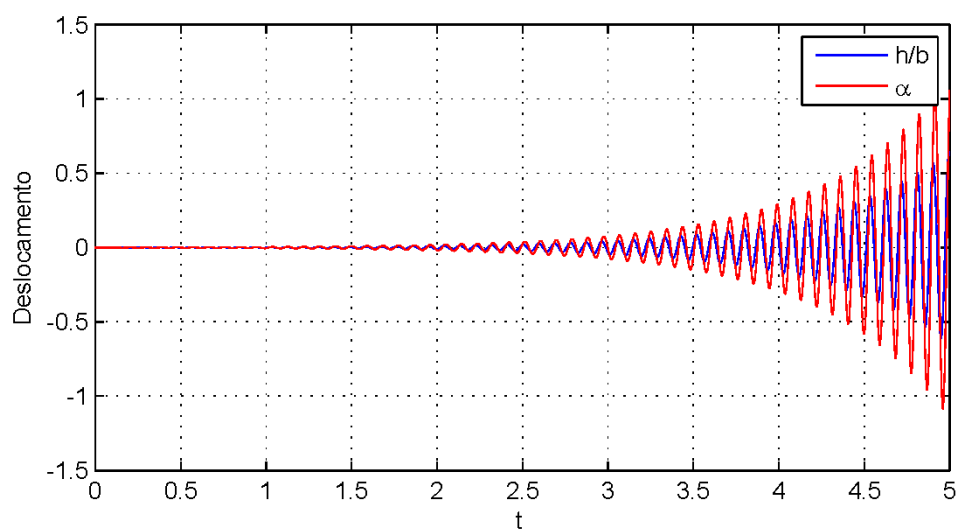


Figura 6.32 - Respostas temporais para velocidade de escoamento superior à velocidade crítica.

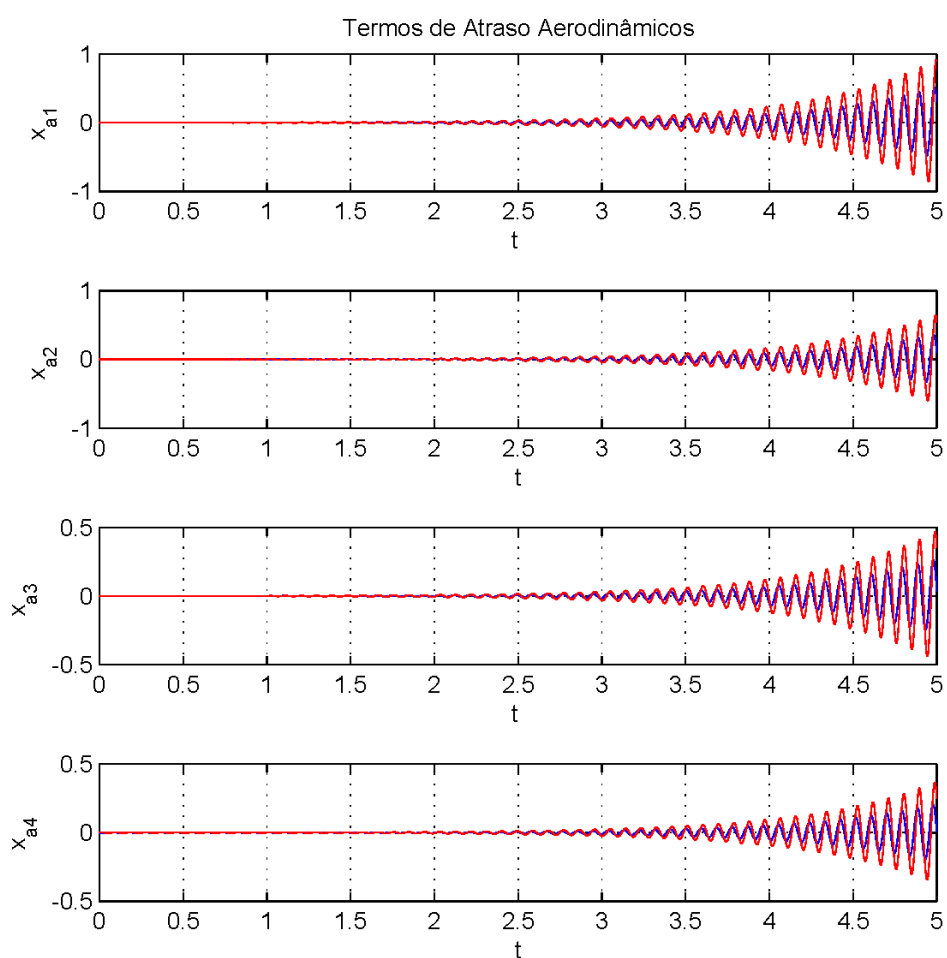


Figura 6.33 - Evolução dos termos de atraso aerodinâmicos na condição supercrítica .



Tabela 6.6 - Parâmetros físicos e geométricos da seção típica de três graus de liberdade.

Parâmetro	Valor
Razão de massa ( $\mu$ )	75
Semicorda ( $b$ )	0,2 m
Frequência natural de translação do aerofólio ( $\omega_h$ )	55 rad/s
Frequência natural de rotação do aerofólio ( $\omega_\alpha$ )	80 rad/s
Frequência natural de rotação da superfície de controle ( $\omega_\beta$ )	150 rad/s
Raio de giração do aerofólio ( $r_\alpha$ )	$\sqrt{0,25}$
Raio de giração da superfície de controle ( $r_\beta$ )	$\sqrt{0,065}$
Massa específica do ar ( $\rho_\infty$ )	1,225 kg/m <sup>3</sup>
Fator de posicionamento do centro de massa do aerofólio ( $a$ )	0,1
Fator de posicionamento do centro de massa da superfície de controle ( $c$ )	0,8
Fator de posicionamento do centro elástico do aerofólio ( $a$ )	0,2

### 6.2.1 Análise comparativa entre sistema aeroelástico e sistema aeroviscoelástico.

Mais uma vez, serão analisadas as condições de estabilidade aerodinâmica para seções típicas aeroelásticas em comparação com seções típicas associadas a molas viscoelásticas.

Semelhantemente ao apresentado para a seção de dois graus de liberdade, foi considerada uma temperatura de 300K e o material viscoelástico que compõe as molas da suspensão é o ISD112<sup>®</sup>. Os fatores de forma utilizados têm os valores  $p_h = 1,0 \times 10^{-4}$ ,  $p_\alpha = 1,0 \times 10^{-3}$  e  $p_\beta = 1,0 \times 10^{-4}$ .

Também pelo método  $k$ , foram obtidas as condições críticas de velocidade para ambos os sistemas considerados. Os valores críticos das velocidades e das frequências de vibração associadas a cada modo são apresentados na Tab.6.7.

Observa-se, pela Fig. 6.35 que a velocidade crítica para o caso aeroviscoelástico é bem superior ao valor correspondente calculado para a seção com suspensão puramente elástica. O acoplamento observado é do tipo flexo-torção, visto que as frequências dos respectivos modos são aquelas que apresentam o coalescimento característico da instabilidade aeroelástica.

Tabela 6.7 – Valores de velocidade de *flutter* para os modelos de seção típica propostos.

	V <sub>cr</sub> [m/s]	$\omega_1$ [rad/s]	$\omega_2$ [rad/s]	$\omega_3$ [rad/s]
<b>Sist. aeroelástico</b>	45,18	59,04	62,92	194,06
<b>Sist. aeroviscoelástico</b>	71,75	62,58	65,14	205,03

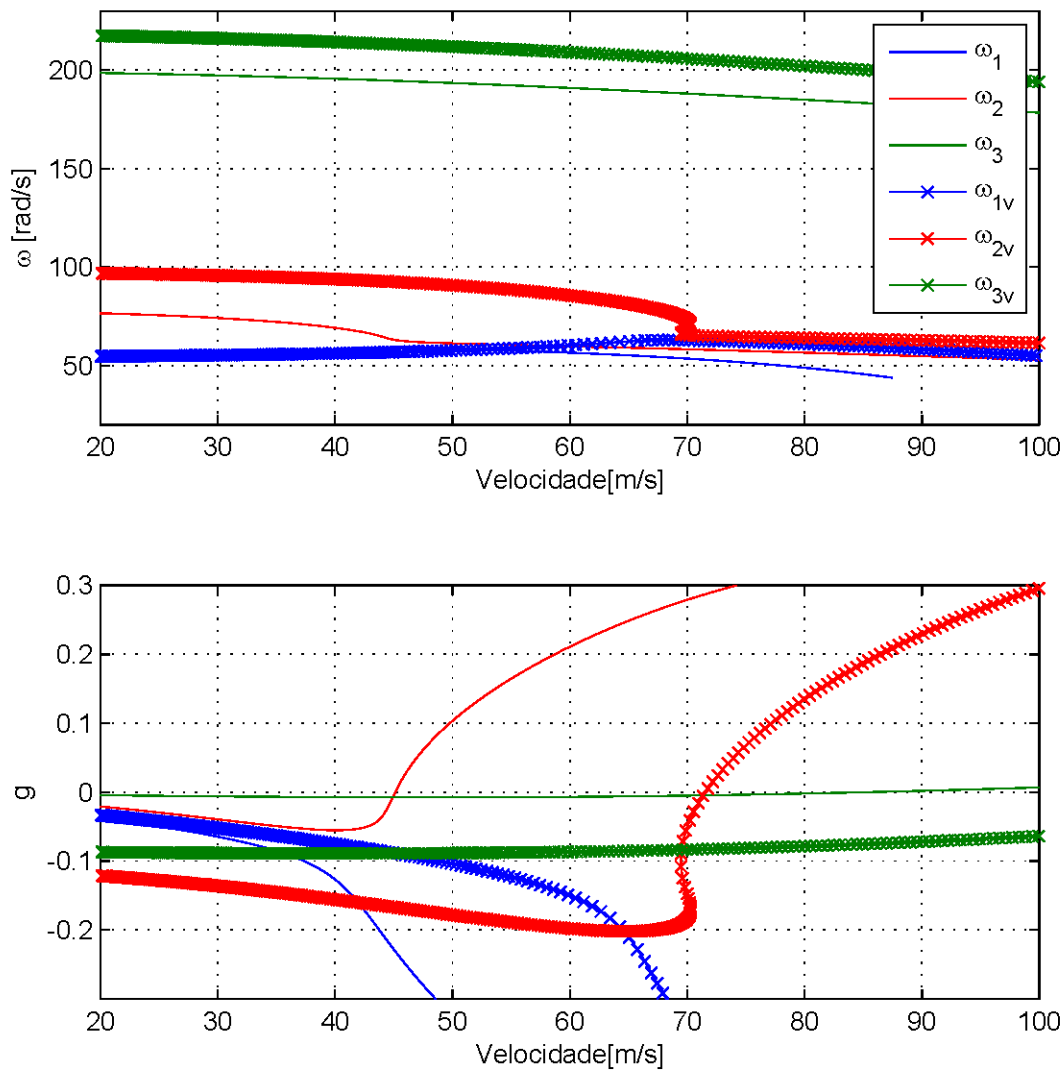


Figura 6.35 –Frequência e amortecimento em função da velocidade de escoamento: comparação de resultados obtidos para os modelos aeroelástico e aeroviscoelástico.

Ressalta-se que, para simular as condições de *flutter* de seções com superfície de comando, a frequência natural correspondente a este grau de liberdade deve ser relativamente maior que as demais, devido à facilidade de acoplamento desse modo em relação aos demais, podendo-se gerar assim o *flutter* de superfície de controle, para velocidades relativamente baixas.

Como já foi explicado na seção anterior, para o caso que inclui amortecimento viscoelástico, um procedimento de otimização foi utilizado para determinação das raízes da equação característica, adotando-se como ponto de partida de busca do mínimo os valores calculados para o sistema sem adição de material viscoelástico. Como se trata de um procedimento de ajuste, foram então plotados os resíduos de cada modo para cada valor de

frequência reduzida (e, por consequência, de velocidade) na faixa de interesse. Conforme visualizado na Fig. 6.36, para todos os modos os valores dos resíduos são satisfatoriamente pequenos, alcançando no máximo a ordem de  $1.2 \times 10^{-5}$ .

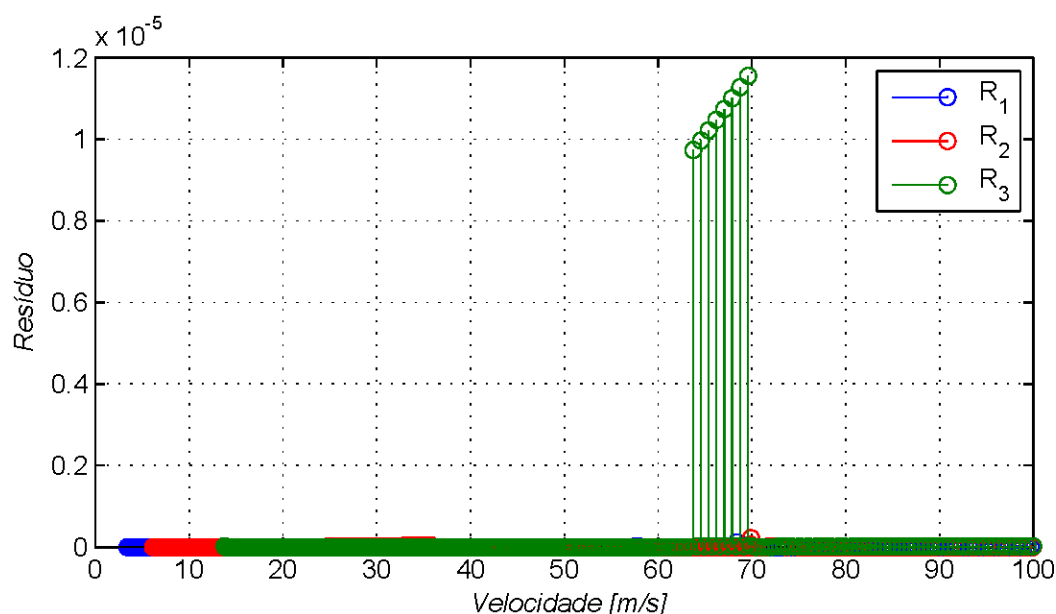


Figura 6.36 – Resíduos associados ao procedimento de otimização.

### 6.2.2 Análise da inserção de dispositivo viscoelástico na junção aerofólio-superfície de controle.

Conforme comentado anteriormente, as superfícies de controle devem possuir frequência natural bem superior àquelas que definem os movimentos da seção principal, para evitar instabilidade. Todavia, muitas vezes tais dispositivos são sujeitos a condições aerodinâmicas que causam a instabilidade pelo acoplamento de um modo de superfície de controle com outro da aeronave. Esta parte do trabalho tem como foco a análise do comportamento da seção típica com material viscoelástico aplicado somente na mola que confere rigidez associada à rotação da superfície de comando.

Para este efeito, considera-se a seção típica acoplada a uma superfície de controle, semelhante à estudada na seção anterior, salvo que a frequência natural de rotação da superfície de controle é menor (80 rad/s) e a frequência de rotação da superfície principal também é reduzida (30 rad/s) para evitar o acoplamento flexo-torsional. Com esses parâmetros, a instabilidade ocorre no modo de superfície de controle, conforme mostra a Fig. 6.37.

Inserindo dispositivo viscoelástico apenas no acoplamento da superfície de controle com a seção principal pode-se suprimir o *flutter* de superfície de controle em uma determinada faixa de velocidades. No caso apresentado, a velocidade crítica sem o dispositivo viscoelástico é de 39,09m/s e após a inserção do mesmo, não foi observada tal condição.

Estes resultados confirmam, uma vez mais, o interesse em utilizar materiais viscoelásticos para aumentar a margem de estabilidade aeroelástica.

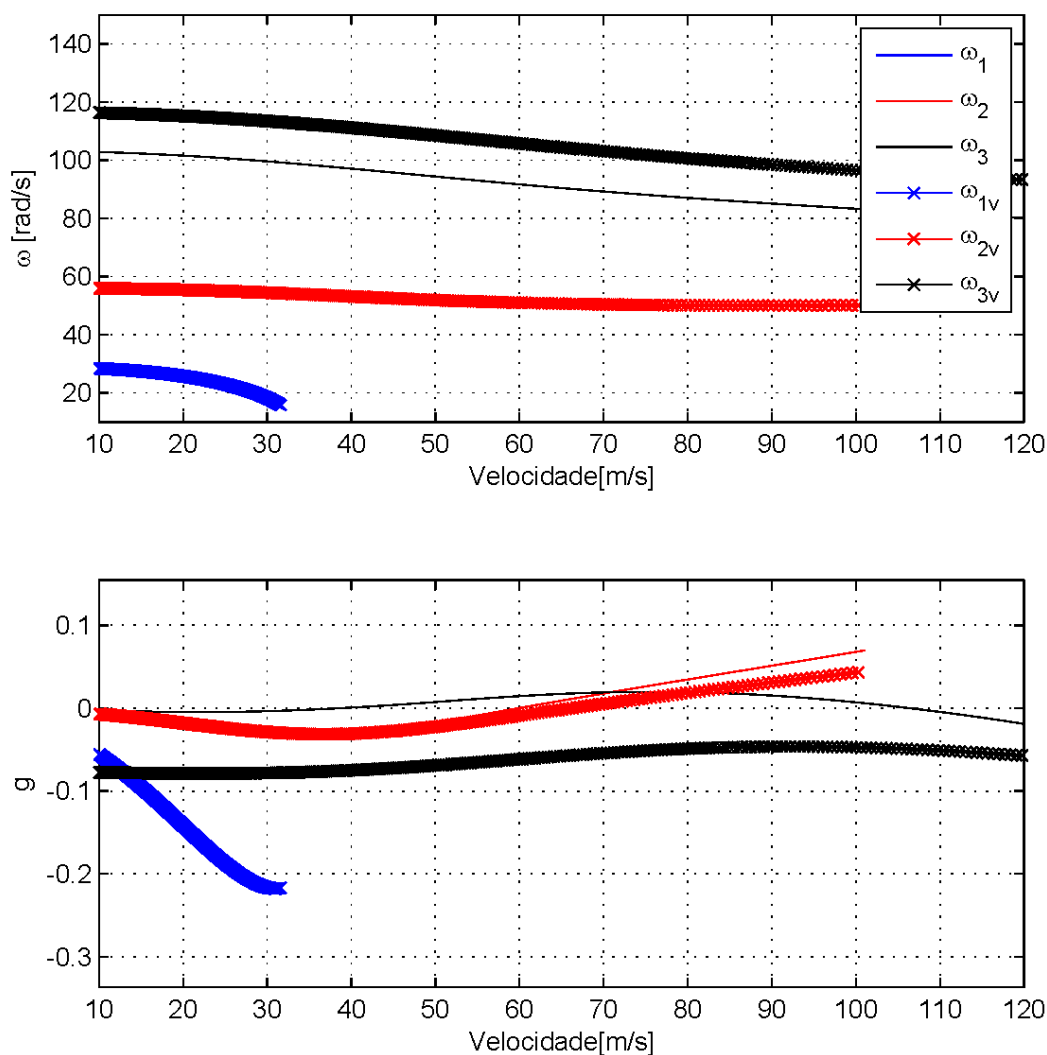


Figura 6.37 – Análise da influência da inserção de dispositivo viscoelástico para o caso de *flutter* de superfície de controle.

### 6.2.3 Análise temporal da seção típica de três graus de liberdade.

Da mesma forma feita para a seção típica com dois graus de liberdade, a matriz aerodinâmica calculada para o caso de seção típica de três graus de liberdade também é

aproximada por funções racionais a fim de possibilitar análise de estabilidade aerodinâmica no domínio do tempo. O método utilizado, baseado na aproximação por funções racionais com quatro termos de atraso, proporciona a aproximação da matriz aerodinâmica, que agora é de ordem três, contendo, portanto, nove termos. Os erros da aproximação, em função da frequência reduzida estabelecida, para cada um dos termos da matriz aerodinâmica, são ilustrados na Fig. 6.38, ao passo que na Fig.6.39 são confrontados os termos da matriz aerodinâmica exatos e os correspondentes aproximados por funções racionais.

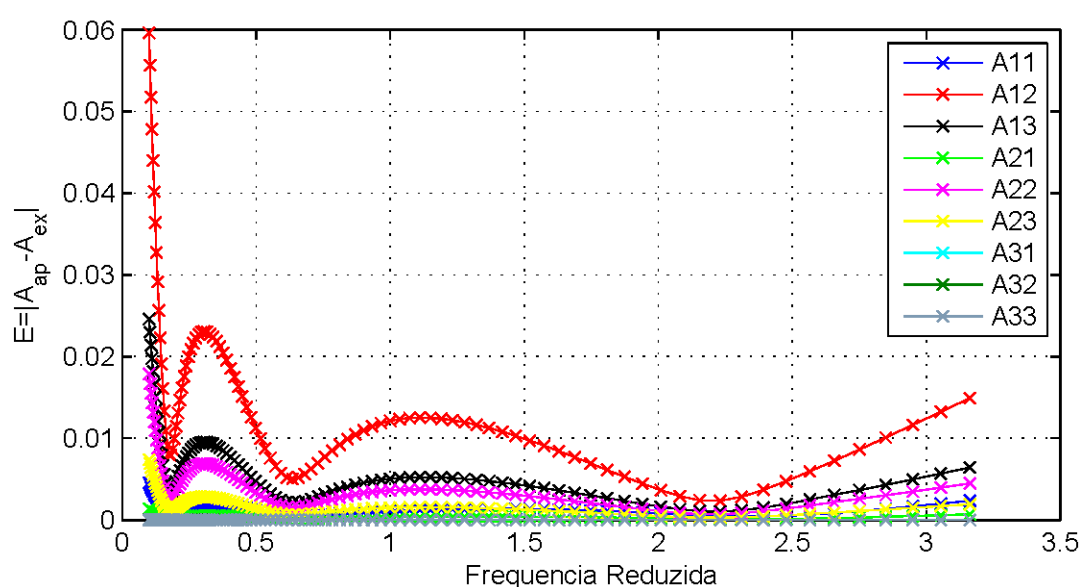


Figura 6.38– Erros absolutos associados à aproximação por funções racionais da matriz aerodinâmica.

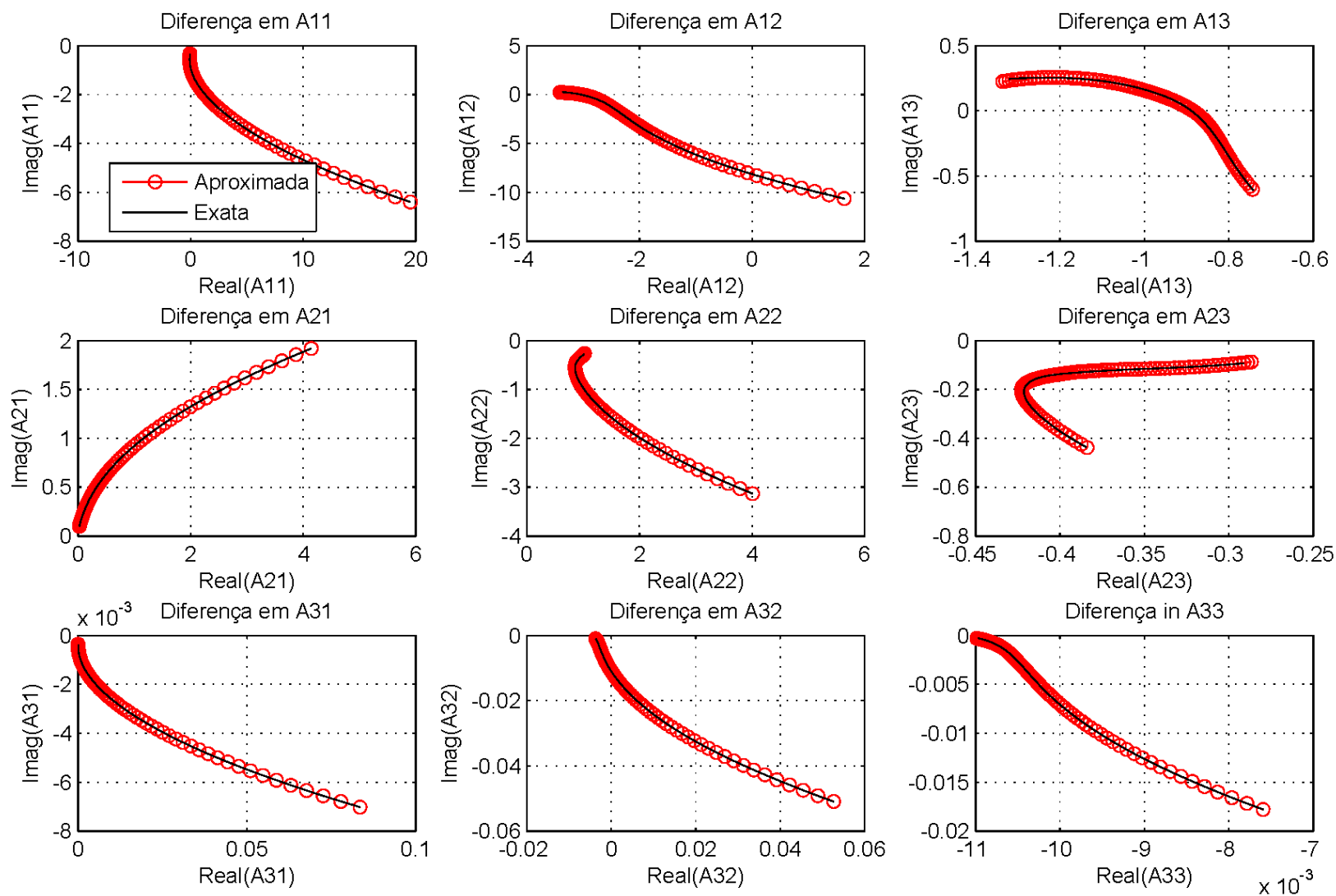


Figura 6.39 – Ajustes por funções racionais dos termos da matriz aerodinâmica.

### 6.2.3.1 Análise do sistema aeroelástico

Foi realizada a análise de autovalores da matriz dinâmica para avaliação de estabilidade aeroelástica. Extraíndo as partes reais e imaginárias dos autovalores respectivos, obtém-se a frequência e amortecimento associados. Na Fig. 6.41 é ilustrado o comportamento dessas quantidades.

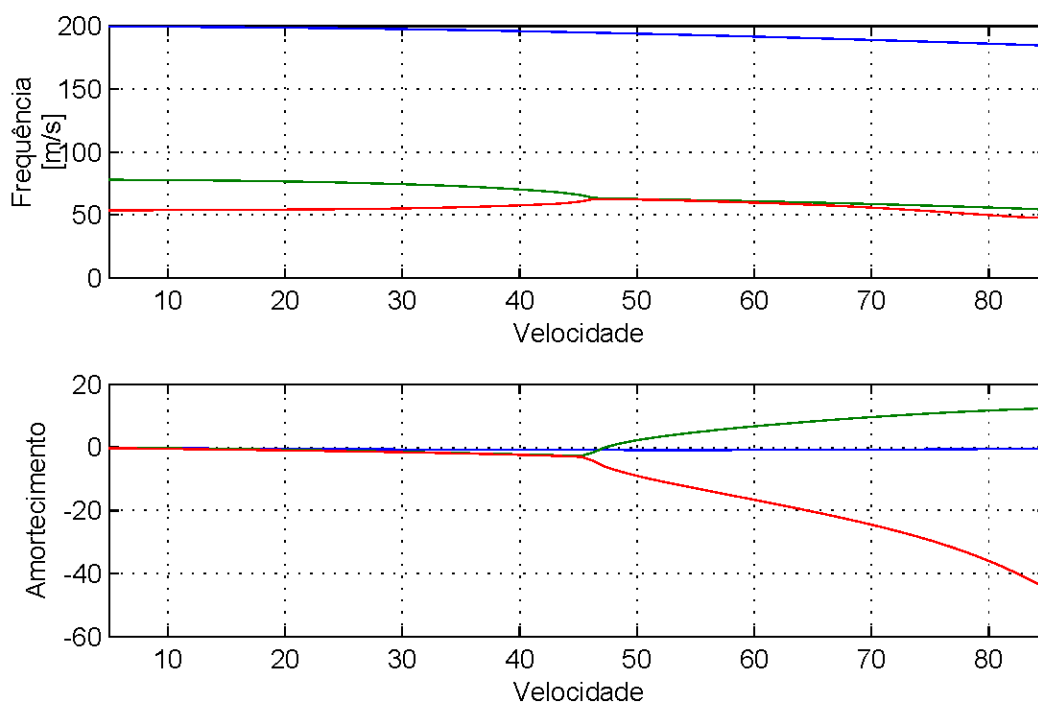


Figura 6.40 – Análise de estabilidade da matriz dinâmica: indicação da condição de instabilidade aeroelástica.

O sistema de equações do movimento em espaço de estados foi então integrado utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, utilizando como condição inicial um deslocamento vertical de 1mm.

Na velocidade de 47,25 m/s, as oscilações se mostram com amplitudes constante com o tempo, assim como os termos aerodinâmicos de atraso, conforme ilustrado nas Figs. 6.41 e 6.42 . Essa condição caracteriza a ocorrência de *flutter*.

Na condição subcrítica, para uma velocidade de 40m/s, são encontradas amplitudes em deslocamento decrescentes para os três graus de liberdade da estrutura e para os termos aerodinâmicos de atraso, conforme apresentado nas Figs. 6.43 e 6.44.

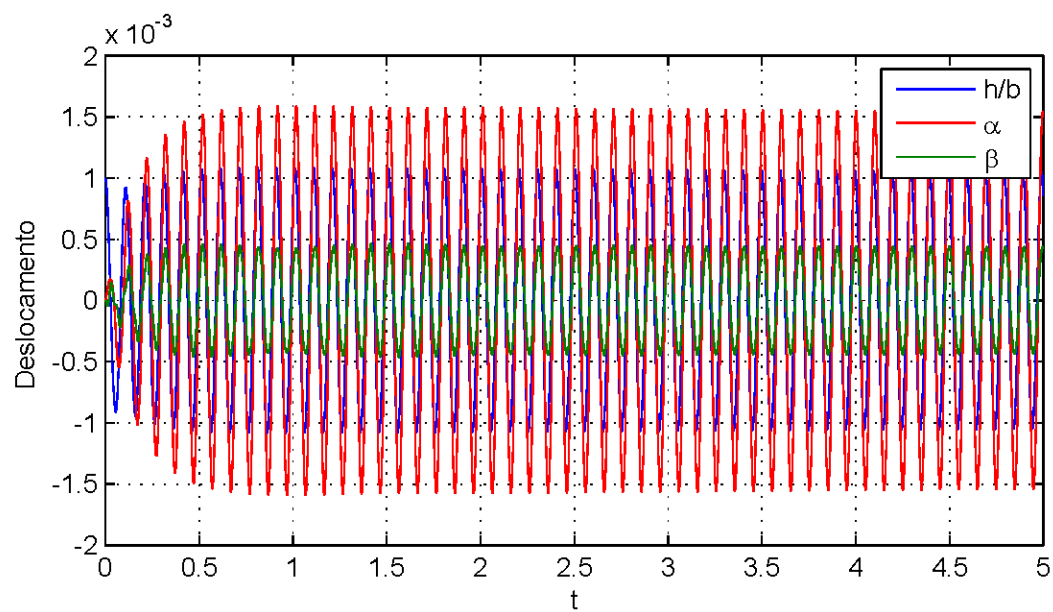


Figura 6.41 – Respostas temporais para velocidade de escoamento crítica

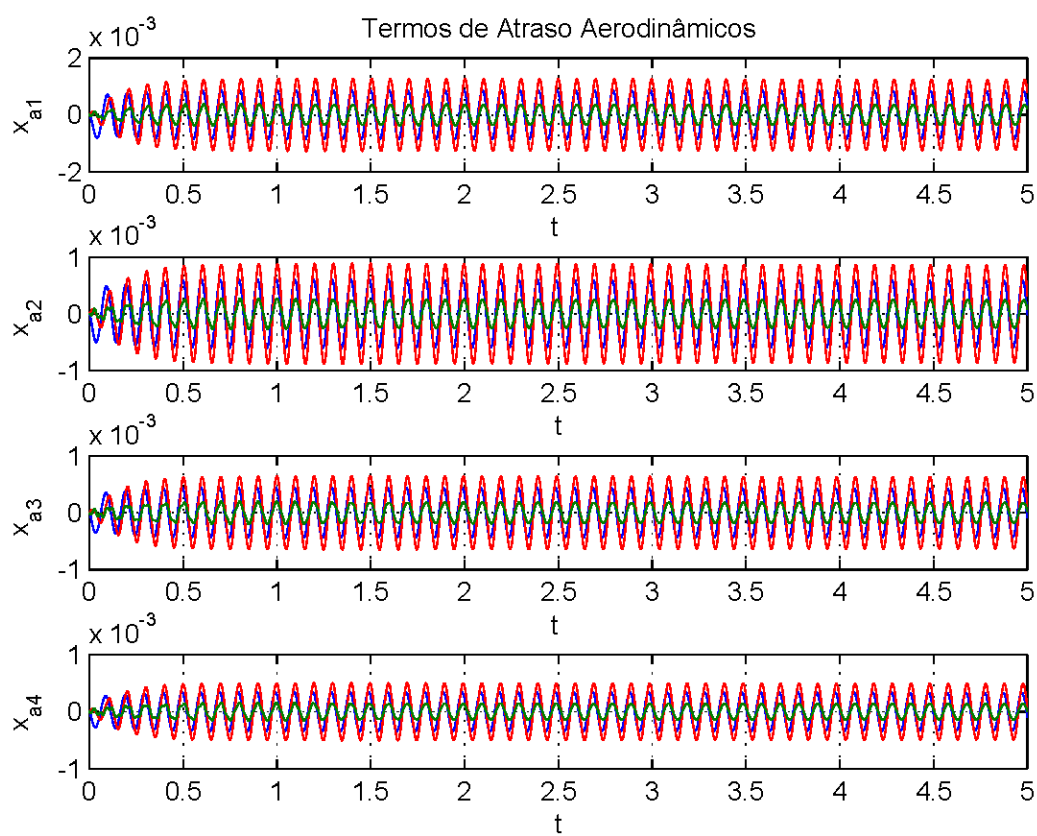


Figura 6.42 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição crítica.

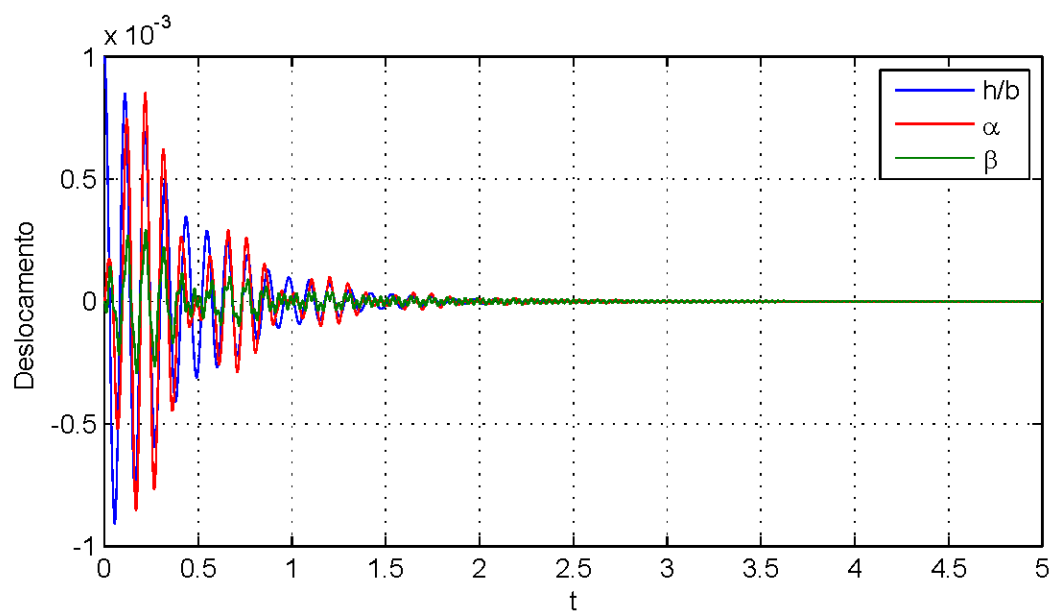


Figura 6.43 - Respostas temporais para velocidade de operação inferior à crítica

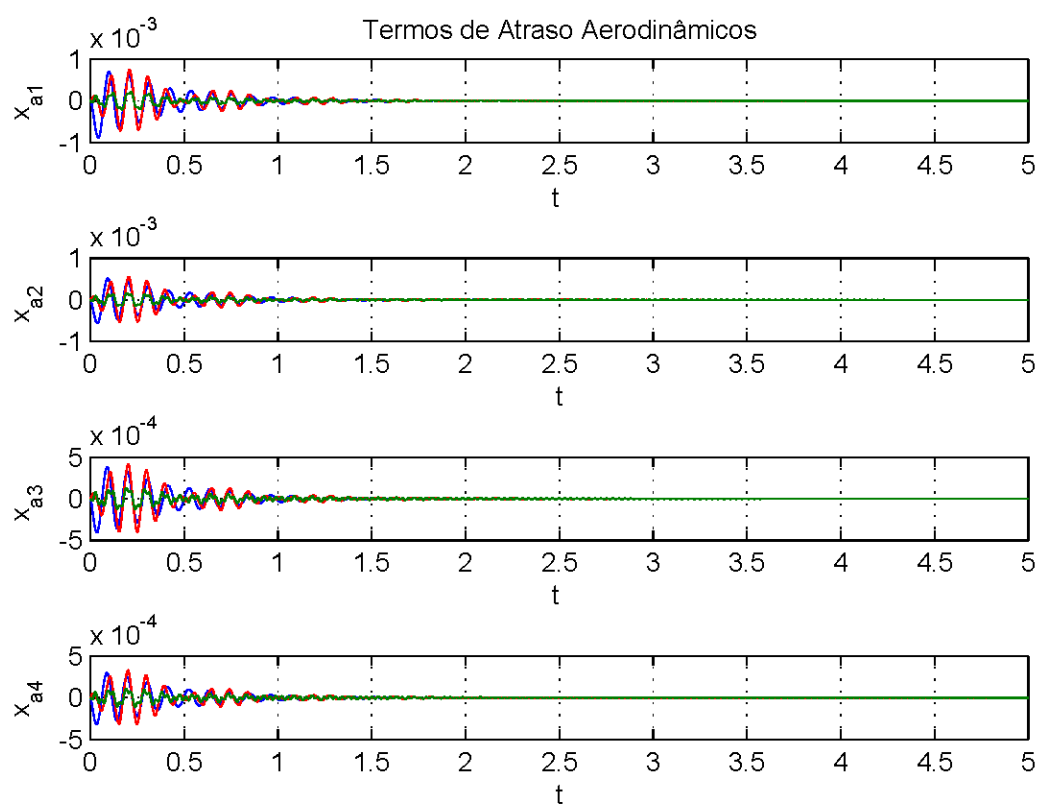


Figura 6.44 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição de velocidade de escoamento inferior à crítica.

Já para velocidade superior à crítica, de 50m/s, observa-se o aumento progressivo das amplitudes de oscilação do sistema aeroelástico de três graus de liberdade e para os termos aerodinâmicos de atraso, conforme as Figs. 6.45 e 6.46.

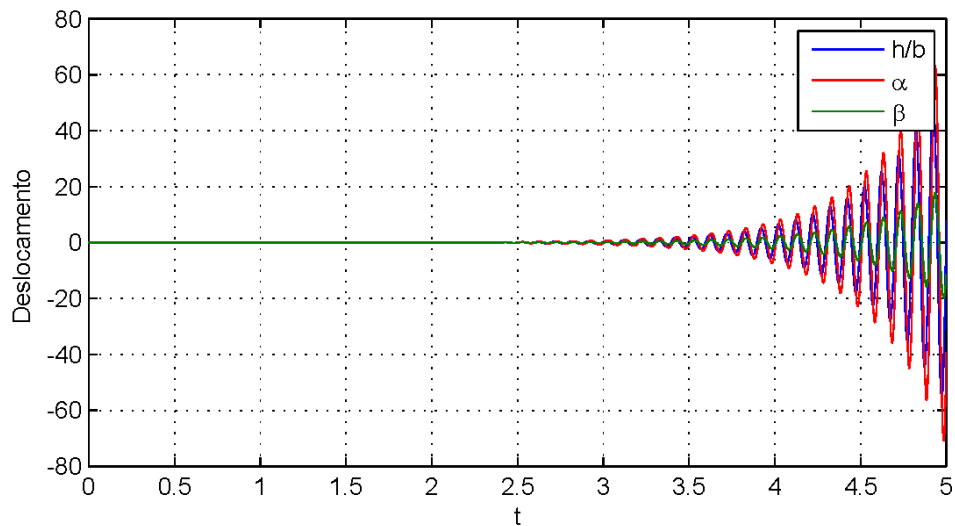


Figura 6.45 - Respostas temporais para velocidade de operação superior à crítica

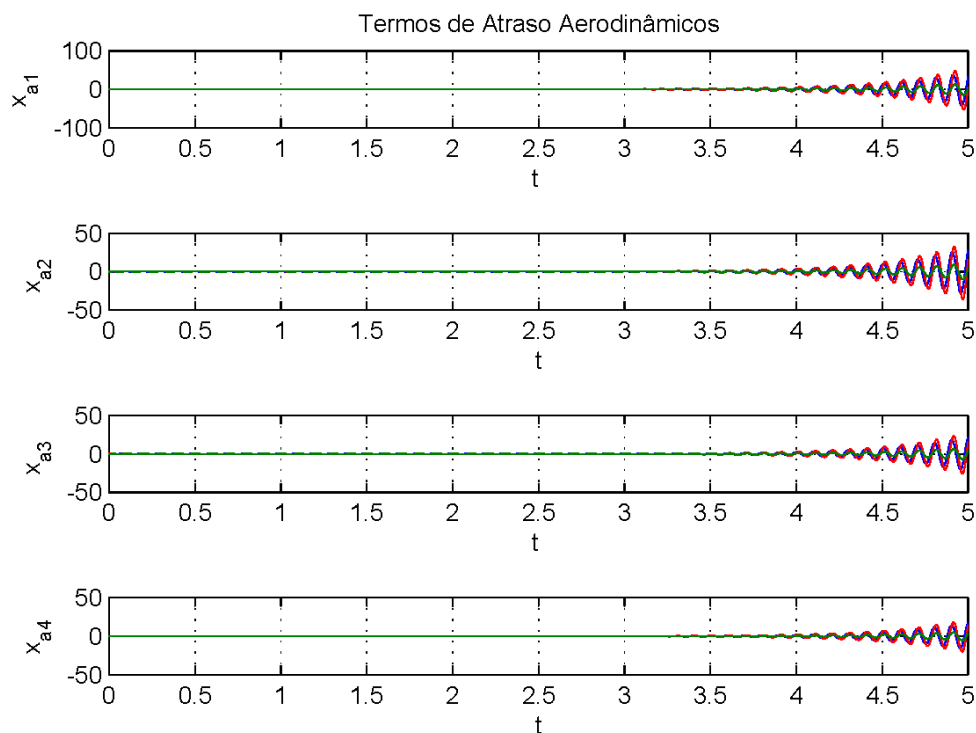


Figura 6.46 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos em condição de velocidade acima da crítica.

#### 6.2.3.2 Análise do sistema aeroviscoelástico

Passa-se então à análise do sistema aeroviscoelástico. A velocidade crítica calculada para a referida condição é de 73,44 m/s. Conforme pode ser observado na Fig. 6.47, as amplitudes atingem valores constantes para esta condição. Na Fig. 6.48 é ilustrado o comportamento dos termos de atraso, que também assumem valores constantes na condição característica equivalente a crítica.

Para velocidade de escoamento de 45m/s, observa-se o decaimento das amplitudes das coordenadas generalizadas e dos termos de atraso, característica da condição subcrítica, conforme apresentado nas Figs. 6.49 e 6.50 .

Para velocidade supercrítica de 75 m/s, é possível visualizar nas Figs. 6.51 e 6.52 o crescimento exponencial das amplitudes de movimento, tanto para as coordenadas generalizadas quanto para os termos de atraso.

Avaliando os históricos temporais na condição crítica, observa-se que, quando comparados o caso puramente elástico com o caso incluindo material viscoelástico, as amplitudes em rotação, tanto da superfície principal quanto da superfície de controle são significativamente reduzidas, ao passo que o grau de liberdade de translação não é muito afetado.

Quando os resultados obtidos por análise no domínio do tempo são comparados com os resultados obtidos no domínio da frequência, tanto para o caso aeroelástico quanto para o caso aeroviscoelástico, observa-se a proximidade dos dois conjuntos de valores. Na frequência, a velocidade crítica calculada para o caso aeroelástico foi de 45,18 m/s, e no tempo, o valor encontrado foi de 47,25 m/s correspondendo a um erro relativo de 4,58%. No caso aeroviscoelástico o erro é de 2,36%, com velocidades críticas no domínio da frequência de 71,75 m/s e no tempo 73,44m/s.

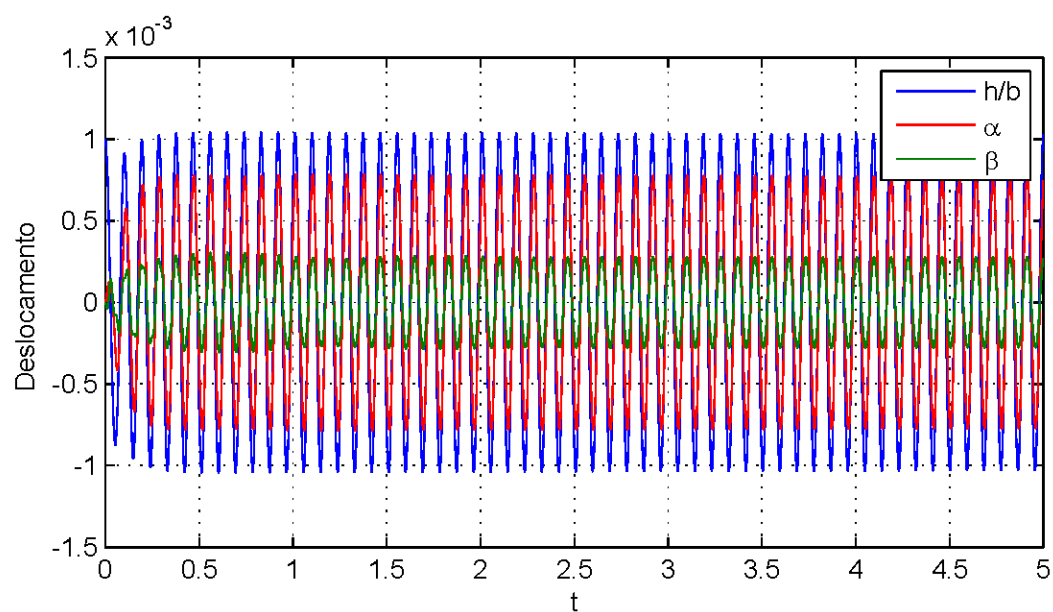


Figura 6.47 - Respostas temporais para velocidade de operação de escoamento crítica

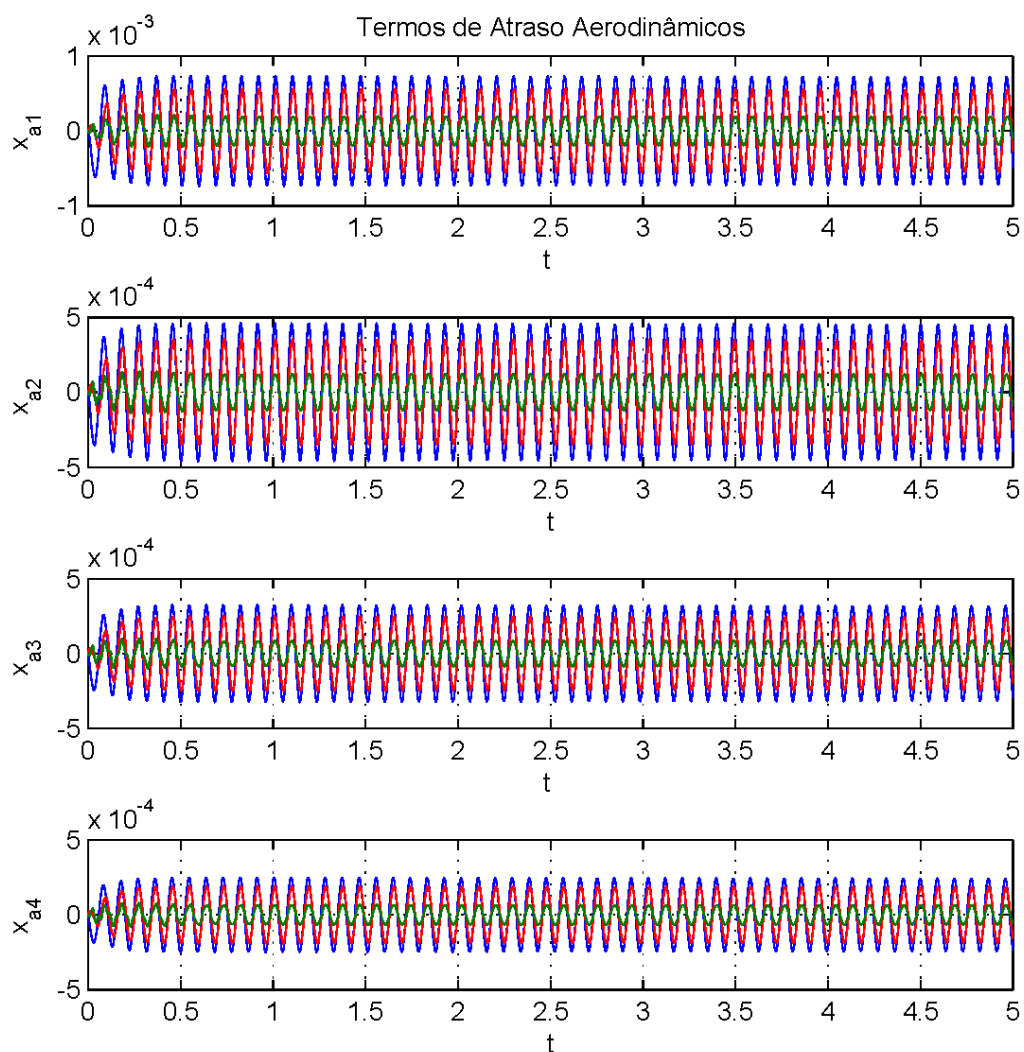


Figura 6.48 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição crítica.

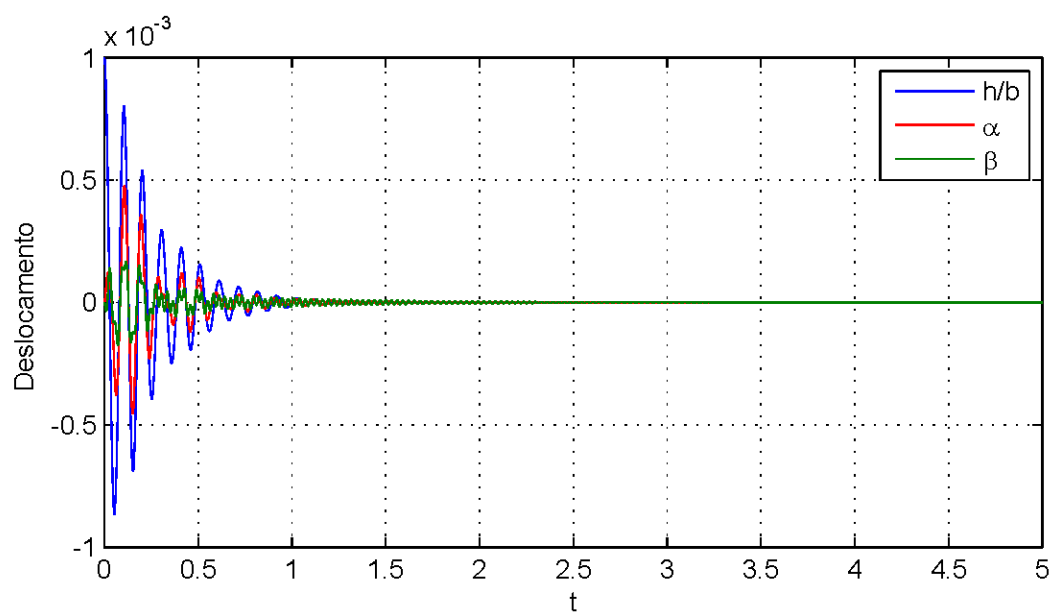


Figura 6.49 - Respostas temporais para velocidade de escoamento inferior à crítica

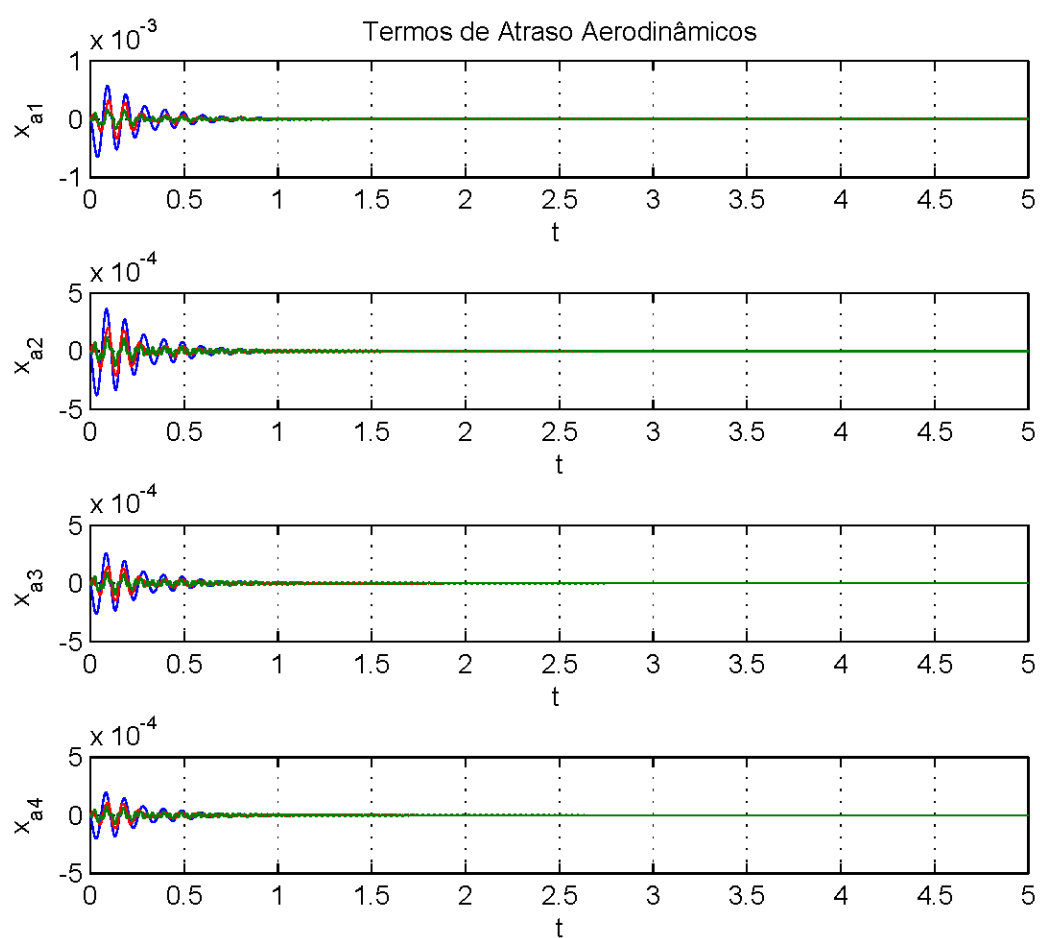


Figura 6.50 - Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição de velocidade inferior à crítica.

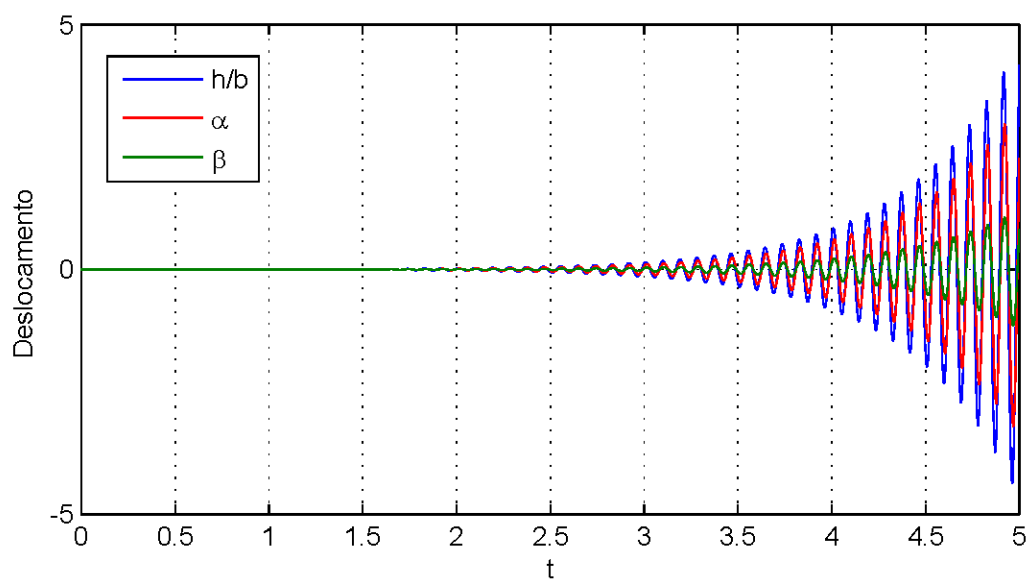


Figura 6.51 - Respostas temporais para velocidade de escoamento superior à crítica.

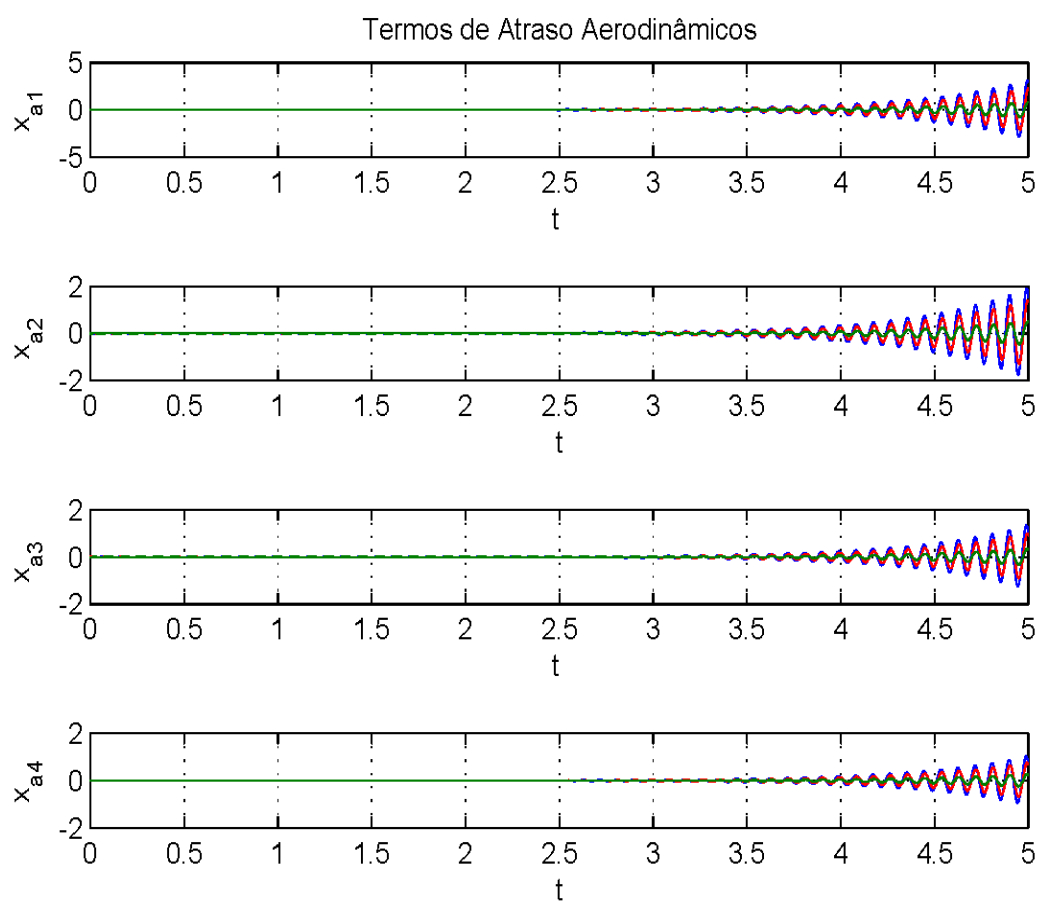


Figura 6.52 – Variações dos termos de atraso aerodinâmicos na condição de velocidade acima da crítica.

## CAPÍTULO VII

### Conclusões e Perspectivas Futuras

Na presente dissertação foi considerada a modelagem e a análise de seções típicas associadas a dispositivos viscoelásticos, sendo que o material viscoelástico foi inserido para fornecer amortecimento passivo, com o propósito de aumentar a faixa de estabilidade de sistemas aeroelásticos de seções típicas, de dois e três graus de liberdade.

Quando do desenvolvimento desse trabalho, foi possível, na fase de revisão bibliográfica, verificar a ausência de abordagens semelhantes à considerada. A maior parte dos trabalhos em supressão de fenômenos aeroelásticos trata de controle ativo, que é de complexidade e custo bem maiores quando comparados à abordagem passiva. Com isso, foi confirmada a necessidade de desenvolvimento de estudos que contemplem o tipo de controle aqui sugerido.

Ainda, os trabalhos mais relevantes e que são utilizados até hoje para o desenvolvimento de modelos modernos datam da década de 40, principalmente os trabalhos de Therodorsen (1934) e Theodorsen; Garrick (1940), o que leva à necessidade de pesquisas voltadas para a engenharia aeronáutica, especialmente em aeroelasticidade. Há ainda de se considerar que a maior parte desses estudos é feita por ou para empresas do setor aeronáutico e aeroespacial, as quais, por razões de mercado, tendem a não divulgar os resultados obtidos.

Em relação aos modelos adotados, nesse trabalho foram consideradas duas seções típicas; a primeira com dois graus de liberdade e a segunda com um grau de liberdade adicional dado pela inserção de uma superfície de controle, onde as molas da suspensão da seção típica foram associadas a molas constituídas de material viscoelástico que adicionam além de rigidez, amortecimento ao sistema. Verificou-se que no caso aeroviscoelástico, a velocidade de *flutter* pôde ser aumentada consideravelmente pela presença do material dissipativo, se comparado com os resultados obtidos para o sistema aeroelástico.

A fim de consolidar a importância da parcela de amortecimento, foram simuladas numericamente as condições onde só havia material viscoelástico na suspensão da seção típica. Três casos foram comparados; no primeiro o módulo complexo assumido foi um valor constante associado à condição de frequência de excitação nula; no segundo caso assumiu-se nula a parcela imaginária do módulo complexo para, em uma terceira situação, considerar todas as parcelas do módulo complexo para comparação das três condições supracitadas. Confrontando esses resultados, pôde-se verificar que a parcela associada ao amortecimento é preponderante no aumento da velocidade crítica de *flutter*.

A análise paramétrica foi focada em duas variáveis que foram consideradas de maior importância de estudo, as quais consistem na temperatura de operação do dispositivo viscoelástico e a característica geométrica exibida pelo mesmo. Quanto à temperatura, observou-se que o aumento desta variável reduz a capacidade de dissipação do material viscoelástico, levando a menores faixas de estabilidade.

No que diz respeito à propriedade geométrica, verificou-se que maiores valores dos fatores geométricos levaram a maiores valores da velocidade crítica, o que, por consequência, aumenta a faixa de estabilidade do sistema aeroviscoelástico.

Os resultados no domínio do tempo consolidam aqueles obtidos no domínio da frequência, além de fornecer base para trabalhos futuros. Com a aproximação por funções racionais da aerodinâmica não estacionária pelo método de Roger, com quatro termos de atraso, observou-se coerência entre as matrizes aerodinâmicas exatas e aproximadas. Além disso, foi utilizado o modelo constitutivo baseado em derivadas fracionárias para tratamento adequado do comportamento viscoelástico. Tanto o sistema aeroelástico quanto o sistema aeroviscoelástico foram integrados em condições de pré-*flutter*, pós-*flutter* e iminência de *flutter*. Com isso, foi possível visualizar o decaimento das amplitudes devido ao amortecimento aerodinâmico característico da condição estável, o aumento gradativo das mesmas na condição pós-crítica e as amplitudes constantes características da condição crítica de *flutter*, respectivamente. Os resultados em termos da velocidade crítica obtidos em ambos os domínios, tempo e frequência, foram confrontados e observou-se uma boa correlação entre os mesmos.

O trabalho aqui apresentado trata de seções típicas, ao passo que o interesse prático industrial é mais voltado para desenvolvimento de modelos que contemplem asas finitas (ou superfície de sustentação) e os efeitos gerados por uma superfície tridimensional finita. Todavia, já foi aqui fornecido um embasamento teórico para desenvolvimento de modelos

mais complexos, que possam, por exemplo, envolver técnicas de discretização via elementos finitos, como é realizado em situações práticas no setor aeroespacial e aeronáutico. Face à necessidade de comparação dos resultados numéricos aqui apresentados, uma proposta natural de continuação desse trabalho consiste em uma validação experimental em túnel de vento.

*Página Intencionalmente deixada em branco*

## CAPÍTULO VIII

### Referências Bibliográficas

3M. **Produtos e Serviços**. Disponível em <<http://solutions.3m.com.br/>>. Acesso em 10 dez. 2013.

ABEL, I. An Analytical Technique for Predicting the Characteristics of a Flexible Wing Equipped with an Active Flutter-Suppression System and Comparison with Wind Tunnel Data. **NASA Technical Paper 1367**. 1979.

AEROFAVOURITES. **Lockheed L-188 Electra**. <<http://aerofavoufurites.nl/locele.htm>>. Acesso em 10 dez. 2013.

ANDERSON, J.D. **Fundamentals of Aerodynamics**. McGraw-Hill, Inc., 1991.

ARDELEAN, E. V.; MCEVER, M.A.; COLE, D.G.; CLARK R.L.. Active Flutter Control with V-Stack Piezoelectric Flap Actuator. **Journal of Aircraft**. v.43, n.2, p. 482-486, abr. 2006.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. **Journal of Rheology**. v.27, n. 3, p. 201-210, 1983.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structure. **AIAA Journal**. v. 23, n. 6, p. 918-925, 1985.

BEA. **Investigação de segurança sobre o acidente ocorrido em 01 de junho de 2009.** Disponível em <<http://www.bea.aero/docspa/2009/f-cp090601.en/pdf/f-cp090601.en.pdf>> . Acesso em 10 dez. 2013.

BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. **Aeroelasticity.** Dover Publications, Inc. 1996.

BRUNTON, S.L.; ROWLEY, C.W.. Empirical state-space representations for Theodorsen's lift model. **Journal of Fluids and Structures.** n.38, p.174-186, 2013.

CASCIATTI, F.; MAGONETTE, G.; MARAZZI, F.. **Technology of semiactive devices and applications in vibration mitigation.** [S.I]: Wiley-Blackwell, 2006

CHEN, P. C.. Damping Perturbation Method for Flutter Solution: The g-Method. **AIAA Journal.** v. 38, n. 9, p. 1519–1521, sept. 2000.

CHRISTENSEN, R.. **Theory of Viscoelasticity: An Introduction.** 2.ed. Academic Press, 1982.

COOPER, J. E.; WRIGHT, J. R.. **Introduction to aeroelasticity and loads.** John Wiley & Sons, UK, 2007.

de LIMA, A. M. G. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Engenharia Mecânica.** Notas de Aula. 2012.

de LIMA, A. M. G. **Modelagem numérica e avaliação experimental de elementos viscoelásticos.** 2003. 130f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia.

de LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; LÉPORE NETO, F. P.. An Efficient modeling methodology of structural system containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing,** v. 23, n.4, p. 1272-1281, 2009.

DISCOVERY BRASIL. **A história dos aviões.** Disponível em <<http://discoverybrasil.uol.com.br/imagens/galleries/a-historia-dos-avioes/>>. Acesso em 20 jan. 2013.

DOWELL, E.D.; CLARK, R.; COX, D.; CURTISS JR. H.C.; EDWARDS J.W.; HALL, K.C.; PETERS, D.A.; SCALAN, R.; SIMIU, E.; SISTO, F.; STRGANAC, T.W.. **A Modern Course in Aeroelasticity**. 4.ed, USA: Kluwer Academic Publishers, 2004.

DRAKE, M.L.; SOOVERE, J.. A Design Guide for Damping of Aerospace Structures. In: Vibration Damping Workshop, Long Beach, USA, 1984. **Anais**.

FERRI, A. A.; WHITEMAN, W.E.. Free response of a system with negative viscous damping and displacement-dependent dry friction damping. **Journal of Sound and Vibration**. v. 306, p. 400-418, 2007.

FERRY, J.D.. **Viscoelastic properties of polymers**. 3.ed, John Wiley & Sons, 1980.

FUNG, Y. C. **An Introduction to the Theory of Aeroelasticity**. New York: Dower Publications, 1993.

GALUCIO, A. C.; DEÜ, J.-F; OHAYON, R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. **Computational Mechanics**, v. 33, n. 4, p. 282-291, 2004.

GUARALDO-NETO, B. **Modelagem por Elementos Finitos de Sistema Dinâmicos Combinando Materiais Viscoelásticos e Materiais com Memória de Forma para o Controle Passivo de Vibrações e Ruído**. 2012. 121f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

HODGES, D. H; PIERCE, G. A. **Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**. Cambridge University Press, 2002.

ISOGAI, K.; YAMASAKI, M; MATSUBARA, M.; ASAOKA, T.. Design study of elastically supported flapping wing power generator. In: Proceeding of International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, 2003, p. 4-6.

INMAN, D., J. **Engineering Vibration**. 2.ed. New Jersey: Prentice Hall International, Inc., Upper Saddle River, 2001. 625p.

ISOTECH. **Noise and Vibration Control**. Disponível em < <http://www.isotechinc.com/noise-vibration-control.html>>. Acesso em 20 jan. 2013.

JONES, D. L. G.. **Handbook of Viscoelastic Vibration Damping**. UK: John Wiley & Sons, 2001.

JONES, R. T. The Unsteady Lift of a Wing of Finite Aspect Ratio. **NACA Report** 681, 1940.

JU, Q.; SUN, Q.. New Improved g method for Flutter Solution. **Journal of Aircraft**. v. 46, n.6, p. 2184-2186, dez, 2009.

KARPEL, M. Design for Active Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State-Space Aeroelastic Modeling. **Journal of Aircraft**, v. 19, n. 3, mar. 1982.

KATS, J.; PLOTKIN, A.. **Low Speed Aerodynamics**. McGraw-Hill, Inc., 1991.

KOO, K.; HWANG, W. Effects of Hysteretic and Aerodynamic Damping on Supersonic Panel Flutter of Composite Plates. **Journal of Sound and Vibration**.v. 273, p. 569-583, 2004.

LACARBONARA, W., CETRARO, M.. Flutter Control of a Lifting Surface via Visco-Hysteretic Absorbers. **International Journal of Aeronautical and Space Sciences**, v. 12, p.331-345, 2011.

LAKES, R.S.. **Viscoelastic Materials**. [S.I]:Cambridge University Press, 2009.

LIBRESCU, L.; MARZOCCA, P., SILVA, W.A.. Aeroelasticity of 2-D lifting surfaces with time-delayed feedback control. **Journal of Fluids and Structure**, n.20, p.197-215.

LIU, Y.; WATERS, T. P.; BRENNAN, M.J.. A comparison of semi-active damping control strategies for vibration isolation of harmonic disturbances. **Journal of Sound and Vibration**, v. 280, p. 21–39, 2005.

MAINARDI, F.. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models**. Cingapura: Imperial College Press, 2010.

MARZOCCA, P., LIBRESCU, L., SILVA, W.A. Aeroelastic response of nonlinear wing section by functional series technique. **AIAA Journal** 40, p. 811–824, 2002.

MERRETT, C. G.; HILTON, H. H. Elastic and viscoelastic panel flutter in incompressible, subsonic and supersonic flows. 2010.

MILNE-THOMSON L. M. **Theoretical Aerodynamics**. 4.ed.USA: Dover Publications, Inc. 1973.

NASA. **Celebrating a century of flight**. Disponível em <http://history.nasa.gov/SP-09-511.pdf>. Acesso em 20 jan. 2013.

NASHIF, A.D.; JONES, D. I. G; HENDERSON, J.P.. Vibration damping. [S.I]: Wiley-Interscience, 1985.

NEUHAUS, Ch.; MIKKELSEN, O.; BOGUNOVIC JAKOBSEN, J.; HÖFFER, R.; ZAHLTEN, W.. Time Domain Representation of unsteady aeroelastic wind forces by rational function approximations, Florence, Italy, 2009. 5<sup>th</sup> European and African Conference on Wind Engineering.

NISSIM, E.; BURKEN J.J. Control Surface Spanwise Placement in Active Flutter Supression Systems. **NASA Technical Paper 2873**, 1988.

NYLANDER, P. Fluid Motion Simulations and Artwork. Disponível em: <<http://www.bugman123.com/FluidMotion/>>. Acesso em 20 jan. 2013.

OYIBO G. A. Unified Panel Flutter Theory with Viscous Damping Effects. **AIAA Journal**, v. 21, n. 5, p. 767-773, 1983.

PETERS, D. A. Two-dimensional incompressible unsteady airfoil theory – An Overview. **Journal of Fluids and Structures**, v. 24, n. 3, p. 295-312, 2008

RAO, M. D.. Recent Applications of Viscoelastic Damping for Noise Control in Automobiles and Commercial Airplanes. **Journal of Sound and Vibration**. v. 262, n. 3, p. 457-474, 2003.

REED, W.H.; CAZIER JR, F. W.; FOUNGNER JR. **Passive Control of Wing Store Flutter**. NASA Technical Memorandum 81865. 1980.

ROGER, K.L., **Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design**. AGARD-CP-228, Aug. 1977.

ROSS, M.; ELLEN C. H. Influence of Structural Damping on Panel Flutter. **AIAA Journal**, v.6, n. 11, p.2169-2174, 1968.

SALES, T. P. **Modelagem Numérico-Computacional de Sistemas Multicorpos Flexíveis Contendo Materiais Viscoelásticos**. 2012. 105f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

SAMALI, B.; KWOK, K. C. S. Use of Viscoelastic Dampers in Reducing Wind and Earthquake Induced Motion of Building Structures. **Engineering Structures**, v. 17, n. 9, p. 639-654, 1995.

SCHMIDT, A.; GAUL, L.. Finite Element Formulation of Viscoelastic Constitutive Equation Using Fractional Time Derivatives. **Nonlinear Dynamics**, v. 29, p. 37-55, 2002.

SILVA, R. G. A. **Análise Aeroelástica no Espaço de Estados Aplicada a Aeronaves de Asa Fixa**. 1994. 196f. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

SILVA, R. G. **Curso de Aeroelasticidade**. Notas de Aula. 2013.

SMAC. **SMAC AERO e SMAC SPACE**. Disponível em <<http://www.smac-sas.com/>>. Acesso em 20 jan. 2013.

SONG, Z.; FENG-MING, L. Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plate. **Composite Structures**. v. 94, n. 2, p. 702-713, 2012

THEODORSEN, T.: General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of flutter. **NACA Report 496**. 1934.

THEODORSEN, T.; GARRICK I.E. Mechanisms of Flutter: A Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem. **NACA Report 685**, 1940.

THEODORSEN, T.; GARRICK I.E.. Flutter calculations in three degrees of freedom, **NACA Report 741**, 1942.

TRINDADE, M.A.. Optimization of active-passive damping treatments using piezoelectric and viscoelastic materials. **Smart Materials and Structures**, v.16, n.6, p. 2159-2168, 2007.

TRINDADE, M.A.; BENJEDDOU, A.; OHAYON, R. Finite element modelling of a hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams – Part I: formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 51, n.7, p. 835-854, 2001.

TRINDADE, M.A.; BENJEDDOU, A.. A Hybrid active-passive damping treatments using viscoelastic and piezoelectric materials: review and assessment. **Journal of vibration control**. v. 8, n.6, p. 699-745, 2002.

UNIVERSITY LIBRARIES. **Tacoma Narrows Bridge: The Collapse**. Disponível em [www.lib.washington.edu/specialcollections/collections/exhibits/tnb/collapse](http://www.lib.washington.edu/specialcollections/collections/exhibits/tnb/collapse). Acesso 10 dez. 2013.

WARBIRDSNEWS. **National Museum of the US Air Force Plans Major Expansion**. <http://www.warbirdsnews.com/avation-museum-news/national-museum-air-force-plans-major-expansion.html>. Acesso em 10 dez. 2013.

WASZAK, M. R.; SRINATHKUMAR, S. Flutter suppression for the active flexible wing; control system design and experimental validation. **AIAA Journal**, 1992.

WEBSTER, A.; SEMKE, W. Vibration Control Using Frequency Dependent Viscoelastic Structural Elements. In: IMAC-XXI: Conference & Exposition on Structural Dynamics, 2003. Florida, USA. **Anais**.

WHITEMAN, W. E.; FERRI, A. A. Suppression of Bending-Torsion Flutter Through Displacement-Dependent Dry Friction Damping. **AIAA Journal**, v. 37, n.1, p. 79-83, 1999.

YANG, Z. -C., ZHAO L.-C, JIANG J -S. A semi-active flutter control scheme for a two dimensional wing. **Journal of Sound and Vibration**, pg 1-7, 1995.

YOKOTA, H.; SARUTA, M.; NAKAMURA, Y.; SATAKE, N.; OKADA, K.; OGAWA, Y.; FUJITA, Y.. Structural Control for seismic load using viscoelastic dampers. Earthquake Engineering. Tenth World Conference, 1992.

ZHANG, W.; YE, Z. Effect of Control Surface on Airfoil Flutter in Transonic Flow. **Acta Astronautica**. p. 999–1007, 2010.

ZONA Technology Inc. **ZAERO: Theoretical Manual**. 2011.