

BRUNO GABRIEL GUSTAVO LEONARDO ZAMBOLINI
VICENTE

PROJETO ROBUSTO DE CIRCUITOS *SHUNT* PARA O
CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES DE
ESTRUTURAS COMPOSTAS



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2014

BRUNO GABRIEL GUSTAVO LEONARDO ZAMBOLINI
VICENTE

**PROJETO ROBUSTO DE CIRCUITOS *SHUNT* PARA O CONTROLE
PASSIVO DE VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS COMPOSTAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de Concentração: Mecânica de Sólidos.
Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

**UBERLÂNDIA – MG
2014**

- Z24p
2014 Zambolini Vicente, Bruno Gabriel Gustavo Leonardo, 1984-
Projeto robusto de Circuitos *Shunt* para o controle passivo de vibra-
ções de estruturas compostas / Bruno Gabriel Gustavo Leonardo Zambo-
lini Vicente. - 2014.
97 f. : il.
- Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Progra-
ma de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Materiais compostos - Teses. 3. Ma-
teriais piezoelétricos - Teses. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, 1975-
II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

DEDICATÓRIA

*“À Val e Clara, forças motrizes
de minha vida.”*

AGRADECIMENTOS

À minha família, Valquíria e Clara, que me apoiaram incondicionalmente nesse caminho, sempre prontas a ajudar e não medindo esforços para me oferecer todo carinho e atenção.

Aos meus pais, Gonçalo e Silvia e meus irmãos Lizie, Evandro e Débora pela minha formação moral, caráter e personalidade, fatores sem os quais nada disso seria possível.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, pelo excelente e vigoroso trabalho de orientação, bem como por valiosos conselhos, incansável dedicação, sincera amizade e preocupação com minha carreira.

Aos meus amigos e colegas Leandro, Victor e Lorrane, pela parceria nos trabalhos e alto nível das conversas.

Aos professores do programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, que trabalharam fortemente para a minha formação, agregando conceitos valiosos e uma nova forma de enxergar os problemas de engenharia.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Estruturas Inteligentes em Engenharia – INCT-EIE pela oportunidade de realizar este trabalho.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida para realização do trabalho e aos órgãos de fomento CNPq e FAPEMIG pelo suporte financeiro.

ZAMBOLINI-VICENTE, B. G. G. L. **Projeto robusto de circuitos *shunt* para o controle passivo de vibrações de estruturas compostas**. 2014. 97f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

Este trabalho enfoca os procedimentos de modelagem por elementos finitos e o projeto ótimo-robusto de estruturas compostas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt* para fins de controle passivo de vibrações. O estudo será dividido em duas partes, a saber: a primeira é dedicada ao emprego da teoria cisalhante de primeira ordem (*First-order Shear Deformation Theory* – FSDT) em conjunto com a teoria da camada equivalente única para a modelagem do problema mecânico formado por uma placa composta plana. Nesta fase, também será utilizada a teoria mista que combina as teorias da camada equivalente única com a discreta para a modelagem do sistema acoplado eletromecânico (estrutura composta com pastilhas piezelétricas). Ênfase é dada à parametrização das variáveis mais influentes que são as espessuras das camadas, as direções das fibras e os parâmetros do circuito *shunt*. Todos os modelos foram desenvolvidos e implementados em ambiente MATLAB® de programação. Na segunda parte, será apresentado um estudo sobre a quantificação das incertezas nos parâmetros de resistência e indutância do circuito *shunt* ressonante e na espessura do elemento piezelétrico. Para a geração dos modelos probabilísticos, será empregado o Método da Máxima Entropia (MME) e para a resolução do problema estocástico será utilizado o método de Monte Carlo. Serão estabelecidos os limites de dispersão e o número de tiragens aleatórias a serem utilizados na otimização multiobjetivo robusta dos circuitos *shunt* via emprego de funções de vulnerabilidade a serem otimizadas ao mesmo tempo em que as funções objetivo originais.

Palavras-Chave: Materiais compostos, materiais piezelétricos, circuitos elétricos shunt, incertezas, otimização robusta

ZAMBOLINI-VICENTE, B. G. G. L. **Robust design of *shunt* circuits for the passive control of vibrations of composite structures**. 2014. 97f. Master's Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

Abstract

This work focuses on the finite element modeling procedure and the robust-optimal design of composite structures containing piezoelectric elements to be coupled with the so-named shunt circuits with the aim of passive vibration attenuation. The work is organized into two main parts as follows: the first is devoted to the use of the first order shear deformation theory (FSDT) in conjunction with the single equivalent layer theory for the modeling of the mechanical problem composed by a thin rectangular composite plate structure. At this step, the mixed theory, in which the single layer equivalent theory is combined with the discrete theory to model electromechanical system (composite structure with piezoelectric elements), is also employed. Emphasis is also placed on the parameterization strategy of the design variables such as the layer's thicknesses, the directions of the fibers and the parameters of the shunt circuits. It must be emphasized that the finite element models were developed and implemented in MATLAB[®] environment; the second part of the work is dedicated to the quantification of the parametric uncertainties related to the resistance and inductance of the resonant shunt circuit and the thickness of the piezoelectric element. In order to create the probabilistic models the Maximum Entropy Method (MME) is retained and the resulting stochastic model is solved by using the so-called Monte Carlo method. The interest is to generate the limits of dispersion and the number of random simulations required to be used in the robust multi-objective optimization process of the shunt circuits by taking into account during the simulations the vulnerability functions to be optimized at the same time as the original objective functions.

Keywords: Composite materials; piezoelectric materials; shunt circuits; uncertainties, robust optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Comparativo entre algumas propriedades de materiais estruturais comuns e materiais compostos (Adaptado de Gurit Holding AG (2012)).....	19
Figura 1.2 – Exemplo da crescente aplicação de materiais compostos na indústria aeronáutica (Adaptado de AIRBUS (2007)).....	20
Figura 1.3 – Representação do elementos PZT em termos de circuito elétrico..	21
Figura 1.4 – Modelagem de estruturas compostas contendo elementos piezelétrico.....	22
Figura 2.1 – Ilustração da Teoria das Camadas Equivalentes Discretas (a) e da Teoria da Camada Equivalente Única (b) (adaptada de Faria (2006)).....	25
Figura 2.2 – Representação esquemática de uma placa composta (A) e a cinemática da deformação para uma camada equivalente única (extraída de Faria (2006)).....	26
Figura 2.3 – Ilustração dos componentes do elemento finito de placa composta.	28
Figura 2.4 – Elemento retangular de 8 nós em coordenadas locais (esq.) e globais (dir.).(Adaptada de Faria (2006)).....	29
Figura 2.5 – Representação esquemática dos potenciais elétricos nodais por interfaces.....	38
Figura 2.6 – Ilustração de uma estrutura composta contendo elementos piezelétricos.....	39
Figura 2.7 – Placa composta em balanço formada por duas camadas sujeita a carga concentrada.....	45
Figura 2.8 – Deflexões normalizadas ao longo do eixo médio da placa composta.....	46
Figura 2.9 – Amplitudes das funções de resposta em frequência da placa composta.....	46
Figura 2.10 – Viga composta contendo elemento piezelétrico acoplado a circuitos <i>shunt</i>	47

Figura 2.11 – Comparação das amplitudes das FRFs para os diferentes circuitos shunt analisados.....	48
Figura 3.1 – Distribuições para diferentes valores de dispersão no parâmetro R	53
Figura 3.2 – Envelopes das FRFs do sistema para incertezas no parâmetro resistivo R	54
Figura 3.3 – Convergência em termos do erro quadrático médio para incertezas em R	55
Figura 3.4 – Evolução do erro médio quadrático em função da dispersão, δ_R ..	56
Figura 3.5 – Distribuições para diferentes valores de dispersão no parâmetro L	57
Figura 3.6 – Envelopes das FRFs do sistema para incertezas no parâmetro indutivo L	58
Figura 3.7 – Convergência em termos do erro quadrático médio para incertezas em L	59
Figura 3.8 – Evolução do erro médio quadrático em função da dispersão δ_L ..	60
Figura 3.9 – Tolerância no parâmetro de espessura : (a) Faixa de valores de espessura;(b) Tolerância conforme faixa de espessura (Adaptado de PI Group (2013)).....	61
Figura 3.10 – Distribuições para diferentes valores de dispersão no parâmetro h_{pzt}	62
Figura 3.11 – Envelopes das FRFs do sistema para incertezas no parâmetro espessura h_{pzt}	62
Figura 3.12 – Convergência em termos do erro quadrático médio para incertezas em h_{pzt}	63
Figura 3.13 – Evolução do erro médio quadrático em função da dispersão δ_h ..	63
Figura 4.1 – Noção de dominância de Pareto (extraída de Ait Brik (2005)).....	67
Figura 4.2 – Espaço convexo (a) e não convexo (b) (adaptada de Das e Dennis (1997)).....	68
Figura 4.3 – Estratégia NSGA (adaptada de Ait Brik (2005)).....	70
Figura 4.4 – Soluções ótimas robustas (adaptada de Lee e Park (2001)).....	71

Figura 4.5 – Comparação entre as metodologias de otimização multiobjetivo robusta e determinística.....	72
Figura 4.6 – Frente de Pareto para o problema POMD.....	74
Figura 4.7 – Comparação das amplitudes das FRFs do sistema sem e com circuitos – POMD.....	75
Figura 4.8 – Amplitude de vibração <i>versus</i> vulnerabilidade para o problema POMR.....	76
Figura 4.9 – Massa <i>versus</i> vulnerabilidade para o problema POMR.....	77
Figura 4.10 – Frente de Pareto para o problema POMR.....	77
Figura 4.11 – Comparação das amplitudes das FRFs do sistema sem e com circuitos POMR.....	78
Figura 4.12 - Comparação das Frentes de Pareto para as soluções determinísticas e robustas.....	79
Figura 4.13 – Envelope de soluções para:(a) Ótimo determinístico, (b) Ótimo Robusto.	80
Figura 4.14 – Variações para : (a) Ótimo determinístico, (b) Ótimo Robusto....	80
Figura 4.15 – Envelope de soluções para : (a) Ótimo determinístico, (b) Ótimo Robusto..	81
Figura 4.16 – Variações para : (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto...	81
Figura 4.17 – Envelope de soluções para e : (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.....	82
Figura 4.18 – Variações para e : (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.	82
Figura 4.19 – Envelope de soluções para e : (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.....	83
Figura 4.20 – Variações para e : (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.....	83
Figura AIII.1 - Representação espacial da transformação do SCL para SCG....	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Exemplos de aplicações de materiais compostos em diversos setores.....	19
Tabela 2.1 – Características de cada elemento finito que compõe a malha...	47
Tabela 2.2 – Características da viga composta.....	47
Tabela 2.3 – Propriedades mecânicas dos materiais envolvidos.....	48
Tabela 2.4 – Propriedades eletromecânicas e elétricas do PZT.....	48
Tabela 3.1 – Valores de α e β para análise de convergência do modelo probabilístico de R	53
Tabela 3.2 – Desvios entre os extremos estatísticos para incertezas no parâmetro R	54
Tabela 3.3 – Valores de α e β para análise de convergência do modelo probabilístico de L	57
Tabela 3.4 – Desvios entre os extremos estatísticos para incertezas no parâmetro L	58
Tabela 3.5 – Valores de α e β para análise de convergência do modelo estocástico de h_{pzt}	61
Tabela 3.6 – Desvios entre os extremos estatísticos para incertezas no parâmetro h_{pzt}	62
Tabela 3.7 – Dispersão, δ , e número de tiragens, n , a serem utilizadas na otimização robusta.....	64
Tabela 4.1 – Definição do espaço de projeto para o problema POMD.....	73
Tabela 4.2 – Parâmetros do NSGA.....	74
Tabela 4.3 – Resultados do problema POMD.....	75
Tabela 4.4 – Definição do espaço de projeto para o problema POMR.....	76
Tabela 4.5 – Intervalos de dispersão para cada função custo.....	77
Tabela 4.6 – Resultados do problema POMR.....	78

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

$A(z)$	matriz da teoria FSDT que correlaciona os graus de liberdade nodais com o deslocamento geral do nó no elemento
$B_b(\xi, \eta, z)$	matriz que correlaciona deformações com deslocamentos no sistema de coordenadas locais – efeito flexão-membrana
$B_s(\xi, \eta, z)$	matriz que correlaciona deformações com deslocamentos no sistema de coordenadas locais – efeito cisalhante
$B_{\phi_i}(\xi, \eta, z)$	matriz que correlaciona campo elétrico com potencial nodal no em coordenadas locais – efeito circuito fechado (<i>in-circuit</i>)
$B_{\phi_0}(\xi, \eta, z)$	matriz que correlaciona campo elétrico com potencial nodal no em coordenadas locais – efeito circuito aberto (<i>open-circuit</i>)
$C_b(\theta_k), C_s(\theta_k)$	matrizes de propriedades elásticas ortotrópicas para os efeitos flexão-membrana e cisalhamento
D	vetor de deslocamentos elétricos
D_i	vetor de deslocamento elétrico para circuito fechado (<i>in-circuit</i>) e análogo o efeito cisalhamento
D_0	vetor de deslocamento elétrico para circuito aberto (<i>open-circuit</i>) e análogo o efeito flexão-membrana
$D_i (i = 0, 1, 2)$	operadores diferencias provenientes da relação deformações/deslocamentos mecânicos
e	matriz de constantes dielétricas
e_b, e_s	matriz de constantes dielétricas para efeitos flexão-membrana e cisalhamento
E	vetor campo elétrico

$E_k^i(\xi, \eta, z, t)$	vetor campo elétrico na camada k em coordenadas locais, efeito circuito fechado (<i>in-circuit</i>)
$E_k^0(\xi, \eta, z, t)$	vetor campo elétrico na camada k em coordenadas locais, efeito circuito aberto (<i>open-circuit</i>)
$f(t)$	vetor de forças generalizadas globais ao longo do tempo
$f(x)$	função custo de um parâmetro de projeto x
$f^v(x)$	função vulnerabilidade de um parâmetro de projeto x
h_k	espessura da camada k
h_{PZT}	parâmetro espessura do material PZT
H	<i>Henries</i> , unidade de indutância elétrica
$H(\omega)$	função resposta em frequência
$H(\omega, \theta)$	função resposta em frequência com perturbação aleatória θ
J	matriz Jacobiana de transformação linear entre coordenadas
K_u	matriz de rigidez puramente mecânica global
$K_{ub}^{(e)}, K_{us}^{(e)}$	matrizes de rigidezes elementares – efeito flexão membrana e cisalhamento
$K_{u\phi} = K_{\phi u}^T$	matrizes de rigidezes eletromecânica global
$K_{\phi\phi}$	matriz de rigidez puramente elétrica global
R	parâmetro indutivo
$L_{kd}(z), L_{ku}(z)$	funções de interpolação linear <i>layerwise</i> para interface inferior e superior
M_u	matriz de massa global
$M_u^{(e)}$	matriz de massa elementar
$N(\xi, \eta)$	matriz das funções de interpolação do elemento da família <i>serendipity</i> formulada no sistema de coordenadas local (ξ, η)
R	parâmetro resistivo
$q(t)$	vetor de cargas elétricas nodais ao longo do tempo

$\mathcal{Q}(\theta_k)$	matriz de transformação de coordenadas para matrizes do acoplamento eletromecânico
$T_b(\theta_k), T_s(\theta_k)$	matrizes de transformação para efeitos flexão-membrana e cisalhamento
$T_E(t), V_E(t)$	matrizes de energia cinética e de deformação no elemento finito e dependente do tempo
$u(t)$	vetor de graus de liberdade globais ao longo do tempo
(u_0, v_0, w_0)	deslocamentos no plano médio nas direções x , y e z ao longo da espessura da camada k
z_k	coordenada na direção z ao longo da espessura da camada k
$Z(\omega)$	matriz de impedâncias elétricas no domínio da frequência
$Z(\omega, \theta)$	matriz de impedâncias elétricas no domínio da frequência mediante perturbação aleatória θ

SÍMBOLOS GREGOS

α, β	parâmetros de formato e dispersão da função <i>Gamma</i>
$\Gamma(z)$	função <i>Gamma</i>
$\Delta R, \Delta L, \Delta h_{PZT}$	limites de dispersão dos parâmetros R , L e h_{PZT}
$\delta_R, \delta_L, \delta_{h_{PZT}}$	dispersão dos parâmetros R , L e h_{PZT}
ϵ_b, ϵ_s	vetores de deformação mecânica do efeito flexão-membrana e cisalhamento
θ_k	ângulo de orientação de fibras unidirecionais para camada k
(ξ, η)	sistema de coordenadas locais planas do elemento, onde $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$
ρ_k	densidade de massa de uma camada k qualquer
σ_b, σ_s	vetores deformações mecânicas para efeitos flexão-membrana e cisalhamento
$\phi_k(\xi, \eta, z, t)$	potencial elétrico de uma dada camada k

$\phi_k(\xi, \eta, t)$	vetor de potenciais elétricos nas interfaces inferior e superior para camada k
$\varphi_k(t)$	vetor de potenciais elétricos nodais da camada k
χ	matriz de permissividade dielétrica
χ_b, χ_s	matriz de permissividade dielétrica para efeitos flexão- membrana e cisalhamento
(ψ_x, ψ_y)	rotações da seção transversal em nó de elemento finito FSDT
ω	frequência angular
Ω	<i>Ohms</i> , unidade de resistência elétrica

LISTA DE ABREVIações

CLT	<i>Classical Layer Theory</i> – Teoria Clássica dos Laminados
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
FEMEC/UFU	Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia
FRF	Função Resposta em Frequência
FSDT	<i>First order Shear Deformation Theory</i> – Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem
INCT-EIE	Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Estruturas Inteligentes em Engenharia
HSDT	<i>High order Shear Deformation Theory</i> – Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior
LMest	Laboratório de Mecânica de Estruturas – Prof. José Eduardo Tannús Reis
MEF	Método dos Elementos Finitos
MME	Método da Máxima Entropia
NSGA	<i>Non-Sorted Genetic Algorithm</i>
POMD	Problema de Otimização Multiobjetivo Determinístico
POMR	Problema de Otimização Multiobjetivo Robusto
PZT	Piezocerâmica de Zirconato Titanato de chumbo
SCL, SCG	Sistema de Coordenadas Local e Global

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	18
CAPÍTULO II – MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS COMPOSTAS	
CONTENDO ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS.....	24
2.1. Formulação por elementos finitos do problema mecânico.....	27
2.1.1. <i>Relações deslocamentos-deformações.....</i>	28
2.1.2. <i>Discretização por elementos finitos.....</i>	29
2.1.3. <i>Parametrização do modelo mecânico.....</i>	31
2.2. Modelagem por elementos finitos do problema acoplado eletromecânico...	34
2.2.1. <i>Parametrização do ângulo de orientação das fibras.....</i>	35
2.2.2. <i>Discretização do potencial elétrico por camadas</i>	37
2.2.3. <i>Parametrização do modelo eletromecânico.....</i>	40
2.2.4. <i>Obtenção das matrizes eletromecânicas fatoradas.....</i>	41
2.3. Incorporação do circuito elétrico <i>shunt</i> no modelo de elementos finitos.....	43
2.4. Exemplo de aplicação com vigas e placas compostas	45
CAPÍTULO III – MODELAGEM ESTOCÁSTICA PARA A CONCEPÇÃO ROBUSTA	
DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS SHUNT.....	49
3.1. Construção de modelo probabilístico	49
3.2. Parâmetro resistivo R.....	51
3.3. Parâmetro indutivo L.....	56
3.4. Espessura do elemento piezelétrico indutivo, h_{pzt}.....	60
3.5. Consolidação dos modelos.....	64
CAPÍTULO IV – METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA	65
4.1. Problema de otimização multiobjetivo determinístico (POMD).....	65
4.1.1. <i>Definição do POMD e noção de dominância.....</i>	66
4.1.2. <i>Escolha de um método de otimização multiobjetivo.....</i>	67

4.2. Problema de otimização multiobjetivo robusto (POMR).....	70
4.2.1. <i>Consideração da robustez na busca do ótimo.....</i>	70
4.2.2. <i>Critério de robustez para a otimização multiobjetivo robusta.....</i>	71
4.3. Aplicações numéricas.....	73
4.3.1. <i>Otimização multiobjetivo determinística.....</i>	73
4.3.2. <i>Otimização multiobjetivo robusta.....</i>	75
4.4. Avaliação da robustez.....	79
4.4.1. <i>Incerteças iguais nos parâmetros.....</i>	79
4.4.2. <i>Incerteças desiguais nos parâmetros.....</i>	81
 CAPÍTULO V - CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS.....	 84
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 88
 ANEXO I: MATRIZES DE OPERADORES DIFERENCIAIS PRESENTES NAS RELAÇÕES DEFORMAÇÕES/DESLOCAMENTOS.....	 94
 ANEXO II: MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO DE PROPRIEDADES ELÁSTICAS.....	 95
 ANEXO III: ROTAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS.....	 96

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Entende-se por estrutura composta como sendo estruturas que são construídas a partir dos materiais compostos. Segundo Matthews e Rawlings (1999), materiais compostos são arranjos entre dois ou mais materiais de naturezas diferentes, a fim de se obter um terceiro material que apresente características não encontradas tão facilmente nos demais materiais, combinando assim as suas vantagens. Como exemplo, pode-se mencionar a obtenção de características muito superiores, tais como a relação resistência/peso ou resistência à tração, quando comparados aos materiais tradicionais como o aço e o alumínio (CHUNG, 2003). A Figura 1.1 compara algumas das características para os principais materiais estruturais.

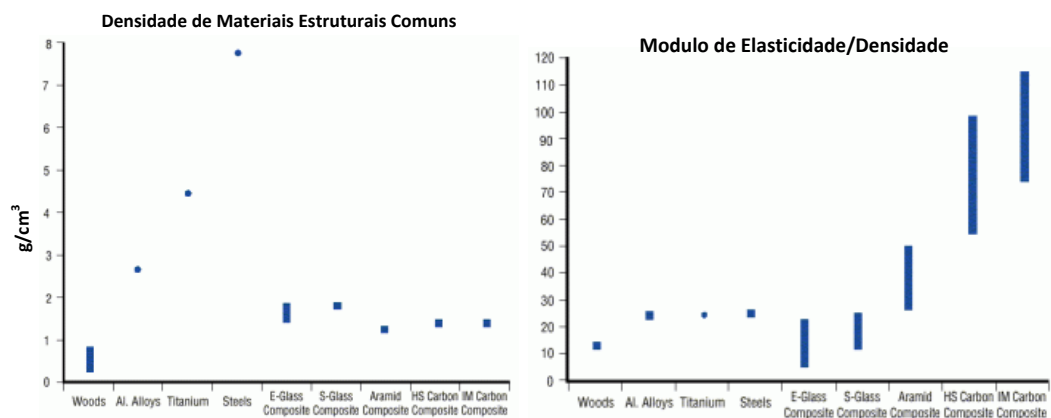
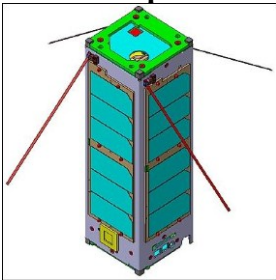





Figura 1.1 – Comparativo entre algumas propriedades dos materiais estruturais comuns e materiais compostos (adaptado de Gurit Holding AG, (2012)).

Diante dos crescentes avanços das pesquisas em engenharia de materiais nas últimas décadas, os materiais compostos têm assumido papel cada vez mais importante na indústria, fornecendo características mecânicas únicas que possibilitaram grandes ganhos em diversos setores, tornando-se fundamental em projetos de estruturas que exigem alto desempenho e confiabilidade, tais como aeronaves, satélites artificiais, instalações industriais, como ilustrado na Tab. 1.1.

Tabela 1.1 – Exemplos de aplicações dos materiais compostos em diversos setores.

Área	Exemplos de aplicação	Propriedades
Aeroespacial  OPTOS (<i>Optical Nanosatellite</i>) (adaptado de Martínez <i>et al.</i> (2010))	<ul style="list-style-type: none"> • Componentes Aéreos. • Estruturas de Satélite. • Vasos de Pressão. • Refletores parabólicos. • Onda guias. • Frames ópticos. • Instrumentação de medição. 	<ul style="list-style-type: none"> • Baixo peso • Materiais cuidadosamente selecionados de reforço para a expansão térmica próximo do zero.
Aeronáutica  Boeing 787 Dreamliner (adaptado de Georgiadis <i>et al.</i> (2008)).	<ul style="list-style-type: none"> • Fuselagens completas, estruturas para as asas e cauda (por exemplo, em aeronaves com motor e construção de planador, ultraleves). • Estruturas secundárias (revestimento de piso e parede), e peças da estrutura primária (unidade de cauda) para aviões de passageiros. 	<ul style="list-style-type: none"> • Baixo peso. • Força Superior estático e dinâmico. • Excelente resistência à fadiga. • Projeto Integrado. • Menos componentes (menor custo de montagem). • Resistente à corrosão.

Setor Industrial



Sistemas de encanamentos
(adaptado de Smith *et al.*, 2007).

- Corpos de helicóptero, pás do rotor, hélices, tanques.
- Movimento rápido de peças em máquinas de embalagem.
- Prensas de impressão
- Máquinas de tricotar e teares de energia, navios, sistemas de tubagens.
- Agitadores, elementos de bombas e caixas.
- Baixa inércia.
- Alta resistência dinâmica.
- Baixa manutenção.
- Alta resistência química.
- O design simples reúne com todos os requisitos.

Nesse contexto, destacadamente observa-se o setor aeroespacial, que requer estruturas resistentes e de mínimo peso, considerando ainda a observância de aspectos relacionados a conforto no interior das aeronaves. Dessa maneira, ao longo dos anos observou-se no setor um grande aumento no uso desses materiais, como no caso da companhia europeia Airbus®, ilustrado na Fig. 1.2.

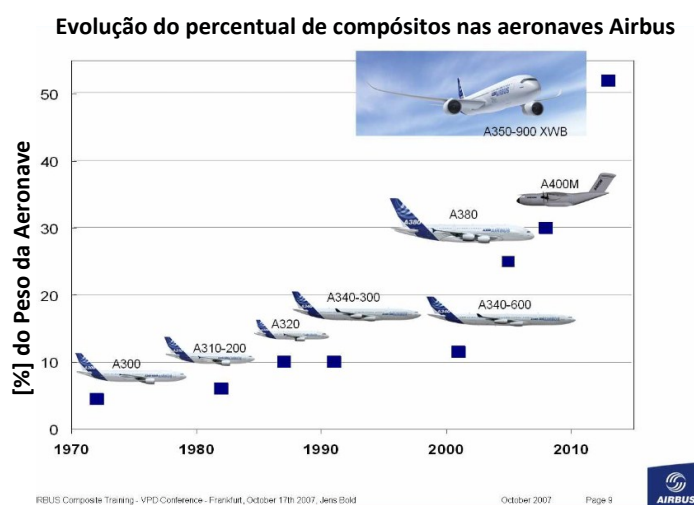


Figura 1.2 - Exemplo da crescente aplicação de materiais compostos na indústria aeronáutica (adaptado de AIRBUS (2007)).

Diante do que foi exposto, pode-se notar que os materiais compósitos estruturais estão sendo cada vez mais integrados em diversos produtos de alta tecnologia, notadamente nos setores aeroespacial e automobilístico. Neste tipo de aplicação, as estruturas compostas laminadas e/ou sanduíches estão frequentemente expostas a perturbações estáticas e dinâmicas que afetam significativamente as características mecânicas e de resposta (como resposta estática pode-se citar as deformações e distribuições de tensões, e como dinâmica,

pode-se citar as funções de resposta em frequência e modos de vibração) de tais estruturas. Além disso, ocorre um comprometimento da integridade estrutural dessas estruturas podendo levá-las ao colapso. Neste contexto, um aspecto importante a ser investigado, e que tem mobilizado um grande número de pesquisadores em todo o mundo, é o procedimento de modelagem numérico-computacional de estruturas compostas laminadas combinadas com técnicas passivas de atenuação de vibração e ruído (BERTHELOT, SEFRANI 2006; FARIA *et al.*, 2008).

Em meio às inúmeras técnicas empregadas para o controle de vibração e ruído em sistemas mecânicos, as chamadas técnicas de controle passivo têm sido incorporadas em muitos sistemas industriais devido às inúmeras vantagens quando comparadas com as técnicas de controle ativo, como por exemplo, baixo custo efetivo e de fácil manutenção e aplicação (LIMA, 2007). Além disso, tais técnicas não necessitam de nenhuma fonte de energia externa, fato que garante inerente estabilidade ao sistema e as tornam mais bem adaptadas a aplicações em sistemas industriais de grande porte. Tipicamente, o controle passivo de vibrações pode ser obtido com a utilização de materiais piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt* (VIANA, STEFFEN Jr., 2006; TRINDADE, BENJEDDOU, 2009; SANTOS, 2012). Portanto, a partir da combinação de estruturas compostas com materiais piezelétricos, torna-se de especial interesse o amortecimento das vibrações, uma vez que nessa associação de materiais é possível a transformação de deslocamentos mecânicos em tensões elétricas. Dessa maneira, com geração de tensão disponível, pode-se associar uma carga elétrica a esse arranjo, possibilitando circulação de corrente elétrica e eliminando assim a energia de vibração conforme ilustrado na Fig. 1.3 (GIURGIUTIU, 2002).

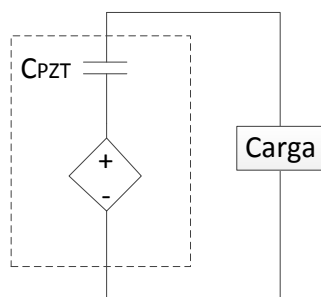


Figura 1.3 – Representação do elemento PZT em termos de circuito elétrico.

De acordo com os fundamentos de eletricidade, a capacidade que o material piezelétrico tem de gerar e sustentar tensão em seus terminais, o perfaz um elemento de

circuito de caráter capacitivo e, a associação da carga no arranjo da Figura 1.3, tipicamente em paralelo, é denominada de circuito *shunt*. Dessa maneira, tal associação pode ser convenientemente estipulada para propiciar máxima dissipação de energia para uma dada frequência de modo de vibração, condição essa que ocorre quando há a sintonização entre a carga e o PZT (BOYLESTAD, 2012), dando origem ao chamado amortecimento de estruturas via circuito elétrico *shunt* ressonante monomodal (HAGOOD; FLOTOW, 1991). Como extensão do conceito, para diversas frequências de vibração, pode-se desenvolver circuitos *shunt* de modo a mitigar mais de uma frequência, dando origem ao amortecimento via circuito elétrico *shunt* ressonante multimodal (FLEMING; BEHRENS; MOHEIMANI, 2002).

Considerando as potencialidades das estruturas inteligentes combinadas a circuitos elétricos *shunt*, e observando as limitações econômicas e avanço da complexidade e exigência dos sofisticados projetos estruturais atuais, consolidou-se o uso do método dos elementos finitos para a modelagem de tais sistemas (CARREIRA, BRISCHETTO, & NALI, 2011). Dessa maneira, na literatura existem várias teorias para modelagem de materiais compostos e posterior transcrição para a discretização em elementos finitos (REDDY, 1997). No presente trabalho, a teoria a ser utilizada é a FSDT – *First order Shear Deformation Theory* para os deslocamentos mecânicos e a *Partial Layerwise Theory* para os potenciais elétricos, constituindo a chamada Teoria Mista (DETWILER; SHEN; VENKAYYA, 1995), ilustrada na Figura 1.4. Tal associação possui como vantagem a boa aproximação da Teoria da Elasticidade Linear para materiais compostos associados a materiais piezelétricos e como limitação a necessidade de correção numérica para prevenir o efeito de aumento excessivo da rigidez (*shear locking*) para a modelagem de placas espessas.

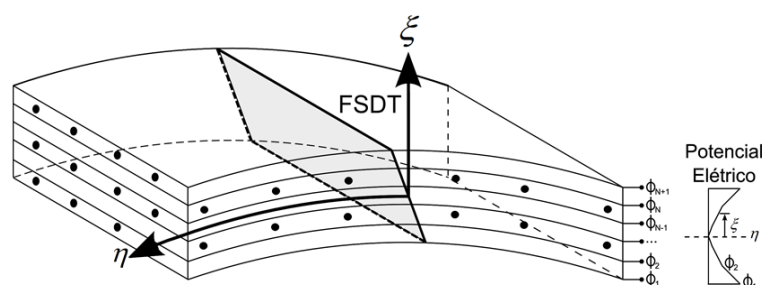


Figura 1.4 – Modelagem de estruturas compostas contendo elementos piezelétricos.

A partir da consolidação do uso de técnicas de modelagem e simulação de estruturas inteligentes, diversos trabalhos trataram da introdução de incertezas nos modelos, tais como o de Andreaus e Porfiri (2006), Ritto, Soize e Sampaio (2010) e Soize (2001; 2010), a fim de

mensurar a influência de pequenas variações nos parâmetros de projeto dessas estruturas. Tais trabalhos evidenciaram a importância da consideração das incertezas paramétricas e não-paramétricas, apontando os limites de projetos admissíveis e consequências das respostas das estruturas quando não observadas perturbações nas variáveis de interesse. Sendo assim, faz-se imprescindível o desenvolvimento de projetos que sejam ótimos e robustos frente às incertezas.

Dessa maneira, no contexto do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Estruturas Inteligentes em Engenharia, INCT-EIE, sediado no LMEst/UFU, este trabalho de dissertação apresenta uma proposta de projeto ótimo-robusto de circuitos elétricos *shunt* para o controle passivo de vibrações de estruturas compostas do tipo placas planas finas e moderadamente finas,

Além desse capítulo introdutório, o Capítulo 2 dedica-se à formulação e modelagem matemática do problema acoplado eletromecânico constituído por estruturas compostas incorporando elementos piezelétricos a serem acoplados a circuitos elétricos *shunt*. De posse do modelo de elementos finitos, é feita uma validação dos procedimentos de modelagem e implementação computacional via confrontação dos resultados obtidos em termos das respostas dinâmicas do sistema com os trabalhos disponíveis na literatura. Ainda nesse capítulo, um modelo inicial de placa composta contendo elemento piezelétrico associado a um circuito *shunt* ressonante é apresentado, sendo esse modelo considerado como sendo a referência para a avaliação das incertezas paramétricas a serem apresentadas na sequência.

O Capítulo 3 descreve o processo de investigação e obtenção do modelo probabilístico onde são consideradas as incertezas paramétricas nos parâmetros de resistência e indutância do circuito *shunt* ressonante. Além disso, serão também consideradas incertezas na espessura do elemento piezelétrico. O objetivo é dimensionar os limites de dispersão e a convergência em termos do número de tiragens aleatórias para o modelo probabilístico a ser empregado na otimização multiobjetivo robusta dos circuitos elétricos *shunt*.

No Capítulo 4 é apresentada as técnicas de otimização multiobjetivo determinística e robusta para as condições apresentadas no Capítulo 2. Além disso, neste mesmo capítulo, é discutido os resultados dos processos de otimização determinístico e robusto em termos da atenuação das vibrações e da robustez de cada solução.

No Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais, as conclusões gerais e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS COMPOSTAS CONTENDO ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS

Neste capítulo a teoria geral de placas compostas incorporando elementos piezelétricos é desenvolvida, baseado nos trabalhos realizados por Faria (2006) e Chee (2000). Para o modelo composto contendo elementos piezelétricos será utilizada a Teoria Mista, que envolve a combinação da teoria de cisalhamento de primeira ordem para os campos de deslocamentos mecânicos com a teoria discreta para os potenciais elétricos. Ênfase também é dada à parametrização do modelo de elementos finitos do sistema eletromecânico onde são colocadas em evidência todas as variáveis de projeto que caracterizam este sistema, e em particular os circuitos elétricos *shunt*. O modelo parametrizado possui a vantagem de conduzir a um procedimento sistemático de montagem das matrizes globais de elementos finitos com menor custo computacional, facilitando igualmente o cálculo de sensibilidade, a introdução das incertezas paramétricas via método da máxima entropia e a otimização robusta, a serem apresentadas em capítulos posteriores.

Na literatura, as teorias para a modelagem de placas compostas são classificadas de acordo com as hipóteses cinemáticas adotadas na aproximação dos deslocamentos mecânicos e as deformações, sendo divididas basicamente em duas categorias distintas, a saber:

- Teorias baseadas em Camada Equivalente Única (*Equivalent Single Layer Theory*):

Nesse tipo de teoria a estrutura composta é modelada como uma única camada via utilização de funções de aproximação para os comportamentos de deslocamentos ao longo das camadas do composto conforme ilustrado na Fig. 2.1(b). Esse tipo de teoria tem como vantagem a simplificação do modelo em termos matemáticos, tendo como ponto negativo o fato de que, a rigor, as tensões e deslocamentos no laminado são descontínuos, já que o próprio composto não é contínuo e sim formado por camadas discretas de material.

- Teorias baseadas em Camadas Equivalentes Discretas (*Layerwise Theory or Discrete Layer Theory*):

Neste tipo de teoria, cada camada da estrutura composta é modelada individualmente, como ilustrado na Fig. 2.1(a). Para materiais compostos essa teoria tem como vantagem descrição rigorosa do comportamento da estrutura, apresentando, entretanto, elevado custo computacional.

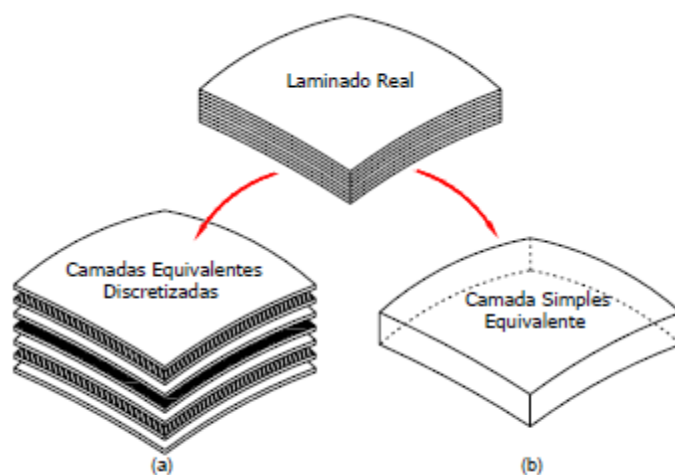


Figura 2.1 – Ilustração da Teoria das Camadas Equivalentes Discretas (a) e da Teoria da Camada Equivalente Única (b) (adaptada de Faria (2006)).

Em função da heterogeneidade das camadas no caso de estruturas compostas contendo sensores e/ou atuadores piezelétricos, as duas teorias acima são combinadas na Teoria Mista, na qual o conceito de Camada Equivalente Única é usado para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos e o conceito de Camadas Equivalentes Discretas é usado para aproximar os potenciais elétricos. A vantagem principal do uso da Teoria Mista está na redução do custo computacional comparado com a Teoria da Camada Equivalente Discreta na modelagem da parte mecânica da estrutura, além de permitir a acomodação de elementos piezelétricos no composto ao longo da estrutura. Além disso, a discretização dos potenciais elétricos é feita por camadas, cuja espessura é adotada de acordo com a espessura dos elementos piezelétricos. O potencial elétrico é considerado contínuo em cada camada, apresentando uma variação linear ao longo da espessura.

Nos trabalhos desenvolvidos por Reddy (1997), Benjeddou (2000) e Mendonça (2005) diversas teorias de camada equivalente única são usadas para a modelagem de vigas, placas e cascas compostas, sendo as principais a *Teoria Clássica dos Laminados (Classical Layer Theory – CLT)*, a *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (First order Shear*

Deformation Theory – FSDT), e a *Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (High order Shear Deformation Theory – HSDT)*, como ilustradas na Figura 2.2 abaixo.

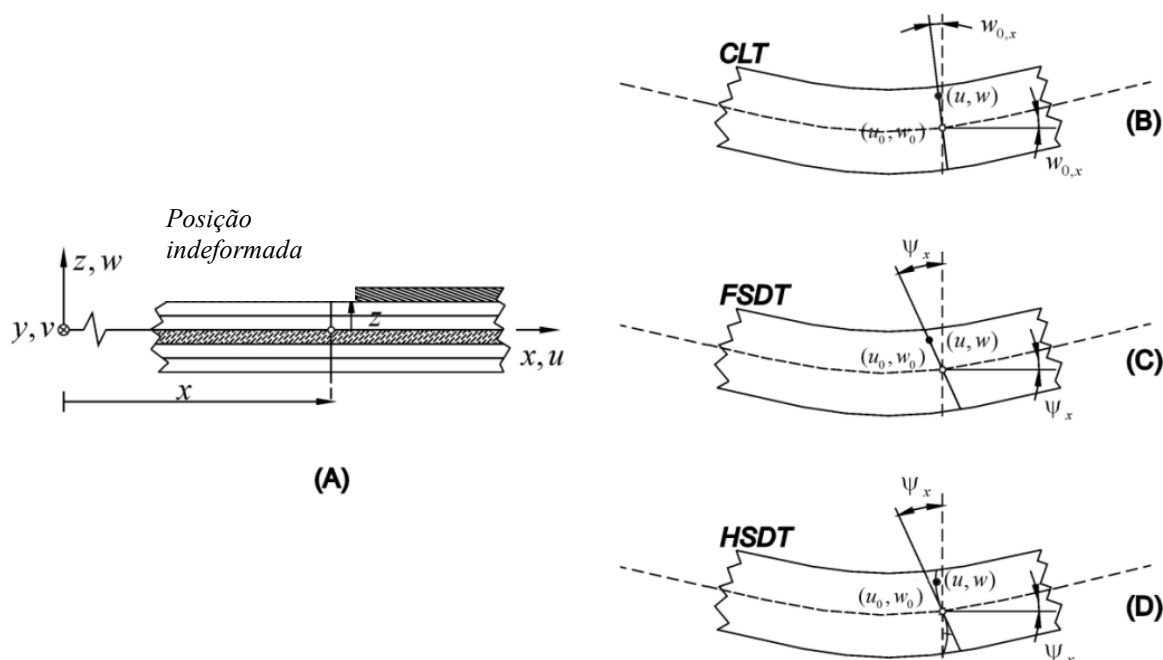


Figura 2.2 - Representação esquemática de uma placa composta (A) e a cinemática da deformação para uma camada equivalente única (extraída de Faria (2006)).

É importante destacar que as teorias CLT e FSDT apresentam erros na predição das tensões em estruturas compostas espessas onde a relação entre a espessura e o comprimento da placa é maior que 0,25 (FARIA, 2006; MENDONÇA, 2005). Neste caso, estas teorias são comumente recomendadas para a modelagem de estruturas compostas do tipo placas finas e moderadamente finas (CEN *et al.*, 2002). Segundo Reddy (1997), a teoria HSDT fornece melhor previsão das tensões cisalhantes transversais, ou seja, bem mais próximas da solução exata fornecida pela Teoria da Elasticidade Tridimensional, já que considera a deformação cisalhante transversal com distribuição parabólica. Portanto, ela é mais apropriada para a modelagem de placas compostas mais espessas ($\text{espessura/comprimento} > 0,25$). Entretanto, segundo Kulkarni e Bajoria (2003) e Mendonça (2005), o alto custo computacional dos modelos gerados via utilização da teoria HSDT deve ser levado em conta.

Matematicamente, a principal diferença entre as teorias FSDT e HSDT reside na ordem das funções polinomiais escolhidas para aproximar os campos de deslocamentos mecânicos, sendo linear na teoria FSDT e de terceira ordem na teoria HSDT. A teoria FSDT fornece uma melhor relação custo-benefício computacional, mas mostra-se inadequada na

predição de frequências naturais e modos de vibração de ordens elevadas e das distribuições das tensões sob o estratificado. Além disso, podem apresentar problemas de travamento comumente conhecido como *shear locking* na modelagem de estruturas compostas extremamente finas (espessura/comprimento < 0,02), além de requerer um fator de correção para as deformações cisalhantes transversais (MENDONÇA, 2005).

2.1. Formulação por elementos finitos do problema mecânico

Nesta seção, a formulação de um elemento finito de placa plana composta é apresentada baseada nos trabalhos originais de Liu, Peng e Lam (1999), Chee, Tong e Steven (2000) e Faria (2006). A Figura 2.3 ilustra o elemento finito a ser estudado onde z_k , h_k e θ_k indicam, respectivamente, a coordenada ao longo da espessura, a espessura e o ângulo de orientação das fibras unidirecionais de uma camada qualquer, k .

De acordo com a teoria FSDT, os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento podem ser expressos da seguinte forma:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(z) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (2.1)$$

Na Eq. (2.1), tem-se:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t) \ v(x, y, z, t) \ w(x, y, z, t)]^T \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{u}(x, y, t) = [u_0(x, y, t) \ v_0(x, y, t) \ w_0(x, y, t) \ \psi_x(x, y, t) \ \psi_y(x, y, t)]^T \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 + z\mathbf{A}_2 \quad (2.2c)$$

onde $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ e $w(x, y, z, t)$ são, respectivamente, os deslocamentos nas direções x , y e z . (u_0, v_0, w_0) e (ψ_x, ψ_y) designam os deslocamentos no plano médio nas direções x , y e z , e as rotações da seção transversal, respectivamente. Além disso, deve-se notar a partir da Eq. (2.1) que a aproximação do campo de deslocamentos na direção z é feita separadamente das outras direções via procedimento similar ao de separação de variáveis.

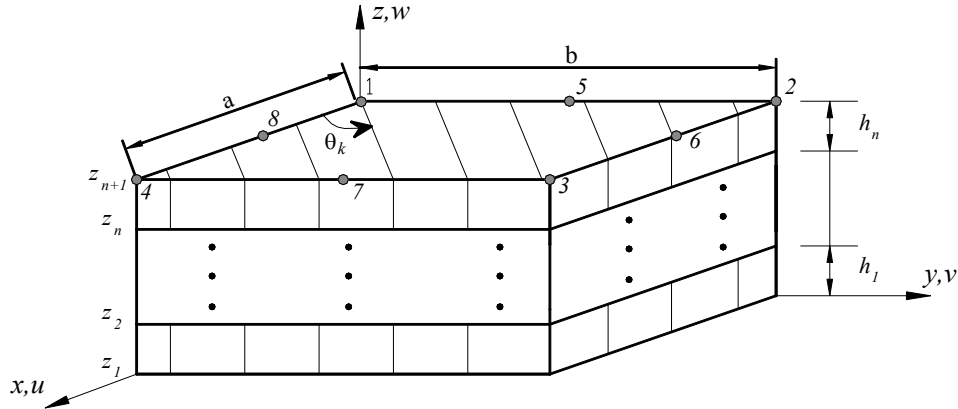


Figura 2.3 – Ilustração dos componentes do elemento finito de placa composta.

2.1.1. Relações deslocamentos-deformações

As relações usuais entre as deformações e os deslocamentos são usadas e as deformações resultantes podem ser separadas nos respectivos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = [\mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_1] \mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{D}_b(z) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (2.3a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{D}_s(z) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (2.3b)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy}]^T$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = [\gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$, $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$, $\varepsilon_{yy} = \partial v / \partial y$, $\varepsilon_{zz} = \partial w / \partial z$, $\gamma_{xy} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$, $\gamma_{yz} = (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y)$ e $\gamma_{zx} = (\partial u / \partial z + \partial w / \partial x)$. As matrizes \mathbf{D}_i ($i = 0, 1, 2$) são formadas pelos operadores diferenciais que aparecem nas relações entre as deformações e os deslocamentos, como detalhadas no Anexo I.

2.1.2. Discretização por elementos finitos

A discretização do campo de deslocamentos é feita através da utilização de funções de interpolação. Neste caso, para um elemento de placa plana retangular de 8 nós da família *serendipity* (REDDY, 1997), as cinco variáveis que formam o vetor $\mathbf{u}(x, y, t)$ são interpoladas a partir dos seus valores nodais conforme relação seguinte:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, t) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}(t) \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{u}(t) = [\mathbf{u}_1^T(t) \mathbf{u}_2^T(t) \dots \mathbf{u}_8^T(t)]^T$, $\mathbf{u}_i(t) = [u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi}]^T$ ($i = 1$ a 8). $\mathbf{N}(\xi, \eta) \in R^{5 \times 40}$ é a matriz formada pelas funções de interpolação do elemento da família *serendipity* formulada no sistema de coordenadas local (ξ, η) , $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= -(1/4)(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= +(1/2)(1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= -(1/4)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= +(1/2)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \\ N_5(\xi, \eta) &= -(1/4)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) \\ N_6(\xi, \eta) &= +(1/2)(1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_7(\xi, \eta) &= -(1/4)(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \\ N_8(\xi, \eta) &= +(1/2)(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

A Figura 2.4 abaixo ilustra o elemento de dimensões (a, b) em coordenadas locais e globais, onde $a = 2a'$ e $b = 2b'$. Portanto, obtém as seguintes relações entre as coordenadas:

$$x = \frac{1}{2} [\xi(x_8 - x_4) + x_8 + x_4] \text{ e } y = \frac{1}{2} [\eta(y_6 - y_2) + y_6 + y_2] \quad (2.6)$$

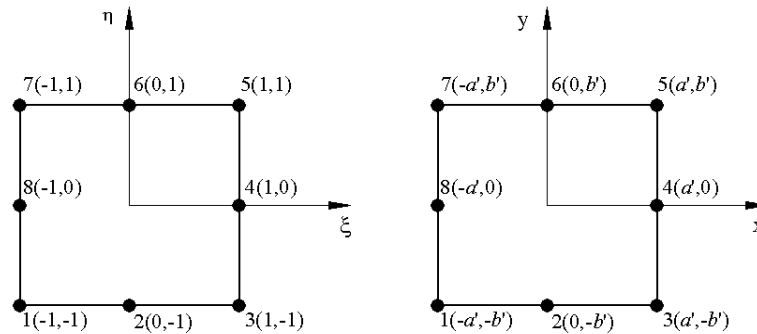


Figura 2.4 – Elemento retangular de 8 nós em coordenadas locais (esq.) e globais (dir.) (adaptada de Faria (2006)).

A matriz Jacobiana de transformação linear entre as coordenadas globais e locais pode ser definida conforme a Eq. (2.7), e o Jacobiano (determinante da matriz Jacobiana) assume, para este elemento, o valor $\det(\mathbf{J}) = ab/4$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_8 - x_4) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

As Eqs. (2.1) e (2.3) podem ser então definidas em termos das variáveis nodais:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}(t) \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(x, y, z, t) = \mathbf{D}_b(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}(t) = \mathbf{B}_b(\xi, \eta, z) \mathbf{u}(t) \quad (2.9a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x, y, z, t) = \mathbf{D}_s(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{u}(t) = \mathbf{B}_s(\xi, \eta, z) \mathbf{u}(t) \quad (2.9b)$$

Utilizando as interpolações dos deslocamentos e deformações, as expressões das energias cinéticas e de deformação podem ser formuladas, respectivamente, como segue:

$$\mathbf{T}_E(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T(t) \mathbf{M}_u^{(e)} \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{V}_E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K}_u^{(e)} \mathbf{u}(t) \quad (2.10b)$$

onde as matrizes elementares de massa e rigidezes mecânicas são calculadas como segue:

$$\mathbf{M}_u^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \rho_k \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{A}^T(z) \mathbf{A}(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{K}_{ub}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_b^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_b(\theta_k) \mathbf{B}_b(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{K}_{us}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \mathbf{B}_s^T(\xi, \eta, z) \mathbf{C}_s(\theta_k) \mathbf{B}_s(\xi, \eta, z) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi dz \quad (2.11c)$$

As Equações (2.11b) e (2.11c), $\mathbf{C}_b(\theta_k)$ e $\mathbf{C}_s(\theta_k)$ designam, respectivamente, as matrizes das propriedades elásticas ortotrópicas relativas aos efeitos de flexão-membrana e

cisalhamento, as quais são construídas de acordo com a Teoria Clássica do Laminado CLT (*Classical Laminate Theory*) via utilização das matrizes de transformação $\mathbf{T}_b(\theta_k)$ e $\mathbf{T}_s(\theta_k)$ como seguem (ver detalhes no Anexo II):

$$\mathbf{C}_b(\theta_k) = \mathbf{T}_b(\theta_k) \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_b^T(\theta_k) \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{C}_s(\theta_k) = \mathbf{T}_s(\theta_k) \bar{\mathbf{C}}_s \mathbf{T}_s^T(\theta_k) \quad (2.12b)$$

$$\text{onde } \bar{\mathbf{C}}_b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{11} & 0 \\ C_{31} & C_{11} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{\mathbf{C}}_s = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}.$$

Das matrizes elementares calculadas para cada elemento de uma malha de elementos finitos, as equações do movimento a nível global podem ser construídas levando-se em conta a conectividade dos nós via procedimento padrão de elementos finitos (COOK, 1974; BATHE; THORNTON, 1982; MOAVENI, 1999). Após a montagem, a equação do movimento a nível global para o sistema mecânico pode ser escrita, no domínio do tempo, da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_u \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{M}_u = \bigcup_{e=1}^{nelem} \mathbf{M}_u^{(e)}$, $\mathbf{K}_u = \bigcup_{e=1}^{nelem} (\mathbf{K}_{ub}^{(e)} + \mathbf{K}_{us}^{(e)})$ são as matrizes globais de massa e rigidez do sistema mecânico, e o símbolo \bigcup indica a montagem matricial e $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ indicam, respectivamente, os vetores dos graus de liberdade globais e das forças generalizadas.

Através da Eq. (2.13) é possível calcular as respostas dinâmicas do sistema mecânico nos domínios do tempo e da frequência, além da formulação do problema de autovalores.

2.1.3. Parametrização do modelo mecânico

Neste ponto, deve-se destacar que no contexto do presente estudo, as sensibilidades serão calculadas para um conjunto de parâmetros físicos e/ou geométricos que caracterizam

não somente a estrutura como as espessuras das camadas e as direções das fibras do composto, mas também dos variáveis dos circuitos elétricos *shunt* como resistência e indutância. Em geral, tais parâmetros podem intervir de forma complicada nas matrizes do modelo de elementos finitos, dificultando a introdução das incertezas paramétricas e eventualmente o cálculo das sensibilidades via definição das derivadas de primeira ordem. Neste sentido, torna-se interessante realizar uma parametrização do modelo de elementos finitos, que é entendida como sendo o procedimento de fatoração das variáveis de projeto das matrizes elementares do modelo. Este procedimento permite calcular de maneira mais conveniente e eficiente as sensibilidades de cada variável de projeto via cálculo de derivadas, além de facilitar a introdução das incertezas paramétricas e o uso de estratégias de otimização robusta para o projeto dos circuitos elétricos passivos. Por fim, é importante salientar que tal procedimento leva a um menor custo computacional envolvido em procedimentos iterativos de estocagem matricial.

Como o ângulo de orientação das fibras, θ_k , é um parâmetro de projeto a ser considerado na otimização robusta envolvendo as incertezas paramétricas, o mesmo pode ser fatorado da matriz de transformação $T(\theta_k)$ da forma:

$$\mathbf{T}_b(\theta_k) = c_k^2 \mathbf{T}_{b_1} + \mathbf{T}_{b_2} + s_k c_k \mathbf{T}_{b_3} \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{T}_s(\theta_k) = c_k \mathbf{T}_{s_1} + s_k \mathbf{T}_{s_2} \quad (2.14b)$$

$$\text{onde } \mathbf{T}_{b_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{b_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{b_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{s_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{s_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, s_k = \sin \theta_k \text{ e } c_k = \cos \theta_k$$

Combinado as expressões (2.14) e (2.12) e após algumas manipulações matemáticas, as matrizes $\mathbf{C}_b(\theta_k)$ e $\mathbf{C}_s(\theta_k)$ podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{C}_b(\theta_k) = c_k^4 \overline{\mathbf{C}}_{b_1} + c_k^2 \overline{\mathbf{C}}_{b_2} + s_k c_k^3 \overline{\mathbf{C}}_{b_3} + \overline{\mathbf{C}}_{b_4} + s_k c_k \overline{\mathbf{C}}_{b_5} + s_k^2 c_k^2 \overline{\mathbf{C}}_{b_6} \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{C}_s(\theta_k) = c_k^2 \bar{\mathbf{C}}_{s_1} + s_k c_k \bar{\mathbf{C}}_{s_2} + s_k^2 \bar{\mathbf{C}}_{s_3} \quad (2.15b)$$

onde $\bar{\mathbf{C}}_{b_1} = \mathbf{T}_{b_1} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_1}^T$, $\bar{\mathbf{C}}_{b_2} = \mathbf{T}_{b_1} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_2}^T + \mathbf{T}_{b_2} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_1}^T$, $\bar{\mathbf{C}}_{b_3} = \mathbf{T}_{b_1} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_3}^T + \mathbf{T}_{b_3} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_1}^T$, $\bar{\mathbf{C}}_{b_4} = \mathbf{T}_{b_2} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_2}^T$,
 $\bar{\mathbf{C}}_{b_5} = \mathbf{T}_{b_2} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_3}^T + \mathbf{T}_{b_3} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_2}^T$, $\bar{\mathbf{C}}_{b_6} = \mathbf{T}_{b_3} \bar{\mathbf{C}}_b \mathbf{T}_{b_3}^T$, $\bar{\mathbf{C}}_{s_1} = \mathbf{T}_{s_1} \bar{\mathbf{C}}_s \mathbf{T}_{s_1}^T$, $\bar{\mathbf{C}}_{s_2} = \mathbf{T}_{s_1} \bar{\mathbf{C}}_s \mathbf{T}_{s_2}^T + \mathbf{T}_{s_2} \bar{\mathbf{C}}_s \mathbf{T}_{s_1}^T$ e
 $\bar{\mathbf{C}}_{s_3} = \mathbf{T}_{s_2} \bar{\mathbf{C}}_s \mathbf{T}_{s_2}^T$.

As Eqs. (2.15) e (2.11) podem ser combinadas para formar as seguintes matrizes de massa e rigidezes no qual os parâmetros de projeto h_k , s_k e c_k são fatorados:

$$\mathbf{M}_u^{(e)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 t_k^i \rho_k \mathbf{M}_{u_i}^{(k)} \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{K}_{ub}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 t_k^i \left[c_k^4 \mathbf{K}_{ub_1}^{(k)} + c_k^2 \mathbf{K}_{ub_2}^{(k)} + s_k c_k^3 \mathbf{K}_{ub_3}^{(k)} + \mathbf{K}_{ub_4}^{(k)} + s_k c_k \mathbf{K}_{ub_5}^{(k)} + s_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{ub_6}^{(k)} \right] \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{K}_{us}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 t_k^i \left[c_k^2 \mathbf{K}_{s_1}^{(k)} + s_k c_k \mathbf{K}_{s_2}^{(k)} + s_k^2 \mathbf{K}_{s_3}^{(k)} \right] \quad (2.16c)$$

onde $t_k^i = [k^i - (k-1)^i] h_k^i$, e as matrizes $\mathbf{M}_{u_i}^{(k)}$, ${}_j \mathbf{K}_{ub_i}^{(k)}$ ($j=1, \dots, 6$) e ${}_j \mathbf{K}_{us_i}^{(k)}$ ($j=1, \dots, 3$) são definidas como segue:

$$\mathbf{M}_{u_i}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{A}}_i \mathbf{N}) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.17a)$$

$${}_j \mathbf{K}_{ub_1}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_{b_0}^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j} \mathbf{B}_{b_0}) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.17b)$$

$${}_j \mathbf{K}_{ub_2}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_{b_0}^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j} \mathbf{B}_{b_l} + \mathbf{B}_{b_l}^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j} \mathbf{B}_{b_0}) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.17c)$$

$${}_j \mathbf{K}_{ub_3}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_{b_l}^T \bar{\mathbf{C}}_{b_j} \mathbf{B}_{b_l}) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.17d)$$

$${}_j \mathbf{K}_{s_1}^{(k)} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_{s_0}^T \bar{\mathbf{C}}_{s_j} \mathbf{B}_{s_0}) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.17e)$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\xi, \eta)$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi, \eta)$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0$ e $\bar{\mathbf{A}}_3 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1$.

2.2. Modelagem por elementos finitos do problema acoplado eletromecânico

Segundo Nye (1969), para uma estrutura composta como a ilustrada na Fig. 2.3 contendo elementos piezelétricos (PZT) de natureza ortorrômbica (que apresentam ortotropia transversa) (CALLISTER, 2002), quando se aplica um campo elétrico ao longo de sua direção transversal, z , deformações mecânicas são induzidas no elemento PZT nas direções x e y . Neste caso, a relação constitutiva da piezeletricidade linear que define o comportamento desses materiais, pode ser expressa, no sistema de coordenadas local, da seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \chi_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (2.18a)$$

ou ainda sob a seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \chi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ E \end{Bmatrix} \quad (2.18b)$$

onde σ e ε representam, respectivamente, as tensões e as deformações mecânicas, D e E são os deslocamentos elétricos e o vetor campo elétrico, respectivamente, C é a matriz das propriedades mecânicas da estrutura, e e χ designam as constantes dielétricas e a permissividade dielétrica do elemento piezelétrico, respectivamente.

É importante salientar que no presente estudo, será assumido que todos os elementos piezelétricos utilizados nas simulações numéricas são polarizados ao longo da direção transversal, z , perpendicular ao plano da placa composta.

2.2.1. Parametrização do ângulo de orientação das fibras

Foi visto na Seção 2.1.3 que as fibras de uma camada genérica k do composto podem ser rotacionadas, θ_k , em relação ao eixo transversal z , via utilização da matriz de transformação $T(\theta_k)$. Para o caso eletromecânico, o mesmo procedimento pode ser feito via utilização da matriz de transformação, $Q(\theta_k)$. Neste caso, a partir das expressões (2.18b) e (2.12), as expressões que definem os efeitos de flexão-membrana e cisalhamento do problema acoplado eletromecânico no sistema de coordenadas globais (ver detalhes no Anexo II), podem ser escritas como segue:

- Flexão-membrana

$$\sigma_b = T_b(\theta_k) \bar{C}_b T_b^T(\theta_k) \epsilon_b - T_b(\theta_k) \bar{e}_b Q^{-1}(\theta_k) E \quad (2.19a)$$

$$D_0 = Q(\theta_k) \bar{e}_b^T T_b^T(\theta_k) \epsilon_b - Q(\theta_k) \bar{\chi}_b Q^{-1}(\theta_k) E \quad (2.19b)$$

- Cisalhamento

$$\sigma_s = T_s(\theta_k) \bar{C}_s T_s^T(\theta_k) \epsilon_s - T_s(\theta_k) \bar{e}_s Q^{-1}(\theta_k) E \quad (2.20a)$$

$$D_i = Q(\theta_k) \bar{e}_s^T T_s^T(\theta_k) \epsilon_s - Q(\theta_k) \bar{\chi}_s Q^{-1}(\theta_k) E \quad (2.20b)$$

onde $\sigma_b = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy}]^T$, $\epsilon_b = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy}]^T$, $\sigma_s = [\tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T$,

$$\epsilon_s = [\gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}]^T \bar{e}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\chi}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}, \bar{e}_s = \begin{bmatrix} 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\chi}_s = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_0 = D_z, D_i = [D_x \quad D_y]^T \text{ e } E = [E_x \quad E_y \quad E_z]^T.$$

Da mesma forma como foi desenvolvido na Seção 2.1.3, o ângulo de orientação das fibras, θ_k , pode ser fatorado da matriz, $Q(\theta_k)$, e sua inversa, $Q^{-1}(\theta_k)$, da seguinte forma:

$$Q(\theta_k) = c_k Q_l + Q_2 + s_k Q_3 \quad (2.21a)$$

$$Q^{1-}(\theta_k) = c_k Q_l + Q_2 + s_k Q_{3i} \quad (2.21b)$$

$$\text{onde } \mathbf{Q}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q}_{3i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De acordo com Suleman e Venkayya (1995) e Saravanos (1997), os deslocamentos elétricos relativos à separação dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, são comumente denominados de deslocamentos de circuito aberto de sub-índice “o”, e de deslocamentos de curto-circuito cujo o sub-índice é “i”, respectivamente. Portanto, combinado as expressões (2.15) com as Eqs. (2.19) a (2.21) e após algumas manipulações matemáticas, obtêm-se as expressões em função das propriedades do material para o sistema de equações que representam o acoplamento eletromecânico:

- Flexão-membrana

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{C}_b(\theta_k) \boldsymbol{\varepsilon}_b - \mathbf{e}_b(\theta_k) \mathbf{E} \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{e}_b^T(\theta_k) \boldsymbol{\varepsilon}_b - \boldsymbol{\chi}_b(\theta_k) \mathbf{E} \quad (2.22b)$$

- Cisalhamento

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{C}_s(\theta_k) \boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{e}_s(\theta_k) \mathbf{E} \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{e}_s^T(\theta_k) \boldsymbol{\varepsilon}_s - \boldsymbol{\chi}_s(\theta_k) \mathbf{E} \quad (2.23b)$$

Nas Eqs. (2.18) e (2.19), as matrizes dependentes do ângulo de orientação das fibras \mathbf{e} e $\boldsymbol{\chi}$ assumem as seguintes formas parametrizadas:

$$\mathbf{e}_b(\theta_k) = c_k^2 \bar{\mathbf{e}}_{b_1} + \bar{\mathbf{e}}_{b_2} + s_k c_k \bar{\mathbf{e}}_{b_3} \quad (2.24a)$$

$$\boldsymbol{\chi}_b(\theta_k) = \bar{\boldsymbol{\chi}}_{b_1} \quad (2.24b)$$

$$\mathbf{e}_s(\theta_k) = c_k^2 \bar{\mathbf{e}}_{s_1} + s_k c_k \bar{\mathbf{e}}_{s_2} + s_k^2 \bar{\mathbf{e}}_{s_3} \quad (2.24c)$$

$$\boldsymbol{\chi}_s(\theta_k) = c_k^2 \bar{\boldsymbol{\chi}}_{s_1} + s_k c_k \bar{\boldsymbol{\chi}}_{s_2} + s_k^2 \bar{\boldsymbol{\chi}}_{s_3} \quad (2.24d)$$

onde $\bar{e}_{b_1} = T_{b_1} \bar{e}_b Q_2$, $\bar{e}_{b_2} = T_{b_2} \bar{e}_b Q_2$, $\bar{e}_{b_3} = T_{b_3} \bar{e}_b Q_2$, $\bar{e}_{s_1} = T_{s_1} \bar{e}_s Q_1$, $\bar{e}_{s_2} = T_{s_1} \bar{e}_s Q_{3i} + T_{s_2} \bar{e}_s Q_1$,
 $\bar{e}_{s_3} = T_{s_2} \bar{e}_s Q_{3i}$, $\bar{\chi}_{b_1} = Q_2 \bar{\chi}_b Q_2$, $\bar{\chi}_{s_1} = Q_1 \bar{\chi}_s Q_1$, $\bar{\chi}_{s_3} = Q_3 \bar{\chi}_s Q_3$ e $\bar{\chi}_{s_2} = Q_1 \bar{\chi}_s Q_{3i} + Q_3 \bar{\chi}_s Q_1$.

2.2.2. Discretização do potencial elétrico por camadas

Como descrito na Seção 2.1 deste capítulo, a Teoria da Camada Equivalente Única será usada para modelagem das tensões e deformações mecânicas da estrutura composta devido à sua boa aproximação numérica para placas relativamente finas aliado ao baixo custo computacional quando comparada com as teorias de alta ordem (FARIA, 2006). Entretanto, devido à típica heterogeneidade das propriedades elétricas dos elementos piezelétricos, a melhor técnica para a modelagem do potencial elétrico ao longo dessas camadas é a utilização da Teoria Mista, que combina a Teoria da Camada Equivalente Única para a aproximação dos deslocamentos mecânicos, e a Teoria das Camadas Equivalentes Discretas para a aproximação dos potenciais elétricos segundo os trabalhos desenvolvidos por Suleman & Venkayya (1995) e Saravanos et al. (1997). Ainda segundo esses autores, o potencial elétrico para uma camada genérica, k , pode ser definido da seguinte forma:

$$\phi_k(\xi, \eta, z, t) = L_{kd}(z) \phi_k(\xi, \eta, t) + L_{ku}(z) \phi_{k+1}(\xi, \eta, t) \quad (2.25)$$

onde $\phi_k(\xi, \eta, t)$ e $\phi_{k+1}(\xi, \eta, t)$ são, respectivamente, as funções de interface inferior e superior da camada, k , $L_{kd}(z) = (z_{k+1} - z)/(z_{k+1} - z_k)$ e $L_{ku}(z) = (z - z_k)/(z_{k+1} - z_k)$ designam as respectivas funções *layerwise* para as interfaces inferior e superior.

Desta forma, o vetor campo elétrico presente nas Eqs. (2.22) e (2.23) é definido como sendo o negativo do gradiente do potencial elétrico da seguinte forma (BOYLESTAD, 2012):

$$\mathbf{E}_k(\xi, \eta, z, t) = -\nabla \phi_k(\xi, \eta, t) = -\mathbf{L}_k^\partial(z) \boldsymbol{\phi}_k(\xi, \eta, t) \quad (2.26)$$

$$\text{onde } \mathbf{L}_k^\partial(z) = - \begin{bmatrix} L_{kd}(z) \partial/\partial x & L_{ku}(z) \partial/\partial x \\ L_{kd}(z) \partial/\partial y & L_{ku}(z) \partial/\partial y \\ 1/(z_k - z_{k+1}) & 1/(z_{k+1} - z_k) \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\phi}_k(\xi, \eta, t) = \begin{Bmatrix} \phi_k(\xi, \eta, t) \\ \phi_{k+1}(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix}.$$

O vetor $\phi_k(\xi, \eta, t)$ contendo as funções de interface pode ser escrito em termos das funções de forma (2.5) para o elemento de placa plana da família *serendipity* de oito nós, e do vetor contendo os potenciais elétricos nodais, $\varphi_k(t)$, da seguinte forma:

$$\phi_k(\xi, \eta, t) = N(\xi, \eta) \varphi_k(t) \quad (2.27)$$

A título de exemplo, para o caso de uma estrutura formada por uma única camada com duas interfaces como a ilustrada na Fig. 2.5, a Eq. (2.27) assume a forma apresentada na Eq. (2.18). Já para uma estrutura formada por n camadas, $\phi \in R^{(n+1)}$, $N \in R^{(n+1) \times (8n+8)}$ e $\varphi \in R^{8(n+1)}$.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1(\xi, \eta, t) \\ \phi_2(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & \dots & N_8(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & \dots & 0 & N_8(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \\ \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{22}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{18}(t) \\ \varphi_{28}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

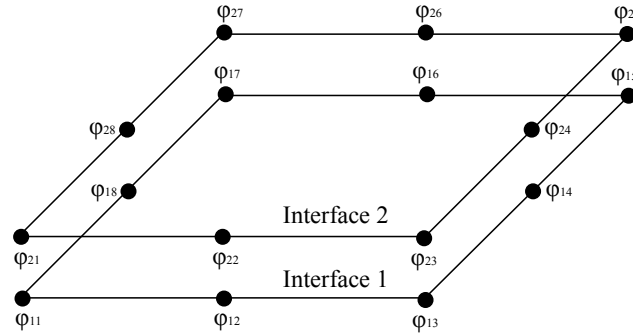


Figura 2.5 – Representação esquemática dos potenciais elétricos nodais por interfaces.

Pela análise da Fig. 2.5, nota-se que cada camada terá um conjunto de potenciais elétricos nodais, $\varphi_{ij}(t)$, conforme a interface i e o nó j . Além disso, para obter as funções dos potenciais elétricos ao longo da espessura, serão aplicadas as funções de camada equivalente única definida na Eq. (2.25). Por exemplo, para uma estrutura formada por quatro camadas como ilustrado na Fig.(2.6) com elementos PZTs localizados nas camadas 1 e 3, tem-se:

$$\phi_1(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} L_{1d}(z) & L_{1u}(z) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(x, y, t) \\ \phi_2(x, y, t) \\ \phi_3(x, y, t) \\ \phi_4(x, y, t) \\ \phi_5(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (2.29a)$$

$$\phi_3(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_{3d}(z) & L_{3u}(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(x, y, t) \\ \phi_2(x, y, t) \\ \phi_3(x, y, t) \\ \phi_4(x, y, t) \\ \phi_5(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (2.29b)$$

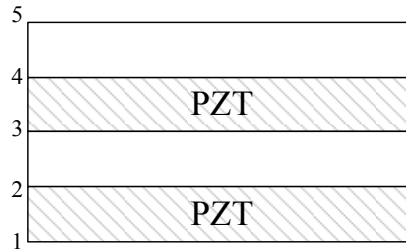


Figura 2.6 – Ilustração de uma estrutura composta contendo elementos piezelétricos.

Combinando as Eqs. (2.26) e (2.27) obtém-se a seguinte expressão para o potencial elétrico de uma camada genérica, k :

$$\mathbf{E}_k(\xi, \eta, z, t) = -\mathbf{L}_k^0(z) \mathbf{N}(\xi, \eta) \boldsymbol{\varphi}_k(t) = \mathbf{B}_\phi(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_k(t) \quad (2.30)$$

onde para uma estrutura formada por n camadas, $\mathbf{B}_\phi(\xi, \eta, z) \in R^{3 \times 8(n+1)}$ e $\boldsymbol{\varphi}_k(t) \in R^{8(n+1) \times 1}$.

Além disso, de acordo com o procedimento de separação dos efeitos em flexão-membrana e cisalhamento, o vetor campo elétrico, $\mathbf{E}_k(\xi, \eta, z, t)$, pode ser separado nos vetores $\mathbf{E}_k^0(\xi, \eta, z, t)$ e $\mathbf{E}_k^i(\xi, \eta, z, t)$, referindo-se, respectivamente, nas condições de circuito aberto e circuito fechado, conforme apresentado a seguir:

$$\mathbf{E}_k^0(\xi, \eta, z, t) = -\mathbf{B}_{\phi_0}(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_k(t) \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{E}_k^i(\xi, \eta, z, t) = -\mathbf{B}_{\phi_i}(\xi, \eta, z) \boldsymbol{\varphi}_k(t) \quad (2.31b)$$

$$\text{onde } \mathbf{B}_{\phi_i} = \begin{bmatrix} L_{kd}(z) \frac{\partial}{\partial x} & L_{ku}(z) \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{kd}(z) \frac{\partial}{\partial y} & L_{ku}(z) \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{N}(\xi, \eta) \text{ e } \mathbf{B}_{\phi_0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ (z_{k+1} - z_k) & (z_{k+1} - z_k) \end{bmatrix} \mathbf{N}(\xi, \eta).$$

2.2.3. Parametrização do modelo eletromecânico

A partir das expressões (2.31) e utilizando o mesmo procedimento apresentado na Seção 2.1.3, a espessura das camadas que intervêm nas matrizes $\mathbf{B}_{\phi_i}^k$ e $\mathbf{B}_{\phi_0}^k$, chegando-se às seguintes expressões:

$$\mathbf{B}_{\phi_i} = \frac{1}{t_k} \mathbf{B}_{\phi_i}^1 + \frac{z}{t_k} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{B}_{\phi_0} = \frac{1}{t_k} \mathbf{B}_{\phi_0}^1 \quad (2.32b)$$

$$\text{onde } t_k = (z_{k+1} - z_k) = \begin{bmatrix} k & -(k-1) \end{bmatrix} h_k, \quad \mathbf{B}_{\phi_i}^1 = \begin{bmatrix} {}_x \mathbf{B}_{\phi_i}^1 & {}_y \mathbf{B}_{\phi_i}^1 \end{bmatrix}^T \text{ e } \mathbf{B}_{\phi_i}^2 = \begin{bmatrix} {}_x \mathbf{B}_{\phi_i}^2 & {}_y \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \end{bmatrix}^T.$$

Além disso, as matrizes ${}_x \mathbf{B}_{\phi_i}^1$, ${}_y \mathbf{B}_{\phi_i}^1$, ${}_x \mathbf{B}_{\phi_i}^2$, ${}_y \mathbf{B}_{\phi_i}^2$ e $\mathbf{B}_{\phi_0}^1$ são obtidas como segue:

$${}_x \mathbf{B}_{\phi_i}^1 = \begin{bmatrix} L_{kd}^1 N_1^\xi & L_{ku}^1 N_1^\xi & \dots & L_{kd}^1 N_8^\xi & L_{ku}^1 N_8^\xi \end{bmatrix} \quad (2.33a)$$

$${}_y \mathbf{B}_{\phi_i}^1 = \begin{bmatrix} L_{kd}^1 N_1^\eta & L_{ku}^1 N_1^\eta & \dots & L_{kd}^1 N_8^\eta & L_{ku}^1 N_8^\eta \end{bmatrix} \quad (2.33b)$$

$${}_x \mathbf{B}_{\phi_i}^2 = \begin{bmatrix} L_{kd}^2 N_1^\xi & L_{ku}^2 N_1^\xi & \dots & L_{kd}^2 N_8^\xi & L_{ku}^2 N_8^\xi \end{bmatrix} \quad (2.33c)$$

$${}_y \mathbf{B}_{\phi_i}^2 = \begin{bmatrix} L_{kd}^2 N_1^\eta & L_{ku}^2 N_1^\eta & \dots & L_{kd}^2 N_8^\eta & L_{ku}^2 N_8^\eta \end{bmatrix} \quad (2.33d)$$

$$\mathbf{B}_{\phi_0}^1 = \begin{bmatrix} L_{kd}^2 N_1 & L_{ku}^2 N_1 & \dots & L_{kd}^2 N_8 & L_{ku}^2 N_8 \end{bmatrix} \quad (2.33e)$$

onde $N_i^\xi = \partial N_i / \partial \xi$ e $N_i^\eta = \partial N_i / \partial \eta$ com $i=1, \dots, 8$. $L_{kd} = z_{k+1} - z$ e $L_{ku} = z_k - z$.

2.2.4. Obtenção das matrizes eletromecânicas fatoradas

A partir da modelagem matemática empregando a teoria mista para as tensões e deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos, a próxima etapa consiste na obtenção das matrizes de massa e rigidezes do sistema levando-se em conta o procedimento de parametrização. Neste sentido, através da formulação da energia cinética como apresentado na Eq. (2.10a) chega-se à obtenção da matriz de massa elementar do sistema como apresentado pelas expressões (2.16) e (2.17a). Entretanto, para o sistema acoplado eletromecânico, as matrizes de rigidezes são obtidas através da integração no volume do elemento finito da diferença entre a energia de deformação mecânica e a energia de deformação elétrica como segue:

$$V_E(t) = \int_{V_e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV_e \quad (2.34)$$

Introduzindo as expressões (2.9), (2.22) a (2.24) e (2.31) na equação anterior e após algumas manipulações matemáticas para levar em conta a parametrização da espessura das camadas e do ângulo de orientação das fibras, chega-se às seguintes expressões para as matrizes de rigidezes elementares parametrizadas para o caso de uma estrutura composta contendo um elemento piezelétrico:

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{(e)} = \frac{1}{t_k} \left[\mathbf{K}_{u\phi}^{00} + c_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{01} + s_k c_k \mathbf{K}_{u\phi}^{02} + s_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{03} + z \mathbf{K}_{u\phi}^{10} + z c_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{11} + z s_k c_k \mathbf{K}_{u\phi}^{12} + z s_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{13} \right] \quad (2.35a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{(e)} = \frac{1}{t_k^2} \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{00} + c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{01} + s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{02} + s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{03} + z c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{11} + z s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{12} + z s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{13} + \dots \right. \\ \left. \dots + z^2 c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{21} + z^2 s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{22} + z^2 s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{23} \right] \quad (2.35b) \end{aligned}$$

onde:

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{00} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_{b_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{b_2} \mathbf{B}_{\phi_0}^I) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{01} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} (\mathbf{B}_{b_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{b_l} \mathbf{B}_{\phi_0}^I + \mathbf{B}_{s_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{s_l} \mathbf{B}_{\phi_l}^I) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36b)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{02} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{b_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{b_3} \mathbf{B}_{\phi_0}^l + \mathbf{B}_{s_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{s_2} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36c)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{03} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{s_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{s_3} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36d)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{10} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{b_l}^T \bar{\mathbf{e}}_{b_2} \mathbf{B}_{\phi_0}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36e)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{11} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{b_l}^T \bar{\mathbf{e}}_{b_l} \mathbf{B}_{\phi_0}^l + \mathbf{B}_{s_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{s_l} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36f)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{12} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{b_l}^T \bar{\mathbf{e}}_{b_3} \mathbf{B}_{\phi_0}^l + \mathbf{B}_{s_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{s_2} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36g)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^{13} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{s_0}^T \bar{\mathbf{e}}_{s_3} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.36h)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{00} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_0}^T \bar{\chi}_b \mathbf{B}_{\phi_0}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37a)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{01} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{lT} \bar{\chi}_{s_l} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37b)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{02} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{lT} \bar{\chi}_{s_2} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37c)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{03} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{lT} \bar{\chi}_{s_3} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37d)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{11} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{lT} \bar{\chi}_{s_l} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 + \mathbf{B}_{\phi_i}^{2T} \bar{\chi}_{s_l} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37e)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{12} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{lT} \bar{\chi}_{s_2} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 + \mathbf{B}_{\phi_i}^{2T} \bar{\chi}_{s_2} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37f)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{13} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{lT} \bar{\chi}_{s_3} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 + \mathbf{B}_{\phi_i}^{2T} \bar{\chi}_{s_3} \mathbf{B}_{\phi_i}^l \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37g)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{21} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{2T} \bar{\chi}_{s_l} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37h)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{22} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{2T} \bar{\chi}_{s_2} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37i)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{23} = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \left(\mathbf{B}_{\phi_i}^{2T} \bar{\chi}_{s_3} \mathbf{B}_{\phi_i}^2 \right) \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \quad (2.37j)$$

É importante salientar que o cálculo das matrizes parametrizadas $\mathbf{K}_{ub}^{(e)}$ e $\mathbf{K}_{us}^{(e)}$ referentes à contribuição das rigidezes mecânicas do sistema já foi apresentado na Seção 2.2.3 conforme as Eqs. (2.16b) e (2.16c).

Das matrizes elementares calculadas para cada elemento de uma malha de elementos finitos e após a discretização por elementos finitos da estrutura composta laminada contendo componentes piezelétricos, obtém-se o seguinte sistema de equações do movimento do sistema eletromecânico:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\phi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

onde $\mathbf{u}(t)$, $\boldsymbol{\phi}(t)$, $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ são os vetores dos graus de liberdade mecânicos (deslocamentos e rotações), potenciais elétricos, esforços externos e cargas elétricas nodais, respectivamente. \mathbf{M}_u e \mathbf{K}_u são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez da estrutura composta, $\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{\phi u}^T$ é a matriz de acoplamento eletromecânico, e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ é a matriz de rigidez puramente elétrica.

2.3. Incorporação do circuito elétrico *shunt* no modelo de elementos finitos

O projeto ótimo-robusto de dispositivos de controle passivo baseado em materiais piezelétricos combinados com circuitos *shunt* aplicados a estruturas compostas laminadas requer modelos numérico-computacionais confiáveis. Neste contexto, o método dos elementos finitos constitui uma técnica adequada para a construção de tais modelos conforme detalhado nas seções anteriores e abordado no trabalho de Santos (2012).

Todos os nós posicionados sobre um eletrodo devem apresentar um mesmo valor do potencial elétrico. Esta condição é considerada introduzindo uma transformação no vetor dos

potenciais elétricos. Além disso, para a análise no domínio da frequência, a Eq. (2.38) pode ser representada no domínio de Fourier, negligenciando condições iniciais, levando às seguintes equações do movimento:

$$\left(K_u - \omega^2 M_u\right)U(\omega) + K_{u\phi}\Phi(\omega) = F(\omega) \quad (2.39a)$$

$$K_{\phi u}U(\omega) + K_{\phi\phi}\Phi(\omega) = Q(\omega) \quad (2.39b)$$

onde $\Phi(\omega)$ designa o vetor formado pelos potenciais elétricos que permanecem independentes entre si.

De acordo com os conceitos básicos de circuitos elétricos, a variação instantânea de cargas no tempo define a corrente elétrica, que, segundo a Lei de Ohm, é proporcional ao potencial elétrico, sendo essa proporção, o inverso da impedância elétrica do circuito, Z^{-1} , conforme a seguinte expressão (BOYLESTAD, 2012):

$$\frac{dq(t)}{dt} = I(t) = Z^{-1}\phi(t) \quad (2.40)$$

As equações do movimento devem ser transformadas para considerar o tipo de circuito elétrico passivo que está conectado aos eletrodos, admitindo a transferência das cargas elétricas entre dois eletrodos. O vetor de correntes elétricas que fluem através dos circuitos *shunt*, cujas impedâncias formam a matriz, $Z(\omega)$, é obtido via Transformada de Fourier da Eq. (2.40):

$$Q(\omega) = (1/j\omega)Z^{-1}(\omega)L\Phi(\omega) \quad (2.41)$$

onde a matriz L permite selecionar, dentre os potenciais elétricos independentes, aqueles que correspondem aos eletrodos dos circuitos *shunt* conectados.

Combinando as Eqs. (2.39b) e (2.41), obtém-se:

$$K_{\phi u}U(\omega) + \left(\bar{K}_{\phi\phi} - \frac{Z^{-1}(\omega)}{j\omega}L\right)\Phi(\omega) = 0 \quad (2.42)$$

As equações (2.39a) e (2.42) podem ser então combinadas em termos dos graus de liberdade mecânicos, exclusivamente, permitindo obter a seguinte matriz de funções de resposta em frequência (FRFs):

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\mathbf{K}_u - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} - \omega^2 \mathbf{M}_u \right]^{-1} \quad (2.43)$$

A equação acima pode ser utilizada para diferentes tipos de circuitos *shunt* mediante a introdução das expressões correspondentes de suas impedâncias elétricas, indicadas por $\mathbf{Z}(\omega)$

2.4. Exemplos de aplicações com vigas e placas compostas

Nesta seção, são apresentados os resultados das simulações numéricas aplicadas em estruturas do tipo placas e vigas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos *shunt*, no intuito de verificar os procedimentos de modelagem numérico-computacional.

A fim de avaliar a modelagem da estrutura composta, considerou-se primeiramente o problema de uma placa composta em balanço sem elementos piezelétricos de comprimento igual a 0,15m e largura de 0,06m, formada por duas camadas de espessura 0,01m cada (espessura total de $h = 0,02\text{m}$), conforme o trabalho de Faria (2006). O modelo de elementos finitos desta estrutura é composto por uma malha de 5x2 elementos da família *serendipity*, como mostrado na Fig. 2.7. Uma carga transversal concentrada de $F=1000\text{N}$ é aplicada na placa como mostrado na mesma figura.

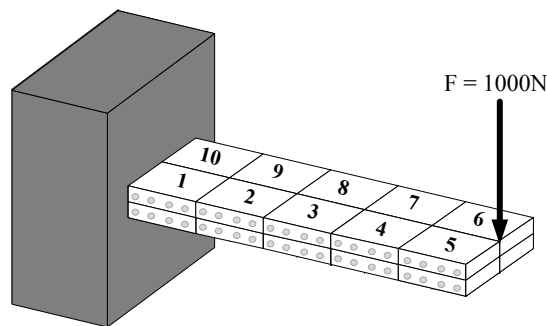


Figura 2.7 – Placa composta em balanço de duas camadas sujeita a uma carga concentrada.

Nas simulações que seguem, foram consideradas as seguintes configurações para as orientações das fibras das camadas: (a) configuração $(0^\circ/0^\circ)$; (b) configuração $(0^\circ/30^\circ)$. A Fig.

2.8 abaixo mostra a deflexão estática da placa ao longo do seu eixo médio, na direção x, para as duas configurações estudadas. Deve-se destacar que os resultados obtidos estão de acordo com os correspondentes obtidos por Chee (2000) empregando a teoria de alta ordem HSDT e via utilização do programa comercial de elementos finitos *Strand*[®], com base na teoria CLT.

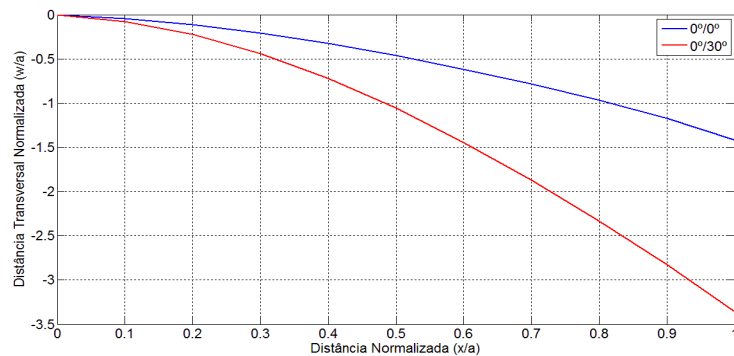


Figura 2.8 – Deflexões normalizadas ao longo do eixo médio da placa composta.

Com relação à análise dinâmica, gerou-se a função de resposta em frequência (FRF) da placa composta para uma excitação de amplitude unitária aplicada no mesmo nó e na mesma direção que no caso anterior (ver Fig. 2.7) para a configuração (0°/0°). Da mesma forma que observado para a análise estática, as amplitudes das FRFs mostradas na Fig. 2.9 estão de acordo com as correspondentes obtidas por Faria (2006), validando numericamente, desta forma, a parte estrutural da geração e construção das matrizes elementares e globais parametrizadas de placas compostas via utilização da teoria FSDT.

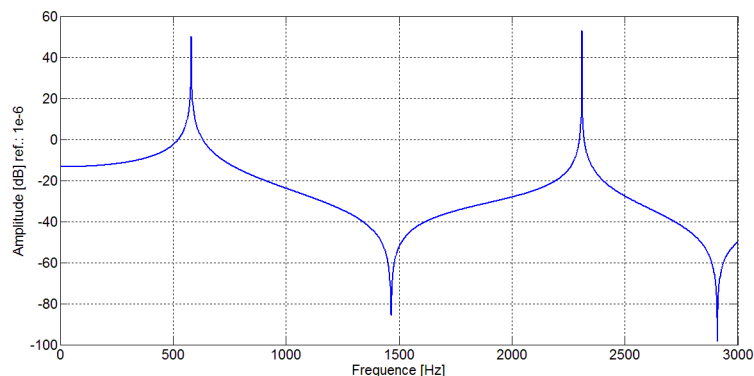


Figura 2.9 – Amplitudes das funções de resposta em frequência da placa composta.

O problema apresentado na Fig. 2.10 é constituído de uma viga de material composto em balanço formada por quatro camadas contendo um elemento PZT ($\rho = 7700 \text{ Kg/m}^3$) no qual serão acoplados circuitos elétricos *shunt* do tipo resistivo e ressonante. Em seguida, os

resultados serão comparados para avaliar o desempenho dos mesmos. Na mesma figura, está apresentado a discretização por elementos finitos do sistema a ser estudado cujas espessuras de cada camada do composto é de $h = 1,048\text{ mm}$ e largura $a = 25,4\text{ mm}$. As demais características geométricas são listadas nas Tabelas 2.1 e 2.2.

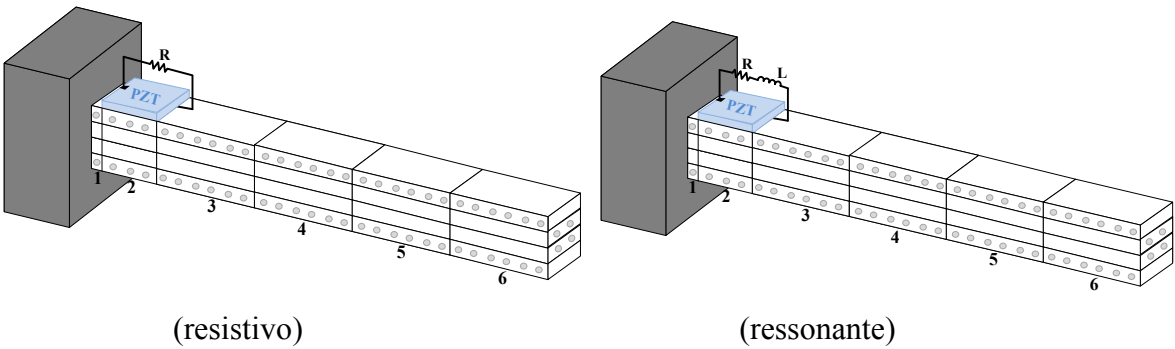


Figura 2.10 – Viga composta contendo elemento piezelétrico acoplado a circuitos *shunt*.

Tabela 2.1 – Características de cada elemento finito que compõe a malha.

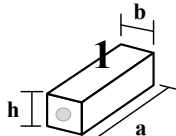
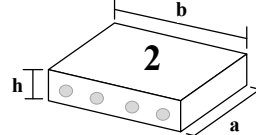
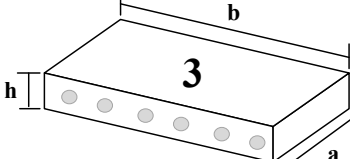
Tipo do Elemento	b [mm]	Elementos desse tipo
	2,0	1
	50,8	2
	63,0	3, 4, 5 e 6

Tabela 2.2 – Características da viga composta.

Largura da viga/PZT [mm]	Orientação das fibras (°)
25,4	0 / 90/ 90/ 0

Nas Tabelas 2.3 e 2.4 são apresentadas, respectivamente, as propriedades mecânicas e elétricas dos materiais envolvidos para a geração do modelo de elementos finitos do sistema eletromecânico. Além disso, considerou-se a espessura do PZT (h_{pzt}) igual a 0,762 mm, e a resistência do circuito *shunt* resistivo igual a $3,23 \times 10^5\ \Omega$. Para o *shunt* ressonante assumiu-se

uma resistência igual a $1,61 \times 10^4 \Omega$ e uma indutância de $6,29 \times 10^2 H$. A Fig. 2.11 faz uma comparação entre as amplitudes das funções de resposta em frequência da viga composta sem e com os diferentes circuitos elétricos estudados neste trabalho. Pode-se observar claramente a grande capacidade do circuito ressonante em reduzir a amplitude de vibração do sistema para o modo em questão, quando comparado com o circuito resistivo. Diante do melhor desempenho do circuito *shunt* ressonante, a investigação de incertezas (Capítulo 3) para posterior otimização robusta será realizada para esse tipo de circuito elétrico.

Tabela 2.3 – Propriedades mecânicas dos materiais envolvidos.

Material	C11	C12	C13	C22	C23	C33	C44	C55	C66
Composto	$1,72 \times 10^{11}$	$1,48 \times 10^9$	$1,48 \times 10^9$	$7,58 \times 10^9$	$2,28 \times 10^9$	$7,58 \times 10^9$	$1,38 \times 10^9$	$3,45 \times 10^9$	$3,45 \times 10^9$
PZT G1195	$1,02 \times 10^{15}$	$5,03 \times 10^{14}$	$5,03 \times 10^{14}$	$1,02 \times 10^{15}$	$5,03 \times 10^{14}$	$1,02 \times 10^{15}$	$2,59 \times 10^{14}$	$2,59 \times 10^{14}$	$2,59 \times 10^{14}$

Tabela 2.4 – Propriedades eletromecânicas e elétricas do PZT.

Material	e15 (C/m ²)	e24 (C/m ²)	e31 (C/m ²)	e32 (C/m ²)	e33 (C/m ²)	χ_{11} (F/m)	χ_{22} (F/m)	χ_{33} (F/m)
PZT G1195	0	0	-18,2998	-9,01333	-9,01333	$1,59 \times 10^{-4}$	$1,59 \times 10^{-6}$	$1,59 \times 10^{-6}$

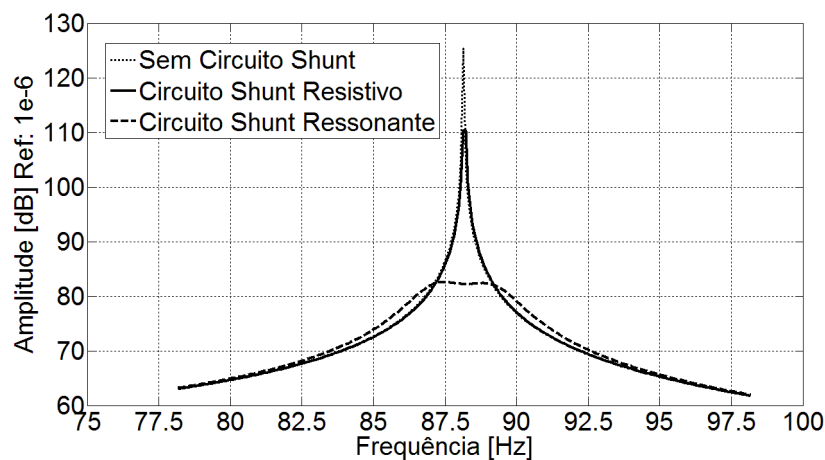


Figura 2.11 – Comparação das amplitudes das FRFs para os diferentes circuitos *shunt*.

CAPÍTULO III

MODELAGEM ESTOCÁSTICA PARA A CONCEPÇÃO ROBUSTA DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS *SHUNT*

Este capítulo é dedicado à construção do modelo probabilístico para circuitos elétricos *shunt* via caracterização das funções densidade de probabilidade a serem empregadas para as variáveis aleatórias que influem diretamente na eficiência dos mesmos. Neste sentido, ênfase será dada à abordagem paramétrica, uma vez que as incertezas serão introduzidas diretamente nos parâmetros do modelo eletromecânico parametrizado apresentado no capítulo anterior. Será também realizada a análise da influência de diferentes níveis de incertezas em cada um dos parâmetros dos circuitos *shunt*. Através dos resultados das análises, serão estabelecidos os limites das incertezas, o número mínimo de amostras nas tiragens aleatórias e as distribuições de probabilidades mais prováveis para cada variável de projeto a ser utilizada no processo de otimização robusta dos circuitos elétricos *shunt*, que será apresentado no próximo capítulo.

3.1. Construção do modelo probabilístico

O processo de construção do modelo probabilístico para cada parâmetro de projeto que caracteriza um dado circuito elétrico *shunt* se baseia no então conhecido Método da Máxima Entropia (MME) (JAYNES, 1957), que consiste na obtenção da função densidade de probabilidade mais provável para uma dada variável aleatória considerando apenas as informações disponíveis para a mesma (SOIZE, 2010). O MME se baseia no fato de que ao maximizar a entropia do sistema, maximizam-se também as incertezas contidas no mesmo, o que resulta num mínimo de informações (SHANNON, 1948). Portanto, partindo-se de um conjunto de distribuições que atendem as restrições de uma dada variável aleatória

considerada na análise (por exemplo, os momentos estatísticos como média e variância), o MME tem como premissa a escolha da distribuição que apresenta o máximo de incerteza, ou seja, a máxima entropia. Neste sentido, de acordo com Shannon (1948), dada uma função densidade de probabilidade, $p_x(x)$, de uma dada variável aleatória, x , a medida da entropia é definida da seguinte forma:

$$S(p_x(x)) = -\int p_x(x) \ln(p_x(x)) dx \quad (3.1)$$

Do ponto de vista da matemática da probabilidade, frequentemente se conhece alguma informação adicional sobre a variável aleatória, x , como sua média e/ou sua variância. Essas informações são as restrições mencionadas anteriormente e são descritas genericamente como momentos estatísticos, que podem ser calculados da seguinte forma:

$$\int x^i p_x(x) dx = d_i \quad (3.2)$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $d_0 = 1$ designa a própria distribuição de probabilidade e $d_i = 1, 2, \dots, n$ são os momentos estatísticos conhecidos.

Através do método dos multiplicadores de Lagrange, $\bar{S} = S + \sum_{i=0}^n \lambda_i \left[\int x^i p_x(x) dx - d_i \right]$,

pode-se construir o seguinte funcional para a entropia da densidade de probabilidade, $p_x(x)$:

$$\bar{S} = S + \sum_{i=0}^n \lambda_i \left[\int x^i p_x(x) dx - d_i \right] \quad (3.3)$$

que, quando maximizado, permite obter a seguinte expressão:

$$\delta \bar{S} = \int \left[-\ln(p_x(x)) - 1 + \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right] \delta p_x(x) dx = 0 \quad (3.4)$$

Desta forma, a equação anterior fornece a seguinte expressão para a mais provável função densidade de probabilidade da variável aleatória, x :

$$p_x(x) = \exp \left[-1 + \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right] \quad (3.5)$$

onde os multiplicadores de Lagrange, λ_i , podem ser obtidos através das $n+1$ equações de restrições impostas pelos momentos estatísticos conhecidos para a variável aleatória, x .

Através da matriz de funções de resposta em frequência (FRF), $\mathbf{H}(\omega)$, para o sistema determinístico de acordo com a Eq. (2.43) do Capítulo 2, as respostas aleatórias, $\mathbf{H}(\omega, \theta)$, correspondentes ao sistema estocástico sujeito a uma excitação harmônica determinística, podem ser obtidas em termos dos graus de liberdade mecânicos, exclusivamente, através da seguinte expressão:

$$\mathbf{H}(\omega, \theta) = \left[\mathbf{K}_u - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega, \theta) \mathbf{L} \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} - \omega^2 \mathbf{M}_u \right]^{-1} \quad (3.6)$$

onde θ designa uma perturbação aleatória.

Da mesma forma que mostrado na Seção 2.4 do Capítulo 2, a expressão anterior pode ser utilizada para diferentes tipos de circuitos elétricos *shunt* mediante a consideração de suas impedâncias elétricas estocásticas, $\mathbf{Z}(\omega, \theta)$. Além disso, a Eq. (3.6) do modelo estocástico deve ser resolvida utilizando um *solver* estocástico. Neste contexto, e de acordo com os objetivos deste trabalho inicialmente propostos, será empregado, para os níveis de dispersão a serem investigados, o método de simulação Hyper-Cubo-Latino (HCL), que é uma variante do Método de Monte Carlo (IMAN, DAVERPONT, ZEIGLER, 1980), com garantia de convergência mais rápida. Além disso, durante o processo de geração das amostras será levado em conta as funções densidade de probabilidade obtidas para cada parâmetro aleatório que caracterizam os diferentes tipos de circuitos *shunt* considerados neste trabalho.

3.2. Parâmetro resistivo R

A fim de se obter o modelo estocástico para o parâmetro resistivo, R , deve-se considerar as seguintes restrições sobre o mesmo: (i) admite valores no intervalo $R \in]0, +\infty[$; (ii) é conhecida a média, $E[R] = \bar{R}$; (iii) a dispersão é finita, $E[\ln(R)] = c$, onde $|c| < +\infty$ (SOIZE, 2001). Resolvendo a expressão (3.5) e impondo essas restrições na forma de momentos estatísticos descritos na Eq. (3.2), obtém-se a seguinte função de probabilidade:

$$p_R(r) = 1_{]0, +\infty[}(r) \frac{1}{\bar{R}} \left(\frac{1}{\delta_R^2} \right)^{\frac{1}{\delta_R^2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\delta_R^2}\right)} \left(\frac{r}{\bar{R}} \right)^{\frac{1}{\delta_R^2} - 1} \exp\left[-\frac{r}{\delta_R^2 \bar{R}}\right] \quad (3.7)$$

onde δ_R consiste na dispersão do parâmetro r e $\Gamma(z)$ é a função Gamma definida da forma:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (3.8)$$

onde $\delta_R = \sigma_R / \bar{R}$ é a dispersão relativa e limitada a $0 < \delta_R < 1/\sqrt{3}$, ou seja, de 0 a 57,7% aproximadamente (SOIZE, 2010).

Com o objetivo de avaliar o modelo probabilístico (3.7) para as realizações do parâmetro resistivo, será empregada a função $GAMRND(\alpha, \beta)$ do MATLAB[®], sendo que $\alpha = 1/\delta_R^2$ e $\beta = \bar{R}\delta_R^2$, de acordo com Ritto, Sampaio e Cataldo (2008). Além disso, conforme Johnson, Hilburn e Johnson (1994), Sedra e Smith (2009) e Boylestad (2012), na prática, a série E6 de resistores padrões disponíveis comercialmente apresentam 20% de tolerância em relação ao valor nominal de resistência, sendo a mais ampla tolerância admissível. Assim, para efeito de investigação, a máxima dispersão relativa do parâmetro resistivo, δ_R , foi escolhida como sendo 50% acima do valor comercialmente disponível, ou seja, $\delta_R^{\max} = 0,3$, mantendo essa dispersão abaixo do limite teórico previsto de aproximadamente 57,7%.

Uma vez obtido o modelo probabilístico para o parâmetro resistivo, R , e o limite de dispersão, δ_R , deve-se proceder com a avaliação do número mínimo de tiragens aleatórias necessário para a obtenção da convergência das respostas estocásticas do sistema dinâmico (CAPIEZ-LERNOUT *et al.*, 2006). Para tanto, será empregado o método dos mínimos quadrados para se chegar à seguinte função para a avaliação da convergência:

$$conv(n_s) = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \|H_j(\omega, \theta) - H(\omega)\|^2 \quad (3.9)$$

Para o valor médio da resistência de $\bar{R} = 16,1061035 \text{ k}\Omega$ utilizado nas simulações numéricas da viga composta em balanço incorporando um elemento piezelétrico acoplado a um circuito *shunt* ressonante (ver Seção 2.4, Capítulo 2), a Tabela 3.1 define os parâmetros α e β a serem empregados na função densidade de probabilidade *Gamma* para a avaliação da

função de convergência (3.9), conforme apresentadas na Fig. 3.1. Nessa figura, observa-se que conforme a dispersão cresce ocorre o efeito de achatamento da distribuição, com discreto deslocamento de seu centro no sentido da origem do eixo de valores de resistência. Deve-se salientar que para cada um dos níveis de dispersão foram realizadas 5000 tiragens aleatórias para a variável R , pelo método HCL.

Tabela 3.1 – Valores de α e β para análise de convergência do modelo probabilístico de R .

	$\delta_R = 0,01$	$\delta_R = 0,02$	$\delta_R = 0,05$	$\delta_R = 0,10$	$\delta_R = 0,20$	$\delta_R = 0,30$
$\alpha = 1/\delta_R^2$	10000	2500	400	100	25	11,111
$\beta = \bar{R}\delta_R^2$	1,6106	6,4425	40,2655	161,0619	644,2474	1449,6

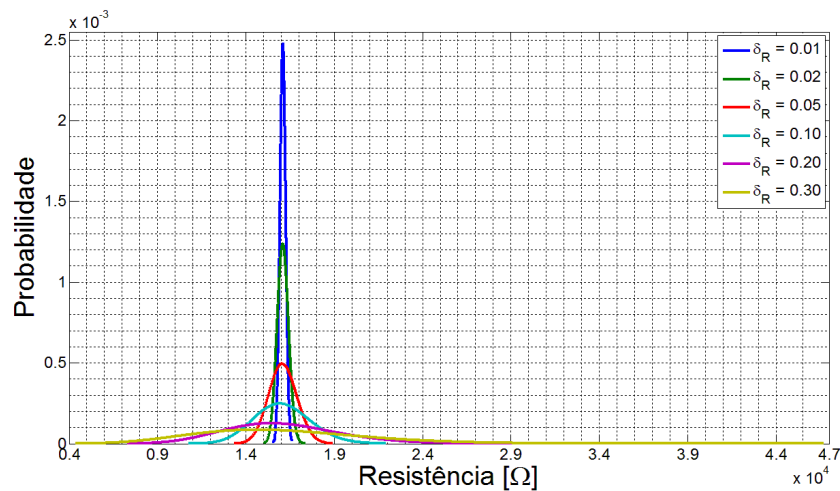


Figura 3.1 – Distribuições para diferentes valores de dispersão no parâmetro R .

A Figura 3.2 mostra os envelopes das amplitudes das FRFs do sistema estocástico obtidos para cada uma das dispersões no parâmetro de resistência, R , definidas na Tabela 3.1. De imediato, pode-se notar que quanto maior o nível de dispersão, δ_R , do parâmetro aleatório, maior é a dispersão em torno da resposta média do sistema. Isto pode ser comprovado pelos resultados da Tabela 3.2, que apresenta as diferenças e/ou desvios entre as amplitudes máximas e mínimas das respostas aleatórias, e o respectivo valor da frequência de suas ocorrências. Pode-se notar nessa tabela que os pontos de máximo desvio apresentam aparente crescimento linear dos valores de amplitude para $\delta_R = 0,01$ a $\delta_R = 0,10$, o que não ocorre para valores superiores de desvio, que apresentam sensível aumento nos níveis de amplitude.

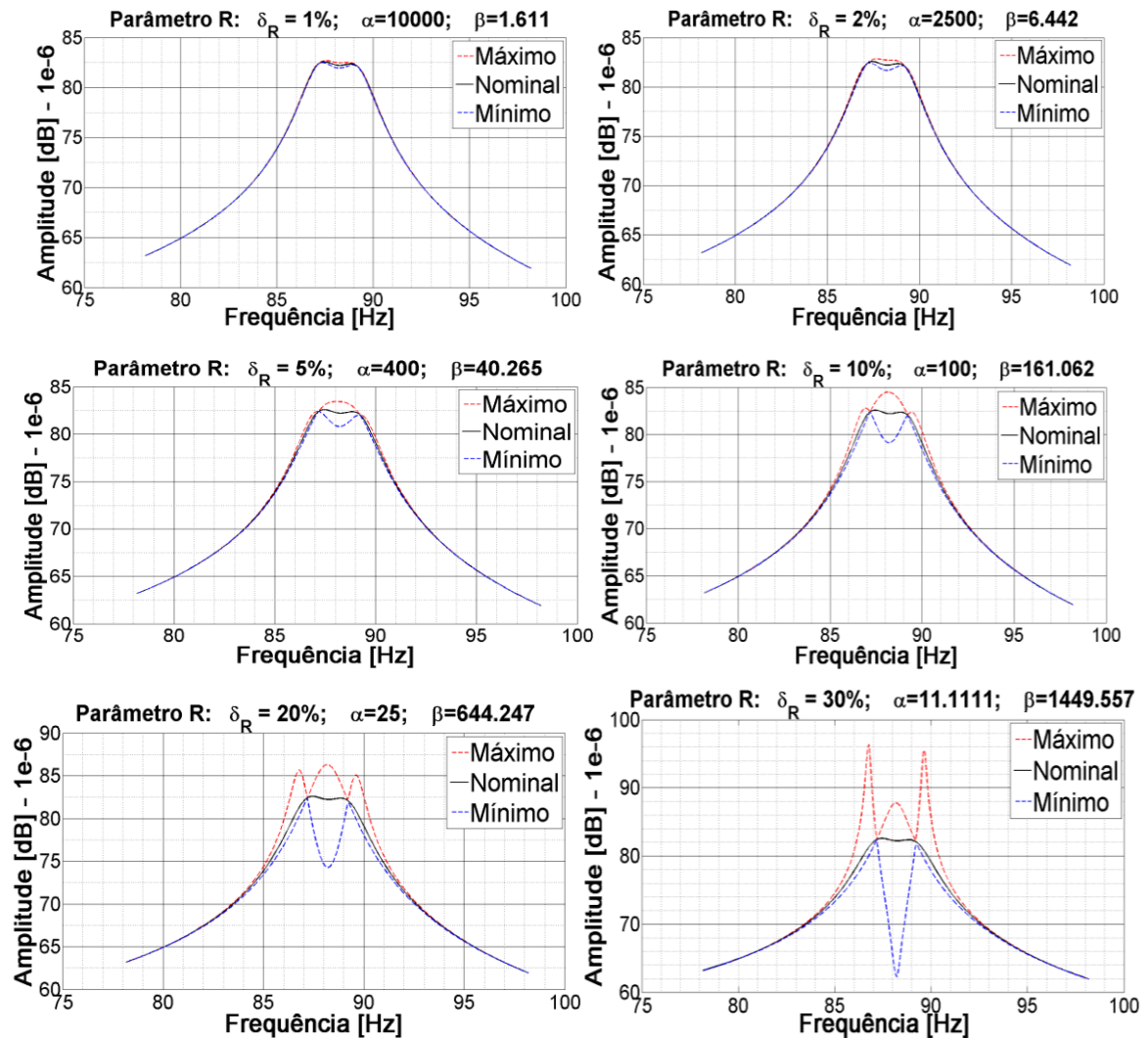


Figura 3.2 – Envelopes das FRFs do sistema para incertezas no parâmetro resistivo R .

Tabela 3.2 – Desvios entre os extremos estatísticos para incertezas no parâmetro R .

	Faixa de desvio máximo (Máximo – Mínimo)	
	Amplitude [dB]	Frequência [Hz]
$\delta_R = 0.01$	0,520	88,22
$\delta_R = 0.02$	1,042	88,22
$\delta_R = 0.05$	2,621	88,22
$\delta_R = 0.10$	5,367	88,22
$\delta_R = 0.20$	12,021	88,22
$\delta_R = 0.30$	25,516	88,22

Em termos da avaliação da convergência das respostas aleatórias, a Fig. 3.3 apresenta a evolução do erro quadrático médio *versus* número de tiragens aleatórias para cada uma das dispersões, δ_R , investigadas. Pode-se notar que foram necessárias pelo menos 1000

realizações para se chegar à convergência, sendo que, no pior caso, correspondente à dispersão de 30%, foi necessário um número mínimo de 1500 realizações, sendo esse, o valor adotado na otimização robusta. Outro fato importante a ser notado é que o valor final do erro observado na Fig. 3.3, evolui praticamente de maneira linear com ao aumento da dispersão, δ_R , como pode ser visto na Fig. 3.4. Seguindo essa linha de análise, para dispersões de 20 e 30%, observou-se que o valor final do erro quadrático médio tende a distanciar-se da relação linear, o que pode estar associado com a apresentação de maiores amplitudes de vibração em uma faixa maior de frequência, como pode ser visto na Fig. 3.2 para esses valores de dispersão.

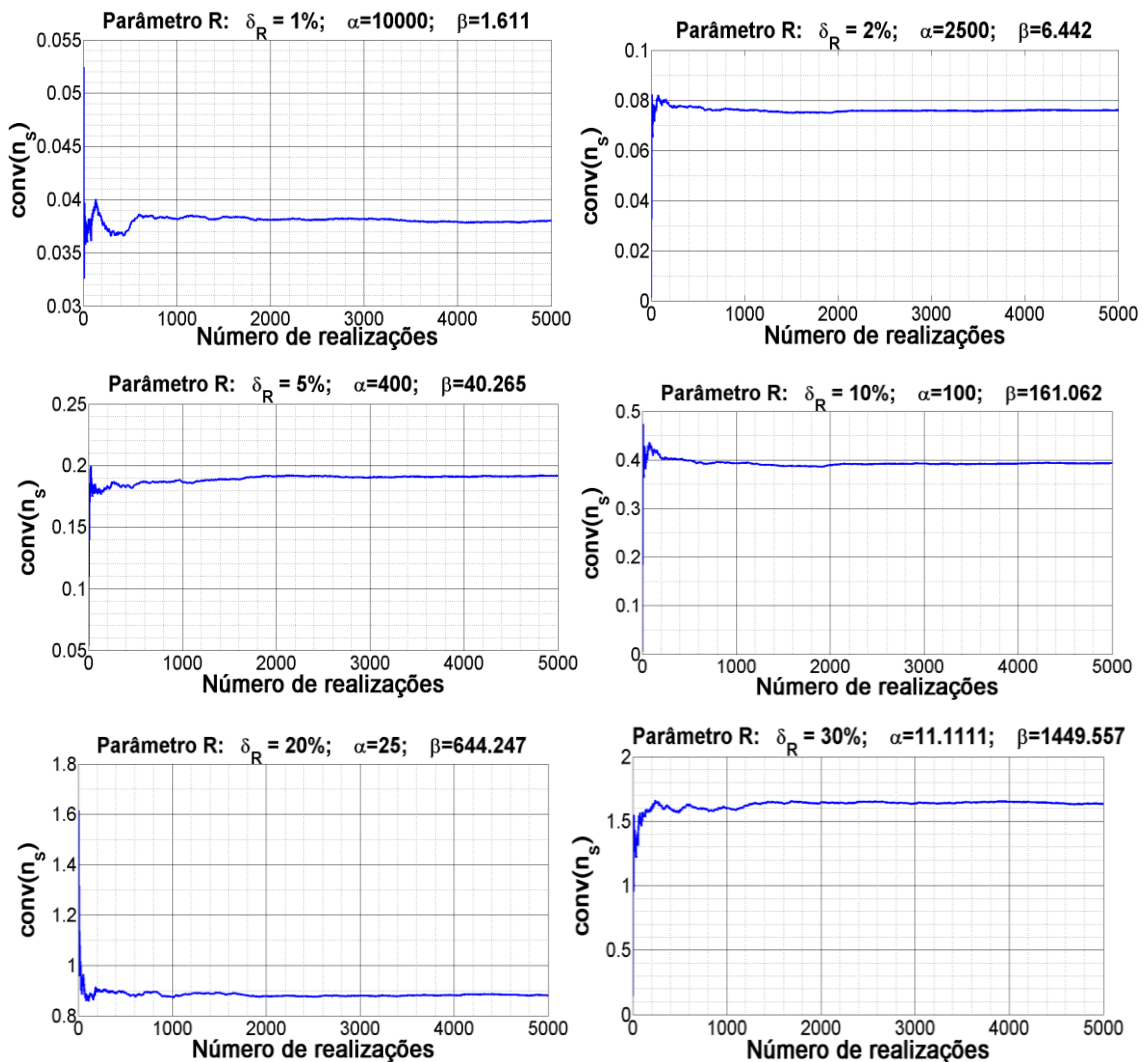


Figura 3.3 – Convergência em termos do erro quadrático médio para incertezas em R .

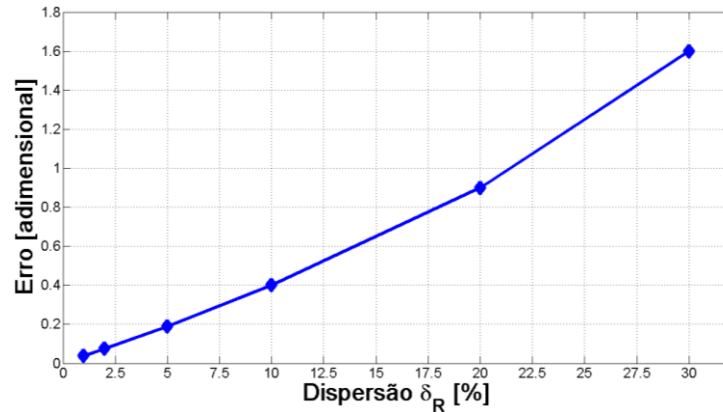


Figura 3.4 – Evolução do erro médio quadrático em função da dispersão, δ_R .

3.3. Parâmetro indutivo L

Na modelagem estocástica do parâmetro indutivo L , serão consideradas as seguintes informações: (i) admite valores no intervalo $L \in]0, +\infty[$; (ii) é conhecida a média, $E[L] = \bar{L}$; (iii) a dispersão é finita, $E[\ln(L)] = c$, onde $|c| < +\infty$ (SOIZE, 2001). Seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente, chega-se à seguinte função de probabilidade:

$$p_L(l) = 1_{]0, +\infty[}(l) \frac{1}{\bar{L}} \left(\frac{1}{\delta_L^2} \right)^{\frac{1}{\delta_L^2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\delta_L^2}\right)} \left(\frac{l}{\bar{L}} \right)^{\frac{1}{\delta_L^2} - 1} \exp\left(-\frac{l}{\delta_L^2 \bar{L}}\right) \quad (3.10)$$

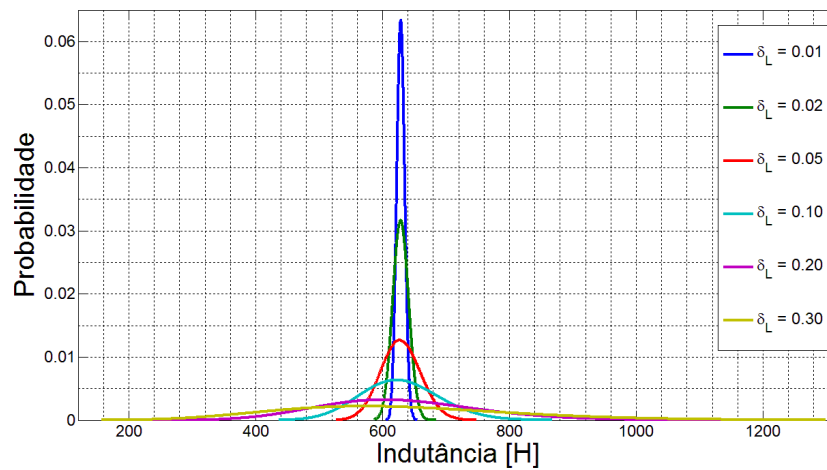
onde δ_L designa a dispersão do parâmetro indutivo.

De acordo com Johnson (1994), Sedra e Smith (2009) e Boylestad (2012), os indutores padrões disponíveis comercialmente apresentam um máximo de 20% de tolerância em relação ao valor nominal de indutância. Assim como para o parâmetro resistivo, para efeito de análise de convergência, o valor limite da dispersão relativa, δ_L , para o parâmetro indutivo foi escolhido 50% superior, ou seja, correspondente a $\delta_L^{\max} = 0,30$. Neste sentido, partindo do seguinte valor médio do parâmetro indutivo $\bar{L} = 629,1376 H$, utilizado nas simulações numéricas apresentadas na Seção 2.5, Capítulo 2, a Tabela 3.3 apresenta os valores de α e β a serem empregados na função de distribuição (3.10) utilizada para avaliação da convergência das respostas aleatórias do sistema estocástico.

Tabela 3.3 – Valores de α e β para análise de convergência do modelo probabilístico de L .

	$\delta_L = 0,01$	$\delta_L = 0,02$	$\delta_L = 0,05$	$\delta_L = 0,10$	$\delta_L = 0,20$	$\delta_L = 0,30$
$\alpha = 1/\delta_L^2$	10000	2500	400	100	25	11,111
$\beta = \bar{L}\delta_L^2$	0,0629	0,2517	1,5728	6,2914	25,166	56,622

Da mesma forma que feito para o parâmetro resistivo, para cada um dos níveis de dispersão descritos na Tabela 3.3 foram realizadas 5000 tiragens aleatórias para a variável, L , pelo método HCL. A Figura 3.5 abaixo representa o aspecto das distribuições correspondentes à cada uma das dispersões, e a Fig. 3.6 mostra os envelopes das amplitudes das FRFs do sistema estocástico obtidos para cada uma das dispersões no parâmetro indutivo. Nota-se também que um aumento no nível de dispersão, δ_L , do parâmetro indutivo acarreta um aumento do intervalo de confiança do sistema. Comparando os resultados apresentados nas Figs. 3.2 e 3.6, pode-se perceber um maior grau de influência do parâmetro indutivo quando comparado com o parâmetro resistivo na eficiência do circuito *shunt*. Além disso, para todos os casos analisados, resistivo e indutivo, as respostas dinâmicas dos modelos médios estão contidas nos extremos estatísticos.

Figura 3.5 – Distribuições para diferentes valores de dispersão no parâmetro L .

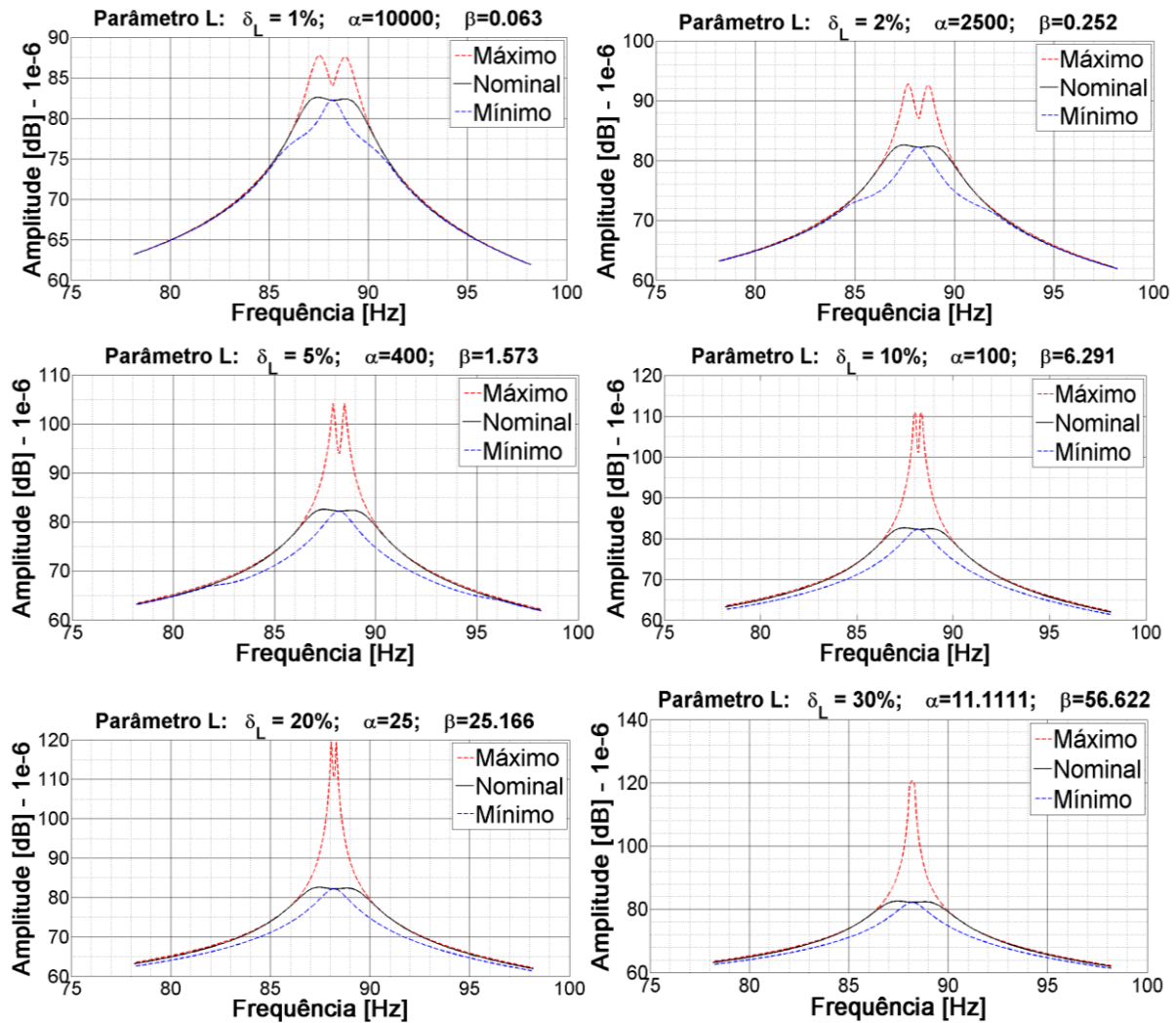


Figura 3.6 – Envelopes das FRFs do sistema para incertezas no parâmetro indutivo L .

Tabela 3.4 – Desvios entre os extremos estatísticos para incertezas no parâmetro L .

	Faixa de Desvio Máximo (Máximo – Mínimo)	
	Amplitude [dB]	Frequência [Hz]
$\delta_L = 0.01$	7,990	88,42
$\delta_L = 0.02$	12,252	87,66
$\delta_L = 0.05$	22,503	87,90
$\delta_L = 0.10$	28,893	87,98
$\delta_L = 0.20$	37,356	88,06
$\delta_L = 0.30$	38,384	88,22

A Tabela 3.4 mostra os desvios observados entre as amplitudes máximas e mínimas das respostas aleatórias com suas frequências de ocorrência, e a Fig. 3.8 apresenta a evolução do erro quadrático médio para cada uma das dispersões, δ_L , analisadas. Nota-se que para alguns casos são necessários um número mínimo de 2500 realizações para se chegar à

convergência. Além disso, analisando a evolução do valor de convergência do erro mediante variação da dispersão δ_L para o parâmetro L , na Fig. 3.8, nota-se um forte crescimento do erro até $\delta_L = 10\%$, com uma estabilização no aumento do erro a partir de $\delta_L = 20\%$, que coincide com um aumento bastante relevante no ganho em dB das amplitudes das respostas apresentadas na Fig. 3.6 nessa faixa de dispersão. Dessa maneira, pode-se inferir que, na maior parte da faixa de trabalho da dispersão, δ_L , a influência das incertezas no parâmetro indutivo se faz muito mais expressiva que o parâmetro resistivo, o que, segundo Tagliani (1989) e Soize (2010) exigirá naturalmente maior robustez do projeto.

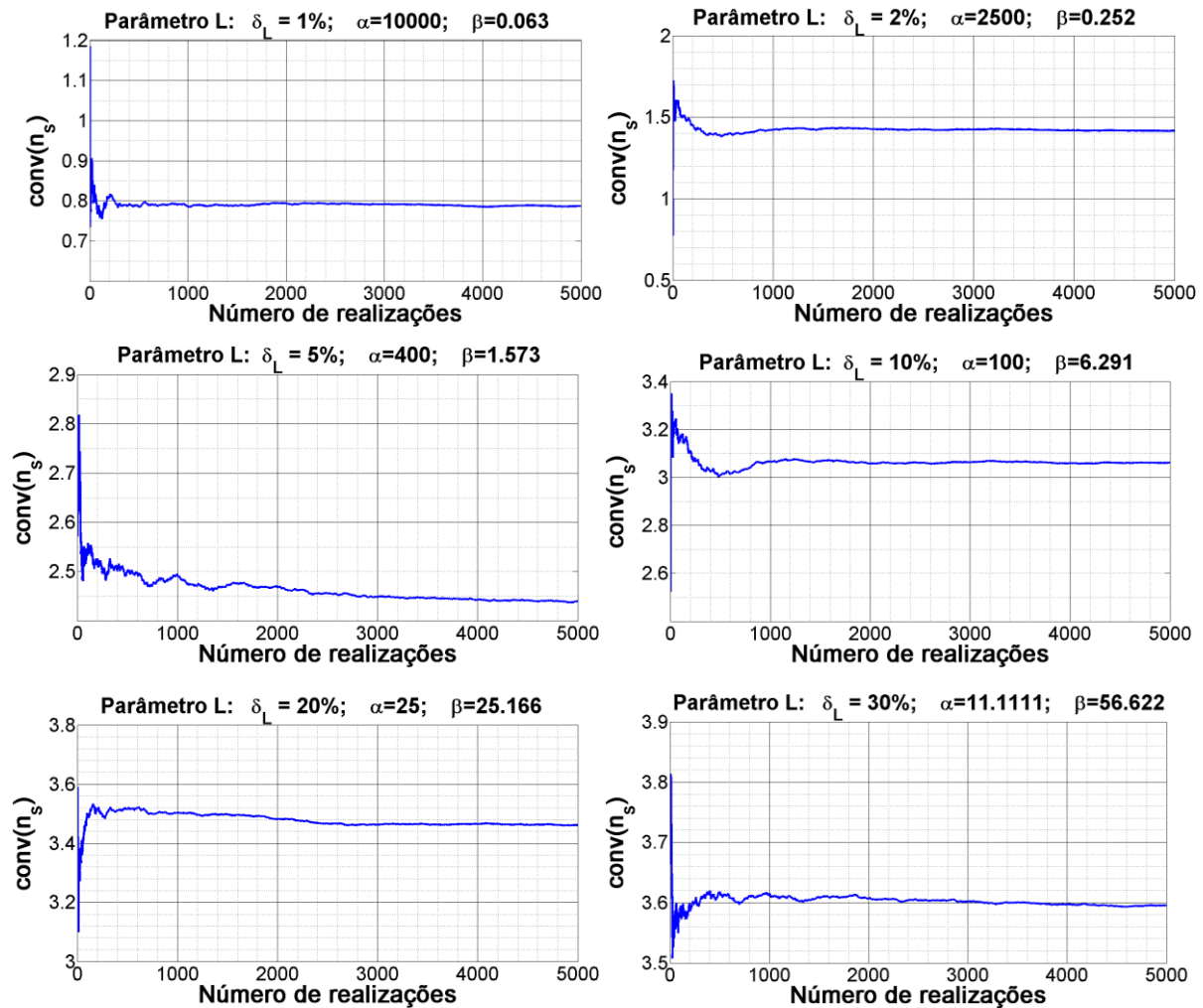


Figura 3.7 – Convergência em termos do erro quadrático médio para incertezas em L .

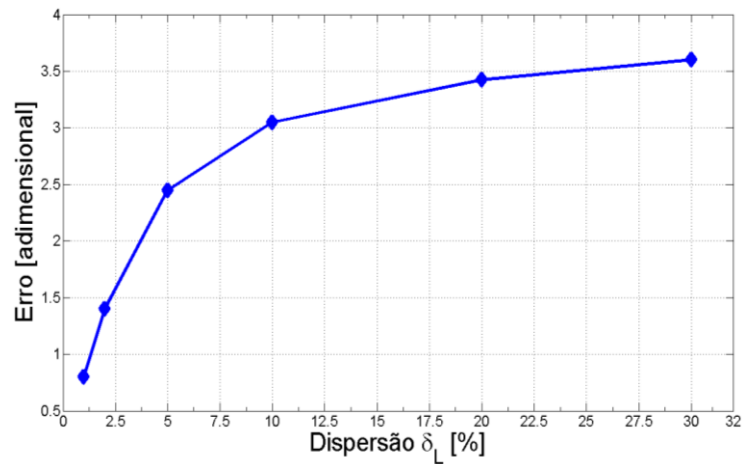
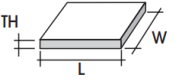


Figura 3.8 – Evolução do valor final do erro mediante aumento da dispersão δ_L .

3.4. Espessura do elemento piezelétrico, h_{pzt}

Nesta seção, será investigada a influência da aleatoriedade do parâmetro de espessura da cerâmica piezelétrica, h_{pzt} , na eficiência do circuito elétrico *shunt*. Para este parâmetro e de acordo com a modelagem por elementos finitos apresentada na Seção 2.5, Capítulo 2, tem-se as seguintes informações: (i) admite valores no intervalo $h_{pzt} \in]0, +\infty[$; (ii) é conhecida a média, $E[h_{pzt}] = \bar{h}_{pzt}$; (iii) a dispersão é finita, $E[\ln(h_{pzt})] = c$, onde $|c| < +\infty$, o que leva à uma função de probabilidade da mesma forma como apresentado nas Eqs. (3.7) e (3.10), como nos casos anteriores.

Segundo Setter (2002) a quantidade de incertezas na espessura dos materiais piezelétricos depende diretamente da qualidade no processo de fabricação dos mesmos. Neste sentido, partindo-se de catálogos disponíveis dos fabricantes PI – *Piezotechnology*[®] e *Midé Technology Corporation*[®], será considerado na pior das hipóteses, que a tolerância na espessura do elemento piezelétrico pode atingir 5%, como ilustrado na Fig. 3.9.

	Plate / Block		
	TH (mm)	L (mm)	W (mm)
max. thickness	40	1 to 80	1 to 20
	40	1 to 60	1 to 60
min. thickness	0.15	1 to 20	1 to 20
	0.3	1 to 80	1 to 30
	0.5	1 to 60	1 to 60

(a)

Standard tolerances		
Parameter	Symbol	Tolerance
Length / Width	L / W	< 15 mm: ± 0.15 mm < 20 mm: ± 0.20 mm < 40 mm: ± 0.25 mm < 80 mm: ± 0.30 mm
Diameter, outside	OD	< 15 mm: ± 0.15 mm < 20 mm: ± 0.20 mm < 40 mm: ± 0.25 mm < 80 mm: ± 0.30 mm
Diameter, inside	ID	< 15 mm: ± 0.15 mm < 20 mm: ± 0.20 mm < 40 mm: ± 0.25 mm < 80 mm: ± 0.30 mm
Thickness	TH	< 10 mm: ± 0.05 mm < 20 mm: ± 0.10 mm < 40 mm: ± 0.15 mm < 80 mm: ± 0.20 mm
Dimensions, (as fired): ± 0.3 mm or $\pm 3\%$		

(b)

Figura 3.9 – Tolerância no parâmetro de espessura h_{pzt} : (a) Faixa de valores de espessura; (b) Tolerância conforme faixa de espessura (adaptado de PI Group (2013))

Diferentemente dos ensaios numéricos realizados via utilização dos parâmetros de resistência e indutância, para efeito de análise de convergência, o valor limite da dispersão relativa, δ_h , será considerado de 10%, ou seja, $\delta_h^{\max} = 0,10$, já que valores de incertezas bastante superiores acarretariam não em uma perturbação, mas uma modificação estrutural, descaracterizando sobremaneira o problema original (LIMA Jr., 1999; ANDREAUS; PORFIRI, 2007). Partindo do valor médio da espessura do elemento piezelétrico, $\bar{h}_{pzt} = 0,762 \text{ mm}$ (ver Seção 2.5, Capítulo 2), a Tabela 3.5 abaixo contém os valores dos parâmetros α e β que serão utilizados na função de distribuição para a avaliação da convergência.

Tabela 3.5 – Valores de α e β para análise de convergência do modelo estocástico de h_{pzt} .

	$\delta_h = 0,01$	$\delta_h = 0,02$	$\delta_h = 0,05$	$\delta_h = 0,10$
$\alpha = 1/\delta_h^2$	10000	2500	400	100
$\beta = \bar{h}\delta_h^2$	7,62e-5	0,0003	0,0019	0,0076

Na Figura 3.10 é mostrado o aspecto das distribuições de probabilidade para cada dispersão investigada, no qual foram realizadas 5000 tiragens aleatórias das funções de resposta em frequência. Pode-se notar a partir da análise da Fig. 3.11 que a influência das incertezas no parâmetro espessura do elemento piezelétrico é similar à influência das incertezas no parâmetro de indutância. A Tabela 3.6 abaixo apresenta os valores dos desvios entre as curvas de máximo e mínimo para cada dispersão investigada.

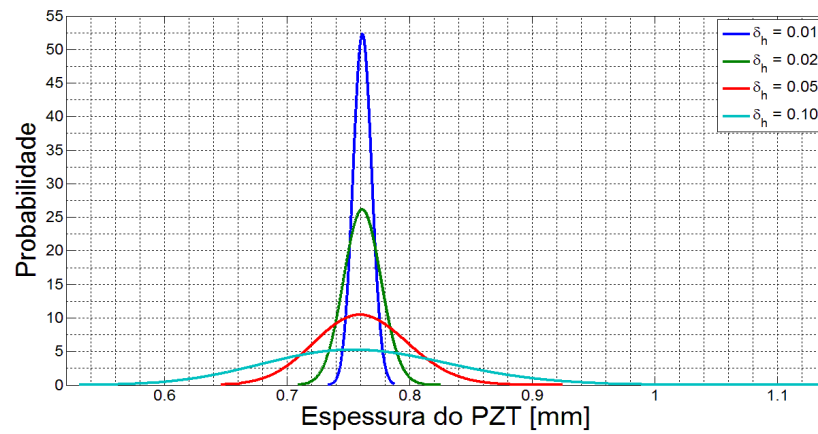


Figura 3.10 – Distribuições para diferentes valores de dispersão no parâmetro h_{pzt} .

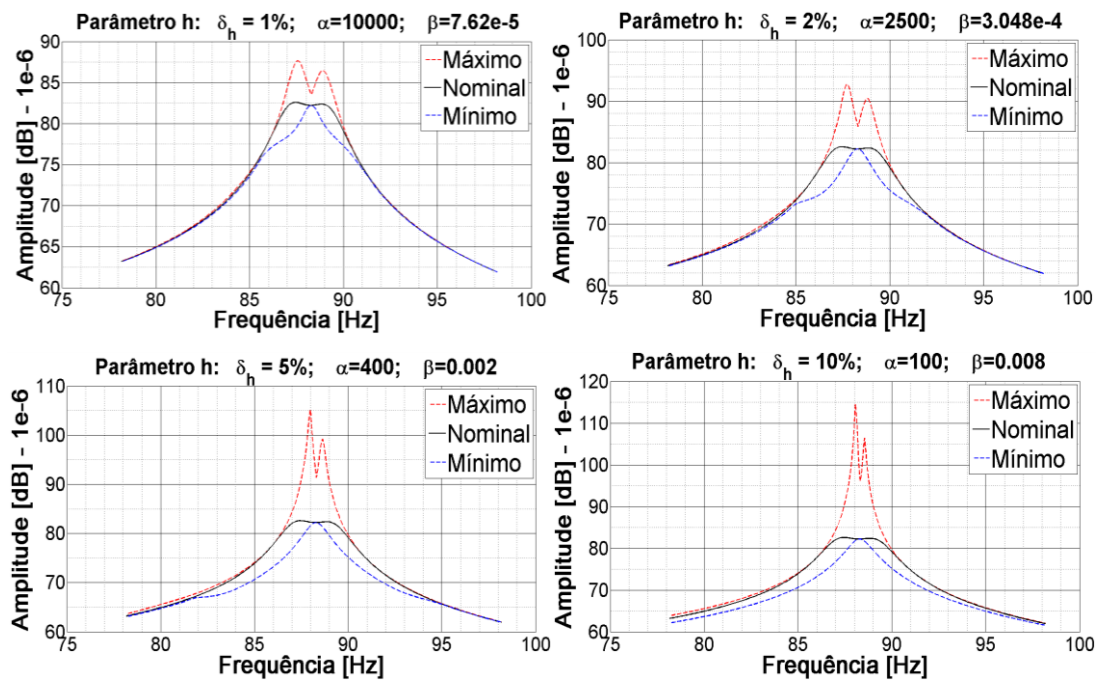


Figura 3.11 – Envelopes das FRFs do sistema para incertezas no parâmetro espessura, h_{pzt} .

Tabela 3.6 – Desvios entre os extremos estatísticos para incertezas no parâmetro h_{pzt} .

Faixa de Desvio Máximo (Máximo – Mínimo)		
	Amplitude [dB]	Frequência [Hz]
$\delta_h = 0.01$	8,048	87,50
$\delta_h = 0.02$	12,630	87,66
$\delta_h = 0.05$	23,708	87,98
$\delta_h = 0.10$	32,764	88,06

Em relação ao número de tiragens aleatórias mínimo para obter a convergência do modelo probabilístico, observa-se a partir da análise da Fig. 3.12 que são necessários pelo menos 1000 realizações. Entretanto, considerando o pior caso detectado referente à dispersão de 5%, esse número aumenta para 3000 tiragens, sendo esse a quantidade de tiragens aleatórias recomendada.

Observando a Fig. 3.13 que apresenta a evolução da convergência do valor final do erro quadrático médio em relação às dispersões, δ_h , conjuntamente com a Fig. 3.12, nota-se um comportamento similar da evolução do erro como visto para o caso do parâmetro indutivo, ou seja, a influência das incertezas nesse parâmetro se mostra bastante expressiva.

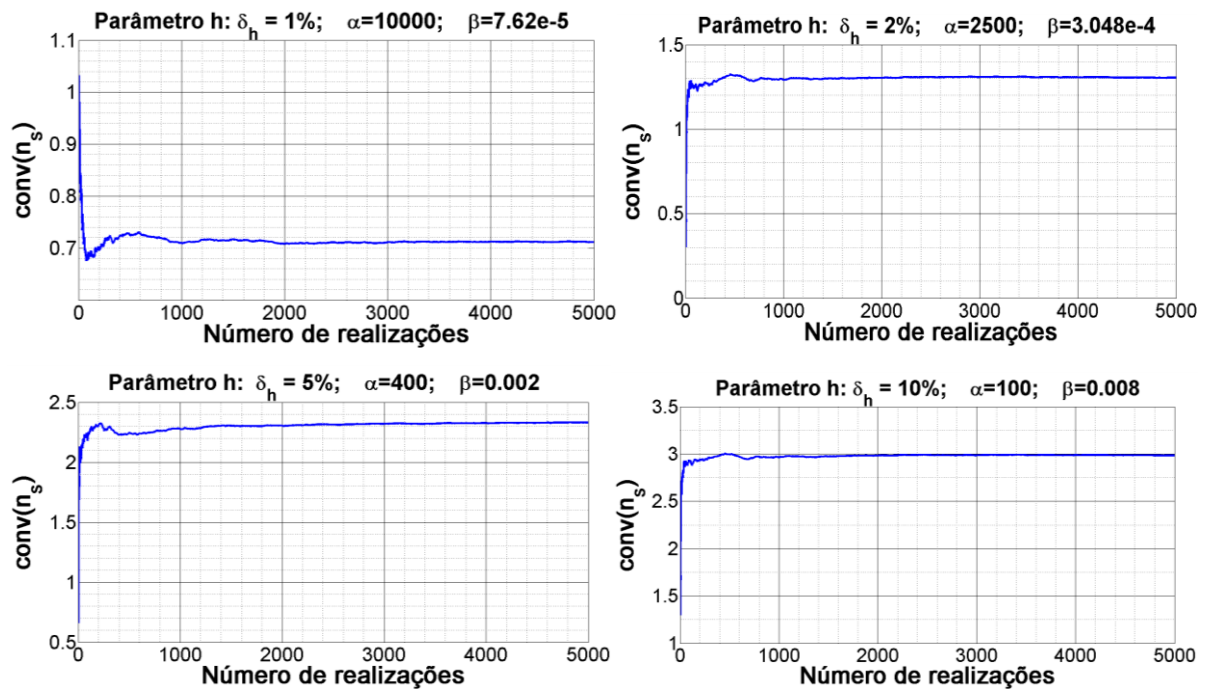


Figura 3.12 – Convergência do erro quadrático médio para incertezas no parâmetro, h_{pt}

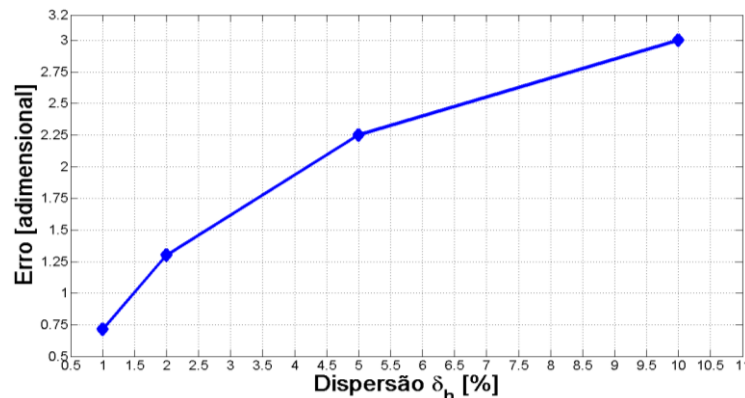


Figura 3.13 – Evolução do valor final do erro mediante aumento da dispersão δ_h .

3.5. Consolidação dos modelos

A partir das análises realizadas para cada um dos parâmetros aleatórios investigados que influem diretamente na eficiência dos circuitos elétricos passivos, pode-se concluir acerca dos seguintes limites de dispersão e do número mínimo de tiragens aleatórias, respectivamente, a serem utilizados para cada uma das variáveis aleatórias a serem consideradas no processo de otimização multiobjetivo robusta, como mostrado na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Dispersão, δ , e número de tiragens, n , a serem utilizadas na otimização robusta.

	R	L	h_{pzt}
δ	0,30	0,30	0,10
n	1500	2500	3000

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais a respeito da estratégia de otimização determinística e robusta a ser utilizado neste trabalho, com destaque para o critério de dominância de Pareto. Além disso, serão definidas as funções de vulnerabilidade a serem otimizadas ao mesmo tempo em que as funções objetivo originais para levar em conta a presença das incertezas nos parâmetros de projeto dos circuitos elétricos *shunt*. Na sequência, serão introduzidas nos problemas de otimização as informações acerca dos limites dispersão e número de tiragens para a convergência do modelo estocástico. Por fim, serão apresentados os resultados obtidos através da aplicação dos procedimentos de otimização determinístico e robusto, bem como a avaliação *a posteriori* da robustez dos sistemas gerados através de perturbações aplicadas nos parâmetros de projeto.

4.1. Problema de otimização multiobjetivo determinístico (POMD)

Durante a fase de concepção inicial ou pré-projeto de um circuito elétrico *shunt* para ser aplicado a uma dada estrutura composta contendo elementos piezelétricos acoplados a ela, é interessante dispor de uma estratégia de projeto ótimo e/ou robusto de tais dispositivos de controle passivo com vistas à sua confiabilidade, robustez e funcionamento sempre visando o seu máximo desempenho. Neste contexto, a otimização constitui-se uma ferramenta fundamental, com papel central na modelagem.

Os problemas de otimização no domínio da dinâmica estrutural são frequentemente multiobjetivos, sendo caracterizados pela presença de diferentes funções custo que geralmente estão em conflito entre si. Por isto, é de fundamental importância escolher uma estratégia de

otimização multiobjetivo que seja capaz de propor, dentre várias, as melhores alternativas de projeto.

Atualmente, o desenvolvimento de projetos na área de estruturas inteligentes apresenta invariavelmente uma etapa de otimização. Essa necessidade deve-se diretamente às exigências de funcionamento, confiabilidade e robustez, bem como o confronto dessas especificidades de projeto com as limitações de dimensões, peso e custo, por exemplo, além da disponibilidade dos fabricantes. Dessa maneira, a otimização dessas estruturas é tipicamente multiobjetivo, geralmente apresentando funções de custo conflitantes entre si, sendo de suma importância a escolha correta do método de otimização, uma vez que se espera contar com as melhores opções possíveis de projeto. De forma resumida, a seguir são apresentados os conceitos de otimização multiobjetivo, critério de dominância, robustez e das principais técnicas computacionais correlacionadas.

4.1.1 Definição do POMD e noção de dominância

A otimização multiobjetivo busca otimizar várias componentes de um vetor de funções custo. Contrariamente à otimização mono-objetivo, a solução de um POMD não é única, mas constituída de um conjunto de soluções conhecidas como soluções de Pareto (ESCHENAUER; KOSKI; OSYCZKA, 1990). Toda solução deste conjunto é ótima desde que qualquer melhoria não possa ser feita sobre uma componente do vetor sem a degradação de ao menos outra componente. O primeiro objetivo na resolução de um problema multiobjetivo é o de obter o conjunto das soluções de Pareto ou amostrar as soluções diversificadas deste conjunto. A determinação do conjunto é apenas uma primeira fase na resolução prática de um POMD que necessita num segundo momento da escolha de uma solução a partir deste conjunto de acordo com preferências do projetista. A escolha de uma solução em relação às outras necessita do conhecimento prévio do problema e dos inúmeros fatores que influem no mesmo. Assim, uma solução escolhida por um critério de decisão pode não ser aceitável por outro. Faz-se então necessário ter várias alternativas na escolha de uma solução de Pareto. Classicamente, um POMD é definido pela seguinte expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ \quad \quad \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \quad \quad \quad \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde $n \geq 2$ é o número de funções objetivo, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ é o vetor que representa as variáveis de projeto, $C \subset R^k$ representa o conjunto realizável (espaço de projeto k-dimensional) associado às restrições de igualdade ou desigualdade $g_j(\mathbf{x})$, e os limites explícitos; $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é o vetor de critérios ou funções objetivo a serem otimizadas.

De acordo com o princípio estabelecido por Vilfredo Pareto, *num problema multiobjetivo, existe um equilíbrio tal que não se pode melhorar um critério sem deteriorar pelo menos um dos outros critérios*. Este equilíbrio é chamado ótimo de Pareto. Esta definição para as soluções de Pareto decorrem diretamente da *noção de dominância*. Ela significa que é impossível encontrar uma solução que melhore o desempenho sobre um critério sem que isto provoque uma degradação no desempenho sobre ao menos outro critério. As soluções de Pareto são conhecidas como *soluções admissíveis, não dominadas e inferiores* (ZITZLER; THIELE, 1999).

Definição de dominância de Pareto: Uma solução $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ domina outra solução $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)$ se, e somente se, $\forall i \in [1, n] \ y_i \leq z_i$ e $\exists i \in [1, n]$ tais que $y_i < z_i$. Neste contexto, uma solução $x^* \in C$ é uma solução de Pareto se, e somente se, não existe uma solução $x \in C$ tal que $F(x)$ domine $F(x^*)$.

A Figura 4.1 ilustra o conceito de dominância de Pareto, onde os pontos 1, 3 e 5 não são dominados pelos outros pontos. Por outro lado, o ponto 2 é dominado pelo ponto 3, e o ponto 4 é dominado pelos pontos 3 e 5.

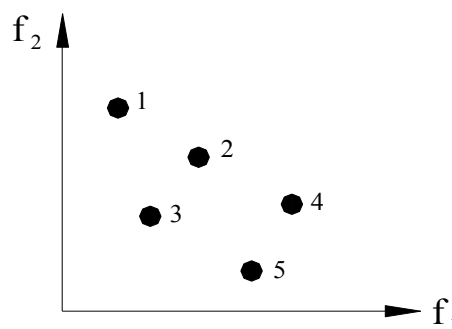


Figura 4.1 – Noção de dominância de Pareto (extraída de Ait Brik (2005)).

4.1.2 Escolha de um método de otimização multiobjetivo

A principal dificuldade de um problema multiobjetivo não consiste em buscar a solução ótima, mas o conjunto das soluções satisfatórias, que devem, em seguida, se

submeterem a uma operação de classificação. Os métodos de resolução dos problemas multiobjetivo são então métodos de auxílio à decisão, porque a escolha final ficará a cargo do projetista. Neste contexto, existem dois tipos de resolução de um problema multiobjetivo (AIT BRIK, 2005): a primeira solução adota um ponto de vista do projetista e consiste em transformar um problema multiobjetivo num problema simples mono-objetivo onde as funções custo são ponderadas e a resolução do problema torna-se clássica. Neste caso, a solução é ótima no contexto de uma função mono-objetivo. O problema é que esta solução não satisfaz necessariamente todos os critérios multiobjetivos. Além disso, desconsidera-se o significado físico do problema de partida (DAS; DENNIS, 1997). A segunda solução é de tentar responder ao problema multiobjetivo, levando-se em conta o conjunto de critérios de acordo com o conceito de otimização de Pareto. No primeiro método, o projetista intervém desde o começo da definição do problema, exprimindo suas preferências para transformar o problema multiobjetivo num problema mono-objetivo. Na segunda estratégia, a escolha é feita no conjunto das soluções propostas pelo otimizador multiobjetivo.

Na maioria dos casos, o projetista não pode exprimir claramente as suas preferências, seja porque lhe faltam experiências ou informações, seja porque as funções objetivo são de naturezas diferentes. O inconveniente é que quando o espaço de projeto não é convexo, o método de ponderação ignora esta parte do conjunto de soluções de Pareto (DAS; DENNIS, 1997) como ilustrado na Fig. 4.2 abaixo.

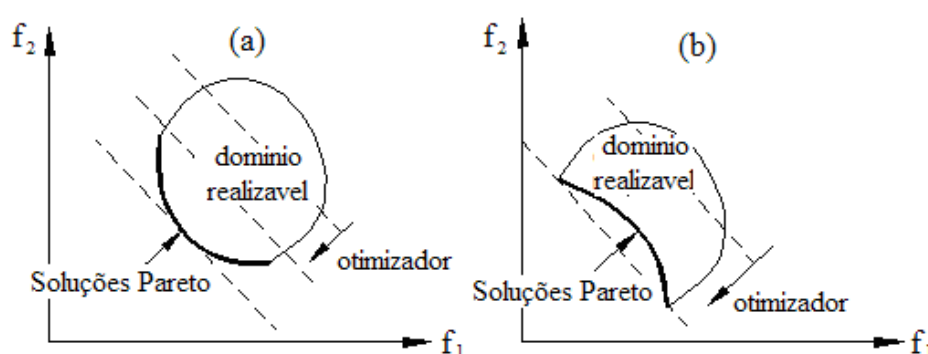


Figura 4.2 – Espaço convexo (a) e não convexo (b) (adaptada de Das e Dennis (1997)).

Dentre as diversas técnicas computacionais para busca de soluções, optou-se pelo uso de algoritmos genéticos. Esses algoritmos fundamentam a exploração em mecanismos de seleção natural e genética. Eles utilizam ao mesmo tempo, os princípios de sobrevivência dos indivíduos melhores adaptados e as trocas de informação pseudo-aleatórias. Estes algoritmos tentam maximizar uma função custo (positiva) gerando aleatoriamente, uma população inicial

de soluções potenciais, para fazê-la evoluir através da aplicação dos operadores genéticos. Existem inúmeras variantes dos algoritmos evolucionários para resolução de um problema multiobjetivo (CHIONG; WEISE; MICHALEWICZ, 2012). Entretanto, aquele escolhido neste trabalho, é o chamado NSGA (*Non dominated Sorting Genetic Algorithm*), inicialmente proposto por Srinivas e Deb (1993), sendo baseado no conceito de dominância de Pareto e as soluções são classificadas em *rang*, procedimento denominado *ranking*, onde os indivíduos que não são dominados são posicionados nos primeiros *Fronts*, e em seguida, eliminados da população. O processo é repetido sucessivamente até que todos os indivíduos da população tenham um *Front*.

Após a classificação de cada população em *rang*, atribui-se a cada indivíduo, x_i , um valor f_i denominado *fitness* tal que $f_i = 1/r$ sendo r igual ao *rang* do indivíduo. O objetivo da resolução de um problema multiobjetivo não é somente encontrar o conjunto de soluções de Pareto, mas também as soluções que são uniformemente distribuídas neste conjunto (SRINIVAS; DEB, 1993). Neste caso, é necessário introduzir a técnica de formação de *niche*. Os valores da função *fitness* são assim divididos pela função de *niche* (*sharing*) como segue:

$$sh(d(x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 - d(x_i, x_j)/\sigma & \text{if } d(x_i, x_j) < \sigma \\ 0 & \text{if } d(x_i, x_j) \geq \sigma \end{cases} \quad (4.2)$$

onde x_i e x_j são os indivíduos; *sh* é a função de *niche*; σ é a constante fixada *a priori* que define o intervalo de *niche*; $d(x_i, x_j)$ é a distância euclidiana entre dois indivíduos x_i e x_j . Após a definição da função *fitness*, utilizam-se as operações de um algoritmo genético como seleção, cruzamento e mutação como ilustrado na Fig. 4.3.

É importante destacar que vários autores têm demonstrado que o NSGA é menos eficaz em termos de tempo de cálculo que os outros métodos multiobjetivos propostos na literatura, mas a utilização de uma função *sharing* sobre o espaço de soluções apresenta vantagens de manter uma grande variabilidade da população, permitindo uma partição mais eficaz das soluções sob o *front* de Pareto. Além disso, o método NSGA pode ser aplicado a problemas com um número qualquer de objetivos.

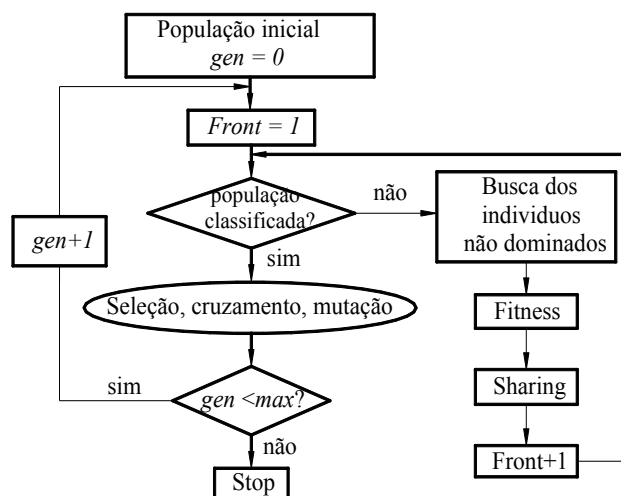


Figura 4.3 – Estratégia NSGA (adaptada de Ait Brik (2005)).

4.2 Problema de otimização multiobjetivo robusto (POMR)

A otimização robusta tem as mesmas características da otimização determinística ao nível do tratamento dos dados, mas leva em conta as incertezas sobre as variáveis de projeto e sobre as funções objetivo, assim como no tratamento das restrições (LEE; PARK, 2001). Em engenharia mecânica, estas incertezas são inerentes aos defeitos de modelagem, às variações das propriedades mecânicas dos materiais, tolerâncias dos processos de fabricação e de montagem (espessuras de chapas, juntas, etc.), etc. Numa fase de desenvolvimento avançada do projeto, estas incertezas são introduzidas para se levar em conta a falta de informações de certas variáveis de projeto, o que dá toda importância a estes métodos de otimização. É importante destacar que no capítulo anterior foram definidas as principais origens das incertezas e a abordagem frequentemente empregada em dinâmica para resolver os sistemas estocásticos.

4.2.1 Consideração da robustez na busca do ótimo.

Na otimização de estruturas compostas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos *shunt*, a consideração da robustez das soluções é essencial na busca de um projeto ótimo e robusto dos circuitos elétricos. Isto porque uma solução teoricamente excelente pode revelar-se catastrófica na prática se os erros associados ao processo de fabricação não permitem obter os valores ótimos das variáveis de projeto com a precisão desejada. Mesmo um pequeno desvio em relação ao seu valor teórico ótimo poderá traduzir-se num

comportamento muito diferente daquele previsto pela otimização numérica (restrições de otimização não satisfeitas, por exemplo). Neste contexto, uma solução menos ótima mais estável no que diz respeito às tolerâncias de fabricação é mais interessante para o projetista.

A abordagem mais utilizada consiste em tomar os limites sobre as restrições impostas, e depois verificar *a posteriori* que a solução encontrada pela otimização determinística permanece estável quando as diferentes variáveis descrevem os intervalos de tolerância considerados. Esta verificação pode ser feita pelos métodos probabilísticos como a simulação de Monte Carlo (MC), ou ainda pelo método Hyper-Cubo-Latino (HCL). Além disso, métodos ditos possibilistas, baseados na aritmética dos intervalos, foram desenvolvidos para avaliar a variação das respostas quando os parâmetros descrevem intervalos (BRAIBANT; DELCROIX; OUDSHOORN, 1998 ; DESSOMBZ et al., 2001). Muitos autores propuseram a avaliação da robustez das soluções ótimas apenas ao final do processo de otimização (BENNETT; LUST, 1990). Os principais inconvenientes destas estratégias são: a necessidade sistemática das expressões analíticas da função objetivo e a utilização da ponderação destas funções, que excluem a busca de eventuais soluções nas regiões não convexas do espaço das soluções robustas. Desta forma, encontram-se zonas de robustez e não soluções ótimas e robustas.

4.2.2 Critério de robustez para a otimização multiobjetivo robusta

Para definir a robustez de uma função objetivo, considera-se como exemplo uma função custo a um único parâmetro, como ilustrado na Fig. 4.4, contendo duas soluções ótimas A e B , respectivamente. A solução A é o ótimo determinístico, e a solução B é o ótimo robusto. O desempenho do ótimo determinístico é melhor que o do ótimo robusto. Contudo, sua distribuição é mais larga que a do ótimo robusto.

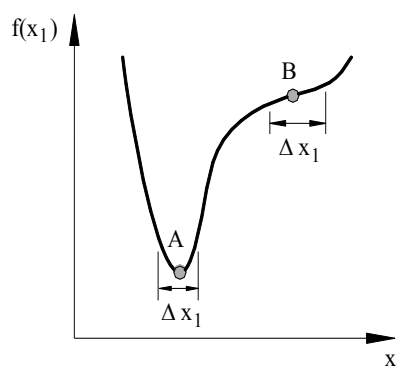


Figura 4.4 – Soluções ótimas robustas (adaptada de Lee e Park (2001)).

Uma função robustez é um estimador que permite avaliar o impacto das variações dos parâmetros de projeto sobre a função custo. Normalmente, a construção da função robustez é baseada na *média*, μ , e no desvio padrão, σ , das funções custo. Neste trabalho, utiliza-se a abordagem robusta proposta por Lima *et al.* (2010), onde a função robustez, f^r , de uma função objetivo, $f(x)$, é definida como segue:

$$f^r = (\sigma_f / \mu_f)^{-1} \quad (4.3)$$

onde (σ_f / μ_f) é a medida da dispersão, ou vulnerabilidade de $f(x)$, denotada por $f^v(x)$.

A Figura 4.5 ilustra o método utilizado neste trabalho, com o objetivo de encontrar as soluções do problema proposto ao projetista, levando-se em conta as incertezas dos parâmetros de projeto durante a otimização de estruturas compostas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos *shunt*. Para isto, define-se um novo problema POMR capaz de encontrar os ótimos estáveis para as variáveis aleatórias. No novo problema de otimização, serão otimizadas simultaneamente as funções custo iniciais e as funções robustez. O POMD inicial é definido pela expressão (4.1), enquanto o POMR é expresso da forma:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_1^v(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_2^v(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}), f_n^v(\mathbf{x})) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $f_i^v(\mathbf{x})$ é a função vulnerabilidade da função objetivo $f_i(\mathbf{x})$ e $i = 1, \dots, N$.

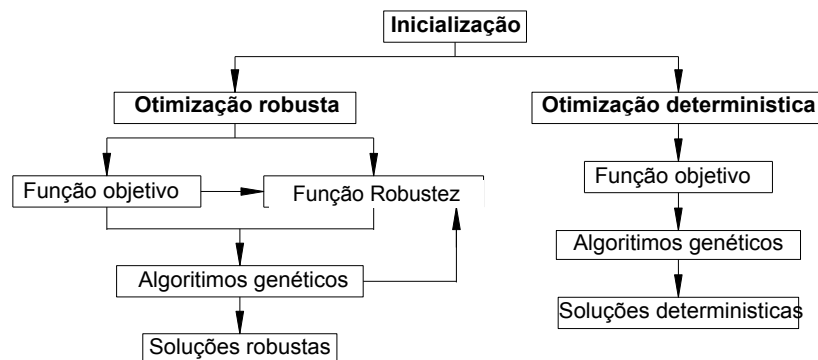


Figura 4.5 – Comparação entre metodologias de otimização multiobjetivo robusta e determinística.

As soluções robustas no que diz respeito às incertezas, são aquelas que permitem minimizar simultaneamente as funções custo iniciais e maximizar sua robustez, ou minimizar as suas vulnerabilidades.

Uma vez definido o POMR, o próximo passo consiste em avaliar numericamente a função de robustez de maneira simples e com um número de amostras reduzido levando-se em conta a convergência como apresentado no capítulo anterior, uma vez que não se trata apenas de se caracterizar um ótimo, mas de integrar um critério de robustez ao algoritmo de busca. Uma solução econômica consiste na substituição de uma tiragem clássica de Monte Carlo (PAPADRAKAKIS; KOTSOPULOS, 1999) pelo método HCL (FLORIAN, 1992). Outros métodos podem ser utilizados para resolver o problema do tempo de cálculo como os metamodelos baseados em superfícies de resposta ou redes neurais, além de abordagens não paramétricas (SOIZE, 2001; 2010). Neste trabalho, serão adotadas as técnicas de modelagem de incertezas e de resolução de sistemas estocásticos apresentadas no capítulo anterior.

4.3. Aplicações numéricas

4.3.1 Otimização multiobjetivo determinística

Nesta seção, será empregado o procedimento de otimização POMD na tentativa de busca de um melhor desempenho do circuito *shunt* ressonante. Para tanto, será considerado o mesmo sistema apresentado no Capítulo 2, Seção 2.4, constituído por uma viga composta em balanço formada por quatro camadas contendo um elemento PZT acoplado ao circuito *shunt* ressonante. As funções objetivo a serem minimizadas são a amplitude da função de resposta em frequência para o primeiro modo e a massa acrescentada ao sistema pelo PZT.

A Tabela 4.1 define os valores nominais adotados para cada variável de projeto em questão, bem como suas correspondentes variações a serem consideradas no espaço de busca para a otimização multiobjetivo determinística. A Tabela 4.2 define os valores dos parâmetros do NSGA que foram utilizados nas simulações.

Tabela 4.1 – Definição do espaço de projeto para o problema POMD.

Parâmetro	Valor inicial	Variação
h_{pzt} [mm]	0,732	60%
R [k Ω]	16,106	80%
L [H]	629,138	80%

Tabela 4.2 – Parâmetros do NSGA.

NSGA	
Probabilidade de seleção	0,25
Probabilidade de reprodução	0,25
Probabilidade de mutação	0,25
Número de gerações	100
Número de indivíduos	50
Coefficiente de niche (σ)	0,2

Após a realização da otimização, foi gerado o primeiro *front* de Pareto para a identificação dos melhores pontos, e assim, obter os parâmetros ótimos de cada variável de projeto do circuito *shunt*.

A Figura 4.6 representa a frente de Pareto para o problema POMD, onde serão consideradas as soluções ótimas correspondentes ao ponto *A*, indicado na mesma figura. É importante salientar que a escolha deste ponto foi feita procurando-se obter o melhor compromisso entre a massa total acrescida ao sistema pela presença do elemento PZT, e a amplitude de vibração do sistema para o modo em análise.

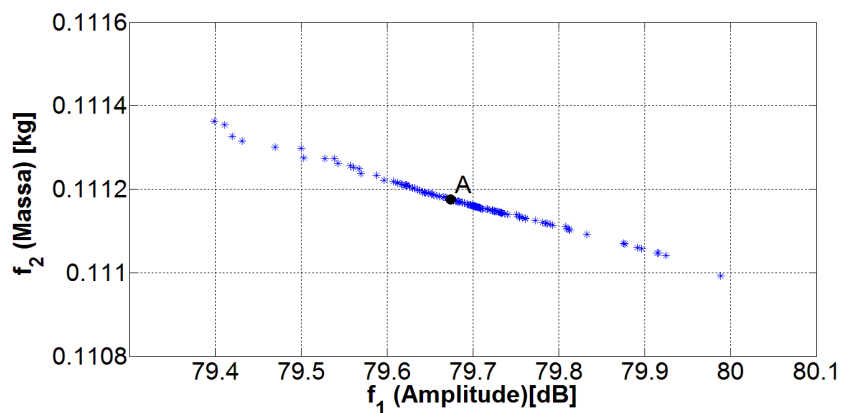


Figura 4.6 – Frente de Pareto para o problema POMD.

A Tabela 4.3 representa os valores ótimos determinísticos obtidos para as variáveis de projeto, bem como os valores de cada função objetivo. A Figura 4.7 representa as amplitudes das FRFs para os sistemas sem e com circuitos *shunt*, considerando-se os valores nominais de projeto e os correspondentes valores ótimos definidos na Tabela 4.3. De imediato, pode-se notar que a amplitude de vibração na ressonância diminui drasticamente em função da presença do circuito elétrico. Além disso, percebe-se uma razoável melhora na eficiência do circuito quando comparado com os resultados obtidos para os valores nominais de projeto. Outro aspecto importante a ser observado é que a frequência de ressonância do sistema para o

caso do circuito otimizado deterministicamente foi alterada. Isto se deve principalmente em virtude da mudança na espessura do elemento piezelétrico, causando modificações tanto na massa, quanto na rigidez equivalente da estrutura composta.

Tabela 4.3 – Resultados do problema POMD.

Valores ótimos	
h_{pzt} [mm]	0,6115
R [k Ω]	16,259
L [H]	521,545
Funções objetivo	
Amplitude [dB]	79,670
Massa [Kg]	0,11119

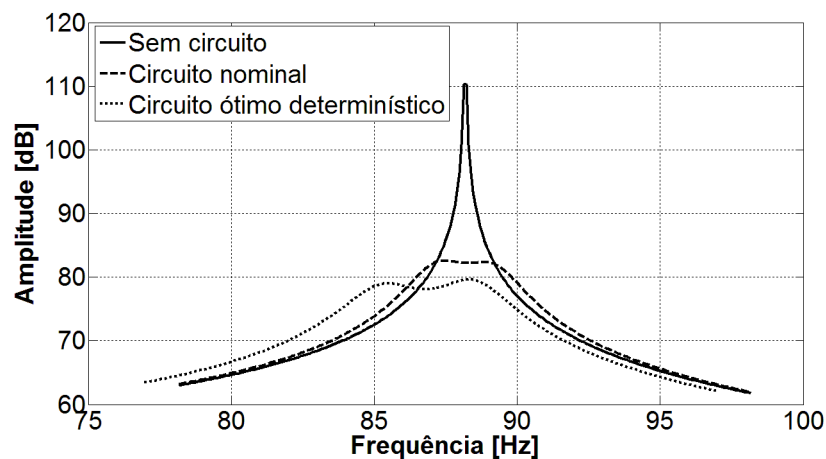


Figura 4.7 – Comparação das amplitudes das FRFs do sistema sem e com circuitos – POMD.

4.3.2 Otimização multiobjetivo robusta

Nesta seção, ênfase é dada à otimização multiobjetivo robusta, levando-se em conta a presença das incertezas nas variáveis de projeto como definidas na Tab. 4.4. As funções objetivo a serem otimizadas são aquelas definidas anteriormente para o caso da otimização multiobjetivo determinística. Entretanto, para cada função custo, introduz-se uma função de vulnerabilidade suplementar como função a ser minimizada ao mesmo tempo em que as funções custo originais. Desta forma, o problema inicial de otimização composto por duas funções custo é transformado no seguinte problema POMR a quatro funções custo a serem otimizadas simultaneamente:

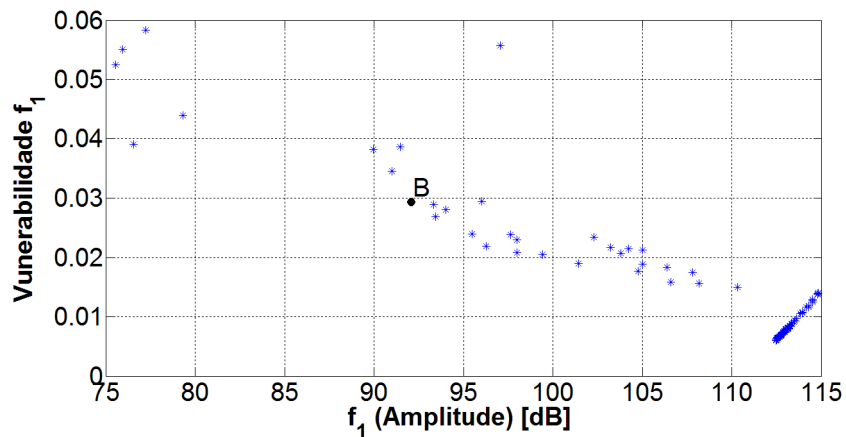
$$\text{Minimizar} \begin{cases} f_1 = \text{amplitude FRF} \\ f_2 = \text{massa total} \\ f_1^v = (\sigma_1/\mu_1) \\ f_2^v = (\sigma_2/\mu_2) \end{cases} \quad (4.5)$$

Tabela 4.4 – Definição do espaço de projeto para o problema POMR

Variáveis de projeto	Valores nominais	Variações admissíveis	Níveis de incertezas
h_{PZT}	0,762 mm	$\pm 60\%$	$\Delta h_{PZT} = 10\%$
R	16,106 k Ω	$\pm 80\%$	$\Delta R = 30\%$
L	629,138 H	$\pm 80\%$	$\Delta L = 30\%$

Para encontrar as soluções ótimas e robustas, utilizou-se o algoritmo NSGA com as mesmas características mostradas na Tab. 4.2. Para calcular as funções de vulnerabilidade, a cada geração, foram realizadas 3000 tiragens aleatórias para cada variável contínua de projeto pelo método HCL, que é uma variante do método de Monte Carlo, com garantia de convergência mais rápida. Além disso, serão empregadas as distribuições obtidas para as variáveis aleatórias em função dos níveis de incerteza, conforme o apresentado no Capítulo 3.

As Figuras 4.8 e 4.9 apresentam os resultados provenientes da otimização robusta em termos das funções custo e suas respectivas vulnerabilidades. Na prática, as funções de vulnerabilidade utilizadas consistem em minimizar as dispersões ao redor de cada solução ótima encontrada. Na Tabela 4.5 define os intervalos de dispersão para cada função custo.

Figura 4.8 – Amplitude de vibração *versus* vulnerabilidade para o problema POMR

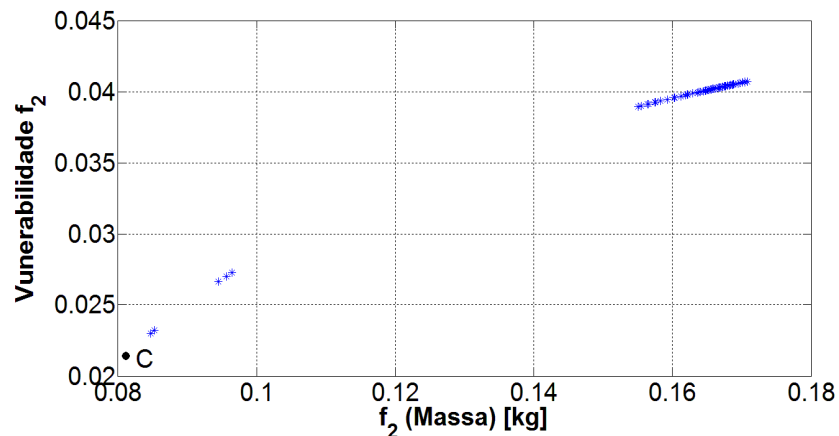


Figura 4.9 – Massa *versus* vulnerabilidade para o problema POMR.

Tabela 4.5 – Intervalos de dispersão para cada função custo.

	Mínimo	Máximo
f_1 (Amplitude FRF)	0,6%	5,8%
f_2 (Massa Total)	2,14%	4,07%

Pela análise da Fig. 4.8, e tendo em vista o fato de se buscar o melhor compromisso entre a amplitude de vibração para o modo em análise e a sua respectiva vulnerabilidade para verificar a estabilidade (nível de dispersão) das soluções ótimas e robustas comparadas às das soluções determinísticas, será escolhido o ponto *B*, indicado na figura. Já para o caso da massa e sua respectiva vulnerabilidade como apresentado na Fig. 4.9, será tomado o ponto *C*, que leva à obtenção do menor valor para a massa com a maior robustez das soluções.

A Figura 4.10 mostra a frente de Pareto para o problema de otimização multiobjetivo robusto. Nesta etapa, o interesse é encontrar o ponto de melhor compromisso entre as funções custo levando-se conta as suas vulnerabilidades, ou seja, os pontos escolhidos previamente nas respectivas Figs. 4.8 e 4.9. Portanto, serão consideradas as soluções correspondentes ao *D* indicado na Fig. 4.10, onde os valores das variáveis estão definidos na Tab. 4.6.

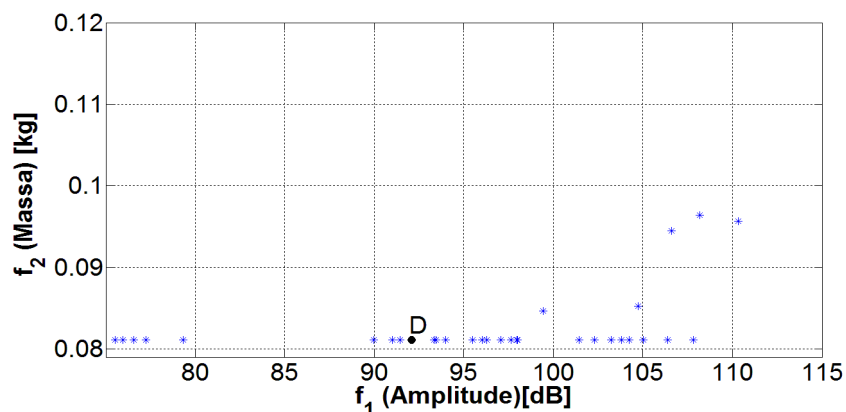


Figura 4.10 – Frente de Pareto para o problema POMR

Tabela 4.6 – Resultados do problema POMR.

Valores ótimos e robustos	
h_{pzt} [mm]	0,3048
R [k Ω]	28,991
L [H]	170,287
Funções objetivo	
Amplitude[dB]	92,08
Massa[kg]	0,0811

A Figura 4.11 compara as amplitudes das FRFs do sistema sem e com circuitos *shunt* nominal, ótimo determinístico e ótimo robusto. Nota-se que a solução determinística leva à obtenção de um circuito *shunt* ressonante mais eficiente que a solução ótima robusta em termos da atenuação dos níveis de vibração da estrutura composta para o modo em análise. Isto implica dizer que em termos da atenuação das vibrações mecânicas, as soluções ótimas determinísticas dominam as soluções ótimas robustas, conforme comparação das frentes de Pareto para as soluções determinísticas e robustas apresentadas na Fig. 4.12. Entretanto, observando a mesma figura, nota-se que as soluções robustas dominam as soluções determinísticas com relação a massa do sistema.

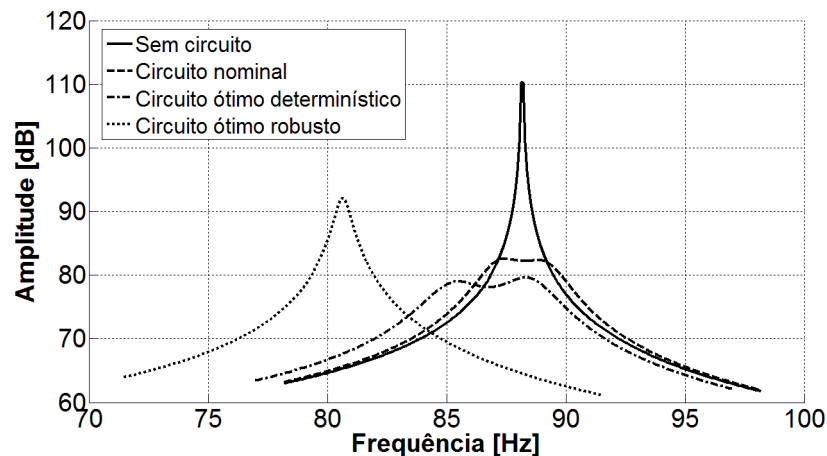


Figura 4.11 – Comparação das amplitudes das FRFs do sistema sem e com circuitos – POMR

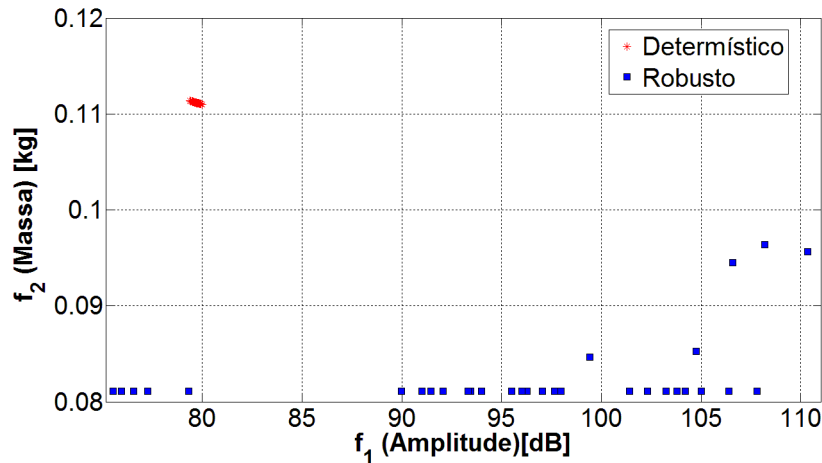


Figura 4.12- Comparação das Frentes de Pareto para as soluções determinísticas e robustas.

4.4. Avaliação da robustez

Com o objetivo de verificar a estabilidade (nível de dispersão) das soluções ótimas obtidas para os dois problemas de otimização, foram geradas aleatoriamente pelo método HCL 200 amostras para cada variável de projeto e gerados os envelopes das soluções em termos das FRFs (extremos estatísticos com valores máximos, médios e mínimos para cada ponto em frequência). Em conformidade com o que foi discutido no Capítulo 3, as perturbações introduzidas nas variáveis de projeto estão dentro das faixas máximas admissíveis e informadas pelos fabricantes. Além disso, as incertezas serão avaliadas de duas maneiras, a saber: (a) níveis de incertezas iguais para todos os parâmetros; (b) níveis de incertezas desiguais para os parâmetros. Em todos os casos avaliados será considerada a função densidade de probabilidade *Gamma* e os limites máximos de dispersão conforme estabelecidos no Capítulo 3, ou seja, $\Delta h_{PZT} = 5,0\%$, $\Delta R = 20,0\%$ e $\Delta L = 20,0\%$.

4.4.1 Incertezas iguais nos parâmetros

Nesta seção será avaliado o comportamento das soluções correspondentes aos pontos ótimos, determinístico e robusto, na presença das incertezas de mesmo nível. Para a geração das amostras, foram considerados os seguintes níveis de dispersão nas variáveis de projeto: $\Delta h_{PZT} = \Delta R = \Delta L = 2,0\%$ e $\Delta h_{PZT} = \Delta R = \Delta L = 5,0\%$.

A Fig. 4.13 apresenta os envelopes das FRFs para cada solução para as incertezas iguais de 2%. Percebe-se claramente que as soluções robustas são mais estáveis que as

soluções determinísticas com relação às incertezas introduzidas, o que mostra que as soluções ótimas são bastante robustas (vulnerabilidade mínima) levando-se em conta as pequenas perturbações introduzidas. Isto pode ser verificado pela análise das variações entre as amplitudes das FRFs máximas e mínimas dos envelopes para cada solução, como apresentado na Fig. 4.14 e, além disso, pode-se notar que o caso robusto forneceu variações cerca de quatro vezes menores na banda de frequência de projeto, evidenciando a pequena vulnerabilidade do projeto robusto.

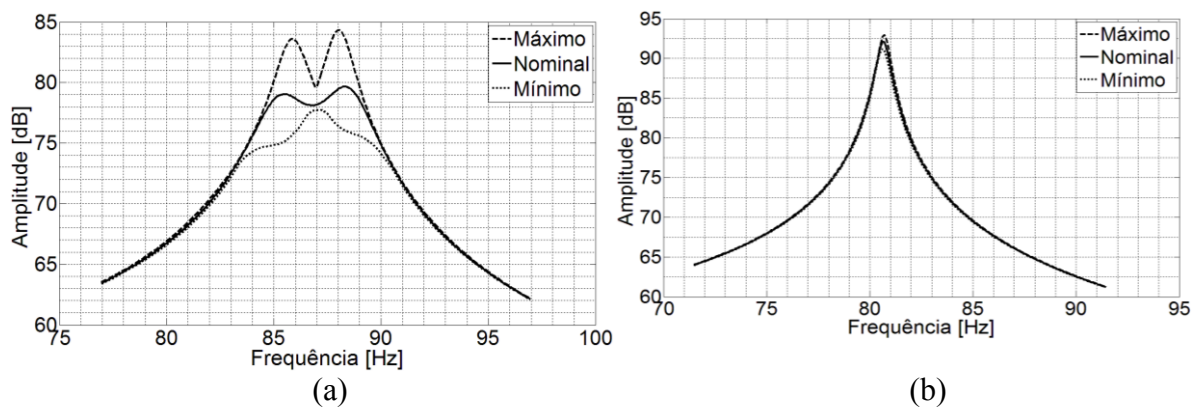


Figura 4.13 – Envelope de soluções para $\Delta h_{PZT} = \Delta R = \Delta L = 2,0\%$: (a) Ótimo determinístico, (b) Ótimo Robusto.

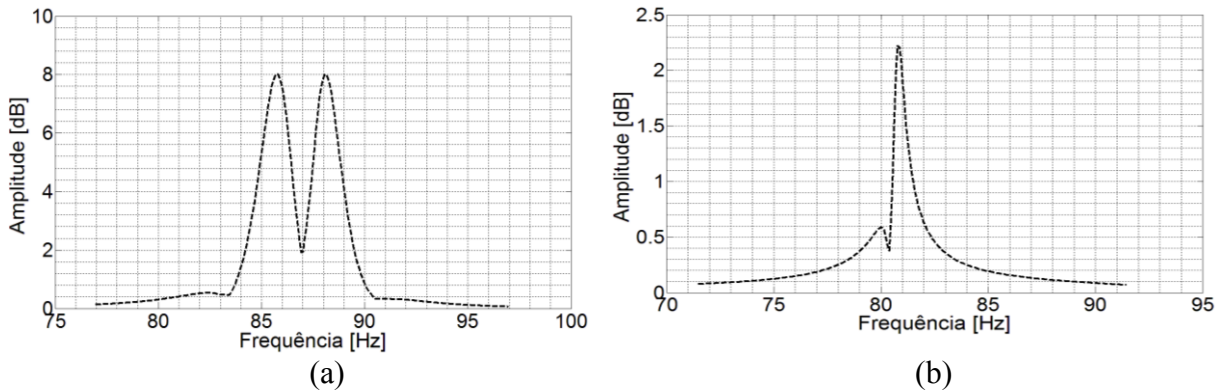


Figura 4.14 – Variações para $\Delta h_{PZT} = \Delta R = \Delta L = 2,0\%$: (a) Ótimo determinístico, (b) Ótimo Robusto.

A Fig. 4.15 apresenta as FRFs para incertezas de 5%. Similarmente ao observado para o caso de 2%, o ótimo robusto apresentou-se menos vulnerável às perturbações introduzidas nas variáveis de projeto, portanto, são mais robustas que as variáveis correspondentes ao ótimo determinístico, como pode ser verificado pela análise das variações entre as amplitudes das FRFs máximas e mínimas dos envelopes para cada solução, apresentado na Fig. 4.16.

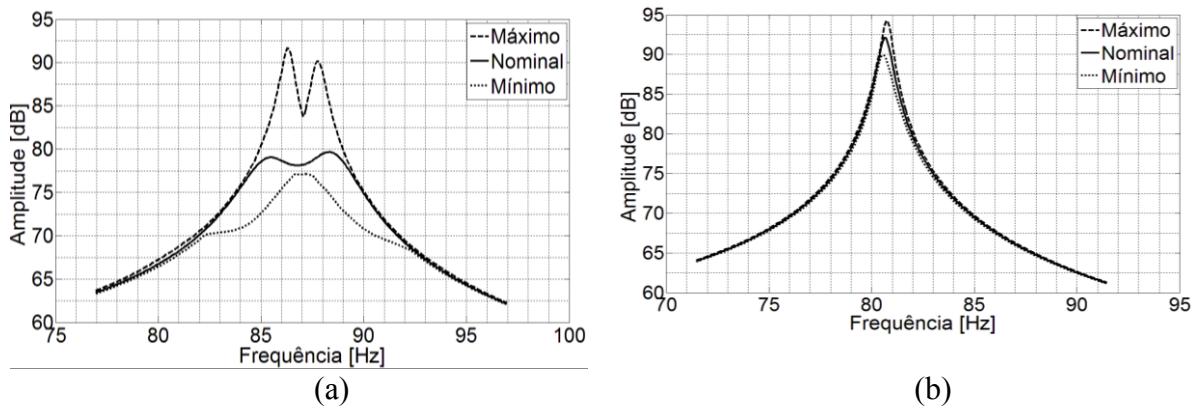


Figura 4.15 – Envelope de soluções para $\Delta h_{PZT} = \Delta R = \Delta L = 5,0\%$: (a) Ótimo determinístico, (b) Ótimo Robusto.

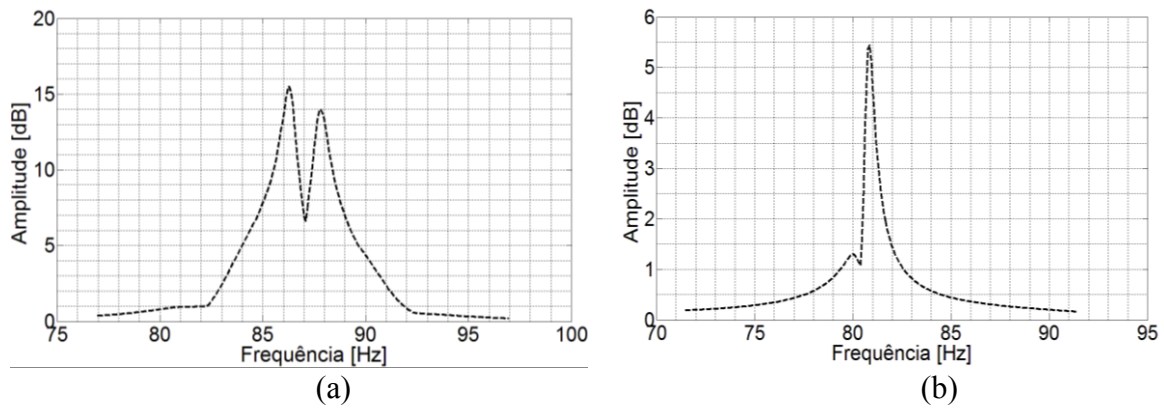


Figura 4.16 – Variações para $\Delta h_{PZT} = \Delta R = \Delta L = 5,0\%$: (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.

4.4.2 Incertezas desiguais nos parâmetros

É importante salientar que conforme discutido no Capítulo 3, as variáveis de projeto em questão apresentam diferentes faixas de tolerância. Além disso, os parâmetros elétricos mais suscetíveis a variações podem possuir, no pior caso, até 20% de tolerância, contra 5% da espessura do elemento piezelétrico. Portanto, com o intuito de apresentar um estudo mais próximo da realidade com relação às incertezas nesses parâmetros, nesta seção, será avaliado o comportamento das soluções correspondentes aos pontos ótimos determinístico e robusto mediante a presença das incertezas de níveis desiguais em cada variável, com tratamento diferenciado entre os parâmetros elétricos e a espessura do elemento PZT. As configurações de máximos valores de dispersão a serem avaliadas para os parâmetros são: (a) $\Delta h_{PZT} = 2,0\%$ e $\Delta R = \Delta L = 8,0\%$; (b) $\Delta h_{PZT} = 5,0\%$ e $\Delta R = \Delta L = 20,0\%$.

A Fig. 4.17 apresenta os envelopes das FRFs para a primeira situação de perturbações. Mais uma vez, percebe-se que as soluções correspondentes ao ponto ótimo robusto levam a um envelope mais estreito em relação às soluções do ótimo determinístico. Entretanto, fica evidente a maior eficiência do circuito elétrico *shunt* gerado pelas soluções determinísticas, demonstrando mais uma vez que as soluções determinísticas dominam as soluções robustas. Entretanto, como mostrado na Fig. 4.18, as soluções determinísticas são muito mais sensíveis às perturbações introduzidas *a posteriori* nas variáveis de projeto.

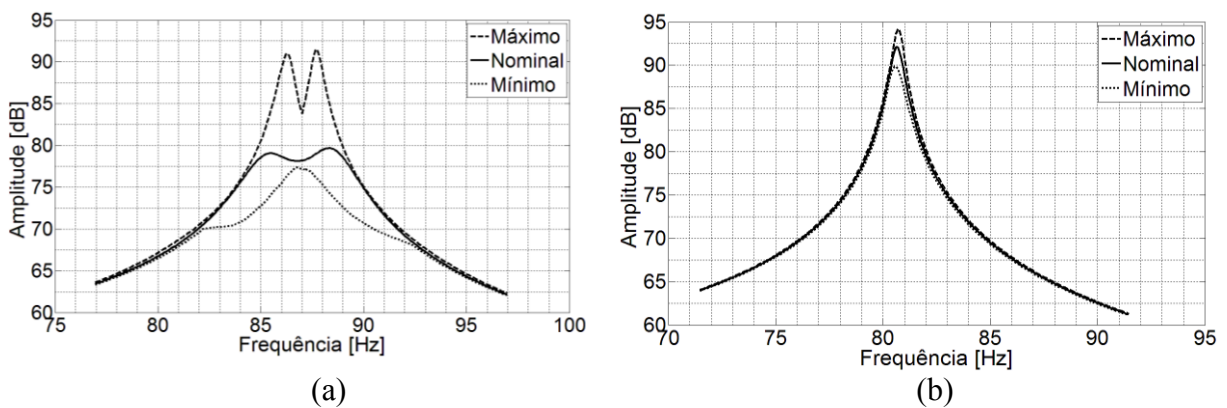


Figura 4.17 – Envelope de soluções para $\Delta h_{PZT} = 2,0\%$ e $\Delta R = \Delta L = 8,0\%$: (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.

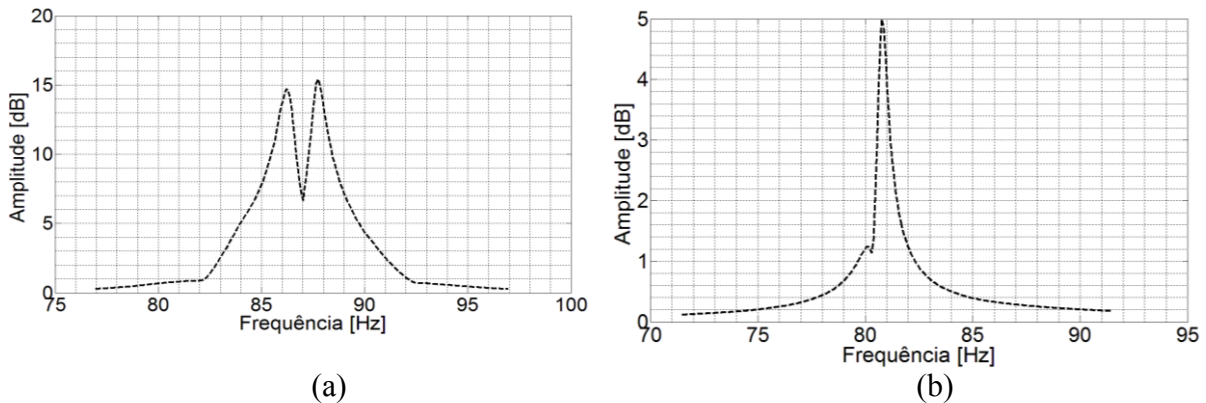


Figura 4.18 – Variações para $\Delta h_{PZT} = 2,0\%$ e $\Delta R = \Delta L = 8,0\%$: (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.

A Fig. 4.19 apresenta as FRFs para a situação limite do nível de perturbações nas variáveis de projeto, ou seja, $\Delta h_{PZT} = 5,0\%$ e $\Delta R = \Delta L = 20,0\%$. Observa-se que o ótimo robusto apresenta um envelope mais estreito em relação ao projeto determinístico. Isto mostra que mesmo na presença de altos níveis de incertezas nos parâmetros de projeto, a solução robusta é mais estável que a solução determinística. Deve-se ressaltar que nesse caso de incertezas desiguais e na região limítrofe da tolerância dos parâmetros o nível de robustez foi

reduzido, limitando-se, no melhor caso, a duas vezes o valor da variação observada no caso determinístico.

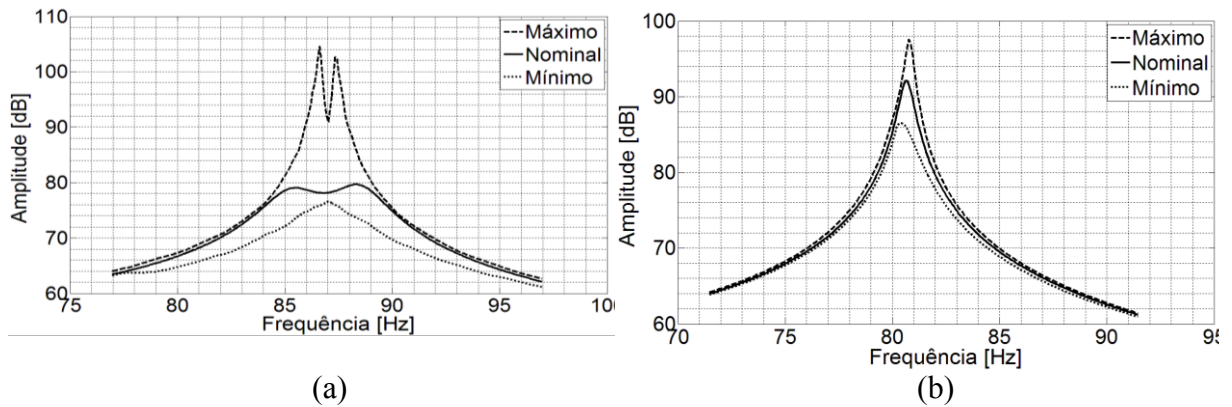


Figura 4.19 – Envelope de soluções para $\Delta h_{PZT} = 5,0\%$ e $\Delta R = \Delta L = 20,0\%$: (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.

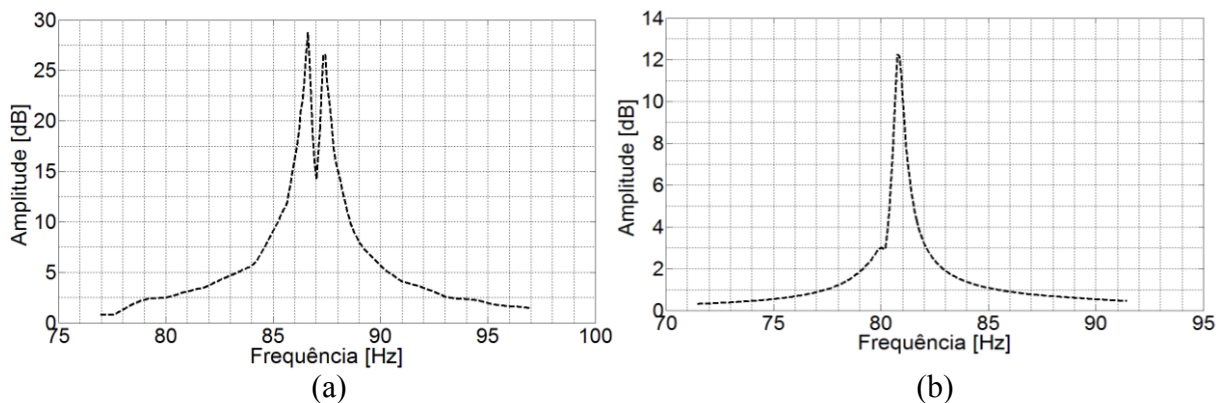


Figura 4.20 – Variações para $\Delta h_{PZT} = 5,0\%$ e $\Delta R = \Delta L = 20,0\%$: (a) Ótimo determinístico; (b) Ótimo Robusto.

De modo geral, deve-se ressaltar que o projeto robusto obtido reduziu consideravelmente a vulnerabilidade da estrutura às variações nos parâmetros do circuito *shunt* e espessura do piezelétrico. Em especial, para as pequenas tolerâncias nos parâmetros com incertezas testadas, no caso 2% e 5% (Figs. 4.14 a 4.16), obteve-se grandes valores de robustez, da ordem 4 e 3 vezes menos desvio em amplitude nos envelopes de frequência, garantindo grande imunidade a perturbações. Mesmo em grandes perturbações, (Figs. 4.17 a 4.20), percebe-se no geral que o projeto robusto apresenta faixa de frequências reduzida para amplitudes acima da banda de meia potência, o que se traduz na restrição da influência das incertezas também no ponto de vista do espectro de frequências.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS

Resumo e avaliação

Este trabalho de dissertação representa uma continuidade aos desenvolvimentos que vem sendo realizados no LMEst/UFU no tocante à modelagem numérico-computacional e projeto ótimo-robusto de estruturas compostas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt* ressonante monomodal na presença de incertezas paramétricas. No tocante aos temas de pesquisa de interesse do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT–EIE), o conteúdo deste trabalho representa o resultado da continuidade dos trabalhos desenvolvidos por Faria (2006) sobre a modelagem numérica de estruturas compostas finas do tipo placas, e do trabalho realizado por Viana (2005) sobre a modelagem numérica e caracterização experimental de circuitos elétricos *shunt* para o controle passivo de vibrações de sistemas estruturais. Em particular, o presente trabalho é consagrado à modelagem de estruturas compostas contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos *shunt* ressonante na presença de incertezas, e a proposição de uma metodologia de concepção ótima e robusta de soluções potenciais para tais circuitos nas fases de concepção inicial ou pré-projeto para o controle passivo de estruturas compostas.

Na primeira parte do trabalho, em particular, o Capítulo 2, foi colocado em evidência os desenvolvimentos baseados no método de elementos finitos de elementos estruturais do tipo placas compostas finas e moderadamente finas contendo elementos piezelétricos via emprego da Teoria Mista. Ênfase foi dada ao processo de parametrização do modelo de elementos finitos do problema eletromecânico, que demonstrou ser uma técnica bastante útil, uma vez que todas as variáveis de projeto aparecem fora das matrizes elementares e para cada efeito (membrana, flexão e cisalhamento), permitindo, em seguida, a introdução rápida e simples das incertezas nos parâmetros geométricos e/ou físicos mais influentes. Além disso,

uma vez tendo o modelo parametrizado, a metodologia de otimização multiobjetivo robusta é aplicada com maior facilidade.

No Capítulo 3, foi proposto um estudo para a obtenção do modelo probabilístico a ser utilizado no processo de otimização robusta. Para tanto, foi feito um estudo sobre as incertezas nos parâmetros de concepção que caracterizam o modelo eletromecânico, bem como do próprio circuito elétrico *shunt* a ser acoplado ao elemento piezelétrico. Para a caracterização das mais prováveis funções densidade de probabilidade de cada variável aleatória contínua, foi utilizado o Método da Máxima Entropia. As respostas dinâmicas do problema eletromecânico estocástico foram obtidas pelo método de simulação de HCL de tiragens aleatórias, com o objetivo de gerar os envelopes das repostas dinâmicas. Esta estratégia permite ao projetista analisar os efeitos das incertezas introduzidas sobre a dispersão das respostas dinâmicas do problema direto. Além disso, esta análise direta permite em seguida, uma abordagem do problema de otimização robusta através da escolha das variáveis incertas mais significativas.

No Capítulo 4, visando a obtenção das soluções ótimas e robustas para os circuitos elétricos *shunt* aplicados a estruturas compostas, o algoritmo evolucionário multiobjetivo NSGA foi utilizado. Para obter as soluções ótimas e robustas, as incertezas nos parâmetros de concepção que caracterizam o problema eletromecânico foram introduzidas na otimização multiobjetivo via funções de vulnerabilidade como funções custo suplementares a serem otimizadas ao mesmo tempo em que as funções custo iniciais. Este procedimento permitiu estabelecer um compromisso entre os conceitos de ótimo e robusto de soluções. Através dos exemplos numéricos, foram mostrados que o ótimo-robusto é menos suscetível a pequenas perturbações introduzidas nos parâmetros de concepção.

Os inúmeros exemplos de simulação propostos permitem avaliar de uma forma geral a performance dos procedimentos de modelagem desenvolvidos como uma ferramenta de análise e de concepção de circuitos elétricos *shunt* para o controle passivo de vibrações de vibrações de estruturas compostas em engenharia. Além disso, permite mostrar os aspectos importantes do comportamento dinâmico dos sistemas estruturais compostos incorporando essa técnica de controle passivo. A partir dos resultados obtidos, podem-se tirar as seguintes conclusões específicas:

1ª) Os procedimentos de modelagem desenvolvidos demonstraram serem eficientes para a caracterização do comportamento dinâmico de sistemas estruturais compostos incorporando elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt*;

2ª) A utilização do circuito elétrico *shunt* ressonante monomodal é uma estratégia eficiente de controle passivo de vibrações de estruturas compostas. Entretanto, o grau de eficiência depende da banda frequencial de interesse e principalmente dos valores altos normalmente obtidos para a indutância;

3^a) O método da Máxima Entropia demonstrou-se ser uma estratégia eficiente para a geração do modelo probabilístico para o caso de circuitos *shunt*, permitindo estabelecer corretamente o comportamento estatístico das incertezas introduzidas nas variáveis de projeto;

4^a) A metodologia de otimização robusta via utilização de funções de vulnerabilidade permitiu obter projetos ótimos mais robustos com vistas a pequenas perturbações introduzidas a posteriori nos parâmetros de projeto. Em particular, para os casos de incertezas iguais nos parâmetros a robustez do ótimo-robusto aumentou conforme o nível de incertezas aumentou. Além disso, o ótimo-robusto propicia média de variação do envelope inferior ao projeto determinístico. Já para o caso de incertezas desiguais nos parâmetros, que foi considerado devido a maior tolerância atestada pelos fabricantes de resistores e indutores, as configurações avaliadas reforçaram ainda mais a qualidade do projeto robusto;

5^a) Uma limitação importante a ser ressaltada reside nos valores obtidos para os parâmetros otimizados. No caso do parâmetro resistivo, os valores alcançados nos projetos determinístico e robusto, na casa dos *kiloohms*, são perfeitamente factíveis, bastando para isso usar potenciômetros de alta precisão (SEDRA; SMITH, 2009), sendo porém limitados a tolerâncias maiores, de pelo menos 5% (BOYLESTAD, 2012). No caso do parâmetro indutivo, que apresentou valores de *centenas de henries*, deve-se fazer uso de impedâncias sintéticas, tais como as descritas nos trabalhos de Riordan (1967) e Antoniou (1969), e usada no trabalho de Viana (2005), uma vez que valores de indutância nessa ordem de grandeza são impraticáveis, implicando grande volume e peso no projeto (SEDRA; SMITH, 2009). No caso da espessura do PZT, deve-se observar que na prática, no mercado comercial, muitas vezes não é possível obter materiais piezelétricos com valores de espessura arbitrários, o que pode se tornar uma limitação para o projeto. Essa limitação pode ser superada através da otimização combinatória envolvendo os valores comercialmente disponíveis de materiais piezelétricos no mercado.

Perspectivas

O presente trabalho de dissertação possibilitou o surgimento de inúmeras perspectivas no qual pode-se citar:

- Uso de teoria de ordem superior para obtenção do campo de deslocamentos mecânicos, a fim de se estender a pesquisa a estruturas compostas do tipo placas mais espessas e/ou com geometria complexa;
- Incorporação de restrições de máximo e mínimo do domínio de otimização dos parâmetros, conforme a disponibilidade comercial desses componentes. Além disso, deve-se atentar para as restrições de máximo e mínimo para o valor da frequência do modo em análise para evitar excessivos desvios de frequência;

- Introdução de otimização combinatória para o parâmetro da espessura do PZT;
- Emprego de impedância sintética para gerar grandes valores de indutância;
- Extensão da metodologia para o projeto robusto de circuitos elétricos *shunt* multimodais com vistas à atenuação das vibrações de estruturas compostas para vários modos simultaneamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKHRAS, G., Smart Materials and Smart Systems for the Future. **Canadian Military Journal**, Set. 2000.

AIRBUS. **AIRBUS Composite Training**. Frankfurt, Oct 17-18, 2007. 28f. Aperfeiçoamento em materiais compósitos.

AIT BRIK, B. **Méthodologies de Conception Robuste et d'Optimisation dans un Contexte de Conception d'Architectures Mécaniques Nouvelles en Avant Projet**. 2005. Thèse de Doctorat – Université de Franche-Comté, France.

ANDREAUS, U.; PORFIRI, M. Effect of Electrical Uncertainties on Resonant Piezoelectric Shunting. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. May 2007 18: 477-485, first published on Oct. 30, 2006.

ANTONIOU, A., Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC-active network synthesis. **Proc. Inst. Elec. Eng.**, 116: 838-1850, 1969.

BENJEDDOU, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. **Journal of Computer and Structures**. Vol. 76, pp. 347-363, 2000.

BENNETT, J. A., LUST, R. V., Conservative methods for structural optimization. **AIAA Journal**, 1990.

BOYLESTAD, R. L., **Introdução à Análise de Circuitos Elétricos**. Pearson 12a. Ed., 2013. 979f.

BERTHOLOT, J. M. AND SEFRANI, Y. Damping Analysis of Unidirectional Glass Fiber Composites with Interleaved Viscoelastic Layers: Experimental Investigation and Discussion. **Journal of Composite Materials**, 40 (21), 1911-1932, 2006.

BRAIBANT, V., DELCROIX, F., OUDSHOORN, A. Méthodes non-déterministes pour l'analyse et la conception robuste de produits et de procédés : Approche par l'arithmétique des intervalles. In: COLLOQUE IDMME'98, 1998, Compiègne. **Actes Du Colloque Idmme'98**, pp. 137-145.

CALLISTER Jr., W. D., **Ciencia de Engenharia dos Materiais**. LTC, 2002, 589f.

CAPIEZ-LERNOUT, E., PELLISSETTI, M., PRADLWARTER, H., SCHUELLER, G. I. and SOIZE, C., Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems. **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 295, pp. 923-938, 2006.

CARREIRA, E., BRISCHETTO, S., NALI, P., **Plates and Shells for Smart Structures**. Wiley and Sons, 2011. 303f.

CEN, S., SOH, A., LONG, Y., YAO, Z., A new 4-node quadrilateral FE model with variable electrical degrees for the analysis of piezoelectric laminated composite plates. **Journal of Composite Structures**, Vol. 58, pp. 583-599, 2002

CHEE, C. Y. K., TONG, L., STEVEN, G., A mixed model for adaptive composite plates with piezoelectric for anisotropic actuation. **Journal of Composite and Structures**, Vol. 77, pp. 253-268, 2000.

CHEE, C. Y. K., **Static Shape Control of Laminated Composite Plate Smart Structure using Piezoelectric Actuators**. 2000. Tese de Pós-Doutorado.- University of Sydney: Department of Aeronautical Engineering, Sydney, Austrália.

CHIONG, R., WEISE, T., MICHALEWICZ, Z., **Variants of Evolutionary Algorithms for Real-World Applications**, Springer, 2012. 466p.

CHUNG, D. D. L., **Composite Materials: Functional Materials for Modern Technologies**. Springer, 2003. 289f.

COOK, R.D., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, John Wiley & Sons, 1974.

DAS, I., DENNIS, J. E., A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems. **Journal of Struct. Optimization**, 14, 1997.

DESSOMBZ, O., THOUVEREZ, F., LAÏNE, J. P., JÉZÉQUEL, L., Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains. **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 239(5), pp. 949-968, 2001

DETWILER, D. T., SHEN, M. H., VENKAYYA, V.B., Finite element analysis of laminated composite structures containing distributed piezoelectric actuators and sensor. **Journal of Finite Elements In Analysis and Design**, Vol. 20, pp. 87-100, 1995.

ESCHENAUER, H. KOSKI, J., OSYCZKA, A., **Multicriteria design optimization: procedures and applications**, Springer-Verlag, 1990. 482pgs.

FARIA, A. W., **Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Avaliação**

Numérica. 2006, 152f. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

FARIA, A. W., RADE, D. A., RADE, R. S. L., Modelagem de Placas em Material Composto Laminado Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Teorias e Simulações Numéricas. In: IV CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2006, Recife, PE. **Anais do IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**.

FARIA, A. W., SALES, T. P., BORGES, A. S., ÁVILA, E. B., RADE, D. A., Amortecimento no domínio do tempo de estruturas sanduíches dotadas de camada viscoelástica implementadas em ef: uso das derivadas fracionárias e estudo das teorias FSDT e layerwise-FSDT. In: VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2008, Campina Grande, PB. **Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**.

FLORIAN, A., An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, Vol. 7, pp. 123-130, 1992.

FLEMING, A. J., BEHRENS, S., MOHEIMANI, S. O. R., Optimization and implementation of multi-mode piezoelectric shunt damping systems. **IEEE/ASME Trans. Mechatron.**, vol. 7, pp. 87-94, Mar. 2002.

GEORGIADIS, S., GUNNION, A. J., THOMSON, R. S., CARTWRIGHT, B. K., Bird-strike simulation for certification of the Boeing 787 composite moveable trailing edge. **Composite Structures**, Volume 86, issue 1-3, p. 258-268, November, 2008.

GIURGIUTIU, V. Current issues in vibration-based fault diagnostics and prognostics. **International Society for Optics and Photonics**. pp. 101-112, 2002.

GURIT HOLDING AG. **Guide to Composites**. Wattwil/Switzerland, 73f. 2012. Guia técnico de uso para materiais compósitos.

HAGOOD, N. W. and FLOTOW, A. H. V., Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 146, pp. 243-268, 1991.

IMAN, R.L.; DAVENPORT, J.M. ; ZEIGLER, D.K., Latin hypercube sampling. **Sandia Lab.: Program User's Guide**, 1980.

INMAN, D., Active Vibration Suppression. In: **Encyclopedia of Vibration**. London, Harcourt, pp 48-57, 2002.

JAYNES E. T., Information theory and statistical mechanics. **Physical Review**, 106(4), 620-630 and 108(2), 171-190, 1957.

JOHNSON, D. E., HILBURN, J. L., JOHNSON, J.R., **Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos**; 4ª Edição, Editora LTC, 1994.

KULKARNI, S. A. and BAJORIA, K. M., Finite element modeling of smart plates/shells using higher order shear deformation theory. **Journal of Composite Structures**, Vol. 62, pp. 41-50, 2003.

LEE, H., PARK, H, Finite element analysis of active and sensory thermopiezoelectric composite materials. **NASA/TM: Glenn Research Center**, Cleveland, Ohio, 210892, 2001.

LIMA Jr., J. J., **Modelagem de sensores e atuadores piezelétricos com aplicações em controle ativo de estruturas**. 1999. Tese de Doutorado, Fac. de Eng. Mec., Unicamp.

LIMA, A. M. G., STOPPA, M.H., RADE, D. A., STEFFEN Jr., V., Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures, **Shock and Vibration**, vol. 13, no. 4-5, pp. 545-558, 2006.

LIU, G. R., PENG, X. Q., LAM, K. Y., Vibration control simulation of laminated composite plates with integrated piezoelectric. **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 220, pp. 827-846, 1999.

MALVERN, L.E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Media**. Prentice-Hall International, London. 1969.713p.

MARTÍNEZ, C., SARMIENTO, F., ARZA, C., AMARO, R., CAMPUZANO, C., ARAGÓN, V., OPTOS Project: New Generation of Innovative Satellites. In: SYMPOSIUM ON SMALL SATELLITE SYSTEMS AND SERVICES (4S). May 31-June 4, 2010, Funchal, Madeira, Portugal. **Proceedings of the Symposium on Small Satellite Systems and Services (4S)**.

MATTHEWS, F. L., RAWLINGS, R. D., Composite Materials: Engineering and Science, Woodhead Publishing, 1999, 470f.

MENDONÇA, P. T. R., **Materiais Compostos & Estruturas-Sanduíches - Projeto e análise**, Manole, São Paulo, 2005.

MOAVENI, S., **Finite Element Analysis: Theory and Application**, Prentice-Hall, 1999.

MOHEIMANI, S. O. R., A Survey of Recent Innovations in Vibration Damping and Control Using Shunted Piezoelectric Transducers. **Transactions On Control Systems Technology**, Vol. 11, No. 4, July 2003, IEEE.

NELSON, W. G., **Piezoelectric Materials: Structure, Properties and Applications**. Nova Science Publishers, 2010, 259f.

NYE, F. J., **Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices**. Oxford University Press, London, 1969.

PAPADRAKAKIS, M., KOTSOPOULOS, A., Parallel solutions methods for stochastic FEA using Monte Carlo Simulation, **Computational Methods Applied on Mechanical Engineering**, 168, 305-320, 1999.

PI GROUP. **Piezoelectric Ceramic Products**. Lederhose, Germany. 2013. 33f. Manual de aplicação técnica.

REDDY, J. N., A generalization of Two-dimensional Theories of Laminated Composite Plates. **Communications in Appl. Num. Meth.** v. 3, p. 173-180, 1987.

RIODAN, R. H. S. Simulated inductors using differential amplifiers. **Electron. Lett.**, vol. 3, no. 2, pp. 50–51, 1967.

RITTO, T. G., SAMPAIO, R. CATALDO, E., Timoshenko Beam with Uncertainty on the Boundary Conditions. **Journal of Brazilian Society of Mechanical Science e Engineering**, October-December, Vol. XXX, No. 4, pp. 295-303, 2008.

RITTO, T., SOIZE, C., SAMPAIO, R., Stochastic dynamics of a drill-string with uncertain weight-on-hook. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Vol.32, No.3, pp.250-258, 2010.

SANTOS, H. F. L., **Controle ativo-passivo de vibrações estruturais usando materiais piezelétricos: Otimização e quantificação de incertezas**, 2012. Tese de Doutorado – Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

SARAVANOS, D.A., Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures, **Journal of AIAA**, Vol. 35, pp.1327-1333, 1997

SEDRA, A. S.; SMITH, K. C. **Microeletrônica**. 6ª Edição / Editora: Oxford, ISBN13: 9780195323030, ISBN10: 0195323033, 2009.

SETTER, N. **Piezoelectric Materials in Devices: Extended reviews on current and emerging piezoelectric materials, technology and applications**. Ceramics Lab., EPFL, 2002.

SHANNON, C. E., A mathematical theory of communication, **Bell System Tech. Journal**, 27, 379-423 and 623-659, 1948.

SMITH, B., FRAME, B., ANOVITZ, L., EBERLE, C., Composite Technology for Hydrogen Pipelines. In: PIPELINE WORKING GROUP MEETING. Sept 25-26, 2007, Aiken, South Carolina, **Annals Of Pipeline Working Group Meeting**.

SOIZE, C., Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics, **Journal of the Acoustical Society of America**, 109(5), 1979–1996, 2001.

SOIZE, C., Stochastic Models in Computational Mechanics, **Seminar on Uncertainties and Stochastic Modeling**, PUC-Rio, August, 2-6, 2010.

SRIVINAS, N., DEB, K., Multi-objective using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms. **Technical Report**. Department of Mechanical Engineering, Institute of Technology, India, 1993.

SULEMAN, A., VENKAYYA, V.B., A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezoelectric layers. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures** Vol. 6, pp.776-782, 1995.

KULKARNI, S. A., BAJORIA, K. M., Finite element modeling of smart plates/shells using higher order shear deformation theory, **Journal of Comp. Struct.**, Vol. 62, pp. 41-50, 2003.

TAGLIANI, A., Principle of Maximum Entropy and Probability Distributions: Definition of Applicability Field. **Probabilistic Engineering Mechanics**. Vol. 4, No. 2, pp 99-104, 1989.

TRINDADE, M.A., BENJEDDOU, A., Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Vol.16, No.3, pp.210–223, 2009.

VIANA, F.A.C., **Amortecimento de vibrações usando pastilhas piezoelétricas e circuitos shunt ressonantes**. 2005. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

VIANA, F.A.C., STEFFEN JR., V., Multimodal vibration damping through piezoelectric patches and optimal resonant shunt circuits. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Vol.28, No.3,pp.293–310, 2006.

ZITZLER, E., THIELE, L., Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, 3(4):257–271, 1999.

ANEXO I

MATRIZES DE OPERADORES DIFERENCIAIS PRESENTES NAS RELAÇÕES DEFORMAÇÕES/DESLOCAMENTOS

A seguir, nas equações (AI.1) e (AI.2) apresentam-se as matrizes \mathbf{D}_i ($i = 0, 1, 2$), formadas pelos operadores diferenciais que são aplicados nos deslocamentos $\mathbf{u}(x, y, t)$, separados conforme os efeitos de flexão-membrana, $\mathbf{D}_b(z)$ e cisalhamento, $\mathbf{D}_s(z)$:

$$\mathbf{D}_b(z) = \mathbf{D}_0 + z\mathbf{D}_1 \quad (\text{AI.1a})$$

$$\mathbf{D}_s(z) = \mathbf{D}_2 \quad (\text{AI.1b})$$

onde:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.2a})$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (\text{AI.2b})$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.2c})$$

ANEXO II

MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO DE PROPRIEDADES ELÁSTICAS

Conforme Malvern (1969), a matriz de transformação de propriedades elásticas T pode ser escrita conforme a equação (AII.1):

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.1})$$

onde: $s = \sin \theta$ e $c = \cos \theta$.

Usando a relação $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ para eliminar o termo $\sin^2 \theta$, obtém-se:

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & 1-c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 1-c^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & 2c^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.2})$$

Separando os efeitos de flexão-membrana (*bending*) e cisalhamento (*shear*), tem-se:

$$T_b = \begin{bmatrix} c^2 & 1-c^2 & 0 & -2sc \\ 1-c^2 & c^2 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sc & -sc & 0 & 2c^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.3})$$

$$T_s = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (\text{AII.4})$$

ANEXO III

ROTAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Cumpra-se destacar que uma etapa importante durante a modelagem de estruturas compostas é a consideração das direções das fibras que compõem o estratificado (CARREIRA, BRISCHETTO, & NALI, 2011). Neste sentido, torna-se necessário representá-las em um sistema de coordenadas global, onde deve-se levar em conta a rotação em torno do eixo z do sistema de coordenadas local (SCL) para o global (SCG) como ilustrado na Figura AIII.1 via utilização de uma matriz de transformação T para as tensões e deformações mecânicas, e de uma matriz Q para as deslocamentos e campos elétricos.

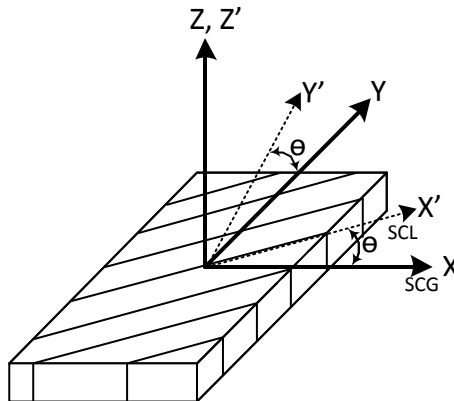


Figura AIII.1 - Representação espacial da transformação do SCL para SCG.

Simbolicamente, o processo de transformação é representado como segue:

$$\sigma_g = T \sigma_l \quad (\text{AIII.1a})$$

$$\varepsilon_g = (T^{-1})^T \varepsilon_l \quad (\text{AIII.1b})$$

$$D_g = Q D_l \quad (\text{AIII.1c})$$

$$E_g = Q E_l \quad (\text{AIII.1d})$$

Com:

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.2a})$$

$$Q = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.2b})$$

onde $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$, $sc = \sin \theta \cos \theta$, $s^2 = \sin^2 \theta$, $c^2 = \cos^2 \theta$, e θ é o ângulo de rotação das fibras em torno do eixo z.

Combinando as equações (AIII.2) para transcrever a equação (AIII.1a) do SCL para o SCG, tem-se:

$$\sigma_g = TC_l T^T \varepsilon_g - T e_l^T Q^{-1} E_g \quad (\text{AIII.3a})$$

Realizando o mesmo procedimento para (AIII.1b):

$$D_g = Q e_l T^T \varepsilon_g - Q \chi_l Q^{-1} E_g \quad (\text{AIII.3b})$$

Portanto, de forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_g \\ D_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} TC_l T^T & -T \\ Q e_l T^T & Q \chi_l Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ E_g \end{Bmatrix} \quad (\text{AIII.4a})$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_g \\ D_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_g & -e_g^T \\ e_g & \chi_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ E_g \end{Bmatrix} \quad (\text{AIII.4b})$$