

GIORDHANNE BRUNO CARPANEDA GIMENES

**IMPLEMENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA
EM UM AMBIENTE DE MALHA ADAPTATIVA
DINÂMICA – VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2014**

GIORDHANNE BRUNO CARPANEDA GIMENES

**IMPLEMENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA EM UM AMBIENTE
DE MALHA ADAPTATIVA DINÂMICA – VERIFICAÇÃO E
VALIDAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Térmica e Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

**UBERLÂNDIA – MG
2014**

GIORDHANNE BRUNO CARPANEDA GIMENES

**IMPLEMENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA EM UM AMBIENTE DE MALHA
ADAPTATIVA DINÂMICA – VALIDAÇÃO E VERIFICAÇÃO**

Dissertação **APROVADA** pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

Área de Concentração: Térmica e Fluidos.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto – FEMEC - UFU - Orientador

Dra. Millena Martins Villar – FEMEC - UFU – Coorientadora

Prof. Dr. Sergio Said Mansur – UNESP - Ilha Solteira - SP

Prof. Dra. Sezimária de Fátima Pereira Saramago – FAMAT – UFU

Prof. Dr. Francisco José de Souza – FEMEC - UFU

Uberlândia, 27 de fevereiro de 2014

*À minha esposa Ciciane, pelo apoio, motivação, amor e
companheirismo; e aos meus pais pelo apoio e amor.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar o curso.

Ao Professor Aristeu da Silveira Neto e a Dra. Millena Villar pela orientação, ensinamentos e paciência durante os altos e baixos que ocorreram durante a execução deste trabalho.

Agradeço ao Luismar e ao pessoal da secretaria da pós graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica pela ajuda e compreensão.

Aos meus colegas Rodrigo Bassan, pela amizade e hospedagem, e Vitor Vilela pelo apoio, amizade e ajuda nos momentos difíceis.

Agradeço também aos colegas Denise Kinoshita e Márcio Pivello pelas contribuições ao trabalho.

Aos professores Dr. Solidônio Rodrigues e Dr. Elie Padilla pelos ensinamentos passados pela convivência madura e profissional que permitiu que eu conciliasse trabalho e estudo. Estendo meus agradecimentos a todos os integrantes do MFlab por sempre estarem dispostos em ajudar e compartilhar conhecimentos.

Agradeço à ajuda de custo proveniente do projeto de cooperação entre a Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Empresa PETROBRAS através de convênio do projeto chamado “Escoamentos Bifásicos Anulares”

Por fim, mas não menos importante, agradeço à minha esposa Ciciane Chiovatto pelo incentivo, amizade e companheirismo, não deixando que eu desistisse, mesmo nos momentos mais complicados.

“A persistência é o menor caminho do êxito.”

Charles Chaplin.

CARPANEDA GIMENES, G.B. **Implementação da Equação da Energia em um Ambiente de Malha Adaptativa Dinâmica – Verificação e Validação**. 2014. 83 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

Atualmente, para que uma empresa de engenharia se mantenha competitiva no mercado, é vital a redução do tempo gasto na execução dos projetos, de forma a reduzir custos (homem-hora). Neste contexto, o presente trabalho objetiva contribuir na redução do tempo gasto na análise de escoamentos tridimensionais, não isotérmicos, através da aplicação de técnicas de refinamento adaptativo (*AMR - Local Adaptive Mesh Refinement Technique*) e Fronteira Imersa, permitindo o uso de malha cartesiana. O modelo matemático e a solução numérica foram implementados no código AMR3D, em desenvolvimento pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), concebido para aplicações em escoamentos multifásicos com fronteiras móveis. Em uma abordagem mais simplificada, o presente trabalho trata de escoamentos monofásicos não isotérmicos com fronteiras estáticas. Testes de verificação e validação para a equação da energia são apresentados através de soluções manufaturadas e escoamentos em cavidades com tampa deslizante. De acordo com os resultados apresentados no presente trabalho, os modelos matemático e numérico mostraram-se satisfatórios para a solução da equação da energia em escoamentos incompressíveis, não isotérmicos e com propriedades físicas constantes, permitindo que trabalhos futuros contendo escoamentos bifásicos, não isotérmicos e com fronteiras móveis possam ser desenvolvidos.

Palavras Chave: Mecânica dos fluidos; CFD; Escoamentos não isotérmicos; Fronteira imersa; Malha adaptativa.

CARPANEDA GIMENES, G.B. **Implementation of the Energy Equation in an Adaptative Mesh Enviroment – Verification and Validation.** 2014. 83 f. M. Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Abstract

Currently, for an engineering company remain competitive, is vital to reduce the time spent in execution projects in order to reduce costs (man - hour). In this context, this work aims to contribute with the time reduction in the analysis of non-isothermic three-dimensional flows, applying the AMR technique (Adaptive Mesh Refinement Location Technique) and Immersed Boundary, allowing the use of Cartesian mesh. The mathematical model and numerical solution was implemented in AMR3D code, in development at the Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), designed for applications in multiphase flows with non-static boundaries. In a more simplified approach, this work deals with single-phase flow with static boundaries. Verification and validation tests for the energy equation are presented through manufactured solutions and flows in driven cavities. According to the results presented in this study, the mathematical and numerical models were satisfactory for the solution of the energy equation for incompressible, non-isothermal flows with constant physical properties, allowing the development of future works considering non-isothermic two-phase flows with non-static boundaries.

Keywords: Fluid mechanics; CFD; Non-isothermic flow; Imersed boudary; Adaptative mesh.

LISTA DE SÍMBOLOS

C	Coeficiente de segurança;
D_{ij}	Função distribuição;
\mathbf{f}	Vetor força euleriano;
\mathbf{F}	Vetor força interfacial lagrangiano;
\mathbf{g}	Vetor aceleração gravitacional;
k	Condutividade térmica;
p	Pressão;
Pe	Número de Peclet;
q	Correção da pressão;
Re	Número de Reynolds;
t	Tempo físico;
T	Escalar temperatura;
\mathbf{u}	Vetor velocidade;
\mathbf{x}	Vetor posição euleriano;
\mathbf{X}	Vetor posição lagrangiano;
I	Nível de refinamento;
Δx	Espaçamento da malha computacional na direção x ;
Δy	Espaçamento da malha computacional na direção y ;
Δz	Espaçamento da malha computacional na direção z ;
Δt	Passo no tempo;

Φ	Função dissipação viscosa;
ϕ	Função trigonométrica;
Γ	Domínio lagrangiano;
Ω	Domínio euleriano;
α	Difusividade térmica;
α_i	Constantes do método de Gear;
β_i	Constantes do método de Gear;
μ	Viscosidade dinâmica;
ρ	Massa específica;
∇	Operador gradiente;
∇^2	Operador gradiente;
∂	Derivada parcial;
Σ	Somatório;
Π	Produtório.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1 ESCOAMENTOS NÃO ISOTÉRMICOS	4
2.2 ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS	8
2.3 FRONTEIRA IMERSA (<i>IMMERSED BOUNDARY</i>)	11
2.4 REFINAMENTO LOCAL ADAPTATIVO	12
2.5 TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA INTERNA	14
CAPÍTULO 3 – MODELO MATEMÁTICO	15
3.1 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	15
3.2 EQUAÇÃO DA ENERGIA.....	19
CAPÍTULO 4 – SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	23
4.1 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL.....	23
4.2 ESTABILIDADE	25
4.3 SEQUÊNCIA DE CÁLCULO	27
4.4 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	28
4.5 REFINAMENTO LOCAL ADAPTATIVO	30
4.6 CÉLULAS FANTASMAS	34
4.7 ACOPLAMENTO LAGRANGIANO-EULERIANO	35
CAPÍTULO 5 – RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	37
5.1 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL.....	38
5.2 ESCOAMENTO NÃO ISOTÉRMICO BIDIMENSIONAL.....	42
5.3 ESCOAMENTO NÃO ISOTÉRMICO TRIDIMENSIONAL – SEM FRONTEIRA IMERSA E MALHA UNIFORME	46

5.4	ESCOAMENTO NÃO ISOTÉRMICO TRIDIMENSIONAL – COM FRONTEIRA IMERSA E MALHA ADAPTATIVA.....	48
5.4.1	<i>ESCOAMENTO EM DUTO CIRCULAR</i>	48
5.4.2	<i>ESCOAMENTO EM CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE</i>	53
5.5	ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS RESULTADOS APRESENTADOS	60
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS		63
CAPÍTULO 7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		66

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A busca incessante por otimização de recursos, redução de custos e maximização dos ganhos impulsionou o homem a procurar maneiras de reproduzir, de forma realista, fenômenos naturais e fenômenos originados por algum processo industrial, sobretudo aqueles que envolvem o movimento dos fluidos e/ou transferência de energia interna. Neste contexto, a técnica CFD (*Computational Fluid Dynamics*) apresenta-se como a ferramenta utilizada para reprodução e análise de tais fenômenos. Atualmente, mesmo com computadores robustos tanto em memória como em capacidade de processamento, simular alguns fenômenos acarreta em um elevado custo computacional (tempo de simulação). Desta forma, é de grande valia o desenvolvimento de metodologias numéricas, com potencial para aumentar a velocidade de convergência dos problemas que envolvem dinâmica dos fluidos e/ou transferência de energia interna.

Com base no apresentado acima, um número cada vez maior de pesquisadores tem examinado a dinâmica e a estabilidade dos escoamentos bi ou multifásicos, que englobam os escoamentos anulares verticais (ascendentes e descendentes), horizontais e inclinados (ascendentes e descendentes). Este interesse se deve ao fato desta classe de escoamentos estarem presente em uma grande variedade de sistemas de engenharia e também em sistemas biológicos e fenômenos naturais. Podem-se citar diferentes exemplos, como: reatores químicos, condensadores, evaporadores, trocadores de calor, leitos fluidizados, sistemas de refrigeração, destiladores, processo de lubrificação, transporte de misturas de

fluidos (ex. óleo-água, óleo-gás) e outros. Na natureza podem-se destacar: processos de sedimentação, erosão, transporte de poluentes pelo vento, formação de gelo, avalanches, desmoronamentos de terra, entre outros.

Uma importante aplicação para escoamentos anulares está relacionada aos fornos de craqueamento térmico. Nesse caso, o óleo primário, no processo de refino de petróleo é admitido em uma serpentina tubular. À medida que o óleo escoar pelo tubo cilíndrico, o mesmo recebe energia interna e parte deste óleo muda de fase, gerando um escoamento bifásico. Para essa aplicação, a configuração ideal é o escoamento anular, onde a fase líquida do óleo se localiza junto à parede do tubo e a fase vapor se localiza no núcleo do escoamento. Esta configuração de escoamento reduz significativamente a dissipação viscosa do escoamento, diminuindo assim custos de bombeamento.

A análise destes escoamentos foi viabilizada com a utilização de metodologias de refinamento localizado de malhas, dentre as quais a técnica AMR (*Local Adaptive Mesh Refinement Technique*) apresenta-se na vanguarda dos trabalhos que visam o desenvolvimento de metodologias numéricas para análise de escoamentos multifásicos. Esta técnica, em termos simples, identifica em um domínio computacional cartesiano, as regiões onde é necessário um maior refinamento da malha, baseando-se em critério definido pelo usuário e pelo problema em questão. Estes critérios podem ser massa específica, vorticidade, temperatura e posição da fronteira.

Apesar de recente, vários autores vêm utilizando técnicas de refinamento adaptativo no desenvolvimento de estudos na área de escoamentos multifásicos e escoamentos com fronteiras móveis: Griffith (2005) utilizou refinamento adaptativo na modelagem da interação dinâmica de um escoamento incompressível, cujo fluido, o sangue, com uma estrutura visco elástica (as paredes do músculo cardíaco e das válvulas do coração). Nós (2007) desenvolveu o primeiro trabalho que apresenta simulações tridimensionais completamente adaptativas de um modelo de campo de fase para um fluido incompressível com massa específica constante e viscosidade variável, conhecido como Modelo H. As equações deste modelo foram solucionadas numericamente em malhas refinadas localmente com a técnica AMR.

O trabalho de Villar (2007), para escoamentos bifásicos com geometrias móveis e deformáveis tratou ambos os domínios (fluido e interface) de forma geometricamente independente e não apresentando restrição quanto ao movimento e à deformação da fase dispersa. Desta forma, capturou detalhes deste tipo escoamento, resolvendo adequadamente as escalas físicas do tempo e do espaço, utilizando malhas bloco estruturadas refinadas localmente, as quais se adaptam dinamicamente para recobrir as regiões de interesse do escoamento (como, por exemplo, ao redor da interface fluido-fluido).

Para se obter a resolução necessária no tempo, foi usada uma discretização semi-implícita de segunda ordem para solucionar as equações de Navier-Stokes.

De forma a complementar o trabalho de Villar, onde o sistema foi tratado com temperatura constante, o presente trabalho propõe-se a adicionar a equação da energia ao código AMR3D em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab).

Em uma abordagem mais simplificada, o presente trabalho irá tratar de escoamentos monofásicos com fronteiras estáticas, porém com refinamento adaptativo. Além de permitir a análise de escoamentos não isotérmicos no código AMR3D (principal contribuição), o presente trabalho, uma vez verificados e validados os módulos de solução da Equação da Energia, servirá de base confiável para desenvolvimentos futuros, como análise de escoamentos bifásicos, não isotérmicos, com fronteiras móveis e, de uma forma mais ambiciosa, escoamentos com mudança de fase.

1.1. Organização do trabalho

Esta dissertação foi dividida em seis capítulos, sendo que no Capítulo 1 apresentam-se as motivações que levaram ao desenvolvimento do presente trabalho. No Capítulo 2 é apresentado um levantamento bibliográfico acerca dos temas relevantes ao desenvolvimento do trabalho, onde são abordados assuntos referentes a escoamentos não isotérmicos, escoamentos multifásicos, refinamento adaptativo, e fronteira imersa.

No Capítulo 3 discorre-se sobre o tratamento matemático para a Equação da Energia, Equações de Navier-Stokes e Continuidade e a Metodologia da Fronteira Imersa aplicada à solução da Equação da Energia para condição de contorno de Primeira Espécie (Dirichlet). Já no Capítulo 4 apresenta-se uma descrição dos métodos numéricos e discretização das equações utilizadas na solução numérica.

Os resultados das simulações numéricas, as validações/verificações dos casos testados e as discussões dos resultados são apresentados no Capítulo 5. O Capítulo 6 sintetiza as principais discussões, conclusões e sugestões para futuros desenvolvimentos e aplicações que podem ser derivados do presente trabalho.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O presente capítulo apresenta um levantamento bibliográfico acerca dos temas relevantes ao desenvolvimento desta dissertação, onde são abordados assuntos referentes a escoamentos não isotérmicos, escoamentos multifásicos, fronteira imersa e refinamento adaptativo.

2.1 Escoamentos não isotérmicos

A mecânica dos fluidos e a transferência de energia interna apresentam-se de forma acoplada em vários fenômenos, tanto no campo da engenharia como nos fenômenos naturais. Entre diversos exemplos no campo da engenharia estão: escoamentos em trocadores de calor (com ou sem mudança de fase), geradores de vapor, fornos, compressores, motores de combustão interna e sistemas de refrigeração. Na natureza podem ser citados: a formação de pluma em uma chama de cigarro, dispersão de poluentes na camada atmosférica e o transporte de vapor através da evaporação que ocorre em mares e rios.

Em trocadores de calor, a transferência de energia interna, a perda de carga, o dimensionamento e a avaliação de desempenho, bem como os aspectos econômicos têm papéis importantes no projeto final. Na relação existente entre a perda de carga e a quantidade de energia interna trocada, o aumento no número de Reynolds (principalmente quando há transição de regime laminar para turbulento) causa aumento no coeficiente de troca térmica (necessitando de uma menor área de troca térmica). Por outro lado, o aumento do número de Reynolds ocasiona aumento da resistência ao escoamento devido à elevação da viscosidade aparente (gerando a necessidade de um sistema motriz mais potente). Este é um exemplo típico onde o estudo acoplado do escoamento e transferência de energia interna é necessário.

No que tange ao par escoamento-calor, há uma relação histórica entre a mecânica dos fluidos e a transferência de energia interna em regiões de interface (superfícies) (Bejan, 1994). Especialmente durante os últimos 100 anos, estas duas áreas têm desfrutado de uma relação mutuamente proveitosa no seu desenvolvimento paralelo, uma relação onde um campo é estimulado pela curiosidade sobre o outro campo.

Santos (2007) apresentou um estudo numérico sobre escoamentos incompressíveis, não isotérmicos, bi e tridimensionais nos regimes laminar e turbulento através da Simulação de Grandes Escalas e utilização do método de Elementos Finitos (FEM – *Finite Element Method*). Para tornar isso possível, foi implementada a Equação da Energia e os termos forçantes de campo (empuxo) em um algoritmo numérico desenvolvido em FORTRAN, já existente, que simula escoamentos incompressíveis, isotérmicos, tridimensionais, nos regimes laminar e turbulento. No estudo numérico desenvolvido no trabalho de Santos, foi utilizada malha uniforme com elemento finito hexaédrico de oito nós com sistema de coordenadas naturais (quadratura de Gauss) (ver Figura 2.1).

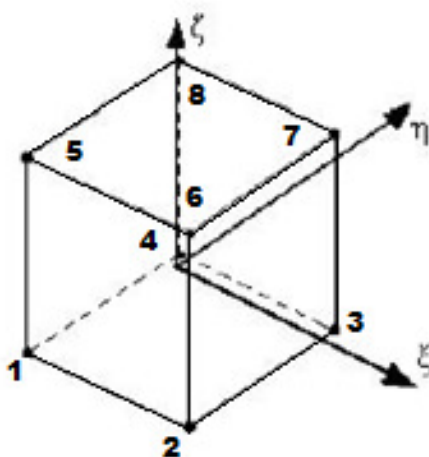


Figura 2.1 – Ilustração dos elementos hexaédricos de oito nós em coordenadas naturais $-1 \leq (\xi, \eta, \zeta) \leq 1$

Da Silva (2009) desenvolveu e implementou um modelo matemático para prever a transferência de energia interna e massa no escoamento bidimensional bifásico em torno de aerofólios de uso aeronáutico, equipados com sistema de antigelo térmico operando em regime permanente. Para representar adequadamente os fenômenos de transferência de energia interna e massa, foi implementado um programa de simulação térmica, no qual o programa principal de simulação começa o cálculo depois da coleta de dados do usuário e de um código externo, o qual fornece o campo de escoamento (velocidades e pressão).

Uma rotina de avaliação da camada limite fornece distribuições de h_{ar} (coeficiente de transferência de energia interna por convecção da mistura de ar e vapor d'água) e C_f (coeficiente de atrito local) em torno do aerofólio. As equações de conservação de massa e de quantidade de movimento aplicado ao escoamento de água líquida são resolvidas para possibilitar a aplicação da primeira lei da termodinâmica ao escoamento de água e à superfície sólida. A solução do sistema de equações em cada volume finito é considerada satisfatória quando os fluxos de transferência de energia interna e de massa por convecção convergem.

Assim, as equações são resolvidas em todos os volumes finitos ao longo do intradorso, a partir do ponto de estagnação até o último elemento no bordo de fuga. De forma análoga, as equações são resolvidas ao longo do extradorso. Este procedimento de solução é, então, repetido até que a continuidade do fluxo de energia interna no ponto de estagnação seja verificada. No final do processo de cálculo, o programa é capaz de estimar os parâmetros operacionais do sistema antigelo, como temperaturas de superfície (T_s), e vazões de água líquida residual (\dot{m}_{run}). A Figura 2.2 apresenta a estrutura de cálculo descrita no trabalho de Da Silva (2009).

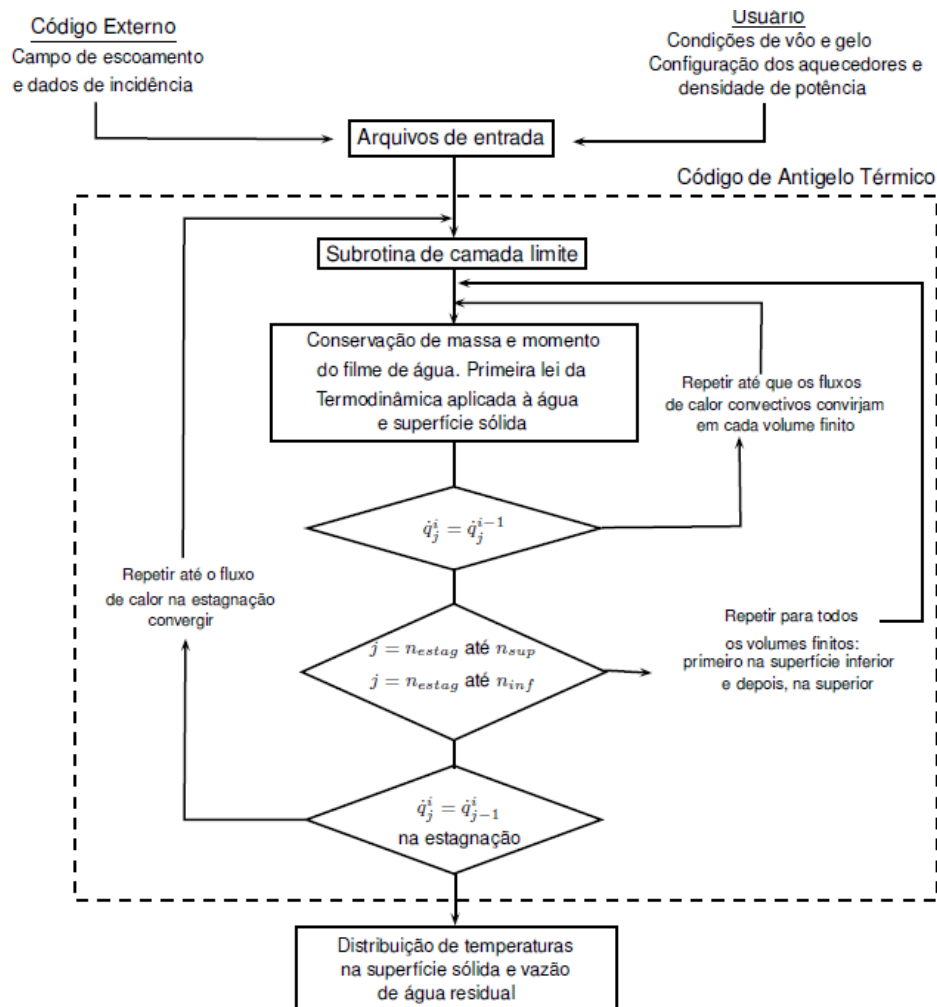


Figura 2.2 – Estrutura da implementação numérica, Da Silva (2009)

Kinoshita *et al.* (2012) simularam escoamentos incompressíveis com transferência de energia interna, aplicando a metodologia IMERSPEC, que é uma metodologia híbrida entre o método pseudo-espectral de Fourier (MPEF) e a metodologia da fronteira imersa (*Imersed Boudary*). Originalmente, a metodologia IMERSPEC resolve as equações de Navier-Stokes pelo método pseudo-espectral de Fourier, impondo condições de contorno através do termo fonte de força pelo método de fronteira imersa, permitindo assim, resolver problemas não periódicos utilizando o método pseudo-espectral de Fourier.

No presente trabalho, semelhante à Kinoshita *et. al* (2012), a metodologia de fronteira imersa será utilizada para simular condições de contorno de primeira espécie (Dirichlet) em escoamentos incompressíveis com transferência de energia interna.

Desta forma, em uma abordagem diferente de Santos (2007) e Silva (2009), no presente trabalho resolver-se-á a equação da energia utilizando o método das diferenças finitas em malhas bloco estruturadas refinadas localmente e condição de contorno definida pelo método da fronteira imersa.

2.2 Escoamentos multifásicos

Escoamentos multifásicos estão presentes em várias situações, tanto na natureza quanto na indústria, em ciclones, tratamento de efluentes, e em muitos processos da indústria petrolífera. A presença de mais de uma fase no escoamento torna a instrumentação complexa, fazendo a modelagem matemática e a simulação numérica desta classe de problemas ainda mais relevante.

Escoamento multifásico é um problema cuja análise é mais complexa que a aplicada ao escoamento monofásico, quando processos correlatos são analisados. Os motivos são variados:

1. Inicialmente, a presença de mais de uma fase no escoamento exige um número adicional de equações para o fechamento (*closure*) dos modelos matemáticos que expressam o fenômeno físico;
2. Escoamentos multifásicos apresentam uma distribuição espacial das fases, a qual não é conhecida *a-priori*. Ademais, a distribuição espacial das fases não deixa de ser um fenômeno de difícil quantificação. Em muitos casos, a interface gás-líquido que separa as fases tem forma complicada, além de apresentar movimento aleatório;
3. Há mudanças de padrões de escoamento (a distribuição espacial de fases determina padrões de escoamento, conforme pode ser visto na Figura 2.3), que dependem das características físicas e operacionais do sistema. Estes padrões (algumas vezes também denominados “regimes do escoamento bifásico”), por sua vez, alteram e/ou determinam os fenômenos de transferência interfacial, isto é, os processos de transferência de energia interna, massa e quantidade de movimento entre as fases;
4. Na medida em que há grande influência do escoamento de cada uma das fases no escoamento da outra, a realidade mostra que as variáveis locais (referentes a uma posição espacial) de cada fase, como a velocidade, a pressão, a temperatura, etc, podem flutuar no tempo com amplitude considerável. Consequentemente, definir, calcular ou mesmo medir o valor médio de uma variável em um escoamento bifásico requer procedimentos mais complexos que aqueles aplicados às variáveis de escoamentos monofásicos.

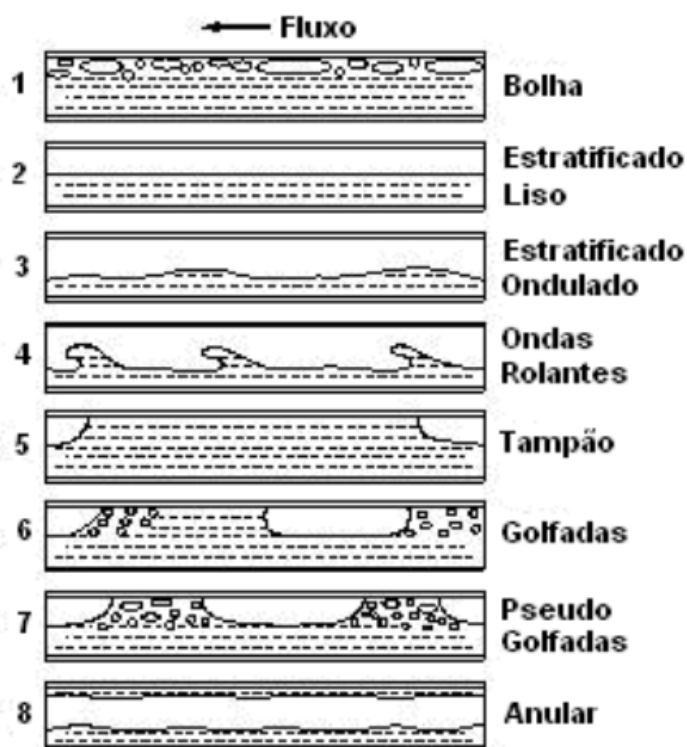


Figura 2.3 – Padrões de escoamentos bifásicos observados em dutos horizontais

Existem diversas metodologias para resolver numericamente esta classe de escoamentos, que podem ser utilizada dependendo da natureza do problema. Portanto, existem diferentes enfoques para a modelagem de escoamentos bifásicos, os quais podem ser apresentados em: modelos homogêneos, modelos de difusão e modelos a dois-fluidos ou modelo Euler-Euler (Wörner, 2003).

O primeiro tipo pressupõe que ambas as fases se movimentem com a mesma velocidade e o equacionamento é similar ao caso monofásico com propriedades físicas calculadas a partir de médias ponderadas pelas frações volumétricas das diferentes fases. Os modelos de difusão podem ser considerados como uma generalização dos modelos homogêneos. Neste caso, assume-se que as fases estão em equilíbrio mecânico. Desta forma, as velocidades das fases diferem entre si. A principal suposição do modelo de difusão é que a velocidade relativa entre as fases pode ser aproximada por uma expressão algébrica.

Os modelos a dois-fluidos modelam cada fase separadamente junto com as condições de transferência interfacial ponto a ponto. Assim, matematicamente, tem-se uma equação de balanço da massa e uma equação de balanço da quantidade de movimento para cada fase. Em escoamentos dispersos reais, uma grande variação nas dimensões das bolhas é observada. Se as bolhas coalescem ou se fragmentam, nem o diâmetro nem a massa específica são constantes ou uniformes. Para superar esta restrição, os modelos a

dois-fluidos são conceitualmente estendidos. Assim, equações de transporte para a concentração de área interfacial e equações de balanço de população são introduzidas (Ribeiro; Lage, 2004).

A modelagem matemática de escoamentos multifásicos envolve interação de geometrias móveis e deformáveis. Métodos clássicos têm sido empregados, buscando de determinar maiores detalhes de escoamentos multifásicos, apresentando alguns inconvenientes e sendo dificilmente empregados com eficiência em todos os casos. Basicamente duas metodologias vêm sendo empregadas na simulação deste tipo de problema: captura de interface (*Front-Capturing Method*) e acompanhamento de interface (*Front-Tracking Method*).

Em captura da interface, ela é tratada como uma região com variação acentuada, mas com algumas propriedades mantendo-se contínuas. Experimentos numéricos têm mostrado que esta metodologia não requer detalhes adicionais no algoritmo para modelar trocas na interface. A desvantagem é que há uma difusão da interface sobre várias células, resultando numa perda de exatidão. Um exemplo desse método é o denominado *Level-Set Method*. Outro método que utiliza essa técnica é o denominado *Volume-of-Fluid* (Puckett *et al.*, 1997). Neste método, rastreia-se o volume ocupado pelas diferentes fases em cada célula a cada passo no tempo e estes volumes são usados para reconstruir uma aproximação da frente ou interface.

Em acompanhamento da interface, ela é tratada explicitamente, movendo-se de forma independente sobre a malha na qual está inserida, possibilitando simular geometrias complexas em malhas cartesianas, sem a necessidade de reconstrução da malha usada para discretizar a fase contínua, a cada passo de tempo. Este processo é bastante complexo e dispendioso computacionalmente, mas oferece uma melhor precisão que o método anterior. Utilizando esta metodologia de representação da interface, podem-se destacar os métodos *Volume-Tracking*, *Boundary-Integral* e *Immersed Boundary* (fronteira imersa).

Villar (2007) aplicou, para o tratamento numérico deste tipo de problema o método híbrido *Front-Tracking/Front-Capturing*. Esta abordagem leva à separação do problema em dois domínios distintos, um domínio fixo, euleriano, utilizado para discretizar as equações de ambas as fases, e outro móvel, lagrangiano, usado para as interfaces. Seguindo esta linha, Villar capturou detalhes de escoamentos bifásicos isotérmicos, resolvendo adequadamente as escalas físicas de tempo e de espaço, utilizando malhas bloco estruturadas refinadas localmente, as quais se adaptam dinamicamente para recobrir as regiões de interesse do escoamento. Para a representação da interface lagrangiana rígida, Villar utilizou o método da fronteira imersa.

Complementando o trabalho de Villar (2007), esta dissertação utilizará a metodologia de fronteira imersa na solução de escoamentos com transferência de energia interna em escoamentos com interface fluido/sólido.

2.3 Fronteira imersa (*Immersed boundary*)

Os métodos clássicos utilizados para resolver problemas de escoamentos sobre geometrias complexas requerem malhas não estruturadas e a utilização de técnicas de remalhagem, acarretando alto custo computacional e a necessidade de uma implementação numérica mais complexa, Nakahashi, Ito e Togashi (2003). Para solucionar este problema, têm-se alternativamente, as metodologias baseadas no conceito de fronteira imersa (MFI).

A Metodologia da Fronteira Imersa (MFI) vem sendo desenvolvida desde 1970 e ganhou visibilidade com o trabalho de Peskin (1972), o qual mostrou simulações de escoamentos em válvulas cardíacas, as quais foram representadas por um campo de força. Mittal e Iaccarino (2005) apresentaram uma revisão das várias formas de se tratar MFI, classificando de forma didática as metodologias existentes. Goldstein, Adachi e Sakata (1993), simularam escoamentos turbulentos em canais empregando a força para resolver o domínio euleriano. Lima-e-Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003) propuseram um novo método para calcular as derivadas da força, através da interpolação de Lagrange.

Conforme mencionado anteriormente, esta metodologia foi aplicada por Villar (2007) para representar a interface fluido/fluido em escoamentos bifásicos e também por Kinoshita *et al.* (2012) para aplicação de condições de contorno térmicas em escoamentos resolvidos por metodologia pseudo-espectral de Fourier.

Em MFI de Lima e Silva (2002), a presença da estrutura é feita mediante o espalhamento de um campo de força (baseada na própria lei que governa o movimento do fluido e na dinâmica desejada para a interface), definido na fronteira e nas equações do fluido. Esta modelagem de força independe de constantes a serem ajustadas e é conhecida como Modelo Físico Virtual (MFV). Desta forma, as equações da massa, Navier-Stokes e de energia são resolvidas sobre uma malha cartesiana estruturada (malha euleriana) e descreve a presença da interface através de uma malha lagrangeana. Esta formulação permite que a interface se desloque ou se deforme sem afetar a malha euleriana.

A descrição da formulação da fronteira imersa aplicada à solução da equação da energia será apresentada em detalhes no capítulo 3.

2.4 Refinamento local adaptativo

Uma das dificuldades encontradas na simulação de escoamentos (isotérmicos ou não) consiste no alto custo computacional existente, se malhas uniformes e regulares são utilizadas para capturar os detalhes do escoamento. Assim, os métodos numéricos apresentam limitações quanto à velocidade de solução e capacidade de armazenamento computacional. Quando se tratam de escoamentos multifásicos, por exemplo, a região de interesse é muito pequena, quando comparada com todo o domínio de cálculo. Surge então a necessidade de um refinamento localizado, a fim de captar fenômenos físicos locais ou definir, com maior exatidão, regiões com elevadas curvaturas ou ângulos estreitos (Villar, 2007).

A princípio, distinguem-se dois tipos de aproximação adaptativa: o refinamento estático, no qual regiões de refinamento no domínio computacional são determinadas antes da execução da simulação iniciar, e o refinamento dinâmico, no qual as regiões de refinamento são determinadas durante a execução da simulação, controlado por algum critério de adaptatividade apropriado. Na prática, as duas aproximações podem ser combinadas (Calegari, 2012).

O refinamento adaptativo de malhas (AMR, *Adaptive Mesh Refinement*) é uma metodologia de simulação que adapta a malha dinamicamente em determinadas regiões do domínio e, quando implementada corretamente, pode levar inclusive a soluções mais eficientes que em casos onde o domínio é refinado uniformemente (Hornung R. D. e Wissink, 2006). Entretanto, apesar de reduções consideráveis no consumo de memória e no tempo de execução, softwares baseados nesta metodologia ainda são relativamente pouco empregados em aplicações científicas, devido, principalmente, à complexidade numérica dos algoritmos e às consequentes dificuldades na sua implementação computacional.

Malhas adaptativas bloco estruturadas consistem em criar uma hierarquia de malhas cartesianas com diferentes níveis de refinamento que cubram todo o domínio, concentrando as malhas refinadas nas regiões que requeiram atenção especial. Todas as malhas que compõem um determinado nível devem ter o mesmo grau de refinamento.

Dentro da hierarquia, os níveis estão aninhados de forma que o nível mais grosso cobre o domínio computacional completo e cada nível sucessivamente mais fino cobre uma parte do interior do nível mais grosseiro imediatamente anterior. A Malha em cada nível é composta de uma união de regiões logicamente retangulares, normalmente chamadas de retalhos ou blocos, e que não se interseccionam.

A adaptatividade da malha envolve selecionar células para serem refinadas em um dado nível, usando alguma estimativa de erro ou outro critério de refinamento, e então agrupando as células em blocos naquela região. Estas regiões de blocos são usadas para formar o próximo nível na hierarquia. A Figura 2.4 mostra um exemplo de malha AMR.

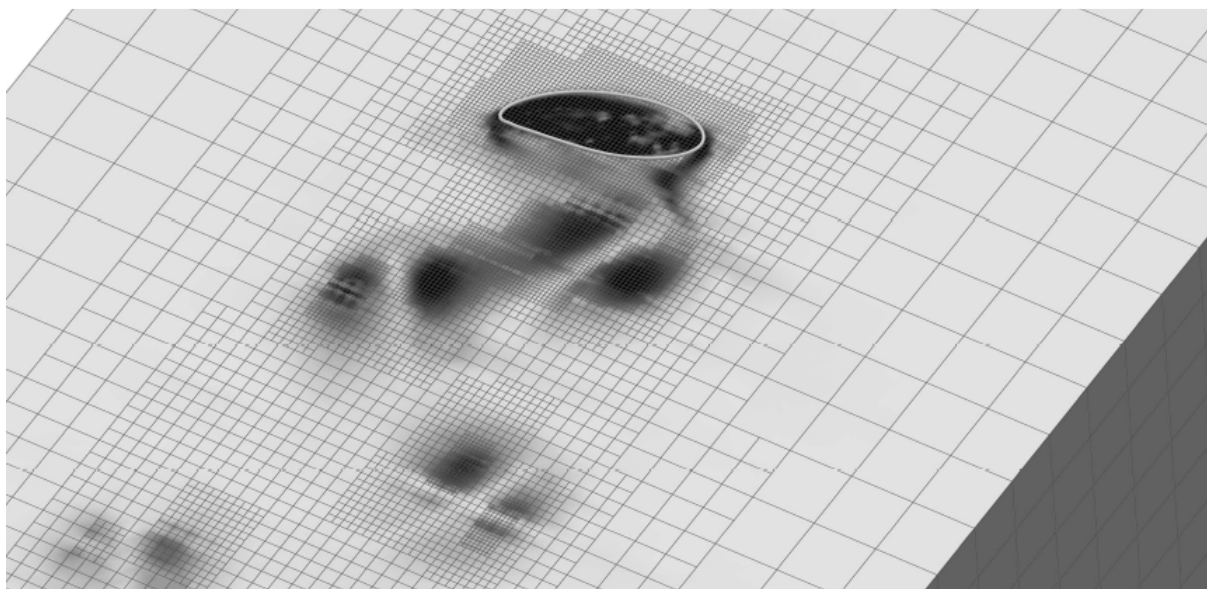


Figura 2.4 – Esquema representativo de uma hierarquia de malhas com três níveis de refinamento

A maioria dos algoritmos AMR empregam rotinas numéricas desenvolvidas para tratar dados associados com um bloco arbitrário na hierarquia da malha. O cálculo é organizado como uma coleção de operações numéricas executadas nas regiões de blocos distribuídos e operações de comunicação que transferem as informações entre as regiões; por exemplo, para preencher células fantasmas nas fronteiras dos blocos. Operações numéricas devem levar em conta fronteiras internas entre níveis propriamente aninhados, para produzir uma solução consistente e exata ao longo da hierarquia AMR. Operações de comunicação devem trocar dados ao longo de configurações de blocos em um único nível, bem como entre diferentes níveis de resolução, usando refinamento e de-refinamento de dados. Aplicações multifásicas e problemas envolvendo geometrias complexas introduzem complicações adicionais, pois, geralmente, combinam dados dependentes da malha e dados não estruturados, que requerem múltiplos procedimentos de solução que compartilhem os dados e usem diferentes padrões de comunicação.

O algoritmo AMR presente no código AMR3D em desenvolvimento pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) foi validado e verificado no trabalho de Villar (2007) e

será utilizado no presente trabalho. Maiores detalhes sobre o algoritmo de refinamento adaptativo AMR será apresentado no capítulo 4.

2.5 Transferência de energia interna

Calor é o processo de transferência de energia de um corpo para outro ou de uma região para outra dentro do mesmo corpo, exclusivamente porque existe uma diferença de temperatura entre eles.

O processo espontâneo de transferência sempre ocorre do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura. A energia interna do corpo de maior temperatura diminui, enquanto a do outro corpo aumenta, até ambos entrarem em equilíbrio térmico, onde os corpos em contato térmico deixam de trocar energia.

Não se pode dizer que corpos têm calor porque calor não é uma propriedade, mas um processo de troca de energia entre os corpos. A propriedade dos corpos que interessa neste contexto é a energia interna. Quanto maior a energia associada a cada grau de liberdade das moléculas que formam o corpo, maior é sua temperatura.

A transferência de energia em processos térmicos pode ocorrer por difusão, onde a energia é transportada pela interação entre as moléculas do fluido, a advecção onde a energia é transportada através do movimento do fluido, e a radiação, onde a energia é transportada através de ondas eletromagnéticas. No presente trabalho, não será abordado processo de transferência de energia térmica por radiação.

A equação da energia em sua forma diferencial é utilizada para simular matematicamente os mecanismos de transferência de energia. A equação da energia, em sua forma mais completa, considera além da difusão e da advecção, o fluxo de geração de energia interna (reação química, por exemplo) e a taxa de energia dissipada na forma de energia interna pelo trabalho mecânico de deformação do fluido. A equação da energia será apresentada em detalhes no capítulo 3, a seguir.

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

Neste capítulo, é apresentada a formulação matemática para solução de escoamentos incompressíveis não isotérmicos. Conforme dito nos capítulos anteriores, será utilizada a formulação desenvolvida por Villar (2007), (ver item 3.1) que foi concebida principalmente para escoamentos incompressíveis com fluidos de propriedades físicas distintas (escoamentos bifásicos), porém pode ser perfeitamente aplicada a escoamentos monofásicos ao redor de corpos imersos. A extensão do equacionamento original para a solução da Equação da Energia é descrito no item 3.2.

3.1 Equações de Navier-Stokes

O domínio físico global de análise é dividido em um domínio euleriano ($\Omega_1 \cup \Omega_2$), o qual envolve todo o meio fluido, e um domínio lagrangiano (interface, Γ), conforme apresenta a Figura 3.1.

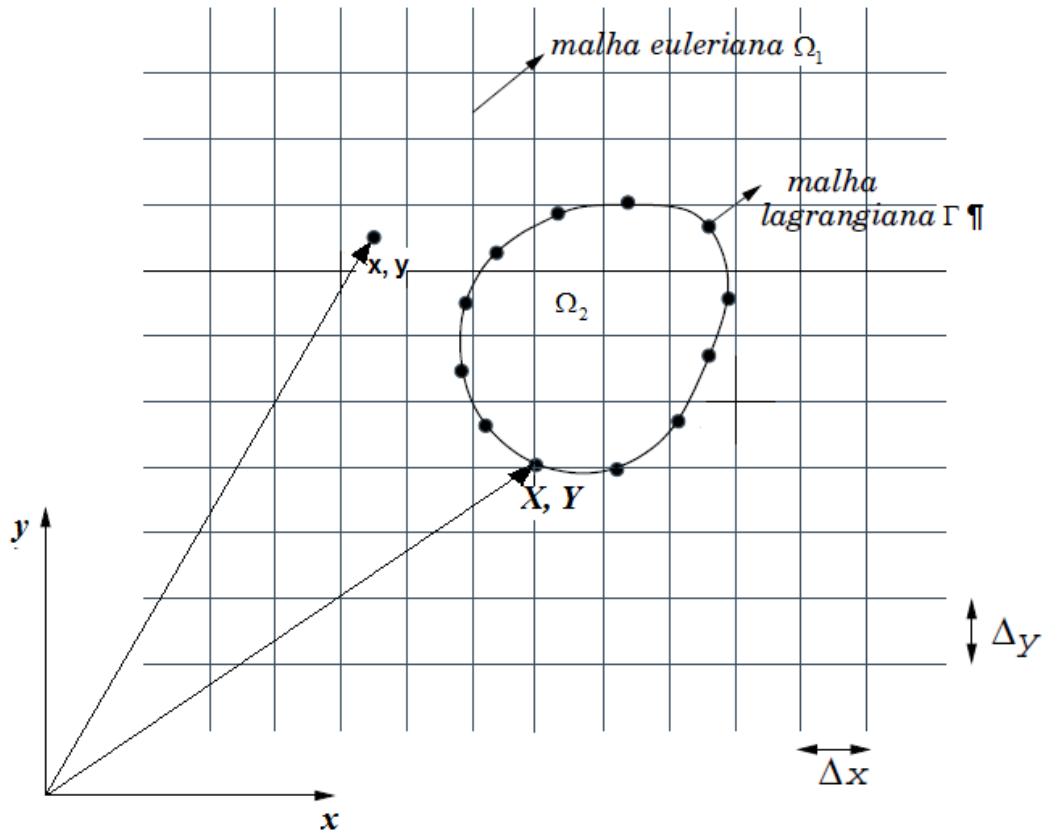


Figura 3.1 – Representação de um corpo imerso de geometria arbitrária definindo o domínio euleriano $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e o domínio lagrangiano Γ

A equação da continuidade (Equação 3.1) e as equações de Navier-Stokes (Equação 3.2), as quais compõem um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não lineares, podem ser escritas na forma vetorial para escoamentos isotérmicos incompressíveis, como (White, 1991):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

onde ρ e μ são respectivamente a massa específica e a viscosidade dinâmica do fluido.

Para escoamentos bifásicos, ρ e μ são considerados variáveis, porque existem diferentes fluidos com diferentes propriedades. Entretanto, para cada fase, ρ e μ são constantes. No presente trabalho, as propriedades do fluido serão consideradas constantes (escoamento monofásico). As características do escoamento são representadas por p (campo de pressão), \mathbf{u} (vetor velocidade), \mathbf{f} o vetor campo de força externa que atua sobre o escoamento na interface e \mathbf{g} a aceleração gravitacional.

O termo fonte \mathbf{f} é o termo responsável por fazer o escoamento “sentir” a presença da interface, seja ela uma interface líquido-líquido, líquido-gás ou líquido sólido, forçando assim o aparecimento de escoamentos coerentes internos e externos a ela.

Para interfaces líquido-sólido ou gás-sólido que é o foco do presente trabalho, o termo fonte de força euleriano ($\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$) é nulo em todo o domínio, exceto quando se aproxima dos pontos lagrangianos, onde ele passa a modelar virtualmente a presença da fronteira imersa, simulando a presença de um corpo. Com isso, não é necessário fazer uma adaptação da malha euleriana para localizar a interface. Uma vez calculado o campo de força lagrangiano ($\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$), este pode ser distribuído e, assim, transmitir a informação da presença da geometria para a malha euleriana.

A representação matemática do campo de força euleriano é feita com o auxílio da função distribuição D_h :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) D_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \Delta V, \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ é a força lagrangiana calculada sobre a interface. O vetor \mathbf{x} é a posição de uma partícula de fluido no domínio euleriano, o vetor \mathbf{X} é a posição de uma partícula de fluido que está sobre a interface e ΔV o volume do elemento lagrangiano. Maiores detalhes sobre a função distribuição serão apresentados no Capítulo 4.

Para calcular o campo de força lagrangiano ($\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$), é aplicado no presente trabalho o método da imposição direta da força (*Direct Forcing*). Este método tem como princípio utilizar a solução numérica obtida da discretização das equações de Navier-Stokes para forçar a condição de não deslizamento sobre uma interface imersa. Este tipo de metodologia se ajusta muito bem ao método do passo-fracionado e permite utilizar passos de tempo menos restritivos.

Basicamente, o *Direct Forcing* consiste em isolar o campo de força euleriano \mathbf{f} a partir da Equação 3.2, tal que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] - \rho \mathbf{g}. \quad (3.4)$$

Como a Equação 3.4 foi desenvolvida a partir da hipótese do contínuo e do domínio Γ contido em Ω , pode-se definir a força lagrangiana através da equação a seguir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) + \nabla P - \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)] - \rho \mathbf{g}, \quad (3.5)$$

onde as variáveis maiúsculas dizem respeito ao domínio lagrangiano.

Discretizando a derivada temporal da Equação 3.5, através de um esquema temporal de segunda ordem, têm-se a Equação 3.6. Maiores detalhes sobre a discretização temporal são apresentados no Capítulo 4.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \rho \left(\frac{\alpha_2 \mathbf{U}^{n+1} + \alpha_1 \mathbf{U}^n + \alpha_0 \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t} \right) + \beta_1 RHS^n + \beta_0 RHS^{n-1}, \quad (3.6)$$

onde, $RHS = \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \nabla P - \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)] - \rho \mathbf{g}$.

Somando e subtraindo um parâmetro temporário \mathbf{U}^* no operador temporal, tem-se:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \rho \left(\frac{\alpha_2 \mathbf{U}^{n+1} + \alpha_2 \mathbf{U}^* - \alpha_2 \mathbf{U}^* + \alpha_1 \mathbf{U}^n + \alpha_0 \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t} \right) + \beta_1 RHS^n + \beta_0 RHS^{n-1}. \quad (3.7)$$

O próximo passo é utilizar o princípio da superposição e resolver a Equação 3.7 em duas etapas, no mesmo passo de tempo:

$$\rho \left(\frac{\alpha_2 \mathbf{U}^* + \alpha_1 \mathbf{U}^n + \alpha_0 \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t} \right) + \beta_1 RHS^n + \beta_0 RHS^{n-1} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \rho \left(\frac{\alpha_2 \mathbf{U}^{n+1} - \alpha_2 \mathbf{U}^*}{\Delta t} \right). \quad (3.9)$$

A Equação 3.8 está definida no domínio lagrangiano, porém é resolvida no domínio euleriano. Desta forma consegue-se obter o parâmetro temporário \mathbf{U}^* , tal que:

$$\rho \left(\frac{\alpha_2 \mathbf{U}^* + \alpha_1 \mathbf{U}^n + \alpha_0 \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t} \right) + \beta_1 rhs^n + \beta_0 rhs^{n-1} = 0. \quad (3.10)$$

Fazendo uma analogia com relação ao método preditor-corretor, o parâmetro temporário \mathbf{U}^* pode ser entendido como um campo de velocidade auxiliar, ou estimada.

Resolvendo a Equação 3.10, desta maneira volta-se a Equação 3.2 com o termo fonte nulo ($\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$). Em um segundo passo, (passo corretor), se faz a “correção” do campo \mathbf{u}^* , ou seja, na Equação 3.11 é onde o campo de velocidade euleriano recebe a informação do campo de força:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (3.11)$$

Falta compreender ainda como pode ser utilizada a Equação 3.9. O cálculo de \mathbf{U}^* vem do processo de transferência de informação, de \mathbf{u}^* , no domínio euleriano, para o lagrangiano. Para isso, é utilizada uma função interpolação, dada pela equação abaixo:

$$\mathbf{U}^* = \sum_{\Omega} \mathbf{u}^* D_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \cdot h^3, \quad (3.12)$$

onde, h é o espaçamento do domínio euleriano discretizado.

A função interpolação pode ser entendida como um processo oposto ao de distribuição, isto é, enquanto que na distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os vizinhos eulerianos, na função interpolação transfere-se a informação dos pontos vizinhos para um ponto lagrangiano.

O outro termo da Equação 3.9 \mathbf{U}^{n+1} diz respeito à velocidade da fronteira imersa no tempo $n+1$. Normalmente essa velocidade é conhecida, como por exemplo, em problemas com corpos parados, $\mathbf{U}^{n+1} = 0$.

3.2 Equação da energia

A equação da energia é oriunda do balanço de energia em um volume de controle infinitesimal, considerando-se:

- A taxa de variação da energia acumulada no volume de controle;
- Os fluxos líquidos de energia pelo transporte do fluido e de transferência de energia interna por condução;
- A razão da geração de energia interna no volume de controle (reação química, dissipação elétrica);

- E a taxa de energia dissipada na forma de energia interna pelo trabalho mecânico de deformação do fluido.

Para maiores detalhes acerca da dedução da equação da energia, ver White (1991). Seja a equação da energia para escoamentos de fluidos newtonianos e incompressíveis em termos de temperatura (Equação 3.13):

$$\rho c_p \frac{DT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q''' + \Phi, \quad (i=1,2,3) \quad (3.13)$$

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \quad (3.14)$$

onde c_p é o calor específico para escoamentos incompressíveis, k a condutividade térmica do fluido, q''' a taxa de geração de energia por unidade de volume ou fonte/sumidouro de energia e, Φ a função dissipação viscosa. Este último termo refere-se à conversão de trabalho mecânico em energia térmica. A derivada DT/Dt é a derivada material da temperatura, que possui os termos de aceleração local e advectiva.

Quando as velocidades envolvidas no escoamento são pequenas e a transferência de energia é predominante, a energia cinética do fluido eventualmente se torna muito menor do que a variação da entalpia, nestas condições, pode-se desconsiderar o termo de dissipação viscosa na Equação 3.13. Considerando-se condutividade térmica constante, a equação da energia utilizada para o presente trabalho é dado conforme a Equação 3.15:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla T) = \alpha \nabla^2 T + f_T, \quad (3.15)$$

onde $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ é a difusividade térmica do fluido e f_T o termo fonte responsável por fazer o escoamento “sentir” a presença da interface térmica no escoamento.

Para a solução da Equação da Energia (Equação 3.15) é utilizado o mesmo modelo descrito no item 3.1, diferenciando-se apenas na forma de tratar a condição de contorno da interface. Ao invés de utilizar a condição de não escorregamento, é utilizada uma condição

térmica que, no presente trabalho, será a condição de contorno de primeira espécie (*Dirichet*), onde a grandeza transportada (temperatura) é imposta na interface.

Apesar de esta dissertação apresentar apenas a condição de primeira espécie, o equacionamento apresentado a seguir poderá ser modificado para os demais tipos de condição de contorno: *Neumann* (segunda espécie) e *Robin* (terceira espécie).

De forma a simplificar a apresentação da solução da Equação 3.15 considerando-se a condição de contorno de primeira espécie, faz-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = RHS + f_T, \quad (3.16)$$

$$RHS = -\mathbf{u}(\nabla T) + \alpha \nabla^2 T. \quad (3.17)$$

Para a condição de contorno de primeira espécie, a grandeza transportada $T(\mathbf{x}, t)$ é imposta na fronteira, a qual fornece a condição de referência para a avaliação do termo forçante:

$$T_{ref}(\mathbf{X}, t) \equiv T_{\Gamma}(\mathbf{X}, t), \quad (3.18)$$

onde $T_{ref}(\mathbf{X}, t)$ é a temperatura de referência, através da qual se busca calcular o termo fonte ou forçante que modela a condição de contorno. O Termo fonte $f_T(\mathbf{x}, t)$ pode ser avaliado por diferentes métodos, entretanto, aqui, será utilizado o método da forçagem direta, análogo ao utilizado para Navier-Stokes. Discretizando-se a Equação 3.16, utilizando-se o método de Euler, obtém-se:

$$\frac{T^{n+1}(\mathbf{x}, t) - T^n(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = RHS^n(\mathbf{x}, t) + f_T^{n+1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.19)$$

Adicionando e subtraindo uma temperatura estimada, $T^*(\mathbf{x}, t)$ (estimativa da variável T) no lado esquerdo da Equação 3.19, têm-se:

$$\frac{T^{n+1}(\mathbf{x}, t) - T^n(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + \frac{T^{*n+1}(\mathbf{x}, t) - T^{*n}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = RHS^n(\mathbf{x}, t) + f_T^{n+1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.20)$$

A equação acima pode ser decomposta em duas equações cujas soluções se satisfazem:

$$\frac{T^{*n+1}(\mathbf{x}, t) - T^n(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = RHS^n(\mathbf{x}, t), \quad (3.21)$$

$$f_T^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \frac{T^{n+1}(\mathbf{x}, t) - T^{*n+1}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}. \quad (3.22)$$

A Equação 3.22, válida para uma partícula material qualquer, é reescrita para uma partícula material que, em particular, encontra-se sobre a interface:

$$F_T^{n+1}(\mathbf{X}, t) = \frac{T^{n+1}(\mathbf{X}, t) - T^{*n+1}(\mathbf{X}, t)}{\Delta t}, \quad (3.23)$$

onde $T^{n+1}(\mathbf{X}, t) = T_{ref}^{n+1}(\mathbf{X}, t)$ representa a temperatura na fronteira, a qual deve ser conhecida e depende do problema em análise. Por outro lado, $T^{*n+1}(\mathbf{X}, t)$ é a estimativa da temperatura na fronteira do problema e é obtida pela interpolação de $T^{*n+1}(\mathbf{x}, t)$, o qual é dado pela solução da Equação 3.21. Esta interpolação é definida matematicamente pela seguinte equação:

$$T^{*n+1} = \sum_{\Omega} T^{*n+1} D_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \cdot h^3, \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{x} \in \Omega$ (domínio euleriano) e $\mathbf{X} \in \Gamma$ (domínio lagrangiano), conforme ilustrado na Figura 3.1.

Conhecido $F_T^{n+1}(\mathbf{X}, t)$, determinado via Equação 3.23, pode-se distribuí-la para determinar o termo forçante térmico $f_T(\mathbf{x}, t)$, usando a seguinte equação:

$$f_T^{n+1} = \sum_{\Gamma} F_T(\mathbf{X}, t) D_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \cdot \Delta V. \quad (3.25)$$

Com $f_T(\mathbf{x}, t)$ atualiza-se o campo de temperaturas euleriano com a informação do termo forçante térmico.

CAPÍTULO 4

SOLUÇÃO NUMÉRICA

Dando continuidade ao exposto nos capítulos anteriores, faz-se necessário apresentar o tratamento numérico relacionado à solução das equações apresentadas no Capítulo 3. A discretização numérica das equações de Navier-Stokes e da energia é executada em uma malha euleriana, enquanto que as equações para a interface são discretizadas por uma malha lagrangiana independente da malha euleriana. Desta forma, assim como informado no capítulo anterior, a troca de informações entre as malhas ocorre por meio de interpolações e espalhamento. Neste contexto, o presente capítulo descreve também o processo de geração de malhas bloco-estruturadas refinadas localmente.

4.1 Discretização temporal

Quanto à discretização temporal para a solução das equações de Navier-Stokes, foi utilizada a mesma estratégia semi-implícita de segunda ordem, empregada por Villar (2007) e descrita por Ascher *et. al.* (1997), conhecido como Método de Gear Extrapolado (*SBDF – Semi Backward Difference Formula*), onde o termo difusivo é tratado implicitamente e o termo advectivo explicitamente.

Assim, a discretização temporal para as equações da continuidade e de Navier-Stokes, é descrita da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\rho}{\Delta t} (\alpha_2 \mathbf{u}^{n+1} + \alpha_1 \mathbf{u}^n + \alpha_0 \mathbf{u}^{n-1}) = \lambda \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \beta_1 f(\mathbf{u}^n) + \beta_0 f(\mathbf{u}^{n-1}) - \nabla p^{n+1} + \rho \mathbf{g}, \quad (4.2)$$

onde $\lambda = |\mu|_\infty$ e $f(\mathbf{u})$ é dado pelo termo difusivo, termo advectivo e termo forçante tal que:

$$f(\mathbf{u}) = -\lambda \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (4.3)$$

Os índices 0, 1 e 2 são referentes aos tempos $n-1$, n e $n+1$ respectivamente. Os coeficientes α e β são dados por:

$$\alpha_0 = \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_0 (\Delta t_0 + \Delta t_1)}, \quad (4.4)$$

$$\alpha_1 = -\frac{\Delta t_0^2 + 2\Delta t_0 \Delta t_1 + \Delta t_1^2}{\Delta t_0 (\Delta t_0 + \Delta t_1)}, \quad (4.5)$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta t_0^2 + 2\Delta t_0 \Delta t_1}{\Delta t_0 (\Delta t_0 + \Delta t_1)}, \quad (4.6)$$

$$\beta_0 = -\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2 - \Delta t_1}, \quad (4.7)$$

$$\beta_1 = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_2 - \Delta t_1}, \quad (4.8)$$

$$\Delta t_0 = t^n - t^{n-1}, \quad (4.9)$$

$$\Delta t_1 = t^{n+1} - t^n, \quad (4.10)$$

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_0. \quad (4.11)$$

O cálculo dos coeficientes acima é aplicado para simulações com passo de tempo variável. Quando o passo de tempo é uniforme ($\Delta t_1 = \Delta t_0$), os coeficientes tornam-se constantes, cujos valores usualmente encontrados na literatura Gear (1967, 1969 e 1971) são apresentados a seguir:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad (4.12)$$

$$\alpha_1 = -2, \quad (4.13)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad (4.14)$$

$$\beta_0 = -1, \quad (4.15)$$

$$\beta_1 = 2. \quad (4.16)$$

Dadas as condições iniciais para as velocidades no primeiro passo de tempo, é necessário calcular esses valores para o segundo passo de tempo. Como Gear é um método de três passos no tempo, recorre-se ao método de Euler para resolver as equações de Navier-Stokes no segundo passo de tempo. Para que isto seja possível, considera-se $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, e $\beta_0 = 0$. A partir do terceiro passo no tempo, o Método de Gear Extrapolado é aplicado normalmente.

Para a equação da energia, foi utilizado o método de Euler, devido à sua simplicidade de implementação e também por não necessitar de solução de sistema linear, reduzindo o número de equações a serem resolvidas. Apesar de ter restrição temporal de primeira ordem, para os casos tratados no presente trabalho, o método de Euler apresentou bons resultados utilizando-se o passo de tempo calculado para a solução estável das equações de Navier-Stokes (passo de tempo variável, definido pela parte fluidodinâmica). Tais resultados podem ser conferidos no Capítulo 5.

Assim, a discretização temporal de primeira ordem para a equação da energia, para propriedades físicas constantes, é dada por:

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \alpha \nabla^2 T^n - \mathbf{u}^n (\nabla T^n) + \mathbf{f}_T^{n+1}. \quad (4.17)$$

4.2 Estabilidade

Pode-se dizer que um método numérico é instável quando quaisquer erros ou perturbações na solução são amplificados sem limites. Essas amplificações fazem com que o módulo dos valores na solução numérica cresça a cada etapa do cálculo. Essas aproximações se apresentam na forma de condições de contorno ou iniciais aproximadas de

forma incorreta, e acúmulo de erros de arredondamento. O acúmulo de tais erros pode ser evitado se os critérios de estabilidade para cada método são satisfeitos.

Devido à diversidade e complexidade das equações diferenciais parciais que descrevem os fenômenos físicos, nem sempre é possível a determinação exata de critérios de estabilidade. Recorre-se então a experimentos numéricos e a comparações com comportamento de equações mais simples, mas que descrevem fenômenos similares Fortuna (2000).

Quando se tratam de métodos semi-implícitos, segundo Badalassi (2003), é difícil estabelecer uma análise de estabilidade rigorosa, porém, também é possível obter informações valiosas sobre a robustez e estabilidade do método através de testes numéricos. Como o termo difusivo é tratado implicitamente, a restrição temporal da ordem de $O(\Delta x^2)$ é removida, permanecendo a restrição dada pelo termo advectivo, já que este é tratado explicitamente. Com base em testes numéricos e conhecendo-se as restrições temporais para as equações difusivas e advectivas, a seguinte restrição temporal é adotada para a discretização semi-implícita dada por Gear Extrapolado, considerando-se fronteiras fixas:

$$\Delta t = C \min(\Delta t_a, \Delta t_b), \quad (4.18)$$

onde,

$$\Delta t_a = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad (4.19)$$

$$\Delta t_b = \left(\frac{|u|_{\max}}{\Delta x}, \frac{|v|_{\max}}{\Delta y}, \frac{|w|_{\max}}{\Delta z} \right), \quad (4.20)$$

e C é um fator de segurança, cujo valor está no intervalo $[0,2 : 0,6]$, $|u|_{\max}$, $|v|_{\max}$ e $|w|_{\max}$ são os valores da norma do máximo das componentes $|u|$, $|v|$ e $|w|$, respectivamente. Δx , Δy e Δz são os espaçamentos da malha euleriana. Quando se trata de malha refinada localmente, estes espaçamentos são tomados em relação ao nível mais fino. A restrição dada pela Equação 4.19 é devida ao tratamento implícito do termo difusivo, enquanto que a restrição apresentada pela Equação 4.20 é devida ao tratamento explícito do termo advectivo.

Conforme mencionado no item 4.1, o passo de tempo obtido pela Equação 4.18 é utilizado para a solução da parte fluidodinâmica e para a parte térmica.

4.3 Sequência de cálculo

Conforme indicado no item 4.1, para solução da equação da energia são necessários os campos de velocidades e de temperatura no passo de tempo anterior. A solução das equações de Navier-Stokes passa pela necessidade de desacoplar a pressão da velocidade. Para isto, o método da projeção de Bell, Colella e Glaz (1989), conhecido como Método dos Passos Fracionados é aplicado, dando origem a duas equações, uma para a correção da pressão e outra para a correção da velocidade:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla q^{n+1} \right) = \frac{\alpha_2}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad (\text{passo preditor}) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{\Delta t \nabla q^{n+1}}{\alpha_2 \rho}, \quad (\text{passo corretor}) \quad (4.22)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ é a estimativa da velocidade obtida pela solução da Equação 4.23 e q^{n+1} a correção da pressão dada pela Equação 4.24.

$$\frac{\rho}{\Delta t} \left(\alpha_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \alpha_1 \mathbf{u}^n + \alpha_0 \mathbf{u}^{n-1} \right) = \lambda \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \beta_1 f(\mathbf{u}^n) + \beta_0 f(\mathbf{u}^{n-1}) - \nabla p^n + \rho \mathbf{g}, \quad (4.23)$$

$$q^{n+1} = p^{n+1} - p^n \Rightarrow p^{n+1} = p^n + q^{n+1}. \quad (4.24)$$

Assim o procedimento principal de cálculo pode ser resumido na seguinte sequência:

- Entrar com as condições de contorno e iniciais (velocidades, pressão e temperatura);
- Calcular a estimativa do campo de temperatura euleriano $T^{*n+1}(\mathbf{x}, t)$ através da Equação 3.21;
- Interpolar a estimativa da temperatura euleriana $T^{*n+1}(\mathbf{x}, t)$ para o domínio lagrangiano, utilizando-se a Equação 3.24;
- Avaliar a força no domínio lagrangiano (para a temperatura) $F_T^{n+1}(\mathbf{X}, t)$, através da Equação 3.23;
- Distribuir a força, encontrando o termo forçante térmico $f_T^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ através da Equação 3.25;

- Corrigir o campo de temperatura com base na temperatura estimada $T^{*n+1}(\mathbf{x}, t)$ e o termo forçante $f_T^{n+1}(\mathbf{x}, t)$:

$$T^{n+1}(\mathbf{x}, t) = T^{*n+1}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\Delta t} f_T^{n+1}(\mathbf{x}, t); \quad (4.25)$$

- Estimar o campo de velocidade dado pela solução da Equação 4.23;
- Com o campo de velocidade estimado, interpolar a estimativa da velocidade \mathbf{u}^* para o domínio lagrangiano (Equação 3.12);
- Avaliar a força no domínio lagrangiano. (Equação 3.9);
- Distribuir a força (Equação 3.3);
- Corrigir a velocidade estimada, adicionando o efeito do campo de força (Equação 3.11);
- Calcular a correção de pressão (Equação 4.21);
- Corrigir a velocidade (Equação 4.22);
- Corrigir a pressão (Equação 4.24);
- Avaliar a continuidade ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$);
- Avançar para o próximo passo no tempo.

4.4 Discretização espacial

O domínio computacional do presente trabalho consiste em um cubo de dimensões $[A1, B1] \times [A2, B2] \times [A3, B3]$. Assim, as malhas utilizadas são cartesianas e orientadas nas direções x , y e z . Considerando um plano x - y , inicialmente o domínio é discretizado com uma malha regular com $n_x \times n_y$ células computacionais e espaçamentos $\Delta x = \frac{b_1 - a_1}{n_x}$ e

$\Delta y = \frac{b_2 - a_2}{n_y}$, nas direções x e y respectivamente.

Por definição, o centro de cada célula computacional é dado por:

$$x_{i,j} = (x_i, y_j) = \left[a_1 + \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta x, a_2 + \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta y \right], \quad (4.26)$$

para $1 \leq i \leq nx$ e $1 \leq j \leq ny$.

Para comportar as condições de contorno, emprega-se uma camada adicional de células ao redor do domínio, conhecidas como células fantasmas, cujos centros são dados por (x_0, y_j) , (x_{nx+1}, y_j) , para $0 \leq j \leq ny + 1$ e (x_i, y_0) , (x_i, y_{ny+1}) , para $0 \leq i \leq nx + 1$.

A definição de malha deslocada é utilizada para definir as posições das variáveis nas células. Assim, variáveis escalares como pressão e temperatura são calculadas no centro da célula computacional. As variáveis vetoriais, como velocidades e forças, são posicionadas nos centros das faces da célula. As pressões são armazenadas de tal forma que seu gradiente é a força motriz da velocidade armazenada entre dois pontos de pressão. É, sem dúvida, um arranjo fisicamente consistente, pois, entre outros fatores, as velocidades estão localizadas adequadamente para o balanço de massa, cujo volume para balanço é um volume centrado na pressão.

A Figura 4.1 apresenta esquematicamente o domínio computacional no plano x-y, onde as células mais escuras representam as células fantasmas.

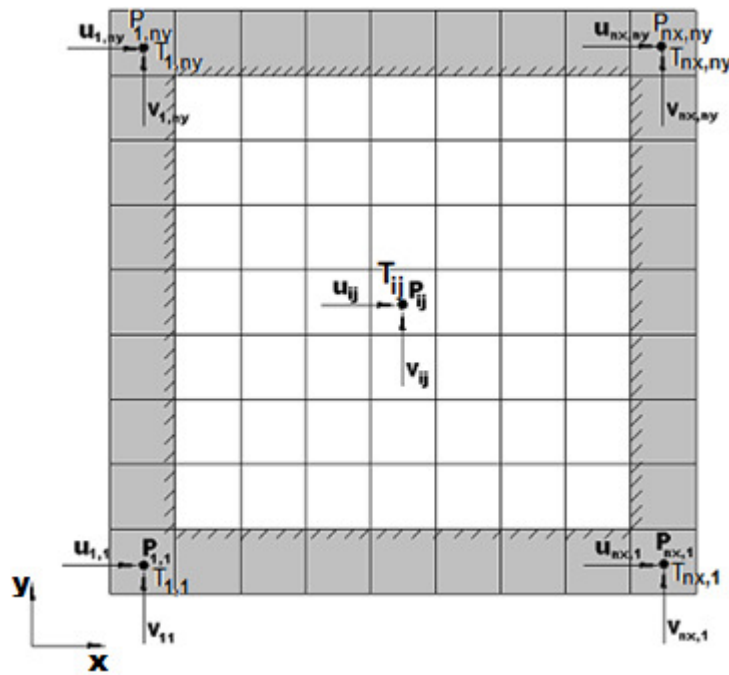


Figura 4.1 – Desenho esquemático do domínio computacional (plano x-y, malha uniforme)

Essas malhas cartesianas podem ser uniformes, formadas por um único bloco, ou podem ser compostas formadas por vários blocos/*patches*. As últimas consistem em uma sequencia de malhas devidamente agrupadas e progressivamente refinadas nas regiões de interesse à uma razão de 2 ($r = 2$). Esta hierarquia de malhas é composta de níveis de

refinamento gerados a partir de um nível base a um nível mais refinado, de forma que, à medida que certas propriedades físicas que descrevem o escoamento vão se alterando, as malhas tendem a acompanhar estas propriedades, definindo assim o caráter adaptativo.

Para as malhas pertencentes aos demais níveis de refinamento, o espaçamento é definido por:

$$\Delta x_{l+1} = \frac{\Delta x_l}{r}, \quad (4.27)$$

$$\Delta y_{l+1} = \frac{\Delta y_l}{r}, \quad (4.28)$$

onde l identifica os demais níveis hierárquicos que são progressivamente refinados e l_{base} representa o nível base, o qual é uma malha fixa que cobre todo o domínio, assim $l_{base} \leq l \leq l_{top}$.

A discretização das equações de Navier-Stokes e equação da energia requerem a discretização dos operadores divergente, gradiente e laplaciano. No presente trabalho, tais operadores são discretizados utilizando-se diferenças finitas centradas.

4.5 Refinamento local adaptativo

Esta seção apresenta o processo de geração de malhas bloco-estruturadas refinadas localmente ou, simplesmente, malhas compostas. O procedimento apresentado nas seções anteriores é estendido sem qualquer restrição das malhas uniformes para as malhas refinadas localmente.

Uma malha bloco-estruturada é formada por um conjunto de blocos (paralelepípedos) discretizados em diferentes níveis de refinamento. As faces de cada bloco estão aninhadas com as faces dos eixos coordenados do domínio computacional e cada bloco é um conjunto de células computacionais. Estas malhas são formadas basicamente por pontos onde o erro da solução da malha mais grossa é elevado, devido a fenômenos localizados, como, por exemplo, alta vorticidade e presença de interface. A Figura 4.2 apresenta uma malha bloco-estruturada tridimensional, com malha base e mais dois níveis de refinamento.

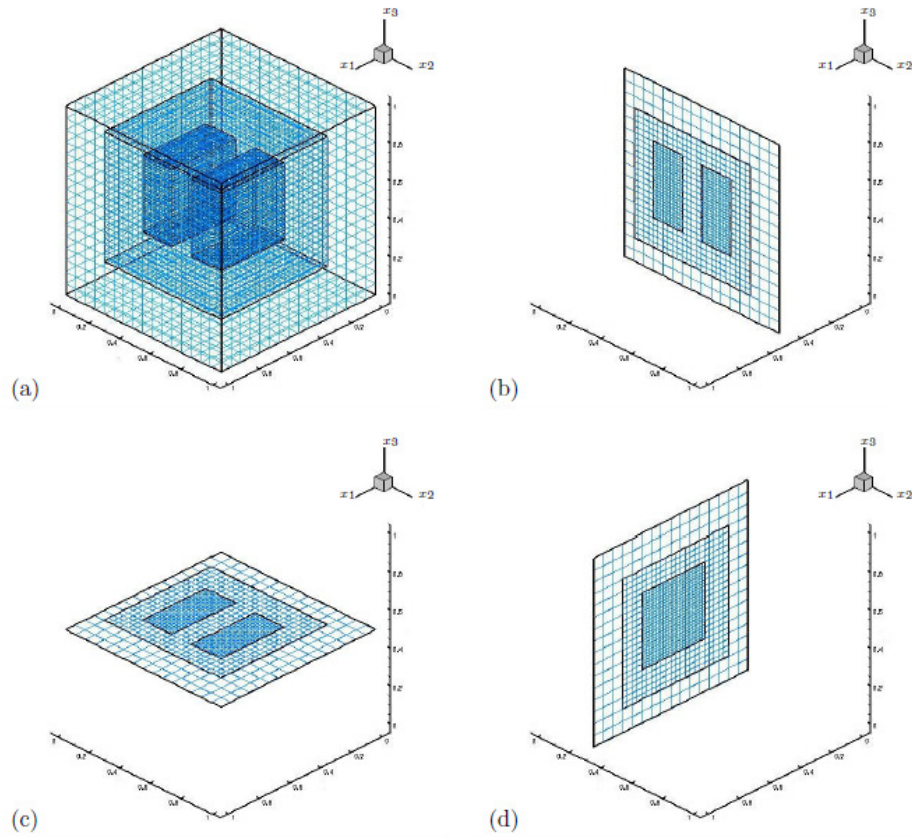


Figura 4.2 – Malha bloco-estruturada em um domínio computacional $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ com dois níveis de refinamento: (a) malha tridimensional, (b) corte na direção $x_1 = 0,42$, (c) corte na direção $x_3 = 0,45$ e (d) corte na direção, $x_2 = 0,3$ (Nós, 2007)

Tem-se que as malhas compostas são definidas por uma sequencia hierárquica de malhas agrupadas, progressivamente refinadas, as quais formam níveis que vão de $l = l_{base} + 1, \dots, l_{top}$, onde l_{top} define o nível mais fino. Se $G_{l,k}$, $k = 1, 2, \dots, n_l$, é o conjunto de malhas retangulares com um mesmo espaçamento $(\Delta x, \Delta y)$, no qual os seus lados são orientados de acordo com os eixos de coordenadas, então o nível l é definido por:

$$\{\text{nível } l\} = \bigcup_k G_{l,k}, \quad (4.29)$$

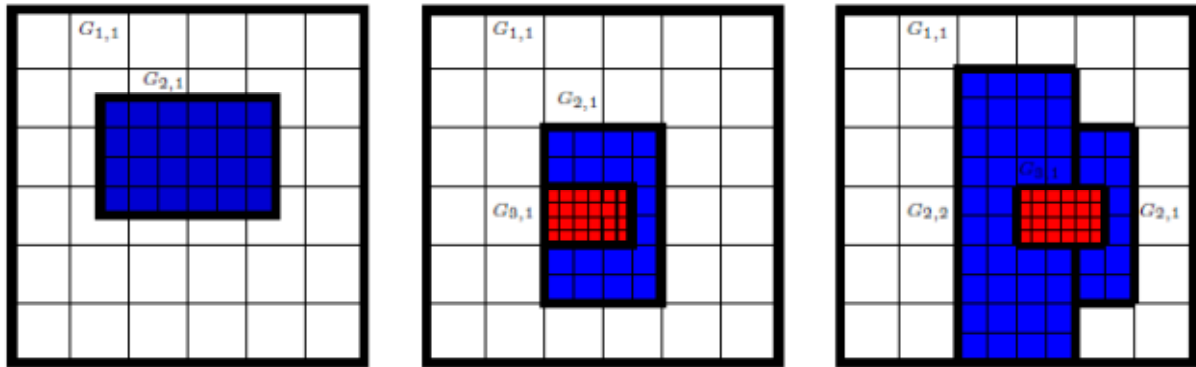
onde $G_{l,j} \cap G_{l,k} = \emptyset$, $j \neq k$, isto é, que duas malhas diferentes não se interpõem. O espaçamento para o nível $l+1$ deve ser menor que o nível l , diferenciados por um fator inteiro $r > 1$, conforme visto na Equação 4.27 e Equação 4.28. Como na malha uniforme, os centros das células nas malhas cartesianas em um dado nível l são os pontos

$x_{i,j} = \left[a_1 + \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta x_l, a_2 + \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta y_l \right]$. Entretanto, é importante notar que, somente para o nível $l_{base}=1$, o domínio é completamente recoberto por um conjunto de blocos retangulares.

As malhas para diferentes níveis em uma hierarquia precisam estar “corretamente aninhadas”, isto significa que as duas propriedades abaixo precisam ser satisfeitas:

1. Os cantos de uma malha mais fina coincidem com os cantos das células pertencentes a um nível imediatamente abaixo;
2. Malhas mais finas devem estar no interior da união das malhas do nível abaixo, exceto quando tocam as bordas do domínio físico.

A Figura 4.3(a) e Figura 4.3(b) são exemplos, em duas dimensões, com dois e três blocos em níveis diferentes, que não estão propriamente aninhados. A primeira restrição é violada na Figura 4.3(a) e a segunda, é violada na Figura 4.3(b). A Figura 4.3(c) mostra três níveis diferentes propriamente aninhados. Vale observar que estas propriedades não estão restritas à apenas uma malha, ou seja, toda a malha, em qualquer nível deve obedecer tais propriedades.



(a) Primeira restrição violada (b) Segunda restrição violada (c) Malha propriamente aninhada

Figura 4.3 – Exemplos de malhas não propriamente aninhadas (a)-(b) e malha propriamente aninhada (c)

No presente trabalho, as células são selecionadas utilizando-se a vorticidade e a posição da interface (função indicadora). Conhecendo-se a vorticidade em cada célula $(\omega_{i,j})$, as células são selecionadas quando:

$$\frac{|\omega_{i,j}|}{|\omega|_{\max}} \geq \varepsilon, \quad (4.30)$$

onde $|\omega|_{\max}$ é a norma do máximo da vorticidade.

O valor de ε adotado para a presença de interface é igual a 99%. Assim, todos os pontos próximos à interface são selecionados, tanto internamente quanto externamente.

Após selecionar as células, as malhas que pertencerão a um dado nível l são geradas através da aplicação de um algoritmo de agrupamento desenvolvido por Berger e Rigoutsos (1991). Tal algoritmo tem como finalidade agrupar pontos de forma que uma larga região seja incluída em várias malhas, definindo melhor a região de interesse. A Figura 4.4 ilustra esta situação. Se uma larga região for fixada em somente uma malha (representada pelas linhas tracejadas na Figura 4.4), uma grande área não aceitável de refinamento será definida, tornando o método dispendioso. Com a subdivisão das malhas, somente a região de interesse é refinada (ver retângulos de linha contínua na Figura 4.4).

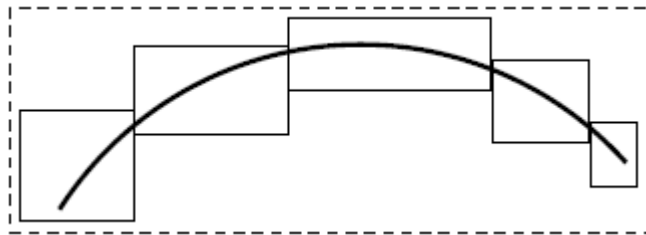


Figura 4.4 – Agrupamento ao redor de uma interface

Combinando elementos de visão computacional e teoria de reconhecimento de padrões, dado um conjunto de células selecionadas, o algoritmo de Berger e Rigoutsos (1991) retorna um conjunto de blocos retangulares que não se sobrepõem, onde cada bloco satisfaz um dado critério de eficiência. Em termos gerais, este algoritmo detecta a transição entre uma região selecionada e uma região com células não selecionadas, detectando o melhor lugar para se aplicar a divisão das malhas.

Cria-se então o menor retângulo que contém os pontos selecionados ao redor das células que foram selecionadas (casco convexo retangular alinhado ao eixo cartesiano).

Por se tratar de escoamentos transientes, fenômenos específicos tendem a se movimentar durante o cálculo computacional. Na tentativa de acompanhar tais fenômenos, o refinamento aqui aplicado passa a ser adaptativo e dinâmico, no qual a malha base permanece fixa e as outras malhas acompanham o desenvolvimento do fenômeno em estudo. Desta forma, o refinamento local adaptativo permite a adição ou a remoção de

pontos, quando se faz necessário, recorrendo apenas a interpolações lineares para o transporte da solução entre as diferentes configurações de malhas.

Quando a solução avança no tempo, o algoritmo de remalhagem é chamado a cada intervalo de passos de tempo (10 em 10 passos de tempo, por exemplo), para redefinir as malhas I_{base+1} a I_{top} . Caso haja algum novo ponto a ser selecionado, o algoritmo de geração de malhas é chamado e novas malhas são criadas. Os dados desta nova malha são inicialmente interpolados da malha base e posteriormente cobertos pelos dados da malha composta antiga, somente nas regiões em que apresentam intersecção. Este procedimento é feito nível a nível. Após a substituição, a malha composta antiga é deletada e a solução é avançada no tempo.

4.6 Células fantasmas

As células fantasmas permitem armazenar os valores para as condições de contorno, essas células são definidas de forma a evitar que os operadores diferenciais sejam redefinidos nas bordas das malhas.

Para determinar os valores para as células fantasmas com variáveis centradas (temperatura e pressão), polinômios quadráticos são escolhidos para o processo de interpolação entre a interface fina/grossa. O valor da célula fantasma para a malha fina é dado pela extrapolação das células pertencentes ao nível mais fino, seguidos pela interpolação entre as células do nível grosso. O resultado final surge após uma interpolação entre o valor extrapolado, o valor da célula fina e o valor interpolado da célula grossa. No presente trabalho, os mesmos polinômios usados por Villar (2007) são também aqui utilizados.

O procedimento das células fantasmas considerando variáveis deslocadas (velocidades) é similar ao procedimento adotado para variáveis centradas, ou seja, interpolações seguidas de injeção e recobrimento com as condições reais de contorno, entretanto, como as componentes das velocidades estão localizadas nas faces das células, há uma diferença na forma de tratar as bordas leste e oeste das bordas norte e sul, os quais geram coeficientes polinomiais distintos.

4.7 Acoplamento lagrangiano-euleriano

A função Delta de Dirac é aproximada por uma função proposta inicialmente por Peskin (1977). A aproximação bidimensional para a função delta é dada pelo produto:

$$\delta^2(x - X) = \delta_x(x - X)\delta_y(y - Y). \quad (4.31)$$

Os pontos lagrangianos não coincidem com os pontos pertencentes ao domínio euleriano. Em geral, isso faz com que a implementação computacional da função Delta de Dirac seja inapropriada, uma vez que poderá levar à formação de um campo de forças descontínuo sobre a interface. Para contornar esse problema, deve-se substituir a função δ por uma aproximação também discreta, que permite uma distribuição suave da força lagrangiana sobre o domínio euleriano:

$$D_{ij}(X) = \prod_{m=1}^n \frac{[\phi(X - x)]/\Delta}{\Delta}, \quad (4.32)$$

onde Δ é o espaçamento devido a discretização do domínio euleriano e n identifica o domínio bidimensional ou tridimensional. Se $n=2$, a Equação 4.38 é reescrita da seguinte forma:

$$D_{ij}(X) = \left[\frac{1}{\Delta x} \phi\left(\frac{x - X}{\Delta x}\right) \right] \cdot \left[\frac{1}{\Delta y} \phi\left(\frac{y - Y}{\Delta y}\right) \right]. \quad (4.33)$$

A função distribuição D_{ij} age como uma função peso, tendo um comportamento semelhante a uma função Gaussiana (Figura 4.5).

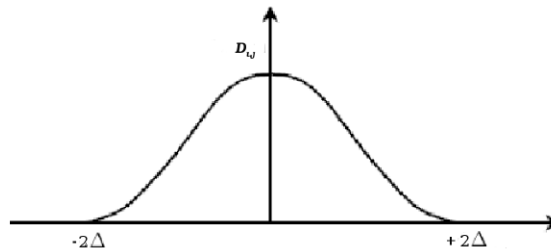


Figura 4.5 – Função distribuição D_{ij} do tipo Gaussiana, aplicada em um domínio bidimensional ($n=2$)

Adotando-se o processo de espalhamento como exemplo para a aplicação da função distribuição discretizada, o termo fonte de força discretizado (dado pela Equação 3.3) é representado por:

$$\mathbf{f}(x,t) = \sum_k D_{ij}(x - X) \mathbf{F}(X,t) \Delta_s(X), \quad (4.34)$$

onde, $\Delta_s(X)$ é o volume por unidade de profundidade, centrado em cada ponto lagrangiano, D_{ij} é a função de interpolação/espalhamento, com propriedades de uma função Gaussiana, a qual determina que fração de uma quantidade de interface deve ir para cada célula vizinha. Esta equação é válida para escoamentos bidimensionais, mas pode ser expandida para escoamentos tridimensionais.

Para definir a função ϕ , uma função trigonométrica é escolhida (Peskin, 1977), onde para escoamentos bidimensionais é dado por:

$$\phi(r) = \begin{cases} (1/4\Delta)(1 + \cos(\pi r/2\Delta)), & |r| < 2\Delta \\ 0, & |r| \geq 2\Delta \end{cases} \quad (4.35)$$

onde r é o raio de influência da função distribuição, podendo ser $(X_k - x_i)/\Delta$ ou $(Y_k - y_i)/\Delta$ dependendo da direção para qual a propriedade é distribuída, sendo Δ o tamanho da malha euleriana na direção calculada, ou seja $\Delta = (\Delta x, \Delta y)$. x_i e y_i são as coordenadas de um ponto x do domínio euleriano e X_k e Y_k são as coordenadas para um dado ponto k pertencente a interface.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados de validação e verificação da solução de alguns escoamentos, utilizando-se a modelagem matemática e a metodologia numérica apresentadas nos capítulos anteriores. Conforme descrito no Capítulo 4, o modelo matemático foi solucionado utilizando-se malhas uniformes e malhas adaptativas bloco-estruturadas, refinadas localmente, aplicadas a escoamentos tridimensionais, incompressíveis, transientes e não isotérmicos. A solução numérica foi inicialmente implementada em um código próprio baseado em malha cartesiana bidimensional e espaçamento uniforme. Posteriormente, a solução foi estendida para o código AMR3D, baseado em malha adaptativa bloco estruturada tridimensional, que está em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab). Para o código AMR3D, também foi simulado um caso com malha uniforme tridimensional.

Além dos resultados de verificação do código computacional, o presente capítulo apresentará resultados qualitativos e quantitativos para cavidade com tampa deslizante, onde a tampa é aquecida, e também escoamento em duto de seção circular, onde a parede do duto é aquecida. Em todos os casos apresentados neste capítulo, a temperatura é transportada de forma passiva, onde o efeito de empuxo é desconsiderado (convecção forçada).

5.1 Verificação do código computacional

Programas (ou códigos) computacionais devem realizar simulações numéricas com boa representação do problema em estudo. Para alcançar tal objetivo, testes de verificação e de validação são indispensáveis. Em dinâmica dos fluidos computacional, os termos verificação e validação têm significados diferentes e representam conceitos distintos de avaliação, e um não pode ser substituído pelo outro.

De acordo com Steinberg e Roache (1985), verificação é um estudo do programa computacional, que consiste em garantir que as equações escolhidas para um dado modelo são resolvidas corretamente, quantificando o erro numérico da solução. Desta forma, verificação é um exercício puramente matemático e nenhum realismo físico precisa ser satisfeito.

Por outro lado, validação envolve comparações entre soluções numéricas e resultados experimentais, tendo como principal objetivo avaliar se as equações utilizadas no modelo são adequadas para representar o problema físico de interesse (item 5.2 a 5.5). Portanto, enquanto que na verificação não é importante satisfazer as leis físicas, na validação satisfazer o realismo físico é o mais importante.

Uma boa prática de verificação de código é simular um problema que tenha solução exata e que imite o problema físico de interesse, isto é, satisfazendo condições de contorno idênticas, sem simplificações na geometria ou nas equações. Este tipo de solução exata pode ser obtido através do método das soluções manufaturadas (MMS), como descrito em Roache (1998) e Roy (2005). Este método de verificação envolve a introdução de termos fonte nas equações governantes, criando um problema não realístico, mas que possui uma solução analítica. Esta solução analítica (manufaturada) pode ser usada para comparações com as soluções numéricas e um teste de convergência de malhas (TCM) pode dar a ordem de precisão dos cálculos. Após ter sucesso neste teste, o código estará verificado e bastará remover os termos fontes das equações para que o programa possa ser utilizado na simulação do problema físico de interesse. Para maiores detalhes sobre verificação de códigos computacionais em CFD (*Computational Fluid Dynamics*), consultar os trabalhos de Villar (2007) e também Villar e Da Silva (2010).

No presente trabalho, testes de verificação por soluções manufaturadas foram realizados, considerando malha uniforme e malha composta com dois níveis de refinamento. A solução das equações de Navier-Stokes, no código AMR3D, foi extensivamente verificada por Villar (2007), confirmando a segunda ordem de convergência da solução. Desta forma, somente a verificação da solução da equação da energia será apresentada.

Matematicamente, a ordem de convergência obtida pelo teste de solução manufaturada se dá conforme descrito abaixo:

Seja a solução manufaturada (exata) para a temperatura e velocidades:

$$T_e = \sin(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t), \quad (5.1)$$

$$u_e = \sin(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2, \quad (5.2)$$

$$v_e = -\cos(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2, \quad (5.3)$$

$$w_e = \frac{w_1 \cos(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2}{w_3} + \frac{w_2 \cos(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2}{w_3}, \quad (5.4)$$

onde, x , y e z são as coordenadas de posição no espaço, t o tempo físico e $w_1 = 2$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2$ e $w_4 = 1$. Os parâmetros w_1 , w_2 , w_3 e w_4 são constantes escolhidas pelo usuário, onde é possível controlar o peso dos termos espaciais e temporais, ou até mesmo desligá-los, considerando algumas destas constantes iguais a zero.

Adicionando-se um termo fonte à equação da energia na forma adimensional e optando aqui, por simplificação, propriedades físicas constantes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla T) = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T + TF, \quad (5.5)$$

$$TF = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla T) - \frac{1}{Pe} \nabla^2 T, \quad (5.6)$$

onde, Pe é o número de Peclet, definido em linhas gerais como um número adimensional que representa a razão entre os efeitos advectivos e difusivos no transporte de energia interna. O número de Peclet pode ser definido por $Pe = Re.Pr$, onde Re é o número de Reynolds e Pr é o número de Prandtl. Matematicamente, o número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad (5.7)$$

onde, U é a velocidade de escoamento do fluido, ρ a massa específica do fluido e μ a viscosidade dinâmica do fluido. L é a dimensão característica do escoamento, onde, para um duto circular, a dimensão característica é o diâmetro do duto e, para uma cavidade de

lados iguais, a largura da cavidade. O número de Peclet também pode ser matematicamente representado por:

$$Pe = \frac{UL}{\alpha}, \quad (5.8)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad (5.9)$$

sendo, α o coeficiente de difusividade térmica do fluido, k a condutividade térmica do fluido e c_p o calor específico à pressão constante.

De forma a reduzir a probabilidade de ocorrência de erros algébricos, utilizou-se um *software* de manipulação simbólica, para encontrar a solução analítica da Equação 5.6, definindo o termo fonte TF . Para o presente trabalho, o termo fonte obtido é dado por:

$$\begin{aligned} TF = & \cos(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t) w_4 + \\ & \sin(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2 \cos(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t) w_1 - \\ & \cos(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2 \cos(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t) w_2 + \\ & \left(\frac{w_1 \cos(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2}{w_3} + \frac{w_2 \cos(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)^2}{w_3} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\frac{\cos(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t) w_3 + \sin(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t) w_1^2 + \sin(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t) w_2^2 + \sin(w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t) w_3^2}{Pe}$$

De posse de TF , resolve-se a Equação 5.5 numericamente, encontrando T . O erro numérico é calculado pela norma euclidiana (L_2), tal que:

$$L_2 = \left(\sum |\phi_k|^2 \Delta x \Delta y \Delta z \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.11)$$

$$\phi_k = T_e - T, \quad (5.12)$$

sendo, ϕ_k avaliado no centro da célula k , cujas dimensões são Δx , Δy e Δz .

Baseando-se no procedimento descrito acima, calcula-se a norma euclidiana L_2 , considerando-se um espaçamento de malha h e $h/2$. Desta forma, a ordem de convergência (q) é obtida pela razão entre as normas euclidianas r_e , conforme a equação abaixo:

$$r_e = \frac{(L_2)_h}{(L_2)_{h/2}} \approx 2^q. \quad (5.13)$$

De acordo com a equação acima, para métodos de ordem $q = 1, 2$ e 3 , a razão entre os erros r_e deverá ser aproximadamente 2, 4 e 6, respectivamente.

Seguindo-se o procedimento descrito neste capítulo, calculou-se a norma euclidiana para a solução da equação da energia transiente, com propriedades constantes e condição de contorno de primeira espécie (Dirichlet), que consiste na aplicação direta do valor da variável no bordo do domínio. O passo de tempo utilizado nas simulações é variável, calculado para satisfazer as condições de estabilidade conforme descrito no item 4.2 do presente trabalho.

A Tabela 5.1 apresenta os resultados de verificação para malha uniforme e malha composta. Para a malha composta, foram considerados dois níveis de refinamento com razão de refinamento igual a 2.

Tabela 5.1 – Teste de convergência para a variável temperatura, na malha uniforme (esquerda) e na malha composta (direita)

Malha Uniforme			Malha Composta		
Malha	Norma L_2	r_e	Malha	Norma L_2	r_e
16 x 16 x 16	4,56E-003	***	16 x 16 x 16L2	2,30E-003	***
32 x 32 x 32	2,14E-003	2,1	32 x 32 x 32L2	1,16E-003	2,0
64 x 64 x 64	1,03E-003	2,1	64 x 64 x 64L2	6,15E-004	1,9
128 x 128 x 128	5,13E-004	2,0	128 x 128 x 128L2	3,36E-004	1,8

Nota-se pela Tabela 5.1 que, tanto para a malha uniforme, quanto para a malha composta, os resultados apresentam ordem de convergência de primeira ordem, conforme esperado para a solução da equação de energia, utilizando-se o método de Euler para a discretização temporal (ver item 4.1).

Nota-se que os valores de r_e para a malha composta, à medida que a malha base aumenta, ficaram um pouco abaixo do valor 2 quando comparado com a malha uniforme. Pode-se afirmar aqui, que isto ocorre pelo fato do refinamento localizado apresentar uma maior quantidade de células computacionais, em comparação com a malha uniforme, restringindo um pouco mais o critério de estabilidade (ver item 4.2). Isto pode ser mitigado ajustando-se o coeficiente de segurança C apresentado na Equação 4.18.

É importante dizer que, para os casos estudados neste trabalho, a discretização temporal da equação da energia pelo método de Euler (primeira ordem) apresentou

resultados satisfatórios, entretanto, para casos mais complexos, faz-se necessário a utilização de esquemas temporais mais robustos, como, por exemplo, os métodos semi-implícitos de segunda ordem.

5.2 Escoamento não isotérmico bidimensional

Conforme apresentado no Capítulo 4, o presente trabalho resolve a equação da energia utilizando-se o método das diferenças finitas para discretização espacial e o método de Euler de primeira ordem para discretização temporal, com malha cartesiana tridimensional, adaptativa e refinada localmente; sendo esta solução incorporada ao código AMR3D, que está em desenvolvimento pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia.

O primeiro passo realizado na busca deste objetivo foi a elaboração de um código próprio para solução do escoamento bidimensional, incompressível, não isotérmico e com propriedades físicas constantes, em uma cavidade com tampa deslizante. A elaboração deste código objetivou-se introduzir e desenvolver as técnicas de discretização (temporal e espacial), e programação orientada a objeto, utilizando-se a linguagem FORTRAN 90, que é a linguagem onde o código AMR3D está sendo desenvolvido.

A partir da análise dos resultados obtidos pelo código próprio, foi possível estudar a dinâmica de transporte do escalar temperatura, para o caso da cavidade com tampa deslizante. Além do exposto acima, o código próprio auxiliou no entendimento dos efeitos relacionados à variação de parâmetros numéricos, como malha e passo de tempo, na precisão dos resultados, servindo então como base sólida para o desenvolvimento do código implementado no AMR3D.

A cavidade possui dimensões 1×1 (adimensional) e o domínio computacional cartesiano utilizado na solução do escoamento possui dimensões $\Omega = [0;1] \times [0;1]$. Utilizou-se malha uniforme e condições de contorno de primeira espécie, onde as temperaturas são impostas nas laterais da cavidade, sendo a tampa permanentemente aquecida com temperatura $T = 1$ (adimensional) e as demais arestas permanentemente resfriadas com temperatura $T = 0$ (adimensional).

A Figura 5.1 e Figura 5.2 apresentam os perfis de temperatura, para várias resoluções de malha, no regime permanente. Os perfis foram extraídos de linhas horizontais ($y^* = 0,5$) e verticais ($x^* = 0,5$) que cortam o centro da cavidade. Os perfis foram comparados com resultados de referência oriundos dos trabalhos de Nallasamy & Prasad (1977) e Santos (2007).

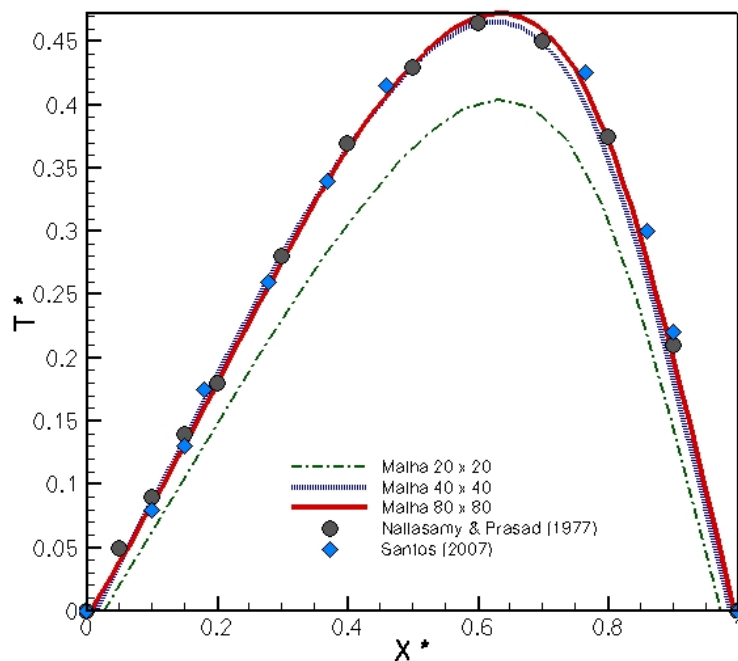


Figura 5.1 – Perfil de temperatura adimensional (T^*), ao longo da linha horizontal extraída na posição $y^* = 0,5$. $Re = 100$ e $Pr = 1$, regime permanente

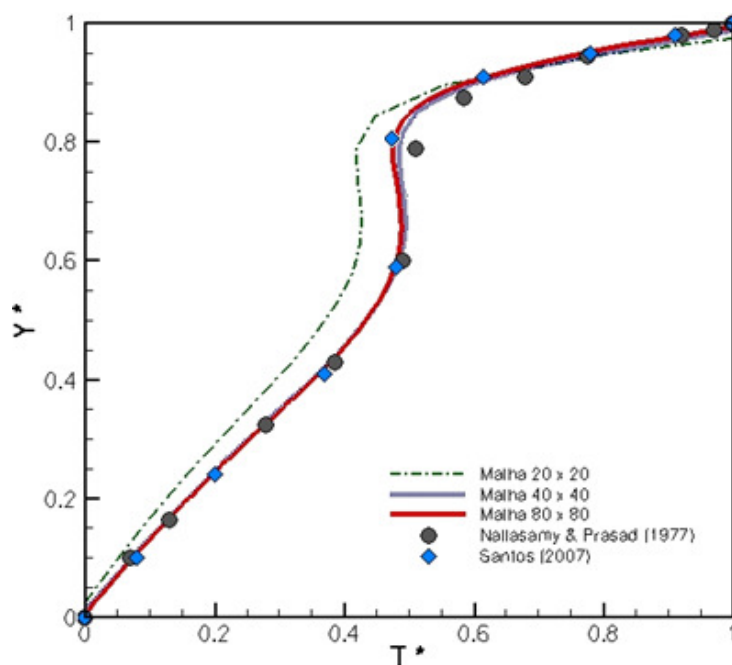


Figura 5.2 - Perfil de temperatura adimensional (T^*), ao longo da linha vertical extraída na posição $x^* = 0,5$. $Re = 100$ e $Pr = 1$, regime permanente

Nota-se pela Figura 5.1 e Figura 5.2, que à medida que a resolução de malha aumenta, mais os resultados se aproximam dos valores de referência, como os resultados

obtidos pela malha 40 x 40 e 80 x 80 são próximos, desta forma, não é vantajoso continuar refinando a malha, pois o ganho em exatidão de resultados não justificaria o aumento do custo computacional.

Considerando a solução obtida na simulação com resolução de malha 80 x 80, o campo de temperatura é apresentado e comparado com a solução obtida por Santos (2007), conforme Figura 5.3, a seguir.

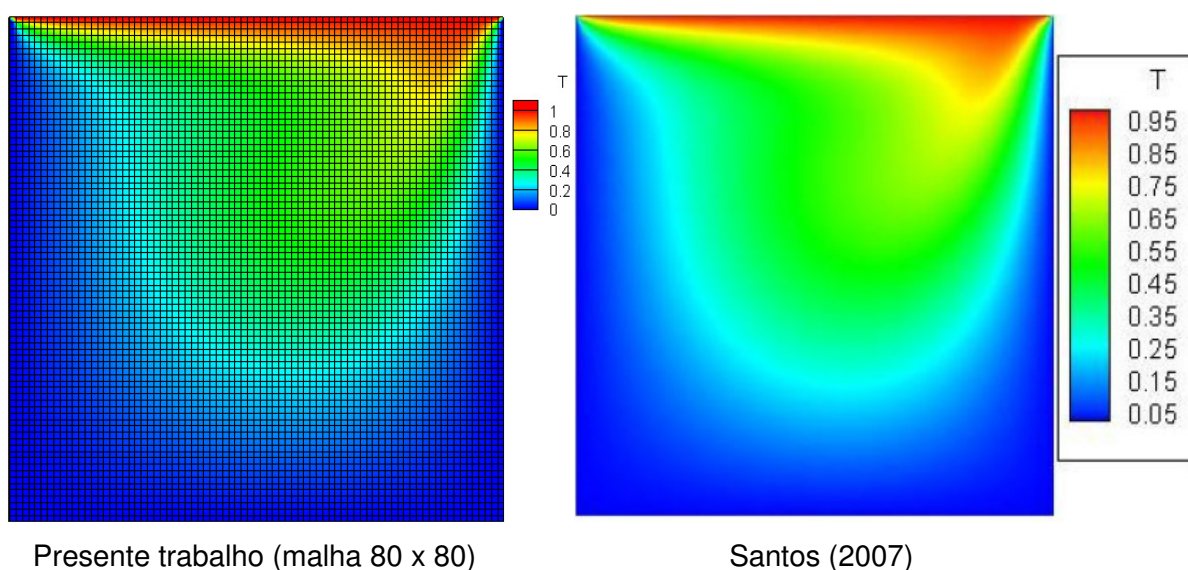


Figura 5.3 – Comparativo do campo de temperatura, regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, malha uniforme (80 x 80), com os resultados apresentado por Santos (2007)

Analisando a topologia do campo de temperaturas para o escoamento (Figura 5.3), a mesma apresenta um comportamento muito próximo ao campo apresentado por Santos (2007). As isotermais indicam que os maiores gradientes de temperatura estão presentes nas regiões superiores, visto que o contorno aquecido situa-se nesta região (região da tampa). Além disso, nos cantos superiores, a recirculação do fluido intensifica mais ainda este gradiente. A região mais aquecida está na região próxima ao canto superior direito que recebe a incidência de uma quantidade de fluido aquecido, enquanto o campo superior esquerdo é um pouco menor, visto que esta região é resfriada pela quantidade de fluido frio das camadas inferiores, que é movimentado em direção à placa superior. Nos cantos inferiores, o gradiente de temperatura presente nesta região é praticamente nulo, visto que o escoamento não é advectivo o suficiente para misturar o fluido aquecido nas regiões mais distantes da placa aquecida, ou seja, o transporte de energia para as regiões distantes da placa aquecida ocorre predominantemente por difusão.

A curvatura presente nas linhas isotérmicas deve-se à quantidade de movimento que recircula, devido à influência da face direita da cavidade. Outro aspecto que deve ser levado

em consideração é a baixa quantidade de movimento transferida para as camadas inferiores da cavidade, gerando uma estratificação bem estável.

Além de resolver a equação da energia, o código próprio resolveu simultaneamente as equações de Navier-Stokes. Os perfis de velocidade foram extraídos nas mesmas posições onde os perfis de temperatura foram obtidos. Tais resultados são apresentados na Figura 5.4 e Figura 5.5, a seguir. Os resultados apresentados aqui são bastante condizentes com os resultados expostos na bibliografia (Ghia *et al.*, 1982). Isto mostra que a solução da equação da energia não apresenta influência negativa nos resultados dos campos hidrodinâmicos.

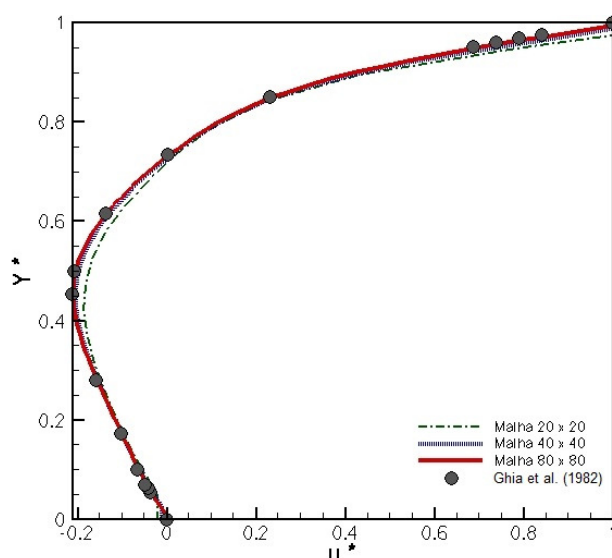


Figura 5.4 – Comparação dos perfis da componente de velocidade adimensional (u^*), ao longo da linha vertical extraída na posição $x^* = 0,5$. $Re = 100$ e $Pr = 1$, regime permanente

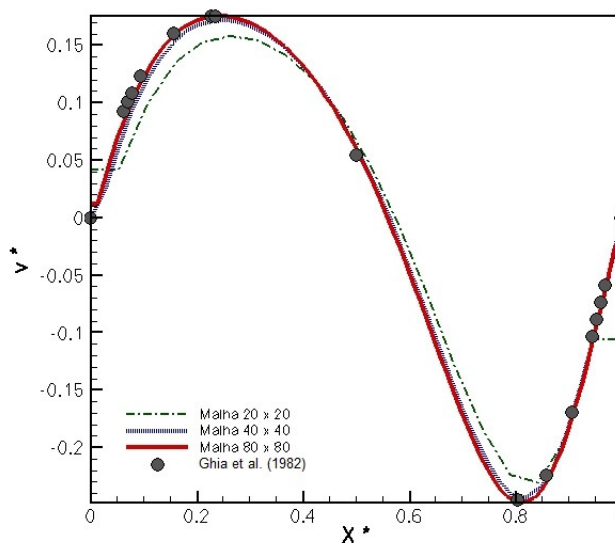


Figura 5.5 - Comparação dos perfis da componente de velocidade adimensional (v^*), ao longo da linha horizontal extraída na posição $y^* = 0,5$. $Re = 100$ e $Pr = 1$, regime permanente

5.3 Escoamento não isotérmico tridimensional – sem fronteira imersa e malha uniforme

A partir dos resultados obtidos do código bidimensional (item 5.2), estendeu-se a solução para um domínio tridimensional. A solução foi implementada no código AMR3D, porém, em primeira aproximação, considerou-se malha uniforme. Assim como no caso bidimensional, não foi utilizado o método da fronteira imersa. As condições de contorno foram impostas diretamente nas células que compõem as faces da cavidade.

Desta forma, foi simulado o escoamento incompressível, não isotérmico, com propriedades físicas constantes em uma cavidade com tampa deslizante, tridimensional, cujas dimensões são $1 \times 1 \times 1$ (adimensional) e as dimensões do domínio computacional cartesiano: $\Omega = [0;1] \times [0;1] \times [0;1]$. As condições de contorno térmicas foram as mesmas utilizadas para o caso bidimensional, onde apenas a tampa mantida a temperatura constante ($T^* = 1$) adimensional e as demais faces são mantidas a temperatura ($T^* = 0$) adimensional. A resolução de malha utilizada para esta simulação foi $64 \times 64 \times 64$.

A Figura 5.6 apresenta o campo de temperatura tridimensional, obtido no regime permanente. A cavidade foi seccionada em seu plano central ($x-z$) de forma a facilitar a visualização do campo de temperatura neste plano. A Figura 5.7 mostra o comparativo entre o campo de temperaturas extraído do plano central ($x-z$), e o resultado apresentado por Santos (2007). Já a Figura 5.8 apresenta o comparativo entre os perfis de temperatura provenientes da simulação realizada no código AMR3D e os resultados de referência apresentados por Nallasamy & Prasad (1977) e Santos (2007).

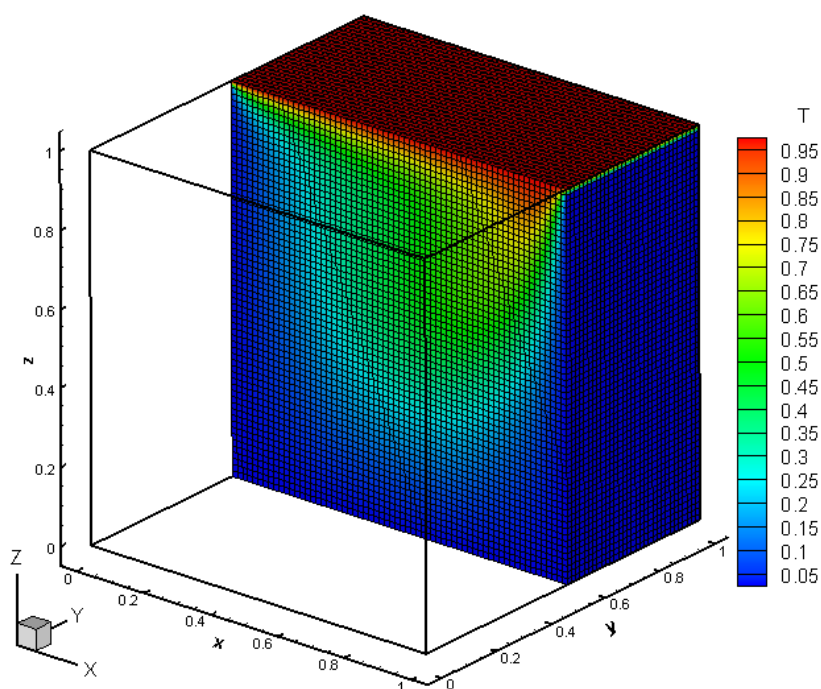
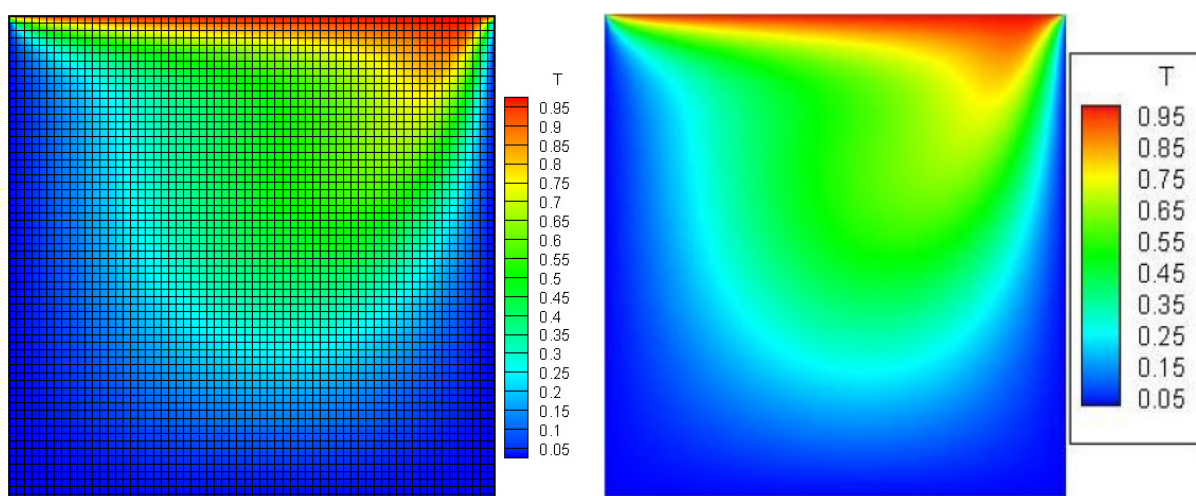


Figura 5.6 - Campo de temperatura tridimensional, corte em $y^* = 0,5$; regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, malha uniforme ($64 \times 64 \times 64$), regime permanente



Presente trabalho (malha $64 \times 64 \times 64$)

Santos (2007)

Figura 5.7 - Comparativo do campo de temperatura, regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, malha uniforme ($64 \times 64 \times 64$), com os resultados apresentado por Santos (2007)

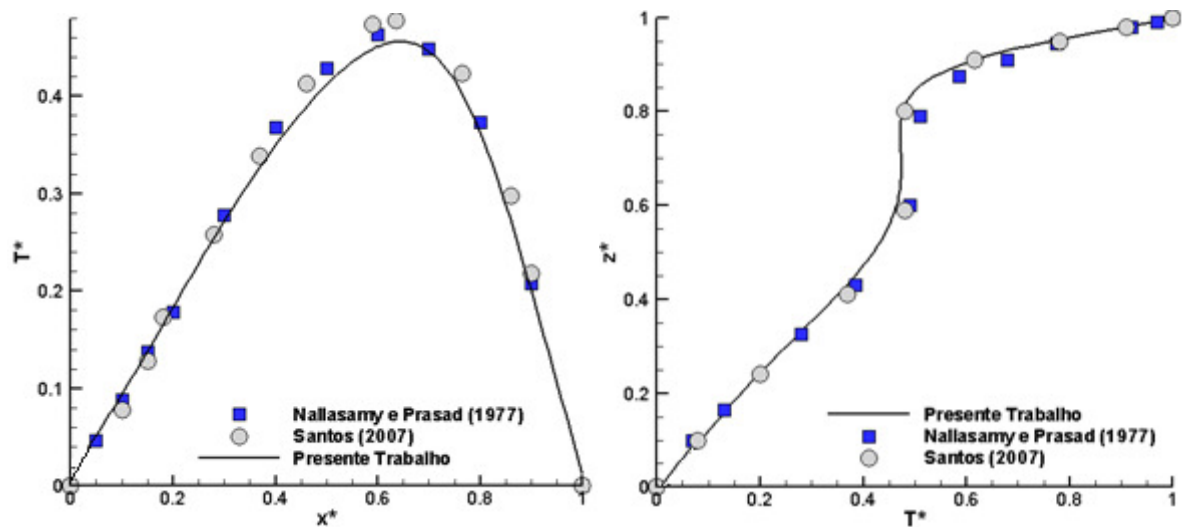


Figura 5.8 - Perfis de temperatura adimensional (T^*), ao longo da linha horizontal (x^*) e vertical (z^*), respectivamente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, malha uniforme ($64 \times 64 \times 64$)

Baseando-se nos resultados apresentados, pode-se afirmar que a solução numérica da equação da energia implementada no código AMR3D apresentou resultados coerentes para o caso tridimensional com malha uniforme cartesiana e sem utilização de fronteira imersa.

5.4 Escoamento não isotérmico tridimensional – com fronteira imersa e malha adaptativa

5.4.1 Escoamento em duto circular

Conforme descrito nos capítulos 2, 3 e 4, o método da fronteira imersa permite utilizar malha cartesiana mesmo em geometrias complexas, como cilíndricas, esféricas, côncavas e convexas. De forma a demonstrar o bom funcionamento da fronteira imersa e a correta aplicação da condição de contorno de primeira espécie, simulou-se inicialmente, o escoamento de um fluido em um duto circular, onde a parede é mantida à temperatura constante. Utilizou-se malha adaptativa com dois níveis de refinamento.

Um duto de diâmetro igual a 0,4 (adimensional) e comprimento 1 (adimensional), está imerso em um domínio cartesiano de dimensões $\Omega = [0 ; 1] \times [0 ; 0,5] \times [0 ; 0,5]$. A parede do duto é mantida aquecida à temperatura constante $T^* = 1$ (adimensional) durante

todo o tempo e o fluido que escoar internamente ao duto apresenta inicialmente temperatura $T = 0$ (adimensional). Utilizou-se condição de contorno periódica na direção axial do duto (x). Espera-se que, com o passar do tempo, o fluido interno ao duto seja aquecido radialmente a partir da parede em direção ao centro do duto. Para a condição inicial para o campo de velocidade, considerou-se a solução exata em regime permanente (escoamento desenvolvido) dada pela Equação 5.14, em coordenadas cilíndricas. Desta forma, apenas a evolução da temperatura é considerada transiente.

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (R^2 - r^2), \quad (5.14)$$

onde, R é o raio do duto, r a variável posição e $\mu = 0,01$ a viscosidade cinemática. Considerou-se gradiente de pressão (força motriz do escoamento) $\frac{\partial p}{\partial x} = -1$.

A Figura 5.9 e Figura 5.10 mostram o duto imerso no domínio computacional, contendo dois níveis de refinamento, apresentando os contornos do campo de velocidade e de temperatura, respectivamente. O domínio foi seccionado em $y = 0,25$ de forma a facilitar a visualização.

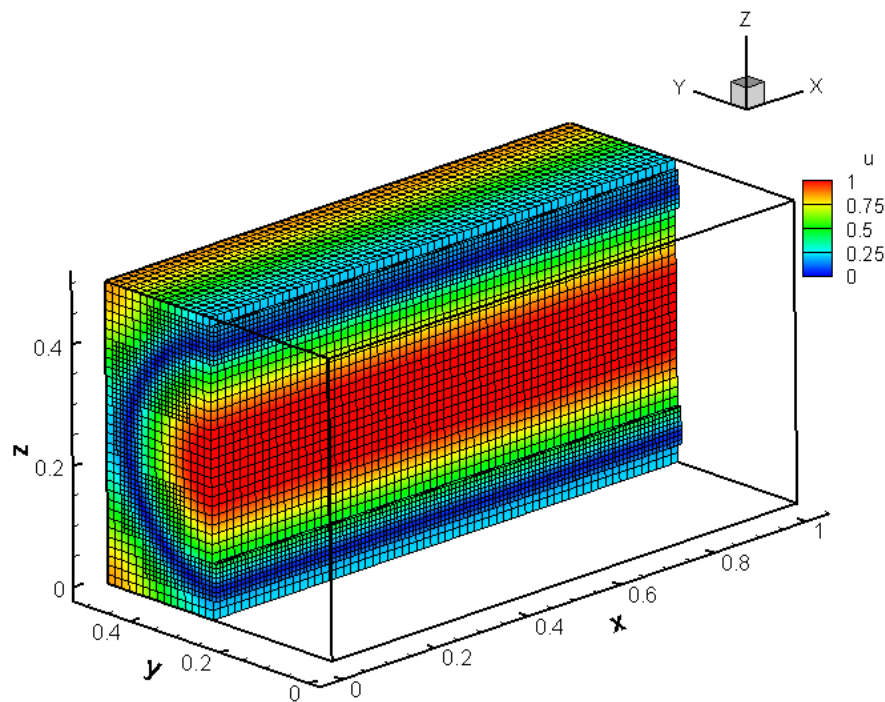


Figura 5.9 - Campo de velocidade horizontal para a simulação computacional de um duto de comprimento adimensional 1, representado numericamente pela fronteira imersa (malha $64 \times 32 \times 32L2$)

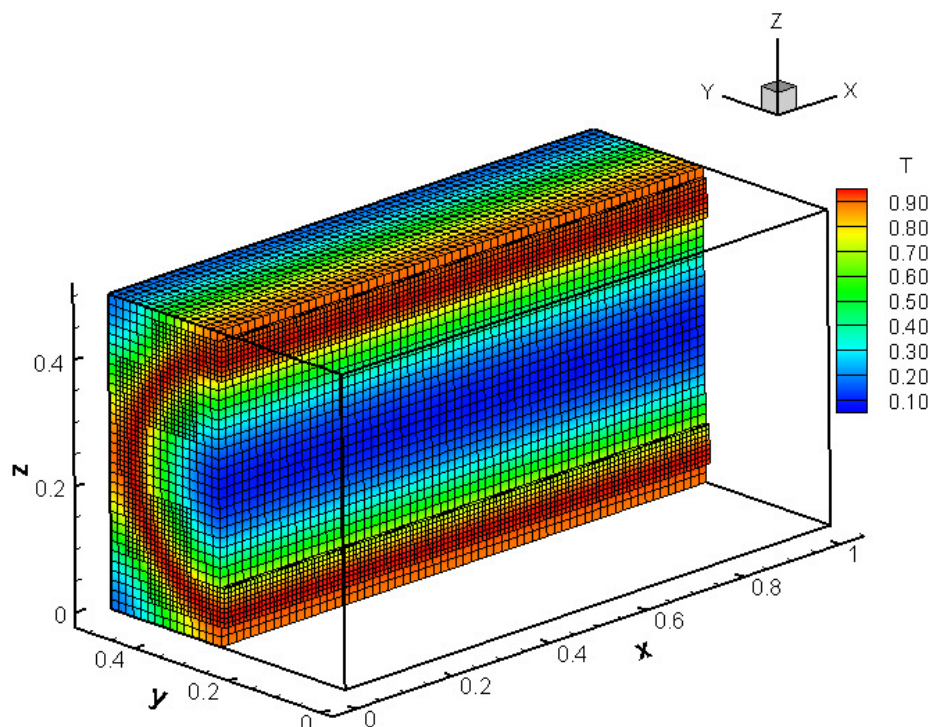


Figura 5.10 – Campo de temperatura para a simulação computacional de um duto de comprimento adimensional 1, representado numericamente pela fronteira imersa (malha $64 \times 32 \times 32L2$)

A Figura 5.11 apresenta o comparativo entre perfil de velocidade obtido pela simulação e a solução analítica, no instante $t \approx 1,53s$ (tempo máximo simulado para este caso). O perfil de temperatura é apresentado na Figura 5.12, entretanto, o mesmo não pôde ser comparado com a solução analítica, uma vez que foi utilizada condição de contorno periódica e a simulação foi estacionada antes do regime permanente. Neste ponto, é importante deixar claro que esta simulação teve como principal objetivo verificar se o transiente do campo de temperaturas possui coerência com a física do problema, e também observar se as condições de contorno provenientes do método da fronteira imersa estão sendo aplicadas corretamente.

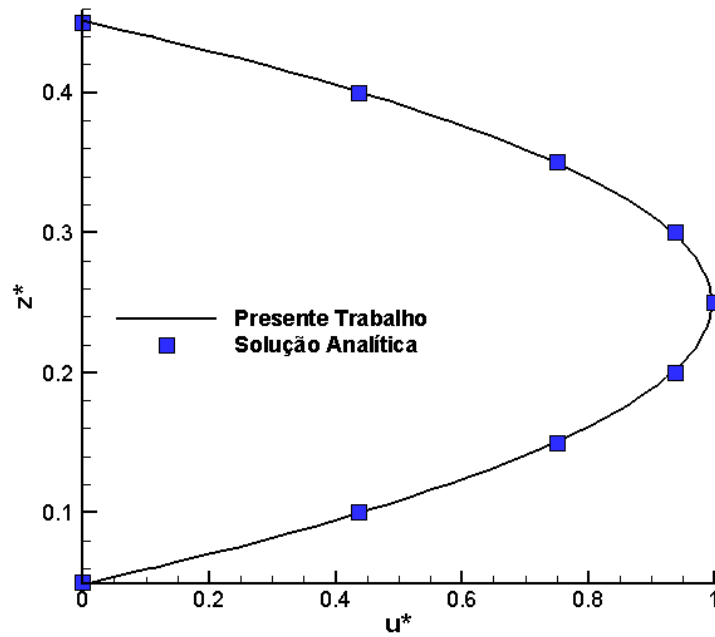


Figura 5.11 – Perfil de velocidade obtido em $x = 0,5$ e $y = 0,25$ em $t \approx 1,53s$

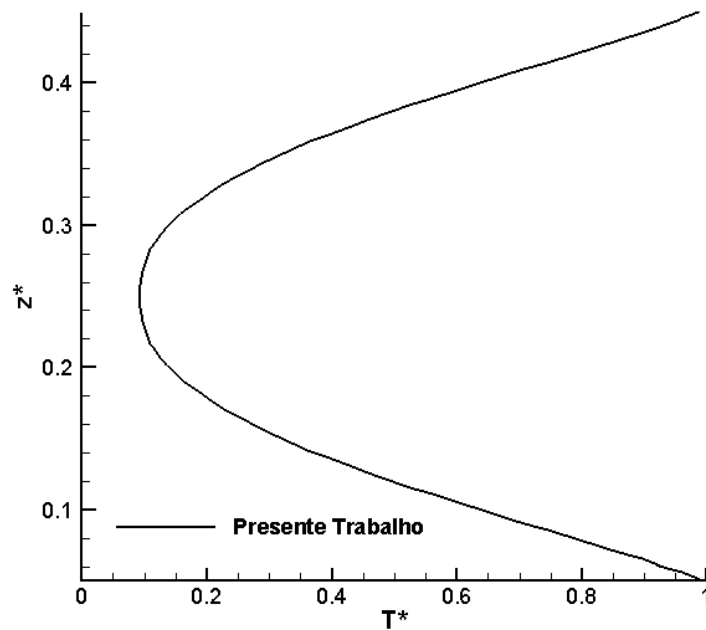


Figura 5.12 - Perfil de temperatura obtido em $x = 0,5$ e $y = 0,25$ em $t \approx 1,53s$

A Figura 5.13 apresenta o campo de temperatura para o plano central transversal ao duto ($x = 0,5$), em vários instantes de tempo, demonstrando a evolução temporal da temperatura no domínio computacional:

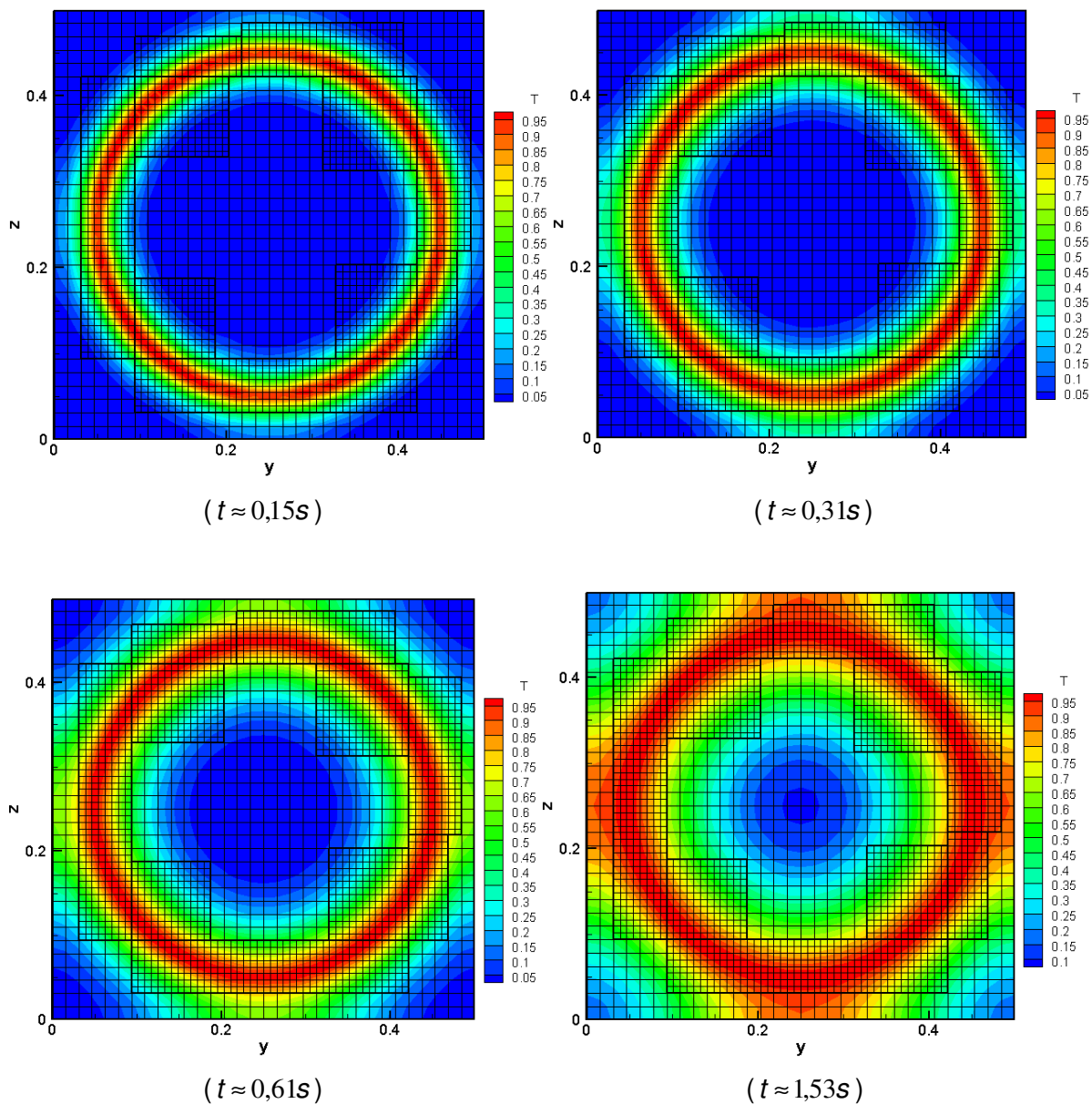


Figura 5.13 – Evolução temporal da temperatura para vários instantes de tempo - plano $x = 0,5$ (malha $64 \times 32 \times 32L2$)

Fazendo uma análise qualitativa da Figura 5.13, é possível identificar nitidamente o perfil cilíndrico do duto, em todos os instantes de tempo, representado pelo círculo vermelho ($T^* = 1$). Este fato indica que a condição de contorno de primeira espécie está sendo respeitada. Nota-se também que, a medida que se avança no tempo, o fluido que escoar no interior do duto se aquece no sentido da parede para o centro, simulando adequadamente a física do problema. É possível perceber que a região externa ao duto também é aquecida. Esta é uma característica do método da fronteira imersa, onde o campo de força que faz o fluido sentir a presença da interface influencia tanto no escoamento interno quanto no escoamento externo à interface.

Quanto à malha, a Figura 5.13 deixa claro que uma geometria totalmente cilíndrica pode ser perfeitamente simulada utilizando-se uma malha cartesiana, dando mérito ao método da fronteira imersa. Conforme apresentado na Figura 5.13, os blocos de refinamento de malha ficaram localizados na superfície cilíndrica do duto, definindo-a com maior precisão.

5.4.2 Escoamento em cavidade com tampa deslizante

De forma qualitativa, a solução apresentada é satisfatória, entretanto é necessária uma análise quantitativa para validação final da solução do equacionamento apresentado nos capítulos anteriores do presente trabalho, a qual é realizada com uma cavidade com tampa deslizante.

Foram simulados escoamentos tridimensionais de uma cavidade com tampa deslizante (tampa aquecida), para número de Reynolds igual a 100, com 2 e 3 níveis de refinamento de malha. Foi utilizado refinamento dinâmico, onde a posição da interface e a vorticidade foram os parâmetros selecionados para a definição de onde a malha será refinada no decorrer do escoamento.

A cavidade possui dimensões $1 \times 1 \times 1$ (adimensional), imersa em um domínio cartesiano de dimensões $\Omega = [0;2] \times [0;2] \times [0;2]$. A tampa é mantida à temperatura constante $T^* = 1$ (adimensional), da mesma forma, durante todo o tempo de cálculo, as faces do cubo possuem temperatura $T^* = 0$ (adimensional). Os resultados do escoamento em regime permanente foram comparados com os resultados apresentados por Santos (2007) e Nallasamy e Prasad (1977).

A Figura 5.14 e Figura 5.15 mostram a cavidade imersa no domínio computacional, contendo dois e três níveis de refinamento, respectivamente, apresentando o contorno do campo de temperatura. O domínio foi seccionado em $y = 1$ de forma a facilitar a visualização.

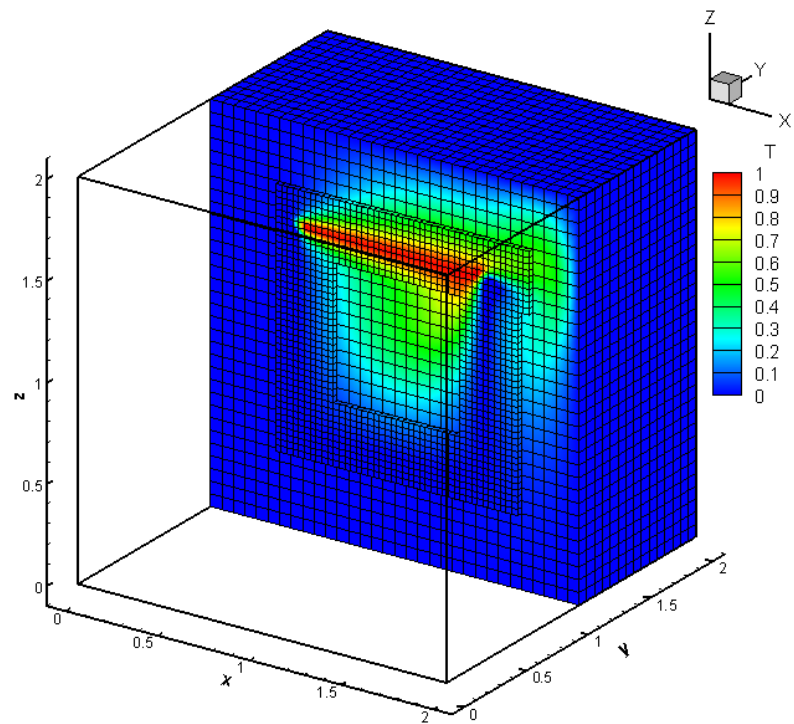


Figura 5.14 - Campo de temperatura tridimensional, corte em $y^* = 1$; regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, malha composta com dois níveis de refinamento, $(32 \times 32 \times 32L2)$, regime permanente

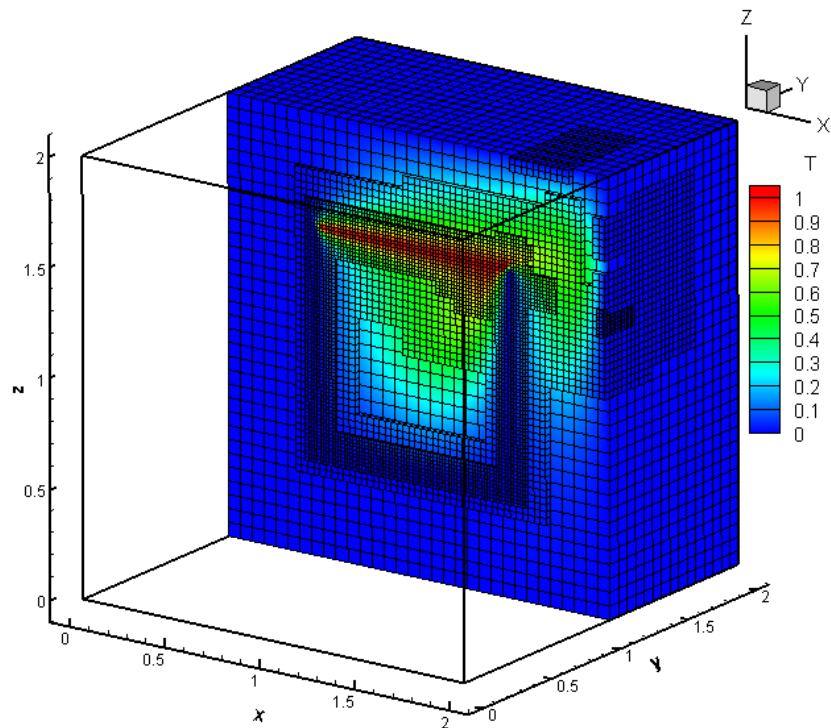


Figura 5.15 - Campo de temperatura tridimensional, corte em $y^* = 1$; regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, malha composta com três níveis de refinamento $(32 \times 32 \times 32L3)$, regime permanente

A Figura 5.16 e Figura 5.17, a seguir, apresentam os resultados comparativos para os campos de temperatura, extraídos no plano central da cavidade, para malha com 2 e 3 níveis de refinamento, respectivamente.

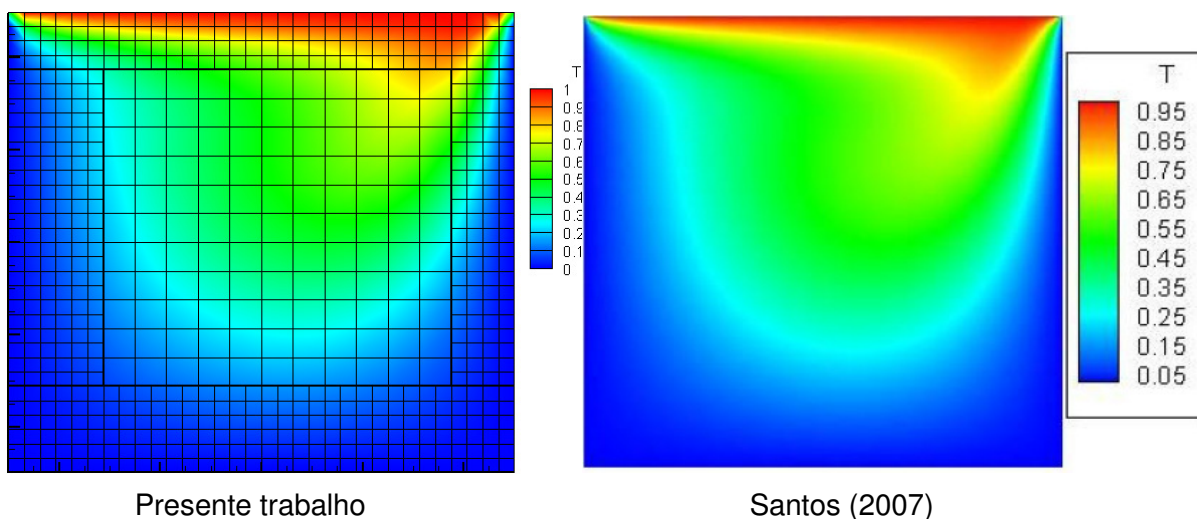


Figura 5.16 – Campo de temperaturas no plano central da cavidade, regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, com dois níveis de refinamento ($32 \times 32 \times 32L2$)

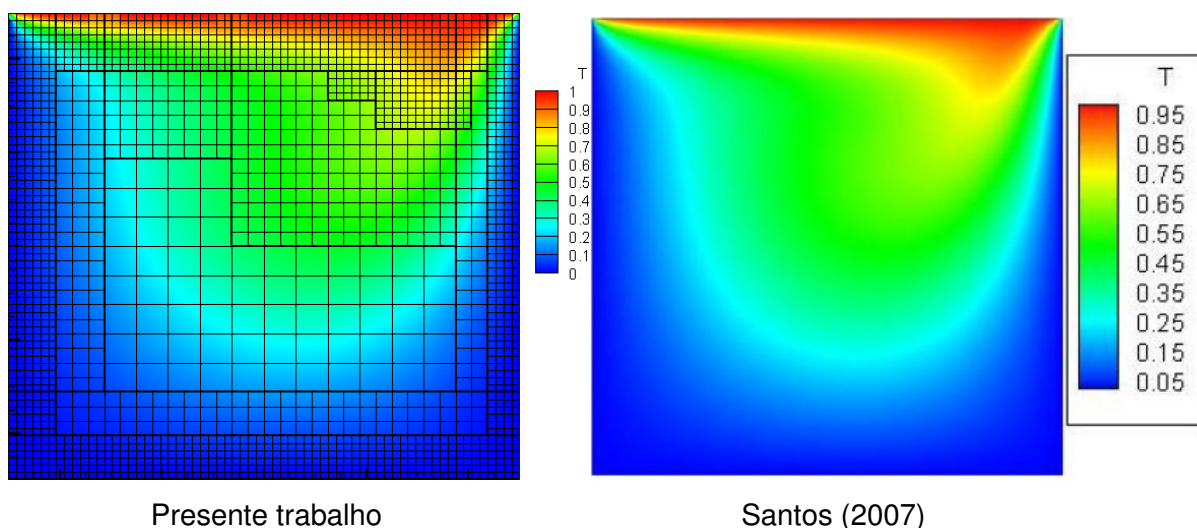


Figura 5.17 - Campo de temperaturas no plano central da cavidade, regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, com três níveis de refinamento ($32 \times 32 \times 32L3$)

Analisando a Figura 5.16 e Figura 5.17, é possível observar que os resultados apresentados para a simulação com três níveis de refinamento de malha se aproximaram um pouco mais do resultado de referência. Isto é explicado pelo fato de que, além da região

da interface, outras regiões de interesse do escoamento foram refinadas (regiões de maior vorticidade e, conseqüentemente, maior gradiente de temperatura). Sabe-se que em escoamentos com convecção forçada o transporte de energia interna é favorecido em regiões de maior vorticidade (regiões de mistura).

Confirmando a observação descrita no parágrafo acima, a Figura 5.18 apresenta a malha sobreposta ao campo de vorticidade, no plano central da cavidade (mesmo plano apresentado na Figura 5.16 e Figura 5.17). Nota-se que, além das regiões próximas à interface, o refinamento de malha foi aplicado nas áreas de maior vorticidade (região vermelha, amarela e verde). Desta forma, os maiores valores de vorticidade localizam-se na região acima da posição central da cavidade e em direção ao canto superior direito da mesma (1º quadrante da Figura 5.18).

A área em vermelho na Figura 5.18 é a região de maior vorticidade e, conseqüentemente, menor espaçamento de malha. Nota-se também que, de forma gradual, o espaçamento intermediário de malha acompanhou a variação da vorticidade, aplicando malha com refinamento intermediário (região verde) e malha mais grosseira em regiões de baixa vorticidade (áreas azuis claras). As regiões em azul escuro são regiões de vorticidade negativa. Os locais que delimitam a cavidade também são refinados independentemente da vorticidade. A região da interface, por regra, sempre apresentará o menor espaçamento de malha, de forma a garantir a boa representação da geometria. A Figura 5.19 apresenta o campo de vorticidade com malha sobreposta para todo o domínio, notando-se que regiões com vorticidade negativa também são refinadas. A diferença entre a vorticidade positiva e negativa é o sentido de rotação. A Figura 5.20 apresenta as linhas de corrente, onde é possível ver o sentido de rotação do fluido.

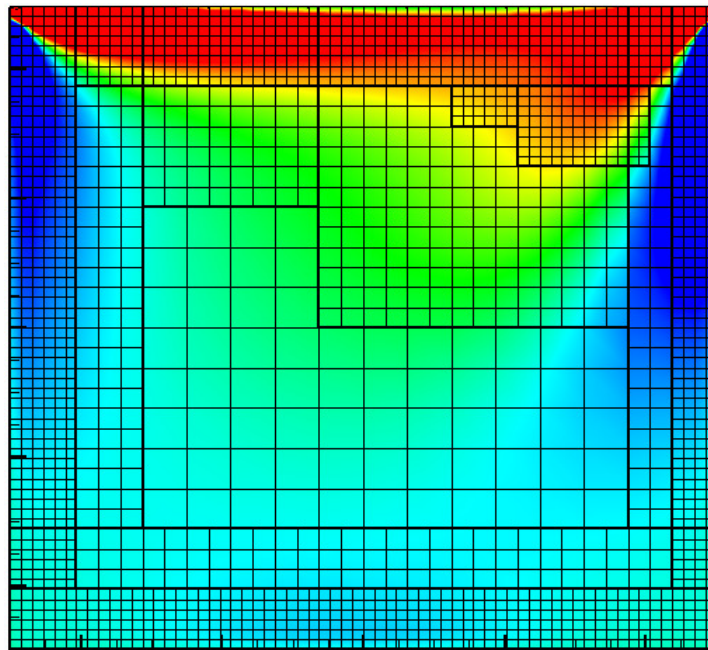


Figura 5.18 – Vorticidade no plano central da cavidade, regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, com três níveis de refinamento ($32 \times 32 \times 32L3$)

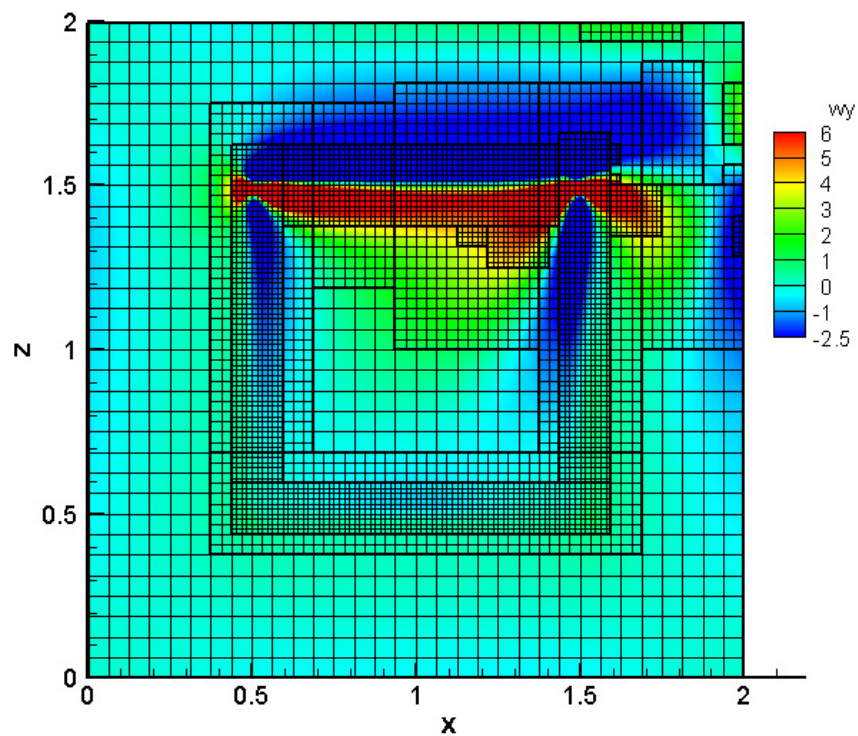


Figura 5.19 - Vorticidade no plano central do domínio, regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, com três níveis de refinamento ($32 \times 32 \times 32L3$)

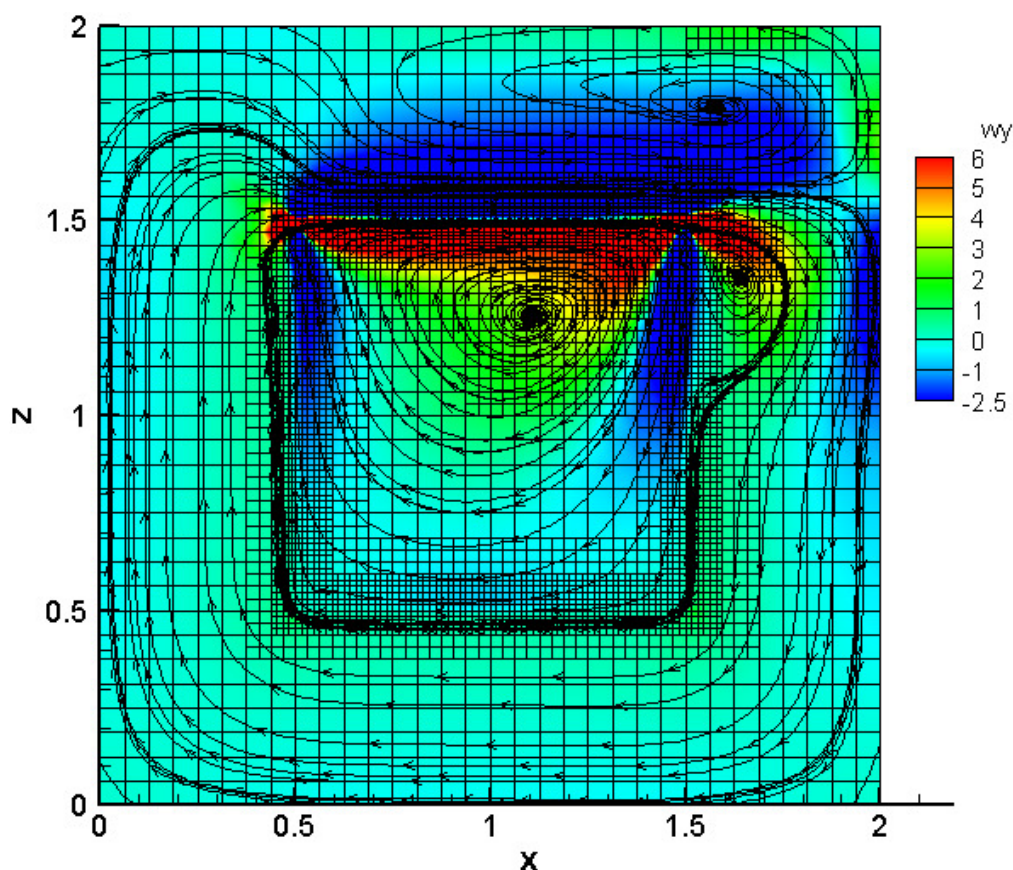


Figura 5.20 - Vorticidade no plano central do domínio, com linhas de corrente sobrepostas, regime permanente, $Re = 100$ e $Pr = 1$, com três níveis de refinamento ($32 \times 32 \times 32L3$)

Baseando-se nos fatos apresentados, pode-se afirmar que a adaptabilidade da malha funcionou adequadamente, considerando-se os critérios de refinamento selecionados (posição da interface e vorticidade).

A Figura 5.21 e Figura 5.22, apresentam os resultados comparativos dos perfis de temperatura ao longo de linhas horizontais e verticais que cortam o centro dos planos apresentados na Figura 5.16 e Figura 5.17.

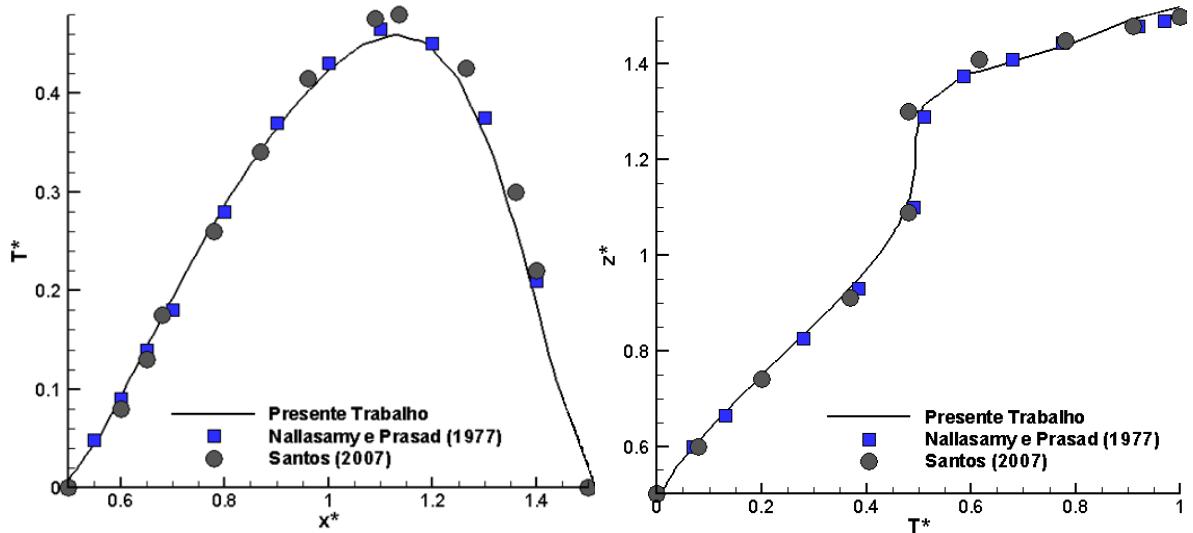


Figura 5.21 – Perfil de temperatura adimensional (T^*), ao longo da linha horizontal (x^*) e vertical (z^*), respectivamente, para a posição central do plano apresentado na Figura 5.16, $Re = 100$ e $Pr = 1$, com dois níveis de refinamento ($32 \times 32 \times 32L2$)

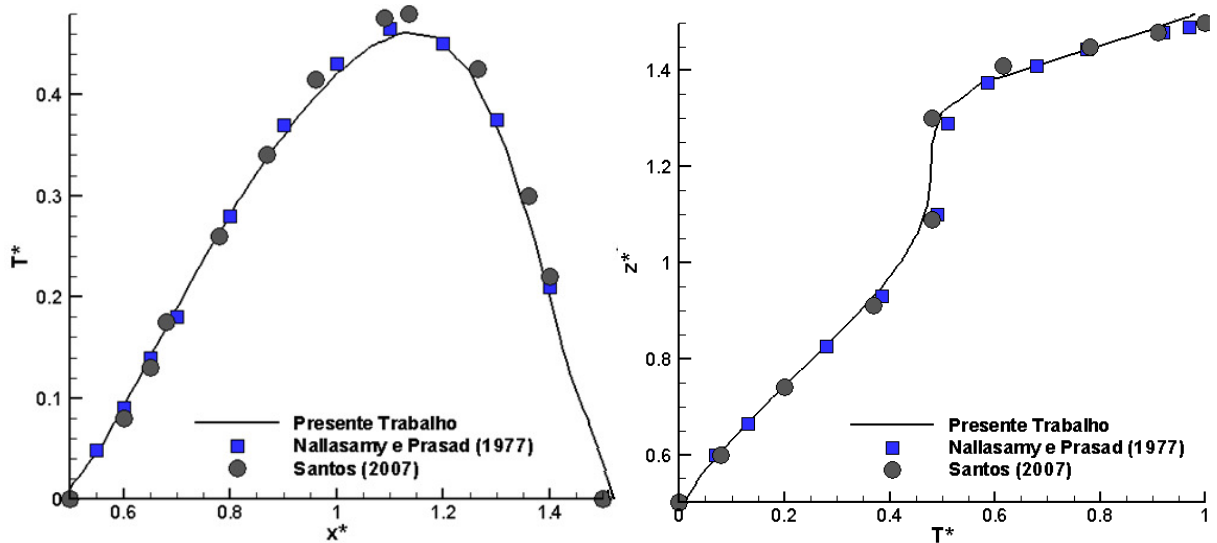


Figura 5.22 - Perfil de temperatura adimensional (T^*), ao longo da linha horizontal (x^*) e vertical (z^*), respectivamente, para a posição central do plano apresentado na Figura 5.17, $Re = 100$ e $Pr = 1$, com três níveis de refinamento ($32 \times 32 \times 32L3$)

Os perfis de temperatura apresentados nas duas figuras anteriores deixam clara a boa aproximação dos resultados obtidos no presente trabalho, frente aos resultados de referência.

Conforme dito anteriormente, o refinamento localizado da malha é dinâmico, ajustando-se à medida que o escoamento se desenvolve. A Figura 5.23 apresenta a

evolução da malha ao longo do tempo, para a simulação com três níveis de refinamento, evidenciando a característica adaptativa da malha.

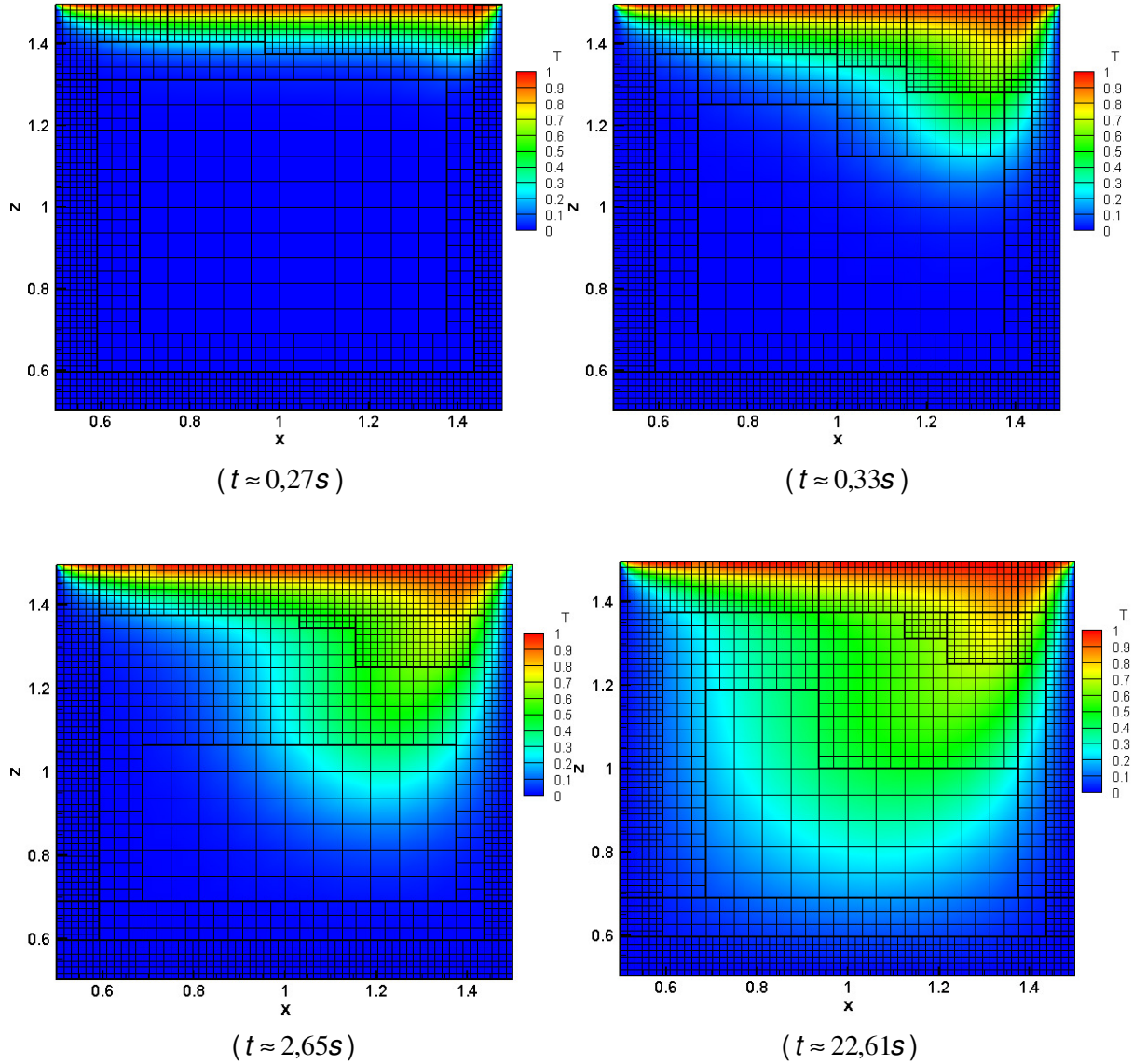


Figura 5.23 – Campo de temperatura no plano central da cavidade e evolução da malha ao longo do tempo, malha $32 \times 32 \times 32L3$

5.5 Análise comparativa entre os resultados apresentados

Considerando-se os casos de cavidade com tampa deslizante simulado nos itens anteriores, a Figura 5.24 apresenta o comparativo entre os perfis de temperatura obtidos das simulações e os dados de referência.

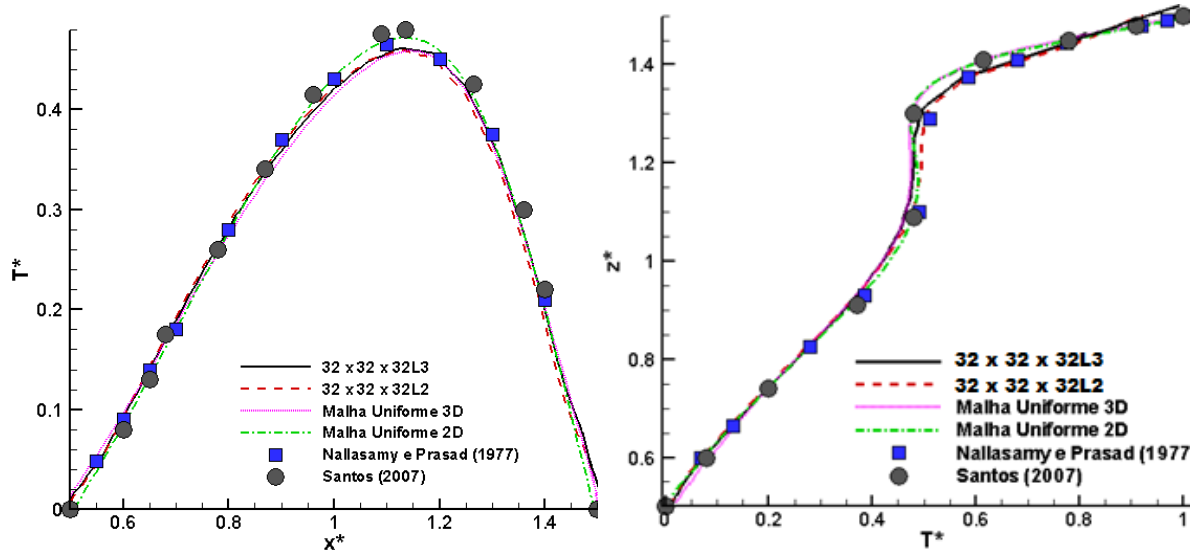


Figura 5.24 – Comparação entre os perfis de temperatura adimensional (T^*), ao longo da linha horizontal (x^*) e vertical (z^*), respectivamente, $Re = 100$ e $Pr = 1$

Nota-se pela figura anterior que todas as simulações aproximaram-se dos resultados de referência. Observando as posições referentes às condições de contorno ($x^* = 0,5$; $x^* = 1,5$; $z^* = 0,5$ e $z^* = 1,5$), nota-se que para os casos com fronteira imersa, os resultados desviam um pouco dos valores impostos. Isto ocorre devido ao erro entre a temperatura numérica interpolada e a temperatura da fronteira que teoricamente é nula nas faces e 1 na tampa. Este erro pode ser estimado pela norma euclidiana entre a temperatura interpolada e a temperatura imposta/esperada na fronteira. Para as simulações com dois níveis e três níveis de refinamento o erro foi quantificado em $L_{2_2} = 1,93 \times 10^{-2}$ e $L_{2_3} = 1,62 \times 10^{-2}$, respectivamente. Este erro pode ser reduzido diminuindo-se a tolerância do erro de interpolação no acoplamento euleriano-lagrangiano.

Também é possível notar, na figura anterior, que as soluções apresentadas pelas simulações com 2 e 3 níveis de refinamento apresentam resultados equivalentes em $0,5 \leq x^* \leq 1$ e $0,5 \leq z^* \leq 1$, entretanto descolam-se a partir de $x^* = 1$ e $z^* = 1$. Os resultados das duas simulações são diferentes, pois, a partir de $x^* = 1$ e $z^* = 1$, a solução com três níveis de refinamento apresenta maior refinamento de malha (ver Figura 5.16 e Figura 5.17).

É importante observar que, como o domínio computacional utilizado nos casos da cavidade com fronteira imersa é duas vezes maior que o domínio computacional utilizado nos casos sem fronteira imersa, o espaçamento de uma malha base $32 \times 32 \times 32$ utilizando-se fronteira imersa, corresponde ao espaçamento dado por uma malha de $16 \times 16 \times 16$ no domínio sem fronteira imersa.

Para a simulação da cavidade tridimensional, com tampa deslizante e com fronteira imersa, comparou-se o custo computacional (tempo de máquina) entre um caso com refinamento adaptativo (três níveis de refinamento) e um caso com malha uniforme. A utilização do refinamento adaptativo apresentou uma economia de 66% custo computacional em comparação com o caso com malha uniforme.

Apesar de não ter sido quantificado no presente trabalho, o refinamento localizado adaptativo apresentou redução no tempo gasto no pré-processamento, uma vez que, como a malha se adapta dinamicamente em função de parâmetros do escoamento, a malha ótima é obtida automaticamente eliminando a necessidade de testes de malha.

Desta forma, baseando-se nestes argumentos e nos bons resultados apresentados no presente capítulo, a utilização de fronteira imersa com refinamento localizado adaptativo mostra-se mais promissora frente aos casos resolvidos com técnicas numéricas mais tradicionais.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

O presente trabalho objetivou resolver escoamentos tridimensionais não isotérmicos, monofásicos com fronteiras estáticas, porém com malhas cartesianas, adaptativas, bloco-estruturadas e refinadas localmente. Neste contexto, a equação da energia foi resolvida utilizando-se diferenças finitas para a discretização espacial e Euler de primeira ordem para a discretização temporal.

A solução numérica foi verificada pelo método das soluções manufaturadas para casos com malha uniforme e malha composta, conforme apresentado no item 5.1, onde foi obtida primeira ordem de convergência, de acordo com o esperado em soluções com o método de Euler.

A implementação numérica (computacional) foi realizada de forma gradual, resolvida primeiramente em um código próprio bidimensional com malha uniforme (item 5.2). A partir dos resultados obtidos na solução bidimensional, a solução foi estendida para casos tridimensionais com malha uniforme e malha adaptativa refinada localmente, no código AMR3D (item 5.3 e 5.4).

No tocante à utilização de malhas cartesianas na solução de escoamentos em presença de geometrias não cartesianas, o método da fronteira imersa apresentou-se adequado, definindo claramente a geometria cilíndrica do duto circular, conforme mostram os resultados no item 5.4.1 do capítulo anterior.

A adaptabilidade dinâmica da malha foi evidenciada e validada pelos resultados apresentados para cavidade com tampa deslizante (item 5.4.2), onde a malha ajustou-se em função da presença da interface e da vorticidade (Figura 5.19 e Figura 5.23). Conforme mencionado no item 5.5, apesar de existir um erro de interpolação no acoplamento euleriano-lagrangiano, a solução utilizando-se fronteira imersa e malha adaptativa apresentou-se mais eficiente, em comparação com a solução com malha uniforme e técnicas tradicionais de aplicação das condições de contorno.

Assim, de acordo com os resultados apresentados no Capítulo 5 (verificação e validação), os modelos matemático e numérico mostraram-se satisfatórios para a solução da equação da energia em escoamentos incompressíveis, não isotérmicos e com propriedades físicas constantes. Além de permitir análise de escoamentos não isotérmicos no código AMR3D (principal contribuição), o presente trabalho poderá servir de base confiável para desenvolvimentos futuros, como a análise de escoamentos bifásicos, não isotérmicos, com fronteiras móveis e de uma forma mais ambiciosa, escoamentos com mudança de fase.

Entretanto, no tocante à equação da energia, o modelo matemático e computacional apresentado no presente trabalho considerou algumas simplificações, como: propriedades físicas constantes, escoamento laminar e convecção forçada. Outro ponto que pode ser melhorado é o esquema numérico utilizado para a discretização temporal da equação da energia, uma vez que os testes de verificação para a malha composta apresentaram tendência a se tornar instável quando o espaçamento de malha é bastante reduzido.

Desta forma, como sugestão para trabalhos futuros são listados os seguintes itens:

- Ações de curto prazo:
 - Utilização da equação da energia em sua forma completa e propriedades físicas variáveis;
 - Convecção mista – utilização do termo de empuxo inserido no termo fonte das equações de Navier-Stokes (aproximação de Boussinesq);
- Ações de médio e longo prazo:
 - Implementar métodos de maior ordem para a discretização temporal da equação da energia;
 - Implementar o modelo de turbulência submalha para a solução da equação da energia (conceito de Prandtl turbulento (Pr_T));
 - Extensão do modelo matemático e da solução numérica para utilização em casos de escoamentos bifásicos não isotérmicos com fronteiras móveis;

- Extensão para escoamentos não isotérmicos, com mudança de fase, bifásicos e com fronteiras móveis.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASCHER, U. M., RUUTH, S. J. e WETTON, B. Implicit-Explicit Methods for Time- Dependent Pde's. **SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Numer. Anal.**, vol. 32, p. 797, 1995.

BADALASSI, V. E., CENICEROS, H. D. e BANERJEE, S. Computation of Multiphase Systems with Phase Filed Models. **Journal of Computational Physics**, vol. 190, p. 371-397, 2003.

BEJAN, A.; **Convection Heat Transfer**, John Wiley & Sons, Durham, USA, 1994.

BELL, J. B., COLELLA, P., e GLAZ, H. M. A Second-Order Projection Method for Incompressible Navier-Stokes Equations. **Journal of Computational Physics**, vol. 85, p. 257, 1989.

BERGER, M. J. e RIGOUTSOS, I. An Algorithm for Hyperbolic Partial Differential Equations. **IEE Trans. Systems Man and Cybernet**, vol. 21 p. 1278-1286, 1991.

CALEGARI, P. C. **Simulação Computacional de Escoamentos Reativos com Baixo Número de Mach Aplicando Técnicas de Refinamento Adaptativo de Malhas**. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

DA SILVA, G. A. L.; **Transferência de Calor e Massa no Escoamento Bifásico em Torno de Aerofólios Equipados com Sistemas de Antigelo Aeronáuticos**; Tese (Doutorado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. Editora da Universidade de São Paulo, SP, Brasil, 2000.

GEAR, C.W. The numerical integration of ordinary differential equations. **Math. Comp.**, vol. 21, no. 2, p. 146-156, 1967.

GEAR, C.W. The automatic integration of sti ordinary differential equations. **Information Processing**, vol. 68, p. 187-193, 1969.

GEAR, C.W. The automatic integration of ordinary differential equations. **Communications of the ACM**, vol. 14, no. 3, p. 176-179, 1971.

GOLDSTEIN, D.; ADACHI, T.; SAKATA, H. Modeling a no-slip flow with an external force field. **Journal of Computational Physics**, v. 105, p. 354–366, 1993.

GRIFFITH, B. E.; **Simulating the Blood-Muscle-Valve Mechanics of the Heart by an Adaptive and Parallel Version of the Immersed Boundary Method**, New York, 2005.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T.; High-Re Solutions for Incompressible Flow Using Navier-Stokes Equations and Multi-Grid. **Journal of Computational Physics**, v. 48, pp. 387-411, 1982.

HORNUNG R.D. E WISSINK, A. M. Managing complex data and geometry in parallel structured AMR applications. **Engineering with Computers**, v. 22, p. 181–195, 2006.

KINOSHITA, D.; SILVEIRA NETO, A.; MARIANO, F.; QUEIROZ, L. **On the Merging of Immersed Boundary and Pseudo-Spectral Fourier Methodologies for Flows With Heat**

Transfer. In: 9th INTERNATIONAL CONFERENCE ON HEAT TRANSFER; FLUID MECHANICS AND THERMODYNAMICS, 9, 2012, Malta.

LABORATÓRIO DE MECÂNICA DOS FLUIDOS. **Desenvolvimentos de Modelagem Matemática e Simulação Numérica para Análise de Escoamentos Bifásicos Anulares.** Uberlândia, 2010. 106p. Relatório Parcial n° 03.

LABORATÓRIO DE MECÂNICA DOS FLUIDOS. **Desenvolvimentos Matemáticos e Numéricos em Escoamentos Bifásicos Tipo Coluna de Bolhas Aplicados a Processos de Refino.** Uberlândia, 2012. 209p. Relatório Parcial n° 01.

LABORATÓRIO DE MECÂNICA DOS FLUIDOS. **Desenvolvimentos Matemáticos e Numéricos em Escoamentos Bifásicos Tipo Coluna de Bolhas Aplicados a Processos de Refino.** Uberlândia, 2012. 111p. Relatório Parcial n° 02.

LIMA-E-SILVA, A. L. F. de. **Desenvolvimento e implementação de uma nova metodologia para modelagem de escoamentos sobre geometrias complexas: método da fronteira imersa como modelo físico virtual.** 162p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002.

LIMA-E-SILVA, A.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. **Journal of Computational Physics**, v. 189, p. 351–370, 2003.

MANSUR, S. S.; DEL RIO, E.; SILVEIRA NETO, A. **Turbulência**, ABCM, 2010.

MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed Boundary Methods. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 37, p. 239–261, 2005.

NAKAHASHI, K.; ITO, Y.; TOGASHI, F. Some Challenges of Realistic Flow Simulations by Unstructured Grid CFD. **International Journal for Numerical Methods on Fluids**, v. 43, p. 769-783, 2003.

NALLASAMY, M.; PRASAD, K. K. On Cavity Flow at Right Reynolds Numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 79(2), p. 391-414, 1977.

NÓS, R. L.; **Simulações de Escoamentos Tridimensionais Bifásicos Empregando Métodos Adaptativos e Modelos de Campo de Fase**, São Paulo, 2007.

PESKIN, C. Flow patterns around heart valves: A numerical method. **Journal of Computational Physics**, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.

PESKIN, C. Numerical analysis of blood flow in the heart. **Journal of Computational Physics**, v. 25, p. 220, 1977.

PESKIN, C. The immersed boundary method. **Acta Numerica**, v. 11, p. 479–517, 2002.

PUCKETT, E. G., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., MARCUS, D. L. e RIDER, W. A High-Order Projection Method for Tracking Fluid in Variable Density Incompressible Flows. **Journal of Computational Physics**, vol. 130, p. 269-282, 1997.

RIBEIRO JR, C. P. e LAGE, P. L. C. Population Balance Modeling of Bubble Size Distributions in a Direct Contact Evaporator Using a Sparger Model. **Chemical Engineering Science**, vol. 59, n° 12, p. 2363-2377, 2004.

ROACHE, P. J.; **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**, Hermosa Publishers, New Mexico, USA, 1998.

ROY, C. J. Review of Code and Solution Verification Procedures for Computational Simulation, **Journal of Computational Physics**, v. 205(1), p. 131-156, 2005.

SANTOS, D. E. **Análise de Escoamentos Não-Isotérmicos, Incompressíveis, Utilizando Simulação de Grandes Escalas e o Método de Elementos Finitos**, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

STEINBERG, S.; ROACHE, P. J. Symbolic Manipulation and Computational Fluid Dynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 57(30), p. 251-283, 1985.

VILLAR, M. M.; **Malha Adaptativa Aplicada ao Método da Fronteira Imersa com Modelo Físico Virtual**, Uberlândia, 2003.

VILLAR, M. M.; **Análise Numérica Detalhada de Escoamentos Multifásicos Bidimensionais**, Tese (Doutorado), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2007.

VILLAR, M. M.; DA SILVA, H. G. **Verificação e Validação de Códigos Computacionais**. Turbulência, Volume 7, p. 51-94, VII ESCOLA DE PRIMAVERA E TRANSIÇÃO E TURBULÊNCIA, Ilha Solteira, SP, 2010.

WHITE, F. M. **Viscous Fluid Flow**. McGraw-Hill, 1991.

WÖNER, M. A.; **Compact Introduction to the Numerical Modeling of Multiphase Flows**. Institut für Reaktorsicherheit Program Nukleare Sicherheitsforschung, 2003.