

BRUNO GUARALDO NETO

Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas
Dinâmicos Combinando Materiais Viscoelásticos e
Materiais com Memória de Forma para o Controle
Passivo de Vibrações e Ruído



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2012

BRUNO GUARALDO NETO

**MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE SISTEMAS
DINÂMICOS COMBINANDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS E
MATERIAIS COM MEMÓRIA DE FORMA PARA O CONTROLE
PASSIVO DE VIBRAÇÕES E RUÍDO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima

Co-Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

Uberlândia

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

H558m 2012 Guinaldo Neto, Bruno, 1985-
Modelagem por elementos finitos de sistemas dinâmicos combinando materiais viscoelásticos e materiais com memória de forma para o controle passivo de vibrações e ruído / Bruno Guinaldo Neto. - 2012.
61 f. : il.

Orientador: Antonio Marcos Gonçalves de Lima.
Coorientador: Domingos Alves Rade.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Amortecimento (Mecânica) - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. 4. Vibração - Teses. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, 1975- II. Rade, Domingos Alves. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Folha reservada para a folha de aprovação.

Aos meus pais Luiz e Denise e às
minhas irmãs, Thaís e Lívia, pelo amor,
suporte e incentivo incondicional
durante toda minha vida.

Agradecimentos

Aos meus pais Luiz e Denise e às minhas irmãs Thaís e Livia pelo incentivo, suporte, confiança e amor.

Aos meus tios Luiz Henrique e Rita e aos meus primos Henrique e Mariana pelo carinho e momentos de descontração durante os anos que passei em Uberlândia.

À minha namorada Vanessa pelo suporte, carinho, ombro amigo, compreensão e amor durante todo o processo de realização deste trabalho

A todos meus colegas do laboratório LMEst (que se tornaram grandes amigos ao longo do tempo) pelas contribuições específicas neste trabalho de dissertação e principalmente pelos momentos de companheirismo, solidariedade ao longo deste período de dois anos.

Ao meu orientador Professor Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima pela dedicação, competência, companheirismo e ensinamentos ao longo deste trabalho.

Ao meu co-orientador Professor Dr. Domingos Alves Rade pela colaboração prestada a esse trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Estruturas Inteligentes em Engenharia pela oportunidade de realizar este trabalho.

GUARALDO NETO, B. **Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas Dinâmicos Combinando Materiais Viscoelásticos e Materiais com Memória de Forma para o Controle Passivo de Vibrações e Ruído.** 2012. 121f. Universidade Federal de Uberlândia.

Resumo

É sabido que o mecanismo de amortecimento dos materiais tradicionais utilizados para o controle passivo de vibrações, tais como os elastômeros, são fortemente dependentes de parâmetros ambientais e operacionais como frequência e temperatura de operação. Com relação à temperatura, um aspecto importante a ser considerado é o fenômeno de autoaquecimento interno, que pode comprometer significativamente a capacidade dissipativa em sistemas críticos tornando-se necessária a utilização de dispositivos amortecedores que sejam eficazes em altas temperaturas. As ligas com memória de forma apresentam vantagens significativas em relação aos elastômeros em razão de seu comportamento pseudoelástico em um diagrama tensão-deformação, o que permite seu emprego como dispositivos dissipadores de energia e elementos estruturais em várias aplicações de engenharia. Neste trabalho é apresentado um procedimento de modelagem no domínio do tempo, de estruturas contendo materiais viscoelásticos e ligas com memória de forma. O principal objetivo é o desenvolvimento de uma metodologia, implementada via Matlab, baseada no método dos elementos finitos para a realização de análises de estruturas de engenharia tratadas com camada restrita passiva e fios discretos de ligas com memória de forma visando o aumento de amortecimento passivo nas mesmas. Uma vez que as propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos são dependentes da frequência e da temperatura foi utilizado o modelo derivativo fracionário caracterizado por quatro parâmetros. Para a modelagem das respostas histeréticas das ligas com memória de forma, fez-se uso de um modelo fenomenológico simplificado adequado à realização de estudos paramétricos dos sistemas dinâmicos propostos. Após a discussão de vários aspectos teóricos, respostas no domínio do tempo são calculadas para uma viga sanduíche de três camadas combinando material viscoelástico e fios de ligas com memória de forma e os principais aspectos da metodologia são destacados.

Palavras Chave: Controle passivo. Amortecimento viscoelástico. Ligas com memória de forma. Método dos elementos finitos.

GUARALDO NETO, B. **Finite Element Modeling of Dynamic Systems Combining Viscoelastic Materials and Shape Memory Materials for the Passive Control of Vibration and Noise.** 2012. 121f M. Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Abstract

It is widely known that the damping mechanisms of most traditional damping materials applied as passive control of vibrations such as elastomers are highly dependent upon environmental and operational parameters such as the excitation frequency and temperature. Regarding this later, variations due to the self-heating phenomenon can jeopardize the damping capability in critical systems, which lead to the requirement of conceiving damping systems with the desired effectiveness at higher temperatures. Shape memory alloys present potential advantages over the traditional elastomers due to their large pseudoelastic hysteresis loop in stress-strain relationship and it can be used as damping material and structural elements in various engineering applications. In this work, a time-domain modeling procedure of structures containing viscoelastic materials and shape memory alloys is addressed. The main goal is the development of methodology based on FEM, implemented in Matlab, in order to perform the analysis of engineering structures treated by passive constraining damping layers and pseudoelastic shape memory alloy wires for passive damping augmentation. Since the mechanical properties of viscoelastic materials are frequency- and temperature-dependent, a four-parameter fractional derivative model has been retained. To model the hysteresis response of the shape memory alloy, a suitable phenomenological simplified model for performing the parametric study of such dynamic system has been used. After the discussion of various theoretical aspects, the time-domain responses are calculated for a three-layer sandwich beam containing viscoelastic materials and shape memory alloy wires and the main features of the methodology are highlighted.

Keywords: Passive control. Viscoelastic damping. Shape memory alloys. FEM.

LISTA DE FIGURAS

Figuras	Pág.
Figura 1.1 - Exemplos de aplicação de materiais viscoelásticos no setor automobilístico (www.trelleborg.com , de LIMA, 2003).	3
Figura 1.2 - Aplicação de material viscoelástico em estruturas aeronáuticas (http://www.smac.fr).	3
Figura 1.3 - (a) <i>Stent</i> de NiTi utilizado em aplicações cardiovasculares (MACHADO; SAVI, 2003); (b) aplicação de fios de NiTi para correção dentária (www.orthodontic-care.com); (c) Implantes de NiTi utilizados em aplicações ortopédicas (http://www.biomedicalalloys.com).	5
Figura 1.4 - Aplicação de ligas com memória de forma na indústria aeronáutica (LAGOUDAS, 2008).	6
Figura 2.1 - Representação do acoplamento entre domínios físicos (adaptado de Leo, 2007).	10
Figura 2.2 - Representação esquemática das mudanças de fase ocorridas nas LMFs: (a) diagrama temperatura-deformação (adaptado de dos Santos (2011)); (b) diagrama tensão-temperatura (adaptado de Lagoudas (2008)).	11
Figura 2.3 - Representação esquemática do efeito de memória de forma para uma liga de NiTi (adaptada de Hartl e Lagoudas (2007)).	13
Figura 2.4 - Diagrama de fase representando o efeito pseudoelástico das LMFs (adaptada de Lagoudas (2008)).	14
Figura 2.5 - Ciclo de histerese de uma LMF (adaptado de Auricchio et al., (1997)).	15
Figura 2.6 - Diagrama tensão-deformação do modelo de Lagoudas et al. (2001).	16
Figura 2.7 - Representação esquemática de um ensaio <i>DSC</i> (adaptado de Lagoudas (2008)).	17

Figura 2.8	- Diagrama tensão-deformação do efeito pseudoelástico obtido experimentalmente para diferentes temperaturas (adaptado de Lagoudas (2008)).	18
Figura 2.9	- Diagrama tensão-deformação para o modelo simplificado de Lagoudas.	22
Figura 2.10	- Diagrama tensão-deformação com ciclo incompleto de transformação de fase (adaptado de Lagoudas et al. (2001)).	22
Figura 2.11	- Comportamento pseudoelástico da LMF considerando ciclos incompletos de fase.	25
Figura 2.12	- Histórico de deformações durante as transformações incompletas de fase.	25
Figura 3.1	- Representação esquemática das funções de fluência (a) e de relaxação (b) para um material viscoelástico (adaptado de Lima (2003)).	28
Figura 3.2	- Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura para uma frequência constante (adaptado de Nashif et al. (1985)).	31
Figura 3.3	- Evolução da temperatura no amortecedor translacional: (a) variando a frequência da força para amplitude $F_0 = 400N$; (b) variando a amplitude da força para a frequência $f_0 = 10Hz$ (adaptado de Cazenove et al. (2011)).	33
Figura 3.4	- E' e η como função do tempo (adaptado de Cazenove et al. (2011)).	32
Figura 3.5	- Variação de E' e η com a frequência (adaptado de Nashif et al. (1985)).	33
Figura 3.6	- Curvas reconstruídas com os parâmetros identificados para o modelo MDF para várias temperaturas.	36
Figura 4.1	- Cinemática da deformação para o elemento de viga sanduíche (adaptado de Galucio et al. (2004)).	40
Figura 4.2	- Representação esquemática da viga sanduíche em balanço contendo fios de LMFs.	48
Figura 4.3	- Representação da deformação sofrida pelo fio 1 de LMF devido à deflexão transversal da viga (figura modificada de Ghandi e Chapius (2002)).	49

Figura 4.4 - Representação dos esforços impostos à viga sanduíche pelos fios de LMFs.	51
Figura 4.5 - Fluxograma do processo iterativo da resolução da Eq.(4.24).	55
Figura 5.1 - Sistema de 1 gdl com elemento pseudoelástico (adaptado de Lagoudas et al. (2001)).	58
Figura 5.2 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,01m$).	60
Figura 5.3 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,01m$).	60
Figura 5.4 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 325K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,01m$).	61
Figura 5.5 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 325 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,01m$)	61
Figura 5.6 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315K$, $f = 20Hz$, $Y_0 = 0,01m$).	62
Figura 5.7 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 20Hz$, $Y_0 = 0,01m$).	62
Figura 5.8 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315 K$, $f = 80Hz$, $Y_0 = 0,01m$).	63
Figura 5.9 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 80Hz$, $Y_0 = 0,01m$).	63
Figura 5.10 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,04m$).	64
Figura 5.11 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,04m$)	64
Figura 5.12 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,005m$).	65
Figura 5.13 - Curvas tensão-deformaçãoobtidas ($T = 315K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,005m$).	65
Figura 5.14 - Representação do sistema de 2 gdl's contendo elemento LMF.	66
Figura 5.15 - Deslocamentos das estruturas EP e ES para $F_0 = 20 kN$ e $f \cong 33.7 Hz$	68
Figura 5.16 - Curvas tensão-deformação do elemento LMF para $F_0 = 20kN$ e $f \cong 33.7 Hz$.	65

Figura 5.17 - Deslocamentos das massas das EP e ES para $F_0 = 50 \text{ kN}$ e $f = 23 \text{ Hz}$.	69
Figura 5.18 - Curvas tensão-deformação do elemento LMF para $F_0 = 50 \text{ kN}$ e $f = 23 \text{ Hz}$.	68
Figura 5.19 - Deslocamentos da EP considerando o elemento LMF da ES sem e com efeito pseudoelástico para $F_0 = 50 \text{ kN}$ e $f = 23 \text{ Hz}$.	70
Figura 5.20 - Viga sanduíche em balanço tratada com camada restrita passiva e fios de LMF.	71
Figura 5.21 - Deslocamento transversal da viga sem qualquer tipo de tratamento.	73
Figura 5.22 - Deslocamento transversal da viga tratada com camada restrita passiva.	73
Figura 5.23 - Deslocamento transversal da viga base contendo fios discretos de LMF.	74
Figura 5.24 - Curvas tensão-deformação dos fios de LMFs aplicados à viga base.	74
Figura 5.25 - Deslocamento transversal da viga sanduíche contendo fios discretos de LMFs.	75
Figura 5.26 - Curvas tensão-deformação dos fios de LMFs a 26°C .	76
Figura 5.27 - Curvas tensão-deformação dos fios de LMFs a 42°C .	76
Figura 5.28 - Comparação entre os deslocamentos transversais da viga tratada para as diferentes situações analisadas.	77

LISTA DE TABELAS

Tabela	Pág.
Tabela 2.1 - Dados da LMF utilizada por Lagoudas et al. (2001).	21
Tabela 3.1 - Parâmetros identificados para o modelo MDF.	35
Tabela 5.1 - Parâmetros do sistema de 1 gdl (extraídos de Lagoudas et al. (2001)).	60
Tabela 5.2 - Propriedades físicas e geométricas dos fios de LMFs.	71
Tabela 5.3 - Propriedades físicas e geométricas das camadas da viga sanduíche.	72

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras latinas:

A_{j+1}	: Coeficientes de Grünwald.
C	: Coeficiente de influência de tensão.
DSC	: <i>Differential Scanning Calorimetry</i> .
$E(\omega)$: Módulo complexo do material viscoelástico.
E_A	: Módulo de elasticidade da fase puramente austenítica das LMFs.
E_b, E_c	: Módulo de elasticidade das camadas elásticas da viga sanduíche.
E_M	: Módulo de elasticidade da fase puramente martensítica das LMFs.
E_0	: Módulo de armazenamento ou módulo a baixa frequência.
E_∞	: Módulo de elasticidade dinâmico ou módulo a alta frequência.
$E'(\omega)$: Módulo de armazenamento.
$E''(\omega)$: Módulo de perda.
\bar{E}	: Módulo de elasticidade longitudinal do material viscoelástico.
E_v^*	: Módulo de elasticidade longitudinal da camada viscoelástica.
$F(\sigma_0, t)$: Função de fluência.
$f(t)$: Vetor de esforços externos em nível global.
$f_{LMF}(t)$: Vetor de carregamento expandido devido aos fios de LMF.
$f^{(e)}(t)$: Vetor de esforços externos em nível elementar.
$f_{LMF}^{nd}(t)$: Vetor de carregamento nodal devido aos fios de LMF.
F_f^T	: Força dos fios de LMF.
$\tilde{f}_v(t - j\Delta t)$: Vetor de esforços global devido à camada viscoelástica.
$\tilde{f}_v^{(e)}(t - j\Delta t)$: Vetor de esforços elementar devido à camada viscoelástica.

\bar{G}	: Módulo de cisalhamento do material viscoelástico.
G_v^*	: Módulo de cisalhamento da camada viscoelástica
$H(s)$: Função de dissipação.
I_b, I_c, I_v	: Momento de inércia das camadas da viga sanduíche.
K_e	: Matriz de rigidez global das camadas elásticas da viga sanduíche.
K_{LMF}	: Matriz de rigidez global devido aos fios de LMF.
$K_e^{(e)}$: Matriz de rigidez elementar das camadas elásticas da viga sanduíche.
$K_v^{(e*)}$: Matriz de rigidez elementar da camada viscoelástica.
\tilde{K}_v	: Matriz de rigidez modificada global da camada viscoelástica.
M	: Matriz de massa global da viga sanduíche.
M^d	: Martensita não maclada.
$M^{(e)}$: Matriz de massa elementar da viga sanduíche.
$N(x)$: Matriz contendo as funções de forma.
$R(\varepsilon_0, t)$: Função de relaxação.
s	: Variável complexa de Laplace.
$u(t)$: Vetor dos graus de liberdade global.
$u(x, t)$: Vetor dos deslocamentos generalizados da viga sanduíche.
$u_{(e)}(t)$: Vetor dos graus de liberdade elementares.
$\bar{u}(t)$: Vetor dos graus de liberdade inelásticos.

Letras gregas:

α	: Operador de ordem fracionária.
β, γ	: Parâmetros de integração do método de Newmark.
$\gamma_{xz}(x, z, t)$: Deformação de cisalhamento da camada viscoelástica.
$\varepsilon(x, z, t)$: Vetor de deformação longitudinal.
$\bar{\varepsilon}(t)$: Deformação inelástica.
$\eta(\omega)$: Fator de perda.
$\theta_b, \theta_c, \theta_v$: Rotação das camadas da viga sanduíche.

θ_f	: Ângulo de fixação dos fios de LMF.
κ_v	: Fator de correção de cisalhamento transversal da camada viscoelástica.
Λ	: Máxima deformação de transformação.
μ	: Viscosidade:
ν :	: Coeficiente de Poisson.
ρ	: Densidade.
$\sigma(x, z, t)$: Vetor de tensão longitudinal da camada viscoelástica.
τ	: Tempo de relaxação.
$\bar{\tau}$: Tensão cisalhante.
ω	: Frequência de excitação.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA.....	9
2.1. Introdução às ligas com memória de forma.....	9
2.2. Fenomenologia da transformação de fase das LMFs	10
2.3. Efeito de memória de forma	12
2.4. Efeito pseudoelástico.....	13
2.5. Modelagem do efeito pseudoelástico das LMFs	15
2.5.1. Modelo simplificado de Lagoudas et al. (2001).....	16
2.5.2. Determinação da resposta tensão-deformação das LMFs	17
2.5.3 Ciclo completo de transformação de fase.....	20
2.5.4. Ciclo incompleto de transformação de fase.....	22
CAPÍTULO III - MATERIAIS VISCOELÁSTICOS.....	27
3.1. Princípios da viscoelasticidade linear.....	27
3.2. O conceito de módulo complexo	29
3.3. Influência da frequência de excitação e da temperatura.....	30
3.3.1. Efeito da temperatura ambiente	30
3.3.2. O fenômeno do autoaquecimento interno.....	31
3.3.3. Efeito da frequência de excitação	32
3.4. Modelagem do comportamento viscoelástico via modelo derivativo fracionário.....	33
3.4.1. Incorporação do modelo MDF em matrizes de elementos finitos.....	36
CAPÍTULO IV - MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS MULTICAMADAS CONTENDO MATERIAL VISCOELÁSTICO E LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA	39
4.1. Relações cinemáticas para a viga sanduíche de três camadas	39
4.2. Relações deformação-deslocamento.....	41

4.3. Discretização por elementos finitos	42
4.4. Obtenção das matrizes elementares e montagem das equações globais.	44
4.5. Incorporação do modelo MDF nas matrizes de elementos finitos.	46
4.6. Incorporação do efeito pseudoelástico das LMFs no sistema viscoelástico.	46
4.7. Resolução numérica das equações do movimento da viga sanduíche com fios de LMFs.	53
CAPÍTULO V - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	57
5.1. Sistema de um grau de liberdade contendo elemento LMF.....	57
5.1.1. Variando a temperatura do elemento LMF	61
5.1.2. Variando a frequência da excitação	62
5.1.3. Variando a amplitude da excitação	64
5.2. Sistema de dois graus de liberdade contendo elemento LMF.....	66
5.3. Viga sanduíche tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs	70
5.3.1. Viga tratada somente com camada restrita passiva.....	73
5.3.2. Viga tratada somente com fios discretos de LMFs	74
5.3.3. Viga tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs	75
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES GERAIS E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE.....	79
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	83
ANEXO A	91
A.1 Expressões para os deslocamentos e deformações da viga sanduíche.....	91
A.2 Energia Cinética. Matriz de Massa Elementar.....	92
A.3 Energia de Deformação. Matriz de Rigidez Elementar.	94

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Um dos grandes problemas da Engenharia Mecânica e Aeronáutica é sem dúvida a busca por técnicas cada vez mais eficientes que permitam o controle dos níveis de vibração e ruído de sistemas mecânicos, em virtude da tendência do desenvolvimento de estruturas cada vez mais extensas, leves e com velocidades de operação cada vez mais elevadas. Neste sentido, técnicas como modificação estrutural, limitação da faixa de operação de equipamentos, bem como a introdução de barreiras para contenção, são alguns exemplos de alternativas utilizadas para a redução dos níveis de vibração e ruído de sistemas mecânicos. Neste contexto, a fim de eliminar ou atenuar os inúmeros inconvenientes causados pela vibração e ruído de sistemas dinâmicos, várias técnicas de controle têm sido empregadas para tratar esse problema, como por exemplo:

- técnicas de controle ativo que requerem a introdução de alguma forma de energia no sistema, e consistem geralmente no emprego de atuadores que são dispositivos externos capazes de desenvolver forças de controle que irão se contrapor às forças causadoras das vibrações (LIMA; ARRUDA, 1997, OGATA, 1997);
- técnicas de controle semi-ativo, que buscam reduzir as vibrações e ruído através de alterações controladas dos parâmetros físicos do sistema como massa, rigidez e amortecimento. Neste contexto, têm sido frequentemente utilizados os denominados *materiais inteligentes*, tais como os fluidos eletroreológicos e magnetoreológicos, as ligas com memória de forma (LMFs) (efeito de memória de forma) e os materiais piezelétricos, cujas características físicas podem ser alteradas através de variações

controladas de fatores ambientais tais como campos elétricos e magnéticos, e temperatura (BANKS, 1996, BENT et al., 1995);

- técnicas de controle passivo, como por exemplo, alterações de rigidez e massa de uma estrutura (procedimento de modificação estrutural) (DONE; HUGHES, 1976), limitação da faixa de operação do equipamento, introdução de barreiras para contenção ou mesmo desvio de vibração e ruído (NASHIF et al., 1985), a aplicação de materiais capazes de absorver a energia vibratória do sistema e dissipá-la sob a forma de calor, tais como os materiais viscoelásticos, ligas com memória de forma (efeito pseudoelástico) e o uso de absorvedores dinâmicos de vibração (ADVs) (HARTOG, 1956, KORONEV; RESNIKOV, 1993).

No que diz respeito às técnicas de controle passivo, o uso das LMFs e dos materiais viscoelásticos com o objetivo de aumentar o amortecimento passivo de sistemas e reduzir as vibrações e ruído têm crescido enormemente nos últimos anos (RAO, 2003, LAGOUDAS, 2008). Em particular, os materiais viscoelásticos, que podem ser aplicados sob a forma de tratamentos superficiais e/ou dispositivos discretos, como ilustrado nas Figs. 1.1 e 1.2, vêm sendo largamente utilizados para aumentar o amortecimento passivo de estruturas veiculares e aeroespaciais, em sistemas de controle e automação, satélites de comunicação, robótica, etc. (RAO, 2003, de LIMA, 2003). A necessidade então, por modelos matemáticos capazes de representar adequadamente o comportamento dinâmico desses materiais em função de fatores operacionais e ambientais tem motivado muitos pesquisadores em todo o mundo. Como exemplo, pode-se citar os modelos reológicos simples, como o modelo de Maxwell, o de Kelvin-Voigt e o de Zener (ou modelo Linear Padrão) (NASHIF et al., 1985), e os modelos modernos como o modelo dos campos de deslocamentos anelásticos (CDA) (LESIEUTRE; BIANCHINI, 1996), o modelo de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) (MCTAVISH; HUGHES, 1993) e o modelo das derivadas fracionárias (MDF) (BAGLEY; TORVIK, 1983, BAGLEY; TORVIK, 1985).

No âmbito da combinação do modelo MDF com a técnica de elementos finitos, Schmidt e Gaul (2002) desenvolveram um elemento finito tridimensional que leva em conta as relações tensão-deformação de materiais viscoelásticos lineares em sua forma fracionária, e que é solucionado pelo método de discretização de Grünwald-Letnikov. Além disso, a técnica de discretização leva em conta todo o histórico dos deslocamentos e das tensões em tempos

anteriores. Por outro lado, Galucio et al. (2004) apresentam outro método de representação do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos bastante atrativo para ser combinado com modelos de elementos finitos, uma vez que reduz o custo computacional necessário para a resolução do sistema de equações do movimento.

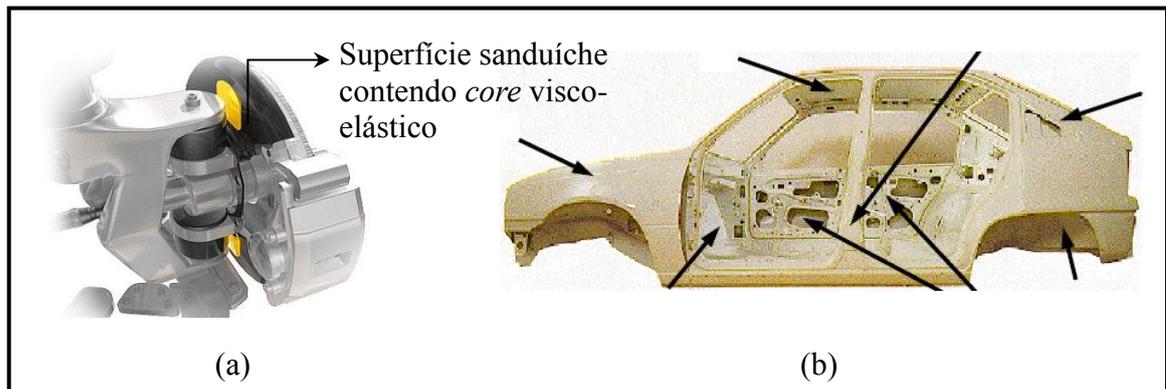


Figura 1.1 - Exemplos de aplicação de materiais viscoelásticos no setor automobilístico (www.trelleborg.com, de LIMA, 2003)

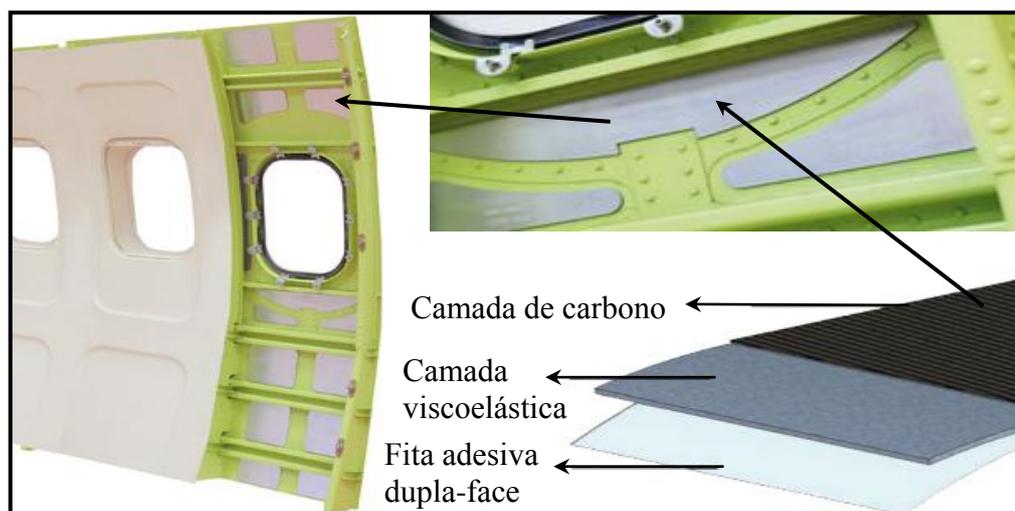


Figura 1.2 - Aplicação de material viscoelástico em estruturas aeronáuticas (<http://www.smac.fr>).

Nas últimas décadas, um grande esforço de pesquisa tem sido empregado para a combinação dos efeitos inerentes às LMFs com outros dispositivos destinados ao monitoramento (sensores) e ao controle de vibração e ruído de sistemas mecânicos (HARTL; LAGOUDAS, 2007). Conseqüentemente, com o aumento da inclusão desses materiais em estruturas mecânicas, modelos constitutivos têm sido extensivamente desenvolvidos para representar adequadamente o comportamento pseudoelástico e de memória de forma desses

materiais. No trabalho realizado por Savi e Paiva (2006) é apresentado um resumo sobre alguns importantes modelos constitutivos sob o ponto de vista de seu equacionamento matemático, comportamento termomecânico, bem como outras questões pertinentes às LMFs. Nesse sentido podem ser citados vários trabalhos visando a utilização das LMFs em sistemas mecânicos para aumentar o amortecimento passivo e conseqüentemente reduzir ruído e vibrações. Baz et al. (1990) demonstrou numérica e experimentalmente a possibilidade de controlar de forma ativa as vibrações de uma viga flexível com a utilização de fios LMFs. Liang e Rogers (1993) e Thomson et al. (1995) demonstraram numérico e experimentalmente a eficiência de fios de Nitinol (LMFs composto por titânio e níquel, desenvolvido pelo *Naval Ordnance Laboratory*) em controlar passivamente os níveis de vibração de uma viga submetida a um carregamento harmônico. Gandhi e Wolons (1999), caracterizam o amortecimento devido ao efeito pseudoelástico das LMFs utilizando o método do módulo complexo. Gandhi e Chapuis (2002) propuseram um sistema para controle passivo de vibrações contendo uma viga submetida a um carregamento harmônico com fios de LMFs pré-tensionados fixados a ela, realizando um estudo paramétrico do sistema e variando as condições de operação do sistema.

No que diz respeito à introdução de elementos de LMFs em dispositivos dissipadores de energia podem ser citados os trabalho de Lagoudas et al. (2001) que simulou um dispositivo de um grau de liberdade, utilizando um modelo constitutivo simplificado para o efeito pseudoelástico, caracterizado por ser um conjunto de equações constitutivas lineares fortemente dependentes da deformação e do histórico do carregamento. Williams et al. (2005) desenvolveu e modelou um absorvedor dinâmico de vibrações (ADV) adaptativo combinando um elemento LMF para o controle de vibrações de sistemas mecânicos contínuos. Rustighi et al. (2004), por sua vez implementou e projetou um absorvedor adaptativo-passivo utilizando elemento LMF, mostrando ser possível variar a frequência de sintonização do ADV, através de processos de aquecimento/resfriamento da liga com memória de forma, em virtude da variação do módulo de elasticidade do material.

Assim, dentre as principais aplicações industriais que utilizam as LMFs, podem ser citadas:

- Aplicação em absorvedores de vibração: neste caso, o comportamento histerético das LMFs é utilizado para reduzir os níveis de ruído e vibração de sistemas mecânicos, bem como garantir maior robustez ao sistema de controle, no que diz respeito ao

processo de sintonização do absorvedor dinâmico de vibração (Guaraldo-Neto et al., 2011a).

- Aplicação médica: a combinação dos efeitos de memória de forma e pseudoelasticidade das LMFs associados ao fator biocompatibilidade fizeram desses materiais, dispositivos importantes na área da saúde, aprimorando dispositivos já existentes, e minimizando, dessa forma, a necessidade de procedimentos cirúrgicos mais invasivos. Podem ser citadas aplicações no setor ortodôntico, com a utilização do efeito pseudoelástico em fios utilizados em aparelhos destinados a correção dentária; utilização de *stents* feitos de Nitinol, destinados a manter a circunferência das veias do corpo humano, em aplicações cardiovasculares, dispositivos destinados a estabilizar ossos fraturados, em aplicações ortopédicas, entre outros, como apresenta a Fig. 1.3 (Lagoudas (2007)).

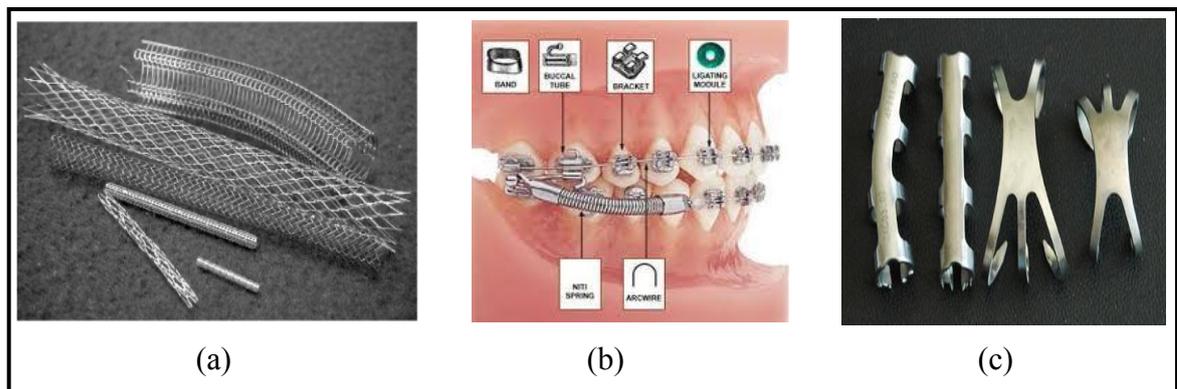


Figura 1.3 – (a) *Stent* de NiTi utilizado em aplicações cardiovasculares (MACHADO; SAVI, 2003); (b) aplicação de fios de NiTi para correção dentária (www.orthodontic-care.com); (c) Implantes de NiTi utilizados em aplicações ortopédicas (<http://www.biomedicalalloys.com>).

- Aplicação aeronáutica: neste caso, a aplicação se deve, principalmente, em virtude do efeito de memória de forma para promover a otimização dimensional de sistemas (devido à sua capacidade de recuperação total de forma e característica de atuador mecânico), substituindo mecanismos compostos por vários componentes (componentes hidráulicos e eletromecânicos) por apenas um elemento de LMF, conferindo maior precisão ao sistema, principalmente em baixas frequências, como mostra a Fig. 1.4 (HARTL; LAGOUDAS, 2007).



Figura 1.4 - Aplicação de ligas com memória de forma na indústria aeronáutica (LAGOUDAS, 2008).

Diante do que foi exposto anteriormente, este trabalho tem como principal objetivo o estudo e a implementação computacional de procedimentos para a modelagem de sistemas mecânicos contendo materiais viscoelásticos e ligas com memória de forma para o controle passivo de vibrações e ruído de sistemas dinâmicos. Neste sentido, inicialmente, foram realizadas simulações de sistemas discretos de um e dois graus de liberdade contendo apenas elementos de ligas com memória de forma para validar os processos de modelagem e implementação numérica propostos para a representar adequadamente o comportamento dinâmico dessas ligas. Em seguida, propôs-se a fixação discreta de fios de ligas com memória de forma a uma viga sanduíche contendo camada viscoelástica restrita passiva no sentido de associar as características dissipativas desses materiais e assim aumentar o amortecimento passivo em estruturas mecânicas, bem como reduzir algumas restrições associadas a esses materiais, como por exemplo, a perda de eficiência dos materiais viscoelásticos em função da variação da temperatura de operação.

Além deste capítulo introdutório, este trabalho é composto por mais cinco capítulos, organizados da seguinte forma:

O Capítulo II é dedicado aos conceitos básicos das ligas com memória de forma, bem como a fenomenologia de transformação de fase desses materiais. São ainda apresentados neste capítulo, os efeitos de memória de forma e pseudoelástico das LMFs e o desenvolvimento do modelo simplificado das LMFs utilizado neste trabalho para representar o comportamento pseudoelástico das mesmas.

O Capítulo III, será apresentado um resumo sobre a viscoelasticidade linear e a influência das condições ambientais e operacionais sobre o comportamento dinâmico dos

materiais viscoelásticos lineares. Ênfase é dada ao desenvolvimento do modelo derivativo fracionário (MDF) e a combinação do mesmo com as equações do movimento de sistemas.

O Capítulo IV é dedicado inicialmente à modelagem por elementos finitos do sistema estrutural utilizado neste trabalho para a incorporação das LMFs e do material viscoelástico. Esse sistema é composto por uma viga sanduíche de três camadas, sendo o núcleo viscoelástico. Em seguida, é realizada a incorporação de fios discretos pseudoelásticos à viga tratada com camada restrita passiva via utilização do modelo simplificado apresentado no Capítulo II.

No Capítulo V são apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas com o objetivo de validar e avaliar o procedimento de modelagem de dispositivos amortecedores proposto neste trabalho. Primeiramente são apresentados os resultados de sistemas discretos de um e dois graus de liberdade contendo elementos pseudoelásticos. Em seguida, são apresentadas as simulações da viga sanduíche tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs.

No Capítulo VI são apresentadas as conclusões gerais e as propostas de continuidade para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA

Este capítulo trata da caracterização do comportamento dinâmico das ligas com memória de forma, bem como da fenomenologia das transformações de fase e dos efeitos de memória de forma e pseudoelástico presentes nessas ligas. Além disso, ênfase será dada ao desenvolvimento do modelo simplificado proposto por Lagoudas et al. (2001) para representar o comportamento pseudoelástico das ligas com memória de forma para ciclos completos e incompletos de carregamento.

2.1. Introdução às ligas com memória de forma

Por muitos anos os metais desempenharam um papel importante na engenharia como materiais estruturais. Entretanto, o avanço tecnológico e o conhecimento mais aprofundado sobre a microestrutura e as técnicas de construção e fabricação dos materiais em geral, levou ao surgimento de uma nova classe de materiais multifuncionais que atendessem as necessidades específicas das estruturas modernas de engenharia (LAGOUDAS, 2008). Neste contexto, uma subclasse muito interessante de materiais capazes de atuar simultaneamente como sensores e atuadores são os denominados materiais ativos, como por exemplo, os materiais piezelétricos, que exibem acoplamento entre os campos mecânico e elétrico, os materiais piezomagnéticos, que são caracterizados pelo acoplamento entre os campos mecânico e magnético, e as ligas com memória de forma (LMFs), que exibem acoplamento entre os campos térmico e mecânico, como ilustrado na Fig. 2.1.

É importante ressaltar que devido ao tipo de acoplamento, os materiais ativos podem apresentar dois tipos de acoplamentos, a saber: o acoplamento direto, em que o acoplamento ocorre nos dois sentidos (os sinais de entrada podem ser de natureza mecânica ou não, e o

mesmo ocorrendo com a saída), e o acoplamento indireto, onde o acoplamento se dá em um único sentido.

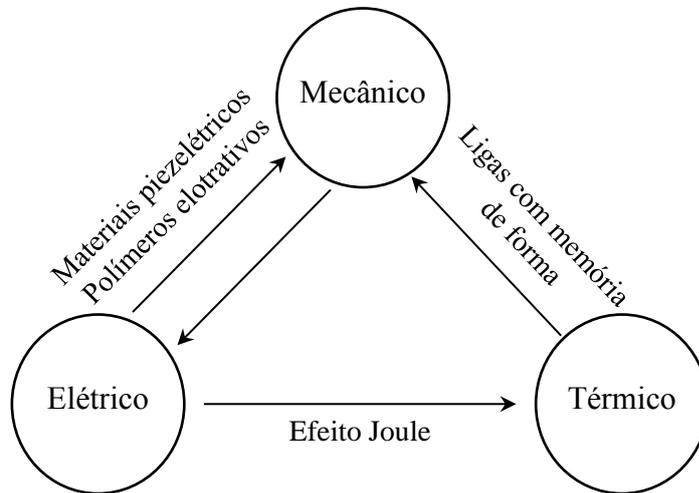


Figura 2.1 - Representação do acoplamento entre domínios físicos (adaptado de Leo, 2007).

As LMFs são materiais que podem recuperar completamente sua forma quando submetidas a um aumento de temperatura, mesmo para os casos em que elevados níveis de carregamentos mecânicos estejam presentes. Além disso, quando submetidas a esforços mecânicos cíclicos, elas podem atuar como absorvedores dinâmicos e dissipadores de energia, o que faz com que sejam utilizadas como atuadores, sensores ou absorvedores de impacto, e em aplicações onde se deseja aumentar o amortecimento passivo de sistemas vibratórios. Entretanto, seu comportamento está limitado a baixas frequências de atuação (LAGOUDAS, 2008).

2.2. Fenomenologia da transformação de fase das LMFs

Em geral, o diagrama de fase das ligas metálicas consiste de linhas de equilíbrio ou contornos de fase onde o equilíbrio entre as diferentes fases da liga podem coexistir (LAGOUDAS, 2008). Já as LMFs, dentro de sua faixa térmica de operação, podem apresentar mudanças cristalográficas reversíveis, variando entre as fases austenítica (A) e martensítica (M) como ilustrado na Fig. 2.2.

A Figura 2.2(b) demonstra que sob temperaturas elevadas e baixos níveis de tensão, a LMF apresenta uma estrutura cristalina austenítica (estável sob estas condições com uma rede cristalina organizada), e sob temperaturas mais baixas com níveis de tensão mais elevados, a

LMF apresenta uma estrutura martensítica (estável sob estas condições com uma rede cristalina não muito organizada) (AURRICCHIO et al., 1997). No entanto, em uma região intermediária dentro dos limites de temperatura, uma LMF é composta por porções de austenita e martensita, as quais são formadas mediante distorções da estrutura cristalina induzidas pela temperatura e tensão em um processo chamado de *transformação martensítica*. Como ilustrado na Fig. 2.2(a), nesse processo, cada cristal martensítico formado possui uma orientação chamada de variante (*variant*), cuja configuração pode assumir duas formas, a saber: (i) martensita maclada (M^t - *twinned martensite*), cujas variantes se autoacomodam (*self-accommodated martensite variant, multiple-variant martensite*) uma vez que não há uma direção preferencial para a transformação de fase e então utilizam os vários *habitat planes* existentes para formarem uma estrutura composta por uma série de variantes cristalograficamente equivalentes, de forma a minimizar um mau acoplamento entre a estrutura martensítica com a austenítica; (ii) martensita não-maclada (M^d - *detwinned martensite*), na qual há a formação dos cristais martensíticos em um *habitat plane* preferencial (associado a um estado de tensão preferencial) formando, assim, um único variante chamado de *single-variant martensite*, que também minimiza um mau acoplamento entre a estrutura martensítica e a austenítica (LAGOUDAS, 2008, AURRICCHIO et al.; 1997).

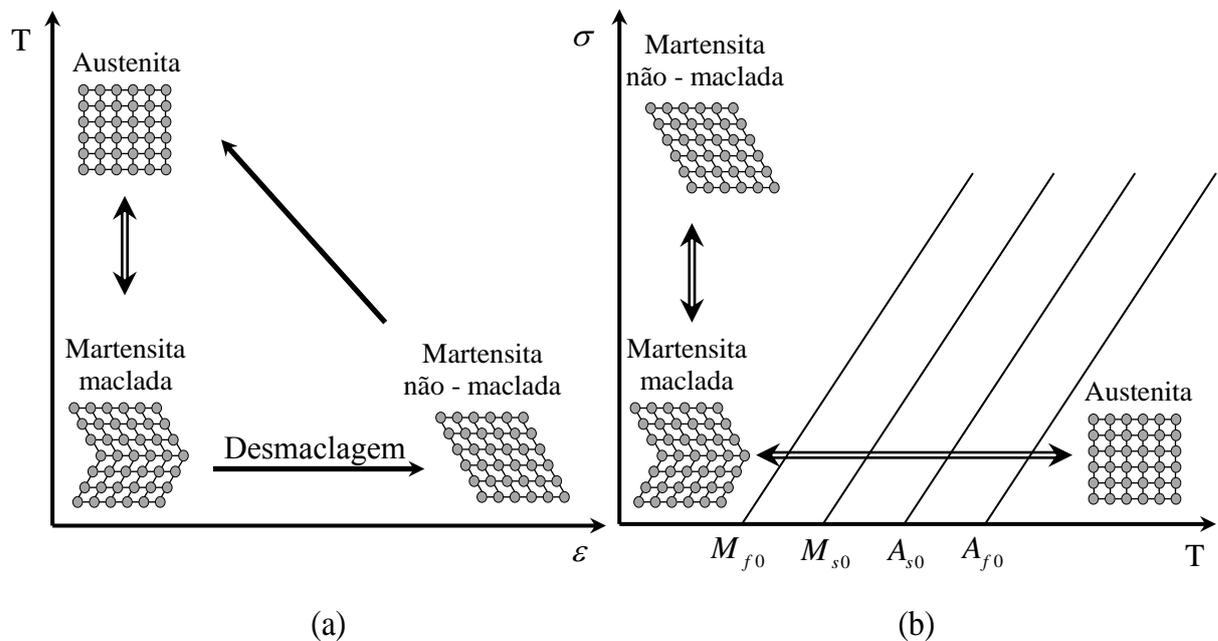


Figura 2.2 - Representação esquemática das mudanças de fase ocorridas nas LMFs: (a) diagrama temperatura-deformação (adaptado de dos Santos (2011)); (b) diagrama tensão-temperatura (adaptado de Lagoudas (2008)).

As temperaturas de transição, para uma condição nula de carregamento, em ordem crescente como mostrado na Fig. 2.2(b), são denominadas de temperatura final de martensita (M_{f0}), temperatura inicial de martensita (M_{s0}), temperatura inicial de austenita (A_{s0}) e temperatura final de austenita (A_{f0}).

A aplicação de carregamentos térmicos e mecânicos às LMFs podem gerar grandes deformações nas mesmas. No entanto, o seu comportamento termomecânico que é dependente do carregamento e da temperatura de operação do material, permite a dissipação de energia e a recuperação total da forma através dos efeitos pseudoelástico e de memória de forma.

2.3. Efeito de memória de forma

O efeito de memória de forma, presente apenas em materiais que exibem o processo de transformação martensítica, consiste na capacidade do material em recuperar totalmente grandes deformações plásticas, induzidas mecanicamente em baixas temperaturas, após a aplicação de um carregamento térmico (STOECKEL, 1995, OTSUKA; WAYMAN, 1998, LAGOUDAS, 2008).

A Figura 2.3 representa de forma esquemática o efeito de memória de forma para uma liga de NiTi. Inicialmente, a liga em seu estado puramente austenítico e livre de tensões (ponto A), sob resfriamento, inicia um processo de transformação direta até atingir o ponto B. Em temperaturas abaixo da M_f , com a liga em seu estado puramente martensítico e sob tensão, o material sofre um processo de reorientação das variantes (processo de desmaclagem) na qual a somatória das deformações de cada variante gera uma deformação macroscópica permanente no material que agora apresenta uma fase martensítica não-maclada, referente ao ponto C. Sob descarregamento, a parte elástica da deformação total é recuperada, enquanto é observada uma deformação residual permanente no material devido à estabilidade da rede cristalina da martensita não-maclada para esta condição termomecânica (ponto D). A liga sob aquecimento e não tensionada inicia o processo de transformação reversa, martensita-austenita, quando atinge a temperatura A_s (ponto E), e termina o processo de transformação recuperando totalmente a forma, quando é atingida a temperatura A_f . Esta condição garante estabilidade da rede cristalina da fase austenítica, recuperando totalmente a deformação plástica residual gerada durante o ciclo de carregamento, denominada de deformação de

transformação, ε' , (HARLT; LAGOUDAS, 2008, OTSUKA; WAYMAN, 1998, STOECKEL, 1995).

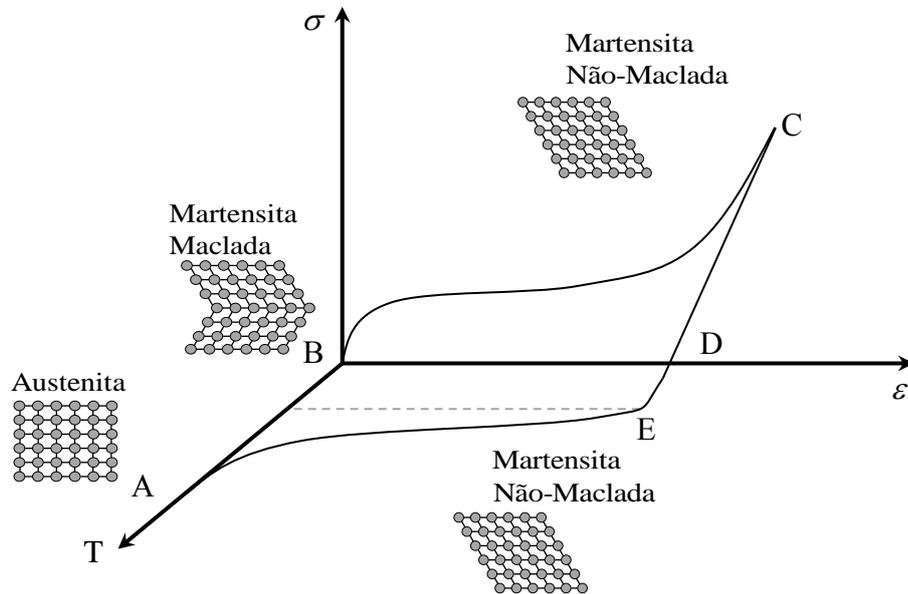


Figura 2.3 - Representação esquemática do efeito de memória de forma para uma liga de NiTi (adaptada de Hartl e Lagoudas (2007)).

O fenômeno descrito anteriormente é chamado de *one-way shape memory effect*, ou simplesmente efeito de memória de forma (EMF), devido à habilidade de recuperar totalmente sua forma inicial durante seu aquecimento após a formação de martensita não-maclada em razão da aplicação de um carregamento mecânico (LAGOUDAS, 2008).

2.4. Efeito pseudoelástico

O comportamento pseudoelástico das ligas com memória de forma é associado a um processo de transformações entre as fases austenita e martensita não-maclada, induzidas por carregamentos mecânicos cíclicos em um ambiente de operação com temperatura superior à temperatura final da austenita, A_f , condição que garante estabilidade à estrutura cristalina austenítica. Este efeito pseudoelástico das LMFs pode ser usado para aumentar o amortecimento passivo presente em sistemas dinâmicos e atenuar as vibrações mecânicas (LAGOUDAS, 2008, GANDHI; CHAPUIS, 2002). A Figura 2.4 mostra um diagrama de fase tensão-temperatura que ilustra de forma esquemática o efeito pseudoelástico das LMFs.

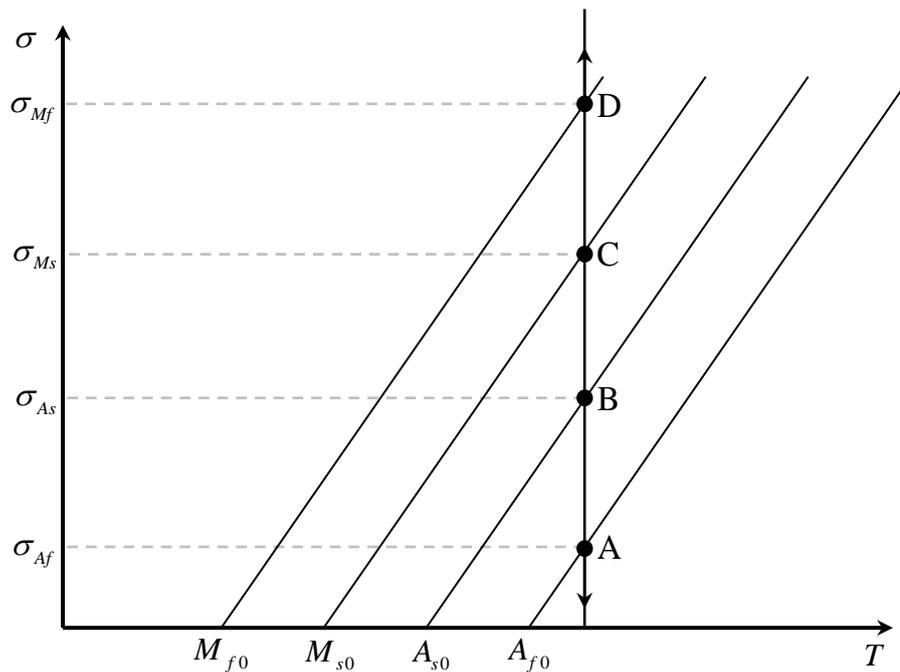


Figura 2.4 - Diagrama de fase representando o efeito pseudoelástico das LMFs (adaptada de Lagoudas (2008)).

A aplicação de um carregamento mecânico a uma LMF induz uma transformação entre as fases austenita e martensita não-maclada que se inicia no ponto A e termina em D. Quando a tensão atinge o valor σ_{Ms} (ponto C), a estrutura austenítica torna-se instável, induzindo um comportamento não-linear ao material com o início da transformação direta de fase, acarretando grandes níveis de deformação ao material com pouca variação da tensão, até que seja atingido o valor σ_{Mf} (ponto D). Nesta região do diagrama, a LMF é composta apenas por martensita, uma vez que nesta condição termomecânica (elevados níveis de tensão e temperatura), a martensita apresenta uma estrutura cristalina estável e um comportamento linear à medida que é elevado o nível de tensão aplicado ao material. Retirando-se o carregamento mecânico, o material inicia o processo de transformação reversa de fase, entre martensita não-maclada e austenita, tendo início quando o nível de tensão atinge σ_{As} (ponto B) e terminando quando atinge o nível σ_{Af} (ponto A), fazendo com que a LMF retorne à sua configuração inicial sem a presença de qualquer deformação residual. Esse processo leva à formação de ciclos de histerese no diagrama tensão-deformação, que correspondem ao efeito pseudoelástico das LMFs como ilustrado na Fig. 2.5 (AURRICCHIO et al., 1997, STOECKEL, 1995, LAGOUDAS, 2008).

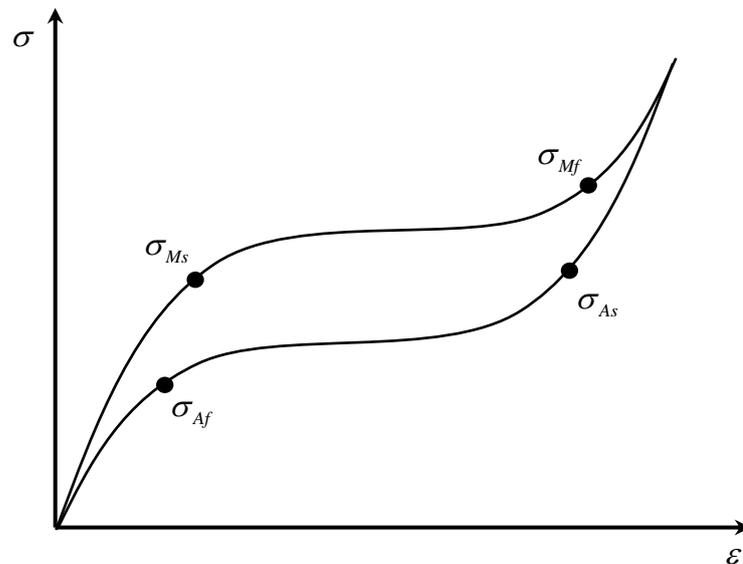


Figura 2.5 - Ciclo de histerese de uma LMF (adaptado de Auricchio et al., (1997)).

2.5. Modelagem do efeito pseudoelástico das LMFs

A capacidade das LMFs em dissipar energia de sistemas dinâmicos quando submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos, devido ao seu comportamento pseudoelástico, faz com que esses materiais sejam utilizados no controle passivo de vibração e ruído de sistemas mecânicos. Nesse sentido, a necessidade por modelos matemáticos que sejam capazes de representar o comportamento pseudoelástico das LMFs e as respectivas transformações de fase, vem estimulando, ao longo dos anos, inúmeros pesquisadores de todo o mundo.

Os modelos constitutivos que descrevem o efeito pseudoelástico das LMFs podem ser divididos em duas grandes classes, a saber: (i) a primeira, refere-se aos modelos baseados na termomecânica do contínuo, que compreende um conjunto de parâmetros físicos utilizados que devem ser obtidos através de processos de caracterização das LMFs e que antecedem a sua utilização em alguma estrutura. Como exemplo, podem ser citados os trabalhos realizados por Tanaka (1986), Sato e Tanaka (1986), Liang e Rogers (1990), Brinson (1993), Lagoudas et al. (1996), Bo e Lagoudas (1999), entre outros; (ii) o segundo grupo se refere aos modelos empíricos, baseados em sistemas de identificação. Estes modelos, utilizados para determinar ciclos de histerese de materiais, incluindo as LMFs, são bastante utilizados no controle não linear de estruturas inteligentes, uma vez que os parâmetros dos modelos são determinados em tempo real (*on line*) devido aos sinais de entrada e saída obtidos do sistema físico (LAGOUDAS et al., 2001, PAIVA; SAVI, 2005).

Com o intuito de utilizar um modelo constitutivo que represente o mais fielmente possível o comportamento pseudoelástico das LMFs quando submetidas a carregamentos mecânicos cíclicos para uma condição isotérmica de operação, e com baixo custo computacional de implementação, neste trabalho optou-se pelo modelo fenomenológico simplificado proposto por Lagoudas et al. (2001), como será detalhado na seção seguinte.

2.5.1. Modelo simplificado de Lagoudas et al. (2001)

O modelo simplificado de Lagoudas et al. (2001) é caracterizado por ser dependente da deformação e do histórico dos carregamentos para caracterizar as transformações direta e reversa que ocorrem nas LMFs, além de representar os ciclos de carregamentos incompletos. Assumindo que tanto a deformação de transformação quanto a tensão variam linearmente, este modelo apresenta um conjunto de equações lineares que permite a determinação da resposta pseudoelástica de uma LMF quando submetida a carregamentos mecânicos cíclicos.

Através da combinação das repostas pseudoelásticas das LMFs, experimentalmente obtidas para diferentes temperaturas de operação, e as temperaturas de transição, obtidas para uma condição nula de carregamento, obtida via utilização de um DSC (*Differential Scanning Calorimetry*) (LAGOUDAS et al., 2001), é possível determinar os parâmetros do material necessários para a construção do diagrama tensão-deformação como mostrado na Fig. 2.6, que é utilizado como base para a formulação do modelo simplificado de Lagoudas et al. (2001).

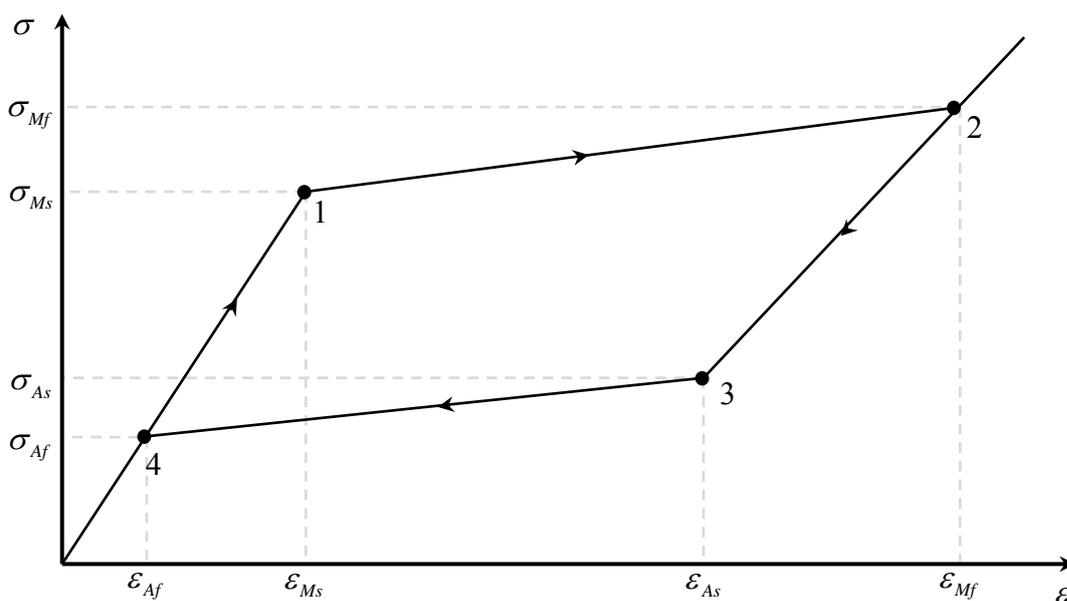


Figura 2.6 - Diagrama tensão-deformação do modelo de Lagoudas et al. (2001).

2.5.2. Determinação da resposta tensão-deformação das LMFs

Através de testes termomecânicos relativamente simples, é possível determinar os parâmetros do material que constituem o modelo simplificado do efeito pseudoelástico proposto por Lagoudas et al. (2001). O processo de determinação dos parâmetros a serem utilizados pelo modelo simplificado de Lagoudas é feito em duas etapas, a saber:

- Etapa 1: determinação das temperaturas de transição para uma condição de tensão nula. Nesta etapa, é utilizado um fragmento de LMF cuidadosamente extraído do corpo de prova para a realização de uma análise térmica *DSC* (*Differential Scanning Calorimeter*). Esta análise permite determinar as temperaturas de transição A_{f0} , A_{s0} , M_{s0} e M_{f0} do material para uma condição de carregamento nulo. Além disso, esta análise é baseada no princípio da variação de calor latente aplicado durante o tratamento térmico de aquecimento e resfriamento do fragmento de LMF como ilustrado na Fig. 2.7. A fim de garantir um fluxo de calor constante no fragmento de LMF, notam-se regiões de picos que caracterizam os comportamentos endotérmico e exotérmico do material durante as transformações direta e reversa de fase, respectivamente. O encontro das retas tangentes de cada região de pico permite determinar as temperaturas de transição de fase (LAGOUDAS, 2008).

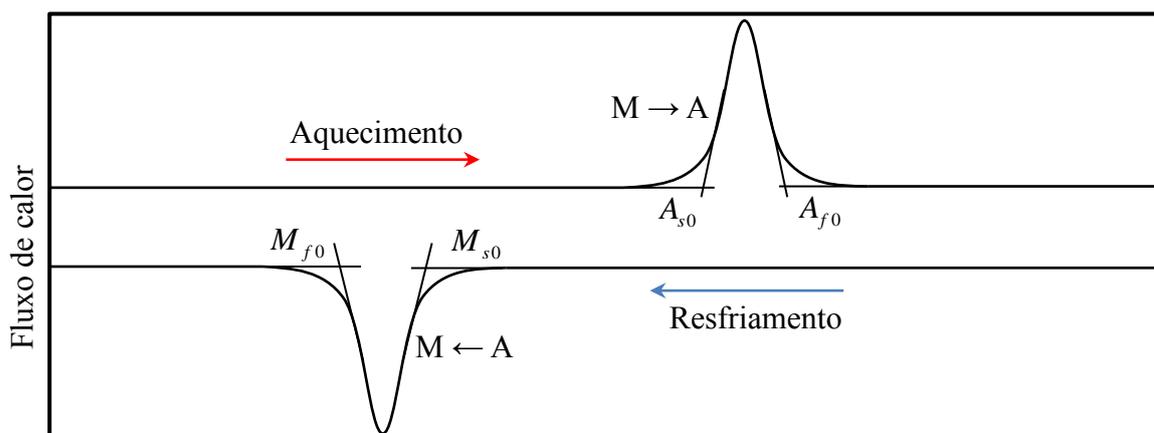


Figura 2.7 - Representação esquemática de um ensaio *DSC* (adaptado de Lagoudas (2008)).

- Etapa 2: nesta fase, é realizado um ensaio mecânico monotônico do corpo de prova, que consiste em submetê-lo a um ciclo de carregamento e descarregamento, capaz de

induzir transformação total de fase ao material, em temperaturas de operação superiores à temperatura final de austenita, determinada previamente na Etapa 1. Os resultados obtidos a partir desta etapa permitem determinar os módulos de elasticidade das fases austenita e martensita, E_A e E_M , respectivamente, e a deformação máxima induzida durante a transformação de fase do material, denominada de máxima deformação de transformação, Λ . Exemplos desses resultados são apresentados na Fig. 2.8.

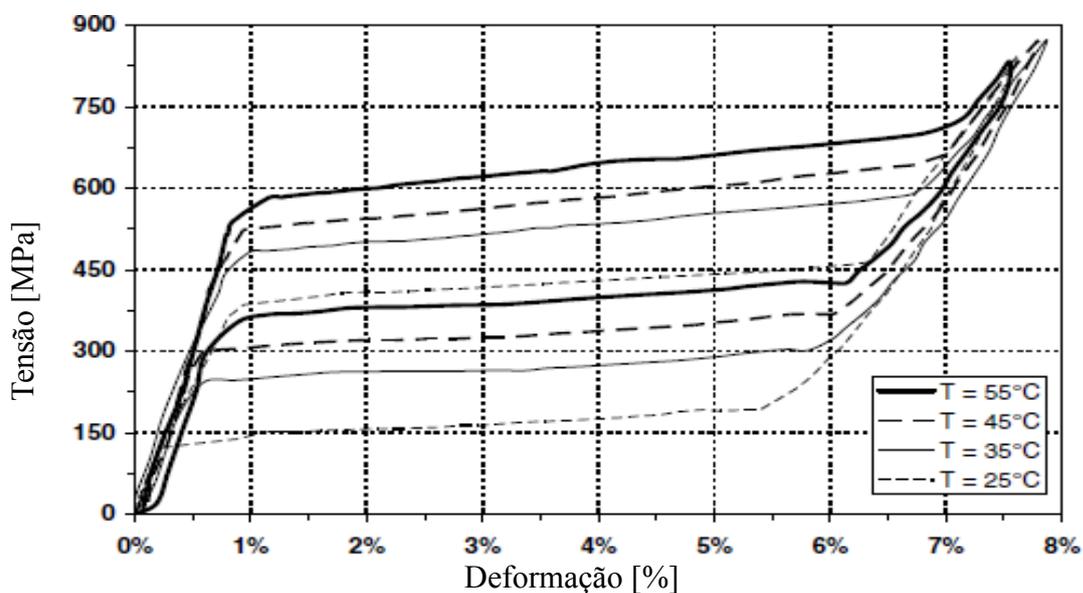


Figura 2.8 - Diagrama tensão-deformação do efeito pseudoelástico obtido experimentalmente para diferentes temperaturas (adaptado de Lagoudas (2008)).

Dessa forma, a partir dos resultados das Etapas 1 e 2, e utilizando-se a seguinte expressão que calcula as tensões na LMF em função das temperaturas de transição,

$$\sigma = C(T - T_x) \quad (2.1)$$

e a equação constitutiva para as LMFs,

$$\sigma = E_x(\varepsilon - \varepsilon^t) \quad (2.2)$$

pode-se determinar as deformações e as tensões em cada temperatura de transição.

Nas expressões anteriores, T denota a temperatura de operação do material, C é o coeficiente de influência de tensão (inclinação das retas do diagrama tensão-temperatura apresentado na Fig. 2.4), E_x é o módulo de elasticidade do material em uma determinada região do diagrama tensão-deformação, T_x são as temperaturas de transição determinadas na Etapa 1, ε' é a deformação de transformação gerada durante as transformações de fase direta e reversa, e ε é a deformação total induzida ao material.

Dessa forma, para cada ponto de transição do ciclo de histerese apresentado na Fig. 2.6, pode-se calcular a tensão e a deformação como segue:

Ponto 1: início da transformação de fase direta austenita-martensita.

$$\sigma_{Ms} = C(T - M_{s0}) \quad (2.3a)$$

$$\varepsilon_{Ms} = \frac{C(T - M_{s0})}{E_A} \quad (2.3b)$$

Ponto 2: conclusão da transformação de fase direta austenita-martensita.

$$\sigma_{Mf} = C(T - M_{f0}) \quad (2.4a)$$

$$\varepsilon_{Mf} = \Lambda + \frac{C(T - M_{f0})}{E_M} \quad (2.4b)$$

Ponto 3: início da transformação de fase reversa martensita-austenita:

$$\sigma_{As} = C(T - A_{s0}) \quad (2.5a)$$

$$\varepsilon_{As} = \Lambda + \frac{C(T - A_{s0})}{E_M} \quad (2.5b)$$

Ponto 4: conclusão da transformação de fase reversa martensita-austenita.

$$\sigma_{As} = C(T - A_{f0}) \quad (2.6a)$$

$$\varepsilon_{Af} = \frac{C(T - A_{f0})}{E_A} \quad (2.6b)$$

2.5.3 Ciclo completo de transformação de fase

Para a correta caracterização do comportamento pseudoelástico das LMFs e a respectiva combinação com modelos de elementos finitos de sistemas dinâmicos, o ciclo completo de carregamento de uma LMF (*major loop loading*) como apresentado na Fig. 2.6, deve ser representado por um conjunto de equações matemáticas. Para o modelo simplificado, a obtenção das equações de cada região de transformação na Fig. 2.6 pode ser obtida assumindo que a deformação de transformação e a tensão variam linearmente durante as transformações de fase, e nas regiões onde não há tais transformações o material apresenta um comportamento elástico linear. Neste sentido, a resposta tensão-deformação para a LMF pode ser representada por um conjunto de retas como ilustrado na Fig. 2.6.

Considerando um caso uniaxial hipotético em que a LMF esteja inicialmente no seu estado puramente austenítico e sem a presença de qualquer deformação de transformação, a região linear elástica (4-1) é regida pelas seguintes equações:

$$\varepsilon^t = 0 \quad (2.7a)$$

$$\sigma = E_A(\varepsilon) \quad (2.7b)$$

Para níveis de tensão superiores a σ_{Ms} entre os pontos 1 e 2, o material é induzido a uma transformação direta de fase, austenita-martensita, na qual a deformação de transformação e a tensão variam linearmente até que seja atingido seu valor máximo, Λ . Dessa forma, tem-se:

$$\varepsilon^t = \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{Ms}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{Ms}} \right) \quad (2.8a)$$

$$\sigma = \sigma_{Ms} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}) \quad (2.8b)$$

Finalizada a transformação direta, inicia-se o regime linear de descarregamento (2-3) com o material apresentando uma estrutura cristalina puramente martensítica. Para esta região são válidas as seguintes equações:

$$\varepsilon^t = \Lambda \quad (2.9a)$$

$$\sigma = \sigma_{Mf} + E_M (\varepsilon - \varepsilon_{Mf}) \quad (2.9b)$$

Ao final do descarregamento, no ponto 3, inicia-se a transformação reversa, até que seja atingido o ponto 4, no qual o material se encontra novamente em seu estado puramente austenítico. Para esta região, são aplicadas as seguintes equações:

$$\varepsilon^t = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon_{As} - \varepsilon}{\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Af}} \right) \quad (2.10a)$$

$$\sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{As} - \sigma_{Af}) \quad (2.10b)$$

A partir dos dados da Tab. 2.1, e utilizando as Eqs.(2.7) a (2.10), pode-se construir o diagrama tensão-deformação apresentado na Fig. 2.9.

Tabela 2.1 - Dados da LMF utilizada por Lagoudas et al. (2001).

Dados do material			
E_A	70×10^9 [Pa]	M_{f0}	274 [K]
E_M	30×10^9 [Pa]	M_{s0}	292 [K]
C	7×10^6 [Pa/°C]	A_{s0}	296 [K]
Λ	0,05	A_{f0}	315 [K]

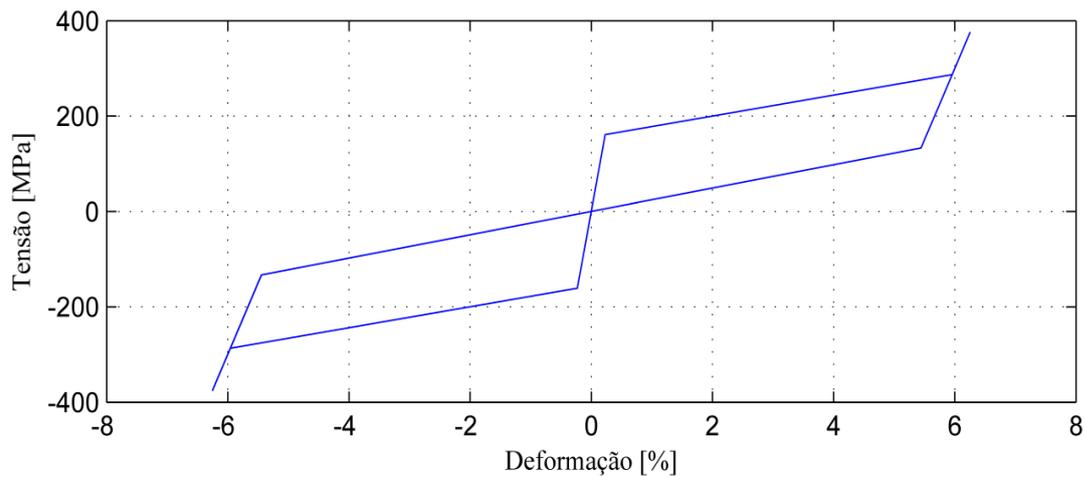


Figura 2.9 - Diagrama tensão-deformação para o modelo simplificado de Lagoudas.

2.5.4. Ciclo incompleto de transformação de fase

As equações (2.7) a (2.10) são utilizadas para a modelagem do comportamento pseudoelástico de uma LMF quando submetida a carregamentos mecânicos cíclicos que induzem transformações de fase completa. No entanto, dependendo da solicitação imposta à LMF, ciclos incompletos de transformação de fase são formados (*minor loop cycles*) e as equações propostas anteriormente devem ser modificadas para levar em conta este comportamento de transformação incompleto, como ilustrado na Fig. 2.10.

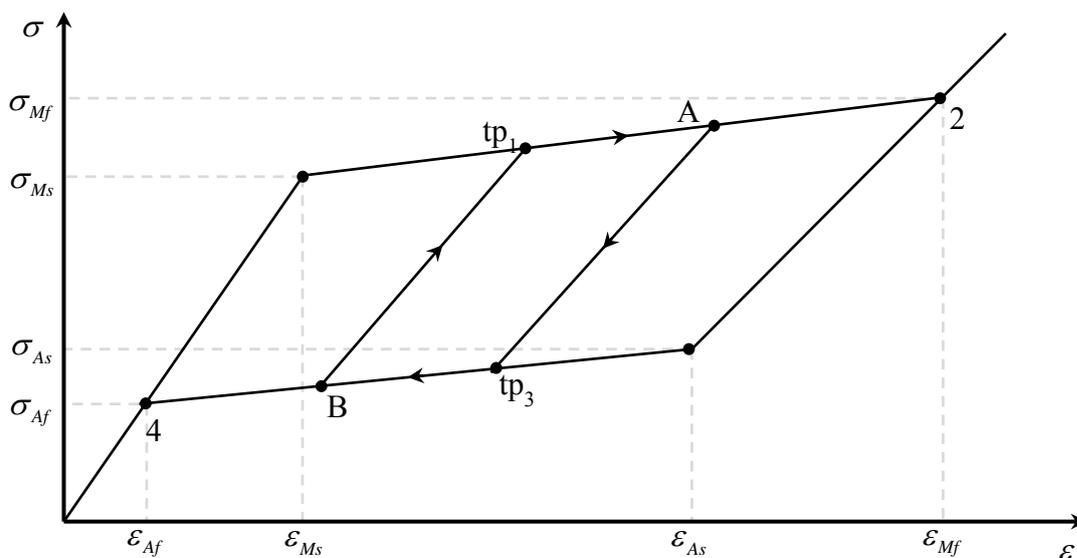


Figura 2.10 - Diagrama tensão-deformação com ciclo incompleto de transformação de fase (adaptado de Lagoudas et al. (2001)).

Admitindo que o material inicialmente esteja em seu estado puramente austenítico e sem qualquer deformação de transformação, o processo de carregamento é linear como descrito anteriormente. No entanto, à medida que o material é carregado na região de transformação direta, este pode ser descarregado antes de atingir o ponto 2, iniciando um processo de descarregamento linear até atingir a região de transformação reversa, como pode ser observado pela região A-tp3. As equações, que modelam este comportamento, são expressas como segue:

$$E_R = \frac{E_M E_A}{\left[\frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (E_A - E_M) + E_M \right]} \quad (2.11a)$$

$$\sigma = \sigma_{\max} + E_R (\varepsilon - \varepsilon_{\max}) \quad (2.11b)$$

onde σ_{\max} , ε_{\max} e ε_{\max}^t , são, respectivamente, a tensão, a deformação e a deformação de transformação do ponto A (onde se inicia a transformação incompleta de fase).

A deformação e a tensão do ponto tp3 são calculadas a partir das seguintes expressões:

$$\varepsilon_{tp3} = \varepsilon_{Af} + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Af}) \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{tp3} = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (\sigma_{As} - \sigma_{Af}) \quad (2.12b)$$

Terminado o descarregamento linear, o material se encontra na região de transformação reversa. Continuando o descarregamento até o ponto 4, ele retorna às condições iniciais, ou a transformação é novamente interrompida no ponto B, e ele passa a ser carregado linearmente até o ponto tp1. As equações que modelam a região de transformação reversa são dadas por:

$$\varepsilon^t = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon}{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon_{Af}} \right) \quad (2.13a)$$

$$\sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{tp3} - \sigma_{Af}) \quad (2.13b)$$

Para a região (B-tp1), tem-se:

$$E_F = \frac{E_M E_A}{\left[\frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (E_A - E_M) + E_A \right]} \quad (2.14a)$$

$$\sigma = \sigma_{\min} + E_F (\varepsilon - \varepsilon_{\min}) \quad (2.14b)$$

onde σ_{\min} , ε_{\min} e ε_{\min}^t representam, respectivamente, a tensão, a deformação e a deformação de transformação do ponto B, cuja tensão e a deformação são calculados pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon_{tp1} = \varepsilon_{Ms} + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{Ms}) \quad (2.15a)$$

$$\sigma_{tp1} = \sigma_{Ms} + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}) \quad (2.15b)$$

Prosseguindo o carregamento, o material se encontra na região de transformação direta, na qual ele pode atingir o ponto 2, ou interromper o ciclo em um novo ponto. As equações desta região são dadas como:

$$\varepsilon^t = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{tp1}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{tp1}} \right) \quad (2.16a)$$

$$\sigma = \sigma_{tp1} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{tp1}) \quad (2.16b)$$

Assim como feito anteriormente, com as equações modificadas do modelo simplificado

e utilizando os parâmetros da Tab. 2.1 é possível determinar o comportamento da LMF para uma condição na qual a transformação de fase não é completa. A Figura 2.11 ilustra a resposta de uma LMF submetida a vários carregamentos que não induzem transformação completa de fase e a Fig. 2.12 mostra o histórico das deformações dos pontos máximos e mínimos, A e B, respectivamente, durante as transformações incompletas de fase.

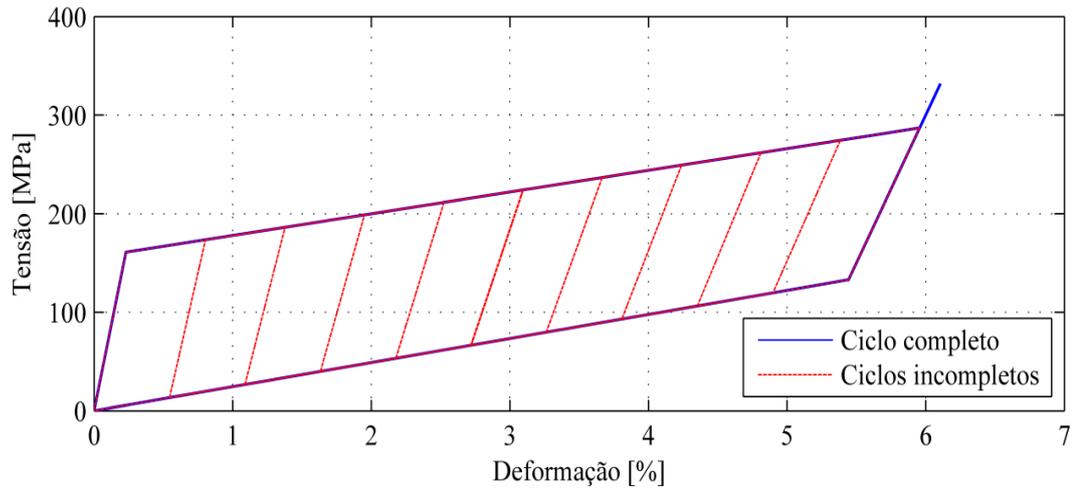


Figura 2.11 - Comportamento pseudoelástico da LMF considerando ciclos incompletos de fase.

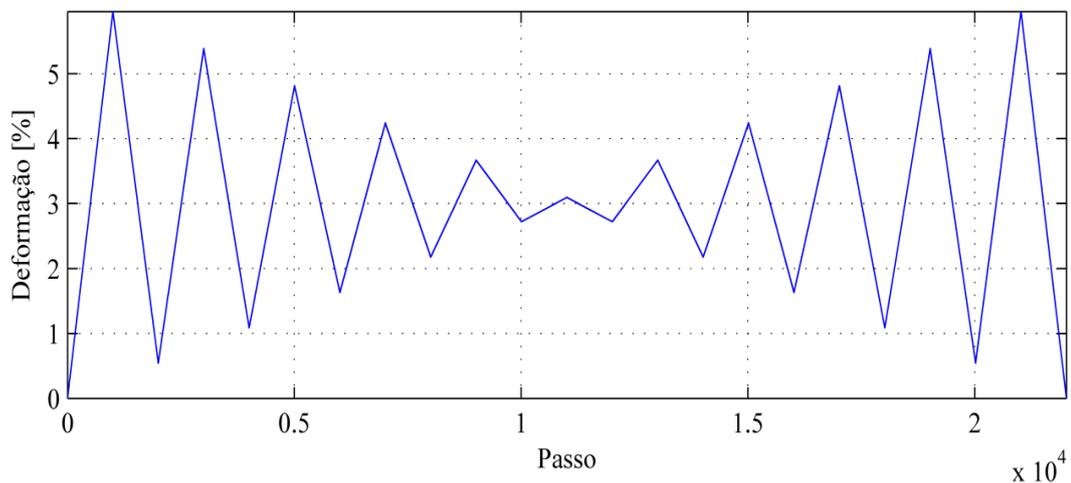


Figura 2.12 - Histórico de deformações durante as transformações incompletas de fase.

CAPÍTULO III

MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Neste capítulo são apresentados os principais fundamentos da teoria da viscoelasticidade linear, mostrando a influência de parâmetros operacionais e ambientais como frequência de excitação e temperatura no comportamento dinâmico desses materiais. É também apresentado o conceito do módulo complexo, bem como o modelo das derivadas fracionárias, utilizado neste trabalho para representar o comportamento dos materiais viscoelásticos lineares e a incorporação do mesmo em modelos de elementos finitos de sistemas dinâmicos.

3.1. Princípios da viscoelasticidade linear

Os materiais viscoelásticos são aqueles que apresentam em seu comportamento dinâmico, características de um sólido elástico e de um fluido viscoso Newtoniano de modo que a relação tensão-deformação é dependente do tempo (RAO, 2003, LAKES, 2009). Esses dois comportamentos são regidos, respectivamente, pelas seguintes equações (de LIMA, 2003):

$$\sigma(t) = \bar{E}\varepsilon(t), \quad \tau(t) = \bar{G}\gamma(t) \quad (3.1)$$

$$\bar{\nu}(t) = \mu\dot{\gamma}(t) \quad (3.2)$$

onde \bar{E} e \bar{G} são, respectivamente, os módulos de elasticidade e de cisalhamento do material e μ define a viscosidade do fluido.

O comportamento viscoelástico linear no domínio do tempo pode ser representado pelas funções de fluência, $F(\sigma_0, t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$, e de relaxação, $R(\varepsilon_0, t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$, como mostrado na Fig. 3.1. Isto implica que, em um instante qualquer, a deformação (ou a tensão) depende de todos os estados de tensão (ou de deformação) precedentes, o que caracteriza o efeito de “memória” dos materiais viscoelásticos. Neste contexto, a aplicação do princípio de superposição de Boltzman (de LIMA, 2003) para os materiais viscoelásticos lineares conduz a uma lei do comportamento que relaciona as histórias de tensão e de deformação através da seguinte integral de convolução para um ensaio uniaxial:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \quad (3.3)$$

onde $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ designam, respectivamente, as componentes de tensão e de deformação (normais ou de cisalhamento), e $E(t)$ é a função módulo do material.

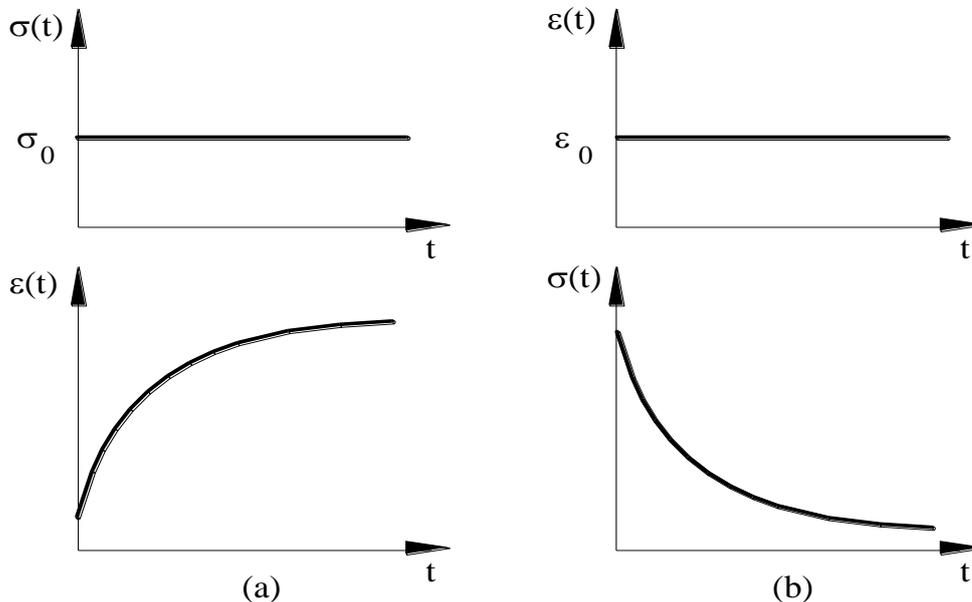


Figura 3.1 - Representação esquemática das funções de fluência (a) e de relaxação (b) para um material viscoelástico (adaptado de Lima (2003)).

Deve-se destacar que a expressão (3.3) pode ser estendida para o caso de estados multiaxiais de tensão-deformação pela substituição das componentes escalares por tensores. Além disso, para um material elástico linear, $E(t)$ é constante. Entretanto, para os materiais

viscoelásticos, o módulo não é constante, e a integração (3.3) deve ser avaliada para cada passo de tempo no intervalo $[-\infty, t]$. Admitindo-se que não existem deformações para valores negativos do tempo ($\varepsilon(t) = 0$ no intervalo $[-\infty < t < 0]$), tem-se:

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.4)$$

Supondo $E(t) = E_r + h(t)$, a Eq.(3.4) assume a seguinte forma no domínio de Laplace:

$$\sigma(s) = E_r \varepsilon(s) + sh(s)\varepsilon(s) = [E_r + H(s)]\varepsilon(s) = E(s)\varepsilon(s) \quad (3.5)$$

onde s é a variável complexa de Laplace, E_r é o módulo de armazenamento (módulo a baixa frequência), $E(s) = E_r + H(s)$ é a função módulo complexo, $H(s) = sh(s)$ é a função de dissipação ou função de relaxação que representa o comportamento dissipativo do material (amortecimento), e $E_r \varepsilon(s)$ é o comportamento elástico (parte estática) do material viscoelástico.

3.2. O conceito de módulo complexo

O módulo complexo é uma forma bastante conveniente de caracterizar as propriedades dos materiais viscoelásticos lineares diretamente no domínio da frequência através de técnicas experimentais (NASHIF et al., 1985, BARKANOV, 1999). Em contra partida, uma desvantagem é o fato de não representar satisfatoriamente as respostas em regime transiente de sistemas viscoelásticos via integração direta das equações do movimento ou via método da superposição modal (de LIMA, 2003).

Uma vez avaliado ao longo do eixo imaginário, $s = i\omega$, a Eq.(3.5) conduz à seguinte expressão para o módulo complexo:

$$\sigma(\omega) = E(\omega)\varepsilon(\omega) = [E'(\omega) + iE''(\omega)]\varepsilon(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]\varepsilon(\omega) \quad (3.6)$$

onde $E(\omega)$ é o módulo complexo do material viscoelástico, $E'(\omega)$ é o módulo de

armazenamento, $E''(\omega)$ é o módulo de perda e $\eta(\omega) = E''(\omega)/E'(\omega)$ é o fator de perda que caracteriza o amortecimento.

3.3. Influência da frequência de excitação e da temperatura

As propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos são fortemente dependentes das condições ambientais e operacionais a que são submetidos, como a temperatura ambiente, frequência de excitação, pré-carga estática, humidade, etc. Nesse sentido, o estudo do grau de influência desses fatores sobre o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos torna-se imperativo na tentativa de maximizar a eficiência desses materiais em aplicações práticas de engenharia (NASHIF et al., 1985, RAO, 2003).

3.3.1. Efeito da temperatura ambiente

Dentre os fatores ambientais e operacionais citados anteriormente, a temperatura é o parâmetro que causa maior influência no comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos. A Figura 3.2 apresenta de forma esquemática a influência da temperatura ambiente na variação do módulo de armazenamento e do fator de perda dos materiais viscoelásticos, representando quatro regiões principais, a saber:

- Região vítrea (I): é caracterizada por apresentar elevado módulo de armazenamento e que varia pouco com a temperatura, enquanto os baixos níveis do fator de perda variam fortemente com o aumento da temperatura;
- Região de transição (II): apresenta grande variação do módulo de armazenamento, enquanto o fator de perda atinge seu valor máximo, o que motiva o uso dos materiais viscoelásticos para reduzir níveis de vibração e ruído de sistemas mecânicos, permitindo uma utilização máxima das propriedades de amortecimento dos materiais viscoelásticos;
- Região de borracha (III): nesta região as propriedades dos materiais viscoelásticos apresentam pouca variação com a temperatura;

- Região de fluxo (IV): esta região corresponde ao estado de fluido do material. Este estado é pouco considerado em aplicações dinâmicas em razão de sua instabilidade e baixos valores do módulo de armazenamento.

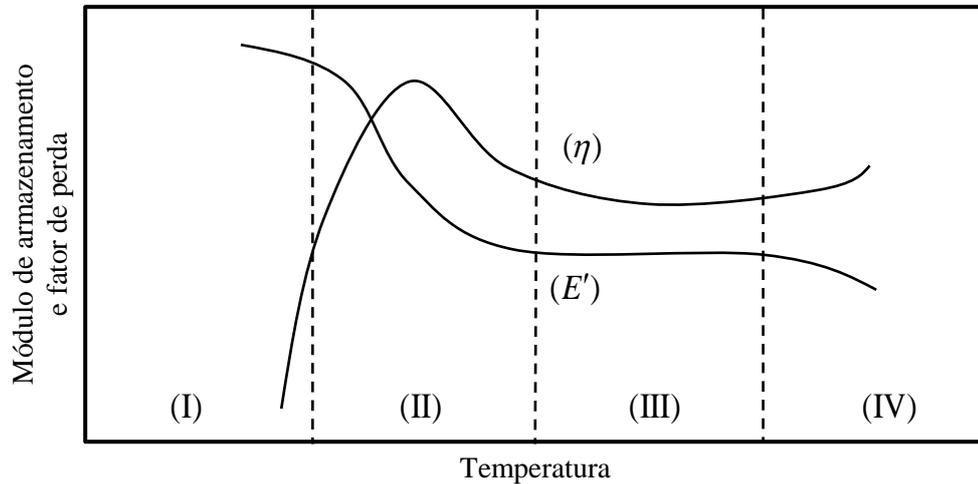


Figura 3.2 - Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura para uma frequência constante (adaptado de Nashif et al., (1985)).

3.3.2. O fenômeno do autoaquecimento interno

É importante destacar que em projetos práticos de sistemas mecânicos incorporando dispositivos viscoelásticos, o que normalmente se faz é a consideração de uma distribuição de temperatura uniforme e independente do tempo para os materiais viscoelásticos lineares, cujos valores de temperatura são coincidentes com as variações ocorridas na temperatura ambiente. Entretanto, quando os materiais viscoelásticos estão submetidos a esforços mecânicos cíclicos, parte da energia dissipada no material viscoelástico é transformada em calor dentro do volume do material (KARNAUKHOV et al., 1975). Este fenômeno, que foi investigado por Cazenove et al. (2011), é chamado de autoaquecimento interno, e que consiste no aumento da temperatura interna do material viscoelástico podendo afetar significativamente a sua capacidade de amortecimento, ou mesmo a falha, e que deve ser levado em conta no processo de modelagem.

A Figura 3.3 mostra as curvas de autoaquecimento obtidas numericamente por Cazenove et al. (2011) para uma junta viscoelástica translacional submetida a várias condições de carregamento mecânico cíclico. Pode-se notar a grande influência do autoaquecimento no aumento das temperaturas interna do material, levando a uma grande

perda de eficiência (capacidade de amortecimento) do dispositivo viscoelástico, uma vez que esse processo tem forte influência sobre o módulo de armazenamento e o fator de perda, como mostrados na Fig. 3.4.

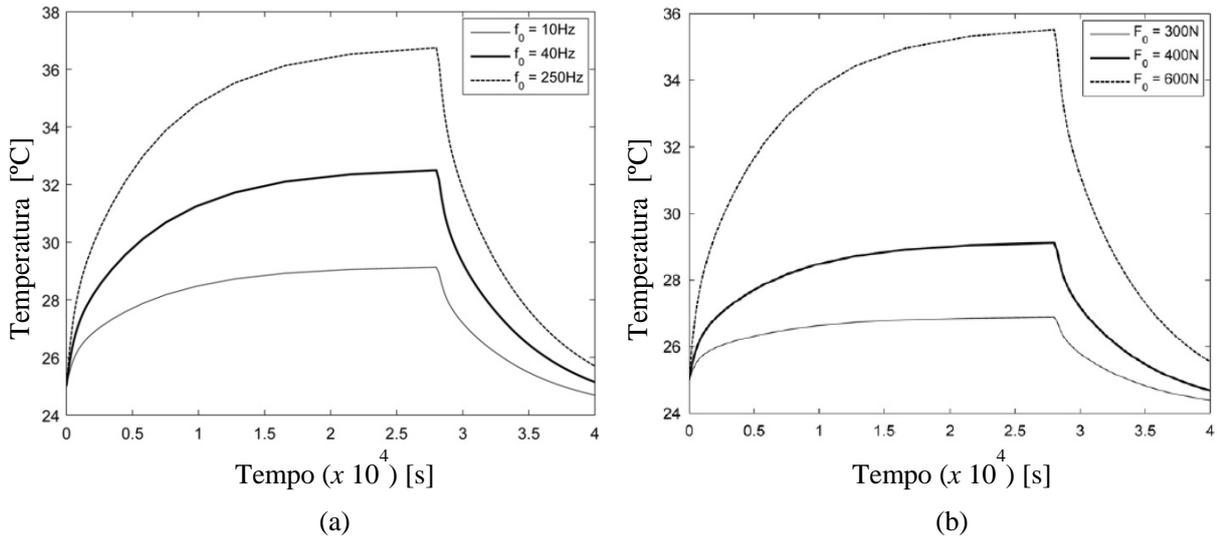


Figura 3.3 - Evolução da temperatura no amortecedor translacional: (a) variando a frequência da força para amplitude $F_0 = 400N$; (b) variando a amplitude da força para a frequência $f_0 = 10Hz$ (adaptado de Cazenove et al. (2011)).

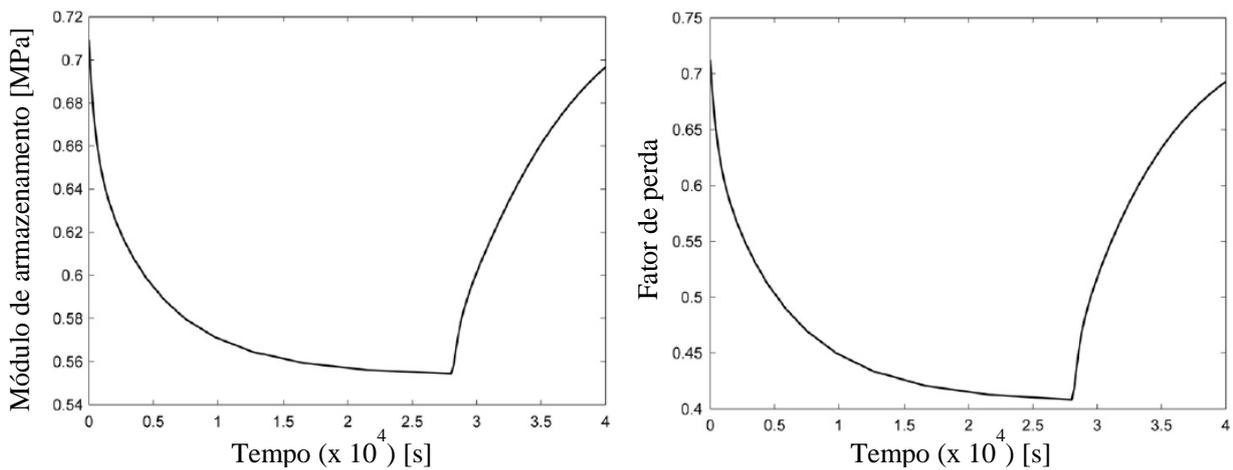


Figura 3.4 - E' e η como função do tempo (adaptado de Cazenove et al. (2011)).

3.3.3. Efeito da frequência de excitação

Segundo Nashif et al. (1985), o principal efeito que a frequência causa sobre os materiais viscoelásticos é o aumento do módulo de armazenamento. A Figura 3.5 representa

de forma esquemática a relação entre as variações ocorridas no módulo de armazenamento e no fator de perda dos materiais viscoelásticos lineares como função da frequência de excitação.

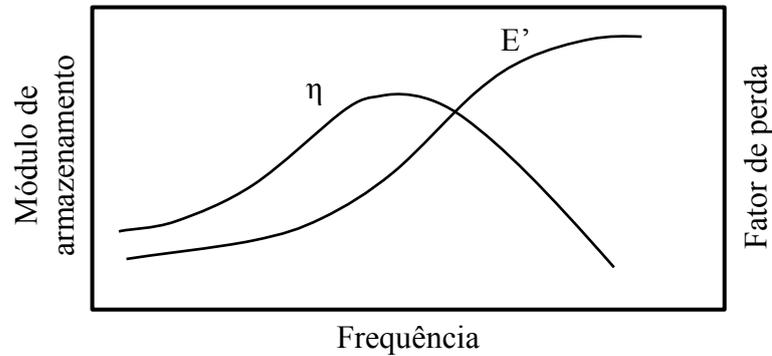


Figura 3.5 - Variação de E' e η com a frequência (adaptado de Nashif et al. (1985)).

Segundo Nashif et al. (1985) e utilizando as Figs. 3.2 e 3.5 pode-se concluir que os efeitos causados pela ação da temperatura são inversos àqueles causados pela frequência de excitação, porém, com diferentes intensidades: pouca variação de temperatura equivale a grande variação da frequência de operação. Este fenômeno é um dos aspectos mais importantes da teoria da viscoelasticidade linear, uma vez que é a base para a formulação do princípio da superposição temperatura-frequência, o qual é bastante utilizado para transformar as propriedades dos materiais viscoelásticos do domínio da temperatura para o domínio da frequência, e vice-versa.

3.4. Modelagem do comportamento viscoelástico via modelo derivativo fracionário

É sabido que uma das principais limitações à modelagem de estruturas complexas de engenharia contendo materiais viscoelásticos é o elevado custo computacional envolvido. Neste sentido, muito esforço de pesquisa vem sendo empreendido buscando a proposição de novos modelos viscoelásticos bem adaptados para serem combinados com modelos de elementos finitos de sistemas estruturais complexos, e de métodos de redução de modelos de sistemas amortecidos viscoelasticamente (BALMÈS; GERMÈS, 2002, de LIMA et al., 2010). Neste sentido, vários modelos matemáticos foram formulados que vão desde os modelos reológicos simples, que são obtidos por simples associações em série e em paralelo de molas lineares e de amortecedores viscosos, como o modelo de Maxwell, de Kelvin-Voigt e o de

Zener (ou modelo linear padrão) (DROZDOV, 1998, de LIMA, 2003, MAINARD, 2010), aos modelos modernos como o modelo das derivadas fracionárias (MDF) proposto por Bagley e Torvik (1983), o modelo dos campos de deslocamentos anelásticos (CDA) desenvolvido por Lesieutre e Bianchini (1995), e o modelo de Golla-Hughes-MacTavsh (GHM). Detalhes de cada modelo, bem como de sua incorporação em modelos de elementos finitos de sistemas estruturais são apresentados em de Lima (2003).

No contexto do presente trabalho, para modelar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos e obter as respostas temporais de sistemas amortecidos para um conjunto de parâmetros físicos e/ou operacionais, será utilizado o modelo derivativo fracionário, inicialmente proposto por Bagley e Torvik (1983) e implementado por Galucio et al. (2004), cuja equação diferencial que relacionada às tensões e as deformações para o caso unidimensional é apresentada como segue:

$$\bar{\varepsilon}(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)}{dt^\alpha} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t) \quad (3.7)$$

onde E_0 e E_∞ são, respectivamente, os módulos estático (ou a baixa frequência) e dinâmico (ou a alta frequência), τ é o tempo de relaxação, e α é o operador de ordem fracionária ($0 < \alpha < 1$).

A Equação (3.7) foi obtida pela introdução da seguinte variável interna como uma função da deformação, $\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \sigma(t)/E_\infty$, na equação constitutiva unidimensional clássica entre os campos de tensão e de deformação para os materiais viscoelásticos lineares (GALUCIO et al., 2004). Como resultado, a relação (3.7) contém somente um termo derivativo de ordem fracionária, $d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)/dt^\alpha$, ao contrário dos dois presentes na equação constitutiva clássica, como apresentado por Galucio et al. (2004).

Aplicando a transformada de Fourier à Eq.(3.7), é possível obter a seguinte expressão do módulo complexo para o modelo MDF:

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma^*(\omega)}{\varepsilon^*(\omega)} = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (3.8)$$

É importante destacar que o uso da função módulo complexo para representar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos lineares está condicionado ao processo de identificação dos parâmetros E_0 , E_∞ , τ e α . Partindo-se da função módulo para o modelo MDF, a determinação desses parâmetros para um material viscoelástico qualquer pode ser feita através da formulação de um problema de otimização paramétrica, no qual a função objetivo representa a diferença entre os dados experimentais fornecidos pelos fabricantes de materiais viscoelásticos, que possuem informações sobre o módulo de armazenamento e o fator de perda como função da frequência de excitação e da temperatura, e os correspondentes obtidos pelo modelo MDF, na tentativa de representar a dependência do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos em uma banda de frequência de interesse para uma dada temperatura de operação (de LIMA, 2003, GALUCIO et al., 2004). Além disso, no processo de otimização, faz-se necessário expressar a relação (3.8) como funções complexas, fazendo-se $s = i\omega$, da seguinte forma:

$$E'(\omega) = \frac{E_0 + (E_\infty - E_0)(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + E_\infty(\omega\tau)^{2\alpha}}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^\alpha} \quad (3.9)$$

$$E''(\omega) = \frac{(E_\infty - E_0)(\omega\tau)^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^\alpha} \quad (3.10)$$

A Figura 3.6 representa as curvas dos módulos e dos fatores de perda, reconstruídas com os parâmetros identificados do modelo MDF para várias temperaturas analisadas, e a Tab. 3.1 fornece os valores dos parâmetros identificados.

Tabela 3.1 - Parâmetros identificados para o modelo MDF.

	Temperatura de operação [°C]				
	26	30	34	38	42
E_0 [Pa]	$1,2817 \times 10^6$	$1,2902 \times 10^6$	$1,2926 \times 10^6$	$1,2965 \times 10^6$	$1,291 \times 10^6$
E_∞ [Pa]	$4,5452 \times 10^8$	$3,7311 \times 10^8$	$3,1453 \times 10^8$	$2,3783 \times 10^8$	$2,0508 \times 10^8$
τ [ms]	$5,9423 \times 10^{-7}$	$5,2407 \times 10^{-7}$	$4,4831 \times 10^{-7}$	$7,7181 \times 10^{-7}$	$4,0698 \times 10^{-7}$
α	0,6744	0,6802	0,6829	0,6881	0,6899

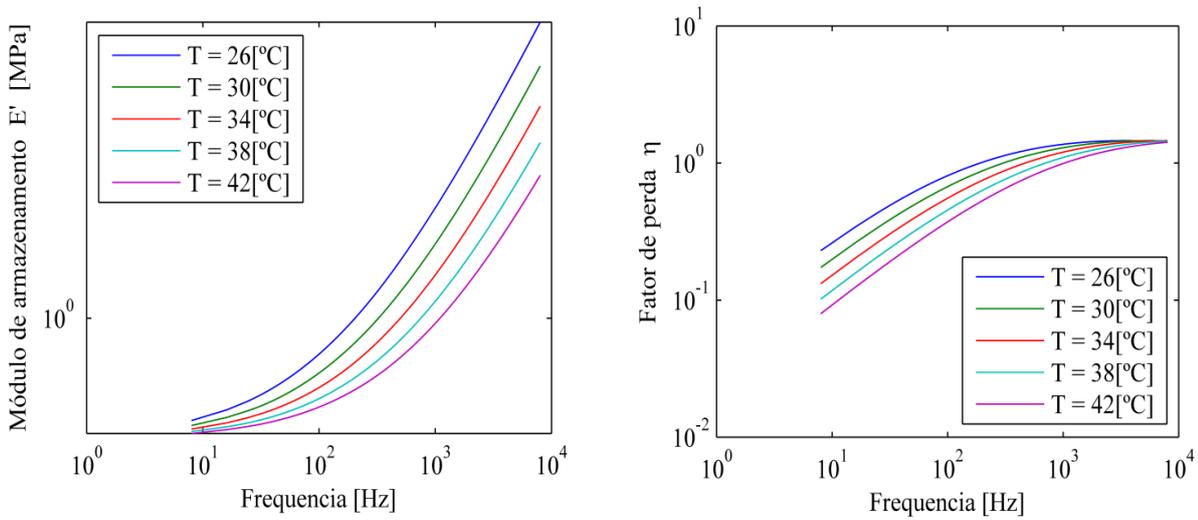


Figura 3.6 - Curvas reconstruídas com os parâmetros identificados para o modelo MDF para várias temperaturas.

Conforme demonstrado por Galucio et al. (2004), a expressão (3.7) pode ser aproximada pela discretização de Grünwald, $d\bar{\varepsilon}(t)/dt^\alpha \approx \Delta t^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n_p} A_{j+1} \bar{\varepsilon}(t - j\Delta t)$, notando que $A_1 = 1$, para gerar a seguinte forma discretizada da deformação inelástica:

$$\bar{\varepsilon}(t) = (1-c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t) - c \sum_{j=1}^{n_p} A_{j+1} \bar{\varepsilon}(t - j\Delta t) \quad (3.11)$$

onde $\Delta t = t/n$ é o passo de tempo, $n_p \leq n$ é o número de pontos da discretização, $c = \tau^\alpha / (\tau^\alpha + \Delta t^\alpha)$, e A_{j+1} representa os coeficientes de Grünwald dados pela seguinte fórmula de recorrência, $A_{j+1} = (j - \alpha - 1)A_j / j$, os quais estão relacionados com o efeito de memória do material viscoelástico. Isto significa que o comportamento de um material viscoelástico num dado instante de tempo depende mais fortemente dos históricos de tempo recentes do que dos históricos anteriores (GALUCIO et al., 2004).

3.4.1. Incorporação do modelo MDF em matrizes de elementos finitos

Uma vez determinada a relação entre os campos de tensão e de deformação para os materiais viscoelásticos lineares via uso do modelo MDF, o próximo passo é a combinação do

mesmo com modelos de elementos finitos de sistemas estruturais. Neste sentido, partindo-se das matrizes elementares calculadas para cada elemento de uma malha de elementos finitos, e negligenciando outras formas de amortecimento, a equação do movimento a nível elementar no domínio do tempo pode ser construída como segue (GUARALDO NETO et al., 2011b):

$$\mathbf{M}^{(e)}\ddot{\mathbf{u}}_{(e)}(t) + \left(\mathbf{K}_e^{(e)} + \mathbf{K}_v^{(e*)}\right)\mathbf{u}_{(e)}(t) = \mathbf{f}^{(e)}(t) \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{M}^{(e)} = (\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_v) \in R^{N_e \times N_e}$ é a matriz de massa elementar composta pela massa da parte puramente elástica e da parte viscoelástica do sistema amortecido, $\mathbf{K}_e^{(e)} \in R^{N_e \times N_e}$ é a matriz de rigidez correspondente à parte puramente elástica da estrutura, e $\mathbf{K}_v^{(e*)} = \mathbf{K}_v^{(e)}(\omega, T) \in R^{N_e \times N_e}$ é a matriz de rigidez viscoelástica dependente da frequência de excitação e da temperatura. $\mathbf{u}_{(e)}(t) \in R^{N_e}$ e $\mathbf{f}^{(e)}(t) \in R^{N_e}$ são, respectivamente, o vetor dos graus de liberdade elementar e dos esforços externos, e N_e é o número de graus de liberdade (gdls) elementares.

Admitindo que a matriz de rigidez da parte viscoelástica seja independente da frequência e da temperatura, o termo $\mathbf{K}_v^{(e*)}\mathbf{u}_{(e)}(t)$ da expressão (3.12) pode ser formulado como segue:

$$\mathbf{K}_v^{(e*)}\mathbf{u}_{(e)}(t) = \int \int_z \mathbf{B}^T(x, z) \boldsymbol{\sigma}(x, z, t) dx dz \quad (3.13)$$

onde o vetor tensão $\boldsymbol{\sigma}(x, z, t)$ pode ser escrito em termos da deformação inelástica (3.11) e da relação, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)/E_\infty$, como segue:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, z, t) = \mathbf{C} \left[\left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \boldsymbol{\varepsilon}(x, z, t) - c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{n_p} A_{j+1} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, z, t - j\Delta t) \right] \quad (3.14)$$

A expressão (3.14) pode ser aplicada para os casos de deformações longitudinais e transversais de acordo com o estado de tensão assumido e que deve ser definido pela matriz das propriedades mecânicas \mathbf{C} . Além disso, neste trabalho será admitido que o coeficiente de Poisson é independente da frequência e da temperatura, valendo a seguinte relação entre os

módulos transversal e longitudinal, $G^* = E^*/[2(1+\nu)]$ (GALUCIO et al., 2004). Portanto, levando-se em conta as relações entre os campos de deslocamentos e as deformações elásticas e inelásticas, respectivamente, $\boldsymbol{\varepsilon}(x, z, t) = \mathbf{B}(x, z)\mathbf{u}_{(e)}(t)$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, z, t) = \mathbf{B}(x, z)\bar{\mathbf{u}}_{(e)}(t)$, a matriz de rigidez modificada da parte viscoelástica pode ser colocada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_v^{(e*)}\mathbf{u}_{(e)}(t) = \tilde{\mathbf{K}}_v^{(e)}\mathbf{u}_{(e)}(t) + \tilde{\mathbf{f}}_v^{(e)}(t - j\Delta t) \quad (3.15)$$

$$\text{onde } \tilde{\mathbf{K}}_v^{(e)} = \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0}\right) \mathbf{K}_v^{(e)} \text{ e } \tilde{\mathbf{f}}_v^{(e)}(t - j\Delta t) = c \frac{E_\infty}{E_0} \mathbf{K}_v^{(e)} \sum_{j=1}^{n_p} A_{j=1} \bar{\mathbf{u}}_{(e)}(t - j\Delta t).$$

As Equações (3.15) e (3.12) são combinadas para formar o seguinte sistema de equações do movimento do sistema amortecido viscoelasticamente a nível global contendo N gdl's:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K}_e + \tilde{\mathbf{K}}_v)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) - \tilde{\mathbf{f}}_v(t - j\Delta t) \quad (3.16)$$

onde $\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{M}^{(e)}$, $\mathbf{K}_e = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{K}_e^{(e)}$ e $\tilde{\mathbf{K}}_v = \bigcup_{e=1}^{nel} \tilde{\mathbf{K}}_v^{(e)}$ são as matrizes globais de massa e rigidez, e o símbolo \bigcup indica a montagem das matrizes elementares levando-se em conta a conectividade. $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ são, respectivamente, os vetores dos gdl's globais e dos esforços externos generalizados. $\tilde{\mathbf{f}}_v(t - j\Delta t)$ são os carregamentos dependentes dos deslocamentos inelásticos, $\bar{\mathbf{u}}(t)$, e dos coeficientes de Grünwald, A_{j+1} .

Como neste trabalho tem-se o interesse em calcular as respostas dinâmicas no domínio do tempo de sistemas amortecidos viscoelasticamente, a expressão (3.16) será utilizada para o cálculo dessas respostas via emprego de técnicas de integração numérica, tais como o método de integração de Newmark, como será detalhado no Capítulo IV.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS MULTICAMADAS CONTENDO MATERIAL VISCOELÁSTICO E LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA

Neste capítulo é apresentada a modelagem por elementos finitos de uma viga sanduíche de três camadas incorporando materiais viscoelásticos e ligas com memória de forma. Os tratamentos são considerados em duas configurações diferentes, a saber: o tratamento por camada restrita passiva em que uma camada de material viscoelástico é inserida entre a estrutura base e uma camada restringente; e o uso discreto de ligas com memória de forma. Ênfase também é dada à incorporação do amortecimento viscoelástico e do efeito pseudoelástico das LMFs nas matrizes elementares da viga sanduíche de três camadas.

4.1. Relações cinemáticas para a viga sanduíche de três camadas

Nesta seção é apresentada a formulação por elementos finitos de um elemento de viga sanduíche de três camadas com base no desenvolvimento original apresentado por Galucio et al. (2004). A Figura 4.1 ilustra a cinemática da deformação para o elemento de viga sanduíche de comprimento L e largura b (não indicadas na figura), o qual é composto por dois nós. A viga é formada por três camadas, a saber: a estrutura base (b), o núcleo viscoelástico (v) e a camada restringente (c). Na mesma figura são indicados o deslocamento transversal, w , e os deslocamentos longitudinais da viga base e da camada restringente, $u_b(x,t)$ e $u_c(x,t)$, respectivamente, e as rotações das seções transversais, $\theta_b(x,t) = \theta_c(x,t) = \partial w(x,t)/\partial x$.

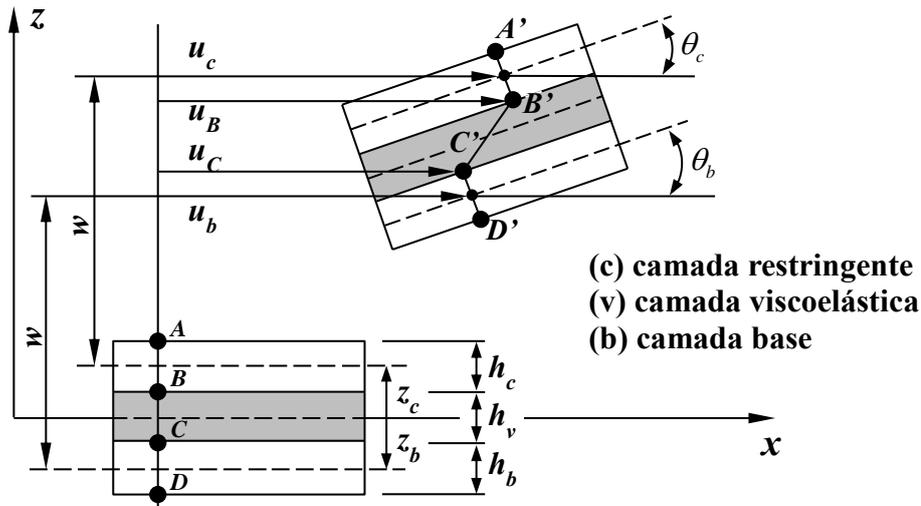


Figura 4.1 - Cinemática da deformação para o elemento de viga sanduíche (adaptado de Galucio et al., (2004)).

No desenvolvimento da teoria, as seguintes hipóteses são assumidas:

- (i) todos os materiais envolvidos são homogêneos e isotrópicos e apresentam comportamento mecânico linear. Além disso, todas as camadas são assumidas serem perfeitamente coladas;
- (ii) as tensões e as deformações normais na direção z são desconsideradas para todas as camadas;
- (iii) as camadas elásticas (b) e (c) são modeladas de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, e para a camada viscoelástica, as hipóteses de Timoshenko são assumidas (inclusão do cisalhamento transversal);
- (iv) as rotações das seções transversais das camadas elásticas são iguais e o deslocamento transversal é o mesmo para todas as três camadas.

É importante salientar que as hipóteses anteriores são consideradas por muitos autores como sendo adequadas para a modelagem de vigas multicamadas que respeite a razão aspecto das mesmas (AUSTIN, 1999), como é o caso das estruturas-teste utilizadas neste trabalho. Desta forma, são obtidas as seguintes relações cinemáticas para a camada restrigente e a viga base, respectivamente:

$$u_B(x,t) = u_c + \frac{h_c}{2} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (4.1a)$$

$$u_c = u_b(x,t) - \frac{h_b}{2} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (4.1b)$$

O que permite obter o deslocamento axial médio e a rotação da seção transversal da camada viscoelástica dadas, respectivamente, como segue:

$$u_v(x,t) = \frac{u_B(x,t) + u_c(x,t)}{2} \quad (4.2a)$$

$$\theta_v(x,t) = \frac{u_B(x,t) - u_c(x,t)}{h_v} \quad (4.2b)$$

onde $u_b(x,t)$ e $u_c(x,t)$ representam os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior, respectivamente, na direção x .

Para um ponto qualquer escolhido no interior da k -ésima camada é possível determinar as expressões que calculam os campos de deslocamentos axiais e transversais de cada camada, respectivamente, como segue:

$$u_{xk}(x,z,t) = u_k(x,t) + (z - z_k) \theta_k(x,t) \quad k = b, v, c \quad (4.3a)$$

$$w_k(x,z,t) = w(x,t) \quad k = b, v, c \quad (4.3b)$$

onde z_k é a distância, segundo a direção z , medida a partir do plano médio.

4.2. Relações deformação-deslocamento

A partir das relações (4.3) e considerando-se o estado plano de tensões, a deformação axial da k -ésima camada e a deformação cisalhante do núcleo viscoelástico podem ser obtidas, respectivamente, como segue:

$$\varepsilon_{.xk}(x, z, t) = \frac{\partial u_{.xk}(x, z, t)}{\partial x} = \varepsilon_{mk}(x, t) + (z - z_k) \varepsilon_{bk}(x, t) \quad k = b, v, c \quad (4.4a)$$

$$\gamma_{.xz}(x, z, t) = \frac{\partial u_v(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = \theta_v(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (4.4b)$$

onde $\varepsilon_{mk}(x, t) = \partial u_{.xk}(x, t) / \partial x$ e $\varepsilon_{bk} = \partial \theta_k(x, t) / \partial x$ representam, respectivamente, os efeitos de membrana e a curvatura da k -ésima camada. Além disso, deve-se ressaltar que para a estrutura base e a camada restringente a deformação cisalhante é negligenciada de acordo com as hipóteses de Euler-Bernoulli, que se justifica pelo fato do interesse estar voltado a vigas esbeltas operando no domínio de baixas frequências.

4.3. Discretização por elementos finitos

A discretização dos campos de deslocamentos mecânicos para o elemento finito de viga sanduíche de três camadas é baseada no trabalho original de Galucio et al. (2004), que utiliza funções de interpolação lineares para os deslocamentos axiais no plano médio das camadas elásticas, $u_b(x, t)$ e $u_c(x, t)$, na direção, x , e uma função de interpolação cúbica para o deslocamento transversal, $w(x, t)$, segundo a relação seguinte:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{u}(x, t) = [u_b(x, t) \quad w(x, t) \quad u_c(x, t)]^T$.

O vetor dos deslocamentos nodais em nível elementar é dado como segue:

$$\mathbf{u}_{(e)}(t) = [\mathbf{u}_{(e)}^1(t) \quad \mathbf{u}_{(e)}^2(t)]^T \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{u}_{(e)}^j(t) = [u_b^j(t) \quad w^j(t) \quad w'^j(t) \quad u_c^j(x, t)]$, sendo $j = 1, 2$ os nós elementares, e $\mathbf{N}(x)$ é a matriz contendo as funções de interpolação, que é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} N_{11}(x) & 0 & 0 & 0 & N_{15}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{22}(x) & N_{23}(x) & 0 & 0 & N_{26}(x) & N_{27}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{34}(x) & 0 & 0 & 0 & N_{38}(x) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde:

$$N_{11}(x) = N_{34}(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (4.8a)$$

$$N_{15}(x) = N_{38}(x) = \frac{x}{L} \quad (4.8b)$$

$$N_{22}(x) = x - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (4.8c)$$

$$N_{23}(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (4.8d)$$

$$N_{26}(x) = \frac{x^2}{L}\left(3 - \frac{2x}{L}\right) \quad (4.8e)$$

$$N_{27}(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (4.8f)$$

Combinando as relações (4.4) e (4.5), levando-se em conta os campos de deslocamentos de cada camada (4.3), pode-se expressar o vetor das deformações sob a seguinte forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, z, t) = \mathbf{B}(x, z)\mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{B}(x, z)$ é a matriz obtida aplicando-se os operadores diferenciais indicados nas equações (4.4) à matriz das funções de forma $\mathbf{N}(x)$.

Detalhes das manipulações matemáticas para a obtenção dos deslocamentos axiais, transversais e das rotações de todas as camadas a partir de suas respectivas matrizes de interpolação, bem como das expressões das deformações, são apresentados no Anexo A1.

4.4. Obtenção das matrizes elementares e montagem das equações globais

Baseado no estado de tensão assumido para cada camada e das relações deformações-deslocamentos, as expressões da energia cinética e da energia de deformação mecânica para o elemento de viga sanduíche podem ser formuladas (Anexos A2 e A3), respectivamente, como segue:

$$T_{(e)}(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{(e)}^T(t) \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}_{(e)}(t) \quad (4.10a)$$

$$U_{(e)}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T(t) \left[\mathbf{K}_v^{(e*)} + \mathbf{K}_e^{(e)} \right] \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (4.10b)$$

onde:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{k=b,v,c} \left\{ \int_0^L \rho_k A_k \left[\mathbf{N}_{xk}^T(x) \mathbf{N}_{xk}(x) + \mathbf{N}_w^T(x) \mathbf{N}_w(x) \right] dx + \rho_k I_k \int_0^L \mathbf{N}_{\theta_k}^T(x) \mathbf{N}_{\theta_k}(x) dx \right\} \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{K}_e^{(e)} = \sum_{k=b,c} E_k \left[A_k \int_0^L \mathbf{B}_{mk}^T(x) \mathbf{B}_{mk}(x) dx + I_k \int_0^L \mathbf{B}_{bk}^T(x) \mathbf{B}_{bk}(x) dx \right] \quad (4.11b)$$

$$\mathbf{K}_v^{(e*)} = E_v^* \left[A_v \int_0^L \mathbf{B}_{mv}^T(x) \mathbf{B}_{mv}(x) dx + I_v \int_0^L \mathbf{B}_{bv}^T(x) \mathbf{B}_{bv}(x) dx \right] + \kappa_v G_v^* A_v \int_0^L \mathbf{B}_{sv}^T(x) \mathbf{B}_{sv}(x) dx \quad (4.11c)$$

Nas Eqs. (4.11) pode-se identificar $A_k = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{z_k-h_k/2}^{z_k+h_k/2} dz dy$ e $I_k = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{z_k-h_k/2}^{z_k+h_k/2} (z - z_k)^2 dz dy$

como sendo, respectivamente, a área da seção transversal e o momento de inércia de área da

k -ésima camada e E_k ($k = b, c$) é o módulo longitudinal das camadas elásticas e E_v^* e G_v^* indicam, respectivamente, os módulos longitudinal e de cisalhamento do núcleo viscoelástico. κ_v é o fator de correção do cisalhamento transversal para a camada viscoelástica. As matrizes $N_{xk}(x)$, $N_w(x)$, $N_{\theta_k}(x)$, $B_{mk}(x)$, $B_{bk}(x)$, $B_{bk}(x)$ e $B_{sv}(x)$ estão definidas no Anexo A1.

É importante ressaltar que como apresentado no Capítulo III, Seção 3.3, o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos são dependentes da frequência de excitação e da temperatura. Como consequência, os módulos longitudinal e transversal, E_v^* e G_v^* , não são constantes, mas dependentes da frequência e da temperatura. Neste trabalho, como o interesse está voltado à análise no domínio temporal de sistemas viscoelásticos via utilização do modelo derivativo fracionário como apresentado na Seção 3.4, nesta etapa do desenvolvimento da matriz de rigidez elementar da parte viscoelástica as propriedades mecânicas do material viscoelástico são assumidas como sendo independentes da frequência e da temperatura para posterior inclusão do módulo MDF. Além disso, será assumido que o coeficiente de Poisson para os materiais viscoelásticos lineares é independente da frequência e da temperatura de tal forma que é válida a seguinte relação entre os módulos longitudinal e transversal, $G^* = E^*/(2 + 2\nu)$. Esta aproximação tem sido utilizada por muitos autores que verificaram experimentalmente as variações do coeficiente de Poisson para amostras de PVC (MOREAU, 2007).

A partir das matrizes elementares computadas para cada camada, e negligenciando outras formas de amortecimento, as equações do movimento em nível elementar são construídas:

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}_{(e)}(t) + [\mathbf{K}_e^{(e)} + \mathbf{K}_v^{(e*)}] \mathbf{u}_{(e)}(t) = \mathbf{f}^{(e)}(t) \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{M}^{(e)} = (\mathbf{M}_b + \mathbf{M}_v + \mathbf{M}_c) \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$ é a matriz de massa elementar formada pela contribuição das matrizes de massa da viga base, do núcleo viscoelástico e da camada restrigente, respectivamente. $\mathbf{K}_e^{(e)} = (\mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_c^{(e)}) \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$ é a matriz de rigidez elementar correspondente à parte puramente elástica da viga sanduíche, e $\mathbf{K}_v^{(e*)} \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$ é a matriz de rigidez viscoelástica. $\mathbf{u}_{(e)}(t) \in \mathbb{R}^{N_e}$ e $\mathbf{f}^{(e)}(t) \in \mathbb{R}^{N_e}$ representam, respectivamente, o vetor dos

graus de liberdade elementar e o vetor dos esforços externos, e $N_e = 8$ é o número de graus de liberdade elementares.

4.5. Incorporação do modelo MDF nas matrizes de elementos finitos

Levando-se em conta os desenvolvimentos apresentados na Seção 3.4.1 do Capítulo IV, e após a combinação das expressões (3.15) e (4.12), pode-se realizar a montagem das matrizes globais a partir das matrizes elementares da viga sanduíche utilizando procedimentos de montagem tradicionais, considerando-se a conectividade de nós e a identificação dos GDLs comuns entre dois ou mais elementos finitos. Como resultado, tem-se o seguinte sistema global de equações do movimento da viga sanduíche contendo amortecimento viscoelástico:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K}_e + \tilde{\mathbf{K}}_v)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) - \tilde{\mathbf{f}}_v(t - j\Delta t) \quad (4.13)$$

onde $\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{M}^{(e)}$, $\mathbf{K}_e = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{K}_e^{(e)}$ e $\tilde{\mathbf{K}}_v = \bigcup_{e=1}^{nel} \tilde{\mathbf{K}}_v^{(e)}$ são as matrizes globais. O símbolo \bigcup indica a montagem das matrizes elementares levando-se em conta a conectividade, e $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ são, respectivamente, os vetores dos graus de liberdade globais e dos esforços externos generalizados. O vetor $\tilde{\mathbf{f}}_v(t - j\Delta t)$ representa os esforços viscoelásticos.

4.6. Incorporação do efeito pseudoelástico das LMFs no sistema viscoelástico

No contexto do controle passivo de vibrações mecânicas, nota-se que os materiais viscoelásticos são comumente aplicados, seja sob a forma de camadas restritas passivas como apresentado na seção anterior, seja como dispositivos viscoelásticos discretos que podem ser aplicados sob a forma de apoios viscoelásticos rotacionais e/ou translacionais (de LIMA et al., 2009). Como resultado, esses materiais têm sido incorporados em uma grande variedade de aplicações de engenharia tais como estruturas aeroespaciais, automotivas, satélites de comunicações, construções civis, dentre outras (RAO, 2003, SAMALI; KWOK, 1995). Entretanto, como apresentado no Capítulo III, em virtude de seu comportamento mecânico ser dependente de fatores ambientais e operacionais, quando os materiais viscoelásticos são submetidos a ciclos de carregamentos dinâmicos, uma quantidade significativa de energia é

transformada em calor dentro do volume do material. Como apresentado por Cazenove et al. (2011), este fenômeno conhecido como autoaquecimento interno, pode levar a um aumento excessivo das temperaturas internas dentro do volume do material viscoelástico, comprometendo sobremaneira sua capacidade de amortecimento, ou mesmo a completa perda de eficiência desses dispositivos. Neste sentido, com o intuito de aumentar o amortecimento passivo presente em sistemas mecânicos e reduzir não somente os níveis de vibrações dos mesmos, mas também as restrições impostas aos sistemas viscoelásticos devido às variações nas condições operacionais e ambientais, o uso combinado dos materiais viscoelásticos e das LMFs torna-se uma alternativa bastante interessante.

O interesse no uso do efeito pseudoelástico presente nas LMFs como dispositivos amortecedores passivos se deve em virtude de suas vantagens em relação à maioria dos materiais viscoelásticos. Por exemplo, a capacidade de amortecimento das LMFs é maior que a maioria dos materiais viscoelásticos tradicionalmente comercializados (GANDHI; CHAPIUS, 2002). Além disso, o fator de amortecimento dos materiais viscoelásticos pode ser reduzido significativamente da ordem de 70% como apresentado por Cazenove et al. (2011) em altas temperaturas devido ao fenômeno do autoaquecimento interno quando os mesmos são submetidos a esforços mecânicos cíclicos, o que compromete significativamente a desempenho dos dispositivos viscoelásticos em sistemas de engenharia. Como as variações de temperatura nas LMFs podem ser controladas por dispositivos elétricos de aquecimento, perdas de eficiência dessas ligas devido ao autoaquecimento podem ser evitadas (LAGOUDAS, 2008, LEO, 2007). Portanto, a natureza do comportamento pseudoelástico exibido pelas LMFs quando submetidas a ciclos de carregamentos mecânicos que induzem transformações de fase nas mesmas em temperaturas igual ou superior à temperatura final da austenita (veja Capítulo II, Seção 2.3), pode ser usada para aumentar o amortecimento passivo em várias aplicações práticas de engenharia onde as restrições dos dispositivos viscoelásticos devem ser minimizadas.

Neste trabalho, a aplicação das LMFs a vigas sanduíches contendo amortecimento viscoelástico ocorre de forma discreta via utilização de fios de LMFs pré-tensionados e fixados simetricamente à mesma, como ilustrado na Fig. 4.2. Na mesma figura são mostradas as características geométricas utilizadas para a modelagem do comportamento pseudoelástico dos fios de LMFs.

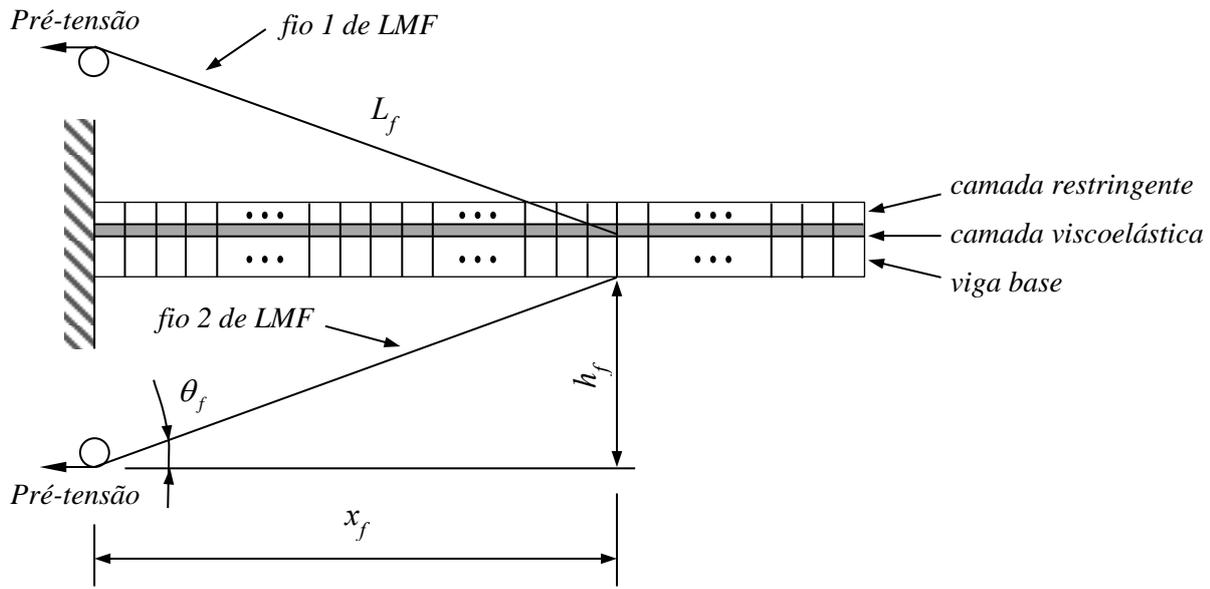


Figura 4.2 - Representação esquemática da viga sanduíche em balanço contendo fios de LMFs.

Através da figura anterior, podem-se obter as seguintes relações para os fios de LMFs:

$$L_f^2 = x_f^2 + h_f^2 \quad (4.14a)$$

$$\theta_f = \tan^{-1}\left(\frac{h_f}{x_f}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{h_f}{L_f}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x_f}{L_f}\right) \quad (4.14b)$$

onde θ_f é o ângulo entre os fios de LMFs e a viga base para a condição pré-tensionada, x_f representa a distância entre o engaste e a posição de fixação dos fios na viga, h_f é a altura medida na direção z de fixação dos fios, e $L_f = L_f^0 + \Delta L_f^{PT}$ é o comprimento dos fios pré-tensionados, e L_f^0 e ΔL_f^{PT} representam, respectivamente, o comprimento do fio não deformado e a variação do comprimento do fio devido à pré-tensão.

Para examinar a influência dos fios discretos de LMFs no comportamento dinâmico da viga sanduíche, será analisada uma configuração deformada da viga em flexão. A Figura 4.3 representa esquematicamente o fio 1 de LMF em sua configuração deformada devido à deflexão transversal da viga sanduíche e a rotação no ponto de contato da mesma.

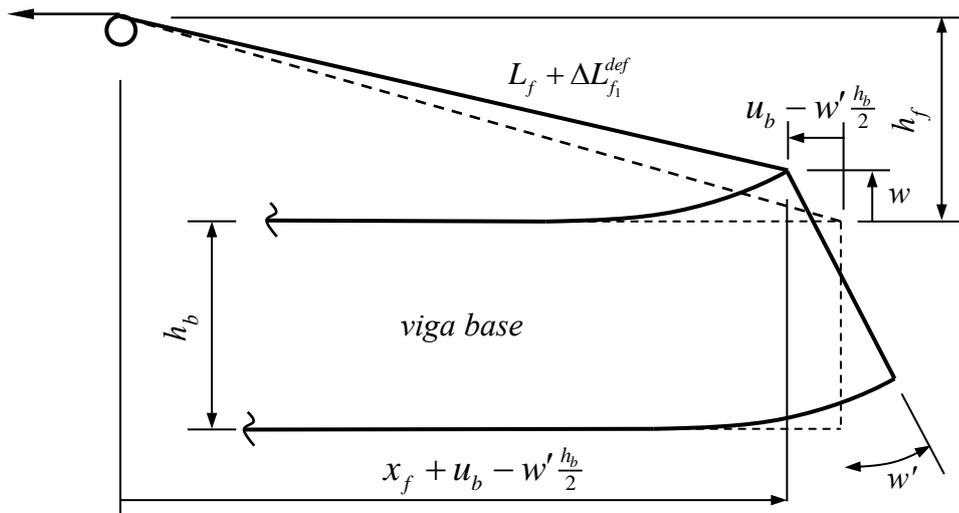


Figura 4.3 - Representação da deformação sofrida pelo fio 1 de LMF devido à deflexão transversal da viga (figura modificada de Gandhi e Chapuis (2002)).

Da figura anterior, podem-se obter as seguintes relações geométricas para a condição de deformação dos fios 1 e 2 de LMFs:

$$\left(L_f + \Delta L_{f_1}^{def}\right)^2 = \left(x_f + u_b - w' \frac{h_b}{2}\right)^2 + (h_f - w)^2 \quad (4.15a)$$

$$\left(L_f + \Delta L_{f_2}^{def}\right)^2 = \left(x_f + u_b + w' \frac{h_b}{2}\right)^2 + (h_f + w)^2 \quad (4.15b)$$

onde as grandezas x_f , u_b , w e w' são tomadas em relação à posição na viga (nó da viga discretizada) na qual são fixados os fios de LMFs. $\Delta L_{f_1}^{def}$ e $\Delta L_{f_2}^{def}$ representam, respectivamente, as variações de comprimento sofridas pelos fios 1 e 2 devidas à deflexão da viga.

Subtraindo a relação (4.14a) das Eqs. (4.15) e negligenciando os termos $(\Delta L_{f_1}^{def})^2$, $(\Delta L_{f_2}^{def})^2$, u_b^2 , w'^2 , w^2 e $u_b w'$ para pequenos deslocamentos, pode-se chegar às seguintes relações:

$$\Delta L_{f_1}^{def} = \frac{x_f}{L_f} u_b - \frac{h_b}{2} \frac{x_f}{L_f} w' - \frac{h_f}{L_f} w \quad (4.16a)$$

$$\Delta L_{f_2}^{def} = \frac{x_f}{L_f} u_b + \frac{h_b}{2} \frac{x_f}{L_f} w' + \frac{h_f}{L_f} w \quad (4.16b)$$

que combinadas com a expressão (4.14b), permite determinar as deformações normais sofridas pelos fios de LMFs devidas à deflexão da viga sanduíche:

$$\varepsilon_{f_1}^{def} = \frac{\Delta L_{f_1}^{def}}{L_f} = \left[\frac{\cos \theta_f}{L_f} \left(u_b - \frac{h_b}{2} w' \right) - \frac{\sin \theta_f}{L_f} w \right] \quad (4.17a)$$

$$\varepsilon_{f_2}^{def} = \frac{\Delta L_{f_2}^{def}}{L_f} = \left[\frac{\cos \theta_f}{L_f} \left(u_b + \frac{h_b}{2} w' \right) + \frac{\sin \theta_f}{L_f} w \right] \quad (4.17b)$$

A partir das expressões anteriores é possível calcular a tensão total atuante nos fios de LMF levando-se em conta a região do diagrama tensão-deformação em que se encontra a liga de memória de forma de acordo com a Figura 2.6, Seção 2.5.1, Capítulo II:

$$\sigma_{f_j}^T = E_{reg}^j \varepsilon_{f_j}^T + \sigma_{reg}^j = E_{reg}^j \left(\varepsilon_{f_j}^{def} + \varepsilon_f^{PT} \right) + \sigma_{reg}^j \quad j=1,2 \quad (4.18)$$

onde E_{reg}^j é o módulo longitudinal do fio j de LMF calculado de acordo com a inclinação da reta do diagrama tensão-deformação, $\sigma_{reg}^j = \sigma_p^j - E_{reg}^j \varepsilon_p^j$ é a tensão associada à região do diagrama tensão-deformação para o fio j , e o subscrito $p = [\max, tp3, \min, tp1]$ caracteriza a região do diagrama tensão-deformação na qual se encontra a LMF (ver Fig. 2.6). $\varepsilon_f^{PT} = \Delta L_f^{PT} / L_f^0$ é a deformação devida à pré-tensão nos fios.

Considerando a Eq. (4.18), a força exercida nos fios de LMFs é dada como segue:

$$F_{f_j}^T = A_f \sigma_{f_j}^T = A_f \left(E_{reg}^j \varepsilon_{f_j}^T + \sigma_{reg}^j \right) \quad j=1,2 \quad (4.19)$$

Combinando as relações (4.17) e (4.19), chega-se às expressões das forças nos fios:

$$F_{f_j}^T = A_f E_{reg}^j \left(\varepsilon_{f_j}^{def} + \varepsilon_f^{PT} \right) + A_f \sigma_{reg}^j \quad j=1,2 \quad (4.20)$$

Uma vez determinado os esforços nos fios de LMFs, pode-se utilizar o sistema equipolente de forças apresentado na Fig. 4.4 para identificar os esforços impostos à viga sanduíche pelos fios de LMFs. Esses esforços serão considerados na modelagem por elementos finitos como um vetor de carregamentos externos aplicados no nó nd da viga sanduíche, correspondente à aplicação dos fios. A partir da Fig. 4.4, pode-se obter o seguinte vetor dos carregamentos nodal:

$$\mathbf{f}_{LMF}^{nd}(t) = \begin{Bmatrix} N_f^{u_b} \\ N_f^w \\ N_f^{w'} \\ N_f^{u_c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{f_1}^T \cos \theta_f - F_{f_2}^T \cos \theta_f \\ F_{f_1}^T \sin \theta_f - F_{f_2}^T \sin \theta_f \\ \frac{h_b}{2} (F_{f_1}^T \cos \theta_f - F_{f_2}^T \cos \theta_f) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

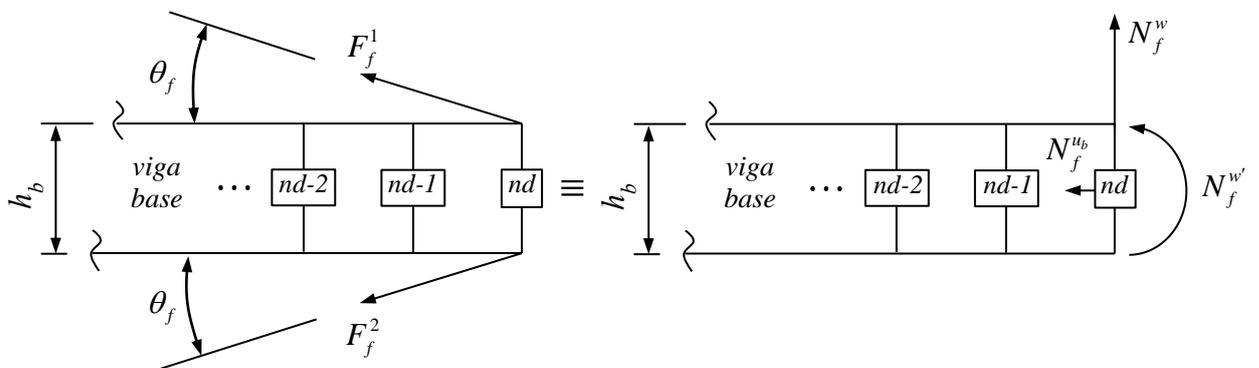


Figura 4.4 – Representação dos esforços impostos à viga sanduíche pelos fios de LMFs.

Combinando as relações (4.17) com a expressão (4.20) pode-se obter as expressões das forças para os fios 1 e 2 de LMF. Em seguida, as duas expressões resultantes, $F_{f_1}^T$ e $F_{f_2}^T$, são introduzidas na relação (4.21), que após algumas manipulações matemáticas, fornece o seguinte vetor dos carregamentos nodal:

$$\mathbf{f}_{LMF}^{nd}(t) = \mathbf{K}_{LMF}^{nd} \mathbf{u}_{(e)}^{nd}(t) + \tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^{nd}(t) \quad (4.22)$$

onde $\mathbf{u}_{(e)}^{nd}(t) = [\mathbf{u}_b^{nd}(t) \quad w^{nd}(t) \quad w'^{nd}(t) \quad \mathbf{u}_c^{nd}(t)]^T$ representa o vetor dos graus de liberdade do nó nd onde é aplicado os fios de LMFs, e \mathbf{K}_{LMF}^{nd} e $\tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^{nd}(t)$ assumem, respectivamente, as formas:

$$\mathbf{K}_{LMF}^{nd} = - \begin{bmatrix} k_1 \cos^2 \theta_f & -\frac{k_2}{2} \sin 2\theta_f & -\frac{h_b k_2}{2} \cos^2 \theta_f & 0 \\ -\frac{k_2}{2} \sin 2\theta_f & \frac{k_1}{2} \sin^2 \theta_f & \frac{h_b k_1}{4} \sin 2\theta_f & 0 \\ -\frac{h_b k_2}{2} \cos^2 \theta_f & -\frac{h_b k_1}{4} \sin 2\theta_f & -\frac{h_b^2 k_1}{4} \cos^2 \theta_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^{nd}(t) = \begin{Bmatrix} -A_f (S_f^1 + S_f^2) \cos \theta_f \\ A_f (S_f^1 - S_f^2) \cos \theta_f \\ \frac{h_b A_f}{2} (S_f^1 - S_f^2) \cos \theta_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23b)$$

onde $k_1 = \frac{A_f}{L_f} (E_{reg}^1 + E_{reg}^2)$, $k_2 = \frac{A_f}{L_f} (E_{reg}^1 - E_{reg}^2)$, $S_f^1 = E_{reg}^1 \varepsilon_f^{PT} + \sigma_{reg}^1$ e $S_f^2 = E_{reg}^2 \varepsilon_f^{PT} + \sigma_{reg}^2$.

Uma vez determinado o vetor dos esforços nodal devido aos fios de LMFs, este deve ser expandido nos graus de liberdade globais do sistema para se determinar as equações do movimento a nível global. A expansão pode ser feita utilizando-se o conceito de *modificação estrutural diádica* (MAIA; SILVA, 1997), permitindo reescrever a Eq.(4.22) da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{LMF}(t) = -\mathbf{K}_{LMF} \mathbf{u}_{(e)}(t) + \tilde{\mathbf{f}}_{LMF}(t) \quad (4.24)$$

onde $\mathbf{K}_{LMF} = \mathbf{I}_k^T \mathbf{K}_{LMF}^k \mathbf{I}_k$ e $\mathbf{f}_{LMF} = \mathbf{I}_k^T \tilde{\mathbf{f}}_{LMF}^k \cdot \mathbf{I}_k$ designa as colunas da matriz identidade de ordem N correspondentes aos gdl's de aplicação dos esforços.

Introduzindo o vetor dos carregamentos impostos à viga pelos fios de LMFs na expressão (4.13), chega-se às equações do movimento a nível global da viga tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K}_e + \tilde{\mathbf{K}}_v + \mathbf{K}_{LMF})\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) + \tilde{\mathbf{f}}_{LMF}(t) - \tilde{\mathbf{f}}_v(t - j\Delta t) \quad (4.25)$$

4.7. Resolução numérica das equações do movimento da viga sanduíche com fios de LMFs

Com objetivo de ilustrar os procedimentos de modelagem descritos anteriormente, simulações numéricas serão apresentadas no Capítulo V visando avaliar o desempenho e as limitações da combinação dos materiais viscoelásticos com as ligas de memória de forma para a redução dos níveis de vibração de sistemas dinâmicos submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos. Neste contexto, um aspecto importante a ser considerado é o procedimento de resolução numérica das equações do movimento (4.25) como detalhado na Fig. 4.5.

As principais etapas do procedimento de resolução numérica implementado via utilização do ambiente de programação Matlab[®] : (i) no início do processo deve-se informar as temperaturas de operação dos fios de LMFs e do material viscoelástico para a determinação dos limites de transição do diagrama tensão-deformação para as LMFs e dos parâmetros do modelo MDF. Além disso, devem-se informar os parâmetros geométricos dos fios de LMFs e da viga sanduíche, os parâmetros do integrador de Newmark (β e γ), as condições de contorno do problema, os esforços externos e as velocidades e os deslocamentos iniciais, $\dot{\mathbf{u}}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$; (ii) em seguida, as matrizes globais de massa e rigidez da viga sanduíche para a condição inicial do problema são construídas; (iii) em seguida, as matrizes de rigidez modificadas e os esforços devidos à presença dos materiais viscoelásticos e dos fios de LMFs, respectivamente, são avaliadas. É também calculado nesta etapa o vetor aceleração $\ddot{\mathbf{u}}_0(t)$ para as condições iniciais do problema; (iv) em seguida, inicia-se o processo iterativo. Inicialmente, a cada passo de tempo é atualizado o vetor de carregamento devido à camada viscoelástica, e em seguida são atualizados, a matriz de rigidez e o vetor de esforços dos fios devido aos fios de LMF segundo a primeira hipótese assumida^(*) para as LMFs. Em seguida é atualizado o vetor de deslocamento permitindo, conseqüentemente, a determinação da

deformação induzida em cada fio. Então é realizada uma verificação que valida se a hipótese assumida anteriormente é verdadeira ou não, verificando em qual região do diagrama tensão-deformação cada fio de LMF se encontra. Caso não seja, as propriedades do fio que não obedecer a hipótese assumida são atualizadas. Em seguida são atualizados os vetores de velocidade, de aceleração e o vetor das deformações inelásticas, referente à camada viscoelástica e o vetor de tensões dos fios de LMF. Esse processo iterativo é válido até que o número de pontos escolhidos durante o processo de discretização temporal seja alcançado.

(*) Hipótese assumida que estabelece que cada fio de LMF, para o intervalo de tempo $t_i + \Delta t$, apresenta o mesmo comportamento (estar na mesma região do diagrama tensão-deformação) do passo de tempo anterior, t_i ,

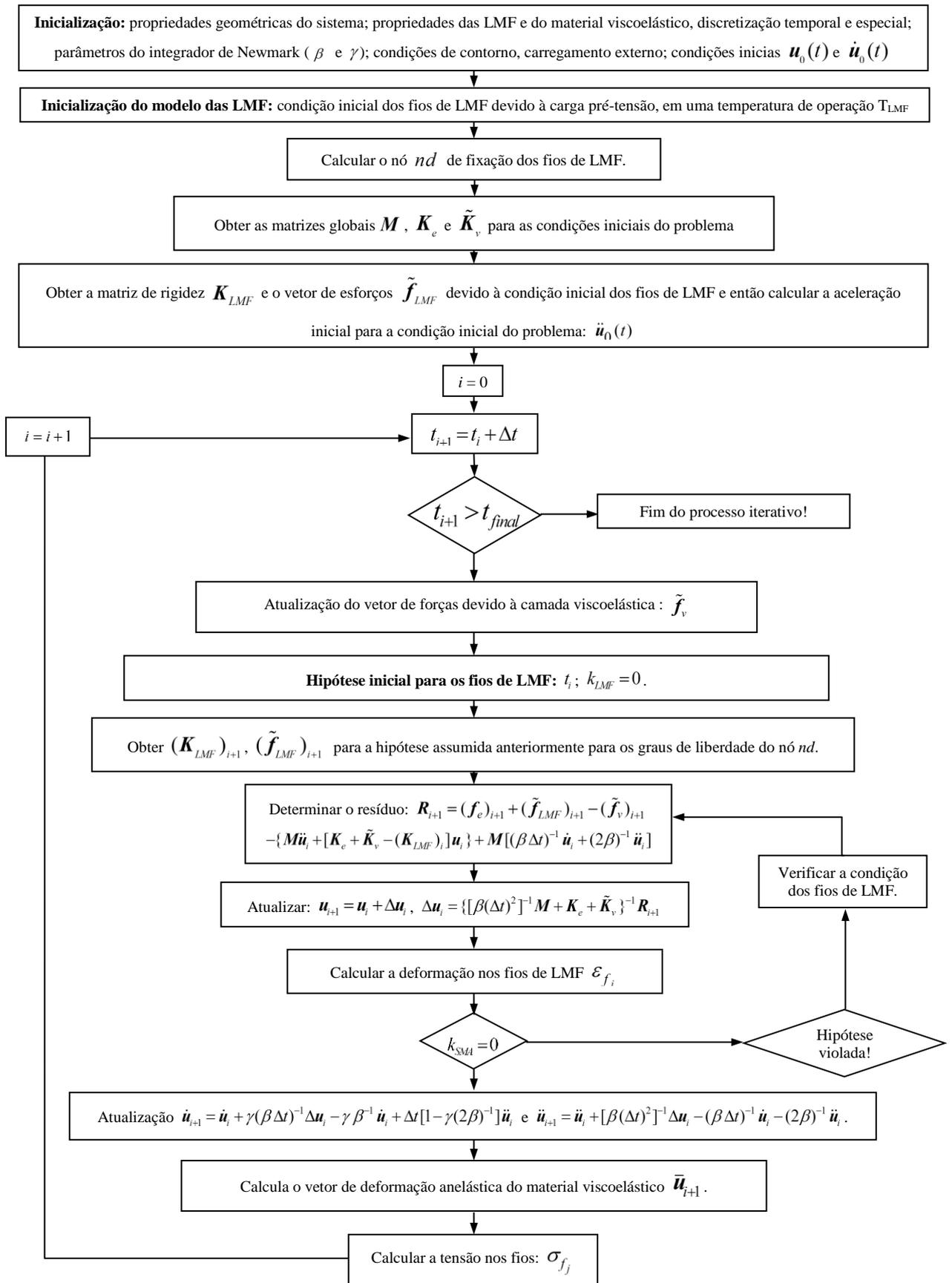


Figura 4.5 - Fluxograma do processo iterativo da resolução da Eq.(4.25).

CAPÍTULO V

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentados os resultados de simulações numéricas realizadas com o objetivo de ilustrar os procedimentos de modelagem e incorporação dos materiais viscoelásticos e das LMFs estudados nos capítulos anteriores em modelos de elementos finitos de sistemas mecânicos. Será avaliado o desempenho da combinação do amortecimento viscoelástico e do efeito pseudoelástico das LMFs em termos da atenuação dos níveis de vibração de sistemas dinâmicos, bem como dos modelos matemáticos utilizados. Nas simulações, serão considerados sistemas discretos de um e dois gdl's contendo elementos pseudoelásticos e uma viga sanduíche de três camadas tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs aplicados em pontos específicos. Por fim, será avaliada a influência de fatores ambientais e operacionais sobre o desempenho dos diferentes tipos de tratamentos.

5.1. Sistema de um grau de liberdade contendo elemento LMF

Com o objetivo de validar numericamente os procedimentos de modelagem do comportamento pseudoelástico das LMFs, nesta seção será implementado o dispositivo de absorção de vibração proposto por Lagoudas et al. (2001) como representado na Fig.5.1, composto por uma massa M acoplada a uma base através de um elemento com propriedades pseudoelásticas de comprimento L_{LMF} e seção transversal A_{LMF} . O objetivo é atenuar os níveis de vibração da massa principal devidos a uma excitação harmônica aplicada à base da forma $y(t) = Y_0 \sin(\omega t)$.

No sentido de obter a equação do movimento do sistema ilustrado pela Fig.5.21, foi utilizado o modelo constitutivo proposto por Lagoudas et al. (2001) para representar o comportamento pseudoelástico das LMFs (ver Capítulo II, Seção 2.5).

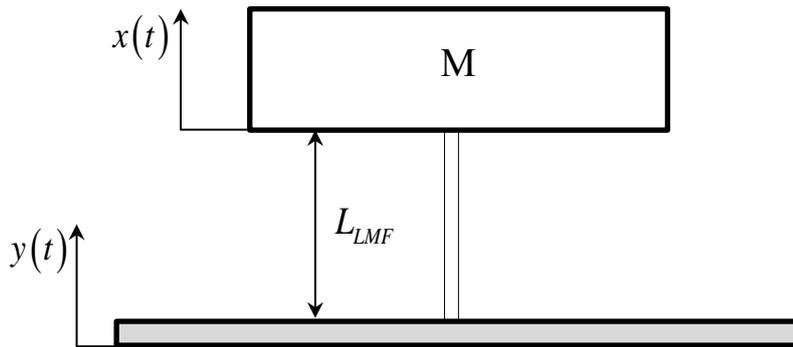


Figura 5.1 - Sistema de 1 gdl com elemento pseudoelástico (adaptado de Lagoudas et al. (2001)).

Assumindo-se que inicialmente o elemento LMF esteja submetido a um carregamento de tração, pela hipótese assumida que $x(t) > y(t)$, a força exercida sobre ele pode ser calculada da seguinte forma:

$$-F_{LMF} = \sigma_{LMF} A_{LMF} \quad (5.1)$$

Dessa forma, combinando as Eqs.(2.2) e (5.1), a força exercida sobre o elemento pseudoelástico pode ser reescrita como segue:

$$-F_{LMF} = E_{LMF}(\varepsilon^t) A_{LMF} \left(\frac{x(t) - y(t)}{L_{LMF}} - \varepsilon^t \right) \quad (5.2)$$

Aplicando-se a segunda Lei de Newton à massa M e levando-se em conta a expressão (5.2), chega-se à seguinte equação do movimento:

$$\frac{ML_{LMF}}{A_{LMF}} \ddot{x}(t) + E_{LMF}(\varepsilon^t) x(t) = E_{LMF}(\varepsilon^t) [y(t) + L_{LMF} \varepsilon^t] \quad (5.3)$$

Analisando a equação do movimento (5.3), nota-se que esta se trata de uma equação diferencial de segunda ordem não linear, uma vez que o módulo de elasticidade do elemento LMF é dependente da deformação de transformação, ε^t . Nesse sentido, foi utilizado um processo de linearização através das equações do modelo simplificado de Lagoudas apresentadas no Capítulo II, resultando no seguinte conjunto de equações diferenciais

ordinárias lineares de segunda ordem para cada região do diagrama tensão-deformação do elemento LMF, como proposto por Oliveira (2008):

1) Elástica de carregamento:

$$\frac{ML_{LMF}}{A_{LMF}} \ddot{x}(t) + Ex(t) = E \left[y(t) + \varepsilon_{\min} L_{LMF} \right] - \sigma_{\min} L_{LMF} \quad (5.4a)$$

2) Transformação de fase direta:

$$\frac{ML_{LMF}}{A_{LMF}} \ddot{x}(t) + Ex(t) = E \left[y(t) + \varepsilon_{ip1} L_{LMF} \right] - \sigma_{ip1} L_{LMF} \quad (5.4b)$$

3) Elástica de descarregamento:

$$\frac{ML_{LMF}}{A_{LMF}} \ddot{x}(t) + Ex(t) = EL_{LMF} \left[y(t) + \varepsilon_{\max} L_{LMF} \right] - \sigma_{\max} L_{LMF} \quad (5.4c)$$

4) Transformação reversa:

$$\frac{ML_{LMF}}{A_{LMF}} \ddot{x}(t) + Ex(t) = E \left[y(t) + \varepsilon_{ip3} L_{LMF} \right] - \sigma_{ip3} L_{LMF} \quad (5.4d)$$

Observando as Eqs.(5.4), nota-se que o comportamento dinâmico do sistema de 1 gdl contendo elemento LMF se altera de acordo com a fase em que ele se encontra. Essas equações foram resolvidas conjuntamente via utilização do método implícito de integração numérica de Newmark (BATHE, 1996), implementado em ambiente de programação MATLAB[®].

Para os parâmetros físicos e geométricos considerados por Lagoudas et al. (2001) apresentados na Tab. 5.1, simulou-se o sistema pseudoelástico. Comparando os deslocamentos da massa principal e da estrutura base mostrados na Fig. 5.2, pode-se concluir que o elemento LMF reduziu significativamente a amplitude do movimento da massa principal em virtude da dissipação de energia ocorrida na LMF em cada ciclo de histerese

apresentado na Fig. 5.3. Além disso, os resultados gerados estão de acordo com obtidos por Lagoudas et al.(2001) para as mesmas condições de operação, validando a implementação numérico-computacional, como pode ser observado nas Figs. 5.2 a 5.5.

Outro aspecto importante é que mesmo para a condição em que o elemento LMF é induzido a transformações incompletas de fase (*minor loop cycles*), as vibrações da massa principal são reduzidas, confirmando a eficiência do efeito pseudoelástico das LMFs.

Tabela 5.1 – Parâmetros do sistema de 1 gdl (extraídos de Lagoudas et al. (2001)).

Parâmetros de projeto		Dados do material	
Massa (M)	500 [kg]	E_A	70×10^9 [Pa]
Comprimento da barra de LMF (L_{LMF})	1 [m]	E_M	30×10^9 [Pa]
Amplitude do deslocamento (Y_0)	0,01 [m]	C	7×10^6 [Pa/°C]
Raio da barra (r_{LMF})	0,01 [m]	$[M_{f0} \ M_{s0} \ A_{s0} \ A_{f0}]$	[274 292 296 315] [K]
Frequência do deslocamento imposto (f)	50 [Hz]	Λ	0,05
Temperatura de operação (T)	315 [K]		

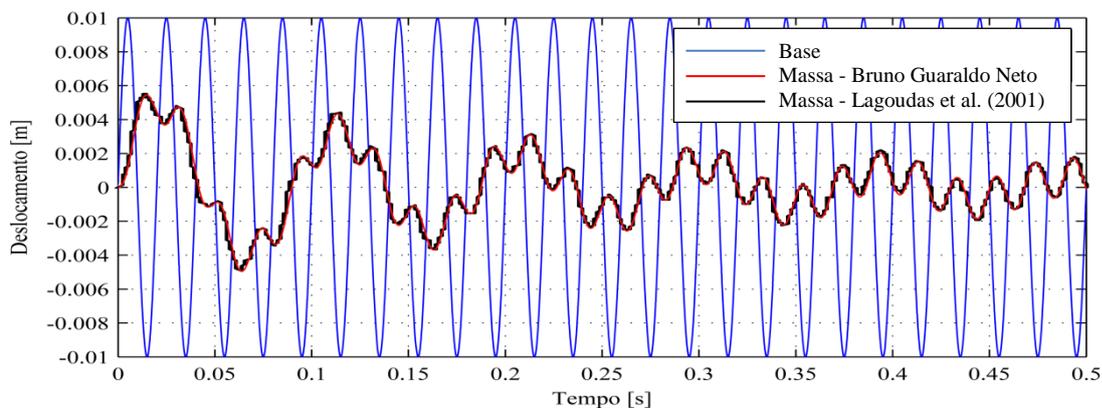


Figura 5.2 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315 \text{ K}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $Y_0 = 0,01 \text{ m}$).

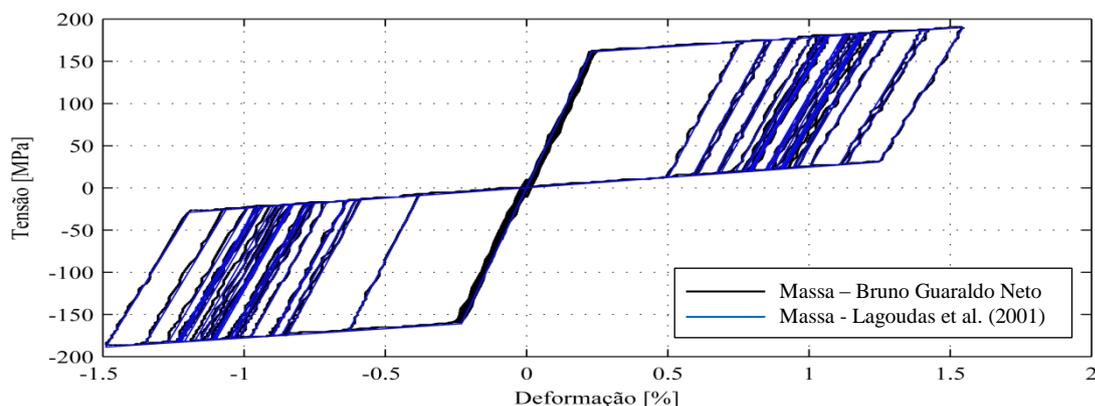


Figura 5.3 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 \text{ K}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $Y_0 = 0,01 \text{ m}$).

5.1.1. Variando a temperatura do elemento LMF

Em seguida, foi avaliado o comportamento dinâmico do sistema pseudoelástico para uma temperatura de operação de $T = 325K$ superior à temperatura final de austenita, $A_f = 315K$.

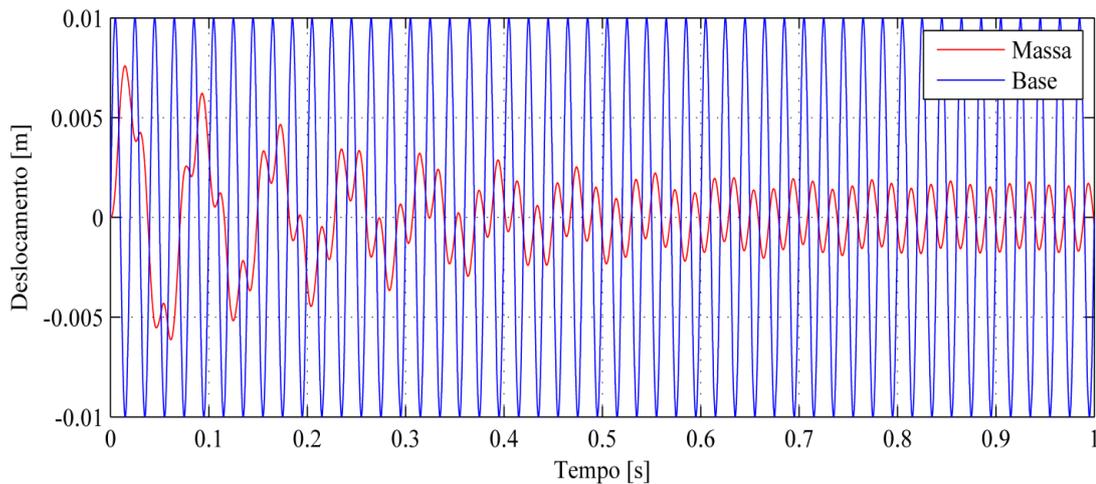


Figura 5.4 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 325 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,01m$).

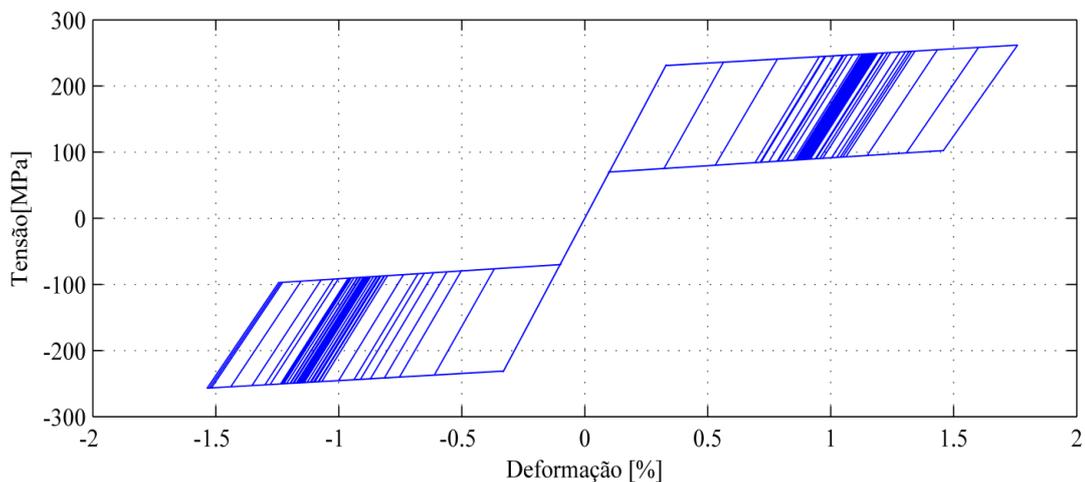


Figura 5.5 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 325 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,01m$).

Comparando as respostas temporais da massa principal apresentadas nas Figs. 5.2 e 5.4, conclui-se que houve um aumento das amplitudes de vibração da mesma para a temperatura superior à temperatura final da austenita em todo o intervalo de tempo analisado. Isto se deve ao fato de que um aumento na temperatura de operação da LMF leva a um aumento nos

valores das tensões e deformações calculadas pelas Eqs.(2.3) a (2.10), como demonstrado pelo diagrama tensão-deformação da Fig. 2.8 (LAGOUDAS, 2008). Portanto, uma vez que as condições do carregamento imposto ao sistema são mantidas constantes, conclui-se que a alteração nas tensões e deformações de transição do elemento LMF o induziu a níveis de tensão e deformação que o levaram a gerar menor dissipação de energia do sistema, como mostrado na Fig. 5.5.

5.1.2. Variando a frequência da excitação

As Figuras. 5.6 a 5.9 mostram os resultados obtidos variando-se a frequência da excitação do sistema pseudoelástico, onde foi mantida a temperatura da LMF de $T = 315 K$.

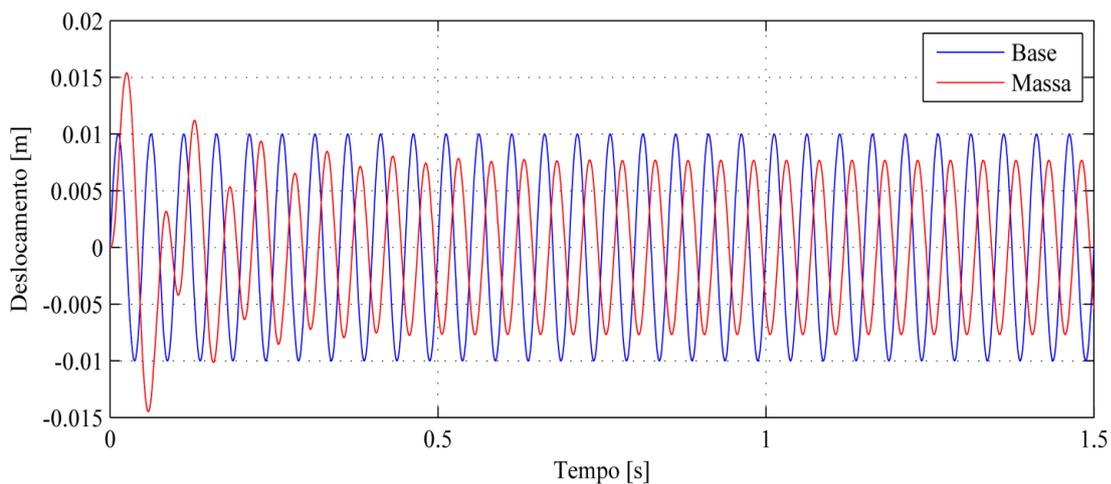


Figura 5.6 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315 K$, $f = 20Hz$, $Y_0 = 0,01m$).

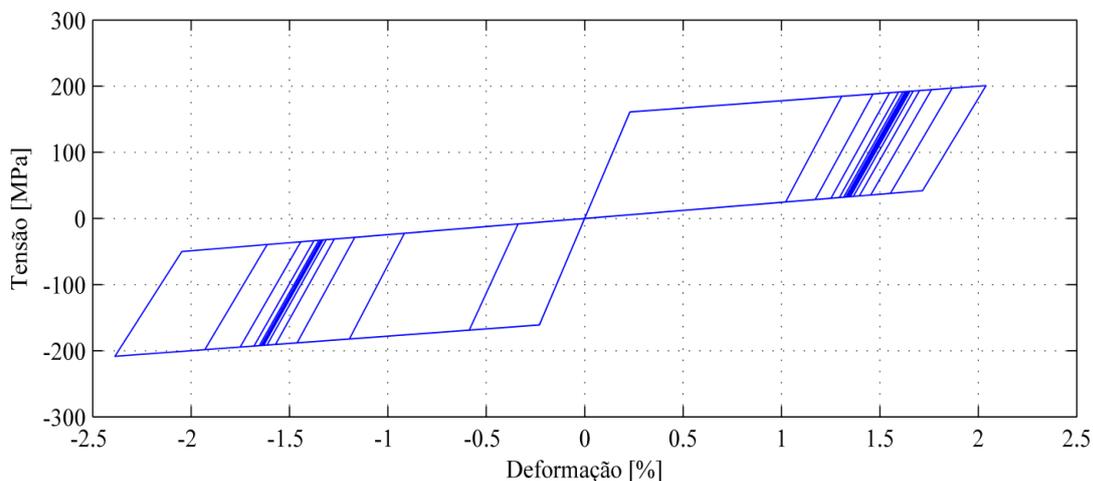


Figura 5.7 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 20Hz$, $Y_0 = 0,01m$).

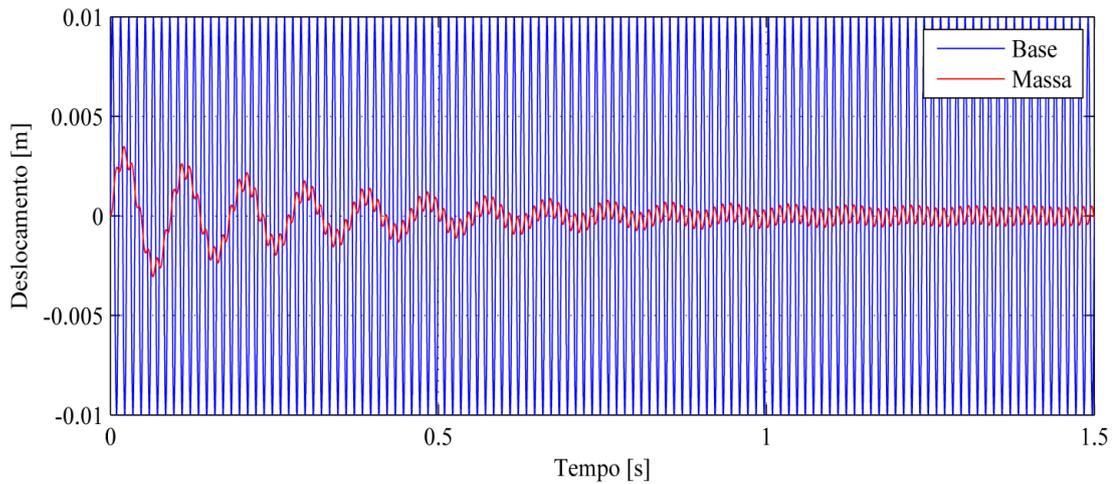


Figura 5.8 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315 K$, $f = 80Hz$, $Y_0 = 0,01m$).

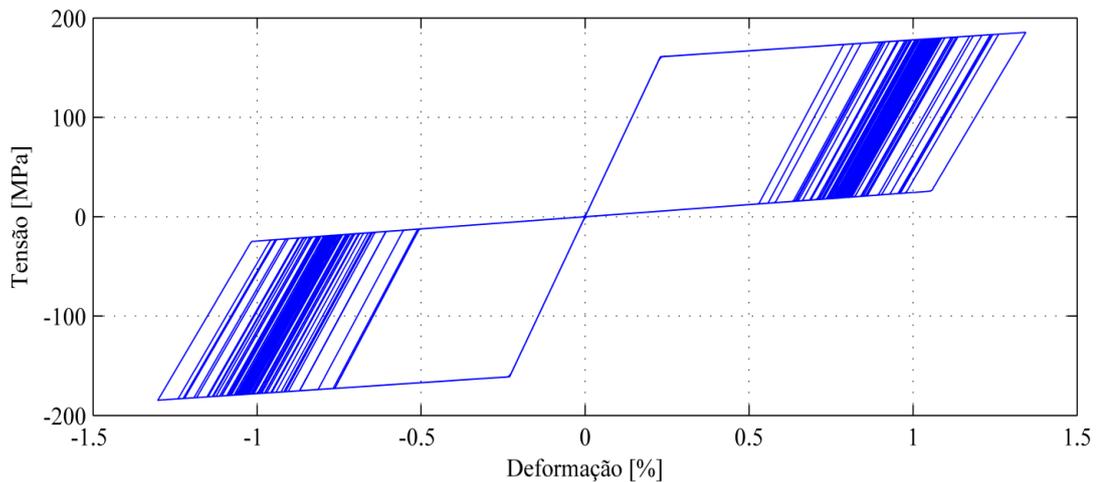


Figura 5.9 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 80Hz$, $Y_0 = 0,01m$).

Analisando os resultados numéricos obtidos anteriormente pode-se concluir a respeito da influência significativa da frequência da excitação no carregamento pseudoelástico das LMFs. Comparando os deslocamentos da massa principal mostrados nas Figs. 5.4, 5.6 e 5.8 pode-se concluir que mesmo para baixas frequências próximas à frequência de ressonância do sistema de 1 gdl amortecido, ainda assim observa-se um bom desempenho do elemento LMF para atenuar o movimento da massa principal, como observado pelo comportamento pseudoelástico do sistema apresentado na Fig. 5.7. À medida que é elevada a frequência de excitação, observa-se que o elemento de LMF é induzido a baixos níveis de deformação, resultando em menores ciclos de histerese e, conseqüentemente, menor energia dissipada do sistema.

5.1.3. Variando a amplitude da excitação

Mantendo a condição de operação proposta por Lagoudas et al. (2001) e variando apenas a amplitude da excitação imposta ao sistema pseudoelástico, os resultados apresentados nas Figs. 5.10 a 5.13 comprovam a influência significativa deste parâmetro sobre o comportamento pseudoelástico das LMFs. Como esperado, quanto maior a amplitude da excitação, maior a quantidade de energia dissipada pelo elemento LMF. Em particular, a Fig. 5.11 mostra que a amplitude de $Y_0 = 0,04m$ induz deformações da ordem de 4% a 5% no elemento LMF, e a Fig. 5.13 demonstra que para uma pequena amplitude da ordem de $Y_0 = 0,005m$, as deformações induzidas no elemento LMF é em torno de 0.8 a 0.9%.

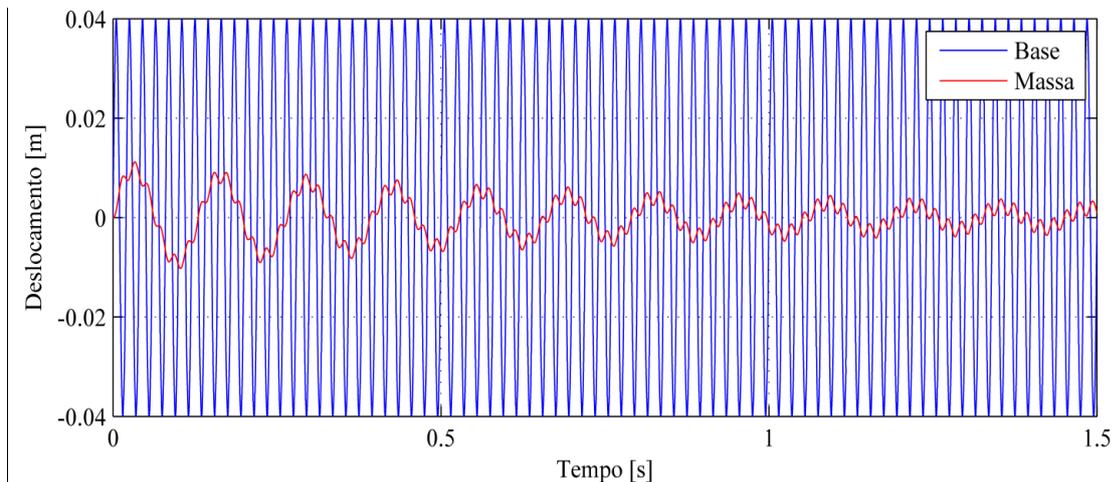


Figura 5.10 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,04m$).

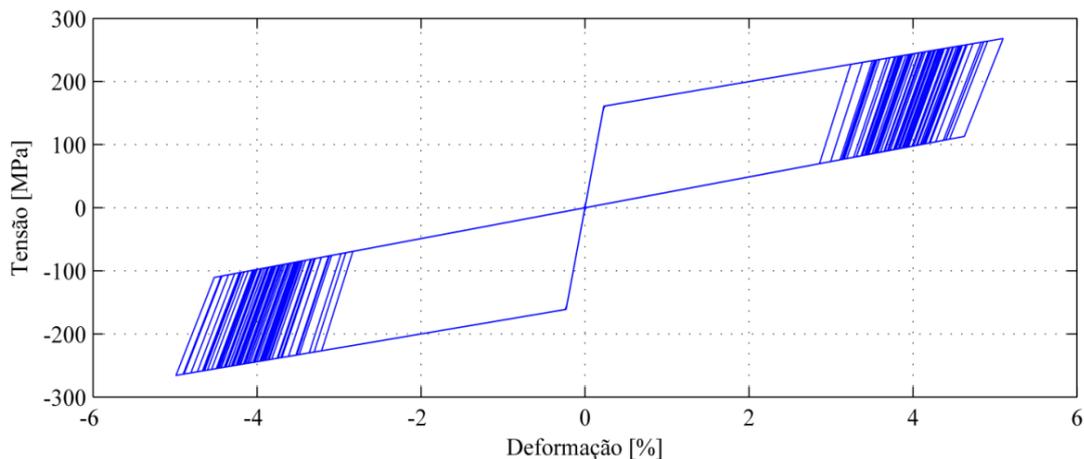


Figura 5.11 - Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,04m$).

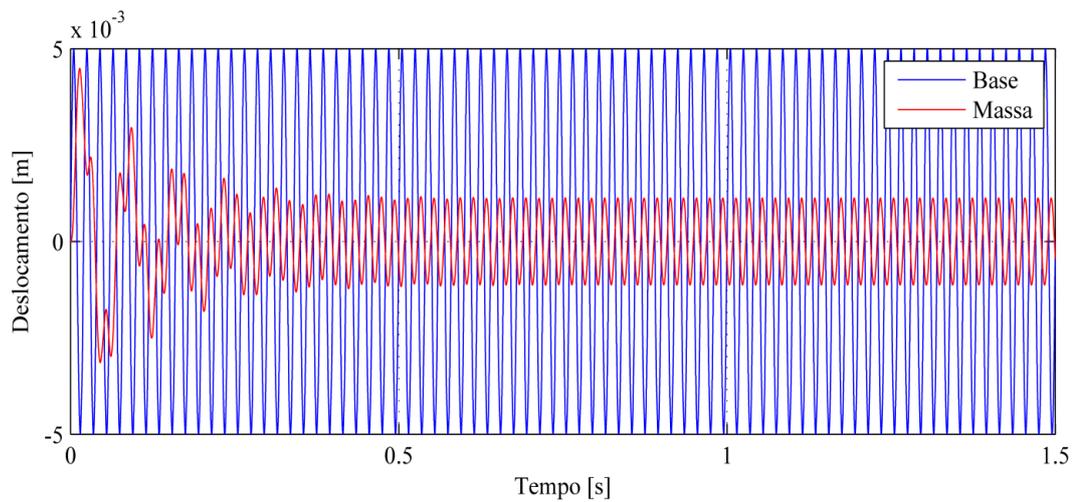


Figura 5.12 - Deslocamentos da massa principal e da base ($T = 315 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,005m$).

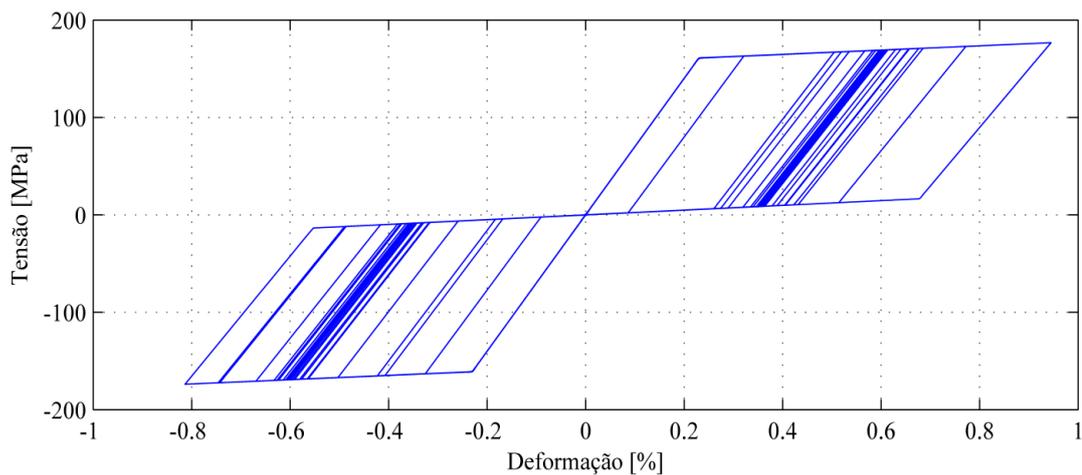


Figura 5.13 – Curvas tensão-deformação obtidas ($T = 315 K$, $f = 50Hz$, $Y_0 = 0,005m$).

Esses resultados demonstram a eficiência do efeito pseudoelástico das LMFs e a potencialidade para sua utilização em sistemas mecânicos com o objetivo de atenuarem os níveis de vibração e ruído desses sistemas quando submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos. Além disso, nota-se a grande influência das condições ambientais e operacionais, como temperatura de operação, a frequência e a amplitude da excitação dinâmica no comportamento pseudoelástico das LMFs. Esses fatores são fundamentais e devem ser levados em conta durante as fases de concepção inicial e projeto, e da construção de dispositivos dissipadores de energia contendo LMFs.

5.2. Sistema de dois graus de liberdade contendo elemento LMF

Nesta seção é apresentado um sistema contendo dois graus de liberdade composto por uma estrutura primária (EP) excitada por uma força externa $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega t)$, e uma estrutura secundária (ES) contendo elemento LMF que atua como um absorvedor dinâmico de vibrações pseudoelástico, como ilustrado na Fig. 5.14. A EP é constituída por um elemento de massa $M_1 = 5000 \text{ Kg}$ e um elemento de mola com rigidez igual a $K_1 = (M_1 \omega^2) \text{ N/m}$, a qual está sendo excitada em sua frequência de ressonância.

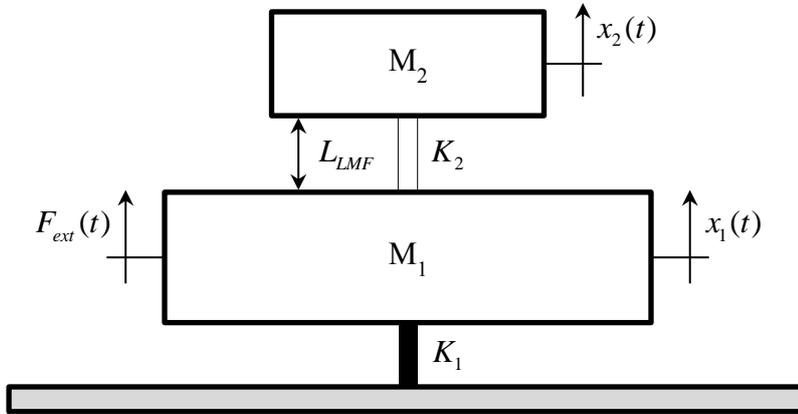


Figura 5.14 - Representação do sistema de 2 gdl's contendo elemento LMF.

Adotando as mesmas considerações utilizadas para o sistema de um grau de liberdade modelado anteriormente, e sob a hipótese de que $x_2(t) > x_1(t)$, a segunda Lei de Newton pode ser aplicada obtendo-se o seguinte sistema de equações do movimento na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) - K_2 L_{LMF} \varepsilon^t \\ K_2 L_{LMF} \varepsilon^t \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

onde $K_2 = E(\varepsilon^t) A_{LMF} / L_{LMF}$ é a rigidez do elemento pseudoelástico, configurando um problema não-linear, uma vez que a matriz de rigidez do sistema e o vetor de carregamento externos dependem da deformação de transformação da LMF.

Utilizando o mesmo procedimento de linearização das equações do movimento do sistema detalhado na seção anterior, o sistema de equações (5.5) pode ser transformado em um conjunto de equações diferenciais ordinárias lineares de acordo com a fase em que o

elemento LMF se encontra, e que são resolvidas via método de integração de Newmark (BATHE, 1996):

Região de carregamento elástico:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{\min} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{\min} \\ -\sigma_{\min} A_{LMF} + K_2 L_{LMF} \varepsilon_{\min} \end{Bmatrix} \quad (5.6a)$$

Região de transformação direta:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{tp1} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp1} \\ -\sigma_{tp1} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp1} \end{Bmatrix} \quad (5.6b)$$

Região de descarregamento elástico:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{\max} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{\max} \\ -\sigma_{\max} A_{LMF} + K_2 L_{LMF} \varepsilon_{\max} \end{Bmatrix} \quad (5.6c)$$

Região de transformação reversa:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext}(t) + \sigma_{tp3} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp3} \\ -\sigma_{tp3} A_{LMF} - K_2 L_{LMF} \varepsilon_{tp3} \end{Bmatrix} \quad (5.6d)$$

onde $K_1 = E_1 A_1 / L_1$ é a rigidez da estrutura primária e $K_2 = E_{LMF} A_{LMF} / L_{LMF}$ é a rigidez da LMF.

Com o objetivo de avaliar o desempenho da ES contendo elemento LMF, bem como do procedimento de implementação numérico-computacional das equações do movimento (5.6), foi aplicado à estrutura primária uma força externa de amplitude $F_0 = 20kN$ e frequência de $f = 33,7Hz$ igual à frequência natural da ES considerando-se a fase puramente austenítica do

elemento LMF. A frequência foi calculada através da relação $\omega = \sqrt{E_A A_{LMF} / M_2 L_{LMF}}$, onde E_A é o módulo de elasticidade do elemento LMF na fase puramente austenítica.

Através da análise do ciclo de histerese apresentado na Fig. 5.16, nota-se que o carregamento imposto provoca apenas deformações elásticas no elemento LMF, não sendo capaz de induzir transformações de fase no material, ou seja, o material não é capaz de dissipar energia, comportando-se, dessa forma, como um absorvedor dinâmico de vibrações clássico. Já a Fig. 5.15 permite comparar as amplitudes das respostas temporais das duas estruturas, onde se percebe a eficiência da ES em atenuar os níveis de vibração da EP devida à sintonização *a priori* da ES.

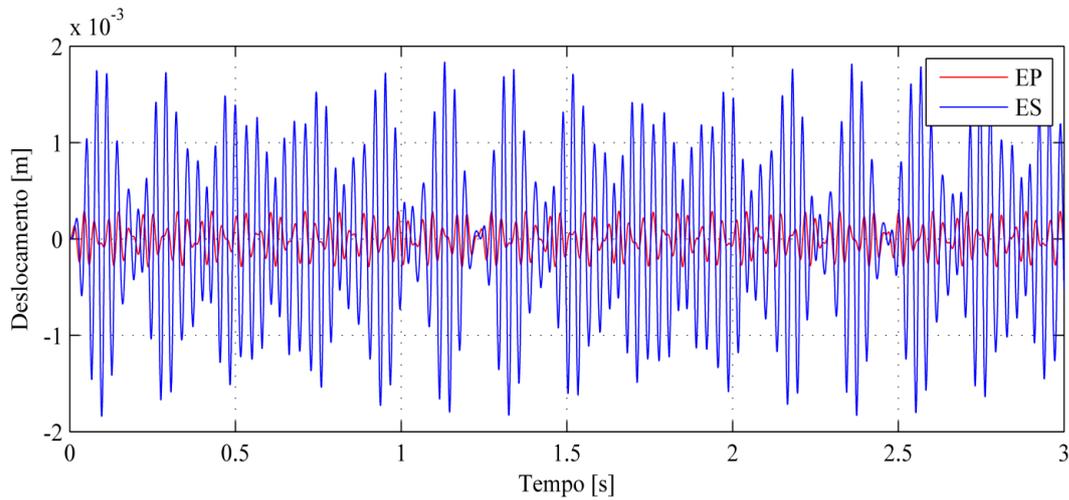


Figura 5.15 - Deslocamentos das estruturas EP e ES para $F_0 = 20kN$ e $f \cong 33,7Hz$.

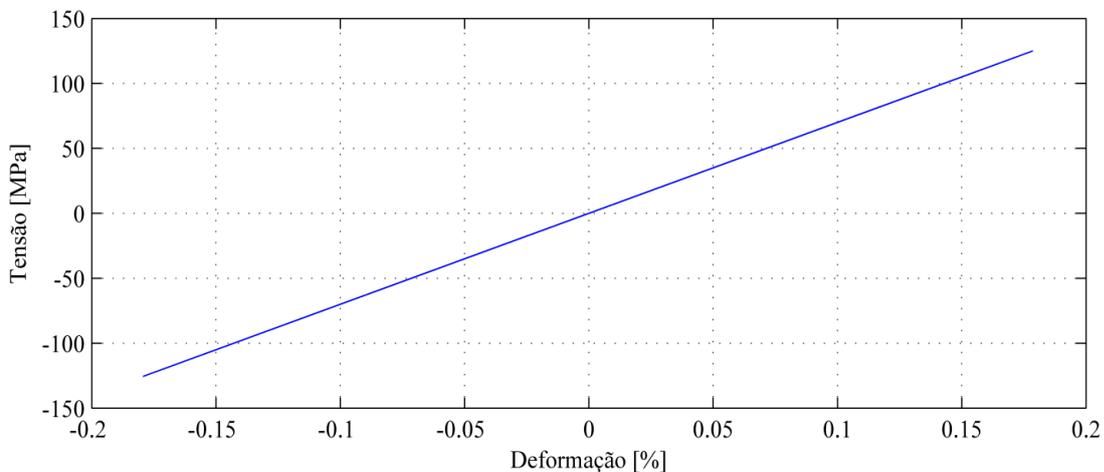


Figura 5.16 - Curvas tensão-deformação do elemento LMF para $F_0 = 20kN$ e $f \cong 33,7Hz$.

Para que a ES apresente comportamento pseudoelástico, foi utilizada uma força externa de amplitude $F_0 = 50kN$ e frequência de $f = 23Hz$, diferente da frequência natural da ES na fase puramente austenítica, para simular uma condição fora da sintonização da mesma. A Figura 5.18 mostra que o carregamento imposto induz transformações de fase no elemento LMF, o que pode ser notado pelos ciclos de histerese. Esse comportamento pseudoelástico do elemento LMF reduz significativamente os níveis de vibração da EP, como mostrado na Fig. 5.17.

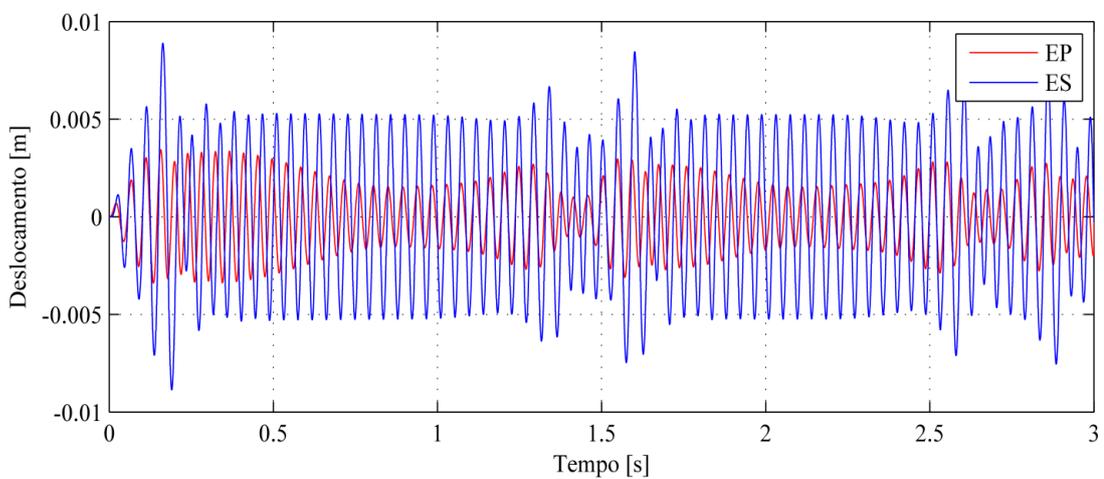


Figura 5.17 - Deslocamentos das massas das EP e ES para $F_0 = 50kN$ e $f = 23Hz$.

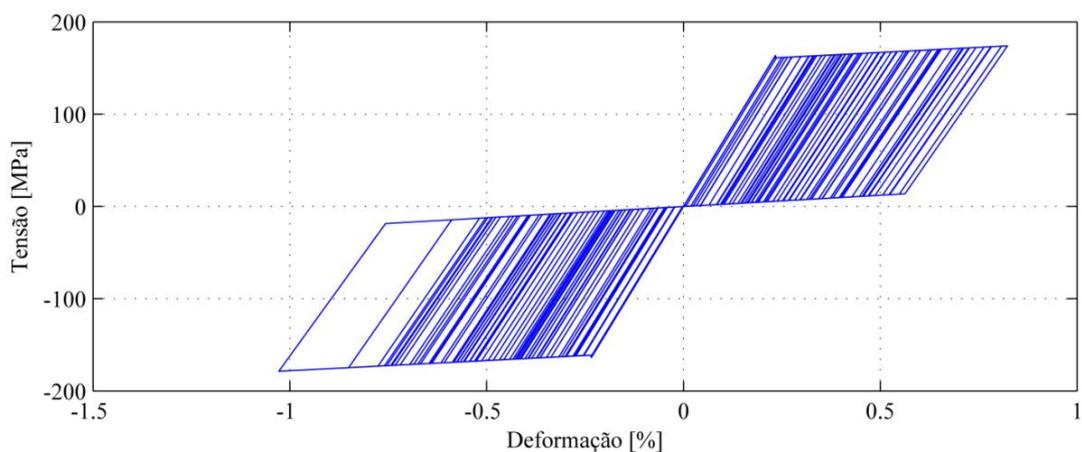


Figura 5.18 – Curvas tensão-deformação do elemento LMF para $F_0 = 50kN$ e $f = 23Hz$.

A Figura 5.19 permite comparar as respostas temporais do sistema sem elemento LMF e com elemento LMF para as condições do carregamento $F_0 = 50kN$ e $f = 23Hz$. Para o caso

sem LMF, utilizou-se um módulo de elasticidade de $E_A = 70GPa$, sem uma sintonização *a priori*. Através dos resultados obtidos, é possível verificar a eficiência do efeito pseudoelástico das LMFs para o isolamento das vibrações de sistemas dinâmicos quando submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos.

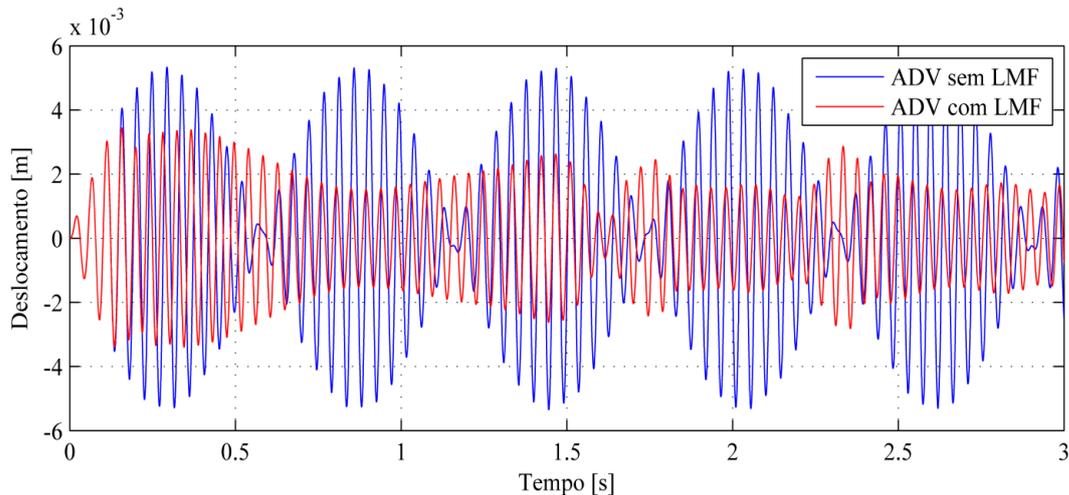


Figura 5.19 - Deslocamentos da EP considerando o elemento LMF da ES sem e com efeito pseudoelástico para $F_0 = 50kN$ e $f = 23Hz$.

A Figura 5.16 mostra que, quando essas ligas não são induzidas às transformações de fase, estas apresentam um comportamento linear, incapazes de dissipar a energia vibratória dos sistemas. Neste caso em específico, houve a necessidade de uma sintonização *a priori* da frequência natural da ES com a frequência da excitação para se conseguir a eficiência desejada. Já para a condição em que o carregamento induz transformações de fase no elemento LMF da ES, mesmo sem sua sintonização *a priori*, a Fig. 5.19 mostra que o dispositivo pseudoelástico é eficiente e robusto em termos da atenuação dos níveis de vibração da EP. Desta forma, mais uma vez pode-se concluir sobre a potencialidade do efeito pseudoelástico das LMFs para o controle passivo de vibrações mecânicas.

5.3. Viga sanduíche tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações numéricas de uma viga sanduíche de três camadas contendo tratamento viscoelástico superficial e fios discretos de LMFs. A Figura 5.20 representa a viga totalmente tratada discretizada em 41 elementos, de

comprimento total 0,41m. Para ilustrar as técnicas de modelagem do amortecimento viscoelástico e do comportamento pseudoelástico das LMFs para a redução dos níveis de vibração de sistemas mecânicos, utilizou-se o elemento de viga sanduíche desenvolvido no Capítulo IV. As propriedades físicas e geométricas dos fios de LMFs e das camadas que compõem a viga sanduíche são dadas nas Tabs. 5.2 e 5.3, respectivamente.

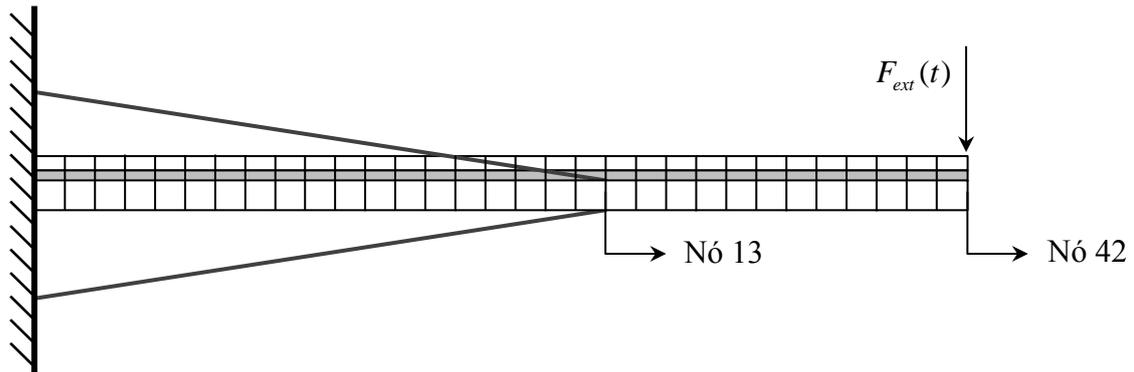


Figura 5.20 - Viga sanduíche em balanço tratada com camada restrita passiva e fios de LMF.

Para analisar a eficiência da associação dos materiais viscoelásticos e das LMFs em termos do aumento do amortecimento passivo das vibrações de flexão da viga base, a mesma foi submetida a uma força externa da forma, $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\omega t)$, cuja frequência de excitação corresponde à primeira frequência natural da viga base. Os dois fios de LMFs colocados simetricamente na viga como mostrado na Fig. 5.20 foram submetidos a uma pré-tensão inicial no valor de 205 MPa para garantir que as deformações induzidas aos mesmos devido à deflexão transversal da viga permaneçam dentro do ciclo de histerese (*major loop cycle*) da região de tração, bem como garantir que os fios permaneçam sempre tracionados (THOMSON et al., 1995, IKEDA et al., 2004).

Tabela 5.2 - Propriedades físicas e geométricas dos fios de LMFs (adaptado Lagoudas et al. 2001).

Fios de LMF			
Ângulo de fixação θ dos fios	19.1 [°]	E_A	70×10^9 [Pa]
Comprimento dos fios	0.128 [m]	E_M	30×10^9 [Pa]
Diâmetro dos fios	0.0011 [m]	C	7×10^6 [Pa/°C]
Temperatura de operação	315 [K]	$[M_{f0} \ M_{s0} \ A_{s0} \ A_{f0}]$	$[274 \ 292 \ 296 \ 315]$ [K]
		Λ	0.05

Tabela 5.3 - Propriedades físicas e geométricas das camadas da viga sanduíche (adaptado de Galucio et al.2004).

Viga Sanduíche					
		Camada	Camada	Camada	
		Base (Alumínio)	Viscoelástica (ISD112)	Restringente (Alumínio)	
		26°C	42°C		
Geometria	Comprimento [m]:	0,41	0,41	0,41	
	Largura [m]:	0,0484	0,0484	0,0484	
	Espessura [m]:	$5,05 \times 10^{-3}$	$0,5 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-3}$	
Material	Densidade volumétrica [Kg/m ³]:	2690	1600	2690	
	Módulo de Young Estático [MPa]:	70300	1,282	1,292	70300
	Módulo de Young Dinâmico [MPa]	-	454,5	205,1	-
	Tempo de Relaxação [s]:	-	$5,94 \times 10^{-4}$	$4,07 \times 10^{-4}$	-
	α (ordem derivativa fracionária):	-	0,6744	0,6898	-
	Coeficiente de Poisson:	-	0,5		-

Para a solução das equações do movimento em nível global do sistema ilustrado na Fig. 5.20, de acordo com a definição (4.25), foi utilizado o procedimento de resolução numérica apresentado na Seção 4.7, sendo necessária a inclusão de um amortecimento numérico para reduzir erros numéricos em alta frequência (BRULS e GOLINVAL, 2007). Foi utilizado um intervalo de tempo de simulação de 0 a 3 segundos com passo de tempo constante de 0,04ms, estando o sistema em repouso no início do processo. Dessa forma, para uma condição de carregamento de $F_0 = 10N$ e $\omega \cong 155,87$ rad/s foram realizadas diferentes simulações numéricas, a saber: (i) viga sem tratamento; (ii) viga tratada com camada restrita passiva; (iii) viga contendo fios discretos de LMFs; (iv) e viga tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs.

A Figura 5.21 ilustra o aumento gradativo das amplitudes de deslocamento com o tempo da estrutura base sem qualquer tipo de tratamento, mostrando que a frequência de excitação utilizada corresponde a uma das frequências naturais da viga base como proposto anteriormente.

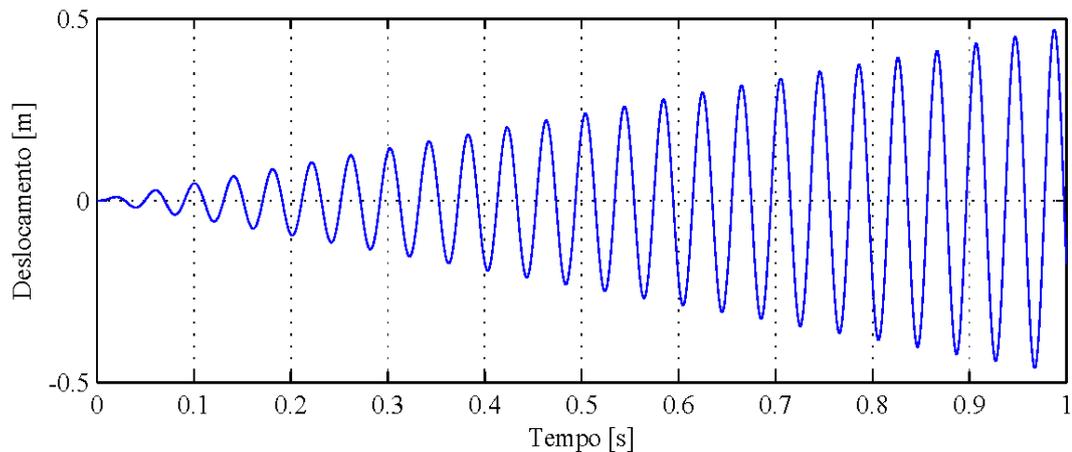


Figura 5.21 - Deslocamento transversal da viga sem qualquer tipo de tratamento.

5.3.1. Viga tratada somente com camada restrita passiva

A Figura 5.22 apresenta as respostas dinâmicas da viga tratada com camada restrita passiva para as temperaturas de 26°C e 42°C (ou 299K e 315K), mostrando a eficiência dos materiais viscoelásticos em reduzir os níveis de vibração da viga apresentados na Fig. 5.21. Além disso, nota-se uma perda de desempenho do material viscoelástico à medida que a temperatura do material é elevada. Como apresentado no Capítulo III, se o presente aumento de temperatura ocorrido no material viscoelástico estivesse relacionado ao fenômeno do autoaquecimento em função do carregamento mecânico cíclico, o que se observaria era a perda de eficiência do tratamento viscoelástico como apresentado na Fig. 5.22, comprometendo a performance do sistema.

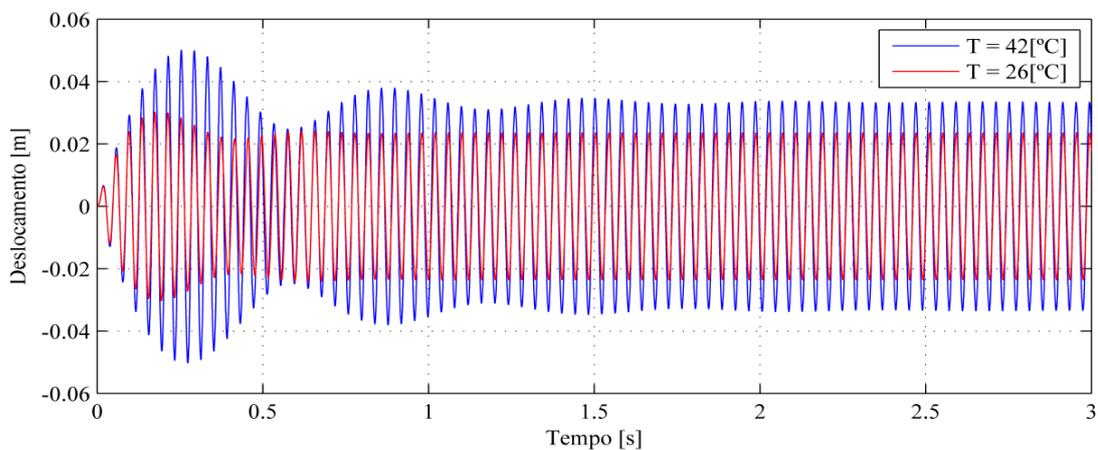


Figura 5.22 - Deslocamento transversal da viga tratada com camada restrita passiva.

5.3.2. Viga tratada somente com fios discretos de LMFs

Em seguida é proposta a configuração que consiste na viga contendo apenas fios de LMFs pré-tensionados. A Fig. 5.23 demonstra que o efeito pseudoelástico dos fios submetidos a transformações de fase induzidas pelas deflexões transversais da viga, reduz significativamente as vibrações da mesma. Uma vez que a viga é excitada em sua frequência de flexão pura, grandes amplitudes de vibração induzem elevados níveis de deformação nos fios, como verificado pelos ciclos de histerese apresentados na Fig. 5.24, induzindo o comportamento pseudoelástico dos fios, e como consequência, a dissipação de energia vibratória da estrutura base.

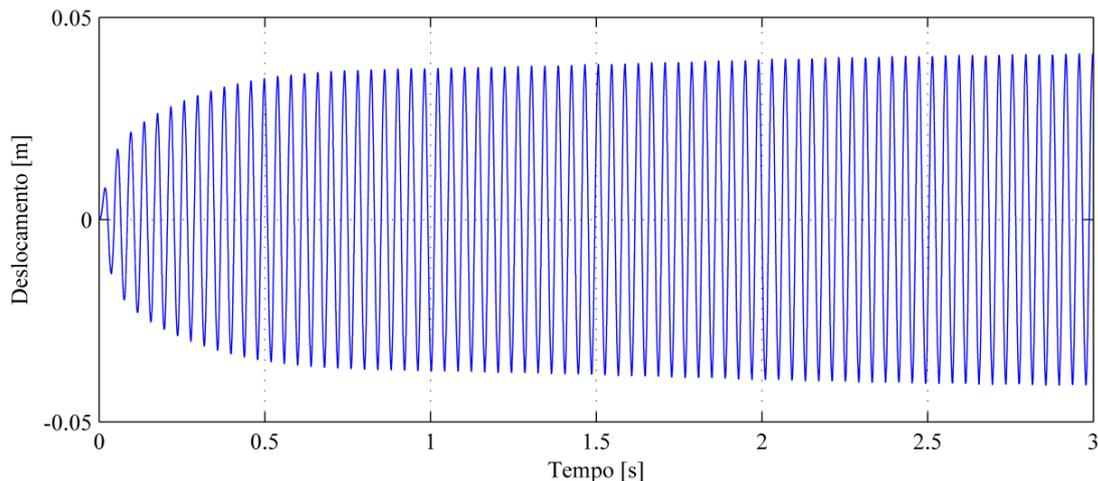


Figura 5.23 - Deslocamento transversal da viga base contendo fios discretos de LMFs.

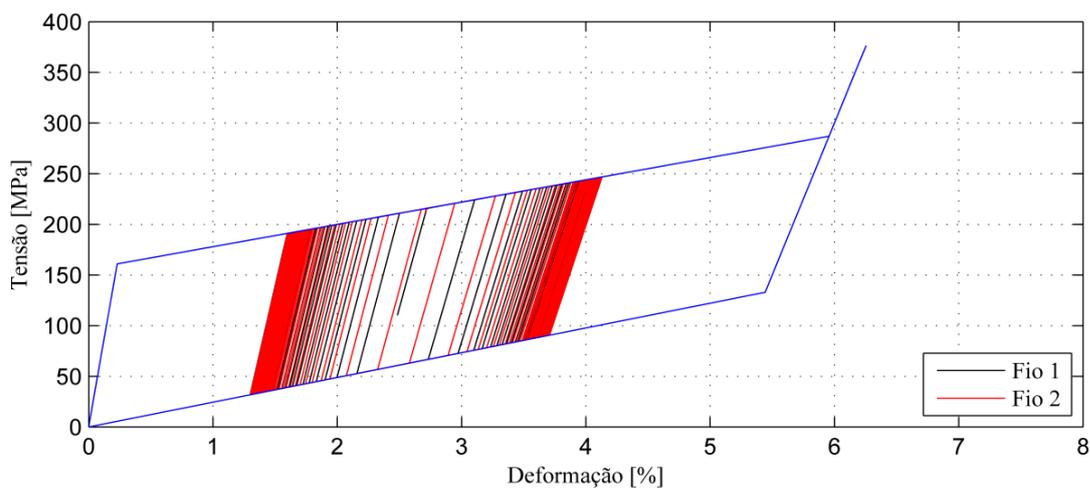


Figura 5.24 - Curvas tensão-deformação dos fios de LMFs aplicados à viga base.

Dessa forma, uma alternativa bastante interessante para reduzir ainda mais os níveis de vibração da estrutura base e diminuir as restrições de desempenho dos materiais viscoelásticos devidas ao aumento da temperatura quanto estes são submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos, é a combinação dos materiais viscoelásticos e das LMFs.

5.3.3. Viga tratada com camada restrita passiva e fios discretos de LMFs

Uma vez que o modelo simplificado do comportamento pseudoelástico para as LMFs utilizado neste trabalho é altamente dependente dos níveis de deformação induzidos aos fios pela deflexão transversal da viga, para uma condição isotérmica em que a temperatura dos fios de LMFs é igual ou superior à temperatura final da austenita (A_f), espera-se que a desempenho do sistema contendo material viscoelástico e fios de LMFs não seja afetada à medida que é aumentada a temperatura de operação do material viscoelástico. Neste contexto, no sentido de avaliar a eficiência dos fios de LMFs em detrimento à perda da capacidade dissipativa do material viscoelástico em altas temperaturas, obteve-se a resposta dinâmica do sistema para uma temperatura de 26°C (299K), e em seguida, para uma temperatura de 42°C (315K), sendo que a temperatura de operação dos fios de LMFs permaneceu constante de 42°C em ambas as situações

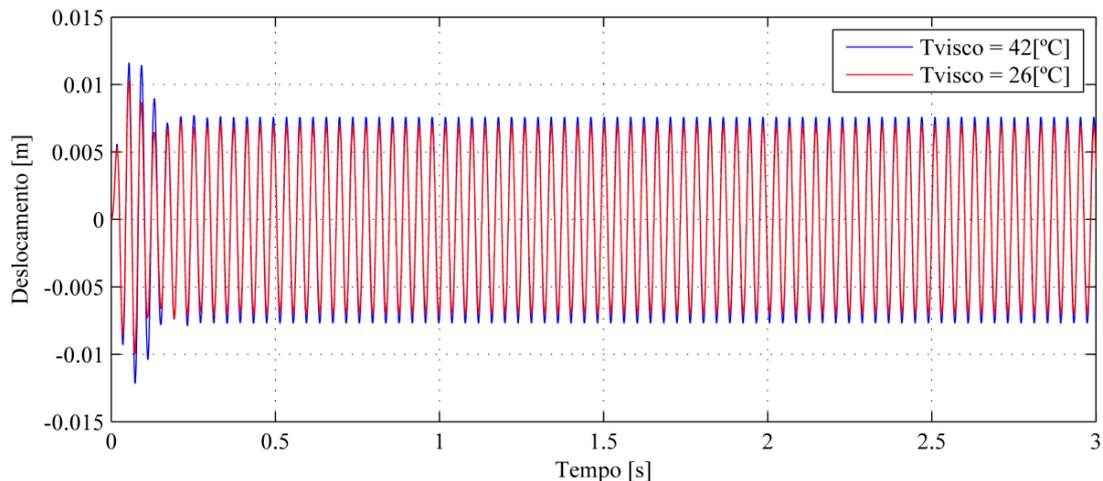


Figura 5.25 - Deslocamento transversal da viga sanduíche contendo fios discretos de LMFs.

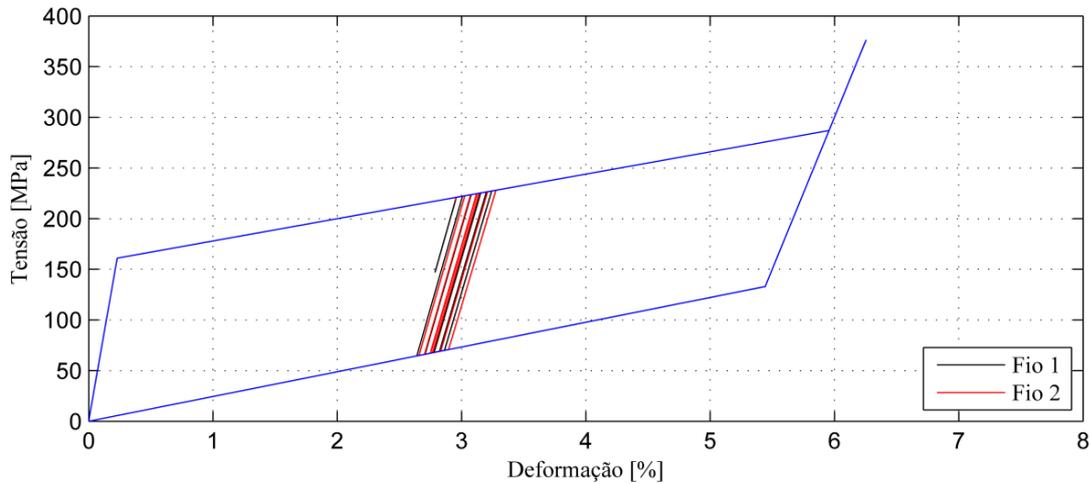


Figura 5.26 - Curvas tensão-deformação dos fios de LMFs a 26°C.

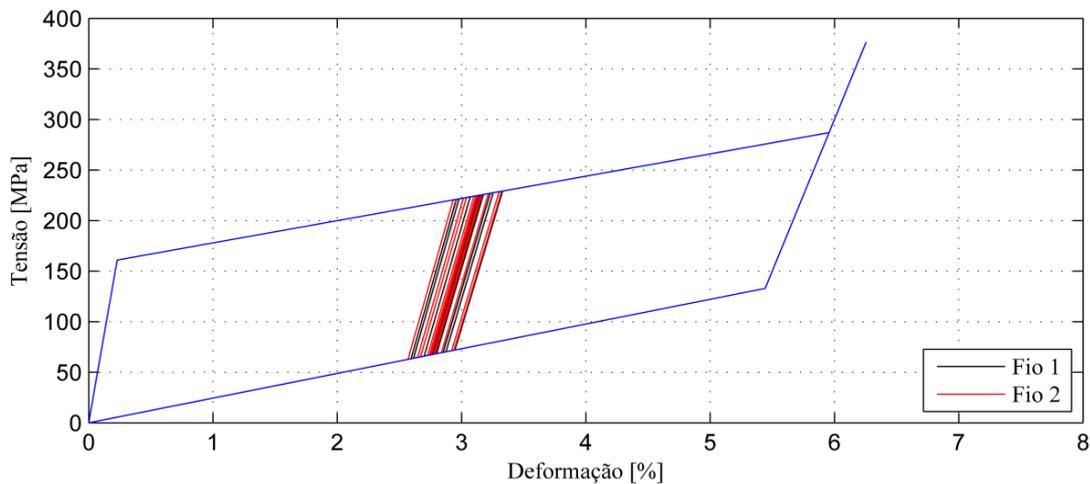


Figura 5.27 - Curvas tensão-deformação dos fios de LMFs a 42°C.

A Figura 5.25 apresenta a comparação entre as amplitudes de vibração da viga tratada com material viscoelástico e fios de LMFs para as duas temperaturas analisadas. Em relação aos resultados obtidos anteriormente, nota-se claramente que a combinação do amortecimento viscoelástico com o efeito pseudoelástico das LMFs mostrou-se mais eficiente do que nas demais situações, em termos da redução das amplitudes de vibração da viga. Além disso, mesmo para a temperatura mais alta de operação em que ocorre perda de eficiência do tratamento viscoelástico como mostrado na Fig. 5.22, pouca alteração nas amplitudes de vibração da viga é observada. Isto pode ser explicado pelo comportamento pseudoelástico dos fios de LMFs apresentado nas Figs. 5.26 e 5.27, que representam as curvas tensão-deformação para as duas situações de temperatura investigadas. Nota-se que os ciclos de histerese para as duas condições são diferentes, sendo maiores para a temperatura mais alta de operação do material viscoelástico, uma vez que, nesta condição, os fios de LMFs são submetidos a níveis

de deformação maiores, induzidos pelo aumento dos níveis de deflexão transversal da viga tratada em virtude da perda de eficiência do tratamento viscoelástico.

A Figura 5.28 compara as amplitudes dos deslocamentos transversais de cada situação analisada, com exceção da resposta dinâmica da viga sem tratamento. Os resultados permitem concluir sobre a eficiência da combinação dos materiais viscoelásticos e das LMFs no tocante à redução das amplitudes de vibração do sistema da ordem de 81%, 77% e 67% em relação à utilização do sistema sendo composto pela viga base e os fios de LMF, pela viga multicamadas a 42°C e pela viga multicamadas a 26°C, respectivamente. Além disso, o amortecimento viscoelástico e o efeito pseudoelástico das LMFs investigados neste trabalho permitiram configurar uma estratégia de controle passivo capaz de reduzir de forma mais eficiente, os níveis de vibrações de sistemas mecânicos submetidos quando estes são submetidos a carregamentos cíclicos para diferentes condições de operação. Em particular, foi observado que os materiais viscoelásticos que dependem fortemente da temperatura e da frequência de operação, não foram influenciados significativamente pela presença dos fios de LMFs, desempenhando sua função sem perda de eficiência, como mostra a Fig. 5.28, cuja variação da resposta está associada mais à mudança de temperatura de operação do material. Já os fios discretos de LMFs, dependem fortemente das transformações de fase induzidas pelas deformações de flexão da viga, como observado pelos diferentes ciclos de histerese mostrados nas Figs. 5.24, 5.26 e 5.27.

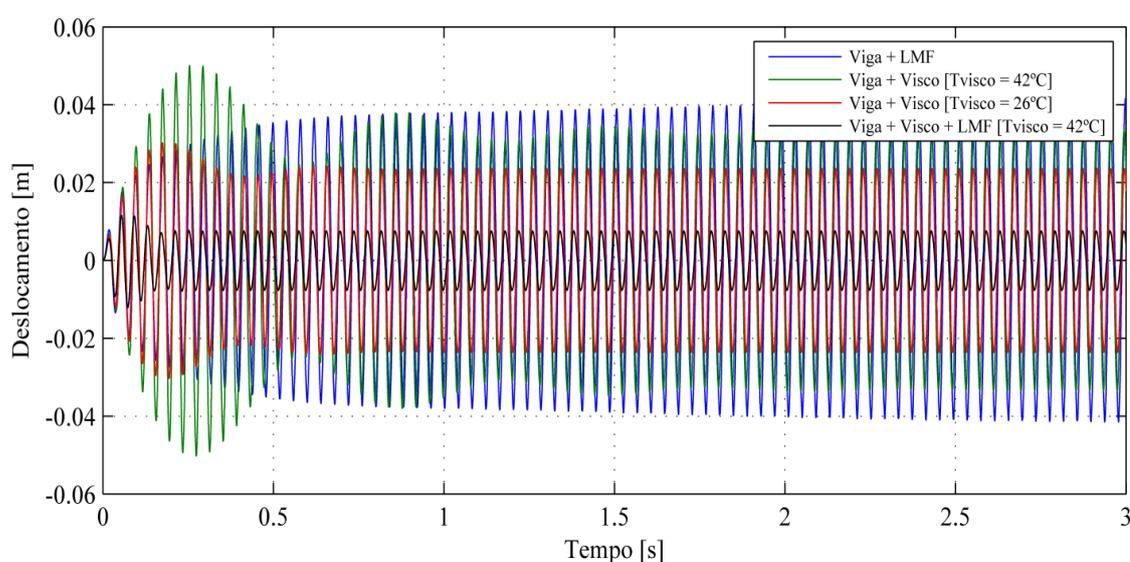


Figura 5.28 - Comparação entre os deslocamentos transversais da viga tratada para as diferentes situações analisadas.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES GERAIS E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Neste trabalho foi realizado o estudo de técnicas de modelagem numérica e implementação computacional de sistemas de amortecimento para o controle passivo de vibrações e ruído de estruturas mecânicas submetidas a carregamentos mecânicos cíclicos. Ênfase foi dada ao uso de tratamentos viscoelásticos superficiais via camada restrita passiva e elementos pseudoelásticos discretos. Para a modelagem do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos foi utilizado o modelo das derivadas fracionárias, e para representar a resposta histerética dos elementos LMFs foi utilizado o modelo simplificado proposto por Lagoudas et al. (2011). Uma vez avaliado o desempenho dos elementos discretos de LMFs em dissipar a energia vibratória de sistemas dinâmicos através de simulações realizadas com sistemas discretos de um e dois graus de liberdade, os modelos para ambos os materiais foram introduzidos a um modelo de elementos finitos de viga sanduíche de três camadas contendo fios discretos de LMFs e camada restrita passiva submetida a carregamentos cíclicos.

Os resultados obtidos pelas inúmeras simulações numéricas permitiram avaliar não somente os procedimentos de modelagem numérico-computacional de sistemas dinâmicos contendo materiais viscoelásticos associados a elementos LMFs, mas também a potencialidade desses materiais para o controle passivo de vibrações. No entanto, condições ambientais e operacionais mostraram ser determinantes no que se refere ao comportamento dessas ligas. Neste sentido, são as seguintes as conclusões específicas:

1. Para o sistema de um grau de liberdade:

- Os ciclos incompletos de transformações mostraram ser plenamente capazes de reduzir significativamente as amplitudes de vibração do sistema;

- A variação da frequência de excitação induziu diferentes amplitudes de vibração ao sistema (devido à proximidade da frequência de ressonância) resultando na variação de quantidade de energia dissipada do sistema;
- O aumento dos níveis de deformação dos fios é fundamental para o aumento de dissipação de energia do sistema. Quanto maior a deformação induzida ao elemento LMF, maior será a quantidade de energia dissipada por ciclo.

2. Para o sistema de dois graus de liberdade:

- No que diz respeito ao carregamento inicialmente imposto, nota-se que para uma condição na qual o ADV pseudoelástico não foi induzido às transformações de fase, o elemento LMF apresentou um comportamento linear, como esperado, funcionando como uma ADV clássico. Além disso, devido à sua sintonização *a priori*, este apresentou resultados satisfatórios em termos da redução das amplitudes de vibração da estrutura primária;
- Para uma condição de carregamento capaz de induzir transformações de fase ao elemento LMF, mesmo sem uma sintonização prévia, observa-se uma maior robustez do ADV pseudoelástico quando comparado com o ADV clássico, em virtude da quantidade de energia dissipada durante os ciclos de histerese do elemento LMF.

3. Para a viga tratada com material viscoelástico e LMFs

- A combinação dos materiais viscoelásticos com as LMFs mostrou-se numa estratégia interessante e eficiente de controle passivo de vibrações de sistemas dinâmicos submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos;
- A eficiência desses materiais depende fortemente da temperatura ambiente e das condições do carregamento. Em particular, as variações de temperatura ocorridas no material viscoelástico seja por variações nas condições ambientais seja pelo

autoaquecimento interno, leva a uma perda de eficiência do dispositivo viscoelástico;

- O comportamento pseudoelástico das LMFs é fortemente influenciado pelas condições do carregamento dinâmico. Além disso, estudos *a posteriori* identificaram a influência das dimensões e geometria dos dispositivos LMFs na capacidade dissipativa dos mesmos;
- A perda de eficiência dos materiais viscoelásticos em função do aumento da temperatura, não acarretou alteração significativas em termos da performance do tratamento passivo em função da maior atuação dos fios de LMFs, diminuindo desta forma, as restrições dos materiais viscoelásticos.

Neste sentido, pode-se concluir que a combinação das ligas LMF e com os materiais viscoelásticos constitui-se numa estratégia bastante interessante para o aumento do amortecimento passivo de sistemas dinâmicos e a consequente redução dos níveis de vibração dos mesmos. Além disso, este trabalho permitiu identificar alguns pontos a serem investigados no futuro:

- Um aspecto importante a ser considerado no tocante à extensão dos procedimentos de modelagem numérico-computacional desenvolvidos neste trabalho a sistemas mais complexos de engenharia de interesse industrial, é a aplicação de técnicas de redução de modelos para diminuir o esforço computacional requerido para o processamento numérico das equações do movimento no domínio temporal;
- A inclusão na modelagem do efeito do autoaquecimento interno dos materiais viscoelásticos constitui-se numa outra perspectiva. Uma vez que foi observado que a temperatura tem um papel fundamental sobre as propriedades dinâmicas desses materiais. Neste caso, será necessária uma modelagem termomecânica de sistemas dinâmicos incorporando materiais viscoelásticos e ligas com memória de forma;

- Otimização de estruturas contendo elementos viscoelásticos e LMFs em presença de incertezas tanto na estrutura base, quanto nos diferentes dispositivos amortecedores. Neste sentido, serão utilizadas técnicas de otimização robustas com vistas à obtenção de configurações otimizadas e pouco sensíveis às variações do ótimo, em termos da geometria dos dispositivos amortecedores e objetivando a máxima atenuação das vibrações com restrições de projeto;

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

AURRICCHIO, F.; TAYLOR; R.,L.; LUBLINER, J. Shape Memory Alloys:Macromodelling And Numerical Simulations of Superelastic Behavior. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v 146. P 281-312. 1997.

AUSTIN, E. M. Variations on Modeling of Constrained-Layer Damping Treatments. **Shock and Vibration Digest**. v. 31, n. 4, p. 275-280, 1999.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. **Journal of Rheology**. v, 27, n. 3, p. 201-210, 1983.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**. v, 23, n. 6, p. 918-925, 1985.

BALMÈS E.; GERMÈS S. Tools for viscoelastic damping treatment design: Application to an automotive floor panel. International Conference on Noise and Vibration Engineering. **Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis**. 2002 Leuven, Bélgica.

BANKS, H. T.; SMITH, R. C., WANG, Y. **Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control**. Wiley – Masson Research in Applied Mathematics Series.1996. 310p.

BARKANOV, E. Transient Response Analysis of Structures Made from Viscoelastic Materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 44, n.3, p.393-403, jan 1999.

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. 1.ed. Prentice Hall, 1996. 1037p.

BAZ, A.; IMAM K.; McCOY, J. Active Vibration Control of Flexible Beams Using Shape Memory Actuators. **Journal of Sound and Vibration**. v.140, n. 3, p. 437-456, ago. 1990.

BENT, A. A.; HAGOOD, N. W.; RODGERS, J. P. Anisotropic Actuation with Piezoelectric Fibre Composites. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. v.6, p. 338-349, mai. 1995.

BO, Z. e LAGOUDAS, D. C. Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, Part I-IV : Modeling of Minor Hysteresis Loops. **International Journal of Engineering Science**, v. 37, p. 1205–1249, jul. 1999.

BRINSON, L. C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermodynamical derivation with non-constant material functions. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. v. 4, p. 229-242, 1993.

de CAZENOVE, J.; RADE, D. A.; de LIMA, A. M. G.; ARAÚJO, C. A. A Numerical and Experimental Investigation on Self-Heating Effects in Viscoelastic Dampers. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v. 27, p. 433-445, fev. 2012.

de LIMA, A. M. G. **Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Materiais Viscoelásticos**. 2003. 130 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia.

de LIMA, A. M. G.; da SILVA, A. R.; RADE, D. A.; Bouhaddi, N. Component Mode Synthesis Combining Robust Enriched Ritz Approach for Viscoelastically Damped Structures, **Engineering Structures**. v. 32, n. 5, p. 1479-1488, 2010.

de LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; LEPORE NETO, F. P. An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v 23, p. 1272-1281, 2009.

DEN HARTOG, J. P. **Mechanical Vibrations**. 4 ed. N.Y. McGraw-Hill, 1956. 436p.

DONE, G. T. S.; HUGHES, A. D. Reducing Vibration by Structural Modification. **Vertica**, v.1, p. 31-38, 1976.

dos SANTOS, F. P. A. **Vibration Control With Shape-Memory Alloys**. 2011. 266 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Nova de Lisboa.

DROZDOV, A. D. **Viscoelastic Structures: Mechanics of Growth and Aging**. 1.ed. San Diego, Academic Press, 1998. 596p.

ESPÍNDOLA, J.J.; LOPES, E.M.O. Caracterização de Materiais Elastoméricos para o Controle de Vibrações e Ruídos Acústicos. II Simpósio Brasileiro Sobre Sistemas Dinâmicos da Mecânica – DINAME - 1998 - Campos do Jordão - SP.

GALUCIO, A. C.; DEÜ, J. F.; OHAYON, R. Finite Element Formulation of Viscoelastic Sandwich Beams Using Fractional Derivate Operators. **Computational Mechanics**. v. 33, p. 282-291, 2004.

GANDHI, F.; CHAPUIS, G. Passive Damping Augmentation of a Vibrating Beam Using Pseudoelastic Shape Memory Alloy Wires. **Journal of Sound and Vibration**. v. 250, n 3, p. 519-539, 2002.

GANDHI, F.; WOLONS, D. Characterization of Pseudoelastic Damping Behavior of Shape Memory Alloy Wires Using Complex Modulus. **Smart Materials and Structures**. v. 8, p. 49-56, 1999.

GRÜLS, O.; GOLINVAL, J.-C. On the Numerical Damping of Time Integrators for Coupled Mechatronic Systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 197, p. 577-588, 2008.

GUARALDO-NETO, B.; OLIVEIRA, B. A.; LIMA, A. M. G.; RADE, D. A. Modelagem Numérico-Computacional de Sistemas Discretos Contendo Materiais com Memória de Forma. In: **DINCON – X Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações**, 10, 2011, Águas de Lindóia – SP. p. 55-58.

GUARALDO-NETO, B.; SALES, T. P.; LIMA, A.M.G.; RADE, D. A. Modelagem por Elementos Finitos de Sistemas Dinâmicos Combinando Materiais Viscoelásticos e Ligas com Memória de Forma para o Controle Passivo de Vibrações e Ruído In: **21° POSMEC - Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia**, 2011, Uberlândia - MG.

HARLT, D. J.; LAGOUDAS, D. C. Aerospace Applications of Shape Memory Alloys. **Journal of Aerospace Engineering**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G Texas, v 221, p. 221 - 535, abr.2007.

<http://www.biomedicalalloys.com>. Disponível em < <http://www.biomedicalalloy.com/med%20sma.html> > Acesso em: 21 dez. 2011.

<http://www.orthodontic-care.com>. Disponível em <http://www.orthodontic-care.com/glossary.htm> . Acesso em :21 dez. 2011.

<http://www.smac.fr>. Disponível em <<http://www.smac.fr/smacsonic.html>> Acesso em: 21 dez. 2011.

<http://www.trelleborg.com>. Disponível em < http://www.trelleborg.com/en/Automotive/Light-Vehicles/Braking/Seals--O-rings_>. Acesso em: 21 dez. 2011.

IKEDA, T.; HATTORI, H.; MATSUZAKI, Y. Numerical Analysis of Damping Enhancement of a Beam with Shape Memory Alloys Foils Bonded. In **24th International Congress of the Aeronautical Sciences**. v. 13, 2004, Yokohama, p. 535-543, 2004.

INMAN, D., J., **Engineering Vibration**. 2.ed. New Jersey: Prentice Hall International, Inc., Upper Saddle River, 2001. 625p.

KARNAUKHOV, V. G.; YAKOVLEV, G. A.; GONCHAROV, L. P. Self-heating of viscoelastic materials under cyclic loads. **Strength of Materials**. v. 7, p. 164-168, 1975.

KHAN, M., M.; MAYES, J., J.; LAGOUDAS, D., D.; HENDERSON, B., K. Pseudoelastic SMA Spring Elements for Passive Vibration Isolation, Part I.- Modeling. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. v. 15, p. 415-441, jun.2004.

KORONEV, B.; G., REZNIKOV, L., M., **Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Technical Applications**. 1 ed. John Wiley & Sons, Ltd, 1993. 312p.

LAGOUDAS, D. C.; BO, Z.; QIDWAI, M. A. A unified thermodynamic constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites **Mechanics of Composite Materials and Structures**. v. 3, p. 153-179, 1996.

LAGOUDAS, D. C.; MAYES, J. J.; KHAN, M. M. Simplified Shape Memory Alloy (SMA) Material Model for Vibration Isolation. **Smart Structures and Material: Modeling, Signal Processing, and Control in Smart Structures**. Proceedings SPIE, v. 4326, n. 452, mar. 2001.

LAGOUDAS, D., C. **Shape Memory Alloys – Modeling and Engineering Applications**. 1.ed. Springer, 2008. 435p.

LAKES, R. **Viscoelastic Materials**. 1.ed. N.Y. Cambridge University Press, 2009. 461p.

LEO, D., J. **Engineering Analysis of Smart Material Systems**. New Jersey: John Willey & Sons, Inc, 2007. 556p.

LESIEUTRE, G. A.; BIANCHINI, E. Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity Using Anelastic Displacement Fields. **Journal of Vibration and Acoustics**. v. 117, n.4, p. 424-430, out. 1995.

LIANG, C.; ROGERS, C. One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 1, p. 207-234, abr. 1990.

LIANG, C.; ROGERS, C., A. Design of a Shape Memory Alloy Springs With Applications on Vibration Control. **Journal of Vibration and Acoustics**. v. 115, p. 129-135, jan. 1993.

LIMA JR., J. J. DE; ARRUDA, J. R. F. Finite Element Modeling of Piezoceramic Sensors and Actuators. In: **CONGRESSO IBERO LATINO – AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA**, 18, 1997, Brasília. p. 751-757.

MACHADO, L. G.; SAVI, M. A. Medical Applications of Shape Memory Alloys. **Brazilian Journal of Medical and Biological Research**. v. 36, p. 683-691, 2003.

MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. Research Studies Press LTD. 1.ed. Inglaterra, 1997. p. 468.

MAINARD, F. **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models**. 1 ed. World Scientific Publishing, 2010. 368p.

MCTAVISH, D. J.; HUGHES, P. C. Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures. **Journal of Vibration and Accoustics**. v. 115, p. 103-113, jan. 1993.

MOREAU A. **Identification de Propriétés Viscoélastiques de Matériaux Polymères dar Mesures de Réponses dn Fréquences de Structures**. 2007. Tese de Doutorado, INSA, Rouen, França.

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration Damping**. N.Y. John Wiley & Sons, 1985.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 3.ed. Prentice-Hall. 1997.

OLIVEIRA, B., A. **Desenvolvimento de um Isolador de Vibração Pseudoelástico**. 2008 81 f. Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília.

OTSUKA, K.; WAYMAN, C. M. **Shape Memory Materials**. 1.ed. Cambridge. Cambridge University Press, 1998. 284p.

PAIVA, A.; SAVI, M. A. An Overview of Constitutive Models for Shape Memory Alloys. **Mathematical Problems in Engineering**. v. 2006, p. 1-30, out. 2005.

RAO, M. D. Recent Applications of Viscoelastic Damping for Noise Control in Automobiles and Commercial Airplanes. **Journal of Sound and Vibration**. v. 262, n. 3, p. 457-474, 2003.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**. 2.ed. CRC Press. 1997. 856p.

RUSTIGHI, E.; BRENNAN M. J.; MACE, B. R. Real-Time Control of a Shape Memory Alloy Adaptive Dynamic Vibration Absorber. **Smart Materials and Structures**. v. 14, p. 1184-1195. 2005.

RUSTIGHI, E.; BRENNAN M., J.; MACE, B., R. A Shape Memory Alloy Adaptive Tuned Vibration Absorber: Design and Implementation. **Smart Materials and Structures**. v. 14, p. 18-25, 2005.

SAMALI B.; KWOK K. C. S. Use of viscoelastic dampers in reducing wind and earthquake induced motion of building structures. **Engineering Structures**. v.17, n. 9, p. 639-654, 1995.

SAVI, M. A.; de PAULA; LAGOUDAS, D. C. Numerical Investigation of na Adaptive Vibration Absorber Using Shape Memory Alloy. **Journal of Intelligent Material Systems and Systems and Structures**. v. 22, p.67-80, jan. 2011.

SATO, Y.; TANAKA, K. Estimation of energy dissipation in alloys due to stress-induced martensitic transformation. **Res Mechanica**. v. 23, 381-393, 1986.

SCHMIDT, A.; GAUL, L. Finite Element Formulation of Viscoelastic Constitutive Equations Using Fractional Derivatives. **Nonlinear Dynamics**. v. 29, p. 37-55, 2002.

STOECKEL, D.. The shape memory effect - Phenomenon, Alloys and Applications. Fremont, **Proceedings: Shape Memory Alloys for Power Systems EPRI**. p.1-13, 1995.

SUN, J., Q.; JOLLY, M., R.; NORRIS, M., A. Passive, Adaptive and Active Tuned Vibration Absorbers – A Survey. **Journal of Mechanical Design**. v. 117, p. 234-242, jun. 1995.

TANAKA, K. A thermomechanical sketch of shape memory effect: One-dimensional tensile behavior. **Res Mechanica**, v. 2, p. 59-72, 1986.

THOMSON, P.; BALAS, G. J.; LEO, P. H. The Use Of Shape Memory Alloys For Passive Structural Damping. **Smart Materials and Structure**. v. 4, p. 36-42, 1995.

TISEO, B.; CONCILIO, A.; AMEDURI S.; GIANVITO, A. A Shape Memory Alloys Based Tuneable Dynamic Vibration Absorber for Vibration Tonal Control. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**. v. 48, p. 135-153, 2010.

WILLIAMS K.; CHIU, G. T. C, BERNHARD, R. Adaptive-Passive Absorbers Using Shape Memory Alloys. **Journal of Sound and Vibration**. v. 288, p. 1131-1155, 2002.

WILLIAMS K.; CHIU, G. T. C.; BERNHARD, R. J. Dynamic Modelling of a Shape Memory Alloy Adaptive Tuned Vibration Absorber. **Journal of Sound and Vibration**. v. 280, p. 211-324, 2005.

ANEXO A

A.1 Expressões para os deslocamentos e deformações da viga sanduíche

Na Seção 4.3, a partir da Eq.(4.7), pode-se expressar os deslocamentos axiais, transversais e a rotações de todas as camadas, através de suas respectivas matrizes de interpolação, $N_{xk}(x)$, $N_w(x)$ e $N_{\theta_k}(x)$ para $k = b, c$, bem como determinar as matrizes de interpolação relacionadas à deformação de membrana, de flexão e de cisalhamento, como apresentado a seguir:

$$u_b(x, t) = N_{xb}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (\text{A1})$$

$$w(x, t) = N_w(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (\text{A2})$$

$$u_c(x, t) = N_{xc}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (\text{A3})$$

como consequência, tem-se que:

$$\theta_k(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = N_{\theta_k}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad k = b, c \quad (\text{A4})$$

onde:

$$N_{xb}(x) = [N_{11}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_{15}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$N_w(x) = [0 \quad N_{22}(x) \quad N_{23}(x) \quad 0 \quad 0 \quad N_{26}(x) \quad N_{27}(x) \quad 0],$$

$$N_{\theta_k}(x) = [0 \quad N'_{22}(x) \quad N'_{23}(x) \quad 0 \quad 0 \quad N'_{26}(x) \quad N'_{27}(x) \quad 0] \text{ e}$$

$$N_{xc}(x) = [0 \quad 0 \quad N_{34}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_{38}(x)], \text{ com } (\quad)' = \partial(\quad) / \partial x.$$

Combinando as relações (4.2) com as expressões (A1) e (A3), levando-se em conta as expressões (4.1), é possível determinar o deslocamento axial e a rotação da camada viscoelástica como segue:

$$u_v(x,t) = \mathbf{N}_{xv}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (\text{A5})$$

$$\theta_v(x,t) = \mathbf{N}_{\theta v}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (\text{A6})$$

onde $\mathbf{N}_{xv}(x) = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{N}_{xb}(x) + \mathbf{N}_{xc}(x)] + \frac{h_c - h_b}{2} \mathbf{N}_{\theta_k}(x) \right\}$ e

$$\mathbf{N}_{\theta v}(x) = \frac{1}{h_v} \left\{ [\mathbf{N}_{xc}(x) - \mathbf{N}_{xb}(x)] + \frac{h_c + h_b}{2} \mathbf{N}_{\theta_k}(x) \right\}.$$

A partir das expressões (4.4) e das relações (A1) a (A3), as deformações de membrana e flexão da k -ésima camada, e a deformação cisalhante para a camada viscoelástica, podem ser escritas como segue:

$$\varepsilon_{mk}(x,t) = \mathbf{B}_{mk}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad k = b, c, v \quad (\text{A7})$$

$$\varepsilon_{bk}(x,t) = \mathbf{B}_{bk}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad k = b, c, v \quad (\text{A8})$$

$$\gamma_{zx}(x,t) = \mathbf{B}_{sv}(x) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (\text{A9})$$

onde $\mathbf{B}_{mk}(x) = \frac{\partial \mathbf{N}_{xk}(x)}{\partial x}$, $\mathbf{B}_{bk}(x) = \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta k}(x)}{\partial x}$ e $\mathbf{B}_{sv} = \mathbf{N}_{\theta v} - \mathbf{N}_{\theta b}$

A.2 Energia Cinética. Matriz de Massa Elementar.

A energia cinética do elemento finito de viga sanduíche é determinada pelo somatório das energias cinética de cada camada do elemento:

$$T_{(e)}(t) = T_b(t) + T_v(t) + T_c(t) \quad (\text{A10})$$

onde:

$$T_k(t) = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho_k \mathbf{v}_k^T(x, z, t) \mathbf{v}_k(x, z, t) dV_e \quad k = b, v, c \quad (\text{A11})$$

As velocidades de cada camada podem ser calculadas pela diferenciação das Eqs.(4.3) em relação ao tempo, assumindo a seguinte forma:

$$v_{wk}(x, z, t) = \frac{d}{dt} w_k(x, z, t) \quad k = b, v, c \quad (\text{A12})$$

$$v_{xk}(x, z, t) = \frac{d}{dt} u_{xk}(x, z, t) = \frac{d}{dt} u_k(x, t) + (z - z_k) \frac{d}{dt} \theta_k(x, t) \quad k = b, v, c \quad (\text{A13})$$

sendo que o vetor das velocidades é dado como segue:

$$\mathbf{v}_k(x, z, t) = [v_{xk}(x, z, t) \quad v_{wk}(x, z, t)] \quad k = b, v, c \quad (\text{A14})$$

Combinando as Eqs.(A14) e (A11), a expressão da energia cinética da k -ésima camada assume a seguinte forma:

$$T_k(t) = \dot{\mathbf{u}}_{(e)}^T(t) \left[\frac{1}{2} \rho_k \int_{V_e} \mathbf{N}_{xk}^T(x) \mathbf{N}_{xk}(x) dV_e - \rho_k \int_{V_e} (z - z_k) \mathbf{N}_{xk}^T(x) \mathbf{N}_{wk}(x) dV_e + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{2} \rho_k \int_{V_e} (z - z_k)^2 \mathbf{N}_{\theta k}^T(x) \mathbf{N}_{\theta k}(x) dV_e + \frac{1}{2} \rho_k \int_{V_e} \mathbf{N}_{wk}^T(x) \mathbf{N}_{wk}(x) dV_e \right] \dot{\mathbf{u}}_{(e)}(t) \quad (\text{A15})$$

onde é possível identificar as matrizes de massa devido à rotação $\mathbf{M}_{\theta k}^{(e)}$ e aos deslocamentos transversal e longitudinal, $\mathbf{M}_{wk}^{(e)}$ e $\mathbf{M}_{xk}^{(e)}$, respectivamente, para $k = b, v, c$:

$$\mathbf{M}_{\theta k}^{(e)}(x) = \int_0^L I_k \mathbf{N}_{\theta k}^T(x) \mathbf{N}_{\theta k}(x) dx \quad k = b, v, c \quad (\text{A16})$$

$$\mathbf{M}_{wk}^{(e)} = \int_0^L \rho_k A_k \mathbf{N}_{wk}^T(x) \mathbf{N}_{wk}(x) dx \quad k = b, v, c \quad (\text{A17})$$

$$\mathbf{M}_{xk}^{(e)} = \int_0^L \rho_k A_k \mathbf{N}_{xk}^T(x) \mathbf{N}_{xk}(x) dx \quad k = b, v, c \quad (\text{A18})$$

A.3 Energia de Deformação. Matriz de Rigidez Elementar.

Da mesma forma que para energia cinética, a expressão da energia potencial mecânica elementar para o elemento de viga sanduíche pode ser formulada da seguinte forma:

$$U_{(e)}(t) = \frac{1}{2} [U_b(t) + U_v(t) + U_c(t)] \quad (\text{A19})$$

onde $U_v(t) = \int_{V_e} \sigma_{xv}(x, z, t) \varepsilon_{xv}(x, z, t) dV_e + \int_{V_e} \tau_{xz}(x, z, t) \gamma_{xz}(x, z, t) dV_e$ para o núcleo viscoelástico

e $U_k(t) = \int_{V_e} \sigma_{xk}(x, z, t) \varepsilon_{xk}(x, z, t) dV_e$ para as camadas elásticas $k = b, c$.

Desta forma, utilizando as considerações assumidas para as camadas elásticas, a energia potencial pode ser formulada em termos das propriedades dos materiais e das variáveis de deformação a partir das expressões (4.4a) e (A7) e (A8), da seguinte forma:

$$U_k(t) = \int_{V_e} \varepsilon_{xk}(x, z, t) E_k \varepsilon_{xk}(x, z, t) dV_e \quad k = b, c \quad (\text{A20})$$

ou,

$$\begin{aligned} U_k(t) &= \int_{V_e} [\varepsilon_{mk}(x, t) + (z - z_k) \varepsilon_{bk}(x, t)] E_k [\varepsilon_{mk}(x, t) + (z - z_k) \varepsilon_{bk}(x, t)] dV_e \\ &= \mathbf{u}_{(e)}^T(t) \left\{ \int_{V_e} E_k [\mathbf{B}_{mk}^T(x) + (z - z_k) \mathbf{B}_{bk}^T(x)] \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots [\mathbf{B}_{mk}(x) + (z - z_k) \mathbf{B}_{bk}(x)] dV_e \right\} \mathbf{u}_{(e)}(t) \\ &= \mathbf{u}_{(e)}^T(t) \mathbf{K}_k^{(e)} \mathbf{u}_{(e)}(t) \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

onde $\mathbf{K}_k^{(e)} = \int_0^L E_k \left[A_k \mathbf{B}_{mk}^T(x) \mathbf{B}_{mk}(x) + I_k \mathbf{B}_{bk}^T(x) \mathbf{B}_{bk}(x) \right] dx$, é a matriz de rigidez elementar das camadas base e restrigente do sistema.

Da mesma forma, considerando-se as expressões (4.4) e (A7) a (A9), e assumindo-se que os módulos longitudinal e transversal para o núcleo viscoelástico sejam constantes e independentes da frequência de excitação e da temperatura, chega-se à seguinte forma para energia de deformação do núcleo viscoelástico:

$$U_v(t) = \int_{V_e} \varepsilon_{xv}(x, z, t) E_v^* \varepsilon_{xv}(x, z, t) dV_e + \int_{V_e} \gamma_{xv}(x, z, t) G_v^* \gamma_{xv}(x, z, t) dV_e \quad (\text{A22})$$

ou,

$$U_v(t) = \mathbf{u}_{(e)}^T(t) \mathbf{K}_v^{(e*)} \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (\text{A23})$$

onde $\mathbf{K}_v^{(e*)} = E_v^* \int_0^L \left[A_v \mathbf{B}_{mv}^T(x) \mathbf{B}_{mv}(x) + I_v \mathbf{B}_{bv}^T(x) \mathbf{B}_{bv}(x) \right] dx + \kappa_v G_v^* A_v \int_0^L \mathbf{B}_{sv}^T(x) \mathbf{B}_{sv}(x) dx$

$\mathbf{K}_v^{(e*)} = E_v^* \int_0^L \left[A_v \mathbf{B}_{mv}^T(x) \mathbf{B}_{mv}(x) + I_v \mathbf{B}_{bv}^T(x) \mathbf{B}_{bv}(x) \right] dx + \kappa_v G_v^* A_v \int_0^L \mathbf{B}_{sv}^T(x) \mathbf{B}_{sv}(x) dx$, κ_v é um fator de

correção devido ao cisalhamento transversal da camada viscoelástica (REDDY, 1997).