

**PAULO ALFREDO MAINIERI JUNIOR**

**AVALIAÇÃO DA PROPAGAÇÃO ACÚSTICA  
UTILIZANDO DIFERENÇAS FINITAS TRADICIONAIS  
E DRP**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2013

**PAULO ALFREDO MAINIERI JUNIOR**

**AVALIAÇÃO DA PROPAGAÇÃO ACÚSTICA  
UTILIZANDO DIFERENÇAS FINITAS TRADICIONAIS  
E DRP**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Fluidos.

Orientadores:  
Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto  
Prof. Dr. Odenir de Almeida

**UBERLÂNDIA - MG  
2013**

## **AGRADECIMENTOS**

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este curso.

A Deus, porque sem Ele, nada do que foi feito se faria.

Ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, pela oportunidade e por acreditar.

Ao Mestre Engenheiro Tiago Assis, pelo aprendizado, direção e amizade.

Ao Prof. Dr. Odenir de Almeida, por compartilhar seus conhecimentos e orientações.

Ao Prof. Dr. Gilmar Guimarães e às secretárias da pós-graduação, Kelly Rúbia Costa e Lucimara Esther de Oliveira, pelo suporte.

A minha esposa Helena, por aliviar minhas cargas.

A meus pais, Paulo e Virgínia, e meus irmãos, Marcos e Patrícia (Tricô), pela torcida.

Mainieri Jr., P. A. **Avaliação da Propagação Acústica Utilizando Diferenças Finitas Tradicionais e DRP.** 2013. 120 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## Resumo

O objetivo principal deste trabalho é a avaliação da interação dos esquemas espaciais (diferenças finitas tradicionais e DRP) com os esquemas temporais (método de Euler, Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens e os esquemas otimizados: LDDRK e RK46-NL) utilizados em aeroacústica computacional, na previsão da propagação acústica 1D (uma dimensão). Como objetivo secundário se apresentará em detalhes o processo de construção das diferenças finitas tradicionais baseadas nas séries de Taylor e do DRP, proposto por Tam e Webb (1993). À melhor combinação de esquemas espacial e temporal aplicar-se-ão condições de contorno não reflexivas na fronteira do domínio computacional. As simulações 2D (duas dimensões) conterão também condições de contorno do tipo radiação e escoamento de saída (*outflow*), segundo proposto por Tam e Webb (1993). Verificou-se a necessidade de se utilizar esquemas espaciais de alta ordem para minimizar o efeito de dispersão. Destaca-se no trabalho o excelente rendimento do método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem sobre o Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, chegando em alguns casos a superar os esquemas otimizados. As simulações revelaram que o DRP perde um pouco de rendimento em relação ao esquema de diferenças finitas tradicionais com o refinamento da malha. É recomendado um estudo aprofundado da construção das condições de contorno não reflexivas como complementação desse trabalho.

Palavras Chaves: DRP, propagação acústica, diferenças finitas, Runge-Kutta, 1D, 2D.

Mainieri Jr., P. A. **Acoustic Propagation Evaluation Using Traditional Finite Differences and DRP.** 2013. 120 f. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## Abstract

The main purpose of this work is the evaluation of the interaction of the spatial schemes (Traditional finite differences and DRP) with temporal schemes (Euler, Runge-Kutta 2<sup>nd</sup> and 4<sup>th</sup> order methods and the optimized methods: LDDRK and RK46-NL) used on computational aeroacoustic, on 1D (one dimension) acoustic propagation prediction. A secondary goal is to present details of the traditional finite differences construction, based on Taylor series, and the DRP, proposed by Tam and Webb (1993). To the best combination of spatial and temporal schemes will be applied non-reflexive boundary conditions on the eddy of computational domain. 2D (two dimensions) simulations will also contain radiation and outflow boundary conditions proposed by Tam and Webb (1993). The necessity to use high order methods to minimize the dispersion effects was verified. This work shows an outstanding efficiency of Runge-Kutta 2<sup>nd</sup> order over Runge-Kutta 4<sup>th</sup> order scheme, and in some cases, even superior to the optimized schemes. The simulations revealed that DRP loss efficiency over traditional finite differences scheme when grid refinement occurs. An study of non-reflexive boundary conditions construction is recommended for this work complementation.

Key Words: DRP, acoustic propagation, finite difference, Runge-Kutta, 1D, 2D.

## Lista de Abreviações

1D	Uma dimensão.
2D	Duas dimensões.
3D	Três dimensões.
CAA	Aeroacústica Computacional (Computational Aero Acoustic).
CFL	Número de Courant, Friedrichs e Lewy.
DNS	Simulação Numérica Direta (Direct Numerical Simulation).
DRP	Dispersion Relation Preserving.
DRP25	DRP de 2 <sup>a</sup> ordem e 5 pontos.
DRP47	DRP de 4 <sup>a</sup> ordem e 7 pontos.
DRP69	DRP de 6 <sup>a</sup> ordem e 9 pontos.
EULER	Método de Euler.
FAA	Federal Aviation Administration.
FAN	O maior compressor rotativo do motor turbofan.
FD2	Diferenças Finitas de 2 <sup>a</sup> ordem.
FD4	Diferenças Finitas de 4 <sup>a</sup> ordem.
FD6	Diferenças Finitas de 6 <sup>a</sup> ordem.
FD8	Diferenças Finitas de 8 <sup>a</sup> ordem.
FD10	Diferenças Finitas de 10 <sup>a</sup> ordem.
FD12	Diferenças Finitas de 12 <sup>a</sup> ordem.
Flaps	Dispositivo de hipersustentação.
LDDRK	Esquema de Runge-Kutta otimizado por Hu et al. (1994).
LEE	Equações de Euler Linearizadas.
LES	Simulação das grandes escalas (Large Eddy Simulation).
RANS	Metodologia de simulação da turbulência (Reynolds Averaged Navier-Stokes).
RK2	Método de Runge-Kutta de 2 <sup>a</sup> ordem.
RK4	Método de Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> ordem.
RK46-NL	Esquema de Runge-Kutta otimizado por Berland, Bogey e Bailly (2005).
URANS	Metodologia de simulação da turbulência (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes).

## Símbolos Romanos

$a$	Valor máximo da amplitude da onda.
$a_0$	Velocidade do som.
$a_j$	Coeficiente / peso de um termo.
$c$	Velocidade do som no ar.
$C_i$	Constante.
$dt$	Avanço temporal.
$dx$	Espaçamento da malha na direção $x$ .
$dy$	Espaçamento da malha na direção $y$ .
$\dot{F}$	Quantidade de movimento.
$g$	Aceleração da gravidade.
$g_x$	Aceleração da gravidade na direção $x$ .
$g_y$	Aceleração da gravidade na direção $y$ .
$g_z$	Aceleração da gravidade na direção $z$ .
$I$	Intensidade sonora.
$k$	Número de onda.
$M$	Número de Mach.
$m_{ar}$	Massa de ar.
$m_{comb}$	Massa de combustível.
$M_x$	Número de Mach na direção $x$ .
$n$	Quantidade de espaçamentos.
$p$	Pressão.
$r$	Distância da origem ao ponto de interesse.
$V$	Velocidade.
$v$	Velocidade de propagação do pulso na direção $y$ .
$V_g$	Velocidade de grupo.
$V_p$	Velocidade de fase.
$t$	Tempo.
$u$	Velocidade de propagação do pulso na direção $x$ .
$u_0$	Valor médio da velocidade na direção $x$ .
$w$	Velocidade de propagação do pulso na direção $z$ .

$x$	Coordenada espacial na direção X.
$X_i$	Autovalor.
$y$	Coordenada espacial na direção Y.
$z$	Coordenada espacial na direção Z.

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Coordenada espectral relativa a $x$ do espaço real.
$\alpha_i$	Coeficientes do esquema RK46-NL.
$\beta$	Coordenada espectral relativa a $y$ do espaço real.
$\beta_i$	Coeficientes dos esquemas LDDRK e RK46-NL.
$\lambda$	Comprimento de onda / autovalor.
$\Delta x$	Espaçamento de malha na direção $x$ .
$\omega$	Frequência angular / Coordenada espectral relativa a $z$ do espaço real.
$\omega(k)$	Relação de dispersão.
$\eta$	Função amplitude de onda.
$\mu$	Viscosidade dinâmica.
$\rho$	Massa específica.
$\theta$	Ângulo.

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.2 Aeroacústica Computacional.....	6
1.3 Motivação e Objetivos do Presente Estudo.....	8
1.4 Descrição Desta Pesquisa.....	9
<b>CAPÍTULO 2 – Aeroacústica.....</b>	<b>11</b>
<b>CAPÍTULO 3 – Revisão Bibliográfica.....</b>	<b>20</b>
<b>CAPÍTULO 4 – Esquema Numérico.....</b>	<b>26</b>
4.1 Equações de Euler Linearizadas (LEE).....	26
4.2 Equações Governantes.....	29
4.3 Derivadas Espaciais.....	30
4.4 Derivadas Temporais.....	32
4.4.1 <i>Descrição do LDDRK</i> .....	32
4.4.2 <i>Descrição do RK46-NL</i> .....	33
4.5 Condições de Contorno.....	35
4.6 Erro Absoluto.....	38
<b>CAPÍTULO 5 – Resultados.....</b>	<b>39</b>
5.1 Condições das Simulações.....	41
5.2 Análise dos Esquemas Espaciais.....	43
5.2.1 <i>Malha Com 101 Pontos</i> .....	43
5.2.2 <i>Malha Com 201 Pontos</i> .....	50
5.2.3 <i>Malha Com 401 Pontos</i> .....	58
5.3 Análise dos Esquemas Temporais.....	66
5.3.1 <i>Malha Com 101 Pontos</i> .....	66
5.3.2 <i>Malha Com 201 Pontos</i> .....	70
5.3.3 <i>Malha Com 401 Pontos</i> .....	74
5.4 Condições de Contorno Para o Caso 1D.....	77

5.5 Condições de Contorno Para o Caso 2D.....	78
<b>CAPÍTULO 6 – Conclusão.....</b>	<b>81</b>
<b>BIBLIOGRAIFA.....</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE 1 – Conceitos de Aeroacústica.....</b>	<b>86</b>
<b>APÊNDICE 2 – Diferenças Finitas (Séries de Taylor).....</b>	<b>96</b>
<b>APÊNDICE 3 – DRP (Dispersion Relation Preserving).....</b>	<b>100</b>

# CAPÍTULO I

## 1.1. Introdução

O ruído gerado pelo escoamento de ar (vento natural) ao redor de objetos naturais tais como árvores, rochas e outros obstáculos, sempre foi de interesse de pesquisadores, ao longo dos séculos. Os mais antigos estudos sobre esse fenômeno remontam à Grécia antiga e o termo eólico (do latin aeolian) aplica-se para descrever tal comportamento. Já na era moderna grandes nomes como Vincent Strouhal deram suas contribuições ao desenvolvimento desta ciência, estudando o som gerado pela ação de correntes de ar passando sobre cabos (aeolian tones).

Décadas mais tarde, a aeroacústica desponta como um ramo da mecânica dos fluídos que se interessa pelo estudo da geração e da propagação do som originados pelo escoamento do ar em superfícies. Novamente, um problema prático direcionou os esforços de pesquisa e estudo nesta área. Nesse caso, o princípio motivador foi o da entrada em operação dos ruidosos aviões a jato nos anos que se seguiram à segunda guerra mundial, nas décadas de 50 e 60, principalmente nos continentes norte-americano e europeu.

De fato, com o surgimento e rápida expansão da aviação utilizando motores a reação (também chamados de motores a jato) o problema do ruído gerado pela exaustão do gás em alta velocidade se tornou inconveniente para a sociedade, com forte impacto psicológico e fisiológico para populações vizinhas a grandes aeroportos, como por exemplo, Heatrow, em Londres, e JFK, em Nova York (Fig. 1.1).



Figura 1.1<sup>1</sup> – Jumbo 747 aterrissando no aeroporto de Heathrow – Inglaterra.

A Figura 1.2 mostra um motor turbo jato muito similar aos motores utilizados na aviação civil nas décadas de 50 e 60. Na Figura 1.2a observam-se detalhes das partes internas desse motor. A Figura 1.2b mostra um diagrama esquemático dessas mesmas partes.

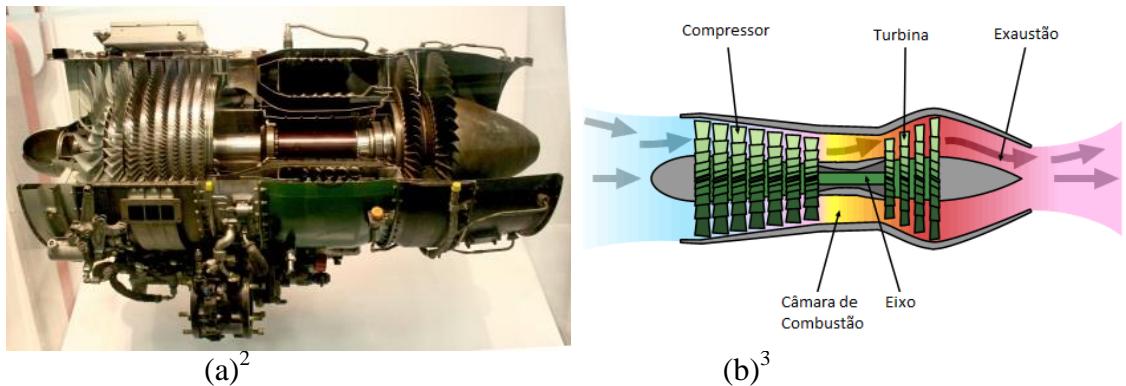


Figura 1.2 – Motor a jato em corte (a), Visão geral ; (b) Principais componentes.

No motor a jato, o ar é aspirado para dentro do motor através de compressores rotativos, que elevam a pressão e, consequentemente, a temperatura, preparando-o para a combustão que acontece quando a mistura ar/combustível é ignitada na câmara de combustão. Os gases produzidos na combustão se expandem passando pela turbina e depois por um bocal de exaustão, ou comumente chamado de tubeira, proporcionando assim a força de empuxo (ou tração) necessária para impulsionar a aeronave.

<sup>1</sup> [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)

<sup>2</sup> [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)

<sup>3</sup> Adaptado de: [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)

Na interface entre os gases de exaustão do motor e o ar atmosférico, surge um forte cisalhamento devido ao grande gradiente de velocidade entre esses fluidos. Semelhantemente ao som que é produzido quando duas superfícies sólidas polidas são friccionadas uma contra a outra, assim é o som produzido por esse gradiente de velocidade.

É importante ressaltar que, apesar do grave problema do surgimento precoce de falhas estruturais nas aeronaves, foi o ruído ensurcedor desses motores que chamou a atenção das autoridades públicas para a busca de soluções que viabilizassem a contínua operação dessas aeronaves, minimizando o impacto ambiental do ruído produzido. A crescente demanda pelo transporte de passageiros (aviação civil) e o rápido aumento do tráfego aéreo (Fig. 1.1) contribuíram para a aceleração na criação de medidas de controle e/ou regulamentos que legislassem sobre a emissão de ruído dessas aeronaves. Nessa mesma época, trabalhos sobre a influência do som extremo dessas aeronaves no comportamento humano começaram a surgir, e com conclusões nada animadoras: redução da percepção auditiva, hipertensão, insuficiência cardíaca, e distúrbios de comportamento e do sono estavam entre as consequências da exposição excessiva aos altos níveis sonoros.

Nesse contexto, a insatisfação das populações circunvizinhas aos aeroportos aumentava alarmantemente. Os órgãos públicos competentes se viram obrigados a criar normas restritivas de poucos e decolagens, concomitantemente a metas de redução do ruído gerado pelas aeronaves. Surge, então, na década de 60, as normativas do FAA (Federal Aviation Administration), que regulamentam a operação das aeronaves e do ruído gerado por motores do tipo turbo-jato.

Nesse cenário de crise, se inicia a aeroacústica, com a publicação dos primeiros trabalhos de Sir James Lighthill, em 1952. Lighthill deduziu uma equação de transporte, a partir das equações de Navier-Stokes, descrevendo a flutuação da massa específica em um escoamento. Sob determinadas hipóteses, a solução analítica dessa equação possibilita a determinação da propagação do som para uma região distante da fonte sonora. Ainda, na sequência de seus estudos, Lighthill também demonstra que a intensidade do ruído aerodinâmico é proporcional à velocidade relativa entre os gases de exaustão e o ar ambiente, elevado a oitava potência (Eq. 1.1).

$$I \approx V^8 \quad (1.1)$$

Essas observações foram suficientes para condicionar o desenvolvimento de novas soluções e/ou conceitos na área de motores a reação. Alterações significativas foram incorporadas nos sistemas de exaustão dos motores turbo-jato, com o intuito de reduzir o ruído gerado por tais motores. A Figura 1.3 ilustra um dispositivo denominado supressor de ruído, muito comumente usado por grandes companhias aéreas para operação em aeroportos com restrição de níveis de ruído.

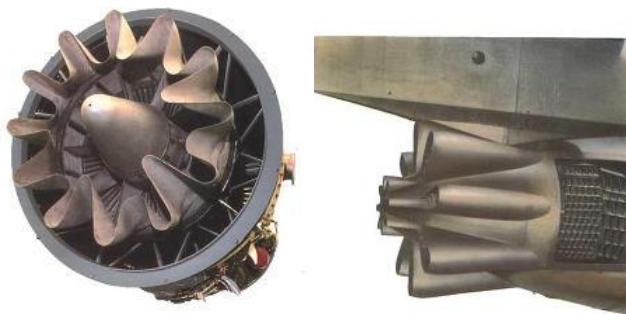


Figura 1.3 – Supressor de ruídos.

Como fruto desses primeiros estudos a indústria aeronáutica criou os motores turbofan (Fig. 1.4), que nada mais eram do que os motores turbo-jatos, agora equipados com uma enorme entrada de ar que abastecia o motor com o ar necessário ao seu funcionamento, e ainda revestia o jato de exaustão com uma camada de ar mais lenta que o próprio jato de exaustão, porém mais rápida que o ar ambiente, suavizando o cisalhamento entre o jato de exaustão e o ar atmosférico.

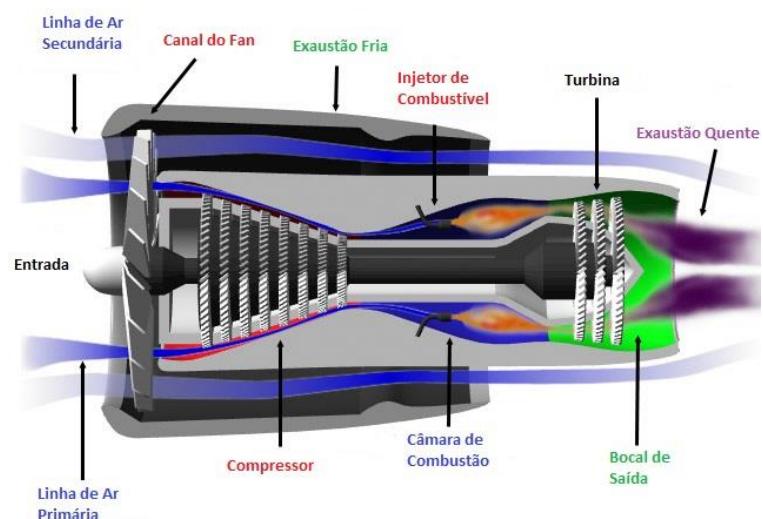


Figura 1.4<sup>4</sup> – Diagrama do escoamento de gases em um motor turbofan.

<sup>4</sup>Adaptado de: [engg-learning.blogspot.com](http://engg-learning.blogspot.com).

Esses novos motores não somente reduziram significativamente a emissão de ruído sonoro dos motores a jato como também aumentaram a eficiência do consumo de combustível, proporcionando inclusive aumento de potência, graças à maior injeção de ar no sistema. Os resultados foram animadores e a indústria aeronáutica gradativamente se adequou aos novos desafios.

Todavia, o turbofan foi uma adaptação ao que já existia; não foi um novo projeto que trouxesse desde sua essência o objetivo de redução da emissão sonora e, muito embora tenha sido um grande avanço, as melhorias que por ventura fossem incorporadas, e veem sendo, ainda não foram capazes de reduzir satisfatoriamente a emissão do ruído desses motores.

Contornado o primeiro obstáculo, a convivência diária mostrou que as aeronaves tinham outras fontes de ruído, além dos motores. A passagem do ar pelo corpo da aeronave, pelos dispositivos de hipersustentação, pelos trens de pouso, pelas asas e pontas de asa, mostraram serem também fontes de ruído tão intensas quanto os motores turbofan. Como se pode ver pela Figura 1.5, na aterrissagem, a maior fonte de ruído não vem dos motores, mas dos efeitos aerodinâmicos. É interessante observar que, segundo a Fig. 1.5, o ruído total na aterrissagem é maior do que o ruído total na decolagem, quando os motores são solicitados ao máximo.

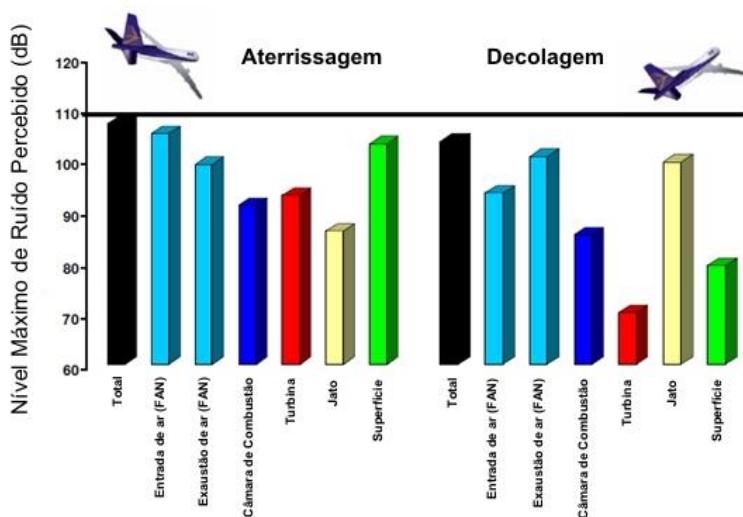


Figura 1.5<sup>5</sup> – Nível de ruído percebido na aterrissagem e na decolagem.

<sup>5</sup> Adaptado de: Almeida, Odenir de - AEROACOUSTICS OF DUAL-STREAM JETS WITH APPLICATION TO TURBOFAN ENGINES

Observa-se portanto que as principais fontes de ruído em uma aeronave são:

- Entrada de ar (FAN): som devido ao grande compressor do ar na entrada do motor.
- Exaustão de ar (FAN): som produzido pelo jato de ar que reveste o jato dos gases da combustão.
- Câmara de Combustão: som devido à queima de combustível e ar.
- Turbina: som devido à passagem dos gases de exaustão através das pás da turbina.
- Jato: ruído proveniente da expansão dos gases da combustão.
- Superfície: som devido ao escoamento do ar sobre as superfícies da aeronave (fuselagem, flaps, trem de pouso...).

Graças às sistemáticas pesquisas realizadas nas décadas de 60 e 70, foi possível identificar e quantificar esses ruídos aerodinâmicos, mas foi somente com o surgimento da aeroacústica computacional (CAA) que a pesquisa experimentou um crescimento qualitativo sem precedentes.

## 1.2. Aeroacústica Computacional

O desenvolvimento da aeroacústica até a década de oitenta foi marcadamente nos campos teórico e experimental, com o desenvolvimento de várias extensões da proposta inicial de Lighthill. Mas, a partir dessa época, com o aumento da capacidade de processamento dos computadores, a aeroacústica ganhou um forte aliado para seu desenvolvimento, a aeroacústica computacional, comumente referenciada como CAA (Computational AeroAcoustic), que possibilitou:

- soluções numéricas, quando a complexidade do problema inviabiliza a dedução de uma solução analítica, e
- a redução nos custos de desenvolvimento, devido à redução da prototipagem e da experimentação.

Estudos mais apurados revelaram que nos ruidosos motores turbo-jato, anteriores aos turbofan, que produziam ruídos da ordem de 115 dB (decibéis), a variação da pressão do ar devido à propagação sonora, mesmo nas proximidades do motor, era muito pequena, em torno  $10^{-4}$  da pressão atmosférica. Embora a geração do ruído e sua propagação sejam dependentes

das mesmas variáveis, a ordem de grandeza dessas variáveis para ambos os fenômenos são muito díspares. Resolver o escoamento (aerodinâmica) e o transporte sonoro (aeroacústica) exige um controle refinado do erro, um custo computacional ainda bastante elevado para os dias de hoje, e, para aquela época, simplesmente impensável.

As pesquisas de Lighthill também forneceram a percepção de que era possível separar a geração e a propagação sonoras se o escoamento acontecesse a baixo número de Mach. Nessa condição de operação, a propagação sonora no ar se caracteriza por:

- ser um fenômeno transitente,
- ter uma larga banda de frequências,
- ter baixa amplitude,
- ser pouco dissipativa,
- ser pouco dispersiva, e
- ter uma propagação de longo alcance.

Por outro lado a geração se caracteriza como um fenômeno:

- periódico, que se repete indefinidamente enquanto o sistema for energizado (regime permanente),
- que apresenta instabilidades em uma larga banda de escalas,
- que tem elevada amplitude,
- que tem elevada dissipação, e
- restrito às imediações da fonte geradora.

Resolver a geração do escoamento é, até hoje, uma tarefa difícil, porque se trata de resolver a turbulência presente no escoamento. Do ponto de vista da mecânica dos fluidos, a melhor forma de fazê-lo é através de DNS (Direct Numerical Simulation), utilizando as equações de Navier-Stokes. Mas, mesmo com os poderosos recursos computacionais existentes, essa tarefa só é possível para situações muito simples, em escoamentos com números de Reynolds muito baixos. Resolver a turbulência, sem precisar resolver todas as escalas (RANS, URANS, LES...), visando a aeroacústica, é uma tarefa em discussão devido à filtragem necessária, que elimina da solução uma grande faixa do espectro de frequências sonoras. Resolver a turbulência em toda sua extensão / escalas (malha muito refinada), mesmo em um domínio restrito, é uma tarefa ainda inviável para a grande maioria das aplicações de

engenharia. Agregar a isso o transporte do som, alcançando grandes distâncias (malha extremamente extensa), eleva a dificuldade de simulação a um patamar muito além da capacidade tecnológica atual.

Tendo o som características tão distintas na sua geração e na sua propagação, preferiu-se adotar esquemas independentes para ambos os casos, que melhor se adequassem aos parâmetros peculiares de cada fenômeno, buscando viabilizar as simulações numéricas e prover ferramentas rápidas e confiáveis para serem utilizadas na indústria.

Outra importante contribuição do trabalho de Lighthill foi a percepção da pequena influência da viscosidade do ar no transporte do som fora da região de influência do escoamento (baixo número de Mach). Essa descoberta barateou significativamente o pesado processamento computacional. A inexistência do termo viscoso nas equações de Navier-Stokes transformaram essas equações nas equações de Euler. Essas observações serão revistas no contexto dessa dissertação.

### **1.3. Motivação e Objetivos do Presente Estudo**

Muitos esquemas para a propagação sonora vêm sendo propostos ao longo dos anos para resolver a derivada espacial de primeira ordem existente na equação da onda. Minimizar o erro a um baixo custo computacional é foco de todas elas, mas algumas vêm se destacando pelo baixo custo computacional e simplicidade na implementação. A de maior destaque em aeroacústica computacional (CAA) é a técnica de diferenças finitas.

Essa técnica se baseia nas séries de Taylor e, apesar da simplicidade, é muito eficiente. O principal foco dessa técnica é minimizar o erro de dissipação sonora (perda de energia), mas, pelo fato de ser uma aproximação do valor real da variável, a imprecisão do esquema estimula o crescimento da dispersão sonora. Foram então criados esquemas de diferenças finitas que buscassem inibir esse crescimento, dentre eles destaca-se o DRP (Dispersion Relation Preserving).

Com base no exposto, o presente trabalho tem por objetivo principal avaliar o desempenho da interação desses dois grupos de esquemas espaciais (diferenças finitas tradicionais e DRP) com os esquemas temporais (método de Euler, Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens e os métodos otimizados para CAA: LDDRK e RK46-NL), na propagação do pulso

acústico 1D (uma dimensão), comparando os resultados com dados experimentais, aplicando à melhor combinação de esquemas espacial / temporal, condições de contorno não reflexivas na fronteira do domínio e estendendo as técnicas para a predição acústica 2D (duas dimensões). A compreensão da formulação desses dois esquemas espaciais, em especial o DRP, são os objetivos secundários desse trabalho, apresentados em detalhes nos apêndices II e III.

Para a solução da derivada temporal presente na equação de propagação da onda, se utilizaram técnicas tradicionais como os métodos de Euler, Runge-Kutta, e algumas técnicas otimizadas segundo os princípios do DRP. Esses esquemas temporais serão somente mencionados e utilizados, uma vez que o foco desse trabalho são as técnicas espaciais citadas anteriormente.

#### **1.4. Descrição Desta Pesquisa**

O presente trabalho se apresenta estruturado da seguinte forma:

- Capítulo I: Apresenta suscintamente um breve histórico das motivações que levaram ao surgimento e desenvolvimento da CAA, bem como a motivação para o presente estudo.
- Capítulo II: Apresenta e explica conceitos importantes de aeroacústica. O Apêndice I é uma extensão desse capítulo apresentando conceitos de acústica clássica.
- Capítulo III: Apresenta uma revisão bibliográfica do atual estado da pesquisa no campo da propagação sonora, revendo textos que descrevem esquemas numéricos aplicados na solução de problemas aeroacústicos.
- Capítulo IV: Apresenta os esquemas numéricos espaciais utilizados nesse trabalho (diferenças finitas e DRP), explicando detalhadamente todo o equacionamento. Os Apêndices II e III são ligados diretamente a esse capítulo, sendo o Apêndice II uma explanação detalhada da construção do esquema de diferenças finitas tradicional, e o Apêndice III a explanação detalhada da construção do esquema de diferenças finitas otimizado no espaço espectral DRP (Dispersion Relation Preserving) de Tam e Webb

(1993). Os esquemas temporais e as condições de contorno não reflexivas são apenas apresentados.

- Capítulo V: Apresenta, compara, e avalia os esquemas espaciais e temporais na propagação do pulso acústico 1D (uma dimensão), sem aplicação das equações de condições de contorno não reflexivas, com as equações de condições de contorno não reflexivas, e a propagação do pulso acústico 2D (duas dimensões) com e sem condições de contorno não reflexivas.
- Capítulo VI: Conclusão.
- Capítulo VII: Bibliografia.

# CAPÍTULO II

## 2. Aeroacústica

Como já visto no Capítulo I, a aeroacústica é um ramo da mecânica dos fluídos que contempla o estudo da geração e da propagação do som devidas ao escoamento do ar e suas interações com superfícies. De maneira geral, num problema onde o ruído seja gerado pelo escoamento, a geração e a propagação sonora, na maioria das situações, podem ser desvinculadas uma da outra, devido às características muito peculiares de cada uma delas, permitindo que esquemas específicos a cada caso sejam utilizados para a solução do problema como um todo.

Na grande maioria dos casos, o som é gerado devido à presença da turbulência no escoamento do fluido. Como apresenta Silveira-Neto (2002), as estruturas turbilhonares acontecem em tamanhos (escalas) diversos, variando das dimensões características do problema às escalas de Kolmogorov. Ao se resolver numericamente tal problema, torna-se necessário discretizá-lo através do uso de uma malha computacional que, por sua vez, deveria ser capaz de capturar essas escalas. No entanto resolver a turbulência em uma malha que alcance todas as escalas fluidodinâmicas pela aplicação direta das equações de Navier-Stokes (DNS – Direct Numerical Simulation), ainda hoje é inviável para a grande maioria dos problemas industriais. Diferentemente do que possa acontecer na turbulência, o som sempre acontece em escalas macroscópicas, de alguns centímetros a vários metros. Simular a propagação sonora na mesma malha da turbulência é, na melhor das hipóteses, perder eficiência. Mesmo utilizando modelos de turbulência, que permitem utilizar uma malha não

tão refinada quanto a malha utilizada em DNS, ainda assim o esforço computacional é gigantesco. Pelo fato da turbulência acontecer em uma região muito restrita, variando de centímetros a alguns metros (dependendo do tamanho do objeto gerador e das condições de operação), e da propagação acústica poder alcançar até alguns quilômetros ao redor da região turbulenta, o custo computacional de se utilizar a mesma malha da geração acústica na propagação acústica é absurdamente alto.

Outro agravante é a magnitude do erro de truncamento. Como o som é uma perturbação com amplitude quatro ordens de grandeza menor que as perturbações devidas à turbulência, se não houver um controle muito refinado do erro nesses modelos de geração, o som acaba sendo confundido com o erro, e eliminado do cálculo. Esse controle refinado do erro é também um preço elevado a ser pago em termos de eficiência.

Como o foco desse trabalho está na propagação acústica, sem se preocupar com os fenômenos físicos que a geraram, serão praticadas malhas pertinentes ao transporte sonoro, buscando a eficiência na predição do som em um ponto qualquer distante do local da geração.

Antes de estudar os esquemas utilizados nesse trabalho, é necessário compreender claramente alguns conceitos utilizados em aeroacústica. Para tanto, suponha-se que se possa “fatiar” o ar contido em uma sala. Com essa ideia em mente, é possível compreender intuitivamente o conceito de frente de onda, como sendo a fatia de ar, que estando em repouso, começa a sentir a mudança no campo de pressão devida à propagação do pulso acústico em sua direção (Fig. 2.1).

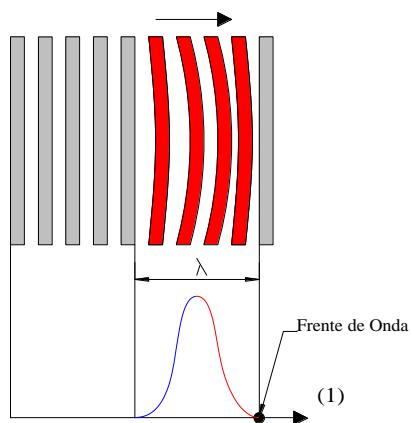


Figura 2.1 – Frente de onda de um pulso sonoro e o comprimento de onda ( $\lambda$ ).

Quando as frentes de onda de dois pulsos de mesmo comprimento de onda  $\lambda$ , propagando na mesma direção, atingem um determinado ponto em momentos diferentes, diz-se que estes pulsos estão defasados. Como um pulso é um ciclo completo ( $2\pi$  radianos) de compressão / rarefação, a fase é portanto o atraso angular entre as frentes de onda.

A onda sonora é nada mais que o sequenciamento de vários pulsos sonoros, um exatamente após o outro, sem haver sobreposição entre eles.

A velocidade com que a frente de onda se propaga é chamada de velocidade de fase.

O comprimento de onda ( $\lambda$ ) é o tamanho da onda, ou seja, a distância entre o ponto que, estando em repouso, começa a sentir a variação no campo de pressão, e o ponto que acaba de retornar à posição de repouso depois de ter experimentado o ciclo de compressão e rarefação do campo de pressão (Fig. 2.1).

O som quando propagado no ar sofre os efeitos de dispersão e de dissipação. Como um dos objetivos desse trabalho está focado no conceito da dispersão sonora, é preciso compreender bem o seu significado. A melhor forma de fazê-lo é através da correlação com o fenômeno bem conhecido da dispersão da luz passando por um prisma. Quando a luz branca natural incide sobre a face de um prisma transparente, na face oposta a luz emerge fragmentada nos vários comprimentos de onda que a compõe (cores) Fig. 2.2.

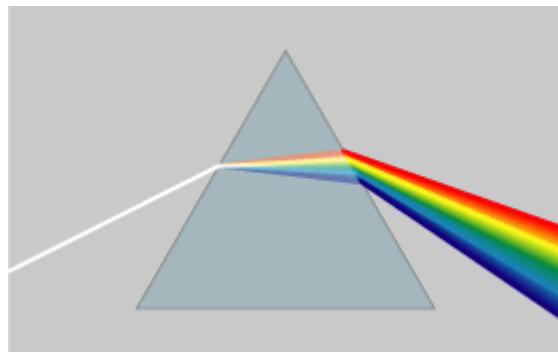


Figura 2.2 – Dispersão da luz branca.

Essas cores são a visualização do fato de que os comprimentos de onda que compunham a luz branca, e que antes se propagavam todos à mesma velocidade, agora se propagam com velocidades diferentes uns dos outros. A dispersão é portanto o fenômeno no qual um pacote de ondas, onde todos os comprimentos de onda presentes que viajavam à mesma velocidade, passam agora a viajar com velocidades diferentes.

Muito embora o som sofra muito pouco o efeito da dispersão quando transportado livremente no ar, ao se resolver numericamente (valor aproximado) as derivadas contidas na equação de propagação da onda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

a dispersão é ampliada devido aos erros inerentes à solução numérica (os quais serão abordados posteriormente). Na Figura 2.3 observam-se alguns comprimentos de onda de amplitude menor se propagando a montante (esquerda - mais devagar) e a jusante (direita - mais rápidas) do pico principal, que se desloca para direita.

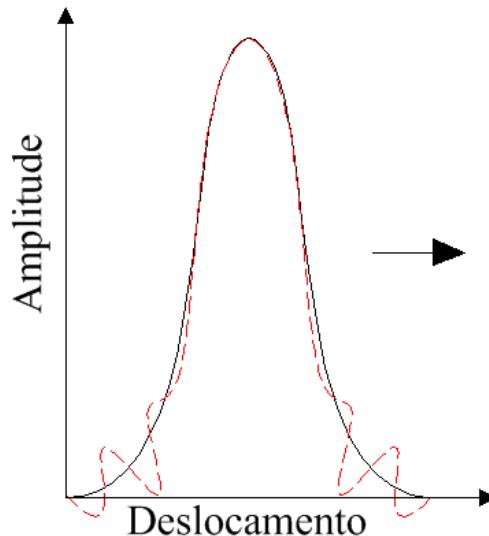


Figura 2.3 – Dispersão de um pulso: (-) pulso sem dispersão, (--) pulso com dispersão.

Outro fenômeno presente na propagação da onda sonora é a dissipação. No entanto, observa-se que a propagação do som no ar livre sofre pouca influência da viscosidade do fluido. Sessa forma, sua intensidade (energia) decai (dissipa) muito pouco, ou praticamente nada, dependendo da frequência e da distância a ser percorrida. A dissipação numérica é ilustrada na Fig. 2.4 pelo abaixamento do pico principal em relação à solução analítica.

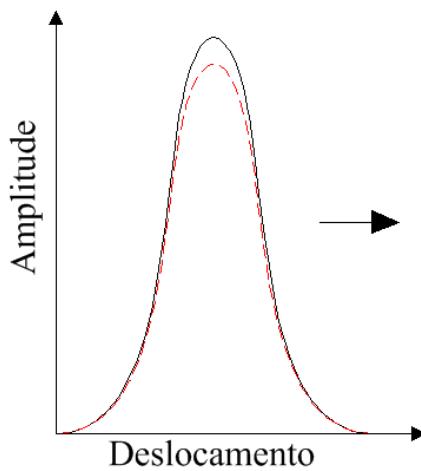


Figura 2.4 – Dissipação de um pulso sonoro: (-) pulso sem dissipação, (--) pulso com dissipação.

A dissipação sonora no ar livre é governada por quatro variáveis:

- Frequência do som,
- Pressão atmosférica,
- Humidade relativa do ar, e
- Temperatura.

Nesse trabalho, serão consideradas constantes as grandezas: frequência, humidade relativa do ar e temperatura.

A Tabela 2.1 exemplifica a influência da frequência sobre a dissipação da energia sonora<sup>6</sup> para algumas frequências do espectro sensível ao ouvido humano. Essa tabela foi construída para uma pressão de 101,325 Pa, humidade do ar a 50%, e temperatura 20°C, para uma distância de 30 metros da fonte geradora.

Tabela 2.1 – Dissipação sonora.

Atenuação(dB/m)	Freqüência(Hz)
0	20
0,001	200
0,01	2.000
0,524	20.000

<sup>6</sup> <http://www.sengpielaudio.com/calculator-air.htm>

Para irradiações próximas à fonte sonora, mesmo em altas frequências, o valor da energia sonora dissipada é mínimo. Nesse trabalho, será adotado uma dissipação desprezível em todas as simulações.

Outro conceito imprescindível em aeroacústica é o chamado número de onda ( $k$ ). O número de onda é definido segundo a Eq. 2.2.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{n\Delta x} \quad (2.2)$$

onde  $\Delta x$  é o espaçamento entre os pontos da malha e  $n$  é a quantidade desses espaçamentos necessários para comportar o comprimento de onda  $\lambda$ .

Como o comprimento de onda compreende um ciclo completo de compressão e rarefação, é possível confiná-lo ao círculo trigonométrico (Ex: função SENO). Não importa o tamanho do comprimento de onda, qualquer que ele seja, em um círculo trigonométrico ele terá sempre um comprimento angular igual a  $2\pi$  radianos. A Figura 2.5 expressa graficamente o significado do número de onda  $k$ .

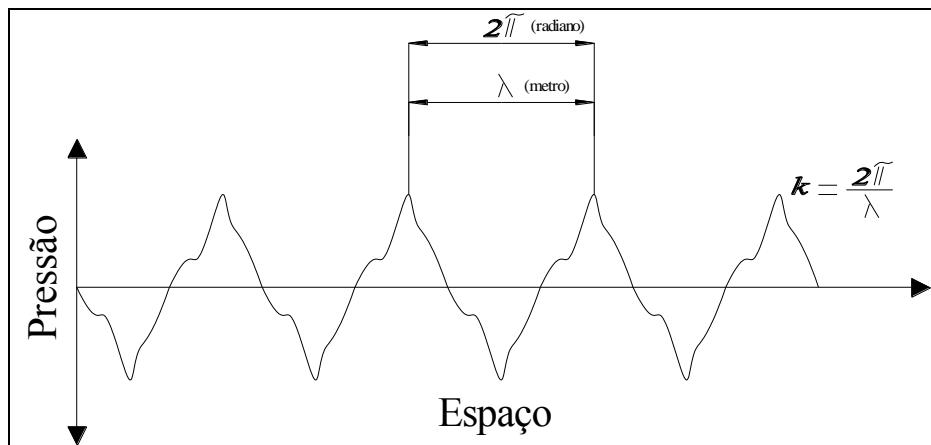


Figura 2.5 – Número de onda.

De acordo com a teoria de propagação de onda, a relação de dispersão ( $\omega$ ) carrega em sua definição todas as características de propagação da onda. A relação de dispersão é definida como a velocidade angular  $\omega$  expressa em função do número de onda  $k$ :

$$\omega(k) \quad (2.3)$$

Na grande maioria dos casos de geração sonora, uma única perturbação origina mais de uma onda sonora, e todas elas com frequências diferentes umas das outras (pacote de ondas). Quando se gera um pacote de ondas em um meio dispersivo, como a superfície de um lago, ondas de frequências próximas umas das outras se fundem propagando-se como se fossem uma única onda. A onda resultante apresenta características bem distintas das ondas que a originaram. Uma dessas características é a chamada velocidade de grupo  $V_g$ , a velocidade com que a frente de onda dessa onda resultante se propaga, definida como a maneira com que  $\omega$  (relação de dispersão) varia em relação a  $k$ :

$$V_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \quad (2.4)$$

A Figura 2.5 abaixo exemplifica o conceito: três ondas (linhas mais claras) com diferentes amplitudes e frequências próximas são transportadas com um novo formato (linha mais escura) de amplitude, período e velocidade ( $V_g$ ) totalmente diferente das ondas originais.

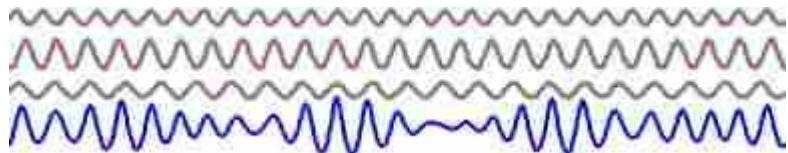


Figura 2.5<sup>7</sup> – Velocidade de grupo.

Para exemplificar, suponha que se queira calcular a velocidade de grupo  $V_g$  para um pacote formado por duas ondas senoidais cuja função amplitude  $\eta_1$  e  $\eta_2$  seja dada por:

$$\begin{cases} \eta_1(x, t) = a \cdot \sin(k_1 x - \omega_1 t) \\ \eta_2(x, t) = a \cdot \sin(k_2 x - \omega_2 t) \end{cases} \quad (2.5)$$

A função resultante será simplesmente a soma das funções originais, dada por:

$$\eta(x, t) = a \cdot \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a \cdot \sin(k_2 x - \omega_2 t) \quad (2.6)$$

<sup>7</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion\\_\(water\\_waves\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_(water_waves))

Aplicando a relação trigonométrica da soma de senos:

$$\sin(A) + \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (2.7)$$

a Equação 2.6 se torna:

$$\eta(x, t) = 2a \left[ \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \right] \cdot \left[ \sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \right] \quad (2.8)$$

onde,  $k_g = \frac{k_1-k_2}{2}$  é o número de onda de grupo e  $\omega_g = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$  é a freqüência angular de grupo. A velocidade de grupo então será dada por:

$$V_g = \lim_{k_1 \rightarrow k_2} \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \lim_{k_1 \rightarrow k_2} \frac{\omega(k_1)-\omega(k_2)}{k_1-k_2} \quad (2.9)$$

No caso em que a relação de dispersão  $\omega(k)$  é linear, como acontece com a luz se propagando no vácuo,  $\omega(k) = kc$ , onde  $c$  é aproximadamente 300.000 Km/s, a velocidade de grupo  $V_g$ , dada pela Eq. 2.4, é igual e constante para qualquer  $k$ ,

$$V_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} = c \quad (2.10)$$

Segundo a definição de velocidade de fase, a  $V_p$  do exemplo será:

$$V_p = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{kc}{k} = c \quad (2.11)$$

Quando acontece a igualdade  $V_p = V_g$ , isso significa que não existe dispersão no meio.

Um esquema numérico que minimize o efeito de dispersão deve respeitar o comportamento da equação que o define. Embora a Eq. 2.1 seja a forma primitiva da equação representativa da propagação sonora no ar, observa-se que essa equação é do tipo hiperbólica, caracterizada por:

- Transmitir a informação a velocidade finita,
- Ser naturalmente não dissipativa e
- Admitir descontinuidades nas condições iniciais.

A primeira característica chamou a atenção de três pesquisadores: R. Courant, K. Friedrichs e H. Lewy, que perceberam a necessidade de limitar a velocidade da simulação, para que as informações contidas na relação de dispersão fossem corretamente percebidas nos cálculos.

Surgiu então uma constante adimensional chamada CFL, cujas letras representam as iniciais dos sobrenomes desses pesquisadores, que relaciona a velocidade de propagação do pulso acústico, a resolução da malha utilizada e o avanço temporal:

$$CFL = v \frac{dt}{dx} \quad (2.12)$$

onde  $v$  é a velocidade de propagação do pulso,  $dt$  o avanço temporal, e  $dx$  a resolução da malha que se deve utilizar.

Com esses conceitos em mente, o leitor deverá ser capaz de compreender o conteúdo dos próximos capítulos. Caso seja necessário lembrar mais alguns conceitos da acústica clássica, foi criado o Apêndice I, o qual faz uma rápida e clara revisão do assunto.

No próximo capítulo, será apresentado um breve panorama sobre as pesquisas que vem sendo desenvolvidas em propagação acústica.

# **CAPÍTULO III**

## **3. Revisão Bibliográfica**

Em 1993, Tam e Webb criaram uma nova maneira de se propagar uma grandeza pela influência dos valores dessa grandeza nos pontos vizinhos ao ponto de interesse. O DRP (Dispersion Relation Preserving – Preservando a Relação de Dispersão), é um novo esquema de diferenças finitas otimizado no espaço espectral de Fourier, que busca minimizar o erro de dispersão causado pelo esquema numérico.

De acordo com a teoria de propagação de onda, os modos dos números de onda e suas características de propagação estão embutidas na equação que exprime a relação de dispersão de uma determinada propagação, ou seja, uma solução numérica de alta ordem deve ser capaz de reproduzir os mesmos modos de onda (modo acústico, de vorticidade e de entropia), as mesmas características de onda (não dissipação, não dispersão e isotropia), e as mesmas velocidades das ondas que compõe a propagação. Avaliando o tradicional esquema de diferenças finitas no espaço espectral de Fourier, sob a perspectiva da relação de dispersão, Tam e Webb conseguiram minimizar o erro de dispersão, obtendo uma eficiência melhor do novo esquema, superior ao esquema tradicional de diferenças finitas para a mesma ordem na taxa de convergência. Maiores detalhes sobre a concepção do DRP podem ser obtidos no Apêndice III.

Em CAA normalmente se utilizam as técnicas de:

- Diferenças finitas ou de

- Volumes finitos.

A comunidade científica tem optado por trabalhar com diferenças finitas. Pode-se ainda trabalhar dentro de diferenças finitas (ou volumes finitos) com esquemas implícitos ou explícitos. Nos esquemas explícitos o valor de uma grandeza no tempo atual é resultado dos valores obtidos no tempo anterior. Diferentemente, nos esquemas implícitos o valor da grandeza no tempo atual é obtido de valores da grandeza nos pontos vizinhos também no tempo atual. Os esquemas explícitos exigem um maior número de pontos para se obter a mesma resolução dos esquemas implícitos, no entanto esses últimos tem a desvantagem de exigir a solução de um sistema linear para se calcular a derivada espacial em cada ponto. O DRP é o exemplo de um esquema de diferenças finitas explícito.

Com o DRP, abriram-se novas possibilidades dentro da CAA. Hu et al. (1996) seguindo o mesmo princípio do DRP otimizaram também no espaço espectral de Fourier o tradicional esquema de Runge-Kutta, obtendo o LDDRK (Low Dissipation and low Dispersion Runge-Kutta) alcançando 4<sup>a</sup> ordem na taxa de convergência para problemas lineares e 2<sup>a</sup> ordem para problemas não lineares.

Inspirado no trabalho de Tam e Webb, Hixon (1996) comparou o esquema proposto por Gottlieb e Turkel (1976), um esquema de MacCormack modificado para se conseguir 2<sup>a</sup> ordem na taxa de convergência no tempo e 4<sup>a</sup> ordem no espaço, o esquema de Viswanathan e Sankar (1993), também um esquema de MacCormack de 4<sup>a</sup> ordem no espaço e 4<sup>a</sup> ordem no tempo, e o esquema de Bayliss et. al. (1985), outro esquema de MacCormack de 2<sup>a</sup> ordem no tempo e 6<sup>a</sup> ordem no espaço. A derivada temporal foi resolvida com os tradicionais métodos de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> ordens. Hixon comparou todos esses esquemas entre si e com o DRP de Tam e Webb (1993), comentando ainda que o esquema de Tam e Webb poderia ser usado para otimizar os esquemas de baixa ordem de MacCormack.

Um ano depois, Hixon (1997) coloca em prática o comentário feito em seu artigo anterior e cria um novo esquema de MacCormack, de 4<sup>a</sup> ordem na taxa de convergência no espaço otimizado segundo o DRP de Tam e Webb (1993), se utilizando do LDDRK de Hu et al. (1994) para obter 4<sup>a</sup> ordem no tempo para problemas lineares, conseguindo assim uma resolução de 6 a 8 pontos de malha para o comprimento de onda mínimo e um CFL de 1,25.

Aperfeiçoando seu trabalho com esquemas implícitos, Hixon (2000) descreve um novo método compacto prefatorado com estêncil reduzido baseado no esquema de MacCormack, mais estável para condições de parede que os anteriormente mencionados. Nesse artigo, Hixon compara o rendimento do DRP com os esquemas de diferenças finitas baseado na série de Taylor e com seu esquema compacto prefatorado. O DRP apresenta melhor resolução somente até um determinado número de pontos por comprimento de onda; aumentado o número de pontos de malha por comprimento de onda o esquema de diferenças finitas tradicionais (série de Taylor) e o esquema compacto tem um decaimento do erro maior que o DRP. Mas isso já era esperado, uma vez que o DRP é otimizado para um determinado intervalo de número de onda, e não para todo o espectro.

Inspirados no esquema prefatorado de Hixon (2000), Ashcroft e Zhang (2003) desenvolvem uma nova classe de esquemas compactos combinando análise de Fourier com notação numérica de número de onda, resultando em melhoria nas características de propagação do pulso acústico. Um resultado curioso, fruto da análise dos autores, mostra que o DRP exige menos processamento que os métodos implícitos, porém necessita 1,85 vezes mais pontos para se obter a mesma exatidão dos métodos implícitos, para o caso da propagação do pulso 1D.

Com o crescimento do poder de processamento dos novos computadores, esquemas que abrangessem concomitantemente as escalas da propagação e da geração sonora foram desenvolvidos. Bogey e Bailly (2004) desenvolvem então uma família de esquemas otimizados no espaço de Fourier para geração e propagação acústica, com filtros seletivos que impedem a oscilação de malha, e um Runge-Kutta de baixa armazenagem otimizado para baixa dissipação e dispersão.

Colonius e Lele (2004) apresentam um extenso trabalho de revisão dos esquemas aplicados à geração sonora e contendo um breve panorama sobre propagação sonora. Uma das importantes contribuições desse trabalho foi a análise dos vários esquemas existentes na propagação acústica, suas virtudes, carências, e características essenciais para que sejam utilizadas em CAA. Essas características são:

- Alta acurácia,
- Fácil implementação,
- Baixo custo computacional,

- Eficiência na paralelização,
- Baixa necessidade de memória,
- Versatilidade para se aplicar a solução em diferentes geometrias.

Segundo os autores, o esquema que melhor se adequa a todos esses quesitos, e tem sido a escolha da maioria da comunidade científica, é a técnica de diferenças finitas.

Roeck et al. (2004) também fazem um trabalho de revisão e avaliação de alguns esquemas explícitos de propagação acústica, dentre elas:

- Diferenças finitas de 6<sup>a</sup> ordem (ST7),
- Diferenças finitas de 8<sup>a</sup> ordem (ST9),
- DRP – Tam e Webb (1993),
- Diferenças finitas centradas otimizadas de 9 pontos (4<sup>a</sup> ordem), desenvolvida por Bogey e Bailly (STO9) - Bogey e Bailly (2003).

e seis esquemas temporais,

- Runge-Kutta clássico de 5 estágios (RK5),
- Runge-Kutta clássico de 6 estágios (RK6),
- Runge-Kutta otimizado de 5 estágios (RKO5),
- Runge-Kutta otimizado de 6 estágios (RKO6),
- LDDRK de 5 estágios (LDDRK5), e
- LDDRK de 6 estágios (LDDRK6),

Segundo os autores, embora o esquema STO9 seja capaz de transportar ondas pequenas melhor que os demais esquemas, apresenta em contrapartida um significativo potencial dispersivo, superior aos demais, devido ao fato de sua velocidade de grupo ser ligeiramente diferente das PDEs originais.

Ainda no contexto dos esquemas explícitos, Berland et al. (2004) apresentaram esquemas de diferenças finitas centradas otimizadas de 6<sup>a</sup> e 10<sup>a</sup> ordens, capazes de transportar ondas de comprimentos de até 5 pontos de malha, de malhas uniformes de tamanho  $\Delta x$  para malhas de tamanho  $2.\Delta x$ , motivados pela necessidade de se trabalhar conjuntamente as escalas do escoamento aerodinâmico, com o auxílio de LES – Large Eddy Simulation, e as escalas de propagação sonora. Esquemas de diferenças finitas deslocadas otimizadas de 6<sup>a</sup> e

10<sup>a</sup> ordens para condições de parede e fronteira são também desenvolvidos, além de um método de Runge-Kutta otimizado de 6 estágios de 4<sup>a</sup> ordem na taxa de convergência para problemas não lineares.

Objetivando utilizar esquemas de alta ordem para resolver as escalas do escoamento e da propagação acústica em geometrias complexas, Zhang et al. (2004) avaliam a utilização da técnica Multi-block para transformar domínios de geometrias complexas em geometrias mais simples utilizando esquemas compactos (implícitos).

Preocupados com a dispersão induzida pela solução da derivada temporal, Berland, Bogey e Bailly (2006) desenvolvem o RK46-NL, um esquema baseado nos tradicionais métodos de Runge-Kutta e com a virtude de obter 4<sup>a</sup> ordem na taxa de convergência, tanto para problemas lineares como para problemas não lineares.

Tam (2006) apresenta melhorias no desempenho do DRP pela modificação do limite de integração na integral do erro:  $-1,1 \leq k \cdot \Delta x \leq 1,1$  para o esquema de sete pontos, e  $-1,8 \leq k \cdot \Delta x \leq 1,8$  para o esquema de quinze pontos.

Berland et al. (2007) apresentam um novo estudo, fruto da reflexão do artigo anterior – Berland et al. (2004), onde os dois esquemas centrados, um de 6<sup>a</sup> ordem e outro de 10<sup>a</sup> ordem e seus respectivos filtros, são agora adaptados para utilização em uma zona de *buffer* (zona de transição) entre a malha mais refinada ( $\Delta x$ ) e a menos refinada ( $2 \cdot \Delta x$ ). Os esquemas deslocados de diferenças finitas, de mesma ordem dos esquemas centrados, para as condições de parede e seus respectivos filtros, também são apresentados.

Em um interessante trabalho sobre um novo esquema compacto não linear de pesos, Zhang et al. (2008) apresentam o novo esquema baseado em outros três trabalhos:

- O esquema Compacto Não Linear de Pesos proposto por Deng e Zhang (2000),
- O esquema de Pesos Essencialmente Não Oscilatório - WENO (Weighted Essentially Non- Oscillatory) de Jiang e Shu (1996) e
- O WENO de Balsara e Shu (2000).

Trata-se de um esquema de diferenças finitas centradas de alta ordem (8<sup>a</sup> ordem), capaz de capturar fortes descontinuidades, com características de baixíssima dissipação ou, em algumas situações, de absoluta não dissipação numérica e baixa dispersão.

Preocupados em avaliar a melhor escolha para condições de contorno não reflexivas, Santana et al. (2008) fizeram um estudo comparativo entre três condições de contorno para serem usadas com Equações de Euler Linearizadas (LEE):

- Radiação,
- Escoamento de Saída (Outflow), ambas desenvolvidas por Tam e Webb (1993) e
- Perfectly Matched Layer (PML), desenvolvida por Hu (2001),

e duas outras para serem aplicadas nas equações completas de Euler:

- Absorção da onda característica, desenvolvida por Sesterhenn (2001) e
- Zona de absorção acústica, desenvolvida por Moser; Lamballais; Gervais (2006).

As derivadas temporais foram resolvidas através do esquema LDDRK de Hu et al. (1994) e as derivadas espaciais pelo DRP de Tam e Webb (1993).

Tradicionais pesquisadores de esquemas implícitos, Allampalli et al. (2009) apresentaram uma interessante otimização para a solução da derivada temporal de esquemas explícitos baseados nos métodos de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, otimizados prioritariamente visando o aumento da estabilidade invíscida e em segundo plano, o aumento da precisão do esquema para grandes passos de tempo, obtendo uma surpreendente estabilidade para CFL entre 4,9 e 5,7.

O que se pode observar desse breve relato histórico de produção científica é a importância da nova visão crítica que o trabalho de Tam e Webb trouxe a CAA. Como se pode ver, os esquemas caminham para uma maior exatidão, robustez, e leveza no processamento, isso aliado ao poder crescente dos modernos computadores que, em um futuro próximo, permitirão que os complexos casos da indústria possam ser simulados, abrindo horizontes para a fabricação de produtos mais eficientes, mais baratos e mais robustos.

No próximo capítulo serão apresentados com detalhes os esquemas espaciais estudados no presente trabalho.

## CAPÍTULO IV

#### 4. Esquema Numérico

Conforme apresentado na Introdução e no Capítulo II, a geração sonora de um problema aeroacústico pode ser separada da propagação sonora devido às características muito específicas desses dois fenômenos, permitindo então que esquemas apropriados à solução de cada fenômeno sejam utilizadas visando reproduzir com fidelidade o comportamento do fluido em cada caso. Neste capítulo, serão apresentados os esquemas empregados na solução da propagação acústica, e uma breve explanação sobre as condições de contorno utilizadas na fronteira do domínio, seus fundamentos, simplificações e equacionamento.

#### 4.1. Equações de Euler Linearizadas (LEE)

Como o fluído de estudo da CAA é o ar atmosférico especificamente, algumas de suas propriedades foram incorporadas às equações de Navier-Stokes, simplificando-as e transformando-as nas equações de Euler.

As equações de Navier-Stokes 3D (três dimensões) simplificadas para o caso de um fluido newtoniano (viscosidade dinâmica  $\mu = \text{cte}$ ) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} x: \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ y: \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ z: \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Termo advectivo
Termo viscoso

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as velocidades nos três eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $p$  é a pressão,  $t$  é o tempo e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica ou absoluta.

Para um cenário sem corrente de ar, ou com corrente de ar constante e velocidade inferior a  $M < 0,3$  (número de Mach), o ar se comporta como um fluido incompressível ( $\rho = cte$ ). Para uma corrente de ar horizontal ( $g_x = g_y = 0$ ) o termo de gravidade das Eq. 4.1 nas direções  $x$  e  $y$  são nulos; na direção  $z$ ,  $g_z = -g$ . Como a viscosidade dinâmica do ar é muito pequena nas CNTP,  $17,4 \cdot 10^{-6} N.s/m^2$ , sua influência pode ser desprezada. Aliado ao fato da corrente de ar ser constante e em uma única direção, a contribuição das derivadas de segunda ordem das velocidades do termo viscoso também podem ser desprezadas. Com essas simplificações as equações de Navier-Stokes se transformam nas equações de Euler. Eliminando  $\rho$  do lado esquerdo das equações se obtém:

$$\begin{cases} x: \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ y: \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ z: \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (4.2)$$

Aplicando a regra da cadeia às derivadas dos produtos das velocidades (não linearidades) se obtém:

$$\begin{cases} x: \begin{cases} \frac{\partial(uu)}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial(uv)}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial(uw)}{\partial z} = w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \\ y: \begin{cases} \frac{\partial(vu)}{\partial x} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial(vv)}{\partial y} = v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial(vw)}{\partial z} = w \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \\ z: \begin{cases} \frac{\partial(wu)}{\partial x} = u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial(wv)}{\partial y} = v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial(ww)}{\partial z} = w \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \end{cases} \quad (4.3)$$

Substituindo esses resultados nas Eq. 4.2:

$$\begin{cases} x: \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ y: \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ z: \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (4.4)$$

Rearranjando as parcelas se obtêm:

$$\begin{cases} x: \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ y: \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + v \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ z: \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + w \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (4.5)$$

O comportamento incompressível do ar permite que se aplique a equação da continuidade,

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

simplificando o conjunto de equações. Reescrevendo as Equações 4.5,

$$\begin{cases} x: \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ y: \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ z: \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (4.7)$$

Para o caso 1D (uma dimensão) as Eq.(4.7) são reescritas somente com a primeira linha, uma vez que  $v = 0$  e  $w = 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.8)$$

Para o caso 2D (duas dimensões):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (4.9)$$

As velocidades que multiplicam as derivadas espaciais são constantes. Se a velocidade de referência na adimensionalização for a velocidade do som, equações 4.7, 4.8 e 4.9 podem ser reescritas como:

$$3D: \begin{cases} x: \frac{\partial u}{\partial t} + M_x \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial u}{\partial y} + M_z \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ y: \frac{\partial v}{\partial t} + M_x \frac{\partial v}{\partial x} + M_y \frac{\partial v}{\partial y} + M_z \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ z: \frac{\partial w}{\partial t} + M_x \frac{\partial w}{\partial x} + M_y \frac{\partial w}{\partial y} + M_z \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (4.10)$$

$$1D: \left\{ x: \frac{\partial u}{\partial t} + M_x \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \right. \quad (4.11)$$

$$2D: \begin{cases} x: \frac{\partial u}{\partial t} + M_x \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ y: \frac{\partial v}{\partial t} + M_x \frac{\partial v}{\partial x} + M_y \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (4.12)$$

onde  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são o número de Mach nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Essas são as Equações de Euler Linearizadas (LEEs), entendo-se que o termo “LINEARIZADA” se deve às simplificações aplicadas aos termos não lineares (Eq. 4.3).

## 4.2. Equações Governantes

A propagação do pulso sonoro envolve outras variáveis além das velocidades  $u$  e  $v$ , dentre elas, a massa específica  $\rho$  e a pressão  $p$ . A equação da continuidade nos dá a equação referente à massa específica nas três direções:

$$3D: \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

Como a velocidade do som é uma propriedade termodinâmica do fluido, como demonstrado por White (2001), a massa específica e a velocidade são funções da pressão, segundo a relação,

$$p = \rho V^2 \quad (4.14)$$

Que, sendo substituída na Equação 4.13, se obtém:

$$3D: \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

Adimensionalizadas com relação à velocidade do som, para os casos 1D e 2D as equações da pressão e da massa específica se apresentam como:

$$1D: \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + M_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M_x \frac{\partial p}{\partial x} + p_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

$$2D: \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + M_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M_x \frac{\partial p}{\partial x} + p_0 \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial p}{\partial y} + p_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

onde  $p_0$  e  $\rho_0$  são a pressão e a massa específica de referência do escoamento, adotadas com valor unitário para ambas as grandezas. Esses dois conjuntos de equações, juntamente com as Eq. 4.11 e 4.12, são as equações que regem as simulações desenvolvidas nesse trabalho.

Como o escoamento é incompressível, a massa específica  $\rho$  tem variação desprezível. Então, as equações envolvendo a massa específica resultam em igualdades do tipo  $0 = 0$ , motivo pelo qual essas equações não são computadas no cálculo da propagação sonora.

### 4.3. Derivadas Espaciais

Como se pode observar, essas equações apresentam derivadas espaciais  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \text{ ou } \frac{\partial}{\partial z})$  e temporais  $(\frac{\partial}{\partial t})$  que são aproximadas numericamente. Para resolver essas derivadas espaciais, a comunidade científica tem optado preferencialmente em utilizar o esquema de diferenças finitas. O esquema centrado de diferenças finitas é o mais utilizado por apresentar características não dissipativas. Para uma malha regular (espaçamento  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  constante) tomam-se N pontos antes e N pontos depois do ponto de interesse:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^N a_j \cdot f(x + j \cdot \Delta x, y, z) \quad (4.18)$$

Os coeficientes  $a_j$  podem ser obtidos de forma a se obter o máximo de precisão, com um mínimo de dispersão, ou um mínimo de dissipação, ou ambos. A Tabela 4.1 mostra os coeficientes (pesos) utilizados nos clássicos esquemas de diferenças finitas obtidos na expansão das séries de Taylor.

Tabela 4.1 – Pesos para esquemas centrados de diferenças finitas.

Pontos/Ordem	2 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	10 <sup>a</sup>	12 <sup>a</sup>
$a_{-6}$						1/5544
$a_{-5}$					-1/1260	-1/385
$a_{-4}$				1/280	5/504	1/56
$a_{-3}$			-1/60	-4/105	-5/84	-5/63
$a_{-2}$		1/12	3/20	1/5	5/21	15/56
$a_{-1}$	-1/2	-2/3	-3/4	-4/5	-5/6	-6/7
$a_0$	0	0	0	0	0	0
$a_{+1}$	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7
$a_{+2}$		-1/12	-3/20	-1/5	-5/21	-15/56
$a_{+3}$			1/60	4/105	5/84	5/63
$a_{+4}$				-1/280	-5/504	-1/56
$a_{+5}$					1/1260	1/385
$a_{+6}$						-1/5544

O esquema de diferenças finitas centradas utilizando séries de Taylor prioriza a não dissipação. Uma explicação detalhada de como se constrói esse esquema pode ser encontrada no Apêndice II.

Muito embora se possam construir esquemas de alta ordem para minimizar o efeito de dispersão<sup>8</sup>, Tam e Webb (1993) deduziram um esquema de diferenças finitas de baixa ordem, que minimiza a dispersão melhor do que os esquemas de mesma ordem utilizando séries de Taylor. O DRP (Dispersion Relation Preserving – Preservando a Relação de Dispersão) é um esquema de diferenças finitas centradas, idealizado originalmente para quarta ordem utilizando sete pontos, otimizado no espaço espectral de Fourier para se minimizar a dispersão. A Tabela 4.2 apresenta os coeficientes (pesos) utilizados nos esquemas de diferenças finitas do tipo DRP.

---

<sup>8</sup> O som pouco se dispersa ao ar livre, no entanto, a imprecisão do método matemático amplifica a o efeito de dispersão.

Tabela 4.2 – Pesos para esquemas centrados do DRP.

Pontos/Ordem	2 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>
$a_{-4}$			0,005939804
$a_{-3}$		-0,0265199521	-0,052305492
$a_{-2}$	0,123171607	0,189413142	0,233157260
$a_{-1}$	-0,746343213	-0,799266427	-0,833157260
$a_0$	0	0	0
$a_{+1}$	0,746343213	0,799266427	0,833157260
$a_{+2}$	-0,123171607	-0,189413142	-0,233157260
$a_{+3}$		0,0265199521	0,052305492
$a_{+4}$			-0,005939804

Os coeficientes do esquema DRP de quarta ordem é o clássico esquema apresentado por Tam e Webb (1993) em seu trabalho. Os esquemas de segunda e sexta ordem inclusos na Tab. 4.2 foram obtidos pela aplicação direta dos conceitos do DRP, frutos dessa pesquisa. Maiores detalhes sobre o esquema, vide Apêndice III.

#### 4.4. Derivadas Temporais

Embora a propagação acústica no ar seja pouco dissipativa e pouco dispersiva, as variáveis envolvidas são cerca de quatro ordens de grandeza menor que na geração acústica, o que torna imperativo um controle mais cuidadoso dessas variáveis e, por isso esquemas específicos que minimizem esses efeitos no tempo foram desenvolvidos, dentre eles:

- LDDRK, proposto por Hu et al.(1996), e
- RK46-NL, proposto por Berland et al. (2006).

##### 4.4.1. Descrição do LDDRK

Utilizando a mesma idéia de Tam e Webb (1993)para o desenvolvimento do esquema DRP, Hu et al. (1996) propuseram um esquema de Runge-Kutta explícito otimizado no espaço espectral de Fourier, de forma a minimizar a dispersão e a dissipação das ondas acústicas. A Tabela 4.3 apresenta os coeficientes encontrados para a aplicação do esquema.

Tabela 4.3 – Valores dos coeficientes do esquema LDDRK.

Tempo / Coeficientes	$\beta 1$	$\beta 2$	$\beta 3$	$\beta 4$	$\beta 5$	$\beta 6$
Impar	0	1/4	1/3	1/2	0	0
Par	0	0,17667	0,38904	1/4	1/3	1/2

A Figura 4.1 a seguir exemplifica esquematicamente a utilização desses coeficientes.

O esquema apresenta quarta ordem de precisão para problemas lineares e segunda ordem para problemas não-lineares, usando quatro iterações para os passos de tempo ímpares e seis iterações para os passos de tempo pares (Fig. 4.1), onde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U) \quad (4.19)$$

$U$  contém os valores da variável em cada ponto da malha espacial e  $F$  é esquema de solução das derivadas espaciais que, no caso desse trabalho, são as diferenças finitas centradas.

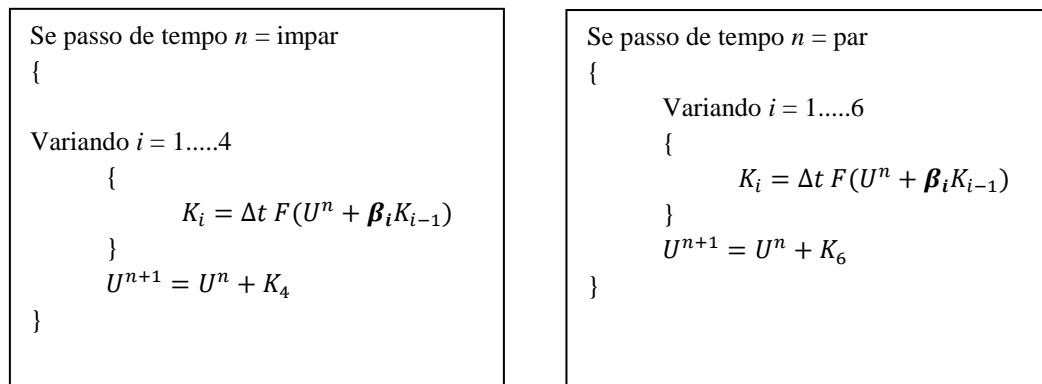


Figura 4.1 – Algorítmo de implementação do esquema LDDRK.

#### 4.4.2. Descrição do RK46-NL

Berland et al. (2006), no RK46-NL ampliaram os trabalhos de Stanescu e Habashi (1998) e de Hu et al. (1996), obtendo precisão de quarta ordem para problemas lineares e não lineares, com coeficientes dados segundo a Tab. 4.4,

Tabela 4.4 – Valores dos coeficientes do esquema RK46-NL.

Iteração( $i$ )	$\alpha_i$	$\beta_i$
1	0	0,032918605146
2	-0,737101392796	0,823256998200
3	-1,634740794341	0,381530948900
4	-0,744739003780	0,200092213184
5	-1,469897351522	1,718581042715
6	-2,813971388035	0,27

criando um algoritmo de baixa armazenagem de dados, como o LDDRK, mas com seis iterações para qualquer passo de tempo. A Figura 4.2 sistematiza o emprego desses coeficientes no RK46-NL.

Variando  $i = 1.....6$

$$\{$$

$$K_i = \alpha_i K_{i-1} + \Delta t F(t_i, U_{i-1})$$

$$U_i = U_{i-1} + \beta_i K_i$$

$$\}$$

Figura 4.2 - Algorítmo de implementação do esquema RK46-NL.

Para se demonstrar as vantagens desses esquemas otimizados em CAA, utilizaram-se para comparação, os tradicionais esquemas de avanço temporal:

- Euler (1<sup>a</sup> ordem), e os
- Métodos de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens padrão.

Como o objetivo principal desse trabalho é a avaliação desses esquemas numéricos de baixa dispersão e dissipaçāo, o entendimento do DRP (esquema espacial) e suas vantagens sobre as tradicionais diferenças finitas baseadas nas séries de Taylor é mister. No entanto, como os esquemas temporais otimizados aqui apresentados são baseados no DRP, será omitida uma explanação detalhada da obtenção desses esquemas, enfocando somente no caráter espacial do DRP original.

O trabalho apresentará uma comparação de vários esquemas espaciais:

- Diferenças finitas de 2<sup>a</sup> ordem – FD2,

- Diferenças finitas de 4<sup>a</sup> ordem – FD4,
- Diferenças finitas de 6<sup>a</sup> ordem – FD6,
- Diferenças finitas de 8<sup>a</sup> ordem – FD8,
- Diferenças finitas de 10<sup>a</sup> ordem – FD10,
- Diferenças finitas de 12<sup>a</sup> ordem – FD12,
- DRP de 4<sup>a</sup> ordem, original de Tam e Webb (1993) – DRP47 (quarta ordem – sete pontos),
- DRP de 2<sup>a</sup> ordem – DRP25 (segunda ordem – cinco pontos), e
- DRP de 6<sup>a</sup> ordem – DRP69 (sexta ordem – nove pontos).

Os esquemas espaciais mencionadas acima foram acopladas aos esquemas temporais:

- Euler (1<sup>a</sup> ordem),
- Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem – RK2,
- Runge-kutta de 4<sup>a</sup> ordem – RK4,
- LDDRK,
- RK46-NL,

sendo feita a comparação da influência desses acoplamentos na propagação aeroacústica.

#### 4.5. Condições de Contorno

Para se compreender as equações que governam a restrita região do limiar do domínio é preciso conhecer a ideia por trás das equações. Seja então as PDEs (Partial Differential Equations – Equações Diferenciais Parciais) que governam a propagação acústica 2D, conforme Tam e Webb (1993):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = H \quad (4.20)$$

onde,

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} u + \rho u_0 \\ u_0 u + \frac{p}{\rho_0} \\ u_0 v \\ u_0 p + \gamma p_0 u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho_0 v \\ 0 \\ p/\rho_0 \\ \gamma p_0 v \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e o índice 0 (zero) indicando o valor médio dessas grandezas no escoamento. Aplicando a transformada de Fourier – Laplace nessas equações:

$$\tilde{f}(\alpha, \beta, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y, t) e^{-i(\alpha x + \beta y - \omega t)} dx dy dt \quad (4.22)$$

se obtém quatro autovalores e seus respectivos autovetores ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ ), sendo o primeiro autovalor o modo de entropia, o segundo o modo de vorticidade, e o terceiro e quarto modos acústicos, como mostrado no conjunto de equações abaixo.

$$\begin{cases} \lambda_1 = (\omega - \alpha u_0) \\ \lambda_2 = (\omega - \alpha u_0) \\ \lambda_3 = (\omega - \alpha u_0) + a_0(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_4 = (\omega - \alpha u_0) - a_0(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.23)$$

onde  $u_0$  é o valor médio da velocidade na direção  $x$  no escoamento, supondo a existência de uma suave corrente de fluído, e  $a_0$  é a velocidade do som no escoamento. A soma de cada autovalor, multiplicado ao seu respectivo autovetor, é solução geral do sistema no espaço espectral.

$$\tilde{U} = \frac{c_1}{\lambda_1} X_1 + \frac{c_2}{\lambda_2} X_2 + \frac{c_3}{\lambda_3} X_3 + \frac{c_4}{\lambda_4} X_4 \quad (4.24)$$

De acordo com a teoria da propagação de ondas, a relação de dispersão de cada um desses modos pode ser encontrada igualando-se a zero as expressões que definem seus autovalores. Aplicando a transformada inversa ao inverso desses autovalores, se obtém expressões que definem o comportamento de cada modo no espaço real. Verificando a convergência dessas expressões quando suas variáveis tendem ao infinito, se obtém seus valores assintóticos.

No modo entropia, somente a massa específica é propagada, ficando a pressão e as velocidades constantes e iguais a zero. No modo vorticidade, o comportamento é semelhante, sendo propagadas as velocidades, com a massa específica e a pressão constantes e iguais a zero. No modo acústico, todas as grandezas variam. É interessante ressaltar que os modos entropia e vorticidade tem as mesmas características de propagação (relação de dispersão) e

ambos necessitam de um escoamento para serem propagados, e o fazem na velocidade do escoamento; o modo acústico é propagado na velocidade do som, sem haver a necessidade da presença de um escoamento.

As condições de contorno do tipo radiação admitem a passagem de ondas do modo acústico, e as do tipo escoamento de saída (outflow) admitem os modos de entropia, vorticidade e acústico ao mesmo tempo. As equações que expressam cada uma dessas condições de contorno são dadas pelas Eq. 4.25 e Eq. 4.26.

Radiação:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -V(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\rho}{2r} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -V(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{2r} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -V(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial v}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{2r} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -V(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial p}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{2r} \right) \end{cases} \quad (4.25)$$

Escoamento de Saída (outflow):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -M_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} + M_x \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -M_x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -M_x \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -V(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial p}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{2r} \right) \end{cases} \quad (4.26)$$

onde  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares de um ponto qualquer e  $V(\theta)$  é dado pela relação:

$$V(\theta) = M_x \cos(\theta) + (1 - M_x^2 \sin^2(\theta))^{1/2} \quad (4.27)$$

Para o caso 1D, se utilizaram as condições contorno de entrada e saída subsônicas não reflexivas conforme descritas em Zhang e al. (2004):

$$\text{Entrada subsônica: } \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{M-1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4.28)$$

Saída subsônica: 
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} - M \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{M+1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4.29)$$

#### 4.6. Erro Absoluto

Como o objetivo desse trabalho é mostrar de maneira clara os conceitos e ideias contidos na literatura referente à propagação sonora, adotou-se a forma de erro mais simples, o erro absoluto, definido como:

$$Erro = |Valor Analítico - Valor Numérico| \quad (4.30)$$

É importante lembrar que não foram utilizadas no código computacional funções de amortecimento que minimizam as oscilações numéricas.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados das simulações e as análises desses resultados obtidos.

# CAPÍTULO V

## 5. Resultados

Inicialmente foi simulada a propagação de um pulso acústico 1D no centro no domínio, conforme a Fig. 5.1 abaixo, segundo o eixo  $x$ . Como se pode observar, o pulso de pressão inicial se decompõe em dois pulsos menores que se propagam em sentidos contrários.

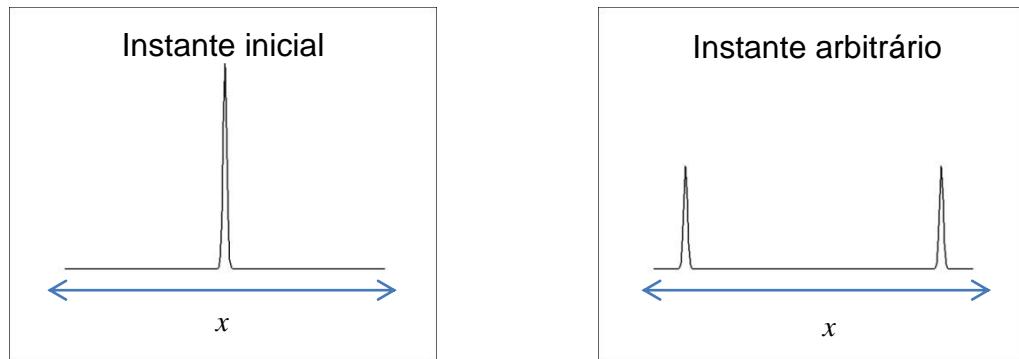


Figura 5.1 – Diagrama esquemático da propagação de um pulso de pressão em uma dimensão(1D).

Nessas simulações, foram testadas várias combinações de esquemas espaciais com esquemas temporais. Testes simples mostraram o melhor esquema temporal. Fixando o esquema temporal com base nesses testes preliminares, simulou-se a propagação do pulso acústico variando-se os esquemas espaciais em três malhas diferentes: uma malha grosseira (101 pontos,  $dx = 2$ ), uma intermediária (201 pontos,  $dx = 1$ ) e outra refinada (401 pontos,  $dx = 0,5$ ), com o domínio variando de -100 a 100 na direção  $x$ . As simulações foram

interrompidas antes que o pulso chegasse à fronteira do domínio, para evitar que a reflexão do pulso na fronteira contaminasse a solução.

Depois de analisado o desempenho dessas combinações nas diferentes malhas, elegeu-se o esquema espacial de melhor rendimento, fixando-o na simulação enquanto se variavam os esquemas temporais, nos mesmos graus de refinamento de malha. Confirmou-se a escolha inicial do melhor esquema temporal.

Eleitos os melhores esquemas, espacial e temporal, simulou-se então a propagação do pulso acústico na malha mais refinada (401 pontos) atravessando a fronteira do domínio, utilizando as equações de condições de contorno para verificar a eficiência dessas equações quanto à não reflexão do pulso acústico para dentro do domínio de simulação.

Com base no aprendizado adquirido nas simulações 1D, aplicaram-se os melhores esquemas, espacial e temporal, estendendo-se o domínio de simulação para 2D (duas dimensões). Observou-se que, durante o transporte do pulso acústico inicial, seu perfil sofreu uma ligeira deformação em relação ao caso 1D, conforme mostra a Fig. 5.2.

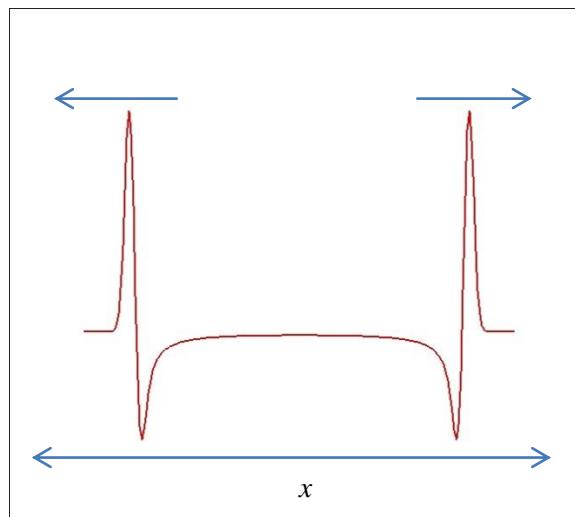


Figura 5.2 – Diagrama esquemático do perfil da propagação de um pulso de pressão 2D.

Foram realizadas duas simulações 2D. Na primeira, o pulso acústico foi propagado até pouco antes de atingir a fronteira do domínio. Na segunda simulação, utilizaram-se as condições de contorno do tipo radiação e escoamento de saída, propostas por Tam e Webb (1993), verificando se as mesmas eram capazes de evitar a reflexão do pulso para dentro do domínio.

## 5.1. Condições das Simulações

Para se avaliar o erro da solução numérica no caso 1D, utilizou-se a solução analítica do pulso de pressão extraída do trabalho de Zhang et al. (2004), conforme a Eq. 5.1.

$$p = 0,5 (1 + 0,075 \cdot e^{\left( (-\log 2,0) \cdot \frac{(x_i - (M_x + 1)t - x_0)^2}{2} \right)} + 0,5 (1 + 0,075 \cdot e^{\left( (-\log 2,0) \cdot \frac{(x_i - (M_x - 1)t - x_0)^2}{2} \right)}) \quad (5.1)$$

As condições iniciais para o caso 1D são dadas pelas equações:

$$\begin{cases} p = 1 + 0,075 \cdot e^{-(\ln 2) \frac{(x - x_0)^2}{2}} \\ u = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

no caso 2D:

$$\begin{cases} p = e^{-(\ln 2) \frac{x^2 + y^2}{9}} \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

O conjunto de equações que rege o fenômeno são as Equações de Euler Linearizadas (LEE – Linearised Euler Equations) - Capítulo IV. Para o caso 1D:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + M_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M_x \frac{\partial p}{\partial x} + p_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Para o caso 2D:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + M_x \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M_x \frac{\partial v}{\partial x} + M_y \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M_x \frac{\partial p}{\partial x} + p_0 \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial p}{\partial y} + p_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Como a pressão  $p_0$  é unitária, no caso 1D a Eq. 5.4 se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + M_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

e no caso 2D a Eq. 5.5 se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + M_x \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M_x \frac{\partial v}{\partial x} + M_y \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + M_y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

O domínio utilizado variou de -100 a 100 nas direções  $x$  e  $y$ . Nota-se que as equações envolvendo a massa específica foram omitidas, exatamente por obedecer à condição de incompressibilidade do fluido.

Considerando que a equação que descreve o problema necessita que se resolvam derivadas espaciais e temporais concomitantemente, é possível que a solução de uma derivada espacial interfira na solução da derivada temporal, e vice versa. Para se minimizar essa interferência, utilizou-se um CFL igual a 0,05. Como o CFL é constante, observa-se que o passo de tempo  $dt$  variou com o espaçamento de malha  $dx$ :

- $dx = 2 \Rightarrow dt = 0,1$ ,
- $dx = 1 \Rightarrow dt = 0,05$ , e
- $dx = 0,5 \Rightarrow dt = 0,025$ ,

segundo a Eq. 2.12.

O melhor esquema temporal eleito foi o RK46-NL, sendo FD12 o melhor esquema espacial.

Toda simulação numérica é uma aproximação do valor real da variável e como visto no Capítulo II, essa aproximação estimula o crescimento da dispersão, induzindo o surgimento de ondas espúrias (falsas) na simulação. As ondas espúrias se propagam mais rapidamente que o pulso acústico e portanto, alcançam a fronteira do domínio primeiro. Como as simulações produzidas nas seções 5.2 e 5.3 não tem implementadas em seu código computacional condições de contorno não reflexivas para as fronteiras do domínio, essas ondas espúrias, ao alcançarem as fronteiras do domínio, são refletidas para dentro do domínio, contaminando a solução. Para evitar esse problema, as simulações foram interrompidas antes que as ondas espúrias atingissem as fronteiras do domínio.

## 5.2. Análise dos Esquemas Espaciais

### 5.2.1. Malha Com 101 Pontos

Com a densidade de pontos tão reduzida, todos os esquemas apresentaram altos valores de erro absoluto, havendo uma mínima melhora com o aumento da ordem.

Os gráficos dessa seção mostram o comportamento da pressão e do erro absoluto de pressão para o tempo 21, pouco antes das ondas espúrias atingirem a fronteira do domínio. É importante ressaltar que todas as grandezas apresentadas nesse trabalho estão adimensionalizadas.

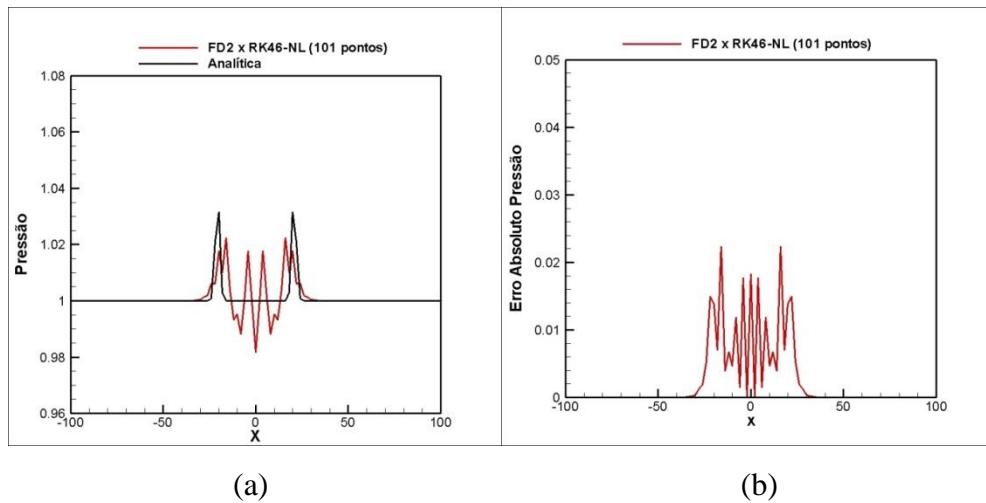


Figura 5.3 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD2 (Diferenças Finitas de 2<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

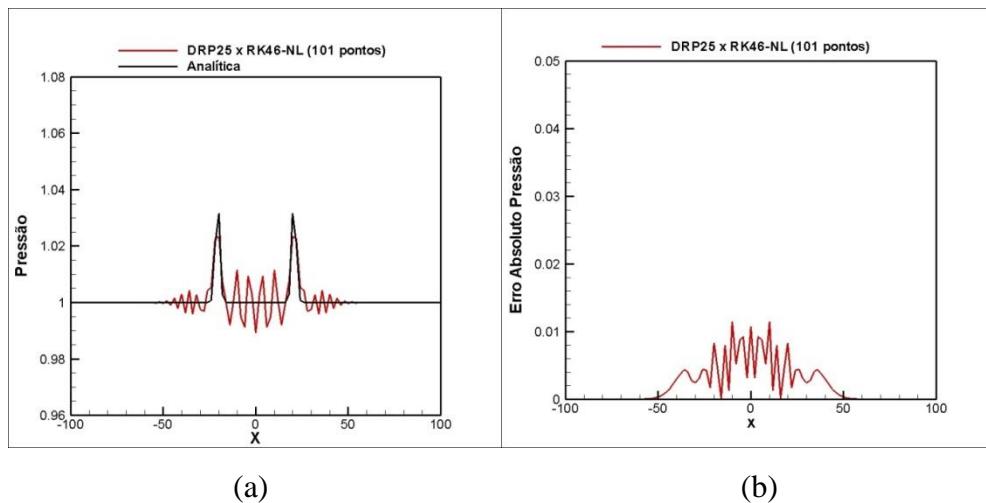


Figura 5.4 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP25 (DRP de 2<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

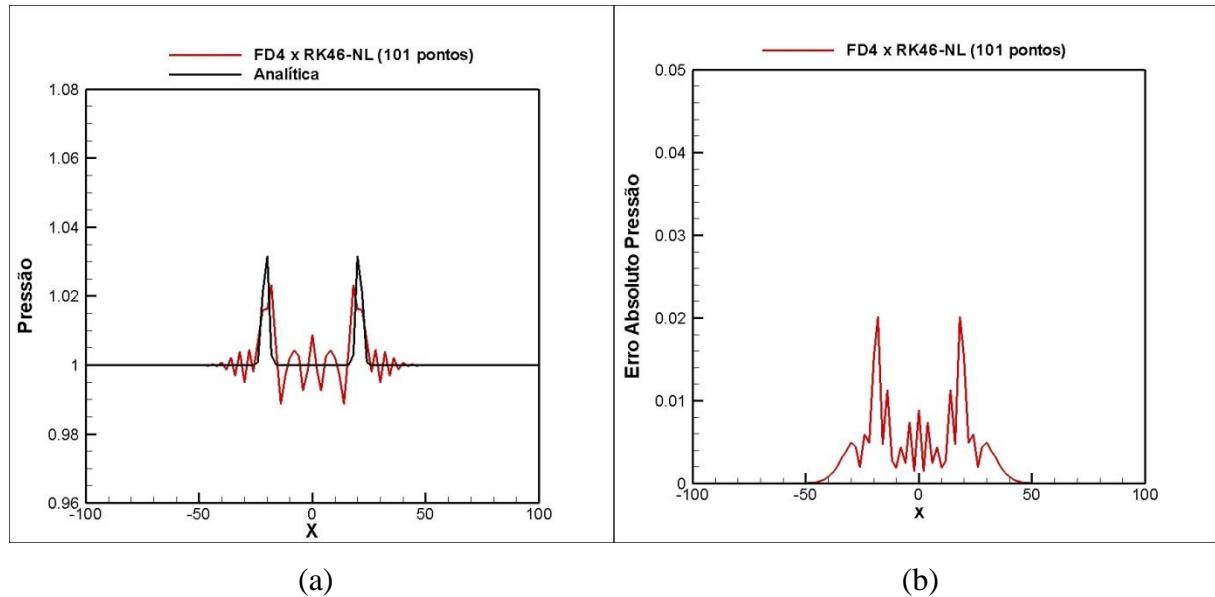


Figura 5.5 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD4 (Diferenças Finitas de 4<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

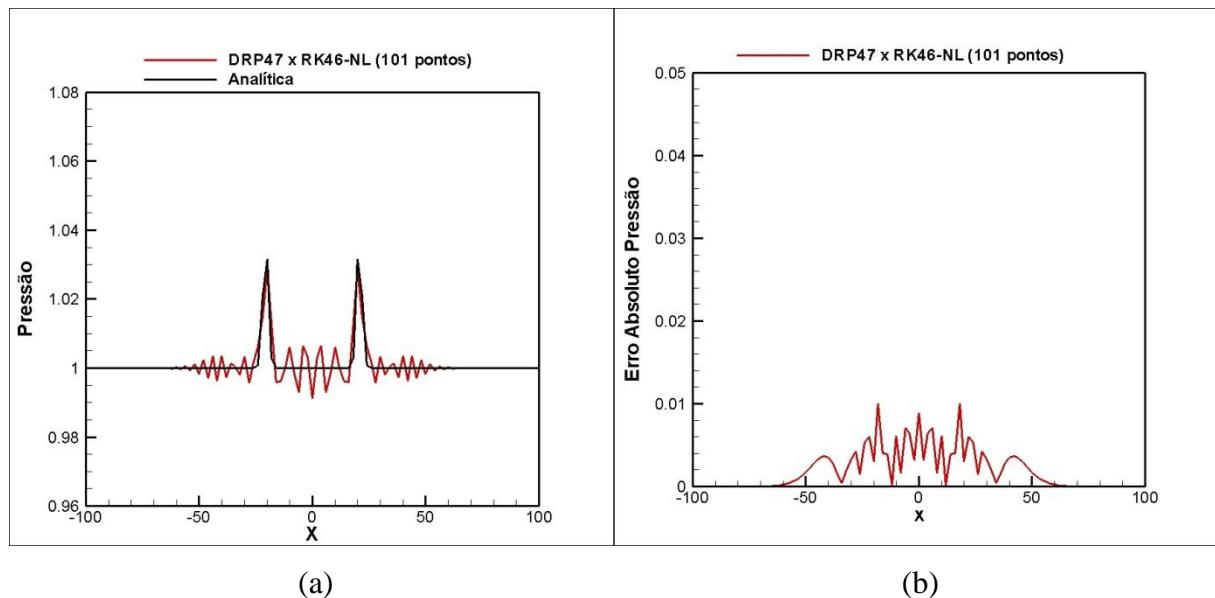


Figura 5.6 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP47 (DRP de 4<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

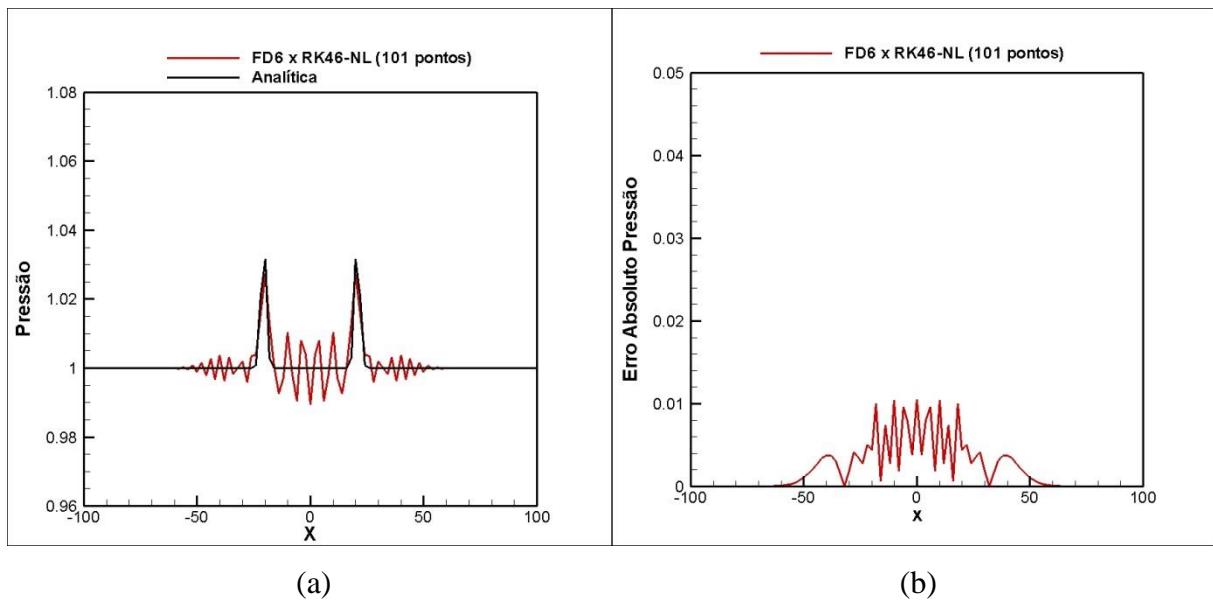


Figura 5.7 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD6 (Diferenças Finitas de 6<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

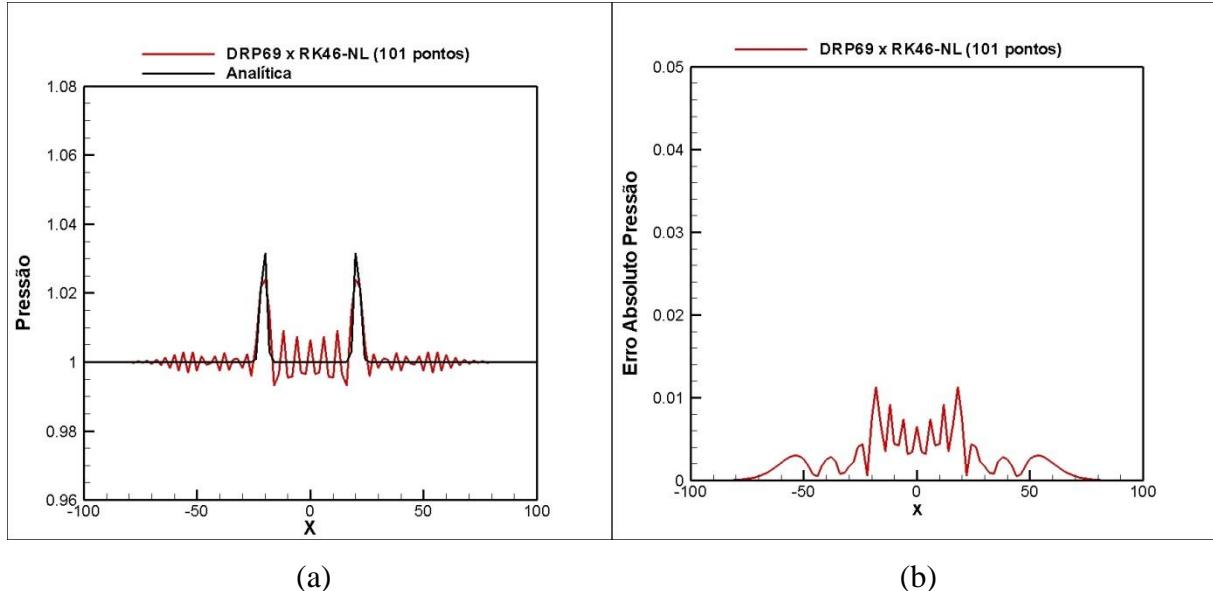


Figura 5.8 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP69 (DRP de 6<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

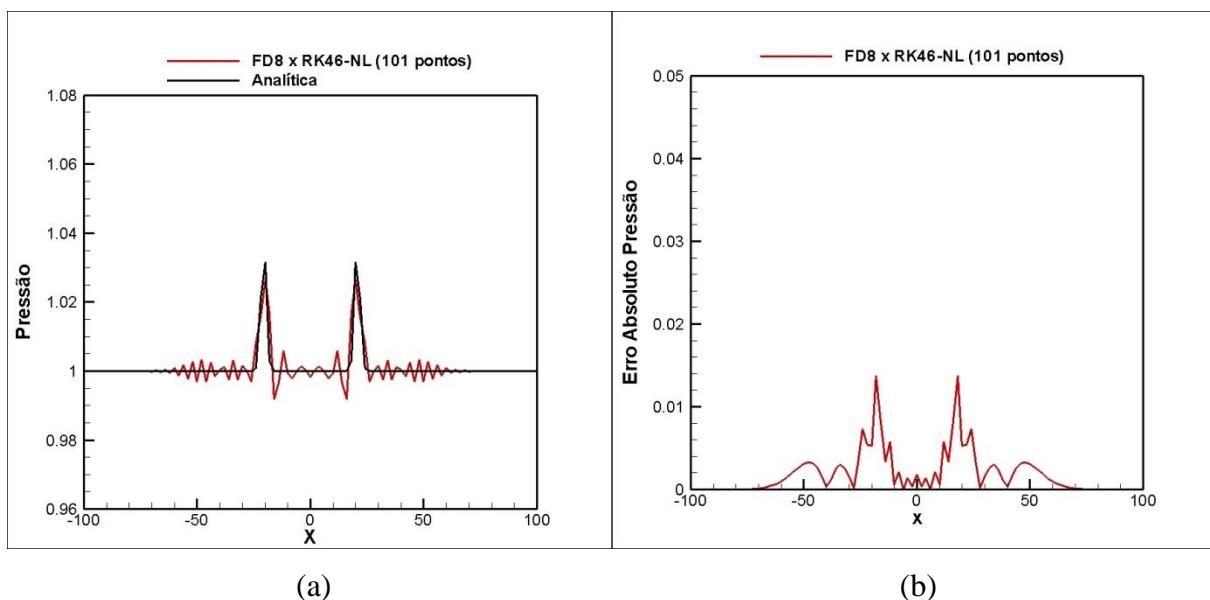


Figura 5.9 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD8 (Diferenças Finitas de 8<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

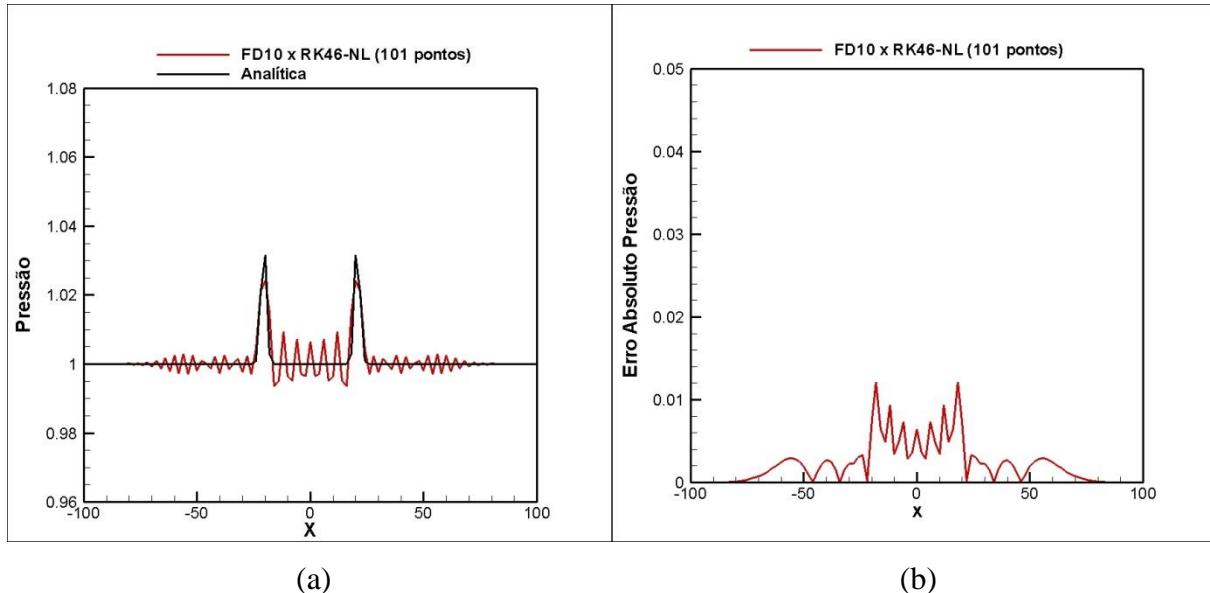


Figura 5.10 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD10 (Diferenças Finitas de 10<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

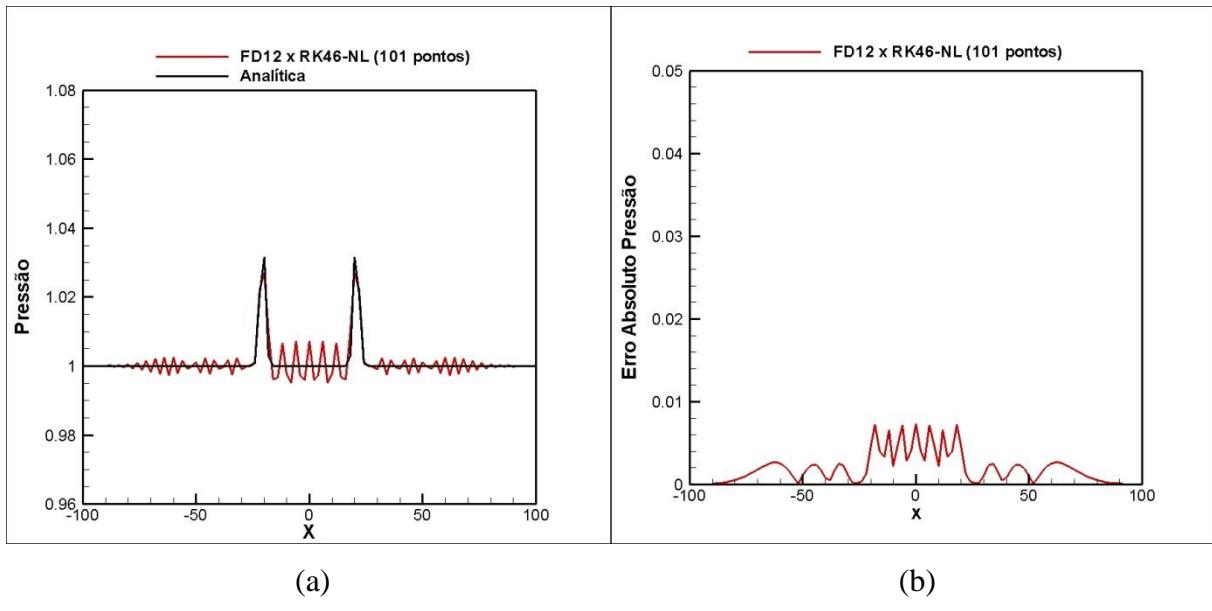


Figura 5.11 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

Os gráficos de pressão produzidos mostraram alguns comprimentos de onda espúrios (dispersão numérica) se propagando adiante do pulso sonoro, e outros mais lentamente (área interior aos picos). Observou-se que, quanto maior a ordem do esquema espacial, mais ondas espúrias surgem. Isso se explica pelo fato dos esquemas de diferenças finitas utilizarem pontos da vizinhança do ponto de interesse, de forma que, quanto maior a ordem do esquema, maior o número de pontos utilizados.

Esses comprimentos de onda espúrios produzem erro na simulação (gráficos do erro absoluto). Esses erros são também acumulativos, aumentando à medida que o pulso se desloca. No entanto, nessa resolução de malha (101 pontos), esse comportamento foi muito útil, especialmente para os esquemas de alta ordem. Percebeu-se um erro ligeiramente menor nos esquemas espaciais de maior ordem. Esses comportamentos podem ser observados nos gráficos das figuras Fig. 5.12, 5.13, e 5.14.

Os gráficos das figuras Fig. 5.12, 5.13, e 5.14 foram construídos sobrepondo-se os erros absolutos de todos os pontos do domínio, em todos os tempos, até o tempo 90,5, que é quando o pulso alcança a fronteira do domínio. Para que a solução não fosse contaminada pela reflexão das ondas espúrias, o domínio computacional foi estendido de -400 a 400.

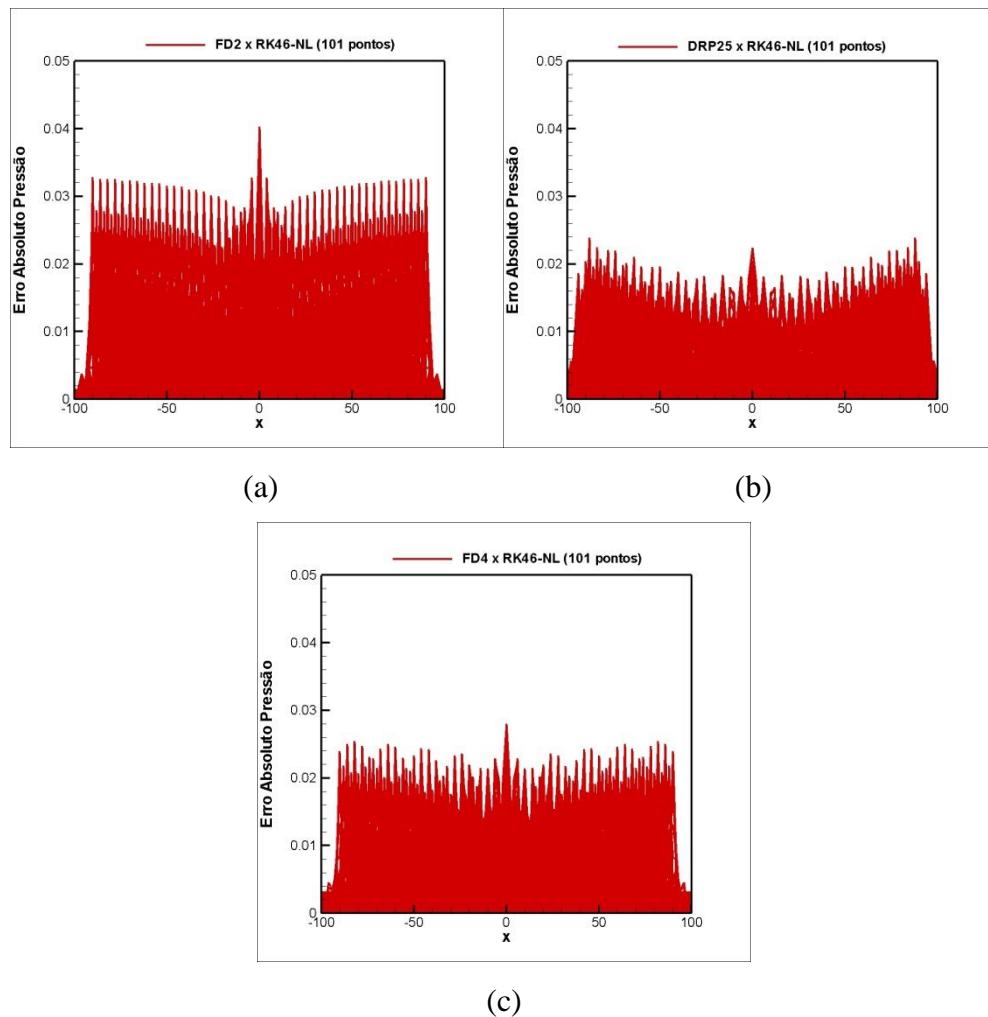


Figura 5.12 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD2 - Diferenças Finitas de 2<sup>a</sup> ordem. (b) DRP25 - DRP de 2<sup>a</sup> ordem. (c) FD4 - Diferenças Finitas de 4<sup>a</sup> ordem.

Na Figura 5.12, observa-se que o DRP25 apresentou inicialmente amplitudes de oscilação menores que FD2 e FD4, mas que tendem a se ampliar com a extensão do domínio de simulação, contrariamente ao comportamento de FD2 e FD4, que tenderam a estabilizar o crescimento do erro absoluto.

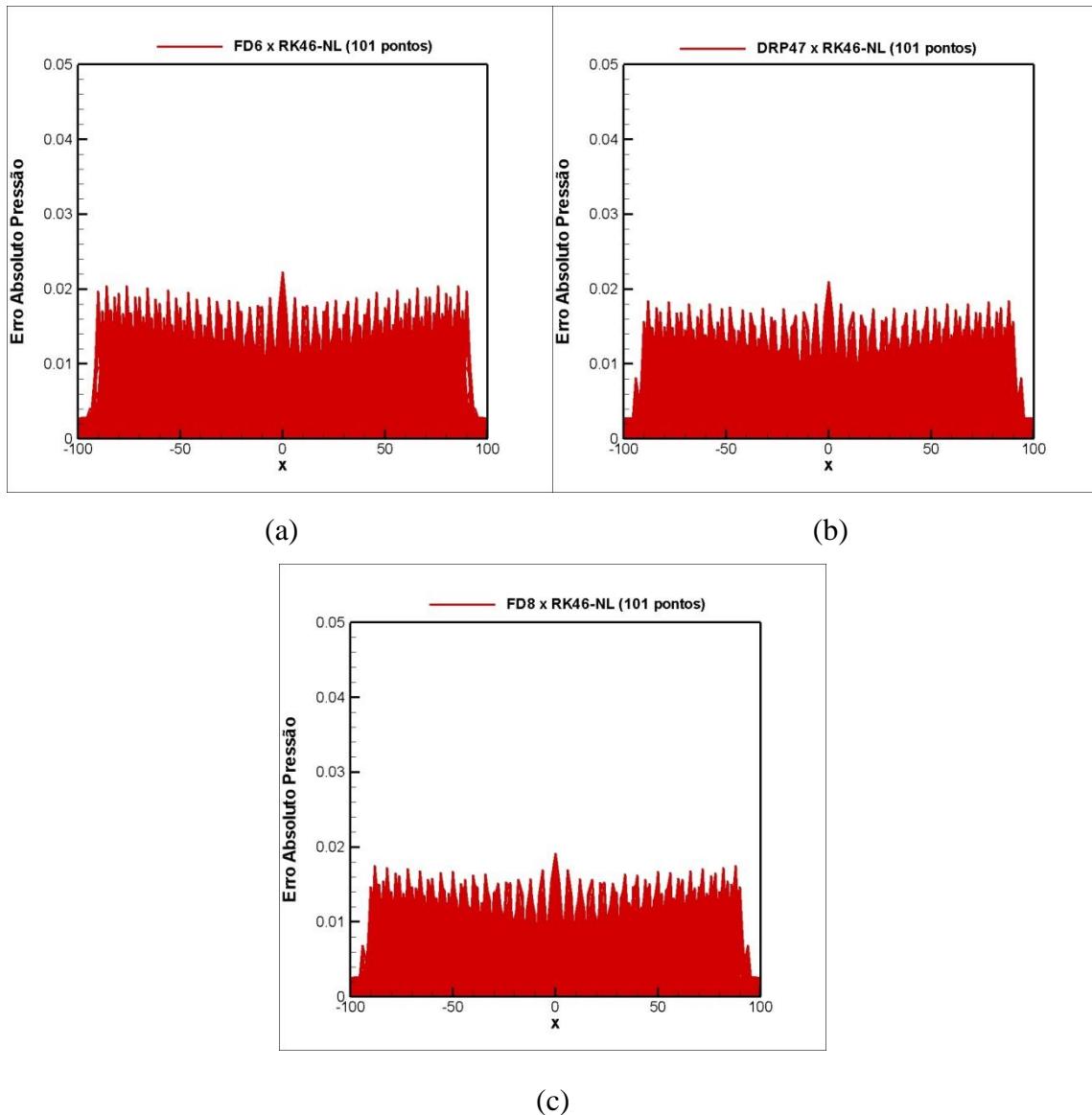


Figura 5.13 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD6 - Diferenças Finitas de 6<sup>a</sup> ordem. (b) DRP47 - DRP de 4<sup>a</sup> ordem. (c) FD8 - Diferenças Finitas de 8<sup>a</sup> ordem.

Os esquemas da Figura 5.13 tenderam a estabilizar o crescimento do erro, diminuindo as amplitudes de oscilação com aumento da ordem do esquema. O mesmo comportamento se repete nos esquemas da Fig. 5.14.

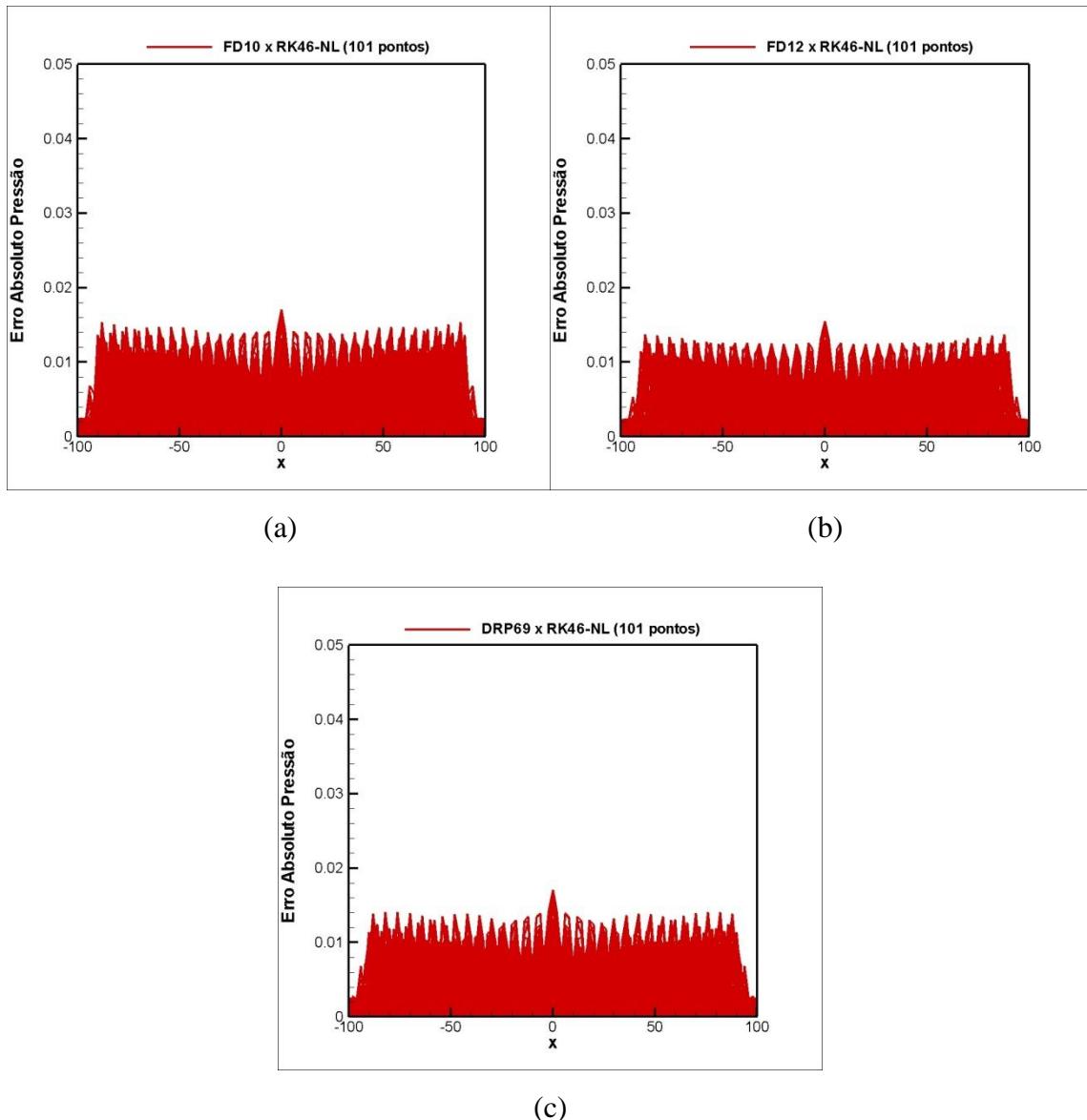


Figura 5.14 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD10 - Diferenças Finitas de 10<sup>a</sup> ordem. (b) FD12 - Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem. (c) DRP69 – DRP de 6<sup>a</sup> ordem.

### 5.2.2. Malha Com 201 Pontos

Os parâmetros que regem essas simulações são os mesmos da seção anterior, exceto pelo número de pontos da malha e pelo avanço temporal ( $dx = 1 \Rightarrow dt = 0,05$ ). O tempo da amostragem continuou a ser o tempo 21, para evitar a contaminação da solução pela reflexão das ondas espúrias na fronteira do domínio.

Comparando os gráficos das Fig. 5.15, 5.16 e 5.17, o DRP25 obteve uma curva de erro menor que FD2 e FD4, oscilando menos na região interna (entre os grandes picos). No entanto, na região logo a frente dos picos, apresentou uma forte oscilação.

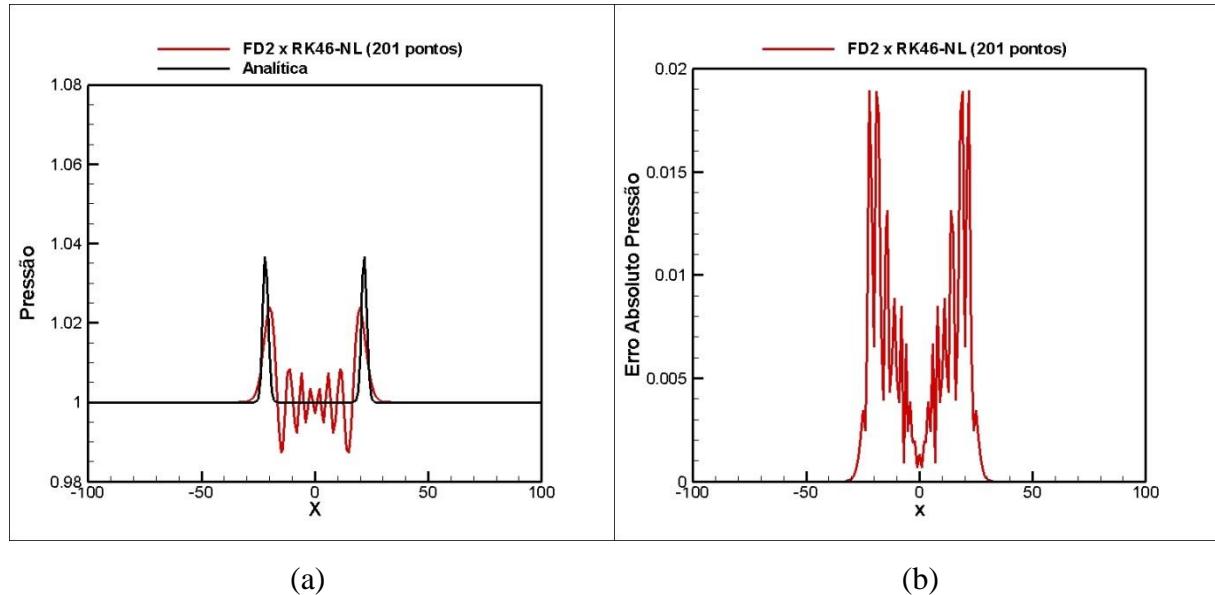


Figura 5.15 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD2 (Diferenças Finitas de 2<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

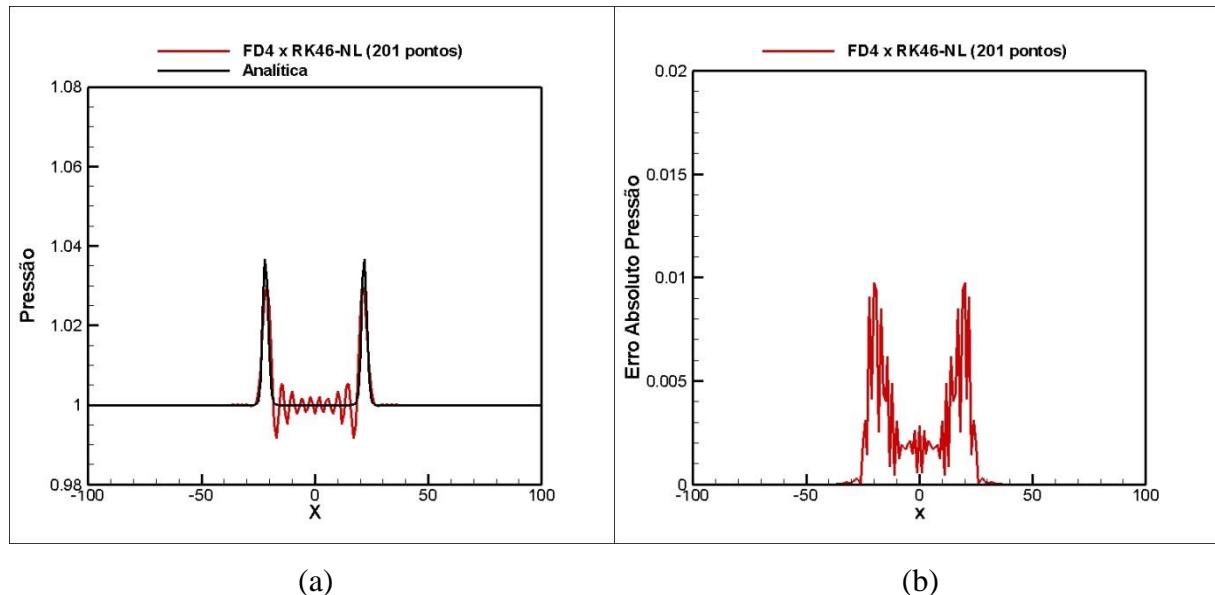
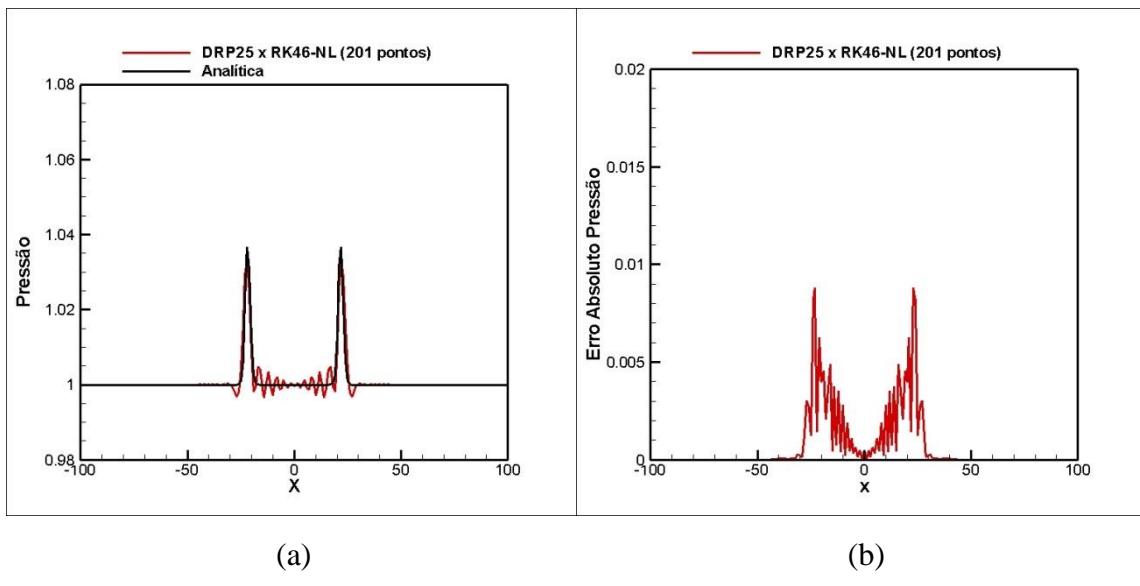


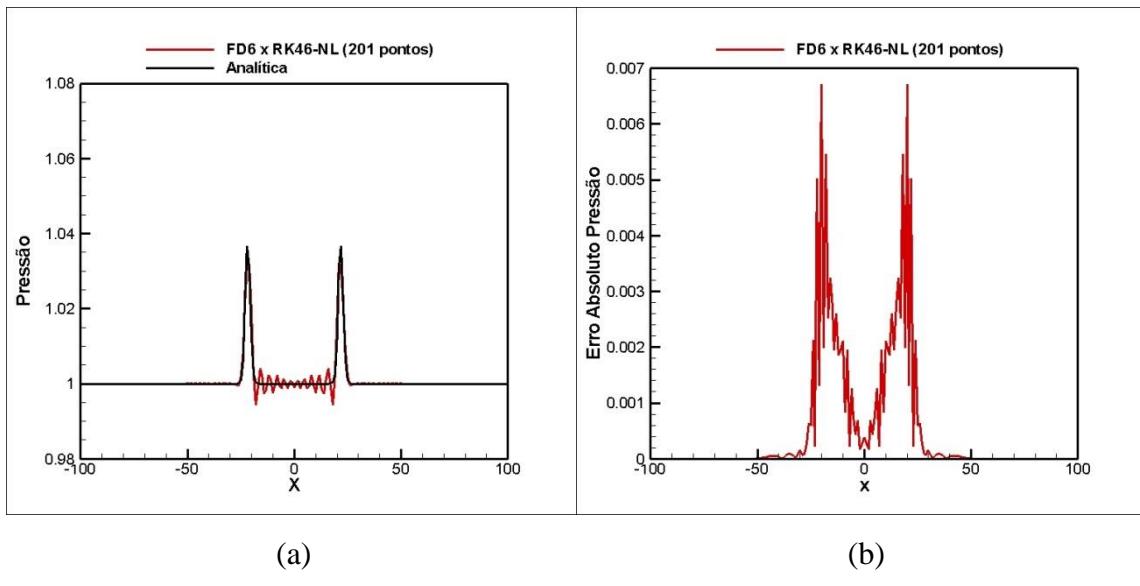
Figura 5.16 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD4 (Diferenças Finitas de 4<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.



(a)

(b)

Figura 5.17 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP25 (DRP de 2<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.



(a)

(b)

Figura 5.18 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD6 (Diferenças Finitas de 6<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

A partir do gráfico da Figura 5.18, o fundo de escala foi alterado, para uma melhor avaliação do rendimento dos esquemas de maior ordem.

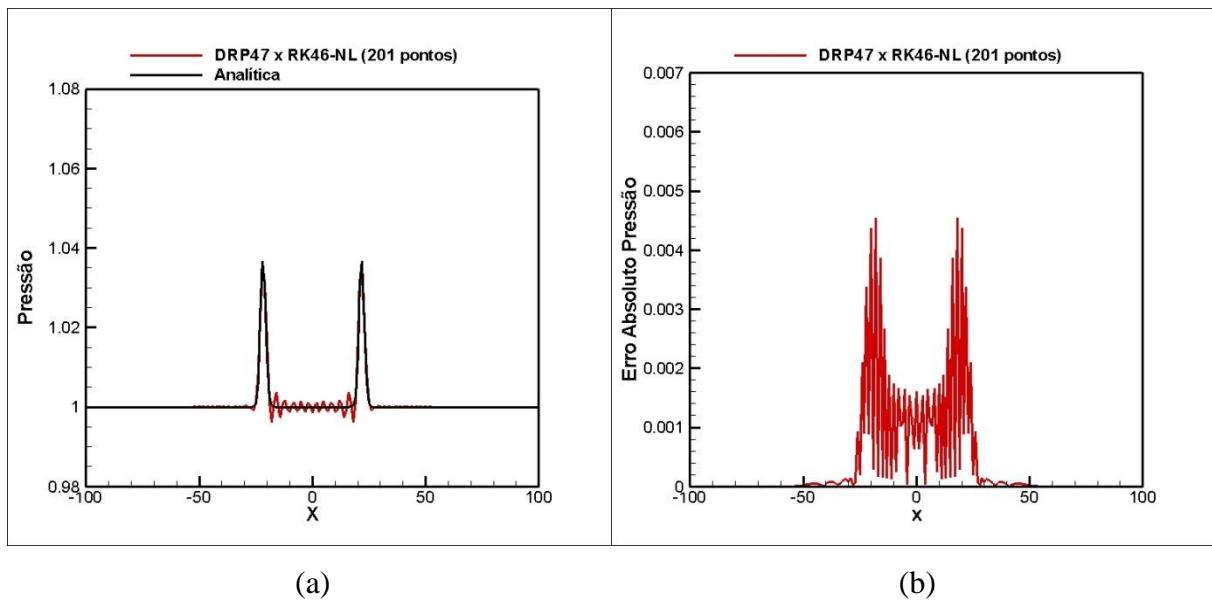


Figura 5.19 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP47 (DRP de 4<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

A forte oscilação a frente dos picos apresentada no DRP25 (Fig. 5.17) foi reduzida no DRP47 (Fig. 5.19), devido ao aumento da ordem do esquema.

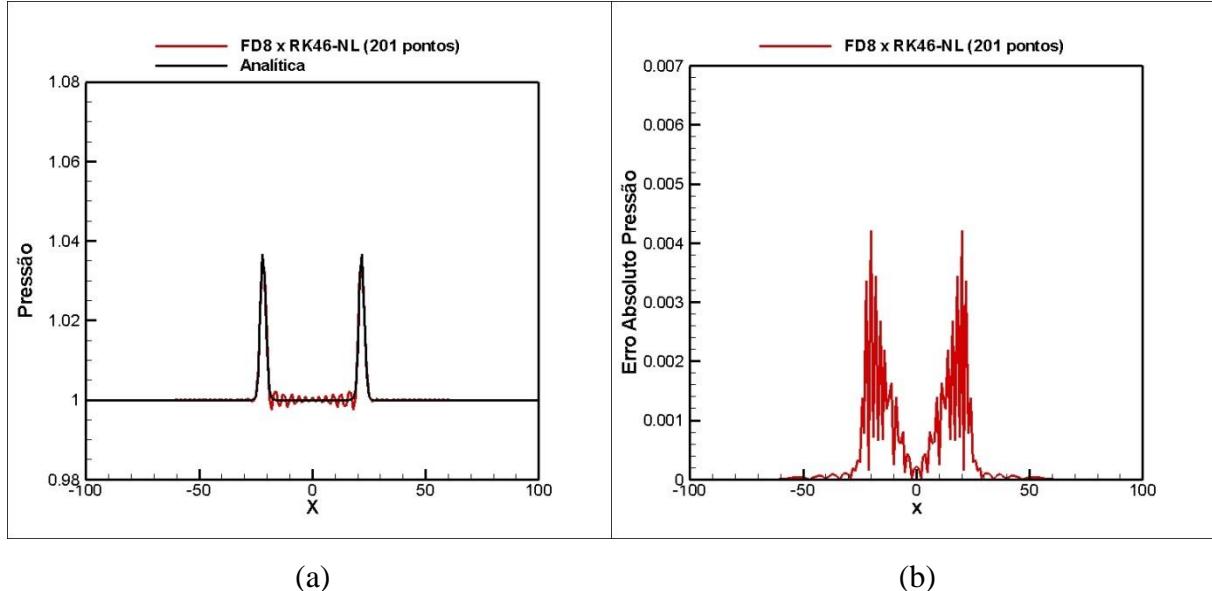
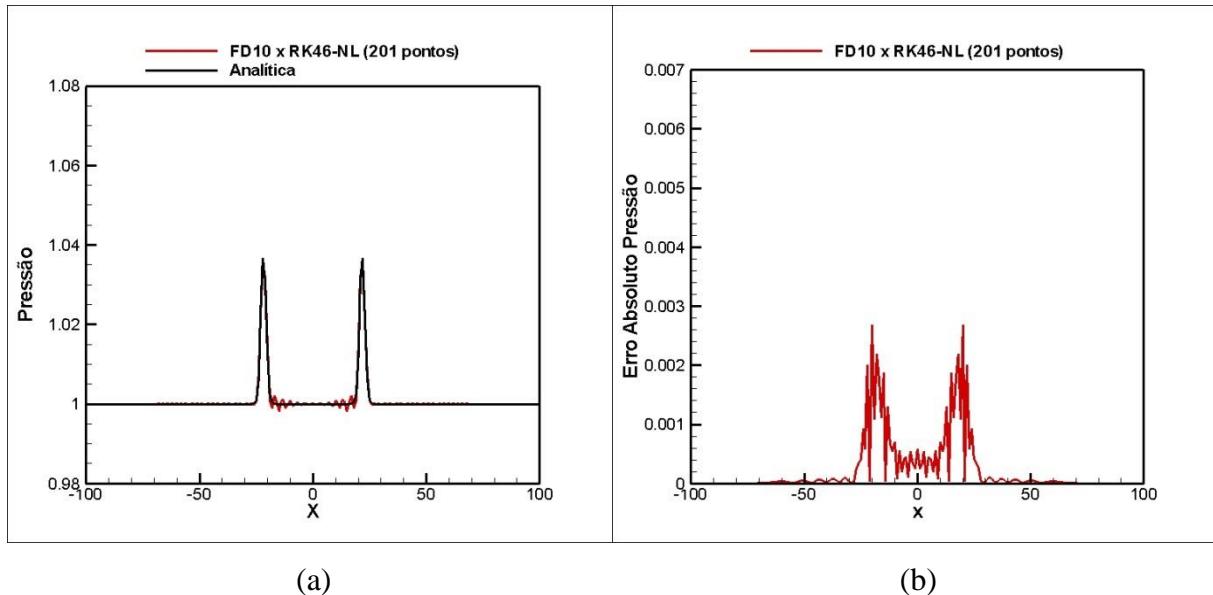


Figura 5.20 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD8 (Diferenças Finitas de 8<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

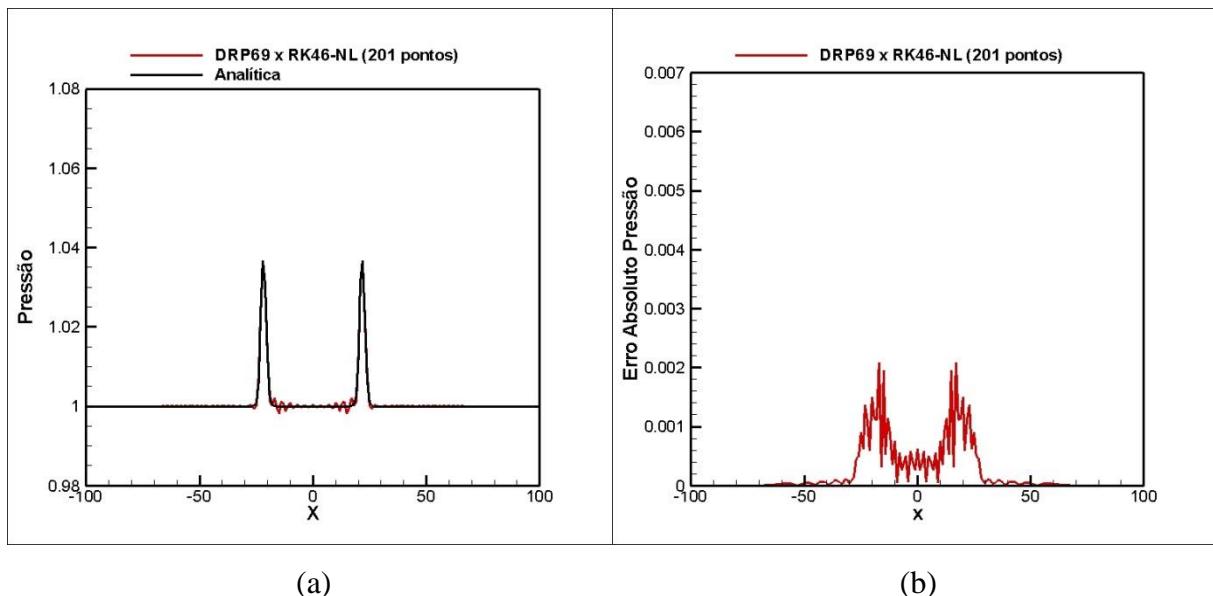
Comparando-se o DRP47 com FD4 e FD6, este obteve um desempenho superior a ambos, e quase se igualou a FD8.



(a)

(b)

Figura 5.21 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD10 (Diferenças Finitas de 10<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.



(a)

(b)

Figura 5.22 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP69 (DRP de 6<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

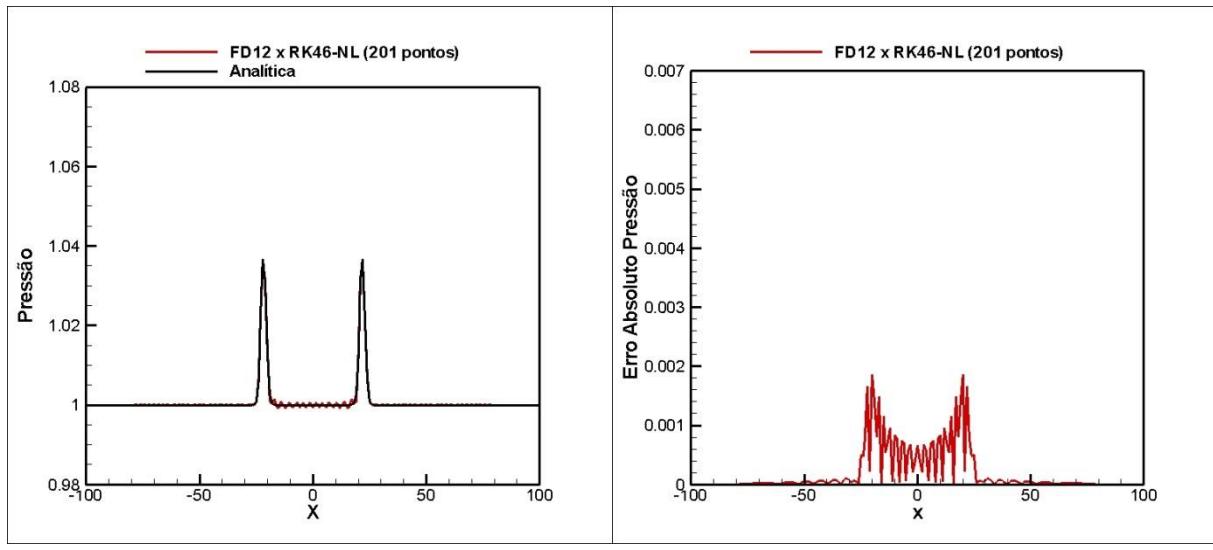


Figura 5.23 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

Como se pode observar pelas Figuras 5.20, 5.21, 5.22, e 5.23, o DRP69 obteve um desempenho superior a FD8, FD10, e quase se equipara a FD12.

O maior erro sempre se dá na região do pulso, independente do esquema utilizado.

Todos os DRPs (DRP47, DRP69, DRP25) apresentaram uma característica em comum: todos apresentam uma oscilação mais acentuada à frente dos picos, logo na base, motivo pelo qual seus erros absolutos nessas regiões são maiores que as diferenças finitas tradicionais. Observou-se que essas oscilações diminuem com o aumento da ordem do esquema.

Nas figuras a seguir, com o aumento do número de pontos na malha, foi possível observar claramente o crescimento do erro absoluto no decorrer da simulação, em todos os esquemas. Os esquemas de maior ordem apresentaram menor crescimento do erro.

As Figuras 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, e 5.28 foram construídas como na seção anterior, do tempo zero ao tempo 90,5. O domínio computacional também foi estendido de -400 a 400.

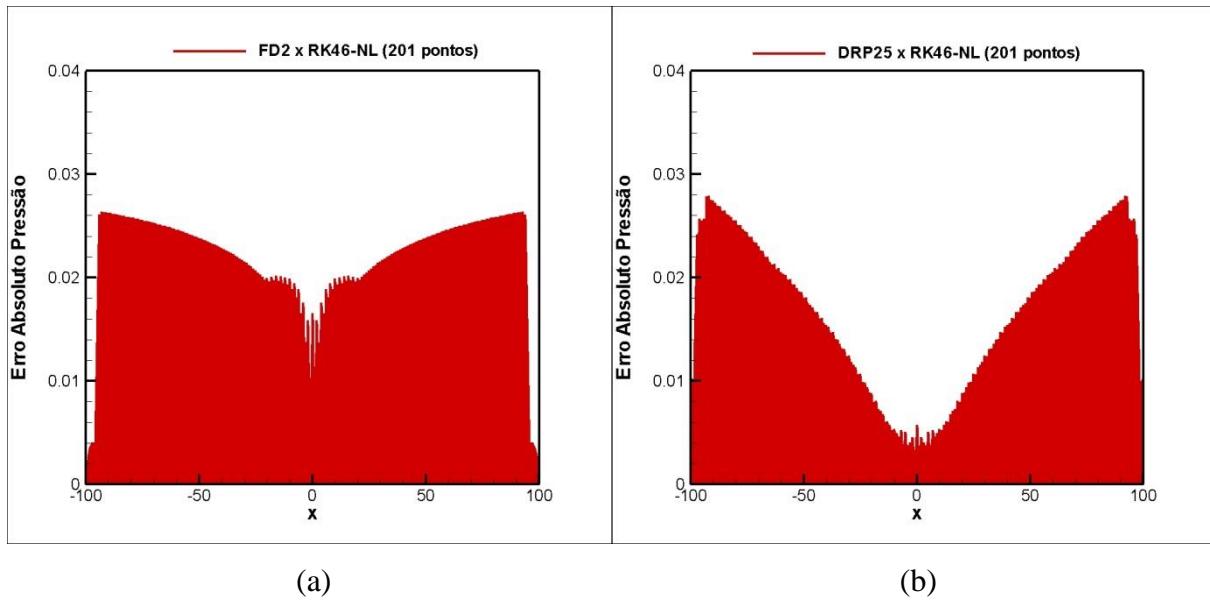


Figura 5.24 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD2 - Diferenças Finitas de 2<sup>a</sup> ordem. (b) DRP25 - DRP de 2<sup>a</sup> ordem.

Contrariamente ao que se esperava, o DRP25, embora sendo um esquema otimizado, apresentou um crescimento do erro absoluto muito mais acentuado que FD2 (Fig. 5.24).

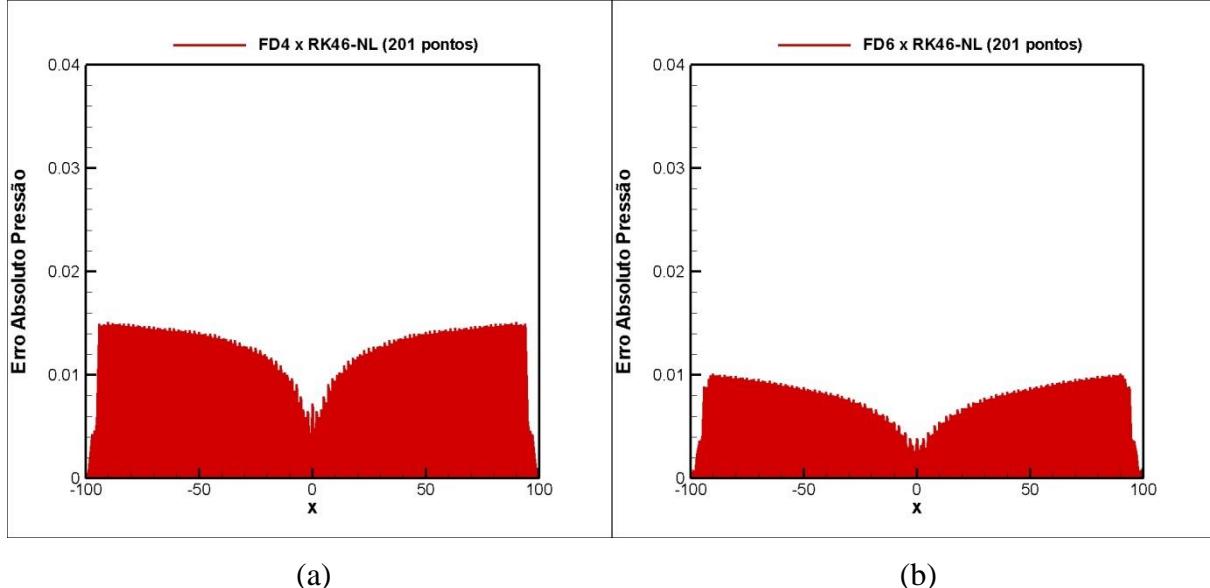


Figura 5.25 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD4 - Diferenças Finitas de 4<sup>a</sup> ordem. (b) FD6 - Diferenças Finitas de 6<sup>a</sup> ordem.

O erro máximo (região dos picos) reduziu significativamente no esquema FD4 em comparação a FD2 e DRP25. FD6 obteve um rendimento melhor que FD4 (Fig. 5.25), como era esperado.

Através da Figura 5.26 é possível observar claramente que o DRP47 apresenta um desempenho superior, quando comparado ao FD8.

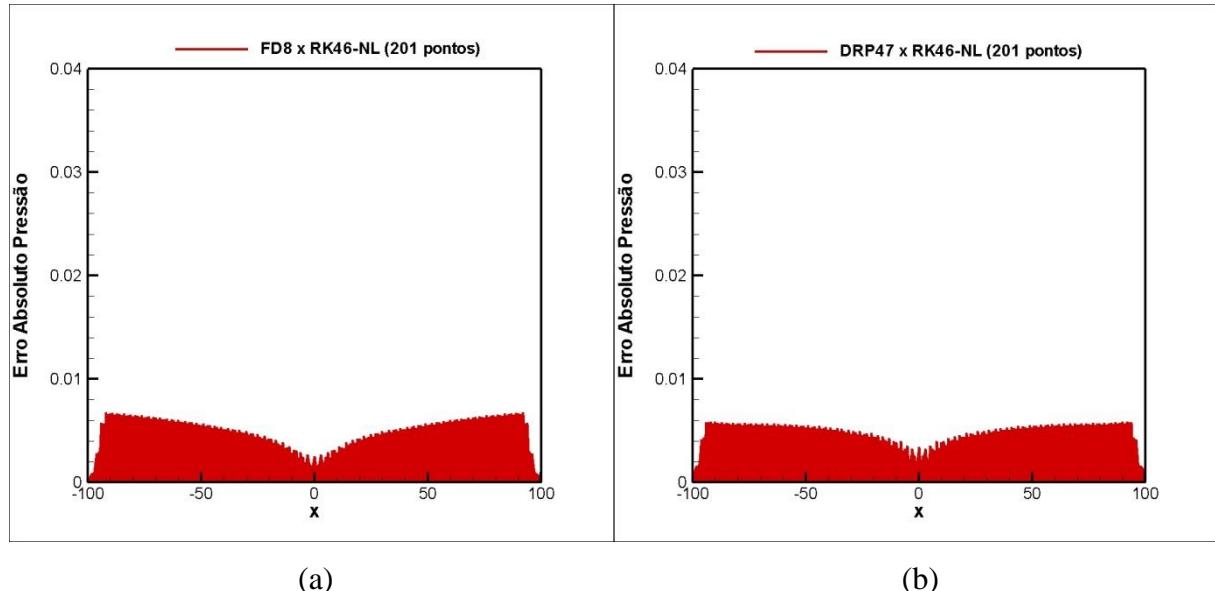


Figura 5.26 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD8 - Diferenças Finitas de 8<sup>a</sup> ordem. (B) DRP47 - DRP de 4<sup>a</sup> ordem.

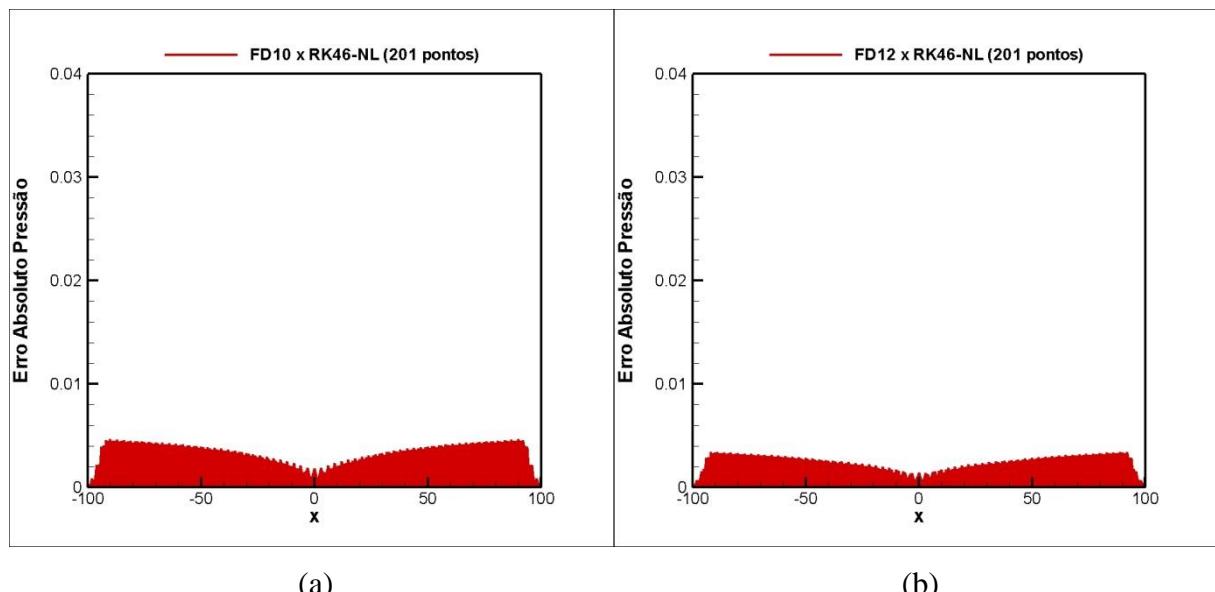


Figura 5.27 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD10 - Diferenças Finitas de 10<sup>a</sup> ordem. (b) FD12 - Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem.

Observa-se também que o crescimento do erro absoluto nessa malha de 201 pontos apresenta o comportamento assintótico (tendendo a um valor limite).

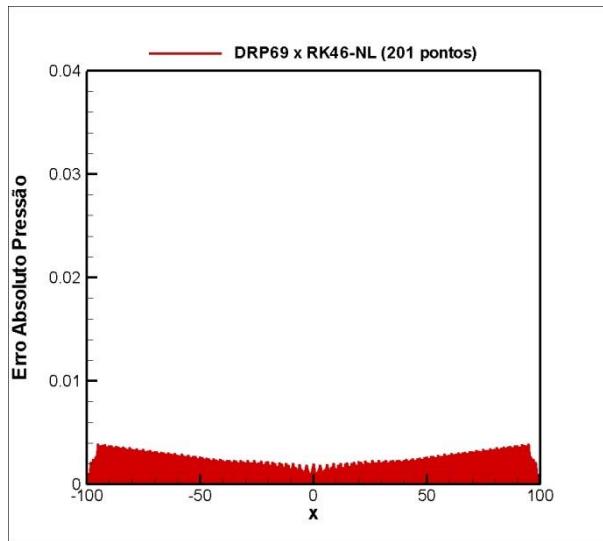


Figura 5.28 – Crescimento do erro absoluto: DRP69 – DRP de 6<sup>a</sup> ordem.

### 5.2.3. Malha Com 401 Pontos

Os parâmetros são os mesmos das duas seções anteriores, a menos da quantidade de pontos na malha. O CFL constante e igual a 0,05 reduziu o avanço temporal para  $dt = 0,025$  com a malha de 401 pontos ( $dx = 0,5$ ). Com o aumento de pontos na malha, as ondas espúrias desapareceram a jusante (frente) dos pulsos. Por esse motivo, não foi necessário limitar o tempo de simulação, de forma a evitar a reflexão das ondas espúrias na fronteira do domínio. A amostragem se deu no tempo 90,5, antes que o pulso atingisse a fronteira do domínio.

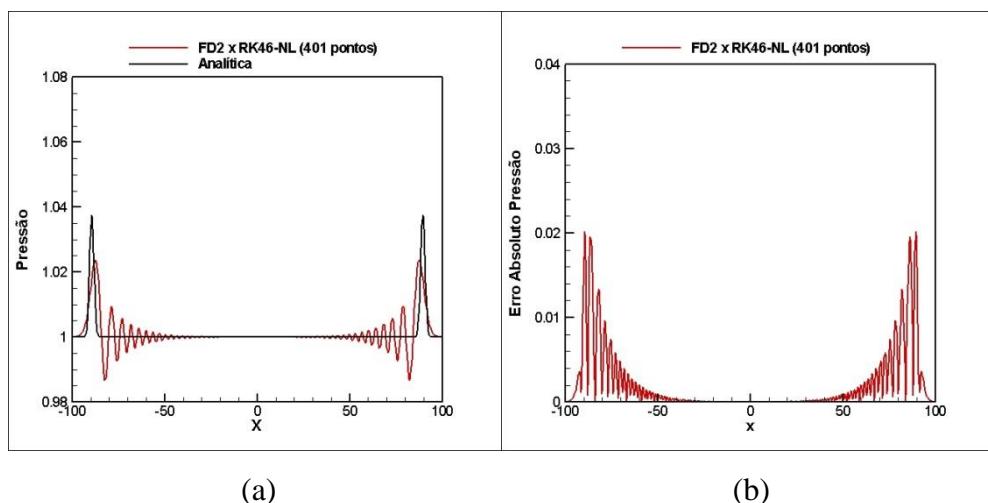


Figura 5.29 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD2 (Diferenças Finitas de 2<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

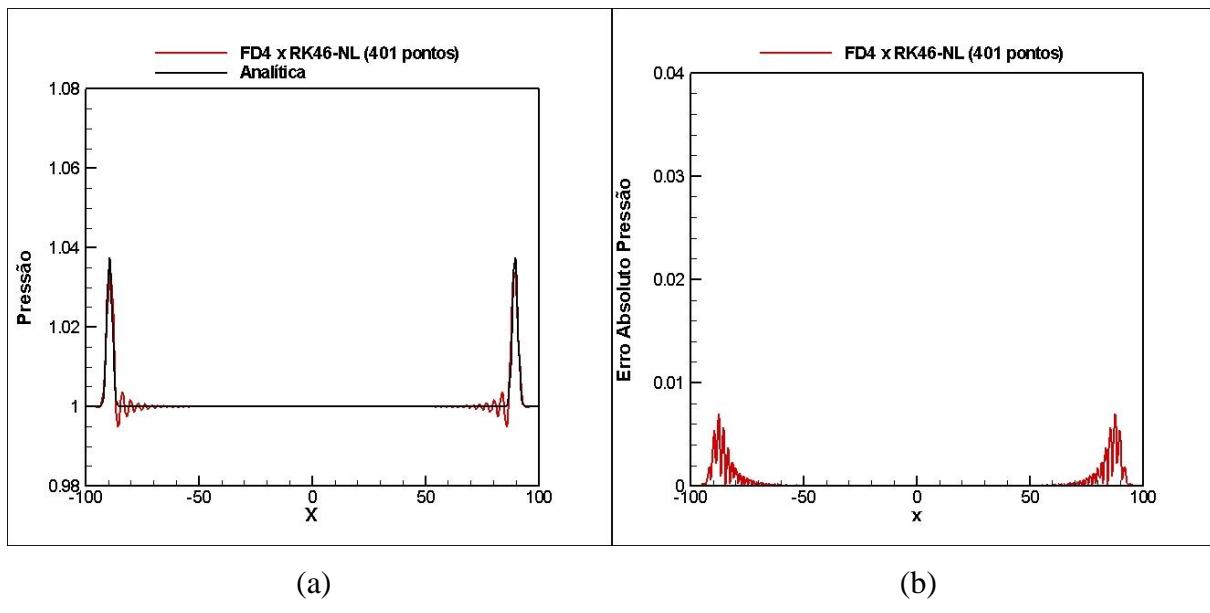


Figura 5.30 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD4 (Diferenças Finitas de 4<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

O fundo de escala do erro absoluto para a FD4 foi mantido igual ao FD2 e ao DRP25, para salientar a estabilidade do DRP25 na região entre picos, superior ao FD4. Infelizmente, o DRP25 apresentou uma forte oscilação à frente dos picos, o que prejudicou seu desempenho. Aparentemente, essa oscilação é maior com a malha de 401 pontos do que com a malha de 201 pontos (Fig. 5.31 e 5.17), mas, como o erro é acumulativo e o tempo das amostragens foi diferente, a amostragem mais tardia, corretamente mostra uma oscilação maior.

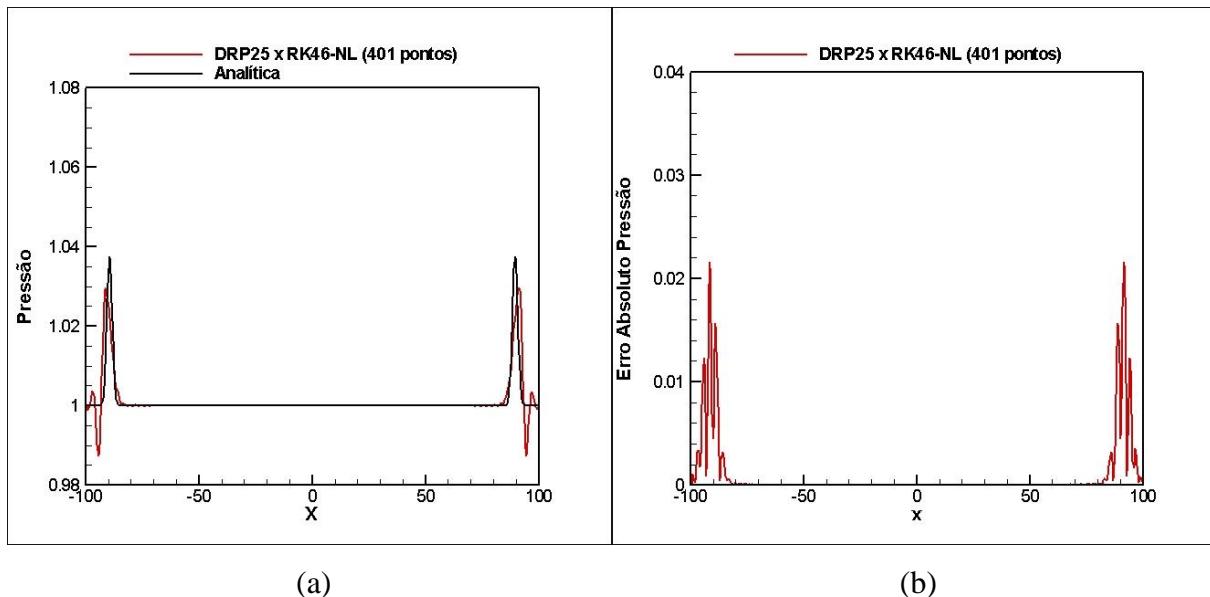


Figura 5.31 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP25 (DRP de 2<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

A maior quantidade de pontos na malha resultou em uma queda mais acentuada do erro absoluto com o aumento de ordem do esquema, exigindo contínuas mudanças no fundo de escala nos gráficos do erro.

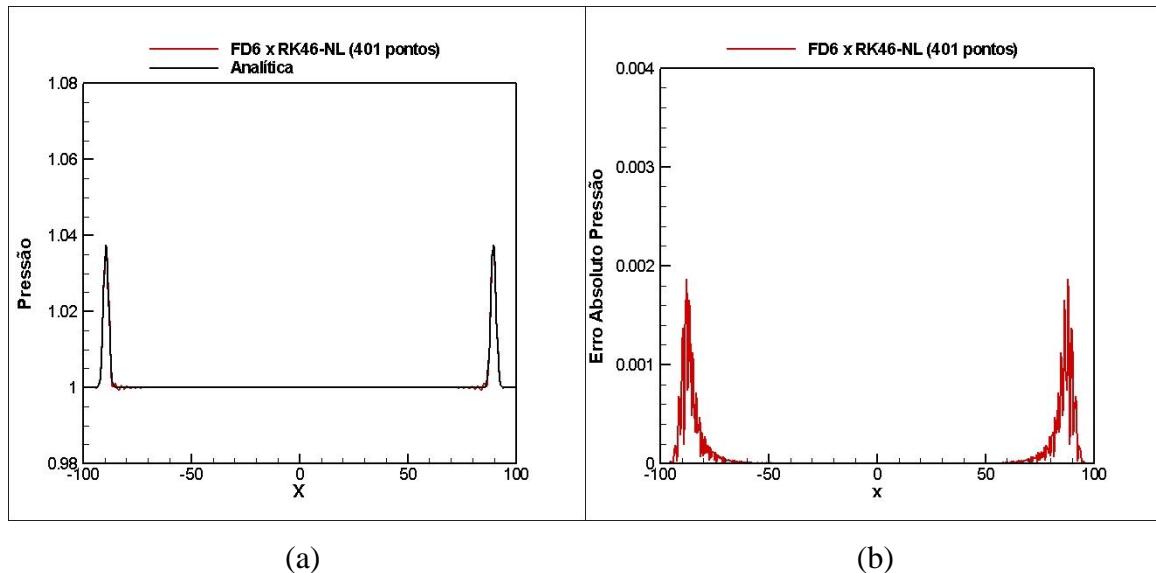


Figura 5.32 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD6 (Diferenças Finitas de 6<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

Com o aumento do número de pontos na malha, o DRP47 obteve-se um rendimento superior somente sobre as FD4 e FD6. Lembrando que na malha de 201 pontos ele chegou a se equiparar à FD8.

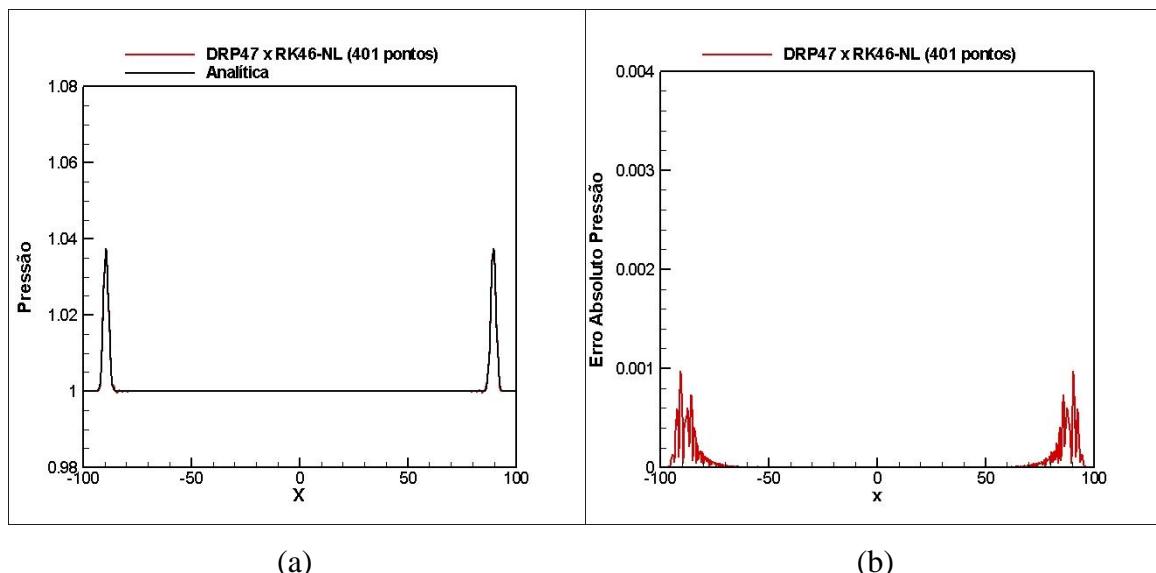


Figura 5.33 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP47 (DRP de 4<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

Na Figura 5.32, observa-se uma pequena oscilação (dispersão numérica) de FD6 na base dos picos, na região interior do gráfico. Como o DRP47 (Fig. 5.33) é otimizado para reduzir a dispersão, seu comportamento foi bem superior, mesmo sendo de ordem inferior.

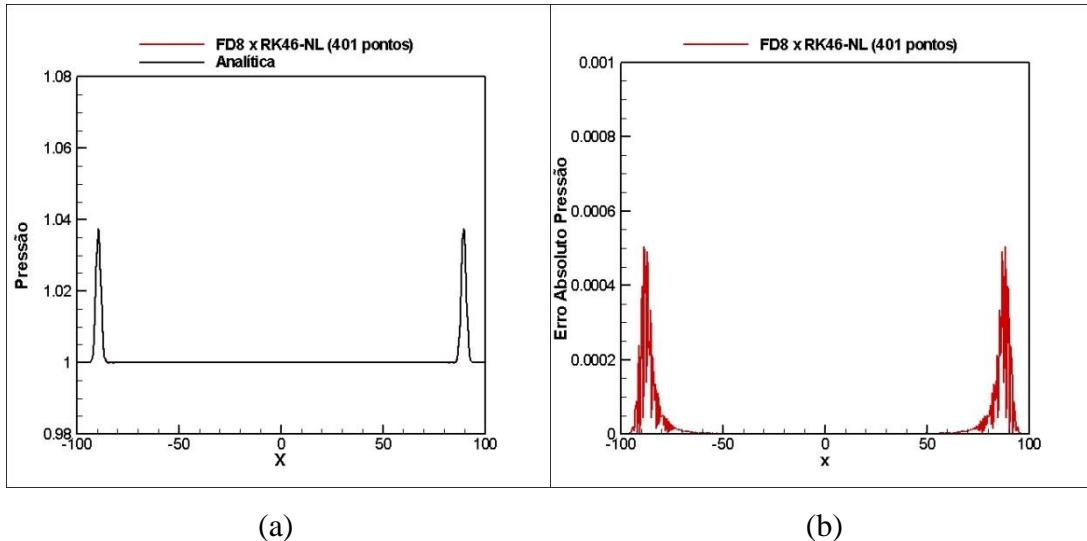


Figura 5.34 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD8 (Diferenças Finitas de 8<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

O DRP69 apresentou um desempenho superior apenas à FD6, embora tenha se aproximado de FD8. Observa-se que a quantidade de pontos na malha tem forte influência no desempenho dos DRPs, de uma forma geral. Convém lembrar que, na resolução de 201, pontos o DRP69 quase se igualou a FD12, seis ordens superiores.

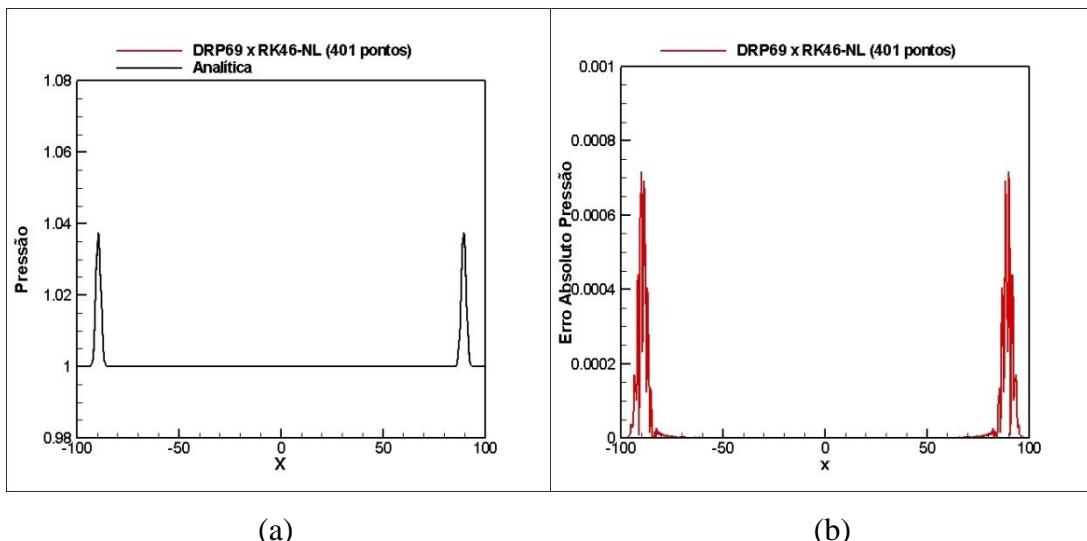


Figura 5.35 – (a) Propagação do pulso de pressão usando DRP69 (DRP de 6<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

Observando a Figura 5.36, pode-se perceber a sutil diferença entre FD8, DRP69 e a solução analítica na base do pulso. O DRP69 é mais estável na região entre picos que o FD8.

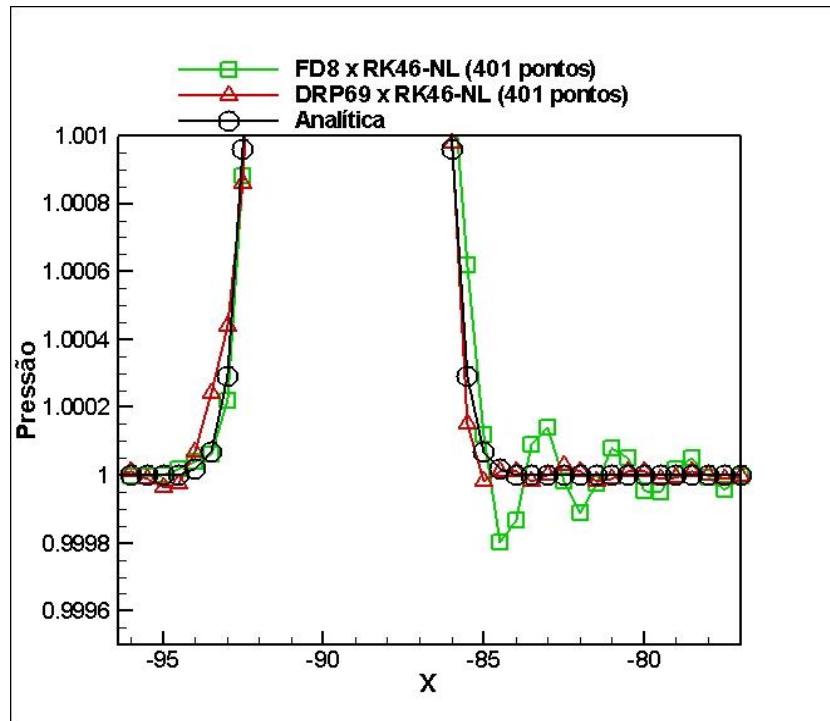


Figura 5.36 – Pressão: FD8, DRP69 e a solução analítica.

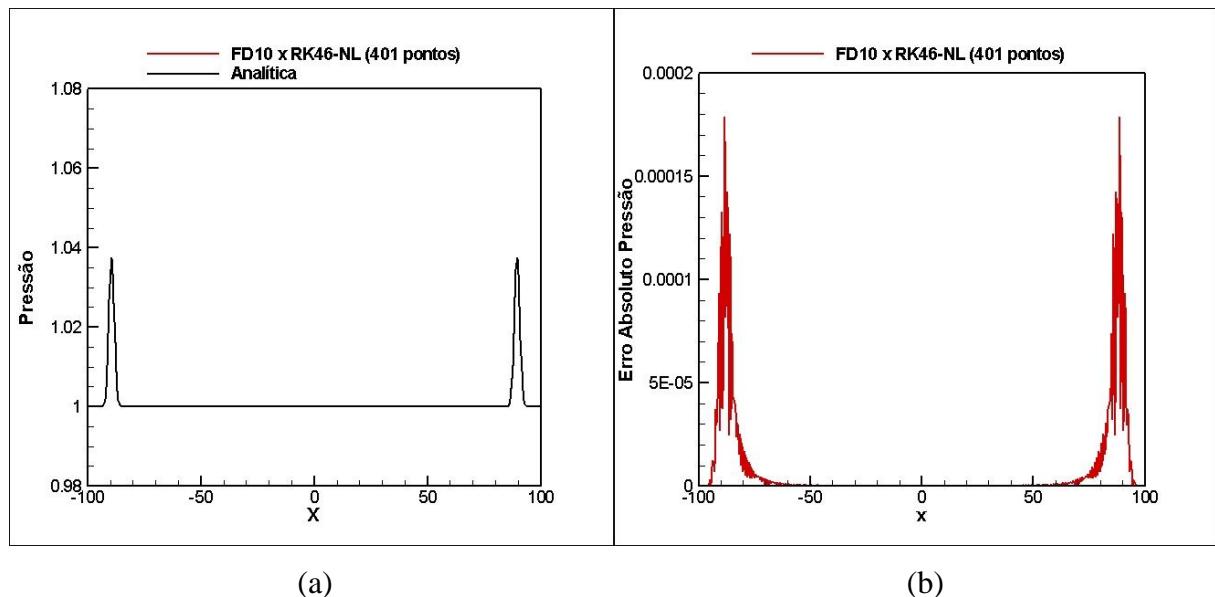


Figura 5.37 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD10 (Diferenças Finitas de 10<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

FD10 e FD12 foram os melhores esquemas (Fig. 5.37 e 5.38), sendo FD12 a mais precisa para a resolução de 401 pontos.

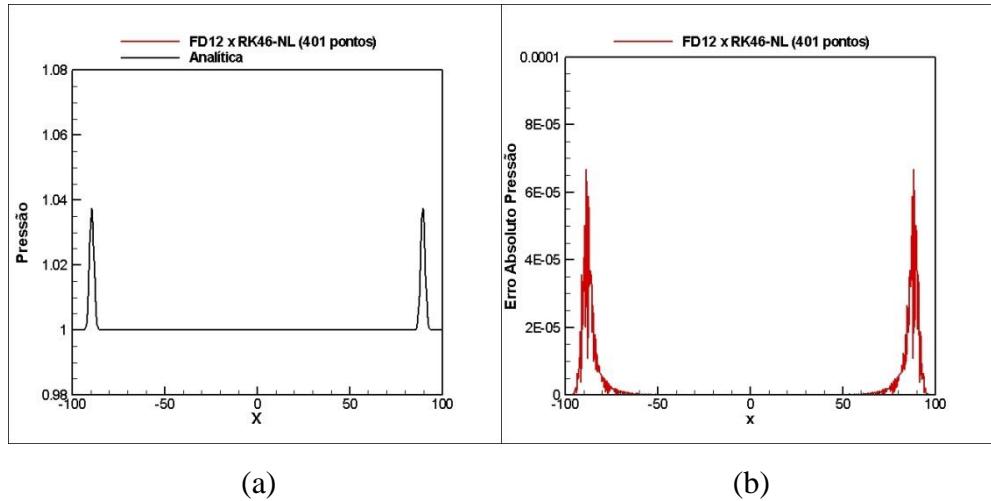


Figura 5.38 – (a) Propagação do pulso de pressão usando FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem) e RK46-NL (Runge-Kutta otimizado no espaço espectral). (b) Erro absoluto da pressão.

A simulação da propagação do pulso com a malha mais densa revelou uma queda de rendimento dos esquemas DRP em relação às FD (diferenças finitas tradicionais).

Comparando-se as Figuras 5.24, 5.25, 5.39 e 5.40, percebe-se uma relação entre o número de pontos do domínio e o crescimento do erro absoluto. O crescimento do erro apresenta um comportamento assintótico mais definido com o aumento do número de pontos do domínio.

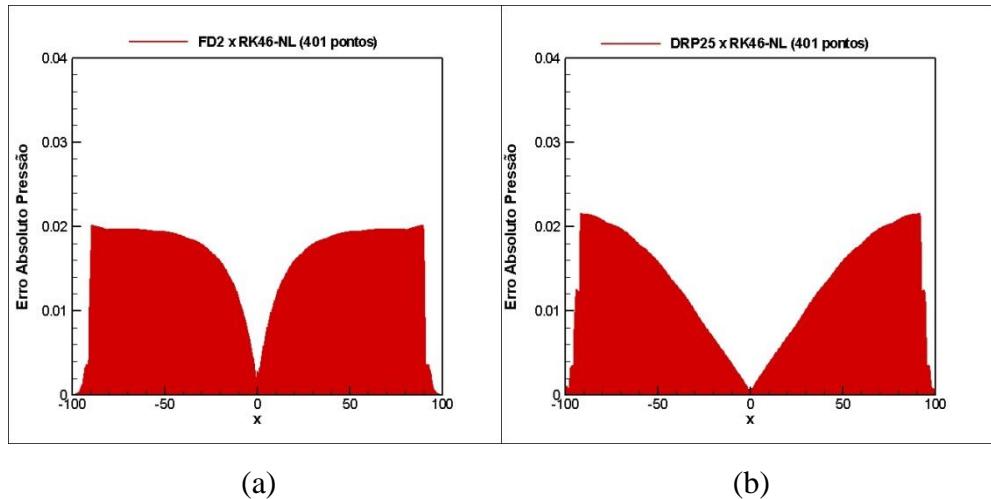


Figura 5.39 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD2 (Diferenças Finitas de 2<sup>a</sup> ordem). (b) DRP25 (DRP otimizado de 2<sup>a</sup> ordem).

A Figura 5.39 revela que o DRP25 continua a apresentar um crescimento do erro absoluto maior que a FD2 (vide Fig. 5.24).

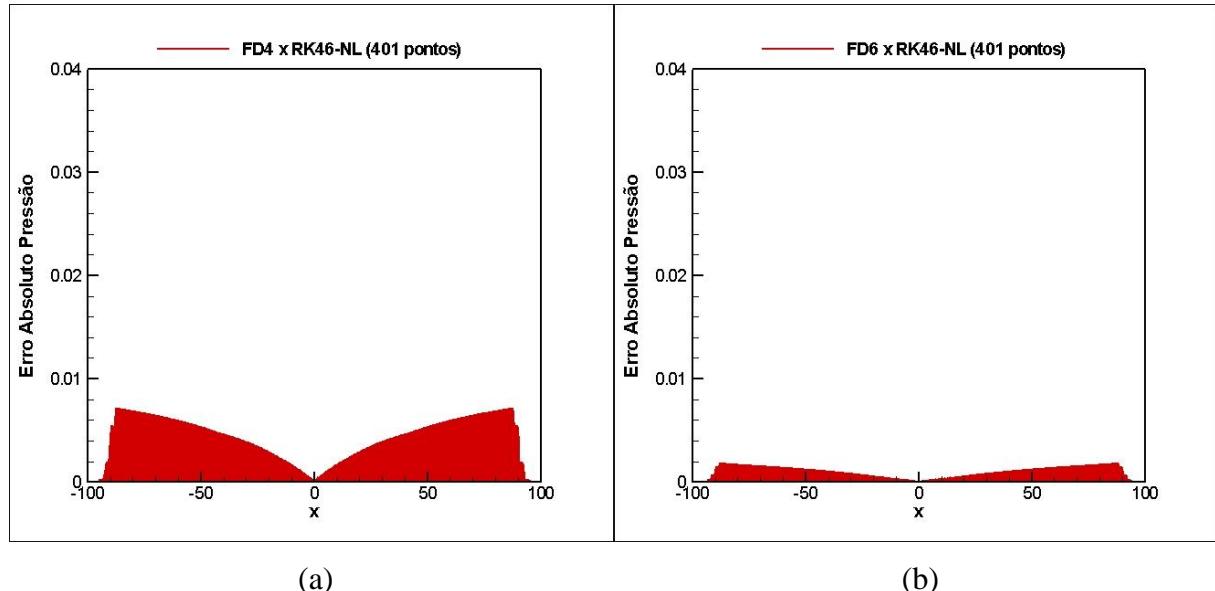


Figura 5.40 – Crescimento do erro absoluto: (a) FD4 (Diferenças Finitas de 4<sup>a</sup> ordem). (b) FD6 (Diferenças Finitas de 6<sup>a</sup> ordem).

Os gráficos de crescimento do erro absoluto mostram claramente a melhora de rendimento da FD8 sobre o DRP47 na malha de 401 pontos (Fig. 5.41), lembrando que o DRP47 apresentou um erro absoluto menor que FD8 na malha de 201 pontos (Fig. 5.26).

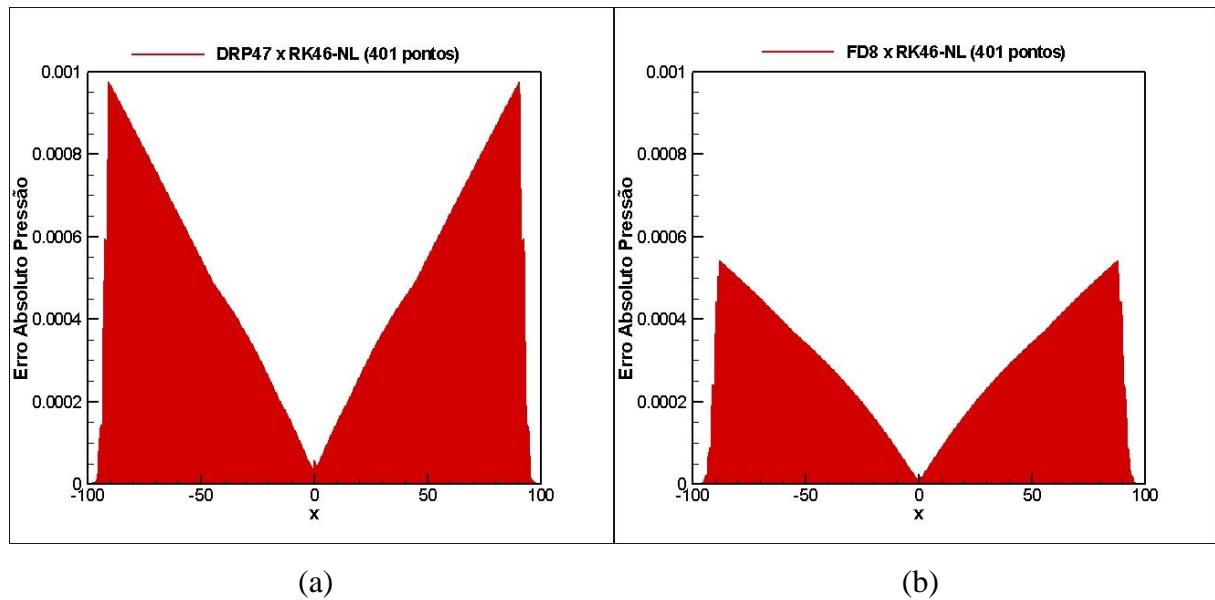


Figura 5.41 – Crescimento do erro absoluto: (a) DRP47 (DRP de 4<sup>a</sup> ordem). (b) FD8 (Diferenças Finitas de 8<sup>a</sup> ordem).

Na malha de 201 pontos FD10, FD12 e DRP69 apresentaram rendimentos muito próximos, mas dobrando a malha os rendimentos se mostraram mais distintos.

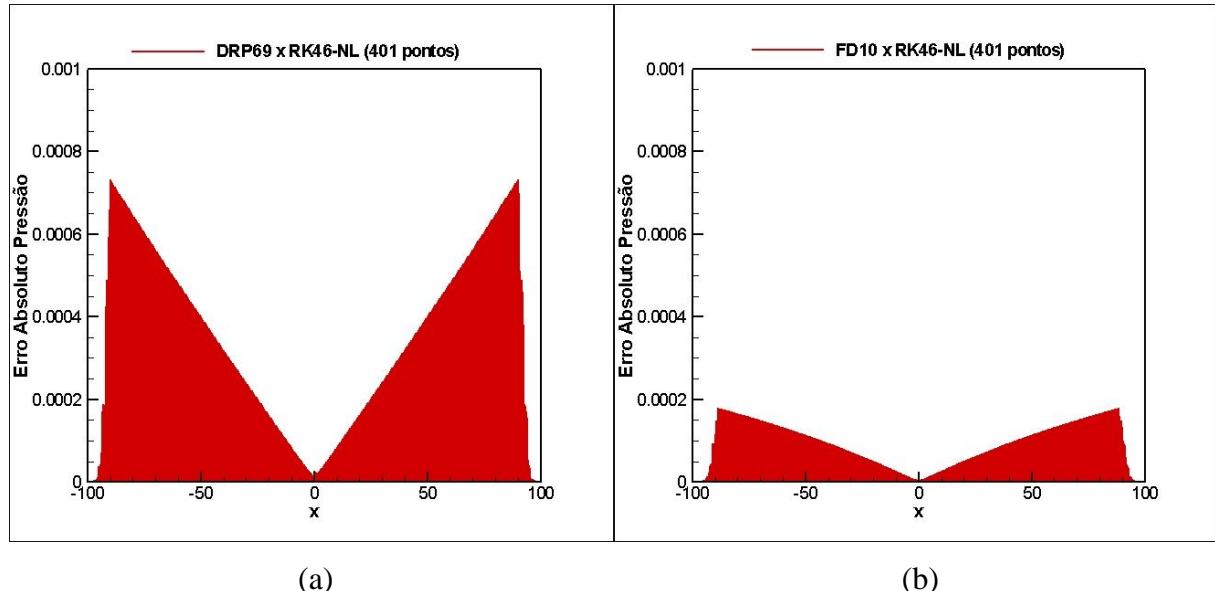


Figura 5.42 – Crescimento do erro absoluto: (a) DRP69 (Diferenças Finitas de 4<sup>a</sup> ordem). (b) FD10 (Diferenças Finitas de 10<sup>a</sup> ordem).

Comparando-se o gráfico da Fig. 5.27b com o da Fig. 5.43 percebe-se uma melhora na eficiência em torno de uma ordem de grandeza.

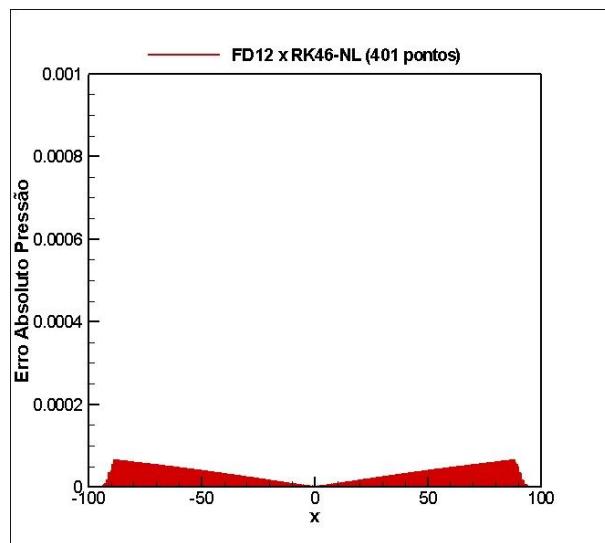


Figura 5.43 – Crescimento do erro absoluto: FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem).

### 5.3. Análise dos Esquemas Temporais

As simulações foram feitas mantendo-se fixa a solução da derivada espacial pelo esquema FD12 (esquema mais preciso) e variando-se a solução da derivada temporal utilizando os esquemas:

- EULER – Método de Euler (1<sup>a</sup> ordem),
- RK2 – Método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem,
- RK4 – Método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem,
- LDDRK – Esquema de Runge-Kutta otimizado (2<sup>a</sup> ordem para problemas não lineares e 4<sup>a</sup> ordem para problemas lineares), e
- RK46-NL – Esquema de Runge-Kutta otimizado (4<sup>a</sup> ordem para problemas lineares e não lineares).

Os parâmetros são os mesmos utilizados nas simulações da seção 1.

#### 5.3.1. Malha Com 101 Pontos

Analogamente aos gráficos da seção 5.2.1, estes também foram construídos no tempo 21 da simulação, exatamente pelos mesmos motivos dos apresentados naquela seção.

Como se pode ver nos gráficos dessa seção, o método de Euler é a pior opção de esquema de avanço temporal. A simulação diverge antes que as ondas espúrias alcancem a fronteira do domínio.

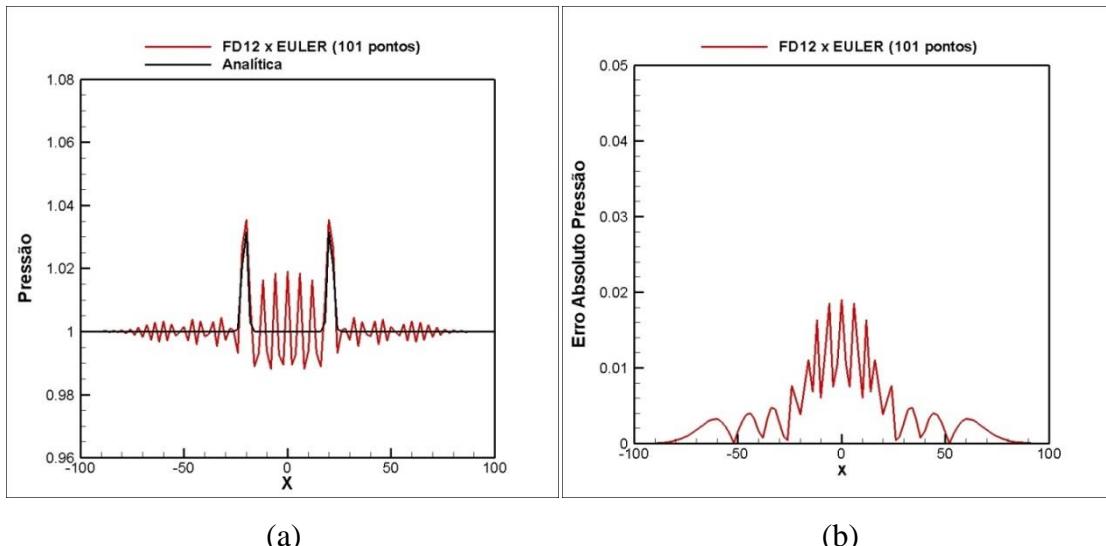


Figura 5.44 – (a) Propagação do pulso de pressão usando EULER (método de Euler de 1<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

É interessante observar nos gráficos a seguir (Fig. 5.45 e 5.46) que o método RK2, um esquema de 2<sup>a</sup> ordem, foi mais estável do que RK4, um esquema de quarta ordem.

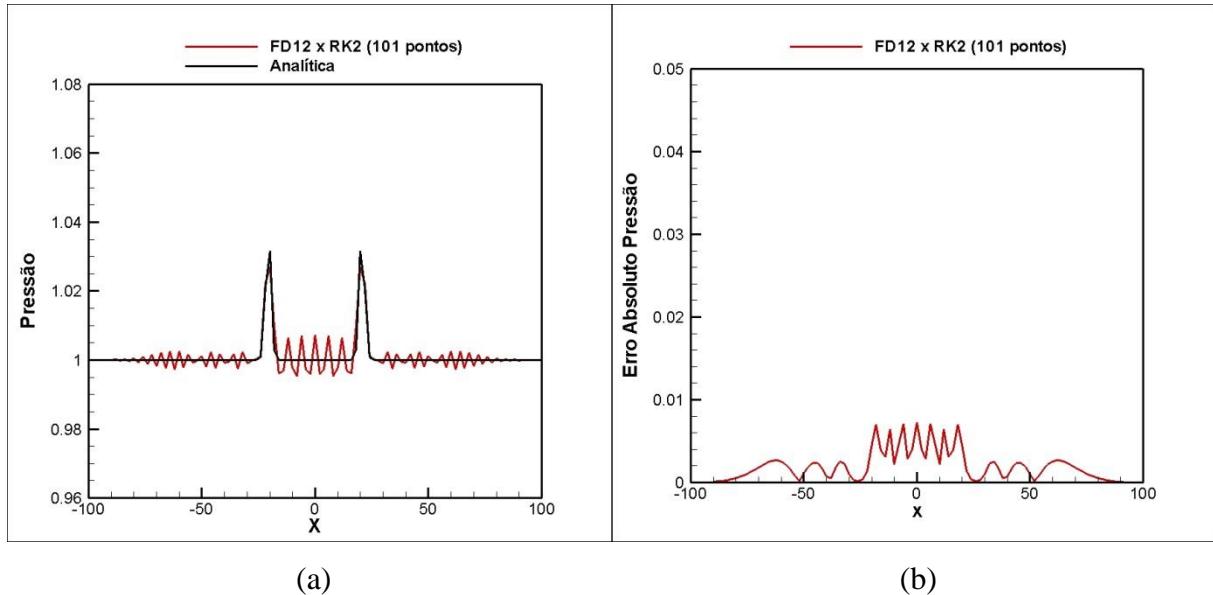


Figura 5.45 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK2 (método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

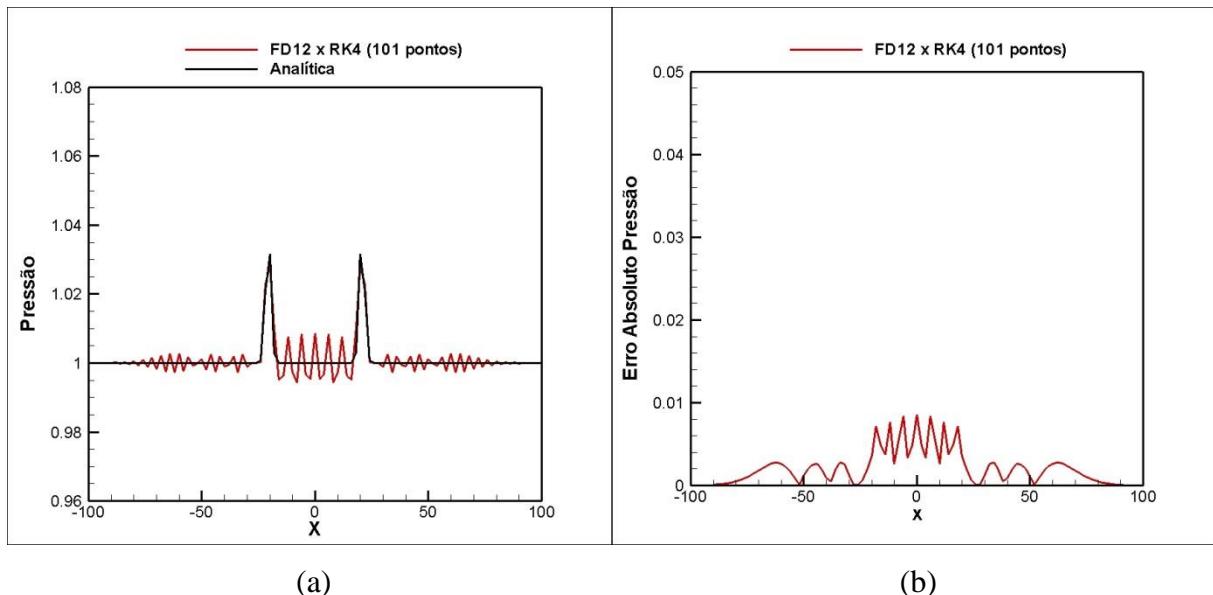


Figura 5.46 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK4 (método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

Outro fato curioso é que os esquemas otimizados mostrados nos gráficos abaixo (Fig. 5.47 e 5.48) foram tão precisos quanto o RK2, que é um método de 2<sup>a</sup> ordem.

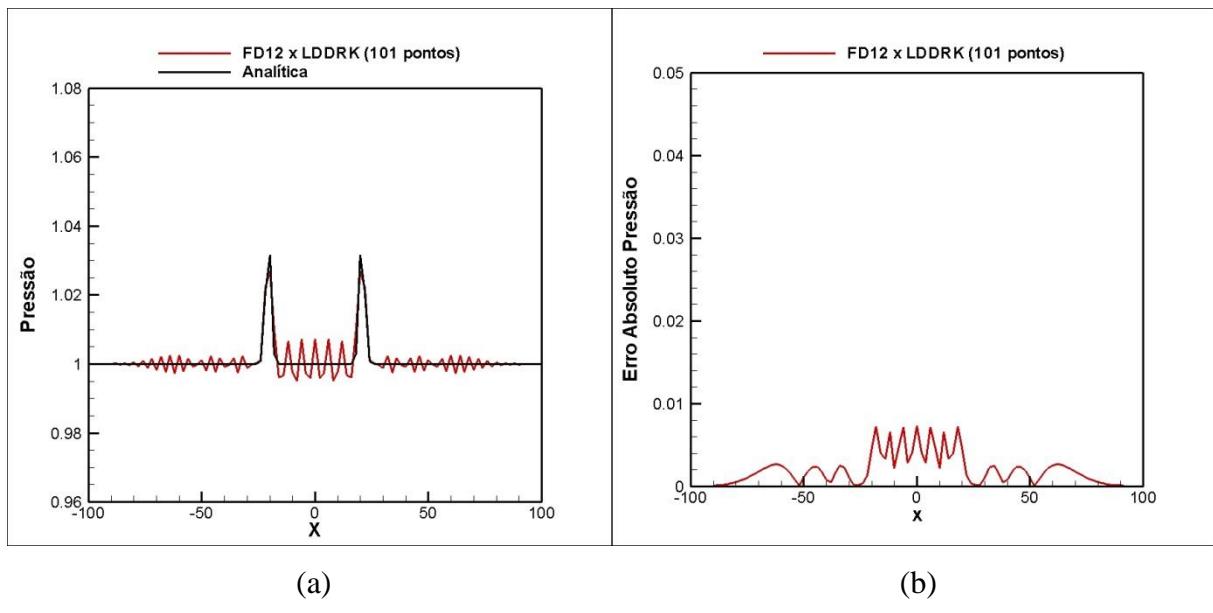


Figura 5.47 – (a) Propagação do pulso de pressão usando LDDRK (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

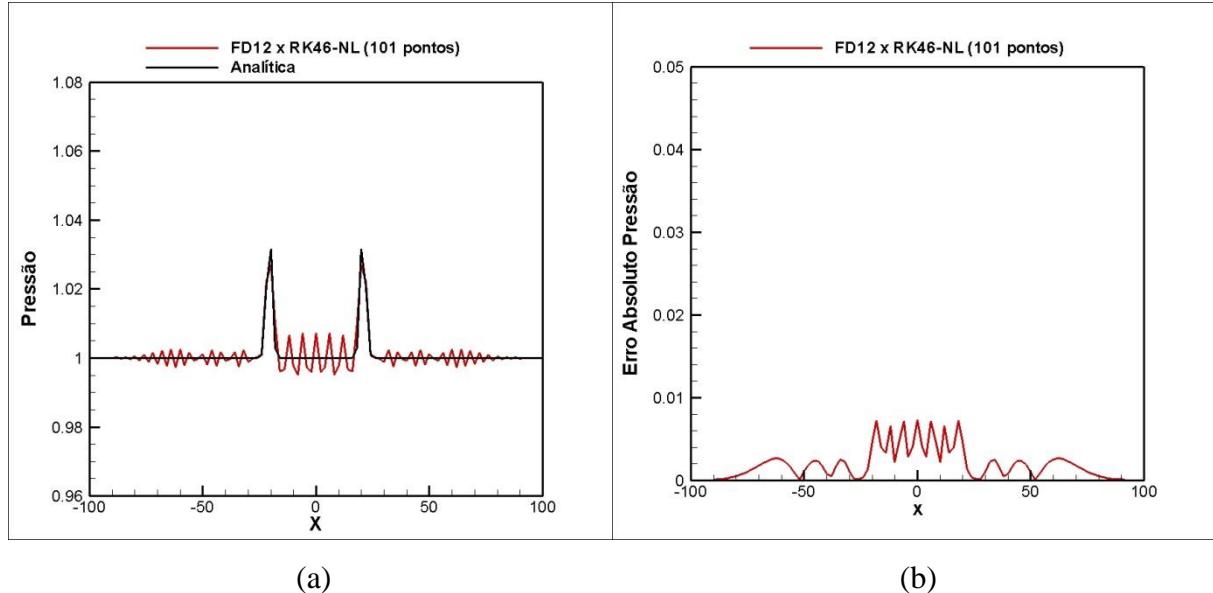


Figura 5.48 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK46-NL (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

Os gráficos de crescimento do erro absoluto a seguir foram construídos obedecendo os mesmos parâmetros da seção 5.2.1.

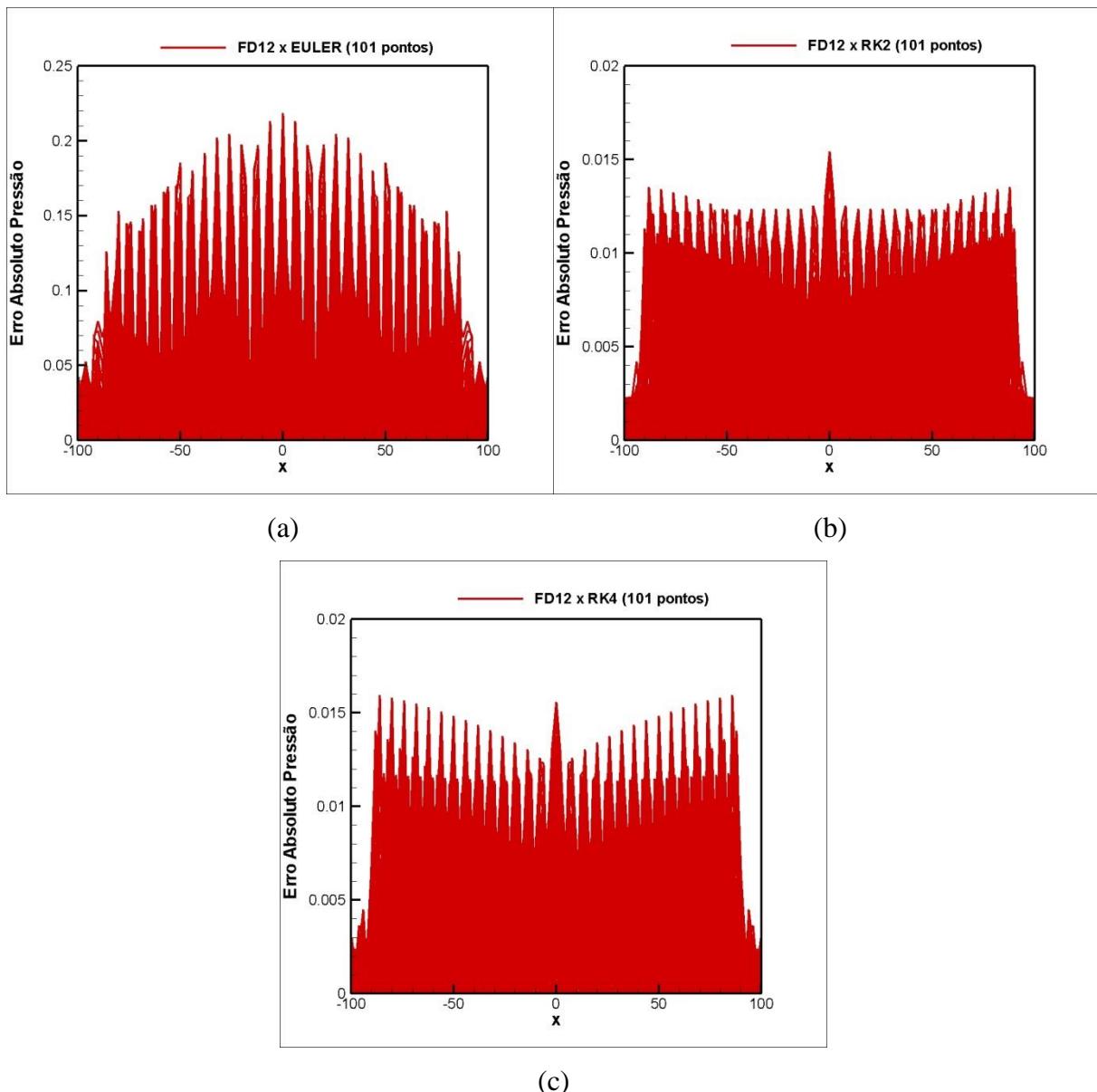


Figura 5.49 – Crescimento do erro absoluto: (a) EULER (método de Euler de 1<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) RK2 (método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (c) RK4 (método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem).

Deve-se tomar atenção para o fundo de escala da Fig. 5.49a, diferente das Fig. 5.49b e 5.49c.

De modo semelhante às observações feitas na seção 5.2.1, também aqui o erro absoluto não aumentou durante a simulação, como se pode observar nos gráficos das Fig. 5.49 e 5.50. O RK2 obteve rendimento semelhante a LDDRK e RK46-NL para a malha de 101 pontos.

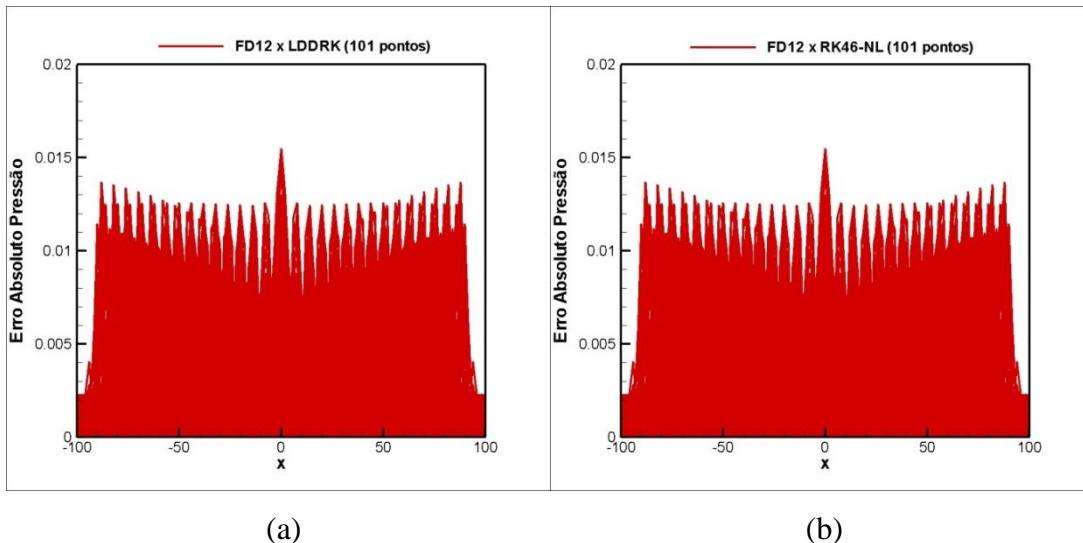


Figura 5.50 – Crescimento do erro absoluto: (a) LDDRK (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) RK46-NL (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem).

### 5.3.2. Malha Com 201 Pontos

Os parâmetros da simulação são os mesmos da seção anterior, apenas diferenciando na quantidade de pontos na malha e do tempo da simulação em que foram amostrados os dados, tempo 21. Como explicado na seção 5.2.1, a escolha desse tempo buscou evitar que as ondas espúrias alcançassem a fronteira e se refletissem para dentro do domínio, contaminando a solução.

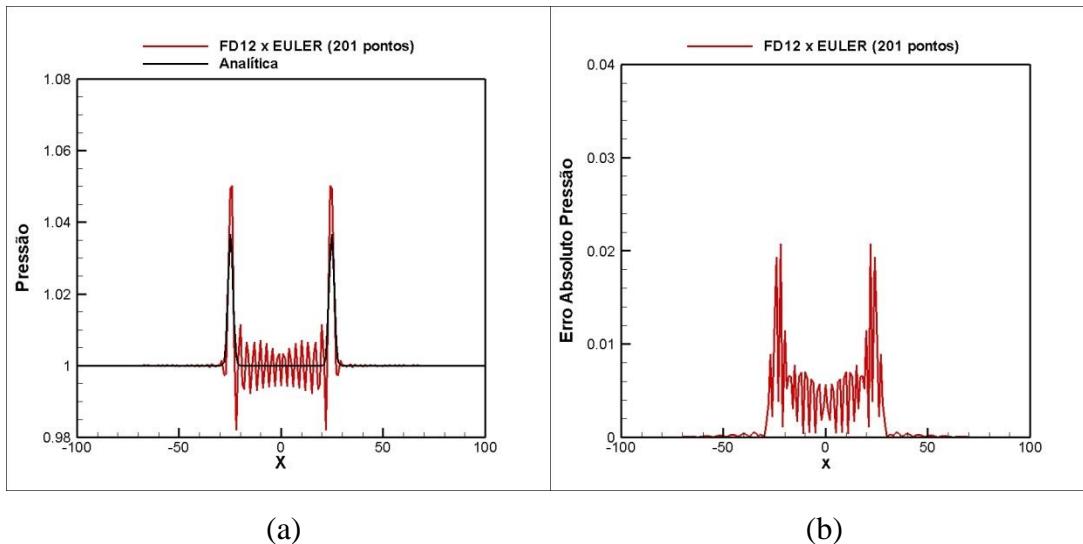


Figura 5.51 – (a) Propagação do pulso de pressão usando EULER (método de Euler de 1<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

Embora nesse instante da simulação a combinação FD12 x EULER pareça comportada, com o avanço do tempo ela divergiu, antes mesmo que as ondas espúrias se refletissem na fronteira do domínio.

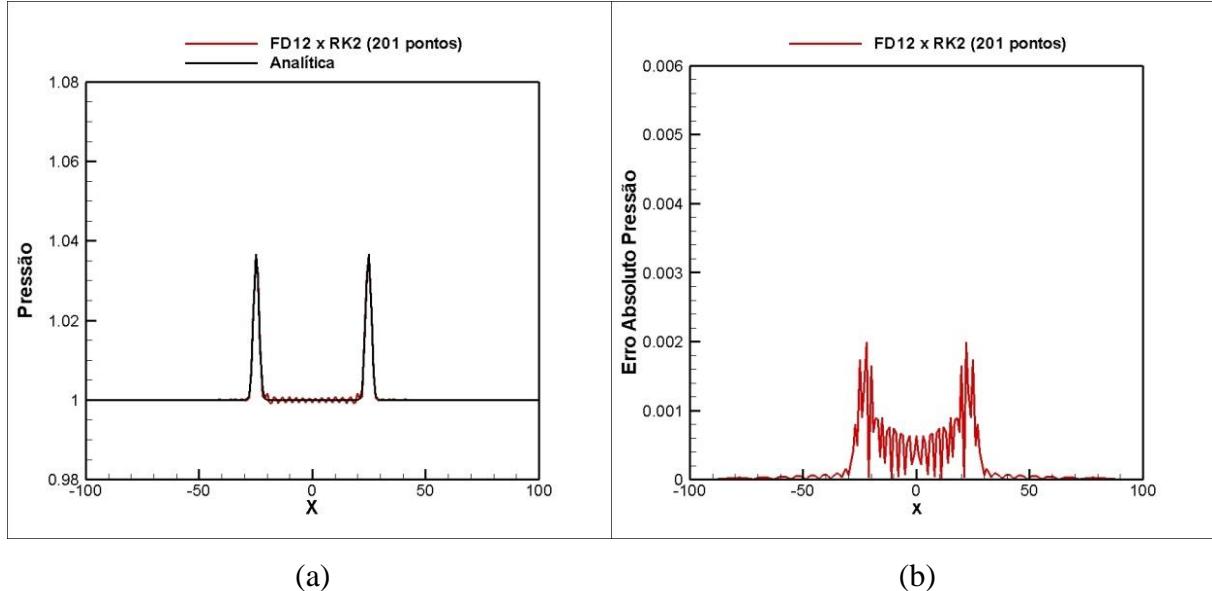


Figura 5.52 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK2 (método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

É interessante observar que RK2 novamente obteve um erro menor que RK4.

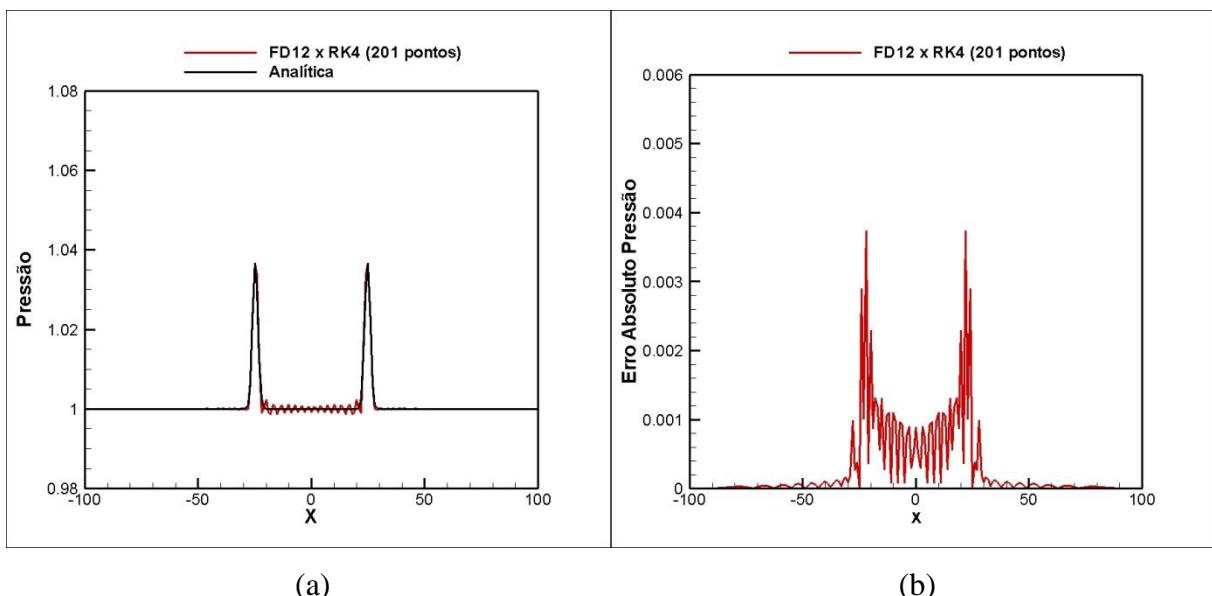


Figura 5.53 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK4 (método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

LDDRK e RK46-NL (Fig. 5.54 e 5.55) apresentam o mesmo erro, porém ligeiramente maiores que o erro produzido utilizando RK2 (Fig. 5.52).

O aumento do número de pontos na malha produziu não somente a redução no tamanho dos comprimentos de onda das ondas espúrias, mas também uma expressiva redução em suas amplitudes, especialmente as ondas externas aos picos.

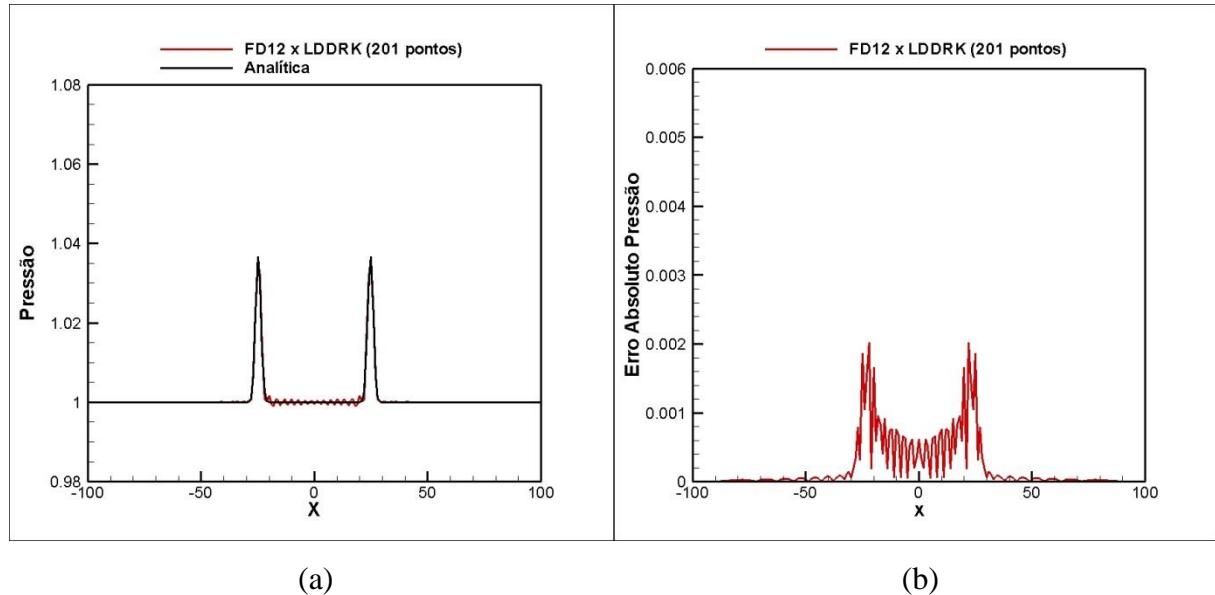


Figura 5.54 – (a) Propagação do pulso de pressão usando LDDRK (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

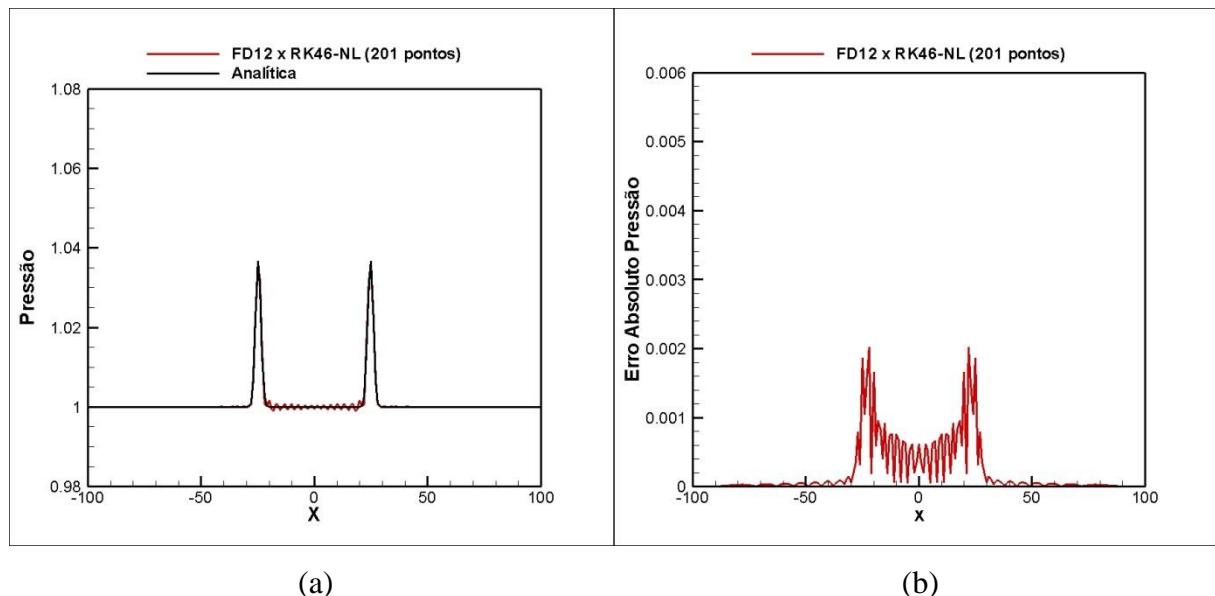


Figura 5.55 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK46-NL (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

Comparando-se os gráficos de crescimento do erro absoluto de LDDRK, RK46-NL, e RK2, esse último apresentou o menor erro e a menor velocidade de crescimento de erro (menor inclinação da reta tangente).

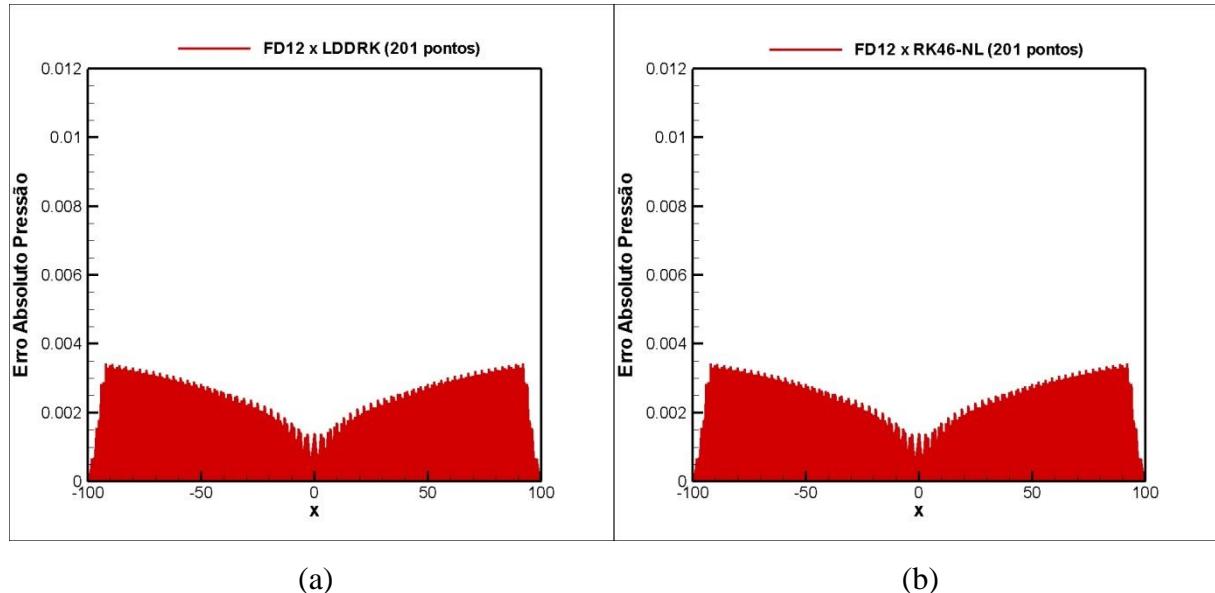


Figura 5.56 – Crescimento do erro absoluto: (a) LDDRK (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) RK46-NL (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem).

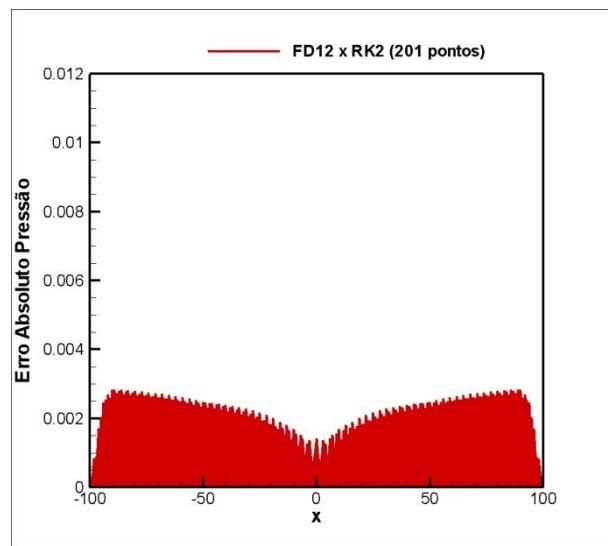


Figura 5.57 – Crescimento do erro absoluto: RK2 (método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem).

Na malha de 201 pontos foi possível, pelos gráficos de crescimento do erro absoluto, visualizar o erro se acumulando a cada instante da simulação.

### 5.3.3. Malha Com 401 Pontos

Os parâmetros são os mesmos da seção anterior, exceto pela quantidade de pontos, que aumentou, e pelo tempo da amostra (tempo 90,5), que, devido à alta densidade da malha, inibiu fortemente a formação de ondas espúrias.

O método de Euler não conseguiu convergir, nem mesmo com uma malha de 401 pontos.

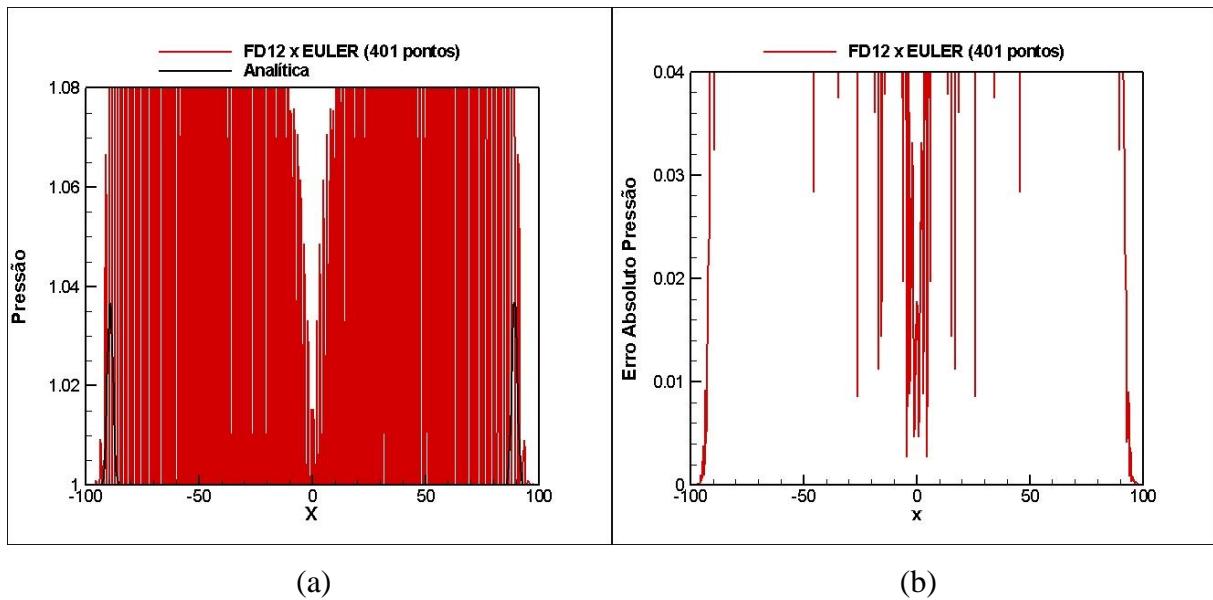


Figura 5.58 – (a) Propagação do pulso de pressão usando EULER (método de Euler de 1<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

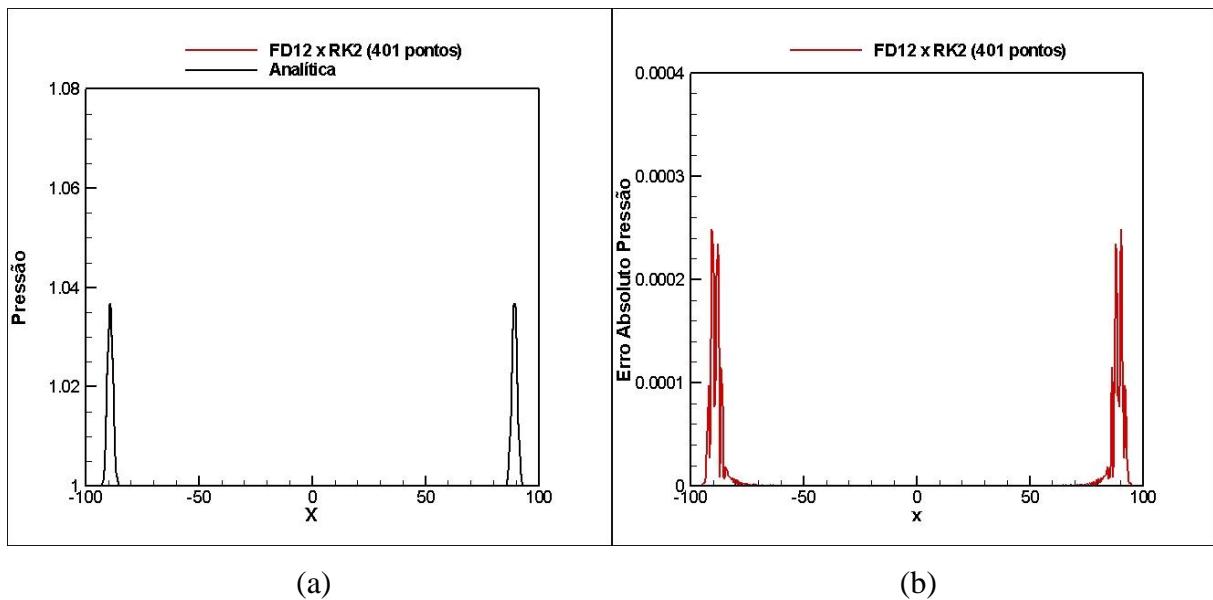


Figura 5.59 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK2 (método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

A malha de 401 pontos permite visualizar claramente a eficiência de RK2 sobre RK4. RK4 foi mais suscetível ao acúmulo do erro, visualizado pelo crescimento do pico o pulso de pressão.

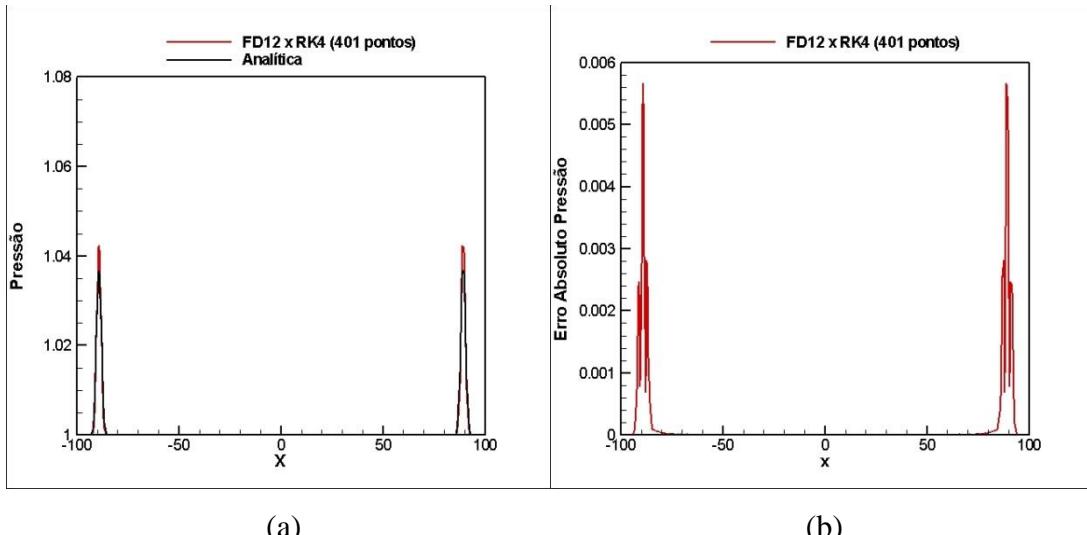


Figura 5.60 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK4 (método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.

Como aconteceu na seção 5.2.3, também aqui a malha de 401 pontos permitiu distinguir claramente a qualidade dos esquemas temporais otimizadas.

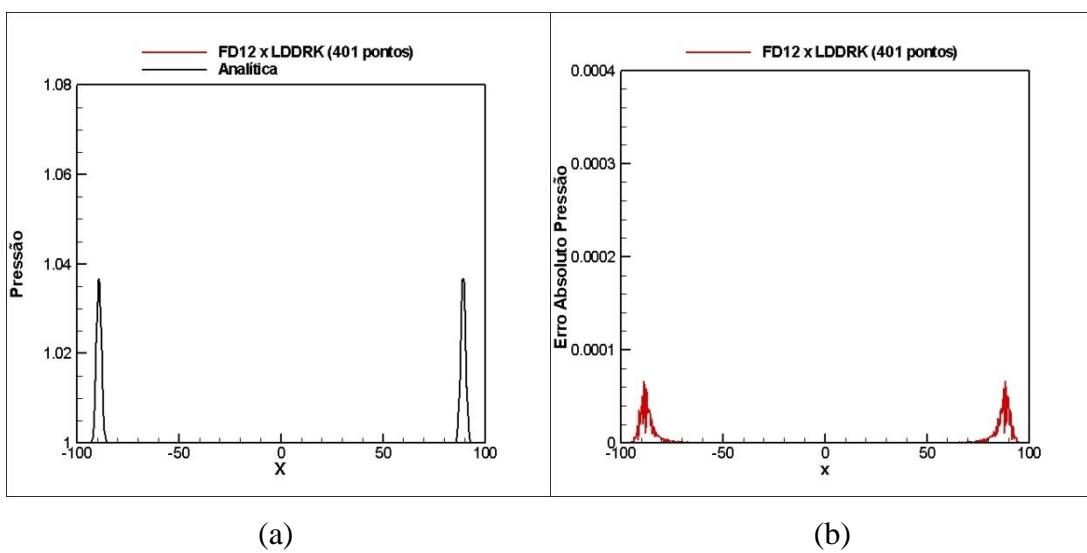
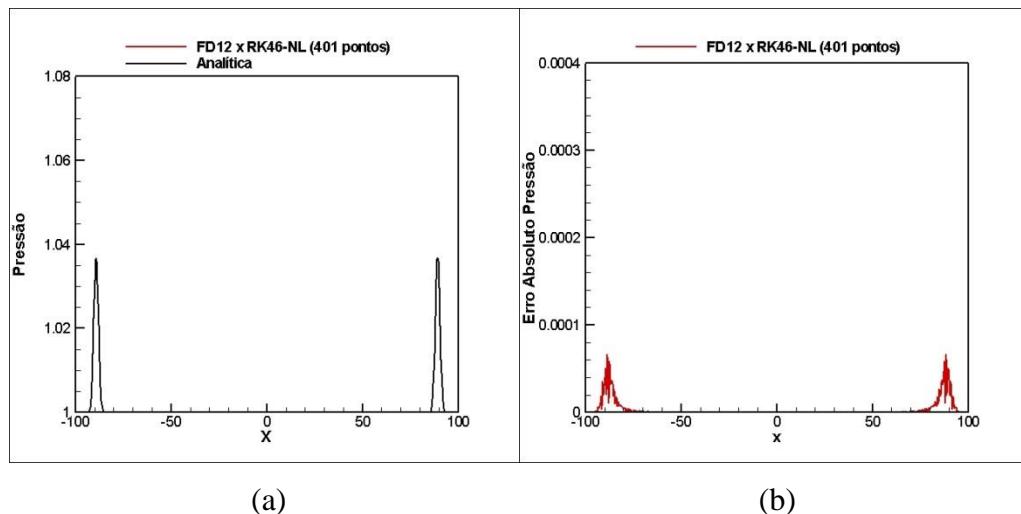


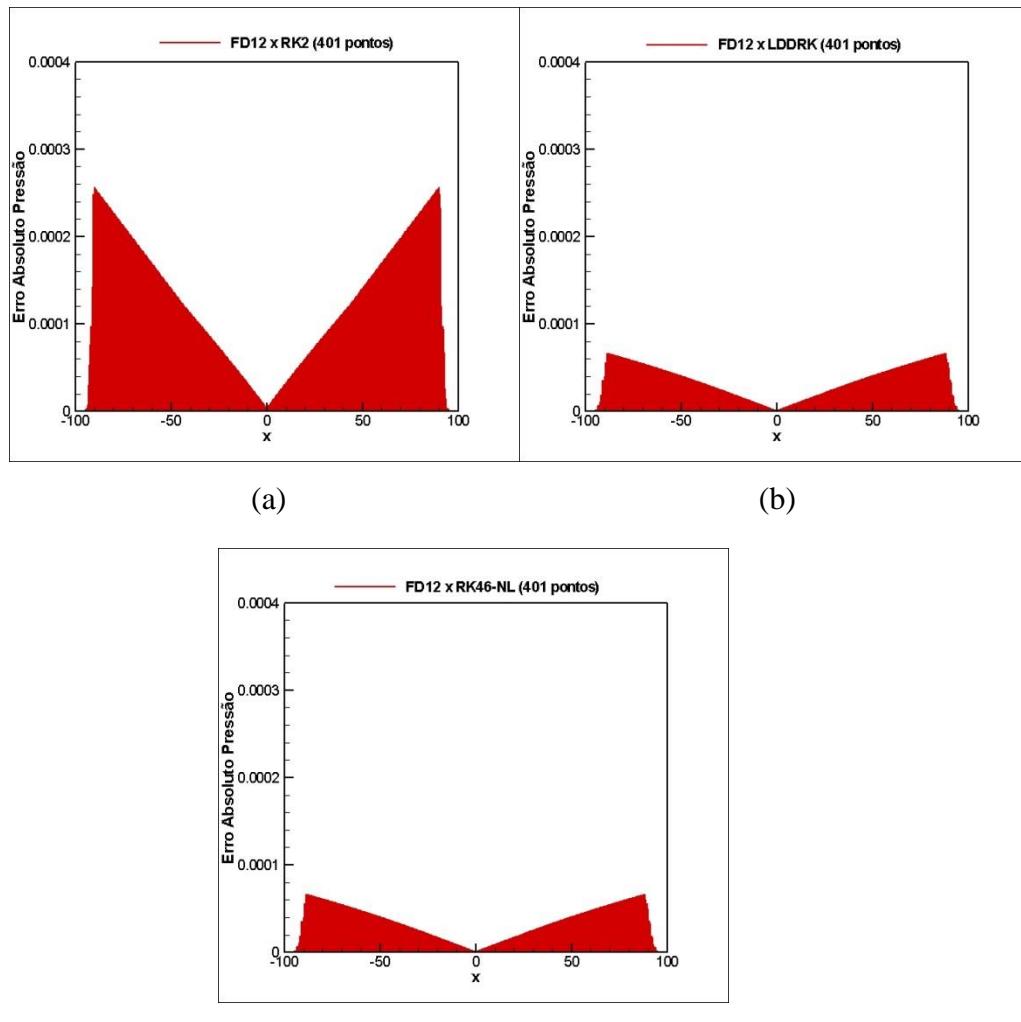
Figura 5.61 – (a) Propagação do pulso de pressão usando LDDRK (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.



(a)

(b)

Figura 5.62 – (a) Propagação do pulso de pressão usando RK46-NL (esquema otimizado de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem) e FD12 (Diferenças Finitas de 12<sup>a</sup> ordem). (b) Erro absoluto da pressão.



(c)

Figura 5.63 – Crescimento do erro absoluto da pressão para as combinações: (a) FD12 e RK2, (b) FD12 e LDDRK, e (c) FD12 e RK46-NL.

RK46-NL e LDDRK continuam a se equiparar na precisão. Através dos gráficos de crescimento do erro absoluto (Fig. 5.63), observa-se que RK2 perdeu sua eficiência sobre os esquemas otimizadas, com o aumento da densidade de pontos na malha.

#### 5.4. Condição de Contorno Para o Caso 1D

As condições de simulação são as mesmas dos itens anteriores, esclarecendo que se utilizou a melhor combinação de esquemas, no caso FD12 e RK46-NL com malha de 401 pontos.

A utilização de condições de contorno (Eq. 4.28 e 4.29) é necessária para evitar que durante a propagação do pulso, quando o mesmo atingir a fronteira do domínio, não reflita e retorne para o interior do domínio contaminando a solução. As figuras abaixo mostram o pulso numérico (FD12 e RK46-NL) em dois momentos: (---) antes da fronteira, (-) refletindo ou atravessando a fronteira. Note a eficácia das condições de contorno não permitindo que o pulso reflita para dentro do domínio.

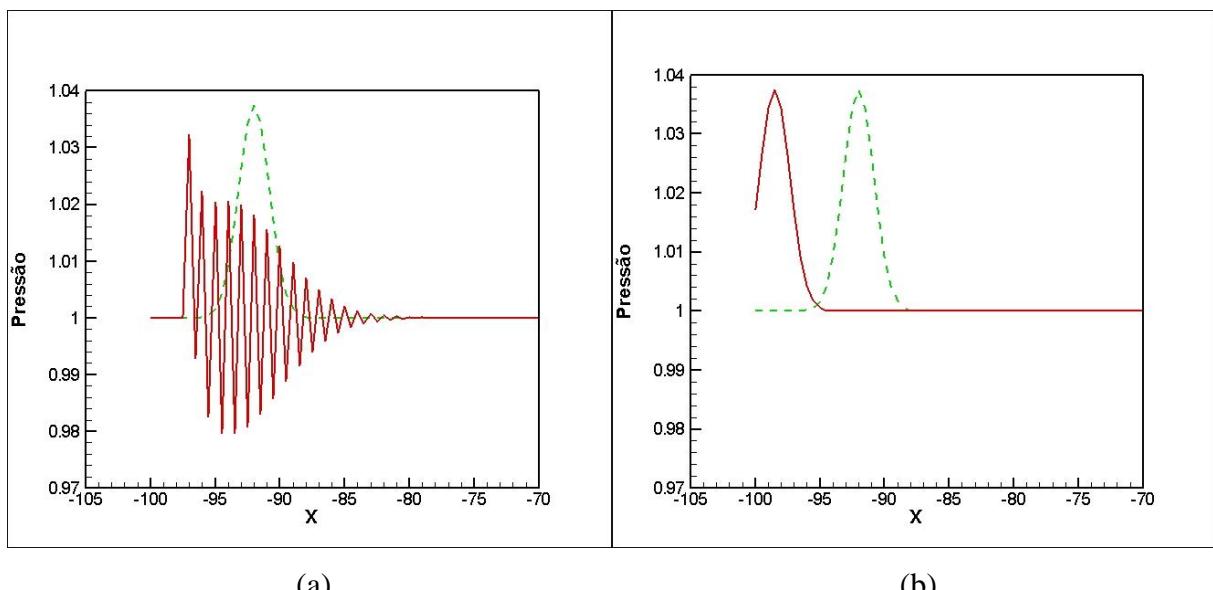


Figura 5.64 – Pulso de pressão: (a) - - antes da fronteira; - refletindo na fronteira. (b) - - antes da fronteira; - atravessando a fronteira.

A Figura 5.65 mostra o baixo valor do erro absoluto no momento em que o pulso de pressão atravessa a fronteira do domínio, compatível com os valores obtidos nas seções 5.2.3 e 5.3.3.

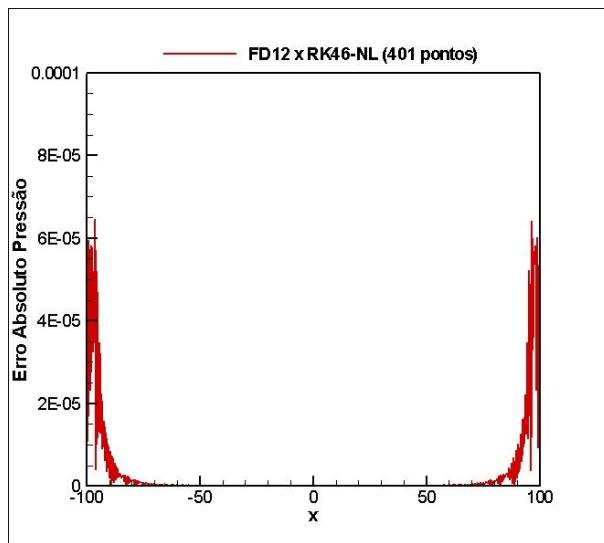


Figura 5.65 – Erro absoluto de pressão atravessando a fronteira do domínio.

### 5.5. Condição de Contorno Para o Caso 2D.

Os parâmetros utilizados nas simulações 2D são os mesmos do caso 1D:

- $CLF = 0,05$ .
- Domínio:  $-100 \leq x \leq 100$  e  $-100 \leq y \leq 100$ .
- Malha:  $201 \times 201$  pontos.

Utilizou-se a melhor combinação de esquemas, FD12 x RK46-NL, para propagar um pulso. As figuras abaixo mostram o pulso de pressão se deslocando em direção à fronteira do domínio.

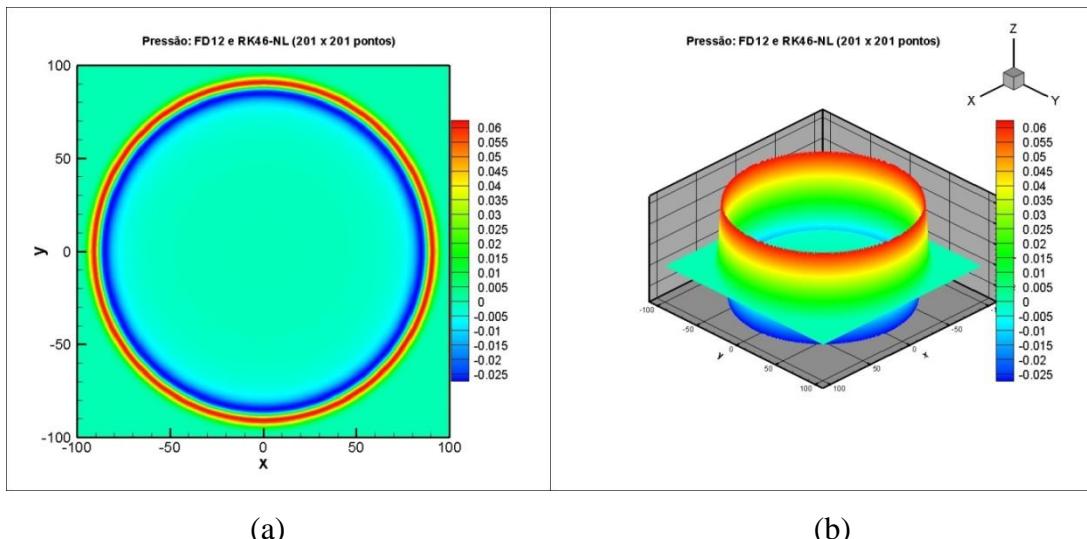


Figura 5.66 – Deslocamento do pulso de pressão antes de atingir a fronteira do domínio: (a) Visão de topo (2D). (b) Visão em perspectiva (3D).

Passando um plano perpendicular ao plano de propagação  $xy$  pela reta  $y = 0$  se obtém o perfil do pulso 2D, ligeiramente diferente do pulso 1D.

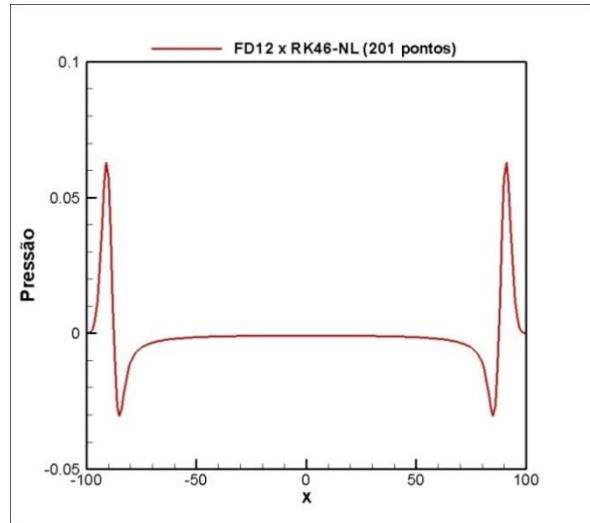


Figura 5.67 – Perfil do pulso 2D.

Aplicando-se as condições de contorno não reflexivas do tipo radiação em todas as fronteiras do domínio, o pulso alcança a fronteira e a atravessa sem sofrer reflexão, como mostra a Fig. 5.68.

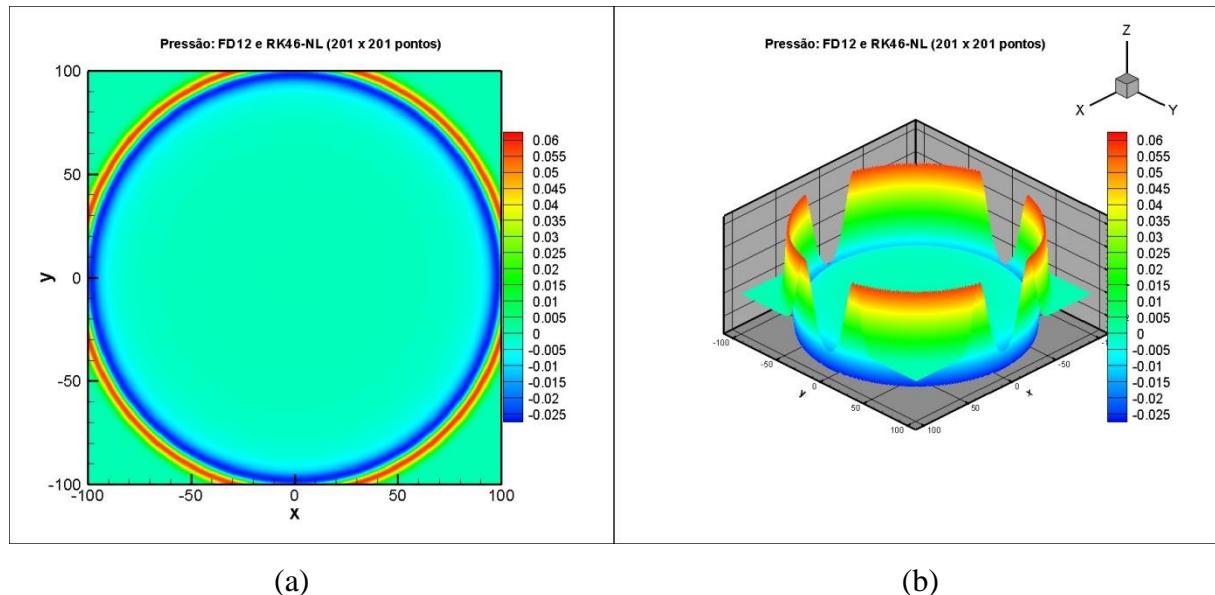


Figura 5.68 – Deslocamento do pulso de pressão no quadro 410 com condição de contorno do tipo radiação: (a) Visão de topo (2D). (b) Visão em perspectiva (3D).

A mesma simulação foi realizada impondo-se a condição de contorno do tipo escoamento de saída (*outflow*) às fronteiras do domínio, como mostra a Fig. 5.69.

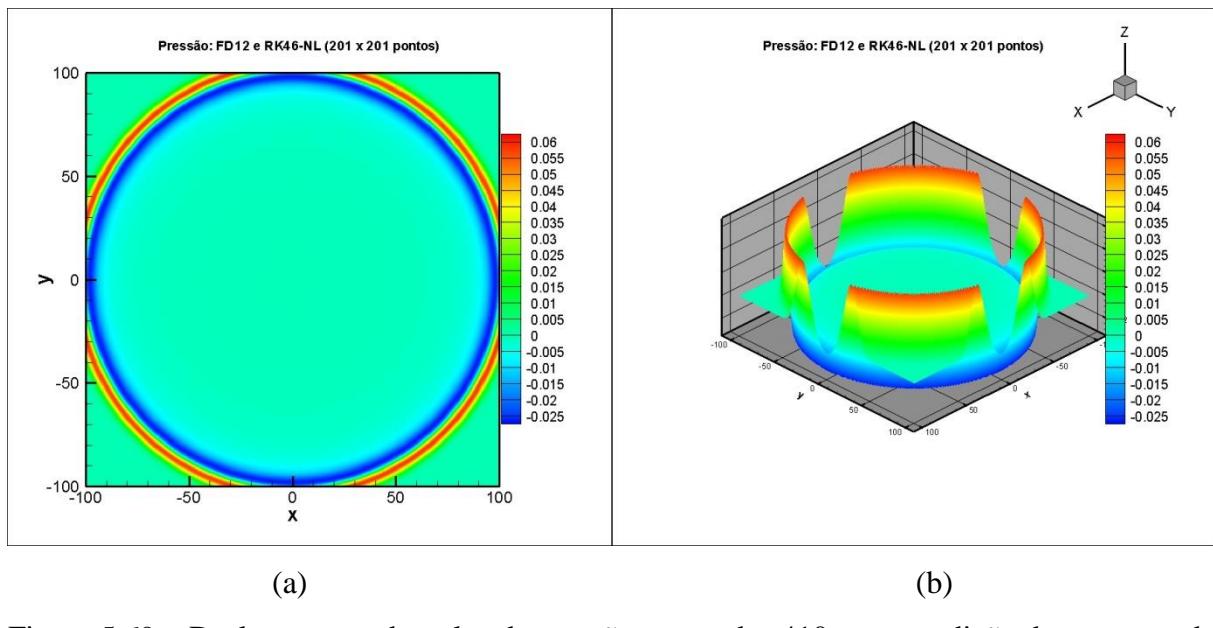


Figura 5.69 – Deslocamento do pulso de pressão no quadro 410 com condição de contorno do tipo escoamento de saída (*outflow*): (a) Visão de topo (2D). (b) Visão em perspectiva (3D).

As Figura 5.70 abaixo mostra o perfil do pulso de pressão 2D atravessando a fronteira com condições de contorno do tipo radiação e escoamento de saída.

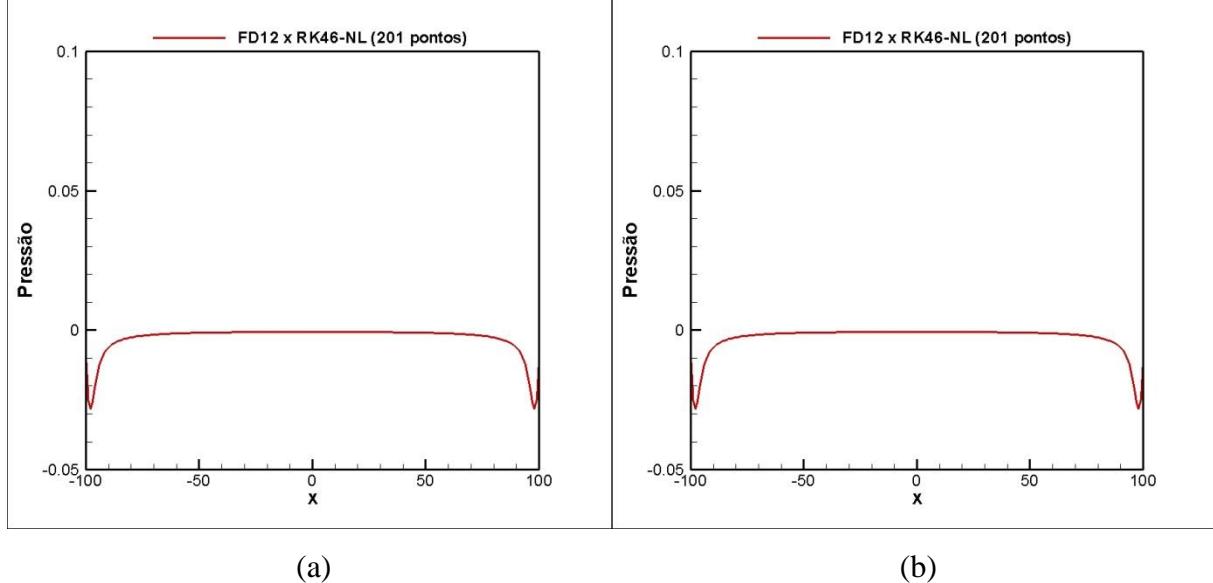


Figura 5.70 – Perfil do pulso 2D atingindo a fronteira do domínio: (a) radiação (b) escoamento de saída.

Como se pode observar, as condições de contorno do tipo radiação e escoamento de saída tem comportamento similar, não provocando reflexões nem instabilidades ao sistema.

# CAPÍTULO VI

## 6. Conclusão

Os esquemas de diferenças finitas otimizados do tipo DRP se mostram mais eficientes do que os esquemas tradicionais de diferenças finitas, baseados nas séries de Taylor de mesma ordem. No entanto, algumas considerações precisam ser levantadas. O DRP original do trabalho de Tam e Webb (1993) tem um limite de integração  $-\pi/2 \leq k.\Delta x \leq \pi/2$  na integral do erro, que permite a criação de esquemas centrados e deslocados (os esquemas deslocados são usados próximo à fronteira do domínio), como demonstrado no apêndice 3, captando comprimentos de onda que variam de  $4.\Delta x$  (quatro espaçamentos de malha) ao infinito. No presente trabalho optou-se por limites de integração que variaram de  $-1,1 \leq k.\Delta x \leq 1,1$ , que, muito embora tenham reduzido a resolução do esquema, capturando comprimentos de onda de até  $6.\Delta x$ , melhoraram significativamente sua eficiência, como apresentado em Tam (2006).

Com o aumento de pontos na malha, o DRP melhorou sua eficiência, mas os esquemas de diferenças finitas tradicionais também e, relativamente a esses esquemas, os DRPs caíram sua eficiência. Não foi possível fazer um estudo mais acurado sobre a variação da eficiência do DRP com o refinamento de malha.

O método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem apresentou um desempenho superior ao Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem em todas malhas estudas, chegando a obter um rendimento superior até mesmo sobre os esquemas de Runge-Kutta otimizados para aeroacústica na malha de 201

pontos. No entanto com o aumento de pontos da malha para 401, seu rendimento ficou inferior aos esquemas otimizados, continuou porém melhor que o Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem.

O presente trabalho teve uma conotação de formação acadêmica nos esquemas espaciais, especialmente os esquemas otimizados para aeroacústica, especialmente o DRP, explicando-o passo-a-passos e os procedimentos de construção, os princípios matemáticos por trás dos esquemas, os efeitos degenerativos intrínsecos à simulação numérica que precisavam ser superados ou minimizados, tanto do DRP como das diferenças finitas, e a análise de seus rendimentos. Informações mais avançadas sobre o DRP e melhorias do esquema podem ser encontradas em publicações especializadas. No entanto, tanto para o DRP quanto para as diferenças finitas tradicionais, carecia juntar e apresentar, de uma forma mais transparente, as bases matemáticas e as arquiteturas por trás desses esquemas, espalhados em livros e artigos.

Visando complementar esse trabalho sugere-se:

- Uma investigação da melhora de rendimento dos DRPs, com respeito aos limites de integração na integral do erro.
- Avaliação do rendimento dos DRPs sobre as diferenças finitas tradicionais na redução do CFL.
- Avaliação do rendimento dos DRPs sobre as diferenças finitas tradicionais na redução do CFL, conjuntamente com o refinamento da malha.

Para novas frentes de pesquisa sugere-se:

- O estudo das equações que regem as condições de contorno não reflexivas, especificamente as do tipo radiação e do tipo escoamento de saída (*outflow*).
- Investigação do comportamento superior do RK2 (método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem) sobre o RK4 (método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem).
- Estudo dos esquemas temporais otimizados para CAA baseados no método de Runge-Kutta, especificamente o LDDR e o RK46-NL.

## BIBLIOGRAFIA

Silveira-Neto, A. **Fundamentos da Turbulência nos Fluidos.** ABCM – Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. 2002.

Almeida, O. **Aeroacoustics Of Dual-Stream Jets With Application To Turbofan Engines.** 2009. 348 f. Tese de Doutorado. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos.

Tam, C. K. W.; Webb, J. C. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustic. **Journal of Computation Physics.** 107, p. 262- 281, 1993.

Hu, F. Q.; Hussaini, M. Y.; Manthey, J. L. Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics. **Journal of Computation Physics.** 124, p. 177-191, 1996.

Hixon, R. On Increasing the Accuracy of MacCormack Schemes for Aeroacoustic Applications. **NASA Contractor Report 202311.** ICOMP-96-11, 32, 1996.

Gottlieb, D.; Turkel, E. **Math. of Comp.**, 30, 703 (1976).

Hixon, R. Evaluation of a High-Accuracy MacCormack-Type Scheme Using Benchmark Problems. **NASA Contractor Report 202324.** ICOMP-97-03, 24, 1997.

Hixon, R. Prefactored Small-Stencil Compact Schemes. **Journal of Computational Physics**, 165, p. 522–541, 2000.

Ashcroft, Graham, Zhang, Xin. Optimized Prefactored Compact Schemes. **Journal of Computational Physics**, 190, p. 459–477, 2003.

Bogey, Christophe; Bailly, Christophe. A Family of Low Dispersive and Low Dissipative Explicit Schemes for Flow and Noise Computations. **Journal of Computational Physics**, 194, p. 194–214, 2004.

Colonius, Tim; Lele, Sanjiva K. Computational Aeroacoustics: Progress on Nonlinear Problems of Sound Generation. **Progress in Aerospace Sciences**, 40 p. 345–416, 2004.

Roeck, W.; Desmet, W.; Baelmans, M.; Sas, P. An Overview of High-Order Finite Difference Schemes for Computational Aeroacoustics. **Proceedings of ISMA2004**, p. 353 – 368, 2004.

Berland, Julien; Bogey, Christophe; Bailly, Christophe. Optimized Explicit Schemes: Matching and Boundary Schemes and 4th-Order Runge-Kutta Algorithm. **10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference**. 2814, 2004.

Zhang, X.; Blaisdell, G. A.; Lyrantzis, A. S. High-Order Compact Schemes With Filters on Multi-block Domains. **Journal of Scientific Computing**, Vol. 21, No. 3, December 2004.

Berland, Julien; Bogey, Christophe; Bailly, Christophe. Low-Dissipation and Low-Suspension Fourth-Order Runge–Kutta Algorithm. **Computers & Fluids**, 35, p. 1459–1463, 2006.

Tam, Christopher. Recent Advances in Computational Aeroacoustics. **Science Direct**, p. 591 – 615, 2006.

Berland, Julien; Bogey, Christophe; Marsden, Olivier; Bailly, Christophe. High-Order, Low Dispersive And Low Dissipative Explicit Schemes For Multiple-Scale And Boundary Problems. **Journal of Computational Physics**, 2007.

Zhang, Shuhai; Jiang, Shufen; Shu, Chi-Wang. Development of nonlinear weighted compact schemes with increasingly higher order accuracy. **Journal of Computational Physics**, 227, p. 7294–7321, 2008.

Santana, L. D.; Souza, L. F.; Almeida, O.; Souza, F. J. Comparison of Different Formulation and Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics. **46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit**, 2008-35, Nevada, 2008.

Sesterhenn, J.; A Characteristic-Type Formulation of The Navier-Stokes Equations For High Order Upwind Schemes. **Computers and Fluids**, 30, p. 37-67, 2001.

Moser, C.; Lamballais, E.; Gervais, Y. **Direct Computation of the Sound Generated by Isothermal and Non-isothermal Mixing Layer**. Massachusetts, 8-10 May, 2006. 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.

Vasanth Allampalli, Vasanth; Hixon, Ray; Nallasamy, M.; Sawyer, S. D. High-Accuracy Large-Step Explicit Runge–Kutta (HALE-RK) Schemes for Computational Aeroacoustics. **Journal of Computational Physics**, 228, p. 3837–3850, 2009.

Fortuna, Armando de Oliveira. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluídos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo. Edusp. 2000. p. 426.

Piskunov, N. S. **Differential and Integral Calculus**. Moscow. Mir Publishers. p. 895.

White, Frank M. **Fluid Mechanics**. 4th Ed. Boston. McGraw Hill. p. 826.

Sissom, L. E.; Pitts, D. R. **Fenômenos de Transporte**. Rio de Janeiro. Editora Guanabara S.A. p. 765.

Boldrini, J. L.; Costa, S. I. L.; Figueiredo, V. L.; Wetzler, H. G. **Álgebra Linear**. São Paulo. 3<sup>a</sup> edição. Editora Harbra Ltda. 1980. p. 411.

## APÊNDICE I

### Conceitos de Acústica

Antes de se falar em acústica, é necessário que se defina o que seja o som. Som é uma perturbação que ocorre no campo de pressão de um meio material e que se propaga sem o transporte de matéria. Uma boa analogia seria imaginar que se pudesse “fatiar” o ar contido em uma sala em placas e, de repente, uma dessas placas fosse deslocada abruptamente. Essa placa deslocaria a placa que estivesse imediatamente após ela, que, por sua vez, deslocaria outra placa imediatamente após ela, e assim por diante, como ilustrado na Fig. A1.1.

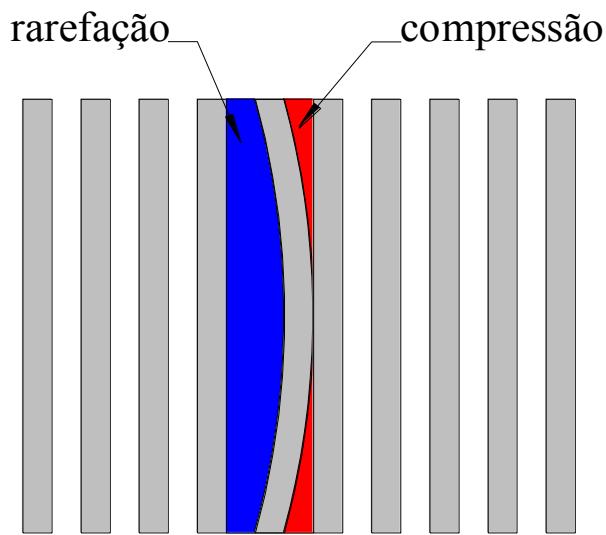


Figura A1.1 – Pulso sonoro.

O pulso sonoro se propaga comprimindo (a frente do pulso) e tracionando (atrás do pulso) as placas de ar vizinhas. Para pulsos sonoros de baixa frequência, a placa perturbada retorna à sua posição de equilíbrio somente depois que várias outras placas foram perturbadas.

Mas à medida que se aumenta a frequência, menos placas são perturbadas antes que a placa inicial retorne a posição de equilíbrio. A Figura A1.2 ilustra o caso onde a placa de ar retorna a posição de equilíbrio após perturbar outras quatro placas. A distância entre a placa que começa a sentir a perturbação e a placa que acabou de retornar a posição de equilíbrio define a grandeza comprimento de onda ( $\lambda$ ).

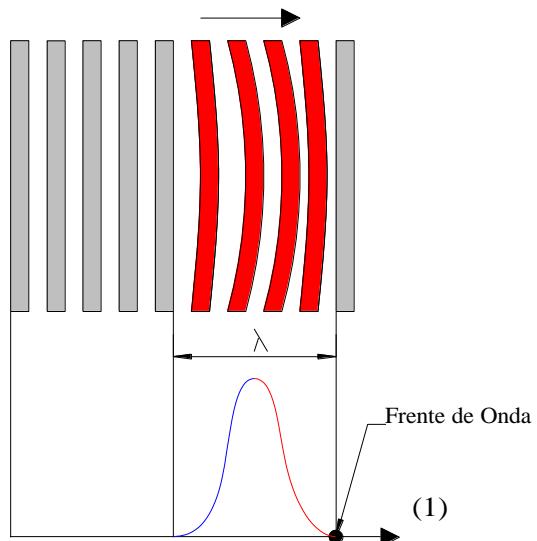


Figura A1.2 – Comprimento de onda e frente de onda de um pulso sonoro.

Através da Figura A1.2, pode-se observar o pulso sonoro comprimindo o ar à sua frente (área escura). Quando o pulso alcança uma nova placa, a intensidade da compressão (vermelho) aumenta até um máximo, para, em seguida, diminuir. Analisando a Figura A1.2 se observa que a placa, depois de totalmente transpassada pelo pulso acústico, não fica oscilando até dissipar totalmente sua energia, ela simplesmente retorna à sua posição inicial. Se assim não fosse, essa placa de ar seria uma fonte secundária de emissão de pulso acústico, o que não é observado.

Denomina-se onda sonora ao conjunto de pulsos sonoros de mesmo comprimento de onda, encadeados ininterruptamente um após o outro (Fig. A1.3).

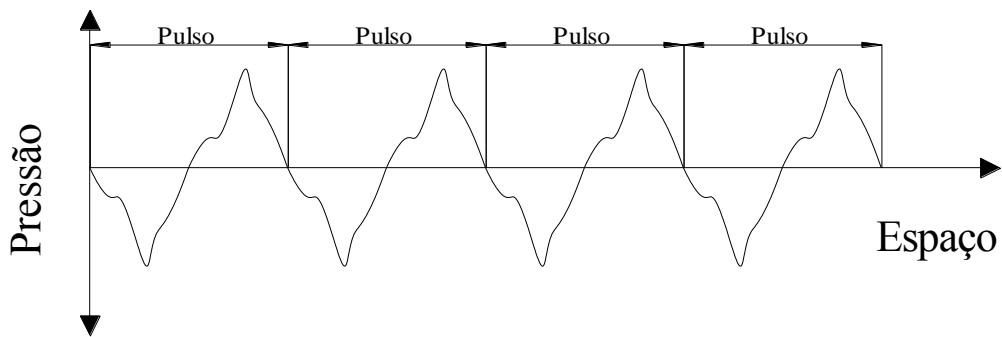


Figura A1.3 – Onda sonora.

O período ( $T$ ) da onda sonora é definido como sendo o tempo necessário para que uma placa de ar experimente um ciclo completo de compressão/rarefação (pulso).

A quantidade de períodos que acontecem em uma unidade de tempo é chamada de frequência ( $f$ ) e, quanto maior for a frequência, mais agudo é o som. O ouvido humano é sensível a frequências entre 20 Hz (20 períodos por segundo – 20 Hertz) e 20.000 Hz, aproximadamente. A frequência é o inverso do período, conforme a Eq. A1.1:

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{A1.1})$$

A reflexão é um efeito de propagação do som no qual o som ao se propagar em um meio material e alcançar a interface com outro meio, é refletido de volta, de forma que o ângulo de incidência, formado com a normal à superfície, é igual ao ângulo de reflexão (Fig. A1.4).

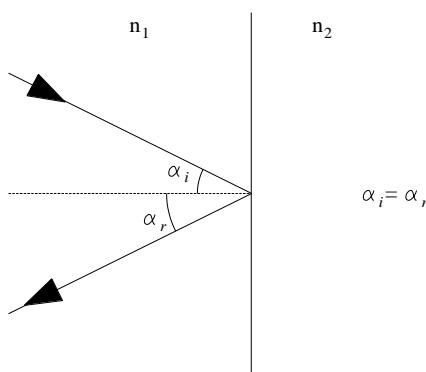


Figura A1.4 – Reflexão da onda: ângulo de incidência ( $\alpha_i$ ) é igual ao ângulo de reflexão ( $\alpha_r$ ).

Dependendo da interface, a onda sonora pode sofrer ou não uma inversão de fase. Se o índice de refração do “meio origem” ( $n_1$ ) for menor que o índice de refração do “meio

destino” ( $n_2$ ), não haverá mudança de fase ( $n_1 < n_2$ ). No entanto, se o índice de refração do “meio origem” for maior que o “meio destino” ( $n_1 > n_2$ ), haverá a inversão de fase (Fig. A1.5).

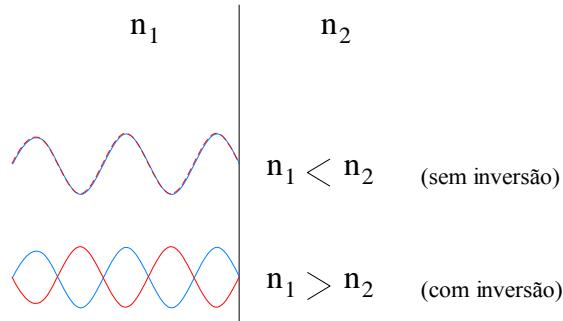


Figura A1.5 – Ângulo de incidência 0°: reflexão com e sem mudança de fase.

O eco é um efeito sonoro oriundo da reflexão do som. Como o ouvido humano só é capaz de distinguir entre dois sons distintos se houver entre eles um intervalo mínimo de 0,1 segundo, supondo que o som se propague a 340 m/s, seria necessário posicionar um obstáculo a uma distância mínima de 17 metros da fonte sonora para se ouvir o eco.

Outro efeito parecido com o eco é a reverberação. Ela acontece quando o som refletido nos chega aos ouvidos antes de 0,1 segundo. A sensação é de prolongamento do som. Esse efeito é muito comum em igrejas antigas.

Na reflexão, se esse segundo meio ( $n_2$ ) da interface tiver um índice de refringência / refração menor que o do meio de propagação ( $n_1$ ), ou seja  $n_2 < n_1$ , então todo raio incidente será parcialmente refletido e parcialmente refratado, continuando a se propagar no segundo meio (Fig. A1.6).

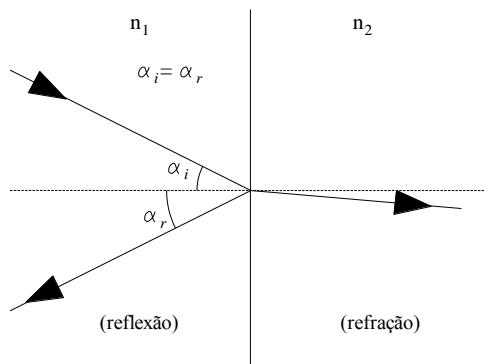


Fig. A1.6 – Refração do som.

Mesmo que a interface com o segundo meio material seja tal que  $n_1 > n_2$  e o ângulo de incidência seja maior que um determinado ângulo limite (Eq. A1.2), a reflexão será total, não havendo refração.

$$\operatorname{Sen}(\alpha_{limite}) = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{A1.2})$$

Na refração, a onda muda de meio material de propagação mudando também sua velocidade: módulo e direção (Fig. A1.7).

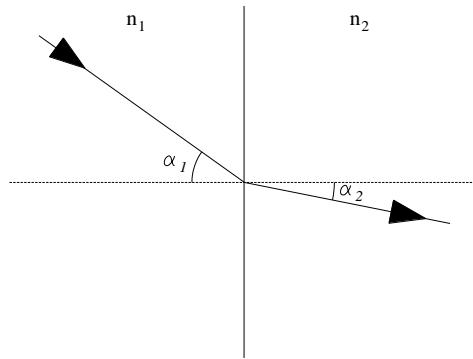


Figura A1.7 – Refração: desvio da direção de propagação da onda.

O ângulo que a onda emergente faz em relação à normal segue a lei de Snell (Eq. A1.3):

$$\frac{\operatorname{Sen}(\alpha_1)}{\operatorname{Sen}(\alpha_2)} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{A1.3})$$

Uma situação curiosa que ocorre por causa do fenômeno da refração se dá durante o dia, quando o ar é mais quente junto ao solo e mais frio longe dele. Se uma onda sonora vinda de uma fonte, posicionada a uma altura qualquer, ao se aproximar do solo sofrerá gradativamente o fenômeno da refração, uma vez que o ar mais quente tem um índice de refração menor (velocidade maior) do que o ar frio (velocidade menor), desviando a onda sonora para cima, como mostra a Fig. A1.8.

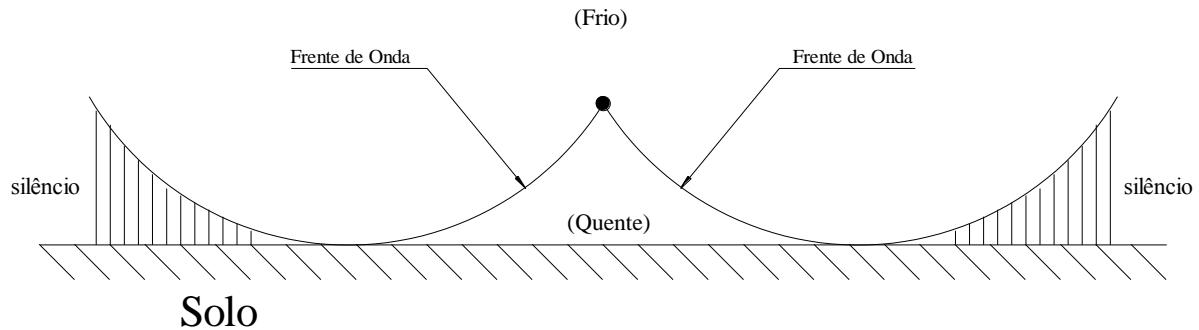


Figura A1.8 – Zonas de silêncio: refração sonora devido ao aquecimento do solo.

Como resultado dessa configuração, surgirão zonas de silêncio, onde o som não penetrará, mesmo que seja possível dessas zonas enxergar a fonte sonora. A noite acontece a inversão térmica: o solo fica frio com o ar acima dele mais quente, desaparecendo as zonas de silêncio. Um exemplo típico acontece às margens de um lago: de dia, é possível enxergar a outra margem sem se ouvir som algum que venha de lá e, a noite, é possível se escutar até mesmo o menor ruído vindo da outra margem.

Quando o campo de propagação de duas ou mais fontes sonoras se superpõem, acontece o fenômeno chamado interferência (Fig. A1.9).

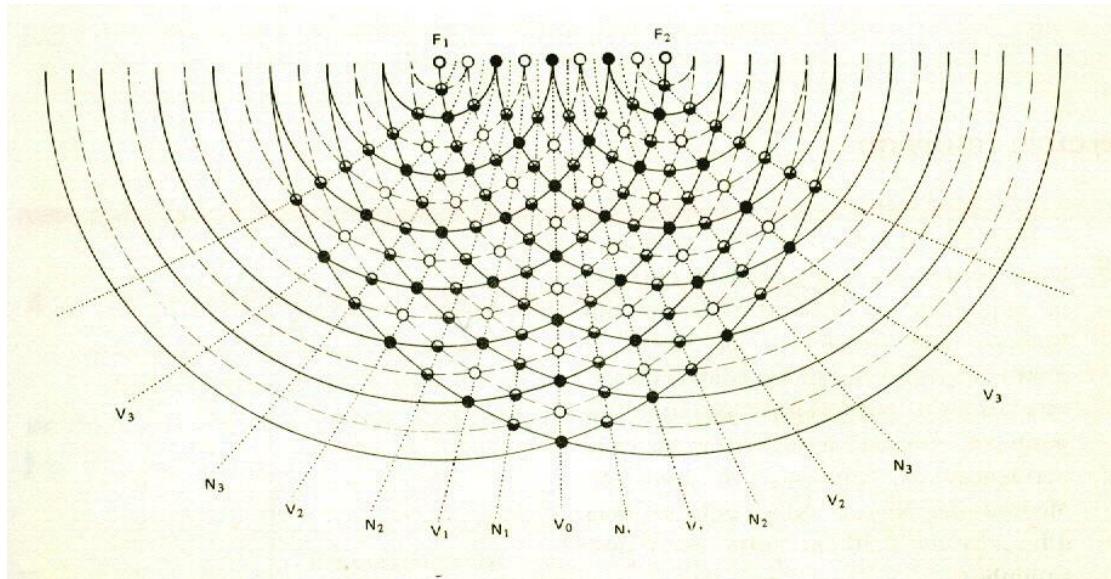


Figura A1.9<sup>9</sup> – Interferência entre duas fontes sonoras.

<sup>9</sup> Extraído de FUNDAMENTOS DA FÍSICA – Ramalho, Ivan, Nicolau, Toledo – Editora Moderna, 2<sup>a</sup> edição – 1979.

Se a superposição acontecer entre um pico de uma onda e o vale de outra onda, teremos a interferência destrutiva, que resulta no cancelamento da onda (bolas pretas). O mesmo acontece quando um vale de uma onda coincide com o pico de outra onda (bolas brancas). No entanto, se a superposição acontecer entre um pico e um vale teremos a interferência construtiva (bolas metade branca metade preta), que resulta no aumento da amplitude da onda.

O fenômeno da ressonância surge quando ocorre simultaneamente os fenômenos de reflexão e interferência. A onda sonora ao encontrar uma cavidade se propaga para seu interior. Ao encontrar o fundo da cavidade a onda é refletida sem mudança de fase, interferindo construtivamente com a onda incidente, aumentando assim sua intensidade. A onda resultante, ao chegar à extremidade livre da cavidade, é novamente refletida para o interior da cavidade, agora defasada de  $180^\circ$ , provocando uma nova interferência construtiva, aumentando ainda mais sua amplitude.

A ressonância em cavidades somente é possível para comprimentos de onda definidos a partir das dimensões da cavidade, segundo a Eq. A1.4,

$$\lambda = \frac{(2n-1)L}{4}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A1.4})$$

e exemplificado pela Fig. A1.10,

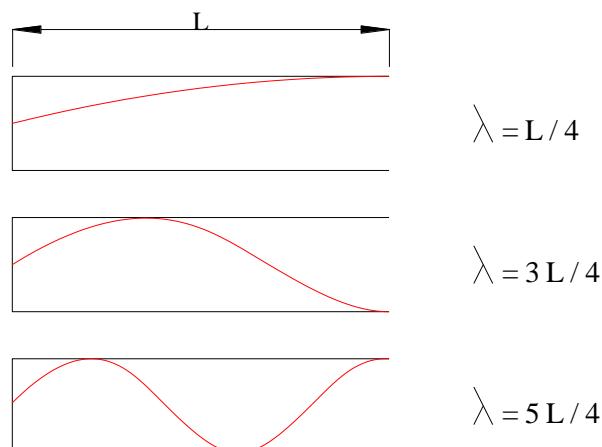


Figura A1.10 – Comprimentos de onda possíveis de amplificação através da ressonância.

Duas fontes sonoras de frequências próximas uma da outra ao interferirem provocam um efeito oscilatório da intensidade sonora chamado batimento. Em determinado momento, os picos e vales de ambas as fontes coincidem mais, aumentando a intensidade sonora, e imediatamente após se desalinham, passando a coincidir os picos de uma onda com os vales da outra, provocando diminuição na intensidade sonora, como exemplifica a Fig. A1.11.

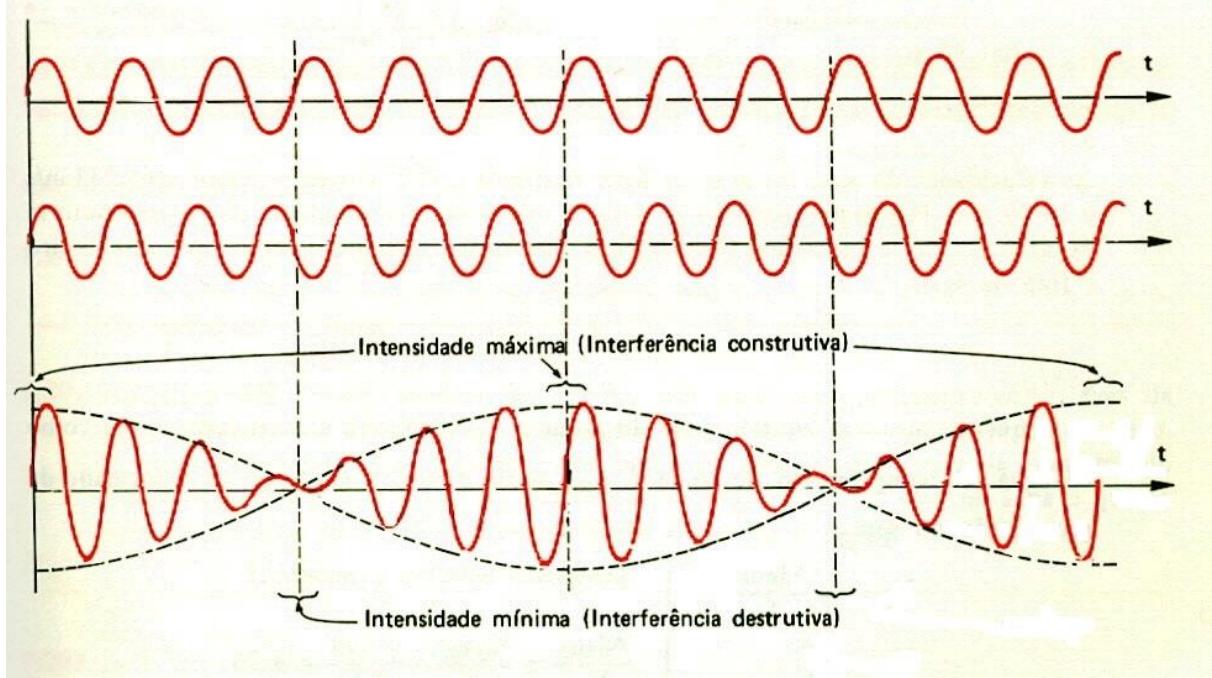


Figura A1.11<sup>10</sup> – Batimento oriundo de duas fontes de frequências próximas.

Diferentemente da interferência, onde a variação sonora é uma variação espacial, o batimento é uma variação temporal.

Outro interessante fenômeno acústico é o efeito Doppler, que acontece pelo movimento relativo entre uma fonte sonora e um observador. Se, por exemplo, a fonte se movimentar na direção de um observador parado, o observador perceberá um som de frequência ( $f'$ ) maior do que a frequência ( $f$ ) emitida pela fonte, devido à diminuição da distância entre as frentes de onda. Ao contrário, se a fonte se afastar do observador, a frequência ( $f'$ ) fica menor do que a frequência ( $f$ ), por causa do aumento da distância entre as frentes de onda. O fenômeno acontece da mesma forma se a fonte estiver parada e o observador em movimento, ou se ambos estiverem em movimento. A Figura A1.12 exemplifica o fenômeno.

<sup>10</sup> Extraído de FUNDAMENTOS DA FÍSICA – Ramalho, Ivan, Nicolau, Toledo – Editora Moderna, 2<sup>a</sup> edição – 1979.

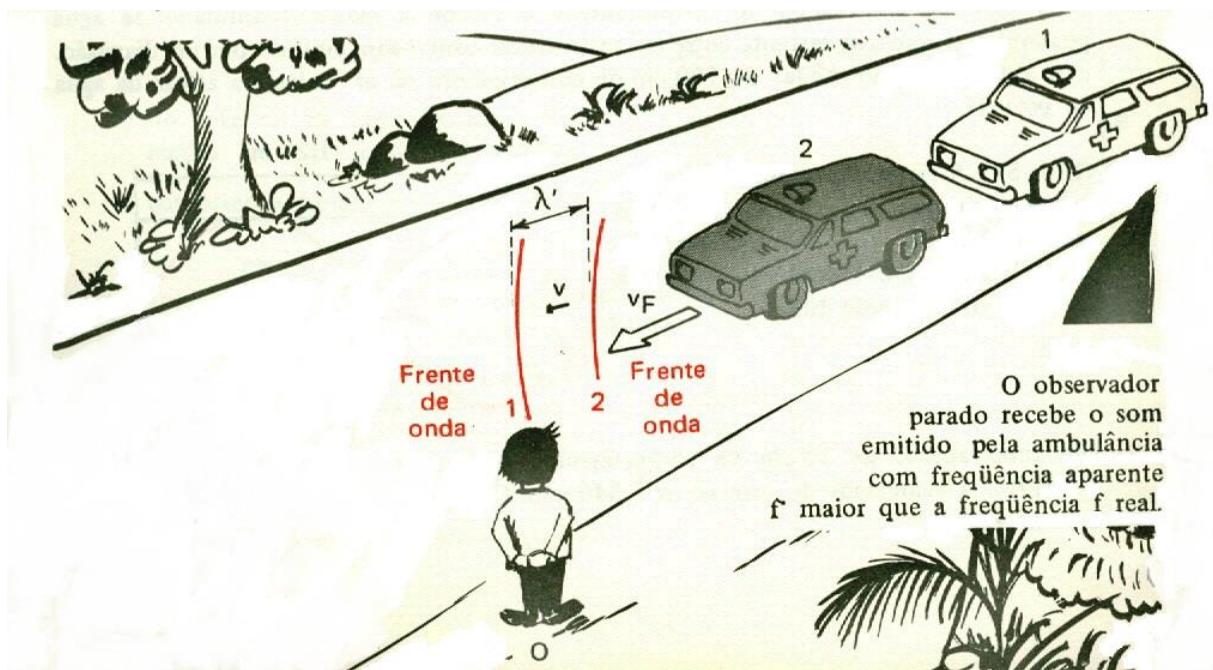


Figura A1.12<sup>11</sup> – Efeito Doppler: Fonte em movimento e observador parado.

A difração é outro fenômeno sonoro muito importante. A onda sonora é capaz de contornar objetos que tenham dimensões menores ou próximas às de seu comprimento de onda. Quando uma banda marcial desfila em uma avenida, se uma pessoa estiver posicionada em uma via perpendicular à avenida conseguirá ouvir somente os sons mais graves da música (comprimentos de onda maiores), pois os sons agudos tem comprimentos de onda muito menores do que as dimensões da esquina (Fig. A1.13).

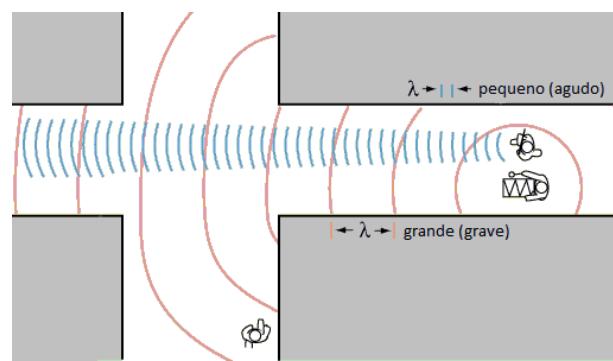


Figura A1.13<sup>12</sup> – Difração.

<sup>11</sup> Extraído de FUNDAMENTOS DA FÍSICA – Ramalho, Ivan, Nicolau, Toledo – Editora Moderna, 2<sup>a</sup> edição – 1979.

<sup>12</sup> Adaptado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/sound/diffrac.html>

Um exemplo desse efeito acontece nos microscópios ópticos, que são incapazes de detectar os vírus que nos causam doenças, por serem esses menores que o comprimento de onda da luz visível ao olho humano.

A absorção do som é a capacidade que um determinado material tem de receber a onda e refleti-la, ou refrata-la, com intensidade reduzida (Fig. A1.14). Os materiais acústicos, como são chamados, são formados de filamentos fibrosos ou partículas que, ao vibrarem, transformam a energia mecânica em energia térmica. A capacidade de reter uma determinada frequência varia de material para material, mas normalmente as baixas frequências são as mais difíceis de serem absorvidas.

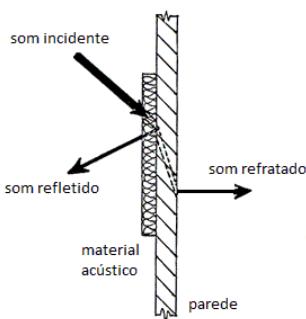


Figura A1.14 – Absorção<sup>13</sup> do som: material acústico.

Muito embora muitos desses efeitos não sejam alvo direto da atenção desse trabalho, mesmo assim foram apresentados e discutidos, por já existirem aplicações práticas interessantes que podem inspirar novas aplicações pertinentes à indústria aeronáutica, motivando o iniciante em aeroacústica em novas frentes de pesquisa.

---

<sup>13</sup> Adaptado de [http://www.acousticalsurfaces.com/acoustic\\_IOI/101\\_7.htm](http://www.acousticalsurfaces.com/acoustic_IOI/101_7.htm)

## APÊNDICE II

### Diferenças Finitas (Séries de Taylor)

O esquema das diferenças finitas consiste em se atribuir pesos aos valores da função nos pontos próximos ao ponto de interesse, com o objetivo de estimar o valor da função nesse ponto. A forma mais tradicional para se estabelecer esses pesos é pelo truncamento das séries de Taylor. A Equação A2.1 mostra a expansão da série de Taylor truncada na sexta ordem para um ponto de interesse adianteado  $\Delta x$  de um ponto base  $x_i$  qualquer:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{(\Delta x)^1}{1!} f^I(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f^{II}(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f^{III}(x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f^{IV}(x_i) + \frac{(\Delta x)^5}{5!} f^V(x_i) + \frac{(\Delta x)^6}{6!} f^{VI}(x_i) + R_6(x) \quad (\text{A2.1})$$

Para simplificação da notação a Eq. A2.1 é reescrita como:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{(\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \quad (\text{A2.2})$$

Para um ponto de interesse atrasado de  $\Delta x$  de um ponto  $x_i$  a Eq. A2.1 se torna:

$$f_{i-1} = f_i + \frac{(-\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(-\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(-\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \quad (\text{A2.3})$$

e para um ponto atrasado de  $2\Delta x$  do ponto  $x_i$ :

$$f_{i-2} = f_i + \frac{(-2\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-2\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-2\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(-2\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(-2\Delta x)^6}{6!} f_i^V + R_6(x) \quad (\text{A2.4})$$

Um esquema de diferenças finitas de sexta ordem, por exemplo, a derivada espacial de uma grandeza qualquer, no ponto de referência, é descrita segundo a Eq. A2.5:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{a_{-3} \cdot f_{i-3} + a_{-2} \cdot f_{i-2} + a_{-1} \cdot f_{i-1} + a_{+1} \cdot f_{i+1} + a_{+2} \cdot f_{i+2} + a_{+3} \cdot f_{i+3}}{\Delta x} \quad (\text{A2.5})$$

O esquema de diferenças finitas centradas é interessante, devido à sua propriedade de não dissipação. Note-se que a cada ponto é atribuído um peso ( $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1} \dots$ ), que determina seu grau de influência sobre o valor da derivada.

A precisão do esquema é proporcional ao número de pontos da vizinhança que se queira usar para atribuir peso, por exemplo: para um esquema de 6<sup>a</sup> ordem utilizam-se 7 pontos (três pontos à esquerda e três pontos à direita, mas o ponto de interesse), para um esquema de 4<sup>a</sup> ordem, utilizam-se 5 pontos; sempre 1 ponto a mais que a ordem. Então, para um esquema centrado de 6<sup>a</sup> ordem, utilizaram-se 3 pontos à esquerda e 3 pontos à direita do ponto base, 3-3, e o próprio ponto base:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i-3} = f_i + \frac{(-3\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-3\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-3\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-3\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(-3\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(-3\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \\ f_{i-2} = f_i + \frac{(-2\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-2\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-2\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(-2\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(-2\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \\ f_{i-1} = f_i + \frac{(-\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(-\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(-\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \\ f_{i+1} = f_i + \frac{(\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \\ f_{i+2} = f_i + \frac{(2\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(2\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(2\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \\ f_{i+3} = f_i + \frac{(3\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(3\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(3\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(3\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + \frac{(3\Delta x)^5}{5!} f_i^V + \frac{(3\Delta x)^6}{6!} f_i^{VI} + R_6(x) \end{array} \right. \quad (\text{A2.6})$$

É preciso agora atribuir pesos a cada ponto ao redor do ponto de referência. Para isso, multiplica-se à primeira linha ( $f_{i-3}$ ) seu respectivo peso  $a_{-3}$ , à segunda linha ( $f_{i-2}$ ) seu peso  $a_{-2}$ , à linha ( $f_{i-1}$ ) seu peso  $a_{-1}$ , e assim por diante. Somando todas as linhas do sistema A2.6 e impondo a condição de resultado igual a 1 (um) para a soma das parcelas da primeira derivada ( $f_i^I$ ), e 0 (zero) para a soma das derivadas superiores ( $f_i^{II}, f_i^{III}, f_i^{IV}, f_i^V$ , e  $f_i^{VI}$ ), o resultado é:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i^I: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^1}{1!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^1}{1!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^1}{1!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^1}{1!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^1}{1!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^1}{1!} = 1 \\ f_i^{II}: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^2}{2!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^2}{2!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^2}{2!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^2}{2!} = 0 \\ f_i^{III}: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^3}{3!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{3!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^3}{3!} = 0 \\ f_i^{IV}: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^4}{4!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^4}{4!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^4}{4!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^4}{4!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^4}{4!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^4}{4!} = 0 \\ f_i^V: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^5}{5!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^5}{5!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^5}{5!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^5}{5!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^5}{5!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^5}{5!} = 0 \\ f_i^{VI}: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^6}{6!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^6}{6!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^6}{6!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^6}{6!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^6}{6!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^6}{6!} = 0 \end{array} \right.$$

(A2.7)

um sistema de 6 equações e 6 incógnitas para ser resolvido.

Note-se que a Equação A2.5 necessita somente dos valores da grandeza de interesse nos pontos adjacentes ao ponto de referência, e não de suas derivadas. Por isso é que se impõe o resultado zero (0) a todas as linhas do sistema A2.7 abaixo da linha referente à derivada primeira. O resultado igual a 1 (um) referente à linha de  $f_i^I$  também é consonante com a Eq. A2.5.

A solução do sistema da Equação A2.7 (Tabela A2.1) mostrará que os pesos dos pontos equidistantes do ponto de referência são iguais em módulo:

$$a_{+n} = -a_{-n} \quad (A2.8)$$

Essa mesma forma de resolução também se aplica à solução de esquemas de diferenças finitas deslocadas da mesma ordem do esquema centrado: 2-4 (2 pontos atrasados e 4 adiantados), 4-2 (4 pontos atrasados e 2 adiantados), 1-5, 5-1, 0-6, e 6-0. A única diferença é que a Eq. A2.8 não vale para os esquemas deslocados.

Embora tenha sido exemplificado um esquema de 6<sup>a</sup> ordem, a mesma lógica se aplica para diferentes ordens. Segue abaixo uma tabela (Tab. A2.1) de pesos para alguns esquemas de diferenças finitas centradas baseados nas séries de Taylor.

Tabela A2.1 – Pesos para esquemas centrados de diferenças finitas.

Pontos/Ordem	2 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	10 <sup>a</sup>	12 <sup>a</sup>
$a_{-6}$						1/5544
$a_{-5}$					-1/1260	-1/385
$a_{-4}$				1/280	5/504	1/56
$a_{-3}$			-1/60	-4/105	-5/84	-5/63
$a_{-2}$		1/12	3/20	1/5	5/21	15/56
$a_{-1}$	-1/2	-2/3	-3/4	-4/5	-5/6	-6/7
$a_0$	0	0	0	0	0	0
$a_{+1}$	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7
$a_{+2}$		-1/12	-3/20	-1/5	-5/21	-15/56
$a_{+3}$			1/60	4/105	5/84	5/63
$a_{+4}$				-1/280	-5/504	-1/56
$a_{+5}$					1/1260	1/385
$a_{+6}$						-1/5544

## APÊNDICE III

### DRP (Dispersion Relation Preserving)

No capítulo II, foi definida a relação de dispersão como sendo a velocidade angular  $\omega$  expressa em função do número de onda  $k$ . Tomando-se a expressão geral que define o esquema das diferenças finitas:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=N}^M (a_j \cdot f(x + j \cdot \Delta x)) \quad (\text{A3.1})$$

e transportando-a para o espaço espectral de Fourier obtém-se:

$$i \cdot k \cdot \hat{f}_k \cong \left[ \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=N}^M (a_j \cdot e^{ikj\Delta x}) \right] \hat{f}_k \quad (\text{A3.2})$$

Deve-se lembrar que, mesmo no espaço espectral, a relação expressa pela Eq. A3.2 ainda permanece uma aproximação e não uma igualdade. O lado esquerdo da aproximação contém o número de onda  $k$  que descreve verdadeiro comprimento de onda contido na solução exata da derivada espacial. O somatório no lado direito da Eq. A3.2 pode ser escrito como:

$$i \cdot k^* \cdot \hat{f}_k = \left[ \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=N}^M (a_j \cdot e^{ikj\Delta x}) \right] \hat{f}_k \quad (\text{A3.3})$$

Note-se que o número de onda não é mais  $k$ , e sim  $k^*$ , e que agora existe uma igualdade, ao invés de uma aproximação.  $k^*$  é conhecido como o número de onda efetivo, ou seja, o número de onda aproximado do número de onda real  $k$  - o número de onda que representa a aproximação que o esquema de diferenças finitas fez do valor real da grandeza, que fica então definido como:

$$k^* = \frac{-i}{\Delta x} \sum_{j=N}^M (a_j \cdot e^{ikj\Delta x}) \quad (A3.4)$$

O objetivo do esquema DRP é fazer com que o número de onda efetivo seja o mais próximo possível do número de onda real. Como já mostrado no Capítulo II e no início deste apêndice, a relação de dispersão é função do número de onda, ou seja, tornando o número de onda efetivo  $k^*$  igual ou o mais próximo possível do número de onda real  $k$  se estará preservando a relação de dispersão das equações diferenciais que definem o fenômeno, que é exatamente o objetivo e o nome desse esquema, DRP - Preservando a Relação de Dispersão. Para se conseguir isso, procura-se minimizar ao máximo a integral de erro, definida como:

$$E = \int_{\pi/16}^{\pi/2} |k \cdot \Delta x - k^* \cdot \Delta x|^2 d(k \cdot \Delta x) \quad (A3.5)$$

induzindo o menor erro possível através da minimização do erro para um dos coeficientes  $a_j$  da Eq. A3.1, conforme a expressão:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad (A3.6)$$

O DRP original é construído com sete pontos: três atrasados em relação ao ponto base, três adiantados, e o próprio ponto base. Como visto no apêndice II, para sete pontos no estêncil deveria se obter sexta ordem de convergência, no entanto o DRP faz o truncamento na quarta ordem, como mostrado abaixo (Eq. A3.7):

$$\begin{cases} f_{i-3} = f_i + \frac{(-3\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-3\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-3\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-3\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + R_4(x) \\ f_{i-2} = f_i + \frac{(-2\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-2\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-2\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + R_4(x) \\ f_{i-1} = f_i + \frac{(-\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(-\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + R_4(x) \\ f_{i+1} = f_i + \frac{(\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + R_4(x) \\ f_{i+2} = f_i + \frac{(2\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + R_4(x) \\ f_{i+3} = f_i + \frac{(3\Delta x)^1}{1!} f_i^I + \frac{(3\Delta x)^2}{2!} f_i^{II} + \frac{(3\Delta x)^3}{3!} f_i^{III} + \frac{(3\Delta x)^4}{4!} f_i^{IV} + R_4(x) \end{cases} \quad (A3.7)$$

Fazendo esse truncamento na quarta ordem, todos os pesos ficam sem solução exata, dependendo da determinação de um peso que será otimizado pela aplicação da integral da Eq. A3.5 e da derivada da Eq. A3.6.

Da mesma forma como apresentado no Apêndice II, a solução do sistema se dá multiplicando-se a primeira linha do sistema A3.7 por  $a_{-3}$ , a segunda linha por  $a_{-2}$ , a terceira por  $a_{-1}$ , a quarta por  $a_{+1}$ , a quinta por  $a_{+2}$ , e a sexta por  $a_{+3}$ . Somando as equações que compõe o sistema A3.7 e impondo a condição de resultado igual a um (1) para a parcela da soma das primeiras derivadas ( $f_i^I$ ), e zero (0) para as demais parcelas:

$$\begin{cases} f_i: a_{-3} + a_{-2} + a_{-1} + a_{+1} + a_{+2} + a_{+3} = 0 \\ f_i^I: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^1}{1!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^1}{1!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^1}{1!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^1}{1!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^1}{1!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^1}{1!} = 1 \\ f_i^{II}: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^2}{2!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^2}{2!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^2}{2!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^2}{2!} = 0 \\ f_i^{III}: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^3}{3!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{3!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^3}{3!} = 0 \\ f_i^{IV}: a_{-3} \cdot \frac{(-3\Delta x)^4}{4!} + a_{-2} \cdot \frac{(-2\Delta x)^4}{4!} + a_{-1} \cdot \frac{(-\Delta x)^4}{4!} + a_{+1} \cdot \frac{(\Delta x)^4}{4!} + a_{+2} \cdot \frac{(2\Delta x)^4}{4!} + a_{+3} \cdot \frac{(3\Delta x)^4}{4!} = 0 \end{cases} \quad (A3.8)$$

Resolvendo a primeira linha do sistema A3.8, obtém-se  $a_{-3}$  em função de  $a_{-2}$ ,  $a_{-1}$ ,  $a_{+1}$ ,  $a_{+2}$ , e  $a_{+3}$ :

$$a_{-3} = -a_{-2} - a_{-1} - a_{+1} - a_{+2} - a_{+3} \quad (A3.9)$$

Substituindo o valor de  $a_{-3}$  na segunda linha, obtém-se  $a_{-2}$  em função de  $a_{-1}$ ,  $a_{+1}$ ,  $a_{+2}$ ,  $a_{+3}$ :

$$a_{-2} = 1 - 2a_{-1} - 4a_{+1} - 5a_{+2} - 6a_{+3} \quad (A3.10)$$

Fazendo o mesmo processo na terceira linha com o resultado anterior, obtém-se  $a_{-1}$  em função de  $a_{+1}$ ,  $a_{+2}$ ,  $a_{+3}$ :

$$a_{-1} = \frac{1}{2}(5 - 12a_{+1} - 20a_{+2} - 30a_{+3}) \quad (\text{A3.11})$$

Resolvendo a quarta linha, obtém-se  $a_{+1}$  em função de  $a_{+2}$ ,  $a_{+3}$ :

$$a_{+1} = \frac{1}{24}(11 - 60a_{+2} - 120a_{+3}) \quad (\text{A3.12})$$

Na quinta linha,  $a_{+2}$  fica em função de  $a_{+3}$ :

$$a_{+2} = \frac{1}{12}(-1 - 48a_{+3}) \quad (\text{A3.13})$$

A Equação A3.4 revela que o número de onda efetivo é uma somatória de números complexos. Esses números complexos podem ser escritos na forma trigonométrica:

$$e^{i.j.k.\Delta x} = \cos(j.k.\Delta x) + i \cdot \sin(j.k.\Delta x) \quad (\text{A3.14})$$

então, a integral da Eq. A3.5 pode ser reescrita como:

$$E = \int_{\pi/16}^{\pi/2} \left| k.\Delta x - \frac{(-i)}{\Delta x} \left[ \sum_{j=-3}^3 a_j (\cos(j.k.\Delta x) + i \cdot \sin(j.k.\Delta x)) \right] \cdot \Delta x \right|^2 d(k.\Delta x) \quad (\text{A3.15})$$

Fazendo as simplificações, obtém-se:

$$E = \int_{\pi/16}^{\pi/2} \left| k.\Delta x - \sum_{j=-3}^3 a_j (\sin(j.k.\Delta x) - i \cdot \cos(j.k.\Delta x)) \right|^2 d(k.\Delta x) \quad (\text{A3.16})$$

Abrindo-se o somatório:

$$\begin{aligned}
E = & \int_{\pi/16}^{\pi/2} |k \cdot \Delta x - [a_{-3}(\sin(-3 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(-3 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
& + a_{-2}(\sin(-2 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(-2 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
& + a_{-1}(\sin(-1 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(-1 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
& + a_0(\sin(0 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(0 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
& + a_{+1}(\sin(1 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(1 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
& + a_{+2}(\sin(2 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(2 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
& + a_{+3}(\sin(3 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(3 \cdot k \cdot \Delta x))]|^2 d(k \cdot \Delta x)
\end{aligned} \tag{A3.17}$$

O coeficiente  $a_0$  não aparece na dedução do esquema de diferenças finitas centradas, portanto, seu valor é zero. O resultado dessa integral é:

$$\begin{aligned}
E = & \frac{1}{36} \left( -\frac{320}{3} + \frac{1}{8\sqrt{2}} + \frac{1533\pi^3}{1024} + \pi \left( \frac{551}{32} - 6\cos\left[\frac{\pi}{16}\right] + \frac{3}{8}\cos\left[\frac{\pi}{8}\right] \right) + 104\sin\left[\frac{\pi}{16}\right] + 13\sin\left[\frac{\pi}{8}\right] + \right. \\
& \left. \frac{3}{5}a_{+3}^2 \left( -7168 + 390\sqrt{2} + 2205\pi + 20\cos\left[\frac{\pi}{8}\right] - 192\cos\left[\frac{3\pi}{16}\right] + 5760\sin\left[\frac{\pi}{16}\right] + 900\sin\left[\frac{\pi}{8}\right] - \right. \right. \\
& \left. \left. 1600\sin\left[\frac{3\pi}{16}\right] \right) + \frac{3}{5}a_{+3} \left( -2176 + 30\sqrt{2} - 4\cos\left[\frac{3\pi}{16}\right] - 5\pi(-125 + 15\cos\left[\frac{\pi}{16}\right] - 6\cos\left[\frac{\pi}{8}\right] + \right. \right. \\
& \left. \left. \cos\left[\frac{3\pi}{16}\right]) + 1960\sin\left[\frac{\pi}{16}\right] + 80\sin\left[\frac{\pi}{8}\right] - 220\sin\left[\frac{3\pi}{16}\right] - \frac{8}{3}\sin\left[\frac{3\pi}{16}\right] \right)
\right) \tag{A3.18}
\end{aligned}$$

uma função do segundo grau em  $a_{+3}$ , cuja a concatividade é voltada para cima (ponto de mínimo).

É interessante observar que a expressão acima não contém qualquer termo complexo. Em um esquema de diferenças finitas centradas, os termos equidistantes do ponto de referência tem o mesmo valor em módulo, com sinal trocado (Eq. A3.19):

$$a_{-n} = -a_{+n} \tag{A3.19}$$

o que faz as parcelas complexas dos pontos anteriores se cancelarem com as parcelas complexas dos pontos posteriores. Poderia ter-se utilizado dessa informação para minorar o esforço computacional de solução da integral da Eq. A3.17, mas, como esse trabalho possui um forte enfoque na formação e consolidação do conhecimento, preferiu-se omitir essa informação, com o intuito de mostrar a consistência matemática do esquema.

Diferenciando-se o resultado da integral e igualando-o a zero se obtém  $a_{+3}$ :

$$a_{+3} = \frac{(2176 - 30\sqrt{2} - 625\pi + 75\pi\cos[\frac{\pi}{16}] - 30\pi\cos[\frac{\pi}{8}] + 4\cos[\frac{3\pi}{16}] + 5\pi\cos[\frac{3\pi}{16}] - 1960\sin[\frac{\pi}{16}] - 80\sin[\frac{\pi}{8}] + 220\sin[\frac{3\pi}{16}])}{(2(-7168 + 390\sqrt{2} + 2205\pi + 20\cos[\frac{\pi}{8}] - 192\cos[\frac{3\pi}{16}] + 5760\sin[\frac{\pi}{16}] + 900\sin[\frac{\pi}{8}] - 1600\sin[\frac{3\pi}{16}]))}$$

$$a_{+3} = 0.0265199521 \quad (\text{A3.20})$$

Com o valor de  $a_{+3}$  se obtém  $a_{+2}$ . Com  $a_{+3}$  e  $a_{+2}$  se obtém  $a_{+1}$ , e assim por diante. Segue a Tabela A3.1 de pesos para alguns esquemas DRP.

Tabela A3.1 – Pesos para esquemas DRP.

Pontos/Ordem	2 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>
$a_{-4}$			0,005939804
$a_{-3}$		-0,0265199521	-0,052305492
$a_{-2}$	0,123171607	0,189413142	0,233157260
$a_{-1}$	-0,746343213	-0,799266427	-0,833157260
$a_0$	0	0	0
$a_{+1}$	0,746343213	0,799266427	0,833157260
$a_{+2}$	-0,123171607	-0,189413142	-0,233157260
$a_{+3}$		0,0265199521	0,052305492
$a_4$			-0,005939804

Como já mencionado anteriormente, o DRP foi idealizado inicialmente na forma de um esquema centrado; a tentativa de se construir um esquema deslocado usando os mesmos limites de integração (de  $\pi/16$  a  $\pi/2$ ) da integral do erro resulta no surgimento de termos complexos na solução da integral do erro, inviabilizando o esquema para aplicação nas fronteiras do domínio e em obstáculos imersos no interior do escoamento. No entanto, fazendo alteração desses limites, é possível construir esquemas deslocados com o DRP. Utilizando limites simétricos em relação ao ponto  $k.\Delta x = 0$ , esses termos complexos são cancelados.

O interior da integral do erro do esquema DRP para um esquema deslocado 4-2 (quatro pontos atrasados em relação ao ponto de referência e dois pontos adiantados) é:

$$\begin{aligned}
 & |k \cdot \Delta x - [a_{-4}(\sin(-4 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(-4 \cdot k \cdot \Delta x)) + a_{-3}(\sin(-3 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(-3 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
 & + a_{-2}(\sin(-2 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(-2 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
 & + a_{-1}(\sin(-1 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(-1 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
 & + a_0(\sin(0 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(0 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
 & + a_{+1}(\sin(1 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(1 \cdot k \cdot \Delta x)) \\
 & + a_{+2}(\sin(2 \cdot k \cdot \Delta x) - i \cos(2 \cdot k \cdot \Delta x))]|^2
 \end{aligned} \tag{A3.21}$$

Para um valor de  $k \cdot \Delta x = -1$ , a expressão A3.21 é escrita como:

$$\begin{aligned}
 & |-1 - [a_{-4}(\sin(+4) - i \cos(+4)) + a_{-3}(\sin(+3) - i \cos(+3)) + a_{-2}(\sin(+2) - i \cos(+2)) \\
 & + a_{-1}(\sin(+1) - i \cos(+1)) + a_0(\sin(0) - i \cos(0)) \\
 & + a_{+1}(\sin(-1) - i \cos(-1)) + a_{+2}(\sin(-2) - i \cos(-2))]|^2
 \end{aligned} \tag{A3.22}$$

lembrando que, como agora o esquema não é mais centrado,  $a_0 \neq 0$ . Tomando o ponto simétrico,  $k \cdot \Delta x = +1$ , a expressão A3.21 é escrita como:

$$\begin{aligned}
 & |+1 - [a_{-4}(\sin(-4) - i \cos(-4)) + a_{-3}(\sin(-3) - i \cos(-3)) + a_{-2}(\sin(-2) - i \cos(-2)) \\
 & + a_{-1}(\sin(-1) - i \cos(-1)) + a_0(\sin(0) - i \cos(0)) \\
 & + a_{+1}(\sin(+1) - i \cos(+1)) + a_{+2}(\sin(+2) - i \cos(+2))]|^2
 \end{aligned} \tag{A3.23}$$

Ao se elevar ao quadrado, surgirá uma enorme expressão contendo parcelas imaginárias que se anularão quando a integral percorrer todo o intervalo simétrico de integração  $[-k \cdot \Delta x, +k \cdot \Delta x]$ .

Somente para efeito didático, suponha-se que a expressão a ser elevada ao quadrado dentro da integral do erro seja algo como:

$$[\sin(k \cdot \Delta x) - i \cos(k \cdot \Delta x)]^2 \tag{A3.24}$$

então, para posições simétricas dentro do intervalo de integração,

$$\begin{cases} k \cdot \Delta x = -1: [\sin(-1) - i \cos(-1)]^2 \\ k \cdot \Delta x = +1: [\sin(+1) - i \cos(+1)]^2 \end{cases} \quad (\text{A3.25})$$

que se converteria em:

$$\begin{cases} k \cdot \Delta x = -1: [-\sin(+1) - i \cos(+1)]^2 \\ k \cdot \Delta x = +1: [+ \sin(+1) - i \cos(+1)]^2 \end{cases} \quad (\text{A3.26})$$

Elevando ao quadrado, se obtêm:

$$\begin{cases} k \cdot \Delta x = -1: [-\cos^2(+1) + 2i \cos(+1)\sin(+1) + \sin^2(+1)] \\ k \cdot \Delta x = +1: [-\cos^2(+1) - 2i \cos(+1)\sin(+1) + \sin^2(+1)] \end{cases} \quad (\text{A3.27})$$

Vê-se claramente que os termos imaginários se cancelam ao se integrar a expressão A3.24 com limites simétricos. Observando essa alteração nos limites de integração da integral do erro, o procedimento para se obter os coeficientes (pesos) do esquema deslocado é o mesmo do esquema centrado apresentado anteriormente. Fica claro também que o esquema centrado pode se utilizar dos mesmos limites de integração dos esquemas deslocados.

O DRP original de Tam e Webb (1993) é o esquema de 4<sup>a</sup> ordem e 7 pontos, sendo o ponto  $a_0$  sempre zero para o esquema centrado. Pelo mesmo motivo, os esquemas de 2<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> ordens tem 5 e 9 pontos, respectivamente, e foram obtidos seguindo exatamente o mesmo procedimento apresentado para o DRP de 4<sup>a</sup> ordem.