

CAPÍTULO VI

Aplicação Numérica: Mecanismo de Quatro Barras Plano Flexível

6.1 Descrição do Sistema Estudado

Este Capítulo apresenta resultados obtidos numericamente pela simulação, a partir da utilização dos fundamentos teóricos considerados anteriormente nos Capítulos III, IV e V, de um sistema multicorpos flexíveis particular: um mecanismo plano de quatro barras. A geometria do sistema é ilustrada na Fig. 6.1, e a Tab. 6.1 traz a maioria dos dados associados às propriedades dos materiais e à geometria considerada para cada uma das barras. No que diz respeito à barra 1, a mesma apresenta um comprimento de 0,6 m. Ainda, as barras 1 e 2 são consideradas como corpos rígidos, enquanto as barras 3 e 4 são admitidas flexíveis.

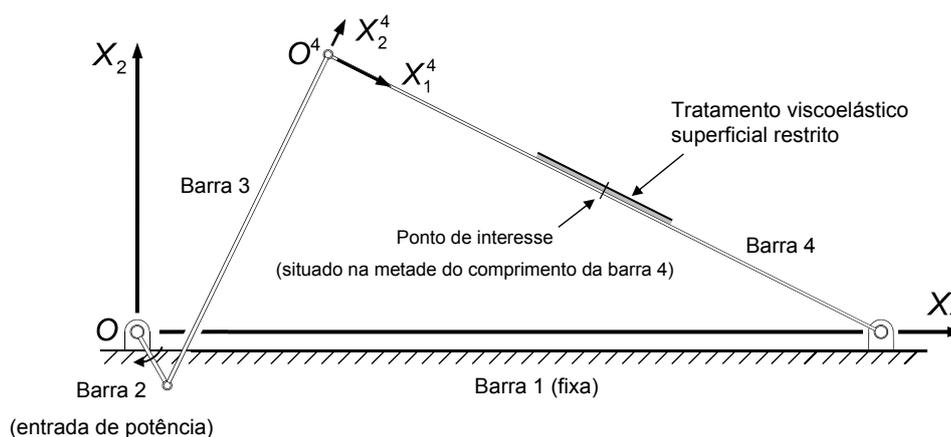


Figura 6.1 - Representação esquemática do mecanismo de quatro barras plano flexível considerado; OX_1X_2 : referencial global; $O^4X_1^4X_2^4$: referencial flutuante associado à barra 4.

Tabela 6.1 - Características associadas às barras 2, 3 e 4 do mecanismo considerado.

CARACTERÍSTICAS	BARRA 2	BARRA 3	BARRA 4		
Geometria	Viga base				
	Comprimento [m]	0,050	0,300	0,500	
	Espessura [m]	0,003175	0,003175	0,00238125	
	Largura [m]	0,01905	0,01905	0,0254	
	Camada viscoelástica				
	Comprimento [m] ⁽²⁾	–	–	Vários valores ⁽²⁾	
	Espessura [m] ⁽²⁾	–	–	Vários valores ⁽²⁾	
	Largura [m]	–	–	0,0254	
	Camada restrigente				
	Comprimento [m] ⁽²⁾	–	–	Vários valores ⁽²⁾	
	Espessura [m]	–	–	0,001	
	Largura [m]	–	–	0,0254	
	Material	Viga base			
			Alumínio	Alumínio	Alumínio
		Módulo de elasticidade longitudinal [GPa]	70,3	70,3	70,3
Massa específica [kg/m ³]		2690	2690	2690	
Camada viscoelástica					
		Nenhum	Nenhum	ISD112™ à 27 °C ⁽¹⁾	
Módulo de elasticidade long. estático [MPa]		–	–	1,5	
Módulo de elasticidade long. a altas freq. [MPa]		–	–	69,9495	
Tempo de relaxação [μs]		–	–	14,052	
α (ordem de derivação fracionária)		–	–	0,7915	
Coefficiente de Poisson		–	–	0,5	
Massa específica [kg/m ³]		–	–	1600	
Camada restrigente					
		Nenhum	Nenhum	Alumínio	
Módulo de elasticidade longitudinal [GPa]		–	–	70,3	
Massa específica [kg/m ³]	–	–	2690		

⁽¹⁾ Os parâmetros dados para este material viscoelástico foram identificados por Galucio, Deū e Ohayon (2004).

⁽²⁾ Vários valores foram considerados para estes parâmetros visando avaliar influências paramétricas.

Antes da apresentação dos resultados, é importante salientar que o modelo implementado em ambiente MATLAB® para representar o comportamento do sistema multicorpos considerado neste Capítulo foi obtido pela utilização dos procedimentos apresentados ao longo do Capítulo V, Seção 5.2, desta Dissertação.

Como mencionado anteriormente, flexibilidade é considerada para as barras 3 e 4 do mecanismo. Para tanto, o elemento finito de viga de Euler-Bernoulli apresentado no Capítulo IV, Subseção 4.1.1, foi utilizado para discretização espacial de ambas as barras. Trinta e cinquenta elementos finitos foram adotados para as malhas das barras 3 e 4, respectivamente. Além de contar com quatro corpos, dois dos quais flexíveis, o modelo ainda apresenta cinco conjuntos de equações relativas a restrições cinemáticas – quatro juntas de revolução entre as quatro barras do mecanismo, e uma junta rígida para fixação da barra 1 –, e uma equação de restrição relativa ao acionamento do mecanismo, para imposição de velo-

cidade angular constante à barra 2. Para inclusão de tratamento viscoelástico superficial à barra 4 do mecanismo, quando considerado, o elemento de viga sanduíche apresentado na Subseção 4.1.2 do Capítulo IV foi adotado para a discretização desta barra.

Para validação do procedimento de modelagem desenvolvido, foi paralelamente implementado modelo similar no software comercial ANSYS®, considerando-se o elemento finito plano de viga BEAM3, que conta com dois nós, e três graus de liberdade por nó. A opção de não linearidade do elemento foi explorada, de maneira a permitir que o mesmo experimentasse, durante as simulações, grandes deslocamentos. Ainda, um elemento especial MPC184-BEAM foi considerado para modelar a barra 2, que se trata de um corpo rígido; o mesmo permite a inclusão de corpos desta natureza a partir da utilização de equações de restrição. As juntas do modelo foram construídas fazendo com que nós de malhas associadas a corpos distintos coincidissem entre si. Quanto ao acionamento do sistema, este pôde ser realizado a partir da imposição de uma velocidade angular prescrita à barra 2 do mecanismo, tendo em vista as capacidades do software.

Destaca-se ainda que, além de amortecimento viscoelástico e amortecimento numérico inerente ao algoritmo de integração, nenhuma outra fonte de dissipação de energia foi considerada para realização das simulações apresentadas a seguir.

6.2 Análise Modal do Mecanismo de Quatro Barras Plano Flexível

Depois de desenvolvidos modelos matemáticos para o sistema considerado neste Capítulo, como detalhado anteriormente, análise modal foi conduzida para avaliação das frequências naturais e dos modos naturais de vibração do mecanismo. Para tanto, fez-se uso do procedimento apresentado na Seção 5.4 do Capítulo V.

Ressalta-se que a análise modal foi realizada apenas para a situação em que o sistema não possui tratamento viscoelástico superficial restrito. Isto se deve ao modelo considerado nesta Dissertação para implementação do fenômeno de viscoelasticidade: embora o mesmo seja adequado à simulação transiente no domínio do tempo, não é de todo conveniente a análise no domínio da frequência nem a análise de autovalor (haja vista a metodologia de implementação apresentada e considerada no Capítulo III, Seção 3.6).

As análises realizadas tomaram por base várias configurações do sistema, estas determinadas pela posição angular da barra 2, dada por θ_2 . Simulações foram neste caso realizadas tanto no software ANSYS® como por intermédio do algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®. Os objetivos da análise são os de se determinar as cinco primeiras frequências naturais do sistema em função da configuração dada por θ_2 e as formas mo-

dais associadas a estas frequências para o caso em que $\theta_2 = 0^\circ$. Busca-se, com isso, adicionalmente, a validação do código e do modelo implementados. Ressalta-se que esta validação é buscada, neste caso, para uma condição linearizada, tendo em vista o procedimento adotado para a realização de análise modal.

Os resultados obtidos em termos das frequências naturais são mostrados na Fig. 6.2. Os modos naturais associados a estas últimas para o caso em que $\theta_2 = 0^\circ$ são apresentados graficamente nas Figs. 6.3 a 6.7. Os erros relativos entre as frequências naturais encontradas pelo uso dos dois modelos considerados são também apresentados na Fig. 6.2. Estes erros foram obtidos pelo uso da equação que se segue:

$$\text{Erro [\%]} = \left| f_{\text{MATLAB}} - f_{\text{ANSYS}} \right| f_{\text{ANSYS}}^{-1} \times 100\%, \quad (6.1)$$

onde f_{MATLAB} e f_{ANSYS} designam as frequências naturais obtidas através do algoritmo implementado no software MATLAB®, e pelo uso do ANSYS®, respectivamente.

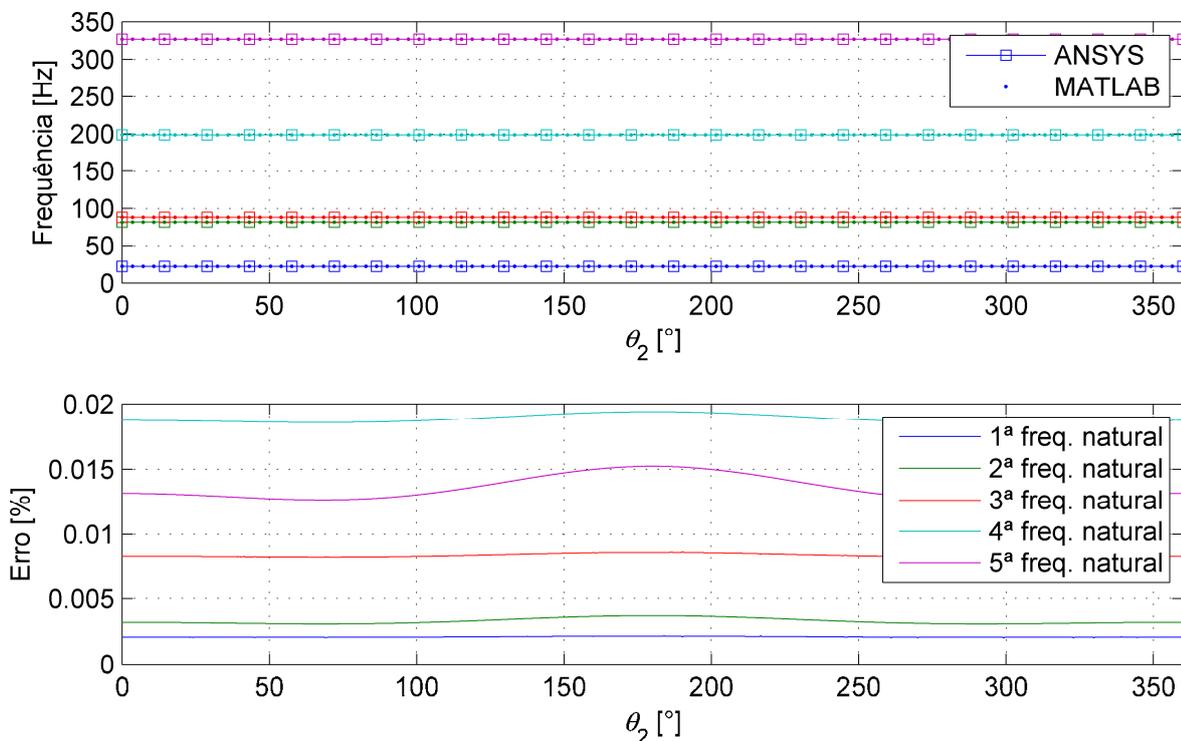


Figura 6.2 - Frequências naturais do mecanismo analisado em função de θ_2 obtidas pelos softwares ANSYS® e MATLAB®; $f_1 \cong 22,08$ Hz, $f_2 \cong 81,76$ Hz, $f_3 \cong 88,31$ Hz, $f_4 \cong 198,7$ Hz e $f_5 \cong 326,9$ Hz.

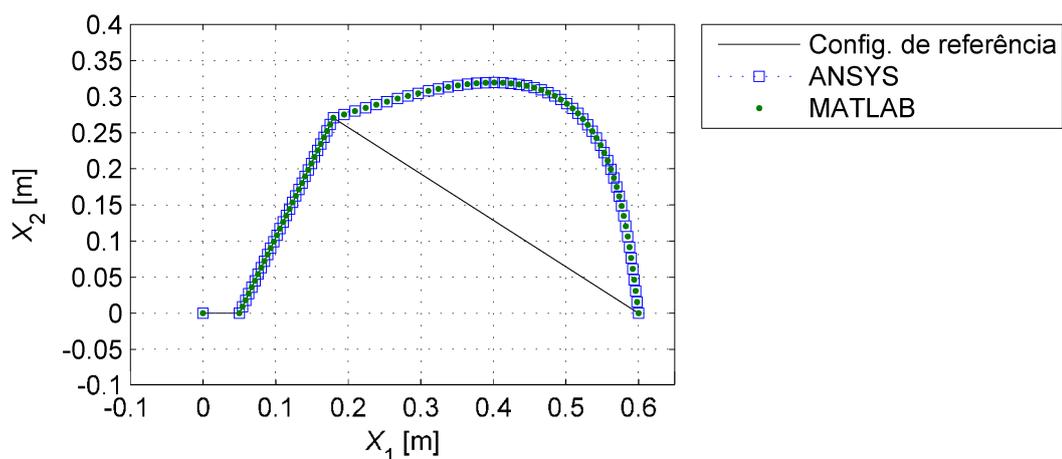


Figura 6.3 - Formas modais associadas à frequência natural $f_1 \cong 22,08$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$ dadas pelo software ANSYS® e pelo algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®.

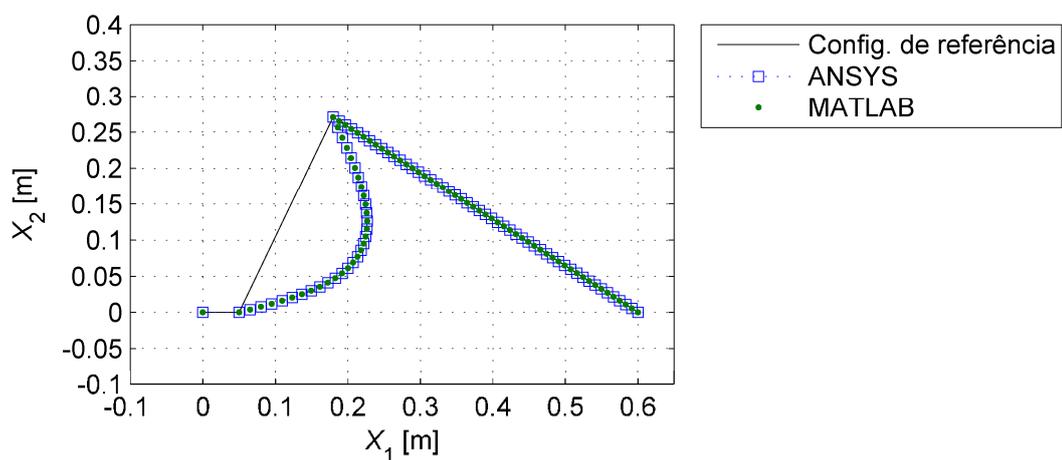


Figura 6.4 - Formas modais associadas à frequência natural $f_2 \cong 81,76$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$ dadas pelo software ANSYS® e pelo algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®.

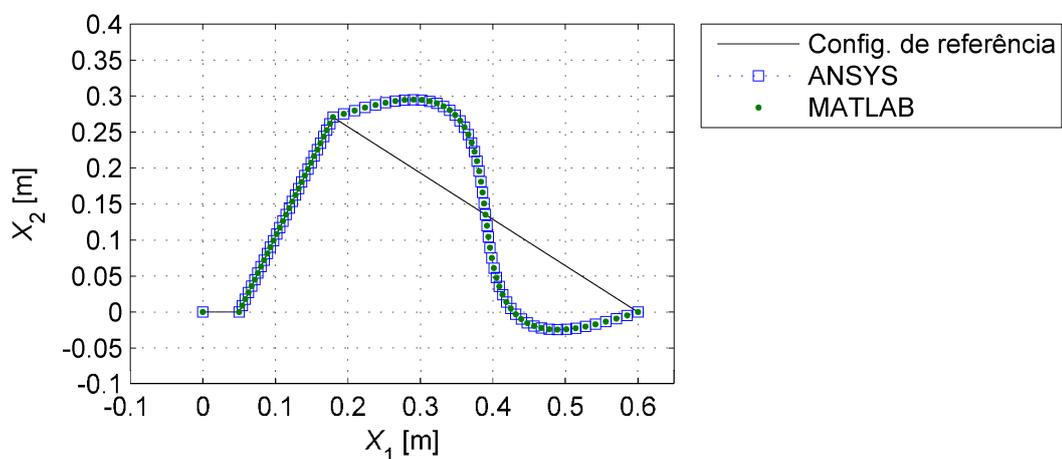


Figura 6.5 - Formas modais associadas à frequência natural $f_3 \cong 88,31$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$ dadas pelo software ANSYS® e pelo algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®.

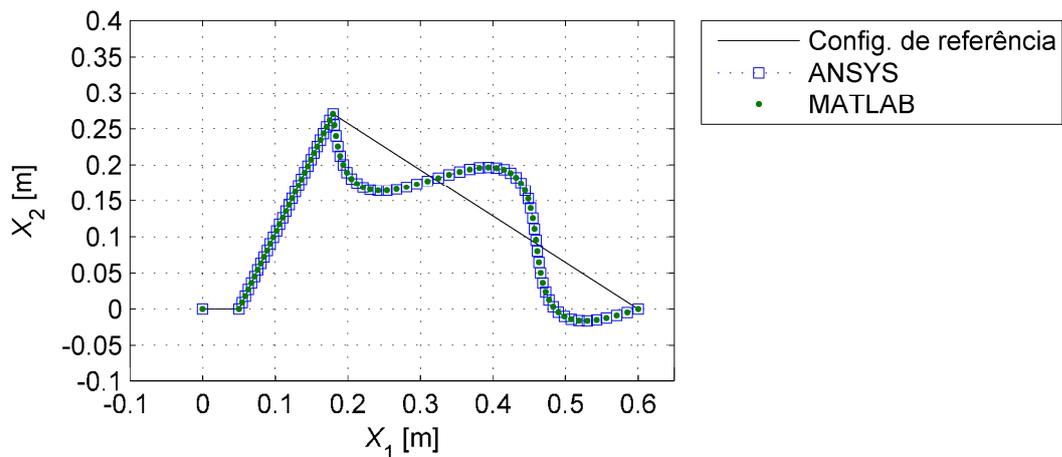


Figura 6.6 - Formas modais associadas à frequência natural $f_4 \cong 198,7$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$ dadas pelo software ANSYS® e pelo algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®.

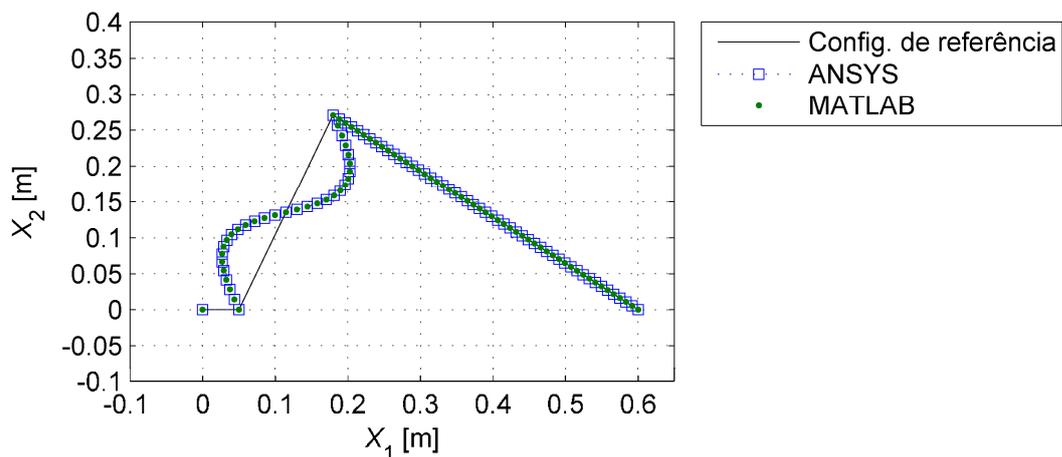


Figura 6.7 - Formas modais associadas à frequência natural $f_5 \cong 326,9$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$ dadas pelo software ANSYS® e pelo algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®.

Como se percebe por inspeção das figuras apresentadas, boa correspondência entre os resultados propiciados pelos modelos desenvolvidos nos softwares MATLAB® e ANSYS® pode ser verificada. Erros menores que 1% podem ser verificados para as frequências naturais como função de θ_2 . Além disso, as formas modais são virtualmente idênticas.

Por inspeção, um fato interessante pode ser ainda verificado para o sistema particular sob análise: as frequências naturais praticamente não variam com respeito à posição angular do mecanismo. Entretanto, há variação nas formas modais associadas, tendo em vista que a mudança de θ_2 implica em alteração da posição da barra 2 que é rígida.

Observa-se ainda que, na faixa de frequências examinada, as frequências naturais e as respectivas formas modais alternam-se entre os modos naturais de vibração de cada uma das barras do mecanismo, consideradas independentemente, sob condição de contor-

no biapoiada. Em outras palavras, os modos de vibração do sistema não são oriundos do acoplamento entre os diferentes modos de vibração das vigas que o constituem.

Isto se explica pela diferença entre as frequências associadas aos modos de vibração de cada um dos componentes do conjunto, assim como pelo carácter ideal associado às juntas do mecanismo, tomadas como não dissipativas. É evidente que o modelo numérico concebido é, desta forma, muito provavelmente incapaz de antecipar acontecimentos práticos, já que neste cenário os modos do mecanismo resultariam do acoplamento entre os modos de vibração de cada uma das vigas que compõem o sistema.

Para o caso analisado nesta Dissertação, considerando condição de contorno biapoiada para qualquer uma das vigas do mecanismo, modelos analíticos proporcionam a relação:

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.2)$$

para sua k -ésima frequência natural, onde L , A e I denotam seu comprimento, a área de sua seção transversal, e o momento de inércia de segunda ordem de área, respectivamente, enquanto que ρ e E indicam, respectivamente, a massa específica e o módulo de Young associados a seu material.

Considerando os dados geométricos e dos materiais das vigas do mecanismo analisado, conforme Tab. 6.1, assim como os resultados já apresentados na Fig. 6.2, bem como a Eq. (6.2), verifica-se o mostrado na Tab. 6.2 disposta a seguir. Esta confirma que: o 1º modo de vibração do mecanismo equivale ao 1º modo de vibração de sua viga 4; o 2º modo de vibração do mecanismo equivale ao 1º modo de vibração de sua viga 3; o 3º modo de vibração do mecanismo equivale ao 2º modo de vibração de sua viga 4; o 4º modo de vibração do mecanismo equivale ao 3º modo de vibração de sua viga 4; o 5º modo de vibração do mecanismo equivale ao 2º modo de vibração de sua viga 3.

6.3 Simulações Transientes

Com o intuito de averiguar a influência da flexibilidade sobre o comportamento do sistema analisado, assim como o de avaliar a possibilidade de utilização de materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações em sistemas multicorpos flexíveis, simulações transientes foram conduzidas para o mecanismo plano de quatro barras considerado neste Capítulo. Num primeiro momento, buscou-se a validação do código computacional desen-

volvido em ambiente MATLAB[®] através de comparação com respostas propiciadas pelo software ANSYS[®]. Apenas depois se buscou atender aos objetivos mencionados.

Destaca-se que para integração numérica das equações algébrico-diferenciais que descrevem o comportamento elastodinâmico do mecanismo, é considerado o procedimento detalhado no Capítulo V, Seção 5.3. Ainda, todos os resultados a serem apresentados na sequência foram conseguidos a partir da utilização de um passo de tempo de $\Delta t = 0,0001$ s, e um valor do parâmetro $\gamma = 0,4$ associado ao integrador.

No que toca às condições iniciais do sistema, são admitidos deslocamentos e velocidades iniciais nulos. Desta forma, em todas as simulações admitiu-se que o sistema parte do repouso, e sempre de uma mesma configuração inicial, qual seja, aquela em que a barra 2 do mecanismo encontra-se alinhada ao eixo horizontal OX_1 , ocupando o semiplano $X_1 \geq 0$ – ver Fig. 6.1.

Quanto ao acionamento do mecanismo, este é realizado pela aplicação de uma função do tipo degrau que impõe uma velocidade angular constante à barra 2 nos instante $t = 0$ como segue:

$$\dot{\theta}_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ \Omega, & \text{se } t \geq 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

onde Ω denota a velocidade de operação do mecanismo, a qual assume diferentes valores para as diferentes simulações a serem apresentadas a seguir.

Tabela 6.2 - Comparação entre as frequências naturais do mecanismo calculadas numericamente com aquelas analíticas associadas a suas barras.

MODOS DE VIBRAÇÃO DO MECANISMO	FREQUÊNCIAS OBTIDAS A PARTIR DO MODELO NUMÉRICO [Hz]	FREQUÊNCIAS ASSOCIADAS ÀS BARRAS DO MECANISMO CALCULADAS DA EQ. (6.2) [Hz]	
		BARRA 3	BARRA 4
1	22,08	–	22,08 ($k=1$)
2	81,76	81,78 ($k=1$)	–
3	88,31	–	88,32 ($k=2$)
4	198,7	–	198,72 ($k=3$)
5	326,9	327,11 ($k=2$)	–

6.3.1 Validação do Código Implementado no Software MATLAB®

A validação do código desenvolvido em ambiente MATLAB® foi conduzida com auxílio de modelo implementado no software ANSYS®. Comentários acerca de ambos os modelos considerados foram tecidos anteriormente na Seção 6.1, e não serão novamente colocados. Menciona-se apenas que, para integração das equações de equilíbrio dinâmico no software ANSYS®, foi utilizado o algoritmo de Hilber, Hughes e Taylor (1977), sobre o qual não serão dados detalhes aqui.

O ambiente adotado para simulações também já foi detalhado. Destaca-se apenas que várias velocidades de acionamento foram consideradas, nos valores de 200, 300, 400, 500 e 600 RPM. É importante também salientar que a validação se deu apenas para a situação em que a barra 4 do mecanismo considerado não apresenta tratamento viscoelástico superficial restrito. Ainda, o tempo selecionado como final de observação do sistema foi o de 1 s.

Os resultados obtidos são mostrados nas Figs. 6.8 a 6.12. Os mesmos constituem os deslocamentos experimentados pelo ponto de interesse destacado na Fig. 6.1 nas direções de X_1 e de X_2 . Ressalta-se que, considerando que o vetor posição do ponto ora referido é dado por $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p(t)$, como deslocamento denota-se aqui a diferença $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p|_{t=0}$.

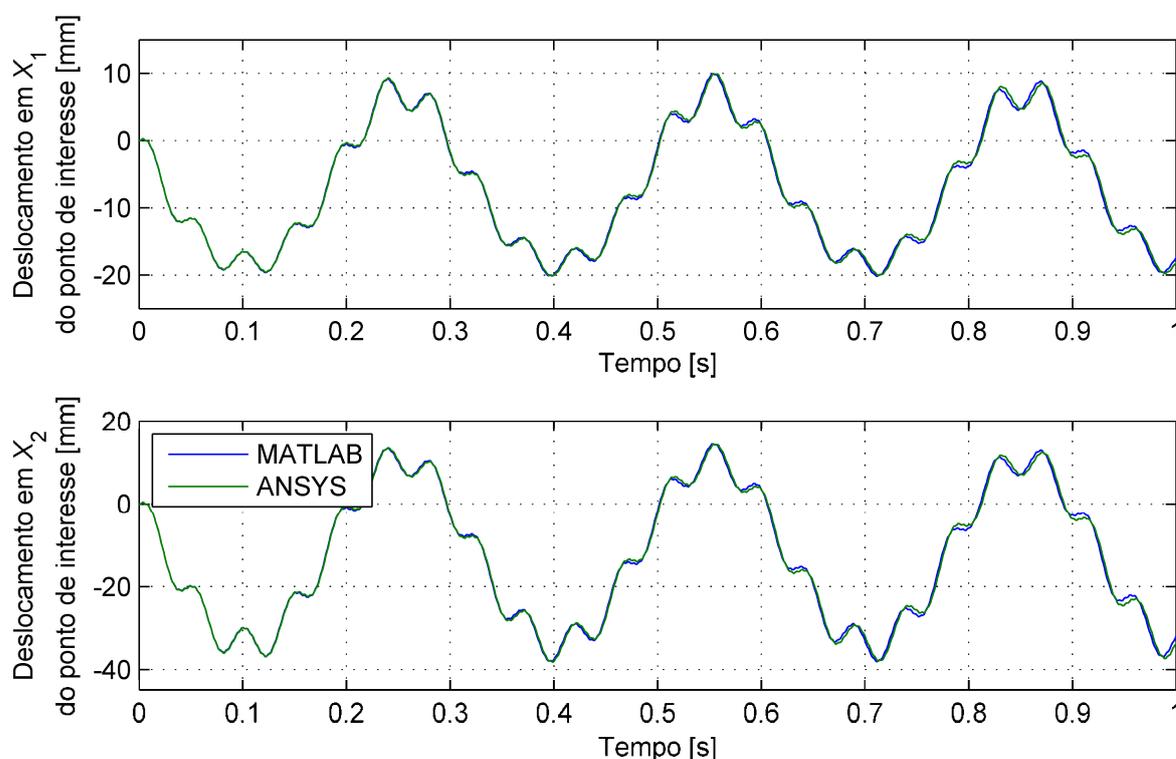


Figura 6.8 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para o caso em que $\Omega = 200$ RPM.

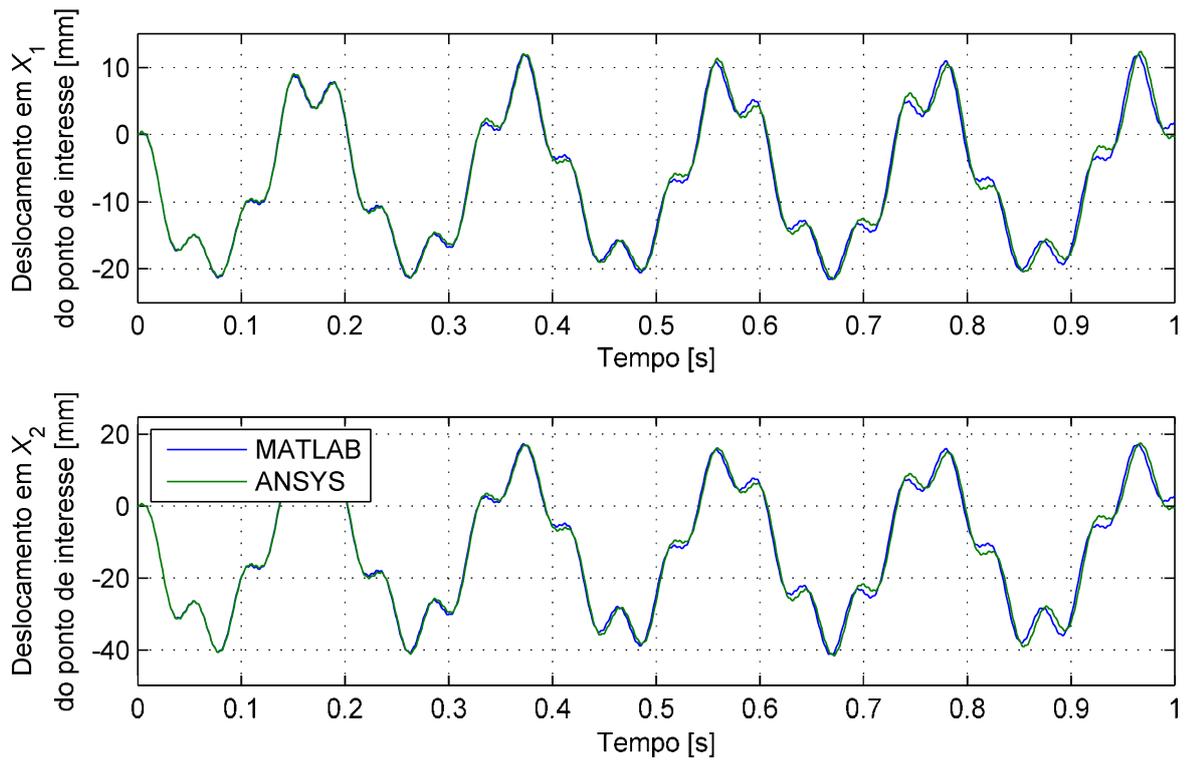


Figura 6.9 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para o caso em que $\Omega = 300$ RPM.

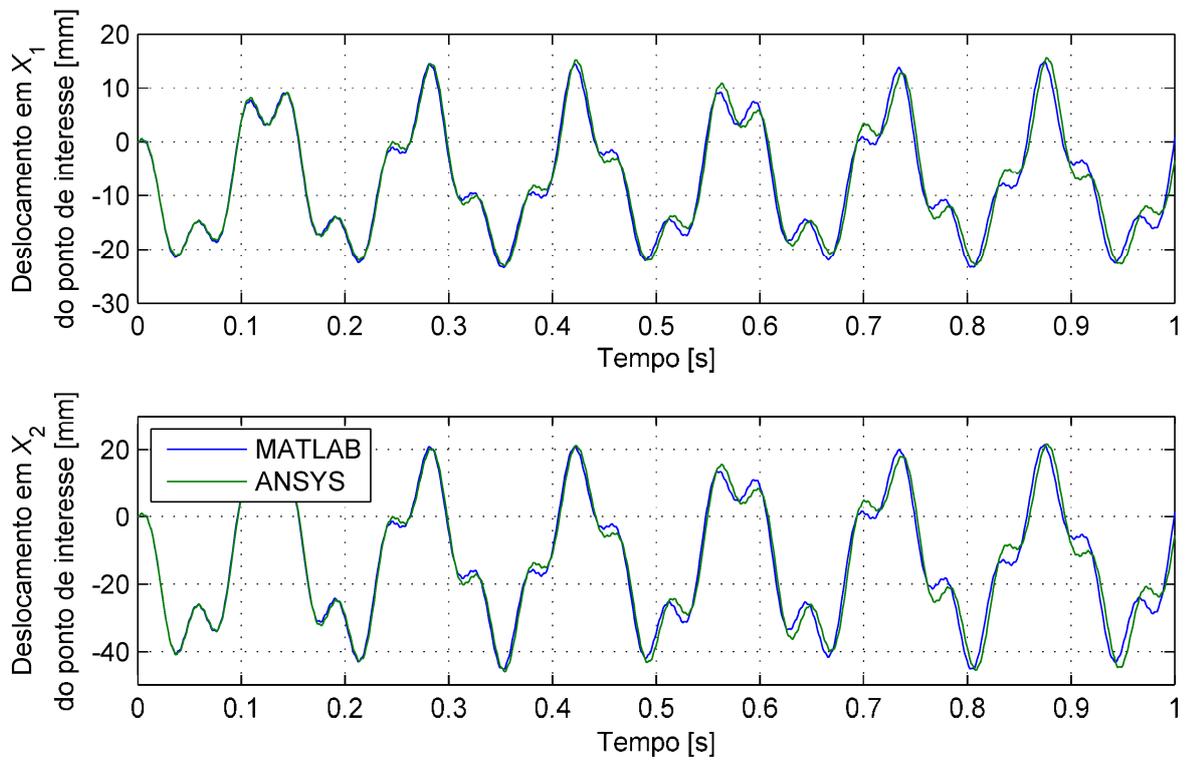


Figura 6.10 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para o caso em que $\Omega = 400$ RPM.

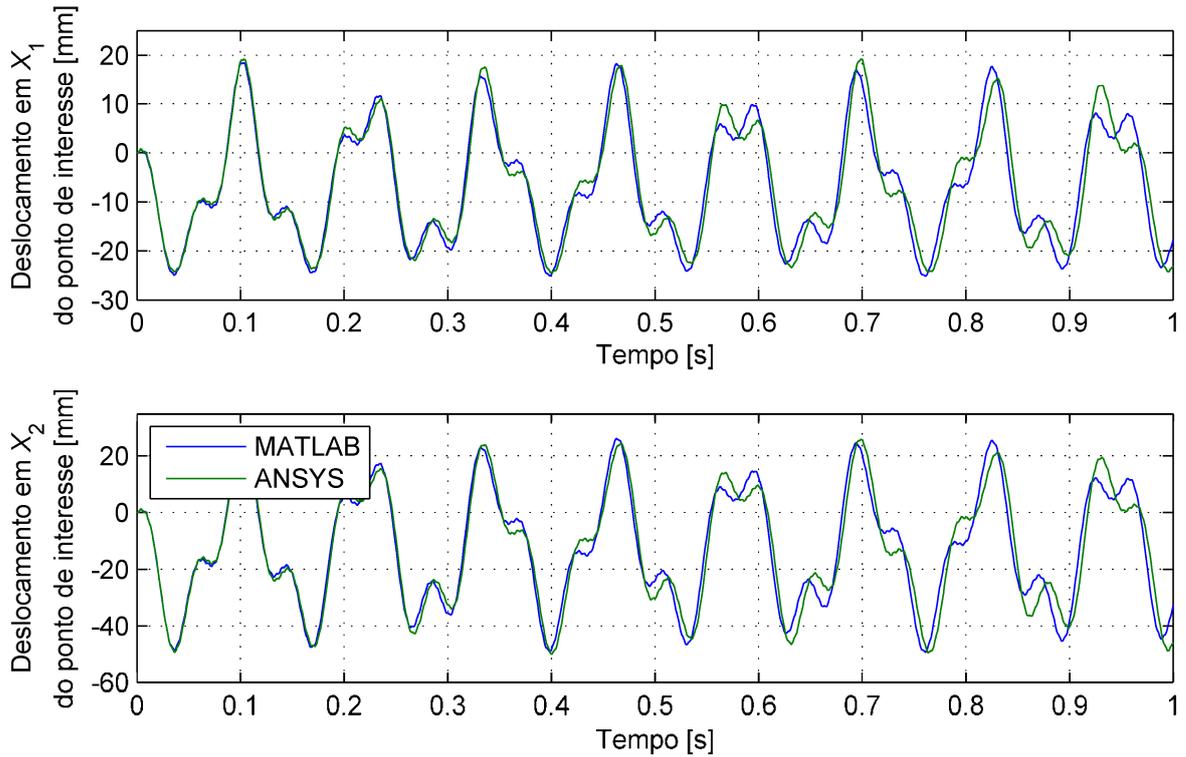


Figura 6.11 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para o caso em que $\Omega = 500$ RPM.

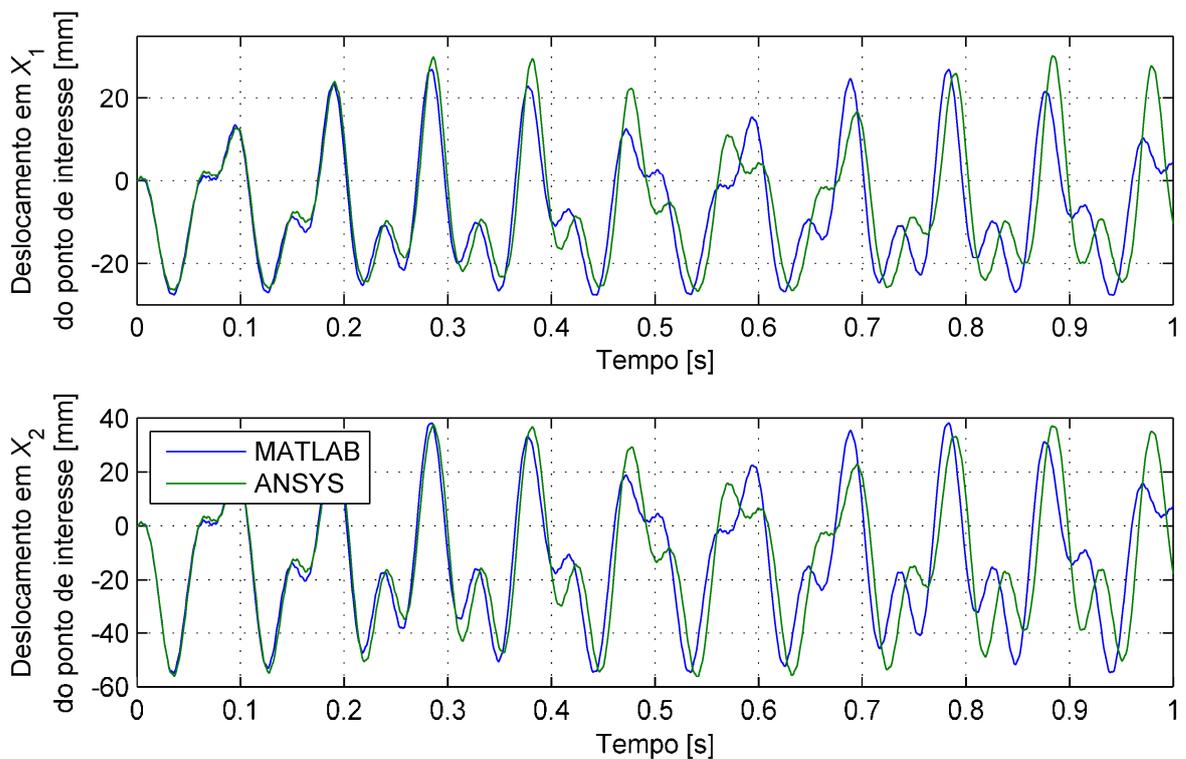


Figura 6.12 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para o caso em que $\Omega = 600$ RPM.

Por inspeção das figuras apresentadas, constata-se boa concordância entre os resultados apresentados por ambos os softwares, em especial para velocidades de operação mais baixas do mecanismo. Para a velocidade de 600 RPM, entretanto, algumas diferenças fazem-se presentes após aproximadamente 0,4 s de simulação. Estas diferenças são creditadas à utilização de esquemas de integração diferentes pelos softwares MATLAB® e ANSYS®. Ainda, pode ser o caso de o modelo desenvolvido neste último software contemplar efeitos não lineares, como enrijecimento centrífugo, por exemplo, e que não são incluídos no algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®. Desta forma, os resultados propiciados pelo algoritmo implementado conduzem a ótima correspondência com o software ANSYS®, o que suporta a hipótese de validade do código desenvolvido.

Os resultados apresentados graficamente nas figuras anteriores mostram ainda que as respostas do mecanismo no ponto de interesse parecem ser compostas pela superposição de duas componentes visualmente identificadas: uma componente periódica que tem a mesma frequência de acionamento, e uma componente de frequência mais alta, porém de menor amplitude, que pode ser associada às vibrações elásticas das barras do mecanismo. Esta interpretação é evidenciada com mais detalhe a seguir.

6.3.2 *Influência da Flexibilidade no Comportamento do Sistema*

Para melhor evidenciar a influência das vibrações elásticas, novas simulações foram realizadas considerando diferentes velocidades de acionamento do mecanismo, de 200, 300, 400, 500 e 600 RPM, como na Subseção anterior. Entretanto, respostas também são apresentadas para o caso em que todas as barras são admitidas rígidas. Também, para considerar diferentes graus de flexibilidade estrutural, são apresentadas respostas obtidas com variações no módulo de elasticidade longitudinal do material que compõe as barras, aqui designado por E , de -20%, -10%, +10% e +20%, as quais implicam valores de 56,24 GPa, 63,27 GPa, 77,33 GPa e 84,36 GPa para o parâmetro considerado, respectivamente.

Os resultados são mostrados nas Figs. 6.13 a 6.22. Mais uma vez, apresenta-se o deslocamento $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p|_{t=0}$ associado ao ponto de interesse definido na Fig. 6.1. Além deste, é também considerado o valor associado ao grau de liberdade de deslocamento transversal da barra 4 do nó que ocupa, inicialmente, a mesma posição daquele ponto de interesse considerado até aqui. Ressalta-se que o grau de liberdade em questão é, na verdade, uma componente do vetor \mathbf{q}_f^4 , que é formado, como discutido no Capítulo V, por coordenadas utilizadas para descrição do comportamento flexível do corpo ao qual se encontra associado – neste caso, da barra 4.

Se inspecionados os gráficos apresentados nas Figs. 6.14, 6.16, 6.18, 6.20 e 6.22, relacionados ao grau de liberdade transversal associado ao ponto de interesse considerado na Fig. 6.1, fica evidente que um aumento na magnitude da velocidade de acionamento do sistema acarreta maiores níveis de vibração do sistema, como já mencionado.

Se comparados os deslocamentos $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_P|_{t=0}$ para as situações em que o sistema analisado admite flexibilidade e é constituído por corpos rígidos, mostrados nas Figs. 6.13, 6.15, 6.17, 6.19 e 6.21 para velocidades de acionamento iguais a 200, 300, 400, 500 e 600 RPM, respectivamente, pode-se qualificar e quantificar a importância da hipótese de flexibilidade adotada para as barras do mecanismo. Observa-se claramente um grande desvio das componentes do vetor deslocamento obtidas para a primeira situação aludida com respeito àquelas associadas ao sistema idealmente rígido. Este fato vem justificar o objetivo de estudo estabelecido para a presente Dissertação.

Outra comparação que pode ser ainda realizada pelos dados mostrados é referente à influência da flexibilidade do material do qual o sistema é feito. Esta influência não se mostra grande para os casos em que $\Omega = 200, 300, 400$ e 500 RPM, como se pode comprovar por análise das Figs. 6.13, 6.15, 6.17 e 6.19: para estas situações, se analisados os primeiros períodos de movimento, pequenas alterações podem ser constatadas na frequência principal associada à flexibilidade do sistema, como comprovado por defasagens entre os sinais apresentados. Em acordo com fundamentos de vibração de sistemas mecânicos, uma redução no valor de E está associada a menores frequências naturais, e, conseqüentemente, a maiores períodos fundamentais. Este fato é o que justifica o comportamento anômalo constatado para o caso em que $\Omega = 600$ RPM. Neste cenário, além da alteração de frequências naturais, como ocorre para os casos anteriormente considerados, há também um grande aumento nas amplitudes de vibração do sistema, indicando que flexibilidade excessiva aliada a altas velocidades de operação de mecanismos pode prejudicar seu correto funcionamento. Uma situação de ressonância não pode ser, contudo, completamente caracterizada, em especial pelo sistema contemplado ser marcadamente não linear. Entretanto, atenta-se para o fato de a primeira frequência natural do sistema ser próxima de 20 Hz, como pode se constatar pela análise modal realizada na Seção 6.2, e aquela frequência de excitação ser igual a $600 \text{ RPM} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 10 \text{ Hz}$. Provavelmente, uma situação de instabilidade está na iminência de se desenvolver devido a uma ressonância superharmônica (NAYFEH, MOOK, 1995), tema este que não compõe a parte fundamental do escopo de estudo deste trabalho.

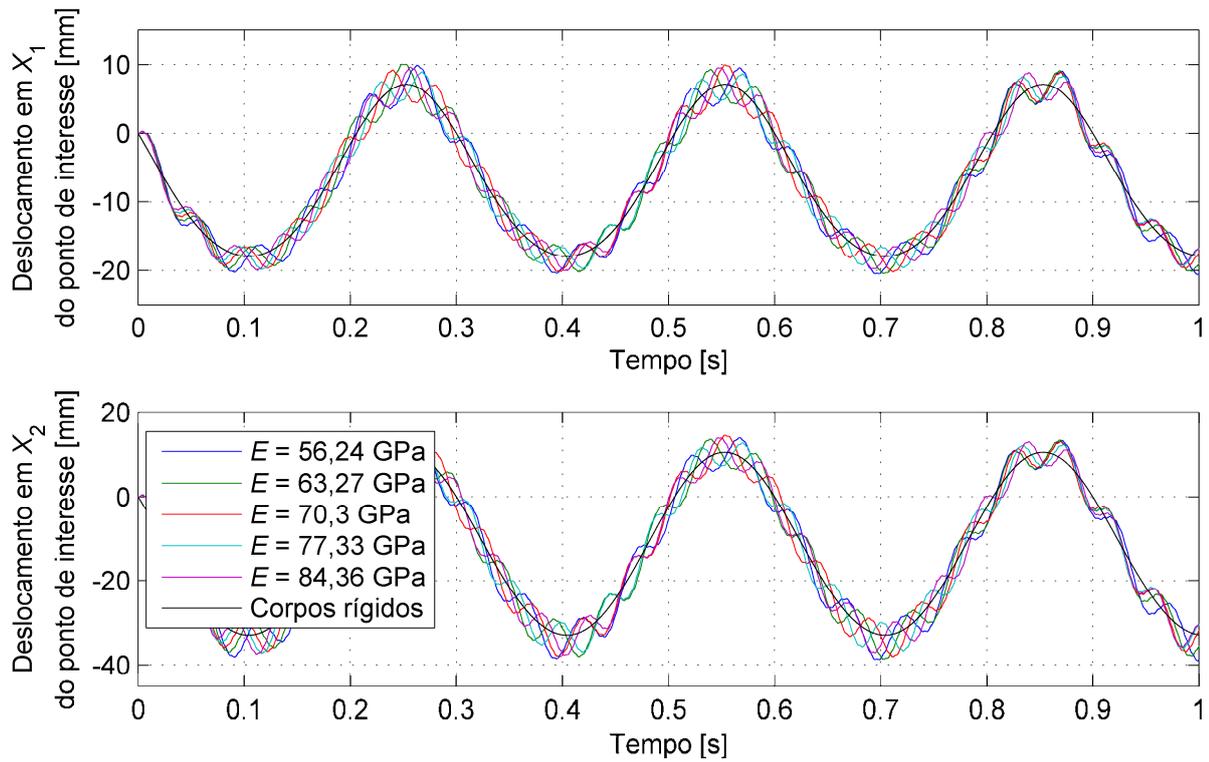


Figura 6.13 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para vários valores do módulo de elasticidade E quando $\Omega = 200$ RPM.

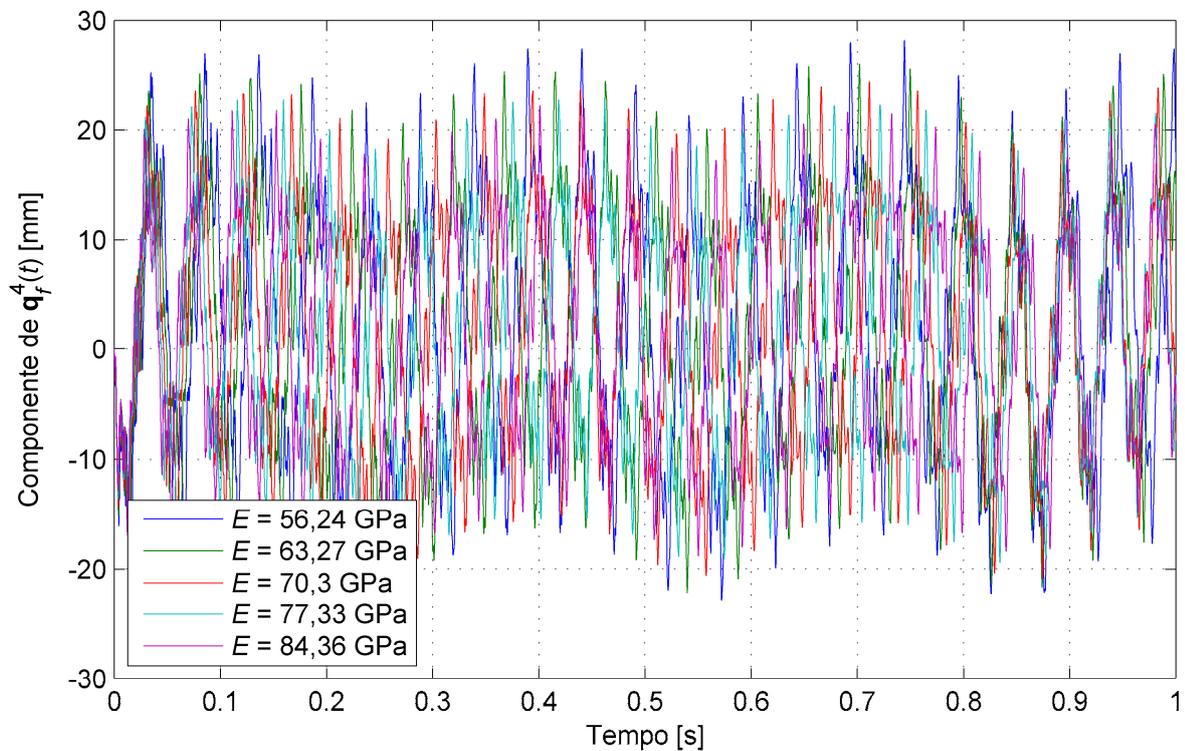


Figura 6.14 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse considerado para vários valores de E quando $\Omega = 200$ RPM.

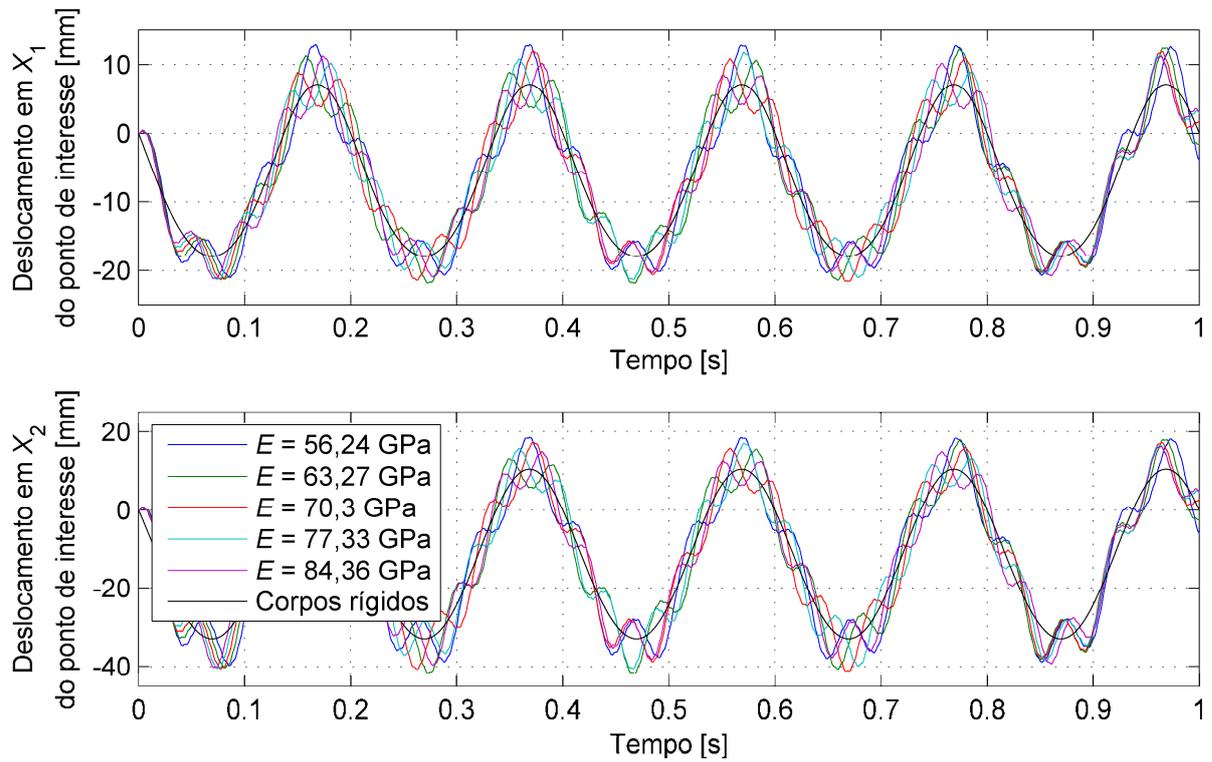


Figura 6.15 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para vários valores do módulo de elasticidade E quando $\Omega = 300$ RPM.

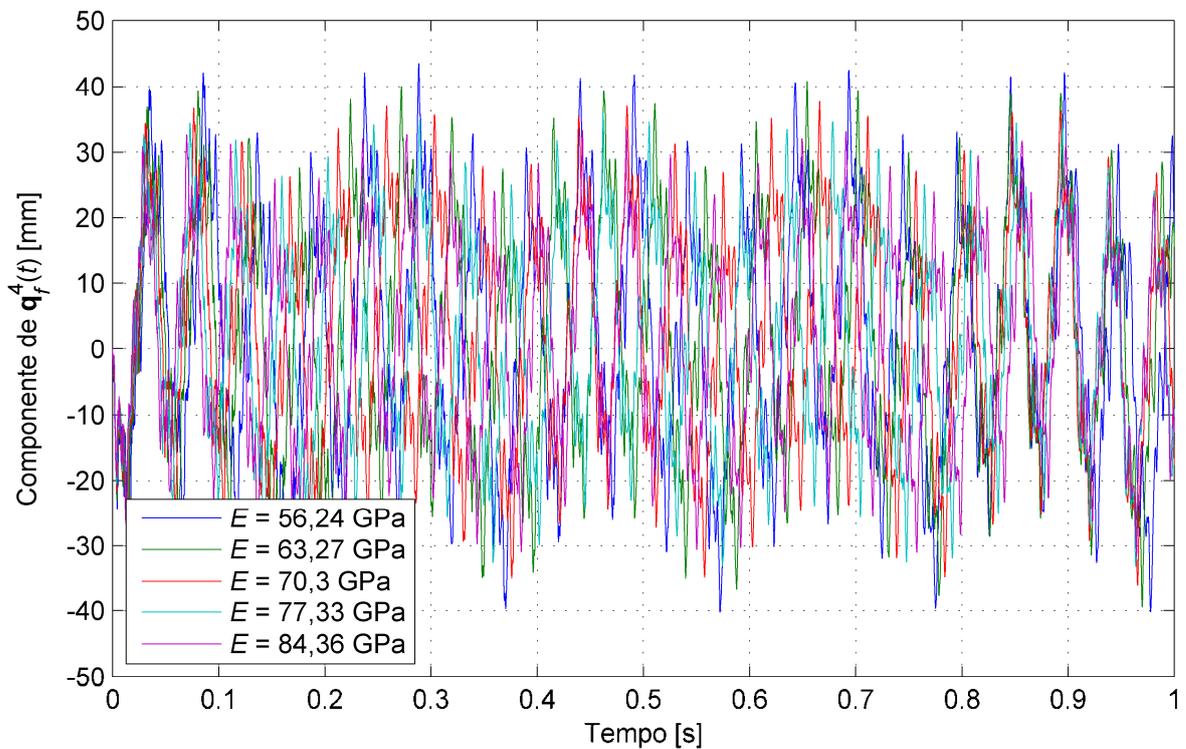


Figura 6.16 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse considerado para vários valores de E quando $\Omega = 300$ RPM.

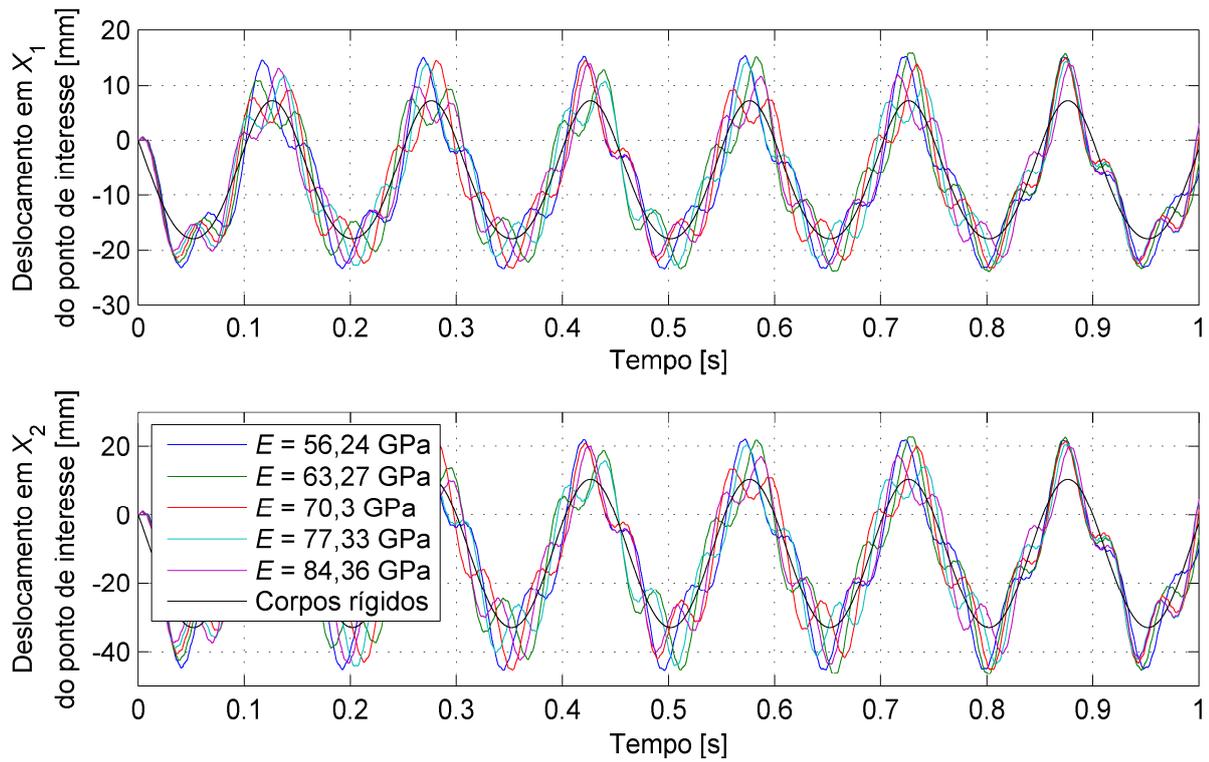


Figura 6.17 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para vários valores do módulo de elasticidade E quando $\Omega = 400$ RPM.

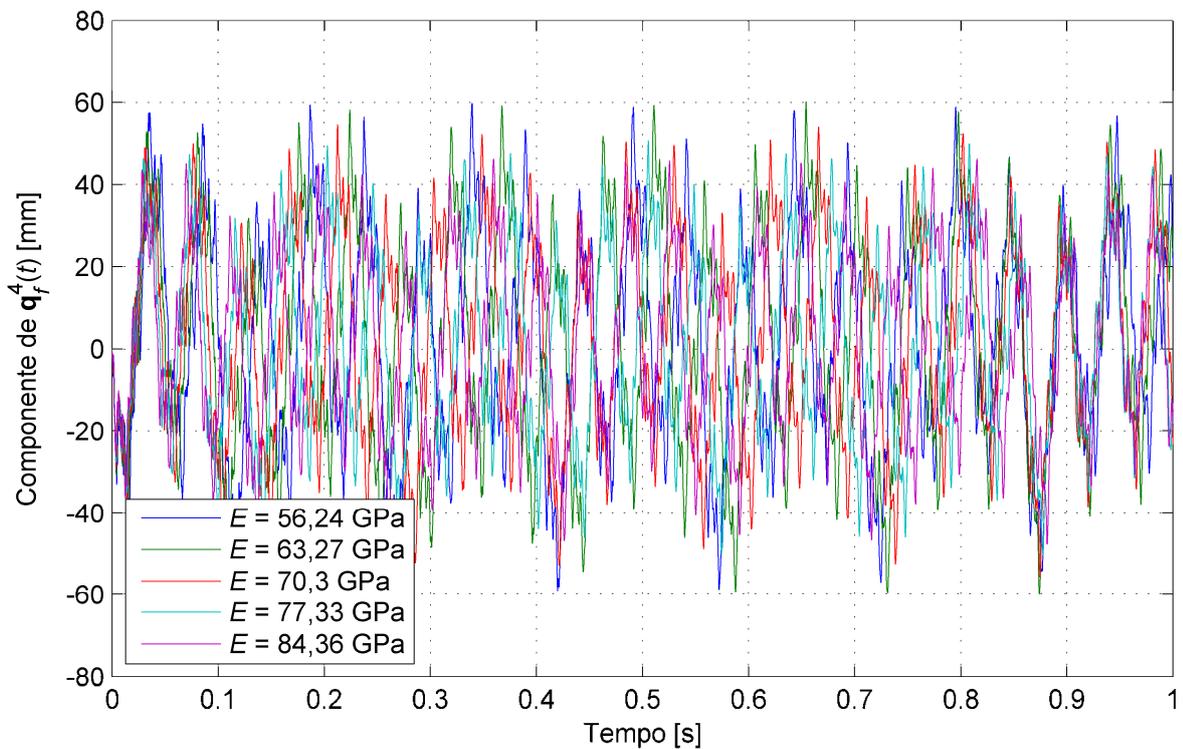


Figura 6.18 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse considerado para vários valores de E quando $\Omega = 400$ RPM.

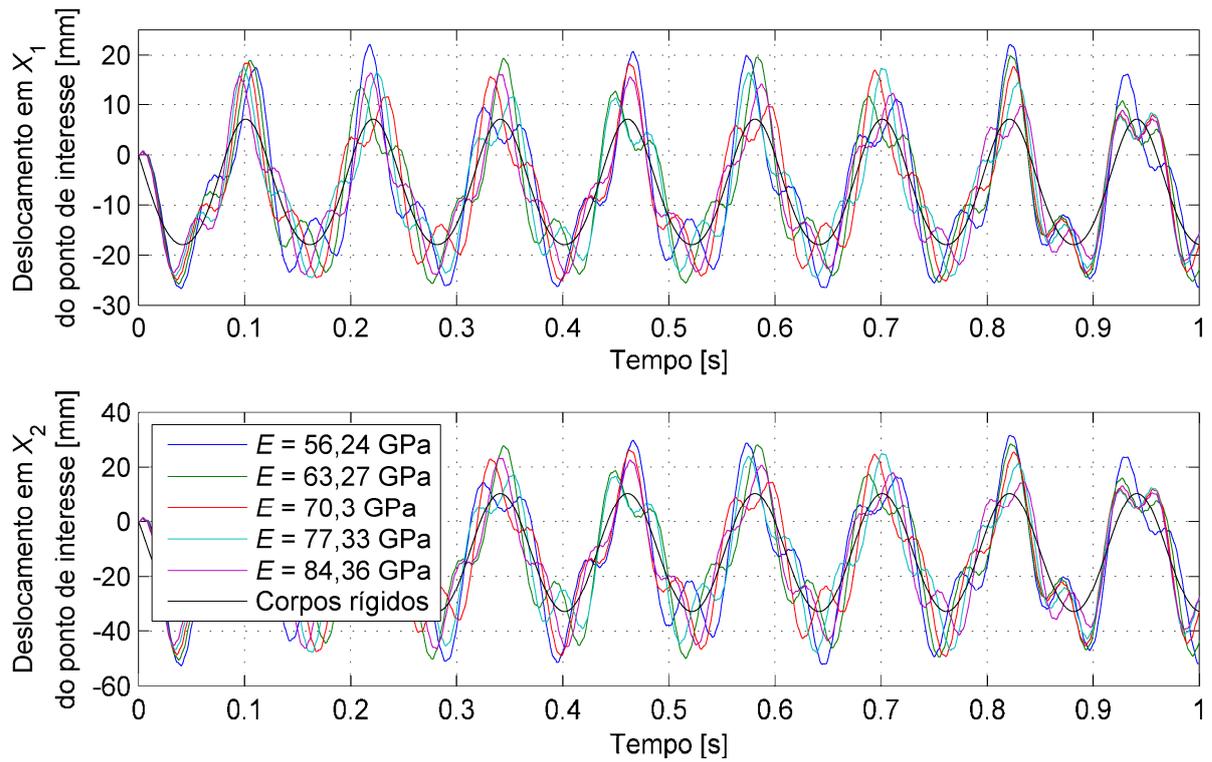


Figura 6.19 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para vários valores do módulo de elasticidade E quando $\Omega = 500$ RPM.

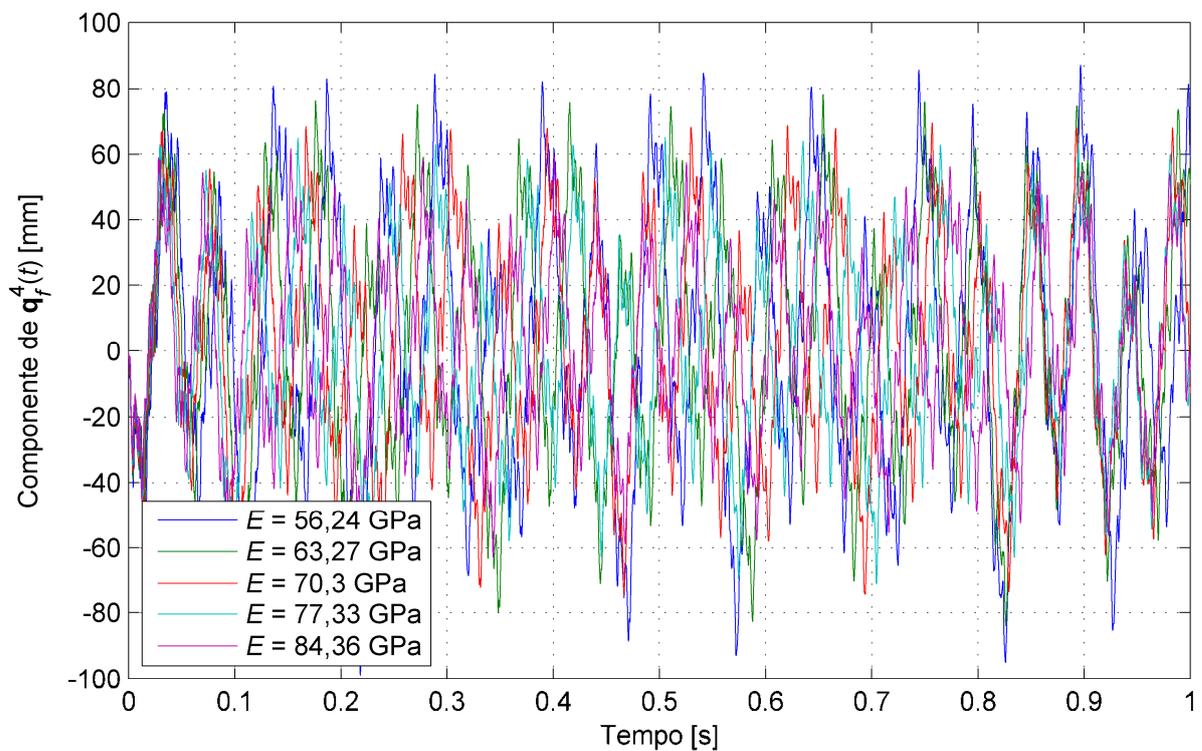


Figura 6.20 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse considerado para vários valores de E quando $\Omega = 500$ RPM.

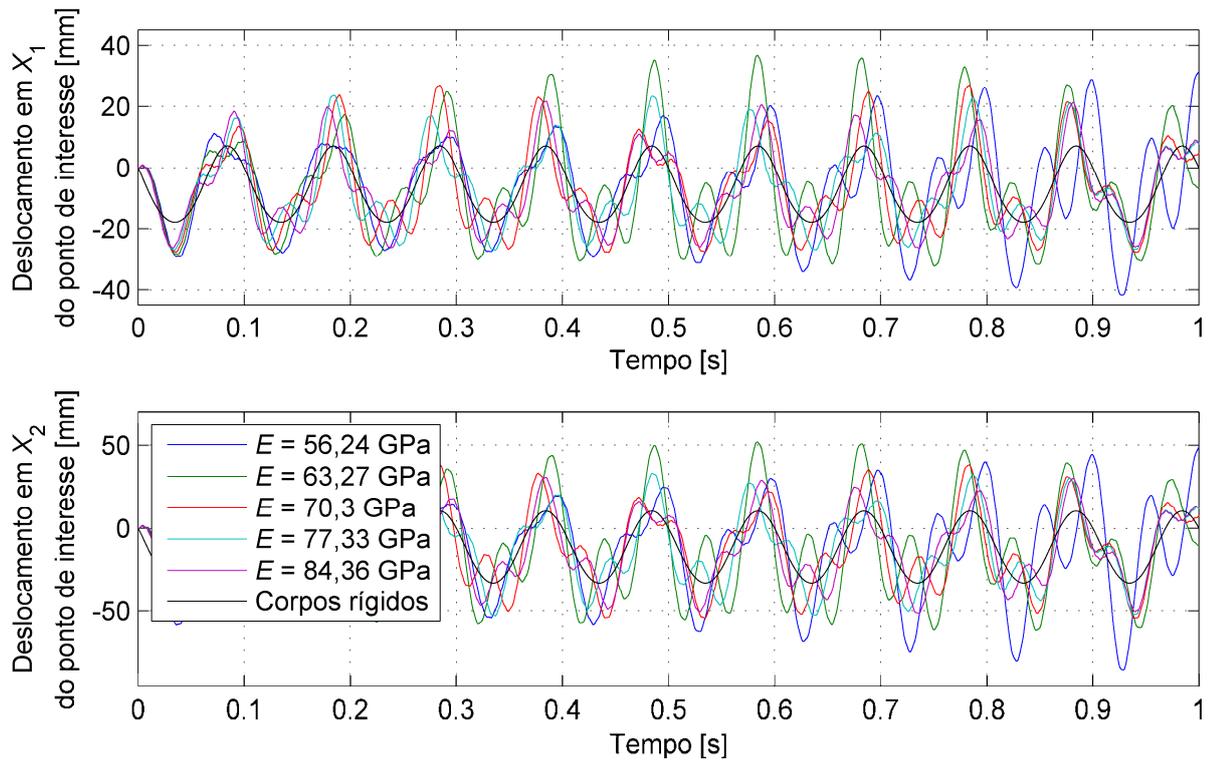


Figura 6.21 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para vários valores do módulo de elasticidade E quando $\Omega = 600$ RPM.

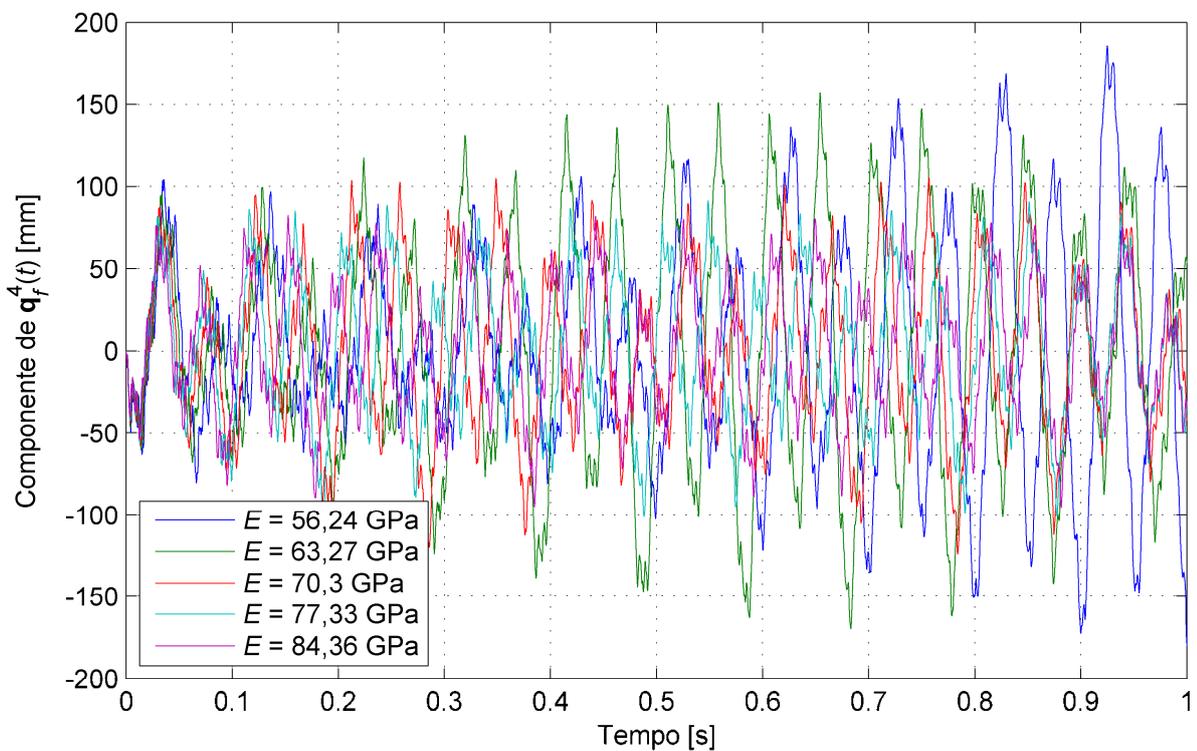


Figura 6.22 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse considerado para vários valores de E quando $\Omega = 600$ RPM.

6.3.3 Utilização de Material Viscoelástico para o Controle de Vibrações do Sistema

Como comprovado na Subseção anterior, a resposta do sistema analisado neste Capítulo é influenciada pela flexibilidade das barras que o compõem. Desta forma, o controle das vibrações resultantes é importante em face da possibilidade de ocorrência de nucleação e propagação de defeitos que levem à falha por fadiga, por exemplo, ou à emissão excessiva de ruído.

Por este motivo, nesta Dissertação é considerada a aplicação de materiais viscoelásticos, sob a forma de tratamentos superficiais restritos, com a finalidade de controle passivo de vibrações.

As simulações consideradas nesta Subseção fazem uso do elemento finito de viga sanduíche apresentado no Capítulo IV, Subseção 4.1.2, para modelagem de tratamento viscoelástico superficial restrito. Este é admitido ser aplicado ao longo de todo o comprimento da barra 4. A espessura da camada viscoelástica, para os resultados apresentados a seguir, assume o valor de 0,5 mm. A temperatura de operação considerada é 27 °C, para a qual as propriedades do material viscoelástico considerado são dadas como mostradas na Tab. 6.1.

As Figs. 6.23 a 6.32 apresentam os resultados computados. As mesmas comparam os deslocamentos dados pela diferença $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p|_{t=0}$ obtidos sem e com a utilização de material viscoelástico para diferentes velocidades de operação do mecanismo de quatro barras considerado: 200, 300, 400, 500 e 600 RPM. Para efeito de comparação, são ainda mostrados os deslocamentos experimentados pelo sistema com barras completamente rígidas. Além dos anteriores, são ainda confrontados valores associados ao grau de liberdade de deslocamento transversal associado ao ponto de interesse ilustrado na Fig. 6.1 para as situações sem e com tratamento viscoelástico superficial restrito.

Desde as velocidades mais baixas, até as mais altas, é notável o efeito proporcionado pelo tratamento viscoelástico sobre as respostas do mecanismo. Como se pode observar nas figuras apresentadas, o tratamento é capaz de reduzir as amplitudes dos movimentos associados à flexibilidade de maneira significativa após curto tempo de operação do mesmo.

Ainda, é interessante o fato de que as respostas do sistema amortecido encontram-se bastante próximas daquelas associadas ao sistema idealmente rígido. As diferenças em amplitude observadas para estas duas situações quando as respostas já estão em domínio de regime permanente podem ser explicadas pelo acréscimo de inércia ao sistema devido à aplicação do tratamento superficial considerado. Quanto ao fato das amplitudes aumentarem à medida que a velocidade de acionamento aumenta, o mesmo é creditado aos esforços dinâmicos centrífugos e de Coriolis considerados na descrição da dinâmica do mecanismo analisado.

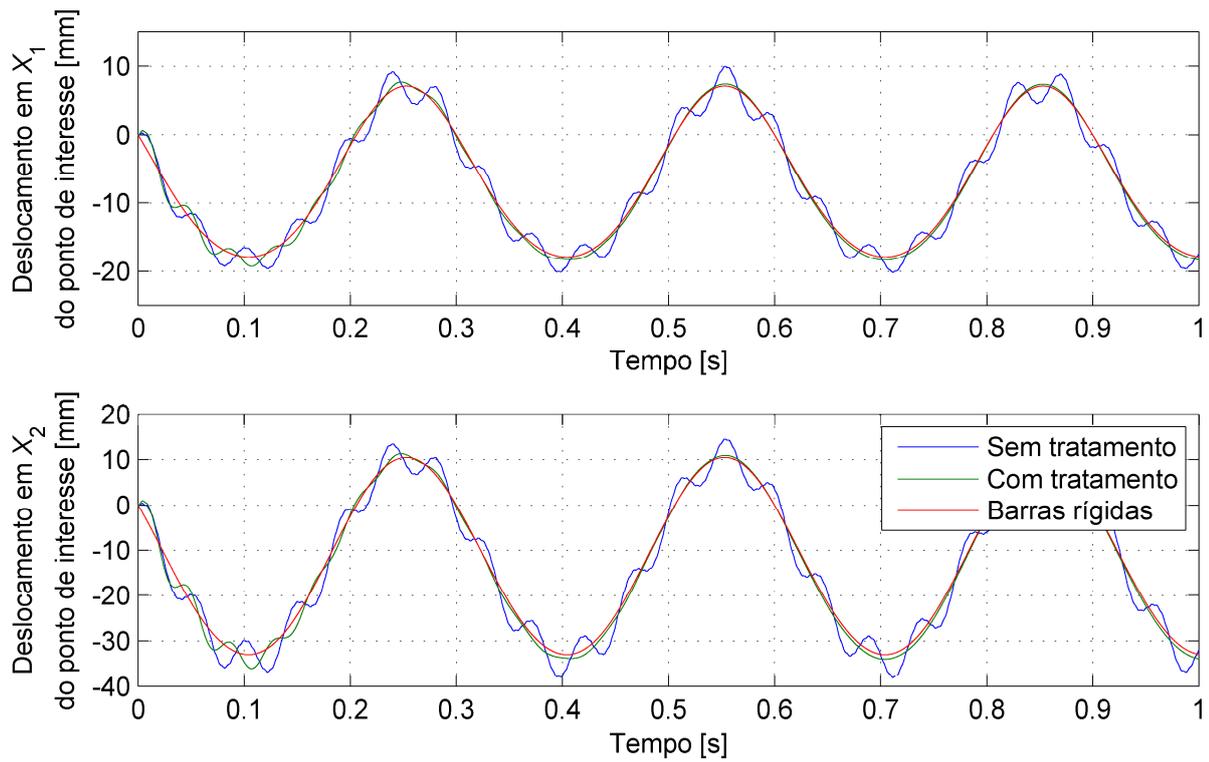


Figura 6.23 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para $\Omega = 200$ RPM.

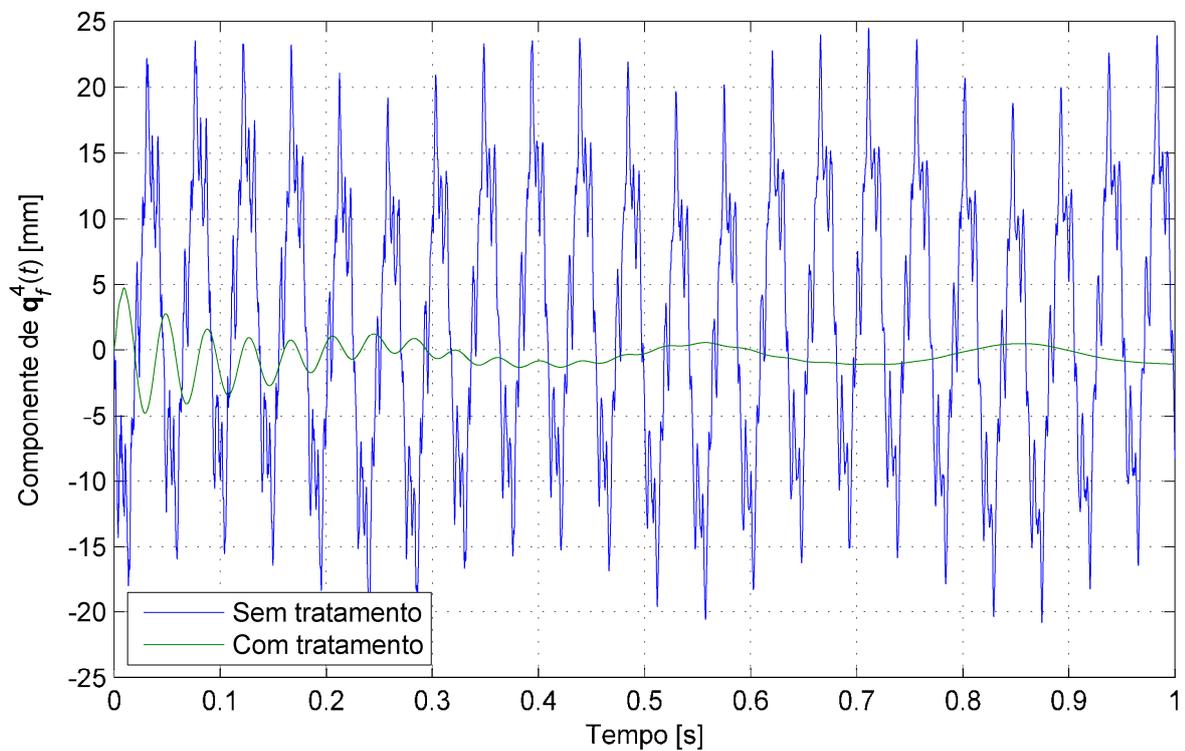


Figura 6.24 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para $\Omega = 200$ RPM.

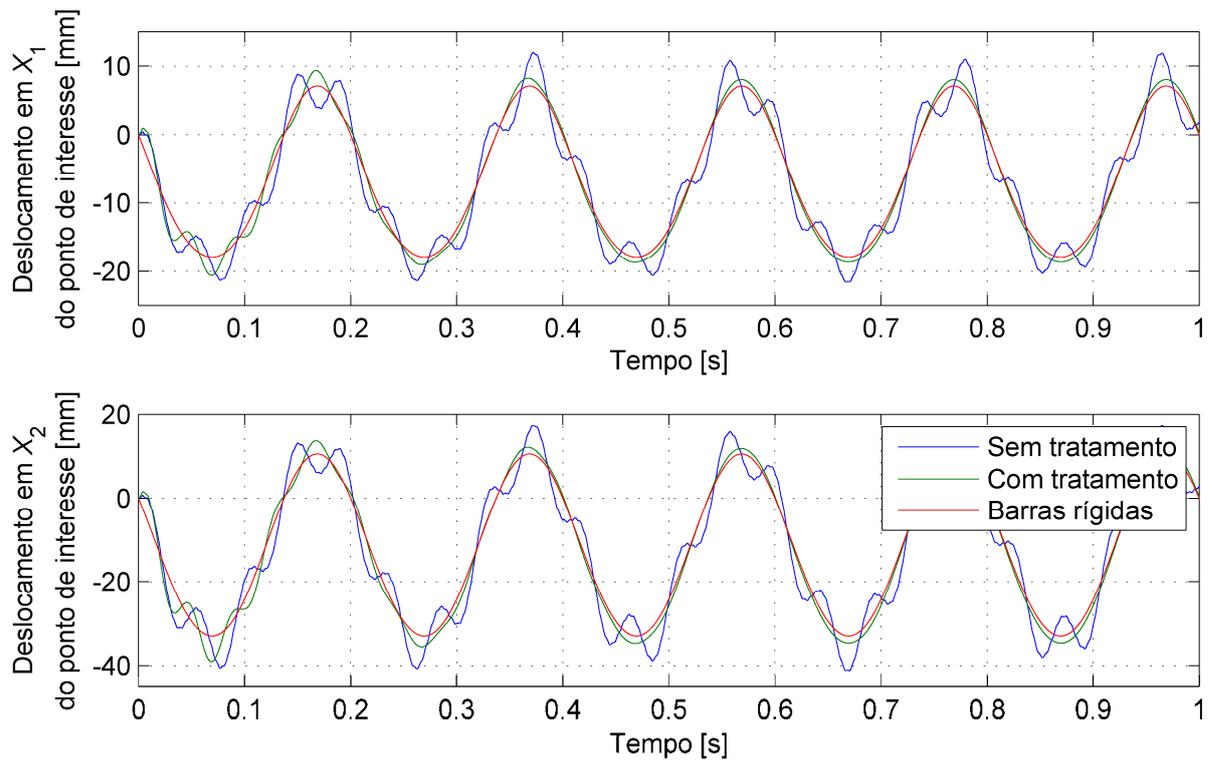


Figura 6.25 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para $\Omega = 300$ RPM.

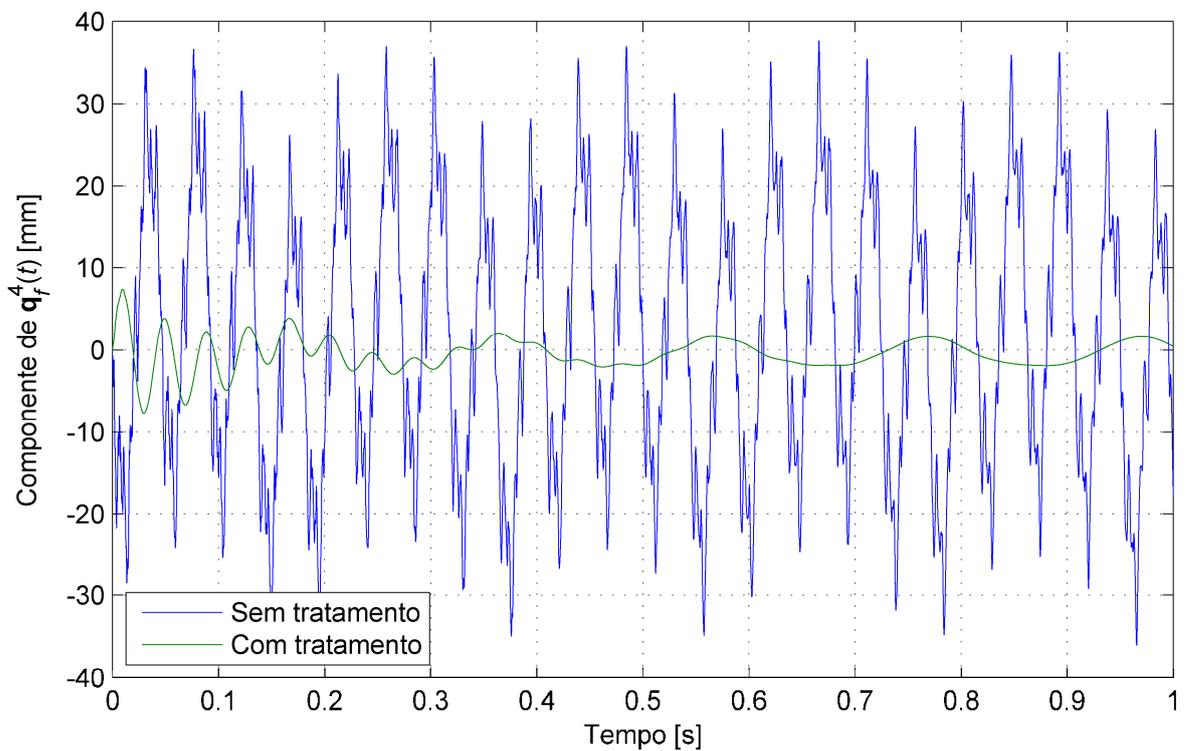


Figura 6.26 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para $\Omega = 300$ RPM.

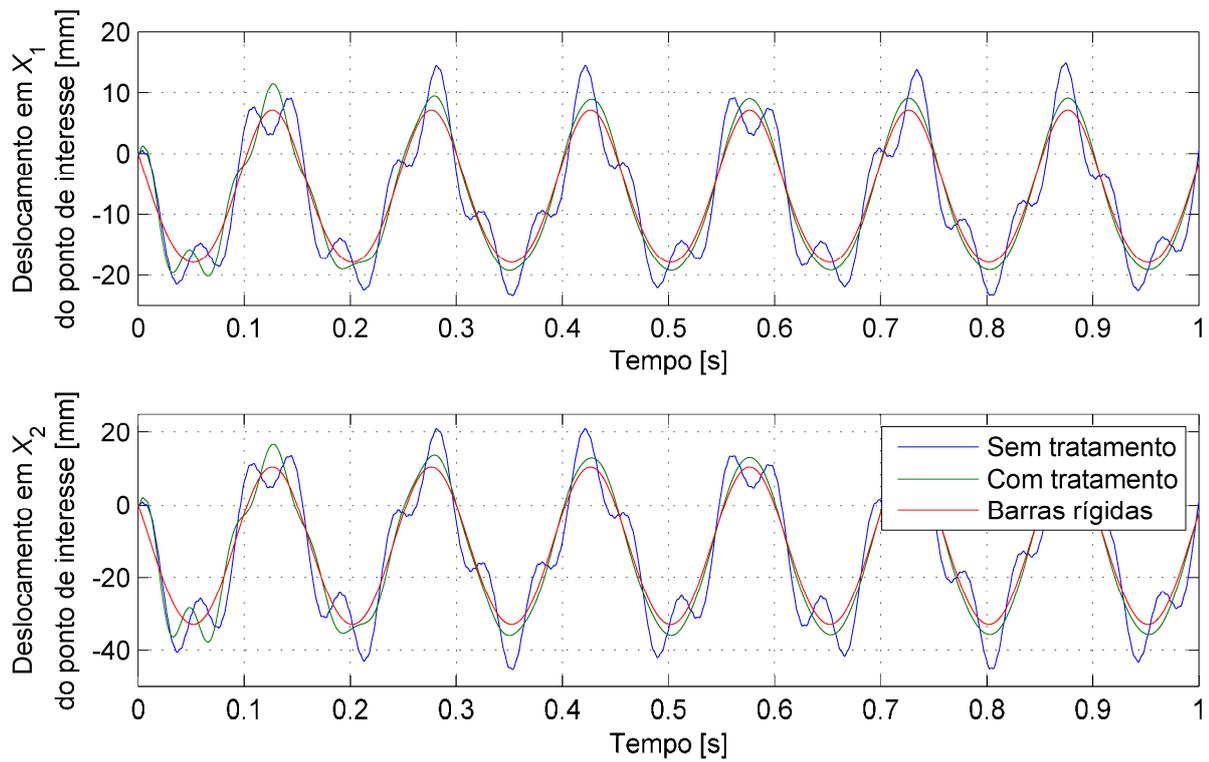


Figura 6.27 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para $\Omega = 400$ RPM.

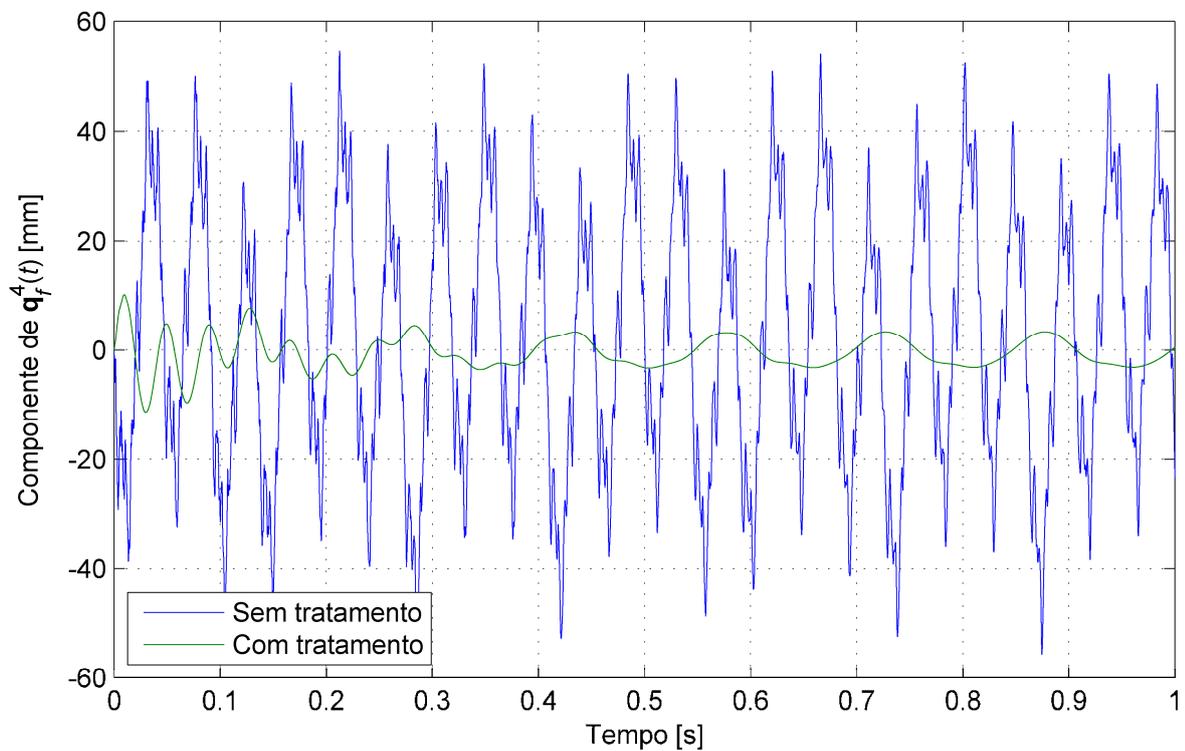


Figura 6.28 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para $\Omega = 400$ RPM.

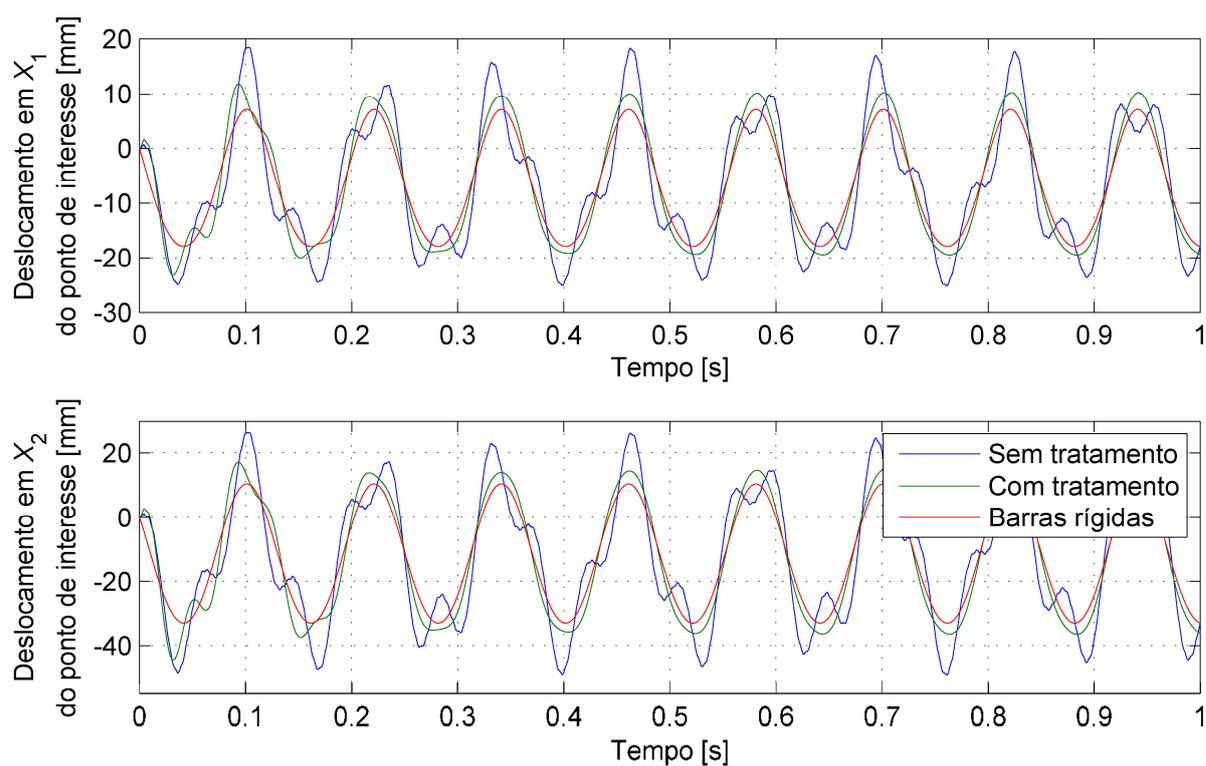


Figura 6.29 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para $\Omega = 500$ RPM.

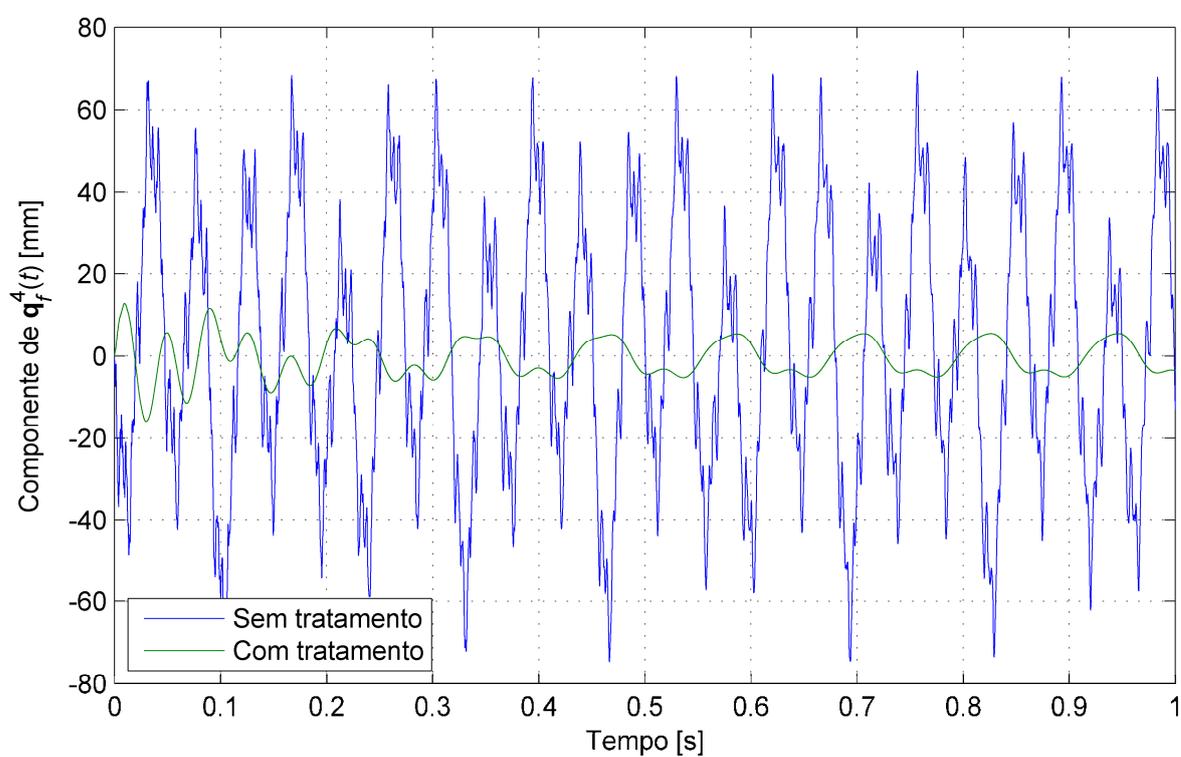


Figura 6.30 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para $\Omega = 500$ RPM.

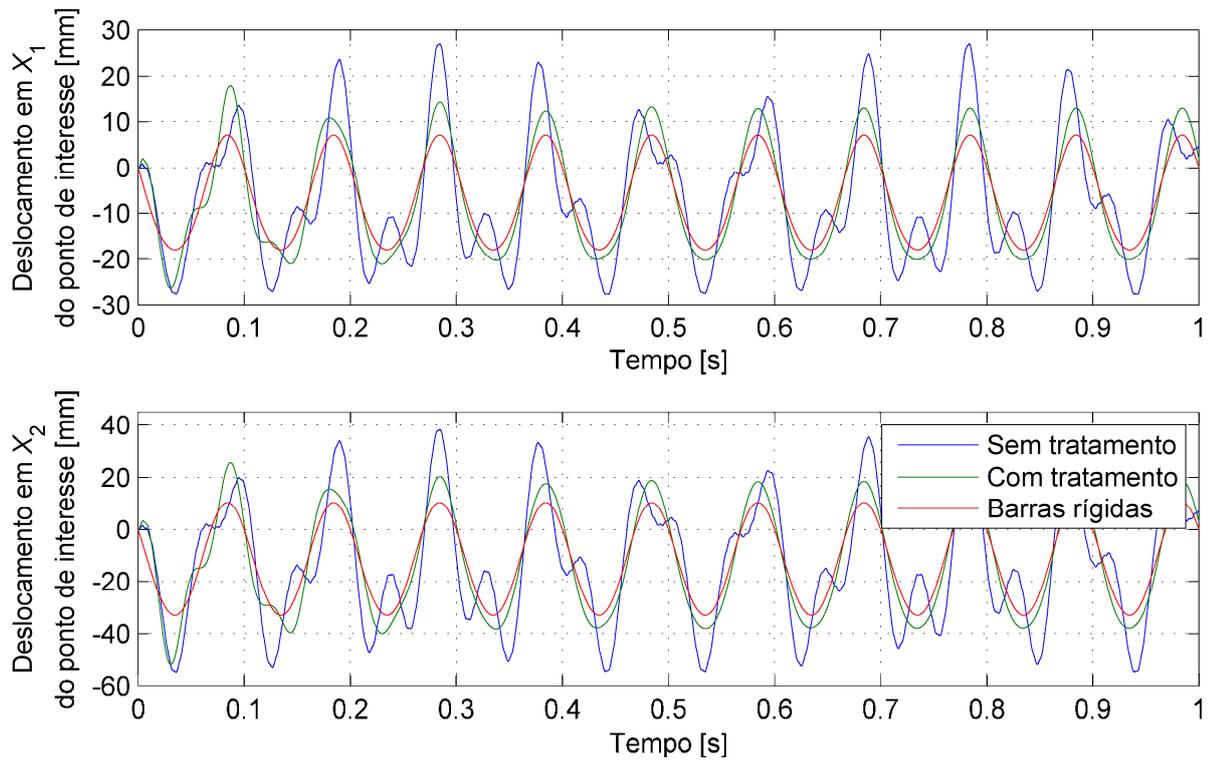


Figura 6.31 - Deslocamentos nas direções de X_1 e de X_2 associados ao ponto de interesse para $\Omega = 600$ RPM.

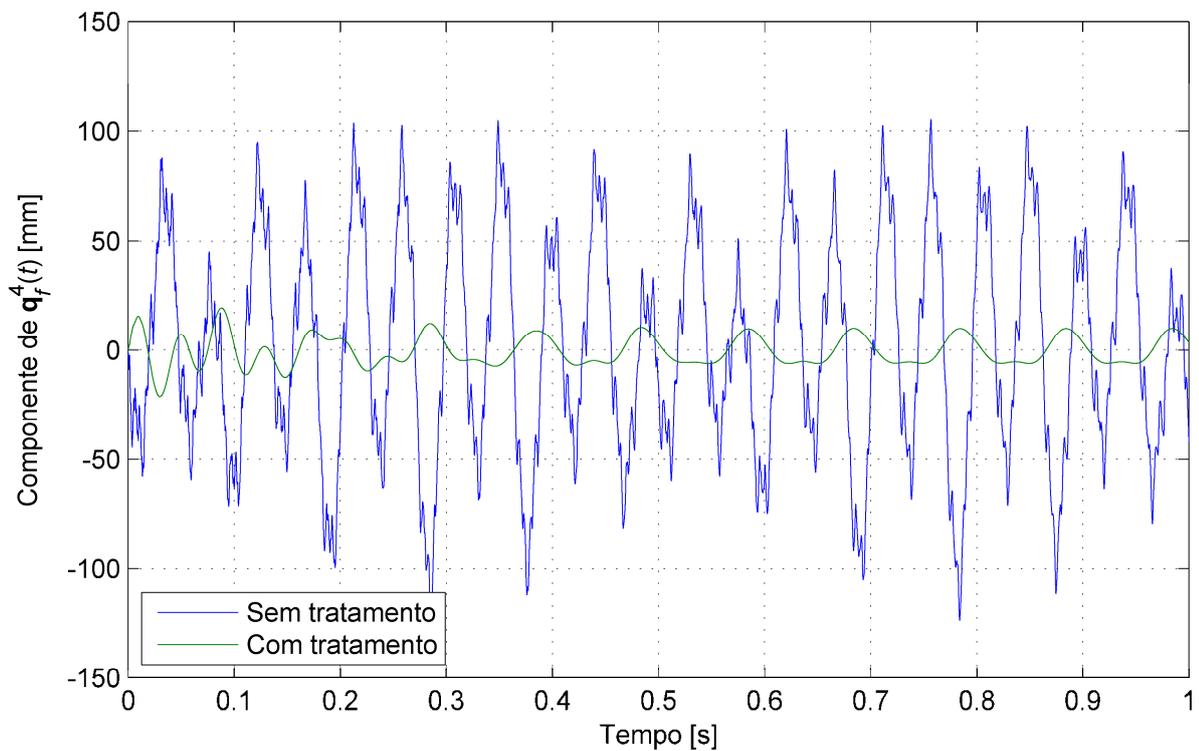


Figura 6.32 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para $\Omega = 600$ RPM.

Uma última observação é feita sobre as respostas apresentadas nesta Subseção. Devido à formulação empregada para modelagem dinâmica do mecanismo, apenas as componentes dos vetores \mathbf{q}_f^i , $i = 1, 2, 3, \dots$, contribuem às deformações que se desenvolvem nos componentes do sistema – conforme Eqs. (5.30) e (5.33). Constatada a veracidade do anterior, quando avaliados os níveis do deslocamento nodal transversal associado ao ponto de interesse para as situações com e sem tratamento viscoelástico superficial restrito, pode-se afirmar que deformações substancialmente inferiores resultam para o primeiro caso. Como consequência, menores tensões se desenvolvem no meio contínuo analisado, o que indica que amortecimento viscoelástico pode contribuir à redução de fadiga, e possivelmente à redução de nucleação e de propagação de defeitos por meio deste mecanismo de falha.

6.3.4 *Influências Paramétricas sobre o Comportamento do Tratamento Viscoelástico*

6.3.4.1 *Influência da Temperatura*

Nesta Subseção, algumas influências paramétricas são consideradas para avaliação da eficácia do tratamento viscoelástico superficial restrito quando empregado para mitigação de vibrações no sistema considerado.

A primeira delas diz respeito à temperatura, fator operacional que influencia de sobremaneira o nível de amortecimento e a rigidez associada a materiais viscoelásticos, como discutido no Capítulo III.

Para realizar esta análise, foram considerados aqueles parâmetros identificados para o material ISD112™ mostrados na Tab. 3.2, Capítulo III, Seção 3.7. Os mesmos foram obtidos a partir de um procedimento de identificação discutido ao longo da referida Seção.

Em todas as simulações considerou-se a presença de tratamento viscoelástico superficial restrito. O mesmo, como na Subseção anterior, neste caso, foi admitido estar aplicado ao longo de todo o comprimento da barra 4 do mecanismo. Mais uma vez, a espessura da camada viscoelástica da viga sanduíche foi assumida igual a 0,5 mm. Uma única velocidade de operação do sistema foi selecionada, igual a 400 RPM. Um tempo de observação de 1 s foi adotado.

Os resultados das simulações numéricas são apresentados a seguir, nas Figs. 6.33 e 6.34. Mais uma vez são mostrados, como anteriormente, os deslocamentos do ponto de interesse nas direções de X_1 e de X_2 , e a componente de \mathbf{q}_f^4 associada ao deslocamento transversal deste mesmo ponto.

Nas figuras consideradas pode ser avaliado que temperaturas baixas estão associadas a um comportamento mais rígido do sistema, bem como a um nível de amortecimento intermediário, que não é nem máximo e nem mínimo para os valores de temperatura consi-

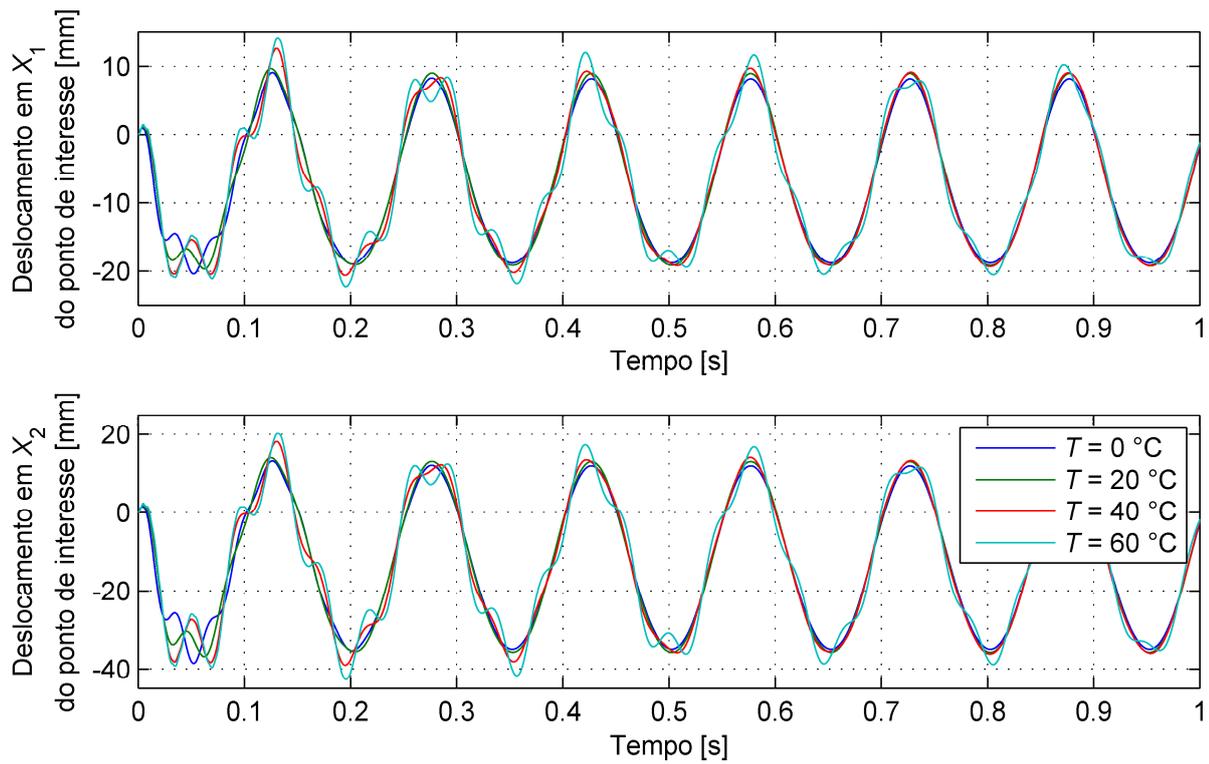


Figura 6.33 - Deslocamentos do ponto de interesse nas direções de X_1 e de X_2 para valores seleccionados de temperatura de operação do sistema analisado.

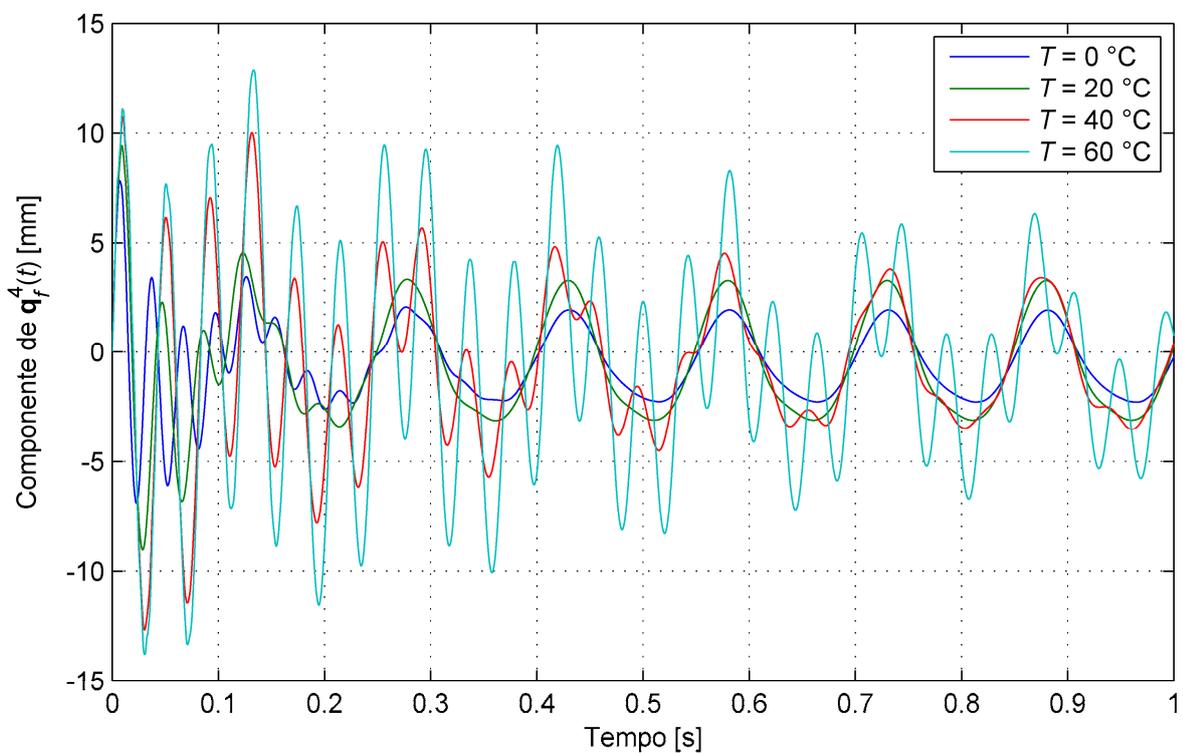


Figura 6.34 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para valores seleccionados de temperatura de operação do sistema analisado.

derados. À medida que o parâmetro em questão tem seu valor aumentado, observa-se o aparecimento de amplitudes devidas à flexibilidade ligeiramente maiores em razão de uma diminuição no valor assumido pelo módulo de armazenamento do material viscoelástico adotado no estudo. Por outro lado, o amortecimento adicionado ao sistema por meio do tratamento viscoelástico superficial restrito assume seu valor máximo entre aproximadamente 10 e 20°C. A partir de 30°C, tal amortecimento começa a se reduzir drasticamente. Esta queda é ainda acompanhada pela contínua redução no valor do módulo de armazenamento exibido pelo material ISD112™. Como resultado, obtêm-se, para altas temperaturas, deslocamentos com amplitudes relativamente grandes associados a baixos níveis de amortecimento. Ressalta-se que as análises precedentes mostram-se completamente compatíveis com as curvas associadas ao material viscoelástico considerado durante as simulações, como pode ser comprovado por inspeção das curvas mestras apresentadas na Fig. 3.5, Seção 3.4.

6.3.4.2 *Influências de Parâmetros Geométricos do Tratamento Viscoelástico*

O primeiro parâmetro geométrico considerado nesta Subseção é a espessura da camada de material viscoelástico presente no tratamento. Para avaliação de sua influência, admite-se uma temperatura de operação constante igual a 28 °C. Para esta temperatura, as propriedades associadas ao material ISD112™ podem ser inferidas da Tab. 3.2. A velocidade de acionamento do mecanismo também assume, neste caso, valor constante igual a 400 RPM. O tratamento viscoelástico é mais uma vez considerado como tendo sido realizado ao longo de todo o comprimento daquela barra 4 do mecanismo, e apenas ao longo desta.

Os resultados das simulações são apresentados nas Figs. 6.35 e 6.36. Mais uma vez, são mostrados as componentes do vetor deslocamento $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_P|_{t=0}$ e a componente de \mathbf{q}_r^4 associada ao deslocamento transversal do nó que ocupa, na configuração inicial do mecanismo, a mesma posição que aquele ponto de interesse mostrado na Fig. 6.1.

Como era esperado, um aumento na espessura do material utilizado no tratamento superficial está associado a um aumento de sua capacidade de dissipar energia das respostas exibidas pelo sistema. Isto se deve, fisicamente, a um aumento na deformação experimentada pelo material. Esta inferência pode ser constatada da Fig. 6.36 se observado o tempo gasto para estabilização das respostas em regime permanente, com decaimento do transiente.

Entretanto, os ganhos oferecidos pelo material viscoelástico quando utilizado além de determinada espessura, mantidos fixos os demais parâmetros geométricos, não justificam o uso de espessuras maiores. Este fato é amparado pela necessidade quase mandatária de redução de massa, e conseqüente custo, associada aos atuais sistemas de engenharia.

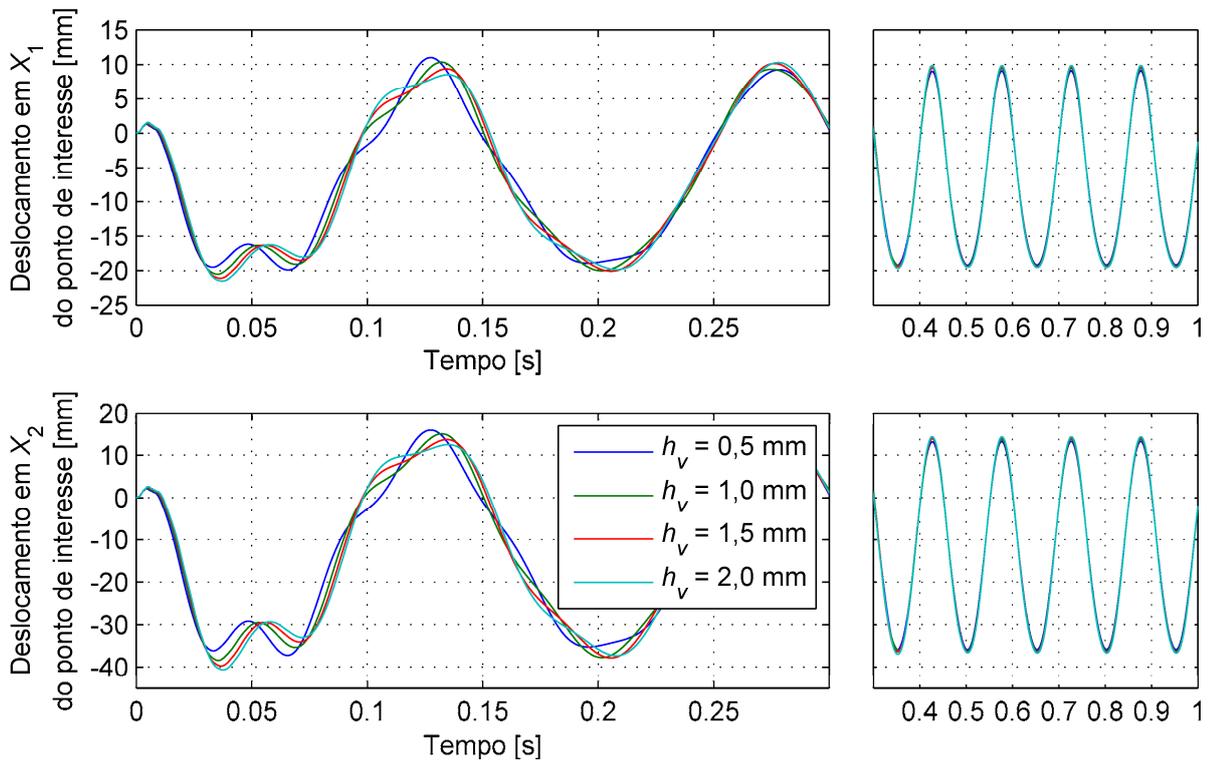


Figura 6.35 - Deslocamentos do ponto de interesse nas direções de X_1 e de X_2 para valores selecionados de h_v .

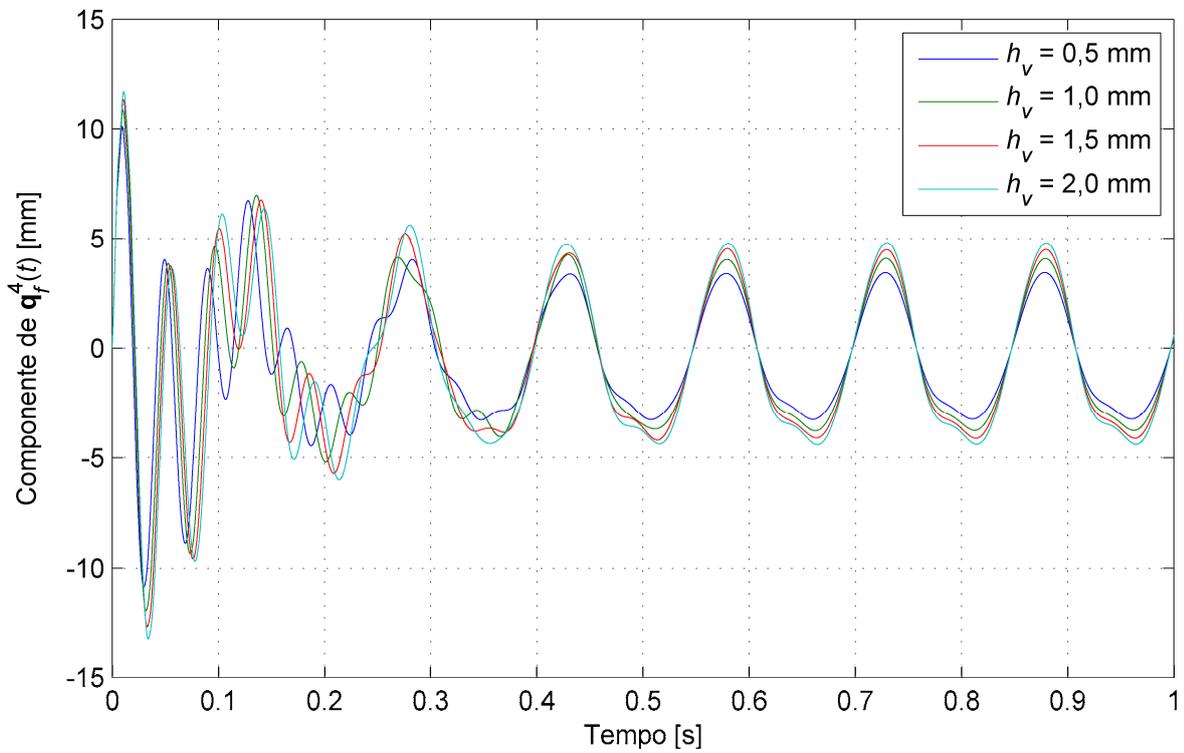


Figura 6.36 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para valores selecionados de h_v .

Assim, mostra-se interessante a realização de segmentação do tratamento considerado, visando a melhora de dissipação de energia pela identificação de contribuições associadas a modos de vibração específicos.

Destaca-se, ainda, que, caso uma camada restringente de maior espessura fosse utilizada, maiores poderiam ser os níveis de amortecimento induzidos pelo tratamento viscoelástico no sistema, uma vez que tais níveis estão diretamente correlacionados à razão entre as espessuras associadas às duas camadas adicionadas à viga base constituinte do sistema original. Contudo, há que se considerar, em todo caso, como mencionado anteriormente, a adição de massa ao sistema.

Por fim, é avaliada a influência do comprimento do tratamento viscoelástico aplicado sobre a barra 4 do mecanismo. Destaca-se que a distribuição do tratamento viscoelástico é sempre simétrica com respeito à posição central da barra 4.

Os comprimentos totais considerados para o tratamento foram de 100, 200, 300 e 400 mm. Também foi considerada a situação em que toda a barra admite tratamento, para quando seu comprimento vale 500 mm. Para todos os casos foi adotada uma espessura da camada viscoelástica igual a 0,5 mm, uma temperatura de operação de 27°C, e velocidade de acionamento de 400 RPM.

Os resultados obtidos mediante simulação numérica são apresentados nas Figs 6.37 e 6.38. Como se pode inferir das mesmas, por análise seja do deslocamento $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_P|_{t=0}$, seja da componente de \mathbf{q}_r^4 associada ao deslocamento transversal do ponto de interesse analisado, maiores comprimentos do tratamento superficial restrito claramente induzem maiores níveis de amortecimento nas respostas calculadas. Este fato justifica-se pela localização do tratamento realizado, assim como pelas formas associadas aos autovetores do sistema.

Entretanto, como ocorre para a análise relacionada à espessura h_v , aqui também não é vantajosa a utilização de um valor demasiado elevado para $L_v = L_r$, tendo em vista que a partir de um determinado comprimento crítico do tratamento, nenhum ganho significativo é obtido.

Para a configuração geométrica e operacional contemplada, a partir de $L_v = L_r \geq 300$ mm, como é perceptível nas figuras apresentadas, em especial nas Fig. 6.37, que mostra as componentes do deslocamento $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_P|_{t=0}$ expressas no referencial inercial global adotado, pouco se ganha para quando o regime já é permanente. Apenas em aplicações críticas do sistema, que necessitem de amortecimento drástico durante o transiente, pode ser justificado um tratamento que contemple todo o comprimento daquela barra 4. De outra forma, o incremento de inércia pode eventualmente prejudicar a operação do conjunto em velocidades de operação mais elevadas, sem aumento significativo de amortecimento para amplitu-

des relacionadas àquelas frequências associadas à flexibilidade dos corpos do sistema, como já enfatizado anteriormente.

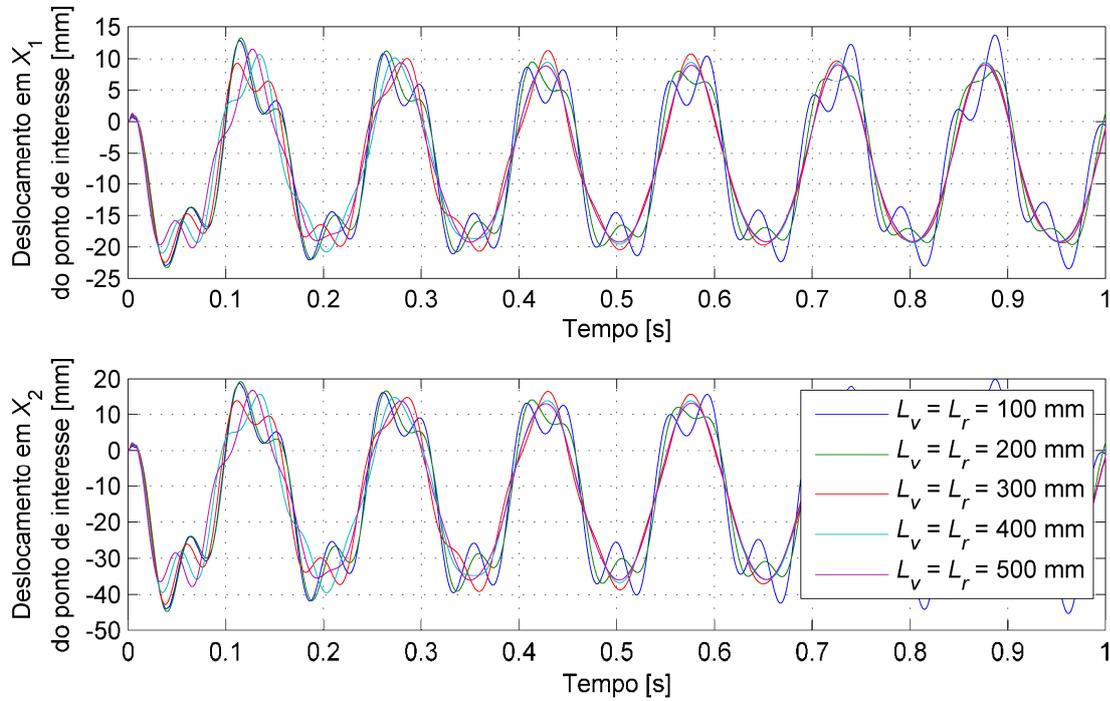


Figura 6.37 - Deslocamentos do ponto de interesse nas direções de X_1 e de X_2 para valores selecionados do comprimento do tratamento superficial restrito.

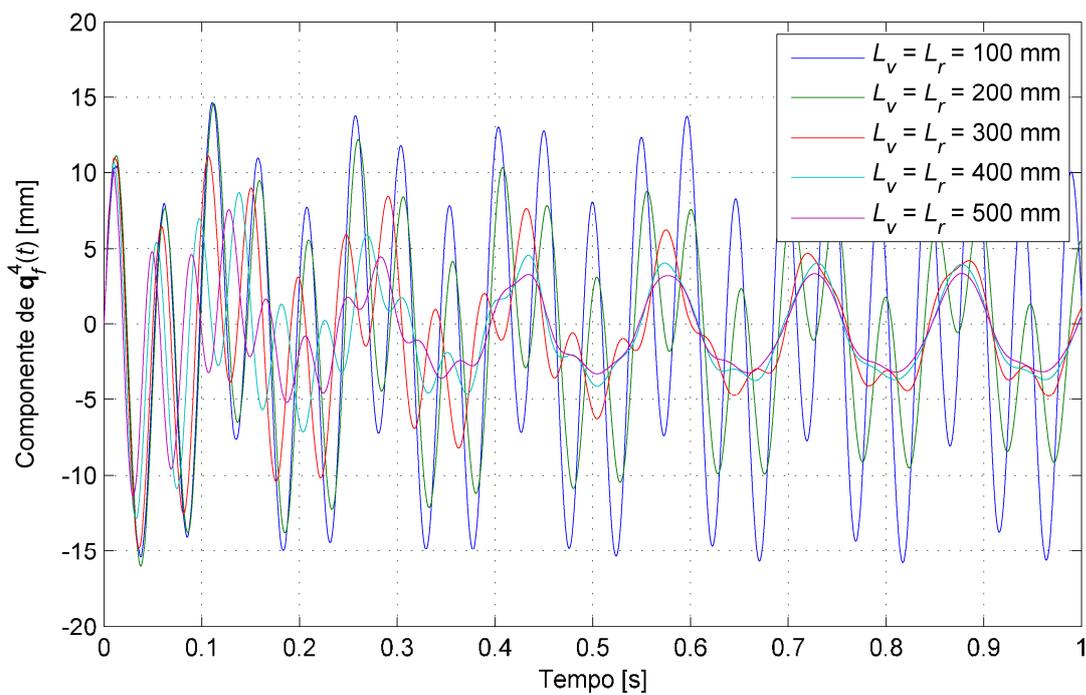


Figura 6.38 - Grau de liberdade associado ao deslocamento transversal do ponto de interesse para valores selecionados do comprimento do tratamento superficial restrito.

CAPÍTULO VII

Aplicação Numérica: Controle Passivo de Vibrações de Painéis Flexíveis de Satélites Artificiais

7.1 Introdução

Desde o início das atividades relacionadas a espaço, apêndices flexíveis como antenas e painéis solares, usados para transmissão de dados e suprimento de energia, respectivamente, têm sido incorporados em espaçonaves. Atualmente, estes elementos estão comumente associados a vibrações causadas por manobras de correção de atitude, por exemplo. Como sistemas espaciais geralmente experimentam baixos níveis de amortecimento, movimentos de grande amplitude podem se desenvolver, e respostas em regime permanente podem demorar para se estabelecer. Consequentemente, objetivos operacionais estabelecidos a priori podem ser comprometidos. Além disso, o acoplamento entre movimentos de corpo rígido e devidos à flexibilidade pode introduzir perturbações dinâmicas na orientação de uma determinada espaçonave. Com isso, vários estudos têm lidado com os tópicos de manobras, modelagem dinâmica, e controle de atitude e de vibrações em sistemas espaciais flexíveis.

Para realização do referido controle, técnicas ativas têm sido na maioria dos casos empregadas. Bang e Oh (2004) consideraram controle preditivo; neste caso, uma trajetória de referência é estabelecida, e então uma lei de controle por retroalimentação é projetada de maneira que as variáveis de saída sejam obrigadas a seguir movimentos prescritos. Controle por modos deslizantes (*sliding mode control*, no inglês), que é uma técnica reconhecida como eficiente e aplicável a várias categorias de sistemas não lineares sujeitos a incertezas e distúrbios externos, foi adotado por Bang, Ha e Kim (2005) para uma manobra rotacional ao longo de três eixos realizada por uma espaçonave altamente flexível. Zheng, Banks e Alleyne (2005) fizeram uso de controle ativo ótimo baseado em Regulador Quadrático Linear (*Linear Quadratic Regulator*, LQR, no inglês) para lidar com os problemas de vibração e de

atitude relacionados a uma espaçonave flexível que é estabilizada por volantes de inércia. A influência de flexibilidade no desempenho de um sistema de controle de atitude aplicado a um satélite rígido-flexível, para o qual os parâmetros de flexibilidade foram estimados por um filtro de Kalman no contexto do Regulador Linear Quadrático Gaussiano (*Linear Quadratic Gaussian Regulator*, LQG, no inglês), foi investigada por Vargas e Souza (2005). Uma lei de controle ótimo também foi avaliada por Cui e Xu (2010) para o controle de atitude e de vibrações de uma espaçonave flexível dotada de um corpo central rígido e apêndices flexíveis. Maganti e Singh (2007) propuseram uma metodologia de projeto de uma lei de controle adaptativa simples para estabilização de manobras rotacionais e de modos elásticos de uma espaçonave flexível. Hu, Shi e Gao (2007) aplicaram uma estratégia de controle que integra formatação de entrada (*input shaping*, no inglês) e a técnica de controle por retroalimentação de saída para gerenciar vibrações em uma espaçonave flexível sujeita a manobras de correção de atitude. Visando tanto características dinâmicas quanto estáticas favoráveis, um esquema de controle híbrido que combina os métodos de controle a estrutura variável, e de controle adaptativo inteligente, foi considerado por Li, Wang e Li (2004).

Embora sistemas de controle ativo sejam largamente utilizados na literatura para os controles de vibração e de atitude em sistemas espaciais, os mesmos estão comumente relacionados a problemas de estabilidade e de robustez contra falhas. Desta forma, o controle passivo pode se mostrar uma alternativa interessante, por não estar associado à consumação de energia externa, e ser inerentemente estável, como discutido ao longo do Capítulo I.

Neste Capítulo é apresentada uma segunda aplicação numérica, a qual trata de satélites artificiais com apêndices flexíveis. Com base no exposto acima, aplica-se ao mesmo amortecimento viscoelástico com a finalidade de controle de vibrações. Primeiramente, uma breve descrição do sistema será realizada. Na sequência, a modelagem matemática do mesmo será apresentada, com base no uso do Método dos Modos Assumidos (MMA) para expansão de campos de deslocamentos flexíveis associados à estrutura analisada, e das equações de Lagrange para estabelecimento das leis que regem a dinâmica do sistema. Finalmente serão apresentados e discutidos os resultados obtidos por simulações numéricas.

7.2 Descrição do Satélite Artificial e Hipóteses de Modelagem

O sistema a ser analisado é esquematicamente mostrado na Fig. 7.1, que identifica alguns de seus componentes estruturais. Como pode ser visualizado, o satélite artificial consi-

derado dispõe de um corpo central, considerado rígido, ao qual dois painéis flexíveis, com geometria do tipo sanduíche, são ligados, admitindo-se engastamento perfeito. Os referidos painéis tratam-se, essencialmente, de vigas sanduíche, como aquela considerada no Capítulo IV; os mesmos dispõem de duas faces externas constituídas de materiais lineares elásticos – faces relativas à viga base (b) e à camada restringente (r) –, e de um núcleo de material viscoelástico (v). O sistema de controle de atitude da espaçonave é formado por uma roda de reação, de forma que quando um torque é aplicado a este atuador por intermédio de um motor elétrico, o satélite é submetido a um movimento rotacional de maneira tal que a quantidade de movimento angular total do sistema seja conservada.

Como pode ser constatado por inspeção da Fig. 7.1, três sistemas de referência distintos são utilizados na sequência para descrição da cinemática do sistema em análise. São eles: $OXYZ$, que se trata de um sistema global, para o qual se assume posição e orientação fixas; e $Gx'y'z'$ e $Axyz$, ambos rotativos, e rigidamente ligados ao corpo do satélite.

Quanto às hipóteses admitidas para modelagem matemática do sistema, estabelece-se que:

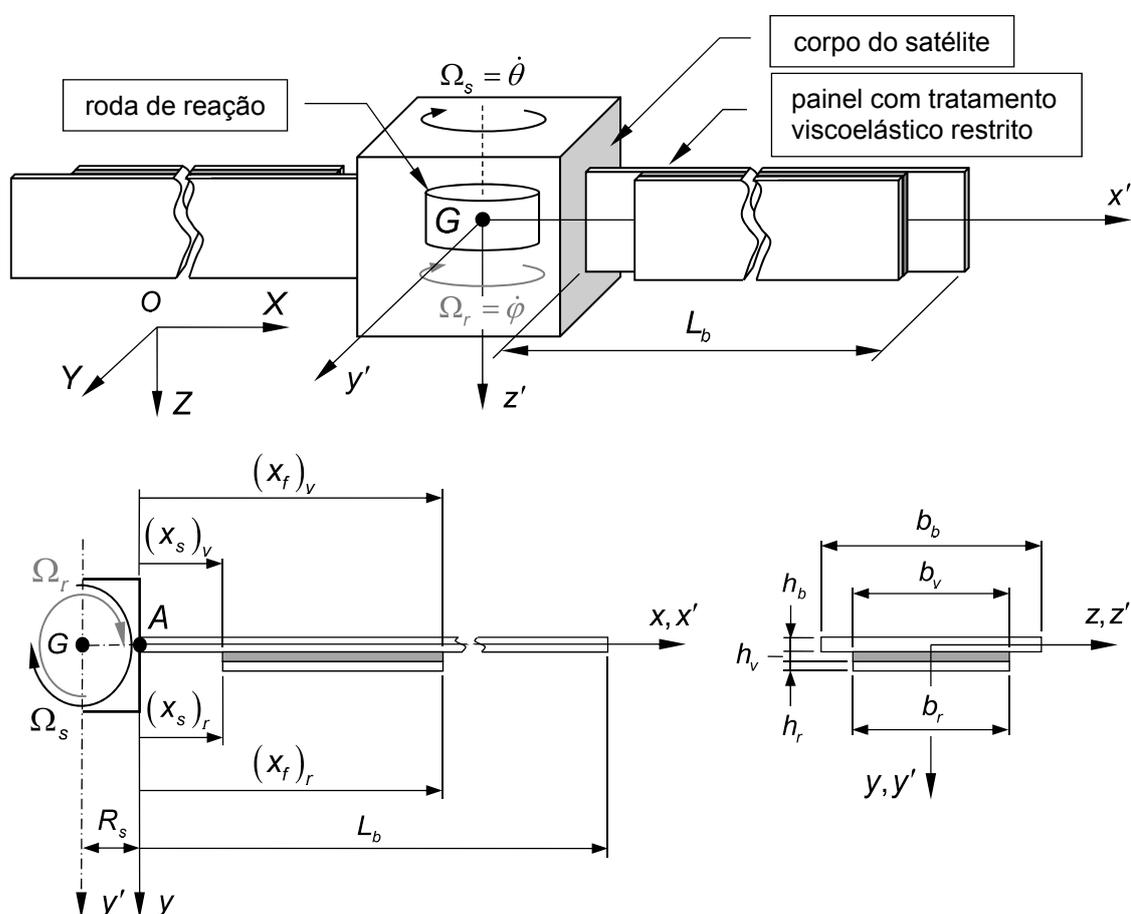


Figura 7.1 - Satélite artificial considerado e entidades geométricas relevantes.

- a) as manobras de interesse do sistema constituem rotações em torno do eixo z' , cuja origem é considerada como apresentando uma posição fixa no espaço – em outras palavras, movimento translacional é desconsiderado;
- b) para o corpo do satélite e a roda de reação são assumidos comportamentos de corpo rígido;
- c) os dois painéis do satélite são idênticos, e as deflexões devidas à flexão estão confinadas à direção y .

Adicionalmente, são assumidas ainda as hipóteses consideradas no Capítulo IV, Subseção 4.2.1, e os seguintes parâmetros são definidos para o sistema: $\Omega_s = \dot{\theta}$ [rad/s] é a velocidade angular absoluta associada ao corpo do satélite; $\Omega_r = \dot{\phi}$ [rad/s] é a velocidade angular associada à roda de reação, esta expressa com respeito ao corpo do satélite; e J_s e J_r são, respetivamente, os momentos de inércia de massa relacionados ao corpo do satélite e à roda de reação em torno do eixo z' , ambos expressos em [kg.m²].

7.3 Modelagem Matemática do Satélite

Na sequência, as equações não lineares que regem o movimento do sistema aeroespacial mostrado na Fig. 7.1 serão desenvolvidas pela utilização das equações de Lagrange em conjunto com o MMA para expansão de campos de deslocamentos devidos à flexibilidade. Por este motivo, são apresentados, a seguir, a cinemática associada aos painéis do satélite, a energia cinética do sistema, e os trabalhos virtuais realizados pelas tensões e pelos esforços externos.

Esclarece-se que o MMA é agora utilizado por propiciar um modelo com relativamente poucos graus de liberdade, comparativamente a um equivalente obtido através do MEF. Com isso, apresenta-se uma maneira alternativa para modelagem de sistemas multicorpos flexíveis, sem a utilização de equações de restrição. Menciona-se também que, por estarem frequentemente associados a técnicas de controle ativo, modelos de sistemas espaciais flexíveis são comumente obtidos através do método agora considerado.

Ressalta-se que para o desenvolvimento a seguir é considerado que a origem do sistema referencial $OXYZ$ ocupa a mesma posição assumida pela origem do referencial $Gx'y'z'$.

7.3.1 Cinemática dos Painéis do Satélite Artificial Considerado

Considerando a ilustração esquemática realizada para a cinemática do sistema, mostrada na Fig. 7.2, assim como os campos de deslocamento associados à teoria de viga san-

duíche utilizada para descrever o comportamento dos painéis flexíveis do sistema, como apresentados no Capítulo IV, Subsecção 4.2.1, o seguinte vetor posição pode ser estabelecido no sistema $Gx'y'z'$ para um ponto P arbitrário pertencente à i -ésima camada ($i = b, v, r$) de um dos painéis do satélite:

$${}^{Gx'y'z'}(\mathbf{r}_P)_i = \begin{bmatrix} R_s + x + u_i(x,t) + (y - y_i)\alpha_i(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Faz-se a ressalva de que os campos de deslocamentos rotacionais linearizados θ_i considerados no Capítulo IV, Subsecção 4.2.1, são aqui denotados por α_i , tendo em visto que neste Capítulo o símbolo θ é utilizado para designar a orientação do corpo do satélite analisado com respeito àquele referencial inercial $GXYZ$.

Como a matriz de transformação entre os referenciais $Gx'y'z'$ e $GXYZ$ pode ser escrita sob a forma:

$${}^{GXYZ}(\mathbf{T})^{Gx'y'z'} = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\text{sen} \theta(t) \\ \text{sen} \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

o seguinte vetor posição pode ser estabelecido no referencial $GXYZ$ para o ponto P :

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_P)_i &= {}^{GXYZ}(\mathbf{r}_P)_i = {}^{GXYZ}(\mathbf{T})^{Gx'y'z'} {}^{Gx'y'z'}(\mathbf{r}_P)_i \\ &= \begin{bmatrix} [R_s + x + u_i(x,t) + (y - y_i)\alpha_i(x,t)] \cos \theta(t) - v(x,t) \text{sen} \theta(t) \\ [R_s + x + u_i(x,t) + (y - y_i)\alpha_i(x,t)] \text{sen} \theta(t) + v(x,t) \cos \theta(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

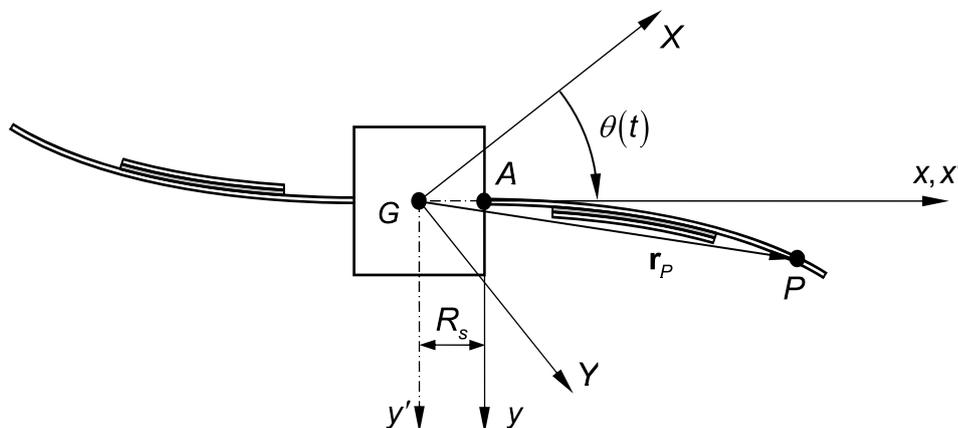


Figura 7.2 - Cinemática do sistema aeroespacial analisado.

Derivando a Eq. (7.3) com respeito ao tempo, o vetor velocidade do ponto P pertencente à i -ésima camada da viga resulta como dado a seguir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_P)_i &= (\dot{\mathbf{r}}_P)_i \\ &= \begin{bmatrix} \dot{R}_x \cos \theta(t) - R_x \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) - \dot{v}(x,t) \sin \theta(t) - v(x,t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \\ \dot{R}_x \sin \theta(t) + R_x \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + \dot{v}(x,t) \cos \theta(t) - v(x,t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

onde pontos sobrescritos são usados para denotar diferenciação com respeito a t , e:

$$R_x = R_s + x + u_i(x,t) + (y - y_i) \alpha_i(x,t), \quad \dot{R}_x = \dot{u}_i(x,t) + (y - y_i) \dot{\alpha}_i(x,t). \quad (7.5)$$

Da Eq. (7.4) constata-se que a magnitude de $(\mathbf{v}_P)_i$, denotada por $(v_P)_i$, vale:

$$(v_P)_i = |(\mathbf{v}_P)_i| = \sqrt{\dot{R}_x^2 + \dot{v}^2 + (R_x^2 + v^2) \dot{\theta}^2 - 2v \dot{R}_x \dot{\theta} + 2R_x \dot{v} \dot{\theta}}, \quad (7.6)$$

onde dependências são omitidas para maior concisão e clareza.

Considerando as expansões adotadas pelo MMA para os campos de deslocamentos relevantes do problema, conforme apresentadas no Capítulo IV, Subseção 4.2.1, pode-se reescrever a Eq. (7.6) sob a forma:

$$\begin{aligned} (v_P)_i &= \left(\dot{\mathbf{r}}^T \left[\Psi_{ui}^T \Psi_{ui} + 2(y - y_i) \Psi_{ui}^T \Psi_{ai} + (y - y_i)^2 \Psi_{ai}^T \Psi_{ai} + \Psi_v^T \Psi_v \right] \dot{\mathbf{r}} \right. \\ &\quad + \left\{ (R_s + x)^2 + 2(R_s + x) \mathbf{r}^T \left[\Psi_{ui}^T + (y - y_i) \Psi_{ai}^T \right] \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{r}^T \left[\Psi_{ui}^T \Psi_{ui} + 2(y - y_i) \Psi_{ui}^T \Psi_{ai} + (y - y_i)^2 \Psi_{ai}^T \Psi_{ai} + \Psi_v^T \Psi_v \right] \mathbf{r} \right\} \dot{\theta}^2 \\ &\quad \left. - 2\dot{\theta} \mathbf{r}^T \Psi_v^T \left[\Psi_{ui} + (y - y_i) \Psi_{ai} \right] \dot{\mathbf{r}} + 2\dot{\theta} \dot{\mathbf{r}}^T \Psi_v^T \left\{ R_s + x + \left[\Psi_{ui} + (y - y_i) \Psi_{ai} \right] \mathbf{r} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.3.2 Expressão para a Energia Cinética do Sistema

Considerando a Eq. (7.7), a energia cinética associada a cada uma das camadas do painel sanduíche pode ser expressa segundo:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i (v_P)_i^2 dV_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T (\mathbf{M}_r)_i \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \left[(J_p)_i + \mathbf{r}^T (\tilde{\mathbf{M}}_u)_i + \mathbf{r}^T (\mathbf{M}_r)_i \mathbf{r} \right] \dot{\theta}^2 \\ &\quad + \dot{\theta} \dot{\mathbf{r}}^T (\tilde{\mathbf{M}}_v)_i + \dot{\theta} \left[\dot{\mathbf{r}}^T (\mathbf{M}_{vu})_i \mathbf{r} - \mathbf{r}^T (\mathbf{M}_{vu})_i \dot{\mathbf{r}} \right], \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde V_i e ρ_i denotam, respectivamente, o volume e a massa específica da i -ésima camada do painel do satélite, e:

$$(\mathbf{M}_{rr})_i = \int_{(x_s)_i}^{(x_f)_i} \rho_i \left\{ A_i \left[\Psi_{ui}^T(x) \Psi_{ui}(x) + \Psi_v^T(x) \Psi_v(x) \right] + I_i \Psi_{ai}^T(x) \Psi_{ai}(x) \right\} dx; \quad (7.9)$$

$$A_i = \int_{-\frac{1}{2}b_i}^{\frac{1}{2}b_i} \int_{y_i - \frac{1}{2}h_i}^{y_i + \frac{1}{2}h_i} dy dz; \quad (7.10)$$

$$I_i = \int_{-\frac{1}{2}b_i}^{\frac{1}{2}b_i} \int_{y_i - \frac{1}{2}h_i}^{y_i + \frac{1}{2}h_i} (y - y_i)^2 dy dz; \quad (7.11)$$

$$(J_p)_i = \int_{(x_s)_i}^{(x_f)_i} \rho_i A_i (R_s + x)^2 dx; \quad (7.12)$$

$$(\tilde{\mathbf{M}}_u)_i = \int_{(x_s)_i}^{(x_f)_i} 2\rho_i A_i (R_s + x) \Psi_{ui}^T(x) dx; \quad (7.13)$$

$$(\tilde{\mathbf{M}}_v)_i = \int_{(x_s)_i}^{(x_f)_i} \rho_i A_i (R_s + x) \Psi_v^T(x) dx; \quad (7.14)$$

$$(\mathbf{M}_{vu})_i = \int_{(x_s)_i}^{(x_f)_i} \rho_i A_i \Psi_v^T(x) \Psi_{ui}(x) dx. \quad (7.15)$$

Faz-se aqui a observação de que $(x_s)_b = 0$ e $(x_f)_b = L_b$.

A energia cinética de um dos painéis do satélite é dada por:

$$T_p = T_b + T_v + T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{rr} \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} (J_p + \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{M}}_u + \mathbf{r}^T \mathbf{M}_{rr} \mathbf{r}) \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} \dot{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{M}}_v + \dot{\theta} (\dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{vu} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{M}_{vu} \dot{\mathbf{r}}), \quad (7.16)$$

onde:

$$\mathbf{M}_{rr} = (\mathbf{M}_{rr})_b + (\mathbf{M}_{rr})_v + (\mathbf{M}_{rr})_r; \quad (7.17)$$

$$J_p = (J_p)_b + (J_p)_v + (J_p)_r; \quad (7.18)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_u = (\tilde{\mathbf{M}}_u)_b + (\tilde{\mathbf{M}}_u)_v + (\tilde{\mathbf{M}}_u)_r; \quad (7.19)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_v = (\tilde{\mathbf{M}}_v)_b + (\tilde{\mathbf{M}}_v)_v + (\tilde{\mathbf{M}}_v)_r; \quad (7.20)$$

$$\mathbf{M}_{vu} = (\mathbf{M}_{vu})_b + (\mathbf{M}_{vu})_v + (\mathbf{M}_{vu})_r. \quad (7.21)$$

A energia cinética associada a todo o satélite pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} T = T_s + T_r + 2T_p = & \frac{1}{2} J_s \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_r (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{rr} \dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{J}_p + \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{M}}_u + \mathbf{r}^T \mathbf{M}_{rr} \mathbf{r}) \dot{\theta}^2 \\ & + 2\dot{\theta} \dot{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{M}}_v + 2\dot{\theta} (\dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{M}_{vu} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{M}_{vu} \dot{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (7.22)$$

onde T_s e T_r são as parcelas de energia cinética associadas aos movimentos de rotação relacionados ao corpo do satélite e a sua roda de reação, respectivamente.

7.3.3 Trabalhos Virtuais Realizados pelas Tensões e pelos Esforços Externos

O trabalho virtual realizado pelas tensões que se desenvolvem no material de cada camada constituinte dos painéis do satélite é dado por:

$$\begin{aligned} (\delta W_s)_i = & - \int_{V_i} \sigma_{xxi} \delta \varepsilon_{xxi} dV_i - \int_{V_i} \tau_{xyi} \delta \gamma_{xyi} dV_i \\ = & \left[- \left(1 + c_i \frac{E_{\infty i} - E_{0i}}{E_{0i}} \right) \mathbf{K}_i \mathbf{r} - c_i \frac{E_{\infty i}}{E_{0i}} \mathbf{K}_i \sum_{k=1}^{N_a} A_{k+1}(\alpha_i) \bar{\mathbf{r}}(t - k\Delta t) \right] \delta \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

onde $c_v = (\tau_v)^{\alpha_v} [(\Delta t)^{\alpha_v} + (\tau_v)^{\alpha_v}]^{-1}$, $c_b = c_r = 0$, $\bar{\mathbf{r}}$ é um vetor de variáveis internas associadas ao modelo derivativo fracionário considerado para modelagem do comportamento viscoelástico, e:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i = & \int_{(x_s)_i}^{(x_f)_i} E_{0i} \left[A_i \boldsymbol{\psi}'_{ui}{}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\psi}'_{ui}(\mathbf{x}) + I_i \boldsymbol{\psi}'_{ai}{}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\psi}'_{ai}(\mathbf{x}) \right] dx \\ & + \int_{(x_s)_i}^{(x_f)_i} G_{0i} k_i A_i \left[\boldsymbol{\psi}'_v(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\psi}_{ai}(\mathbf{x}) \right]^T \left[\boldsymbol{\psi}'_v(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\psi}_{ai}(\mathbf{x}) \right] dx. \end{aligned} \quad (7.24)$$

A partir da Eq. (7.23), o trabalho virtual total realizado pelas tensões associadas a um único painel do satélite pode ser computado. Obtém-se, desta forma:

$$\begin{aligned}
(\delta W_s)_p &= (\delta W_s)_b + (\delta W_s)_v + (\delta W_s)_r \\
&= \left[-(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}_v) \mathbf{r} - c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{r}}(t - k\Delta t) \right]^T \delta \mathbf{r},
\end{aligned} \tag{7.25}$$

onde:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_r; \quad \tilde{\mathbf{K}}_v = c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \mathbf{K}_v. \tag{7.26}$$

O trabalho realizado pelas tensões que surgem em todo o sistema torna-se:

$$\delta W_s = 2(\delta W_s)_p = \left[-2(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}_v) \mathbf{r} - 2c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{r}}(t - k\Delta t) \right]^T \delta \mathbf{r}. \tag{7.27}$$

Quanto aos esforços externos, seu trabalho virtual pode ser representado de forma genérica pela expressão seguinte:

$$\delta W_e = 2\mathbf{Q}_e^T(t) \delta \mathbf{r} + \tau_\theta(t) \delta \theta + \tau_\varphi(t) \delta \varphi, \tag{7.28}$$

onde $\mathbf{Q}_e(t)$ é o vetor de carregamentos generalizados aplicado a um dos painéis do satélite, e $\tau_\theta(t)$ e $\tau_\varphi(t)$ são os torques aplicados ao corpo do satélite e à roda de reação, respectivamente.

7.3.4 Equações de Equilíbrio Dinâmico do Sistema

Pela utilização das equações de Lagrange, podem ser estabelecidas as equações diferenciais que governam o movimento do sistema. Para este efeito, adotam-se como coordenadas generalizadas do problema $\mathbf{r}(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$, e as equações de Lagrange a elas associadas escrevem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = \mathbf{Q}_r = \left[\frac{\partial (\delta W_s + \delta W_e)}{\partial (\delta \mathbf{r})} \right]^T; \tag{7.29}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \mathbf{Q}_\theta = \frac{\partial (\delta W_s + \delta W_e)}{\partial (\delta \theta)}; \tag{7.30}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \mathbf{Q}_\varphi = \frac{\partial (\delta W_s + \delta W_e)}{\partial (\delta \varphi)}. \quad (7.31)$$

Substituindo as expressões da energia cinética e dos trabalhos virtuais associados às tensões e aos esforços externos ao sistema, dados nas Eqs. (7.22), (7.27) e (7.28), nas Eqs. (7.29), (7.30) e (7.31), obtêm-se:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{M}_{rr} \ddot{\mathbf{r}} + 2 \left[\tilde{\mathbf{M}}_v + (\mathbf{M}_{vu} - \mathbf{M}_{vu}^T) \mathbf{r} \right] \ddot{\theta} - (\tilde{\mathbf{M}}_u + 2\mathbf{M}_{rr} \mathbf{r}) \dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta} (\mathbf{M}_{vu} - \mathbf{M}_{vu}^T) \dot{\mathbf{r}} + 2(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}_v) \mathbf{r} \\ = 2\mathbf{Q}_e - 2c_v E_{\infty v} / E_{0v} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} \mathbf{A}_{k+1} (\alpha_v) \bar{\mathbf{r}} (t - k\Delta t); \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} (J_s + J_r + 2J_p + 2\mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{M}}_u + 2\mathbf{r}^T \mathbf{M}_{rr} \mathbf{r}) \ddot{\theta} + J_r \ddot{\varphi} + 2\mathbf{r}^T (\tilde{\mathbf{M}}_u + 2\mathbf{M}_{rr} \mathbf{r}) \dot{\theta} \\ + 2 \left[\tilde{\mathbf{M}}_v^T + \mathbf{r}^T (\mathbf{M}_{vu}^T - \mathbf{M}_{vu}) \right] \ddot{\mathbf{r}} = \tau_\theta; \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$J_r \ddot{\theta} + J_r \ddot{\varphi} = \tau_\varphi. \quad (7.34)$$

7.3.5 Funções Admissíveis Associadas ao Método dos Modos Assumidos

Tendo em vista o procedimento de modelagem adotado, que faz uso do MMA, deve-se escolher um conjunto de funções admissíveis para expansão dos campos de deslocamentos induzidos pela flexibilidade do sistema.

Funções admissíveis adotadas para representar o comportamento de vigas sanduíche como as consideradas neste trabalho podem ser encontradas na literatura. Citam-se, a título de exemplo, os trabalhos de Fasana e Marchesiello (2001), Cai, Zheng e Liu (2004), Zheng, Cai e Tan (2004) e Zheng, Tan e Cai (2006). No primeiro, funções polinomiais simples são consideradas; suas formas alteram-se de acordo com as condições de contorno do problema. Os outros estudos citados, por outro lado, adotam autofunções de vigas uniformes sujeitas a diferentes condições de contorno para expansão dos campos de deslocamentos independentes.

Aqui, este último procedimento é considerado: autofunções associadas a vigas uniformes sujeitas às condições de contorno livre-livre e engastada-livre são admitidas para expansão dos deslocamentos longitudinais associados à camada restringente e à viga base do painel, respectivamente. Destaca-se que a escolha das autofunções anteriores é justificada a partir de uma análise crítica do sistema: assume-se que a camada restringente esteja conectada à viga base apenas por meio do núcleo viscoelástico, estando, desta forma, livre para se mover (CAI, ZHENG, LIU, 2004; ZHENG, CAI, TAN, 2004; ZHENG, TAN, CAI, 2006).

Com respeito à aproximação adotada para o campo de deslocamento transversal do conjunto, não são usadas as autofunções tradicionais associadas a vigas uniformes engastadas-livres, já que os painéis sanduíche do satélite considerado são submetidos à rotação. Embora autofunções de vigas uniformes não rotativas sejam largamente utilizadas para prever respostas oriundas de movimentos rotativos, Kwak (1998) apresenta em seu trabalho um conjunto alternativo de autofunções relacionadas a uma viga uniforme rotativa que permite melhoria na estabilidade numérica exibida pelo MMA, assim como melhor taxa de convergência da expansão. Estes argumentos justificam a utilização das autofunções propostas pelo autor, que são expressas segundo:

$$[\bar{\psi}_{ub}(x)]_k = \text{sen}\left[\frac{1}{2}(2k-1)\pi x L_b^{-1}\right], \quad k=1, \dots, n_b, \quad 0 \leq x \leq L_b; \quad (7.35)$$

$$[\bar{\psi}_{ur}(x)]_k = \cos\left\{(k-1)\pi x \left[(x_f)_r - (x_s)_r\right]^{-1}\right\}, \quad k=1, \dots, n_r, \quad (x_s)_r \leq x \leq (x_f)_r; \quad (7.36)$$

$$[\bar{\psi}_v(x)]_k = \sigma_k \left[\text{sen}(\beta_k x) + f_k \text{senh}(\beta_k x) - (\beta_k x)(1 + f_k) \right], \quad k=1, \dots, n_v, \quad 0 \leq x \leq L_b. \quad (7.37)$$

As Eqs. (7.35), (7.36) e (7.37) representam, respectivamente, as autofunções longitudinais de uma viga uniforme engastada-livre, as autofunções longitudinais de uma viga uniforme livre-livre, e as autofunções transversais de uma viga uniforme rotativa. Na Eq. (7.37), β_k é a k -ésima frequência natural da viga uniforme rotativa, dada pela resolução da equação transcendental:

$$\tan(\beta_k L_b) = \tanh(\beta_k L_b), \quad k=1, \dots, n_v, \quad (7.38)$$

enquanto σ_k e f_k são parâmetros dados pelas seguintes equações:

$$f_k = \text{sen}(\beta_k L_b) \text{senh}^{-1}(\beta_k L_b), \quad k=1, \dots, n_v; \quad (7.39)$$

$$\sigma_k = \left[2 \text{sen}(\beta_k L_b) - (\beta_k L_b)(1 + f_k) \right]^{-1}, \quad k=1, \dots, n_v. \quad (7.40)$$

Cabe o comentário de que as autofunções obtidas por Kwak (1998) resultam após linearização das equações do movimento associadas ao problema por ele estudado. Desta forma, o autor consegue relacionar a velocidade de rotação da viga analisada ao campo de

deslocamentos transversais por ela experimentados, por exemplo. Por este motivo, tal velocidade não aparece explicitamente nas expressões apresentadas anteriormente.

A título de ilustração, as funções admissíveis consideradas são mostradas nas Figs. 7.3 a 7.5 para $k = 1, \dots, 5$.

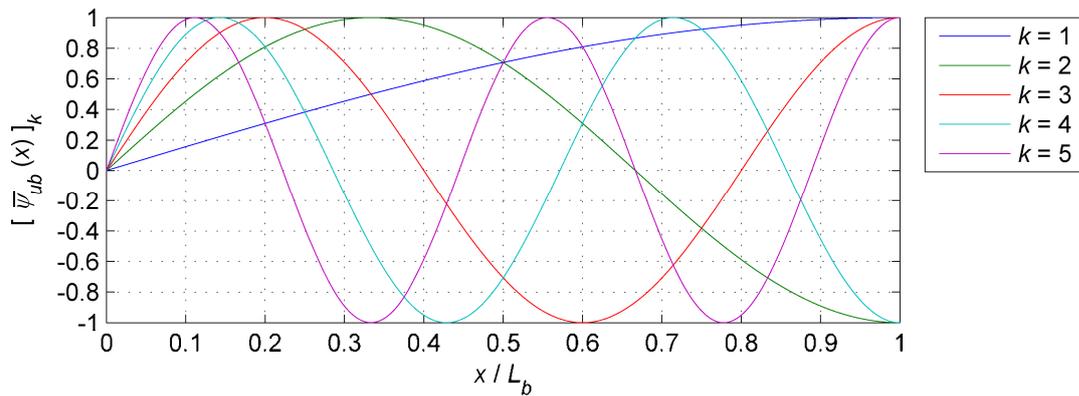


Figura 7.3 - Funções admissíveis adotadas para expansão de $u_b(x,t)$.

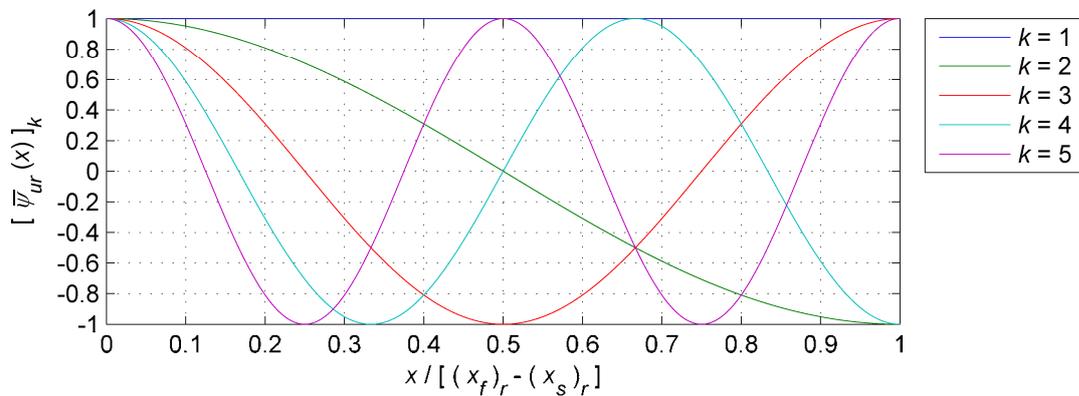


Figura 7.4 - Funções admissíveis adotadas para expansão de $u_r(x,t)$.

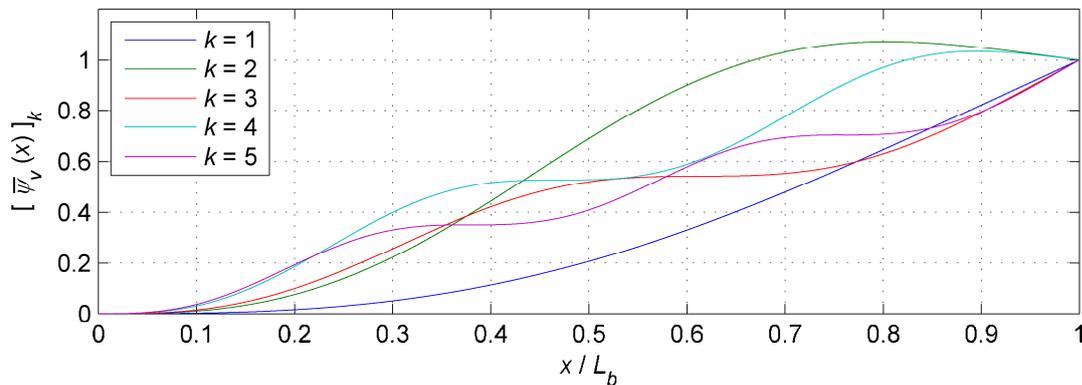


Figura 7.5 - Funções admissíveis adotadas para expansão de $v(x,t)$.

7.4 Simulações Numéricas

A partir da implementação numérico-computacional do modelo matemático apresentado na Seção anterior, simulações numéricas foram conduzidas.

A maior parte dos valores numéricos associados ao sistema é mostrada na Tab. 7.1. Além daqueles, são dados o momento de inércia de massa do corpo do satélite, $J_s = 720 \text{ kg.m}^2$, o momento de inércia de massa da roda de reação, $J_r = 1 \text{ kg.m}^2$, e o parâmetro geométrico $R_s = 0,3 \text{ m}$.

Os dados associados ao material viscoelástico 3M[®] ISD112[™], considerado para o núcleo dos painéis sanduíche, podem ser visualizados na Tab. 3.2, Capítulo III. Ressalta-se que os parâmetros apresentados são dados em função da temperatura, e foram obtidos a partir daquele procedimento de identificação detalhado na Seção 3.7.

Uma manobra destinada à correção da orientação angular do satélite é considerada. Nesta, o satélite parte de uma posição inicial arbitrária, a partir do repouso, até que atinja uma orientação $\theta_d = 60^\circ$ num intervalo de tempo de aproximadamente 30 s. Com este objetivo, é aplicado um torque que é retroalimentado à roda de reação do satélite. Este último é dado por uma lei proporcional-derivativa, baseada na seguinte função erro:

$$\mathbf{e}(t) = \theta(t) - \theta_d, \quad (7.41)$$

de forma que:

$$\tau_\varphi = K_p \mathbf{e} + K_D \dot{\mathbf{e}} = K_p (\theta - \theta_d) + K_D \dot{\theta}, \quad (7.42)$$

onde K_p e K_D são os ganhos relativos às parcelas proporcional e derivativa da lei assumida para o torque, respectivamente. Fazendo uso da Eq. (7.42), a Eq. (7.34) torna-se:

$$J_r \ddot{\theta} + J_r \dot{\varphi} = K_p (\theta - \theta_d) + K_D \dot{\theta}. \quad (7.43)$$

Os valores numéricos admitidos para K_p e K_D foram selecionados iguais a 40 N.m/rad e 345 N.m.s/rad, respectivamente, através de metodologia do tipo tentativa-e-erro. Os resultados a serem apresentados confirmarão a adequação das escolhas.

Tabela 7.1 - Valores considerados para simulação do satélite.

CARACTERÍSTICAS	VIGA BASE	CAMADA VISCOELÁSTICA	CAMADA RESTRINGENTE
$(x_s)_i$ [m]	0	0	0
$(x_f)_i$ [m] ⁽¹⁾	1,500	Vários valores ⁽¹⁾	Vários valores ⁽¹⁾
b_i [m]	0,300	0,300	0,300
h_i [m] ⁽¹⁾	0,005	Vários valores ⁽¹⁾	Vários valores ⁽¹⁾
E_i [GPa]	210	Veja a Tab. 3.2	210
ν_i	0,3	0,5	0,3
k_i	–	5/6	–
ρ_i [kg/m ³]	7800	1600	7800

⁽¹⁾ Vários valores foram considerados para estes parâmetros visando avaliar influências paramétricas.

Ainda, devido à baixa frequência de oscilação associada ao sistema, o período admitido para integração temporal foi de 100 s. A integração numérica propriamente dita foi realizada com a utilização de um esquema de integração composto, proposto por Bathe e Baig (2005); destaca-se que o mesmo foi considerado no Capítulo V desta Dissertação em conjunto com uma metodologia para particionamento do vetor de coordenadas generalizadas. No caso agora apreciado, um passo de tempo de $\Delta t = 0,001$ s foi selecionado, e o valor de 0,5 foi assumido para γ .

Quanto ao número de funções admissíveis, cinquenta foram consideradas para expansão de $v(x,t)$, enquanto vinte foram utilizadas para $u_b(x,t)$ e $u_r(x,t)$. Ressalta-se que estes números poderiam ser menores, como verificado por uma análise de convergência realizada previamente às simulações. Contudo, maior acurácia na estimação das respostas foi priorizada, tendo em vista o longo período de observação admitido.

Com respeito aos carregamentos externos, adota-se $\mathbf{Q}_e = \mathbf{0}$ e $\tau_\theta = 0$ para todos os instantes de tempo.

Menciona-se também que, como se pode perceber por inspeção da Tab. 7.1, várias simulações são consideradas, uma vez que vários valores são admitidos para os parâmetros geométricos h_v , h_r e $(x_f)_v = (x_f)_r$. Esta abordagem, como aquela adotada no Capítulo VI quando da investigação do sistema ora considerado, visa a evidenciar a influência de um conjunto de parâmetros sobre a efetividade do tratamento viscoelástico quanto à mitigação de vibrações indesejáveis. Outro fator que é também contemplado é a temperatura de operação do sistema, como sugerido pela Tab. 3.2.

7.4.1 Influência do Comprimento do Tratamento Viscoelástico Superficial Restrito

Numa primeira situação, considera-se a influência de $(x_f)_v = (x_f)_r$ sobre as respostas para valores fixos de $h_v = h_r = 0,5$ mm. Os valores considerados para o comprimento do tratamento viscoelástico variam de 0 até $L_b = 1,5$ m em incrementos de 0,1 m. Ainda, a temperatura é mantida fixa, com o valor de 27 °C. Os resultados oriundos das simulações transientes são mostrados nas Figs. 7.6 a 7.9.

A Fig. 7.6 mostra o torque aplicado à roda de reação, que obedece uma lei de controle proporcional-derivativa, em função do tempo e do comprimento do tratamento viscoelástico superficial. Ainda que o gráfico tridimensional considerado na Fig. 7.6a mostre visualmente o mesmo torque para diferentes valores de $(x_f)_v = (x_f)_r$, a Fig. 7.6b esclarece, por meio de uma visualização ampliada das respostas associadas a valores selecionados do parâmetro considerado, que o movimento elástico exibido pelos painéis exerce influência sobre a resposta investigada. Adicionalmente, como pode se perceber por análise da Fig. 7.6b, as oscilações relacionadas à flexibilidade dos painéis são ligeiramente reduzidas com o aumento do comprimento do tratamento viscoelástico. Evidentemente, um aumento nos valores de $(x_f)_v = (x_f)_r$ acarreta uma maior quantidade de material viscoelástico aplicado.

Os fatos levantados com auxílio da Fig. 7.6 também indicam que amortecimento viscoelástico talvez possa ser utilizado para mitigar vibrações com sucesso no sistema considerado. Para corroborar esta afirmação, a Fig. 7.7 mostra o deslocamento transversal associado às extremidades livres dos painéis. Enquanto a Fig. 7.7a mostra curvas da quantidade considerada em função do tempo e de $(x_f)_v = (x_f)_r$, a Fig. 7.7b ilustra o conteúdo espectral de baixa frequência calculado por DFT (*Discrete Fourier Transform*) dos sinais apresentados na Fig. 7.7a. Como se torna aparente da Fig. 7.7a, maiores comprimentos do tratamento viscoelástico estão associados a um maior amortecimento da resposta, já que esta apresenta decaimento significativamente superior quando $(x_f)_v = (x_f)_r$ aumentam. Por inspeção da Fig. 7.7b, maiores comprimentos também levam a um comportamento mais rígido do sistema, já que há um pequeno incremento no valor da primeira frequência que caracteriza os sinais contemplados.

Outros resultados relevantes são mostrados nas Figs. 7.8 e 7.9 que apresentam, respectivamente, a orientação angular do corpo do satélite e a velocidade angular da roda de reação. Considerando-se as ampliações mostradas nas Figs. 7.8b e 7.9b, pode-se mais uma vez averiguar a influência da flexibilidade dos painéis sobre os movimentos de corpo rígido do satélite. Ainda, constata-se novamente que o material viscoelástico utilizado no tratamento implementado pode dissipar de maneira satisfatória a energia vibratória oriunda

de flexibilidade, e assim amortecer as diferentes respostas associadas ao sistema. A Fig. 7.8 confirma, também, que o torque de controle admitido é suficiente para levar o sistema do repouso à posição final desejada, de 60° , durante um intervalo de tempo de aproximadamente 30 s.

A última ressalva aqui realizada diz respeito à resposta do satélite quando $(x_f)_v = (x_f)_r = 0$, ou seja, quando não há tratamento viscoelástico aplicado aos painéis. Neste caso, o amortecimento presente na resposta é devido ao torque de controle considerado, que, ao tentar ajustar a orientação angular do satélite, acaba por induzir amortecimento no deslocamento transversal dos painéis, uma vez que este interfere na estabilização de $\theta(t)$.

7.4.2 *Influência da Espessura da Camada Restringente*

Outra influência considerada diz respeito àquela exercida pela espessura da camada restringente utilizada no tratamento viscoelástico. Para tanto, adotou-se $(x_f)_v = (x_f)_r = 0,8$ m e $h_v = 0,5$ mm. A temperatura é outra vez igual a 27°C . Quanto à espessura h_r , a mesma admite valores desde 0 até 5,0 mm, com incrementos de 0,5 mm.

Os resultados são apresentados nas Figs. 7.10 a 7.13. Na ordem, apresentam o torque de controle, o deslocamento transversal associado às extremidades livres dos painéis do satélite, sua orientação angular, e a velocidade angular da roda de reação, todos em função de h_r .

Como se pode perceber através da Fig. 7.11b, maiores valores de h_r estão associados a um maior valor da primeira frequência de ressonância do sistema. Ainda, maiores níveis de amortecimento também podem ser constatados para as respostas, já que picos ligeiramente mais suaves podem ser observados para maiores valores de h_r na mesma figura.

Os deslocamentos mostrados do domínio do tempo na Fig. 7.11a também corroboram este comportamento. Nas Figs. 7.10b, 7.12b e 7.13b, que mostram detalhes daqueles gráficos ilustrados nas Figs. 7.10a, 7.12a e 7.13a para certos valores de h_r , o comportamento mais rígido e mais amortecido relatado anteriormente também pode ser observado para maiores valores de h_r . Uma estabilização mais rápida da resposta também pode ser averiguada.

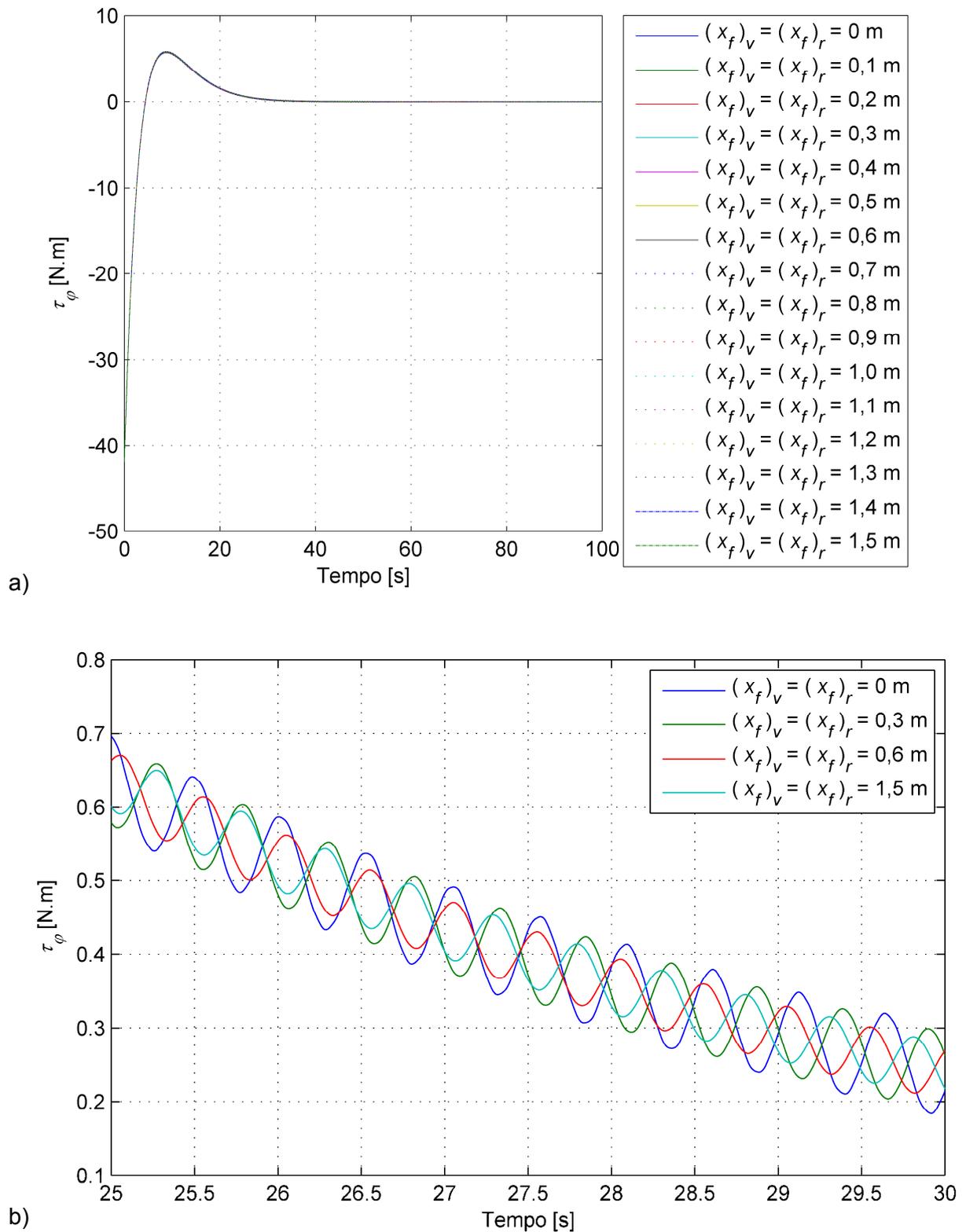
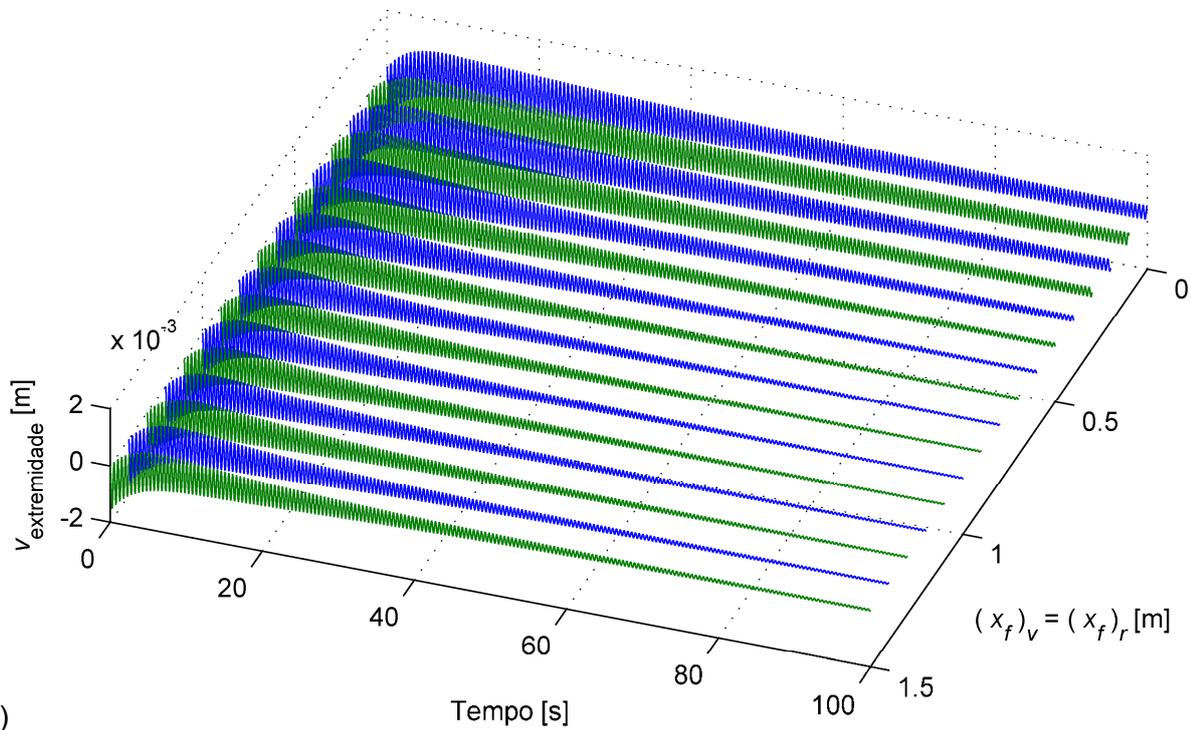
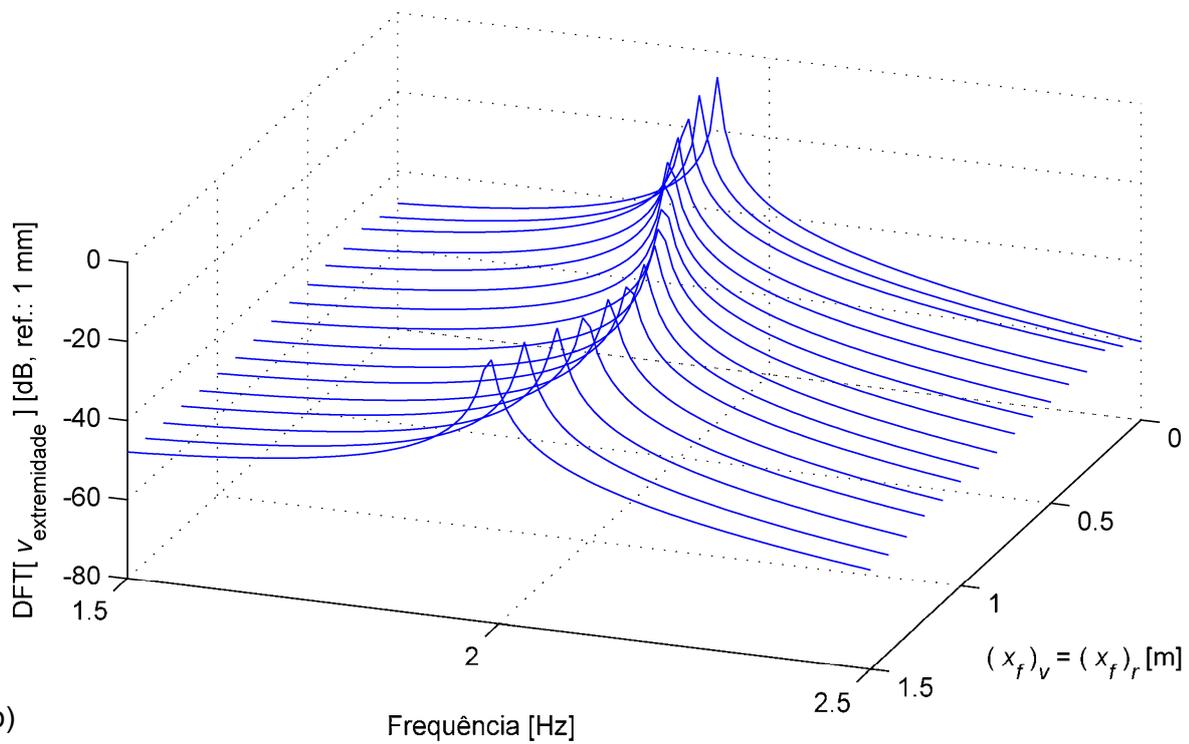


Figura 7.6 - Torque de controle proporcional-derivativo: a) históricos temporais completos para vários comprimentos do tratamento viscoelástico; b) detalhes para alguns valores deste comprimento.



a)



b)

Figura 7.7 - Deslocamento transversal associado às extremidades livres dos painéis do satélite: a) históricos temporais completos para vários comprimentos do tratamento viscoelástico; b) detalhes de seu conteúdo espectral, evidenciando a primeira ressonância.

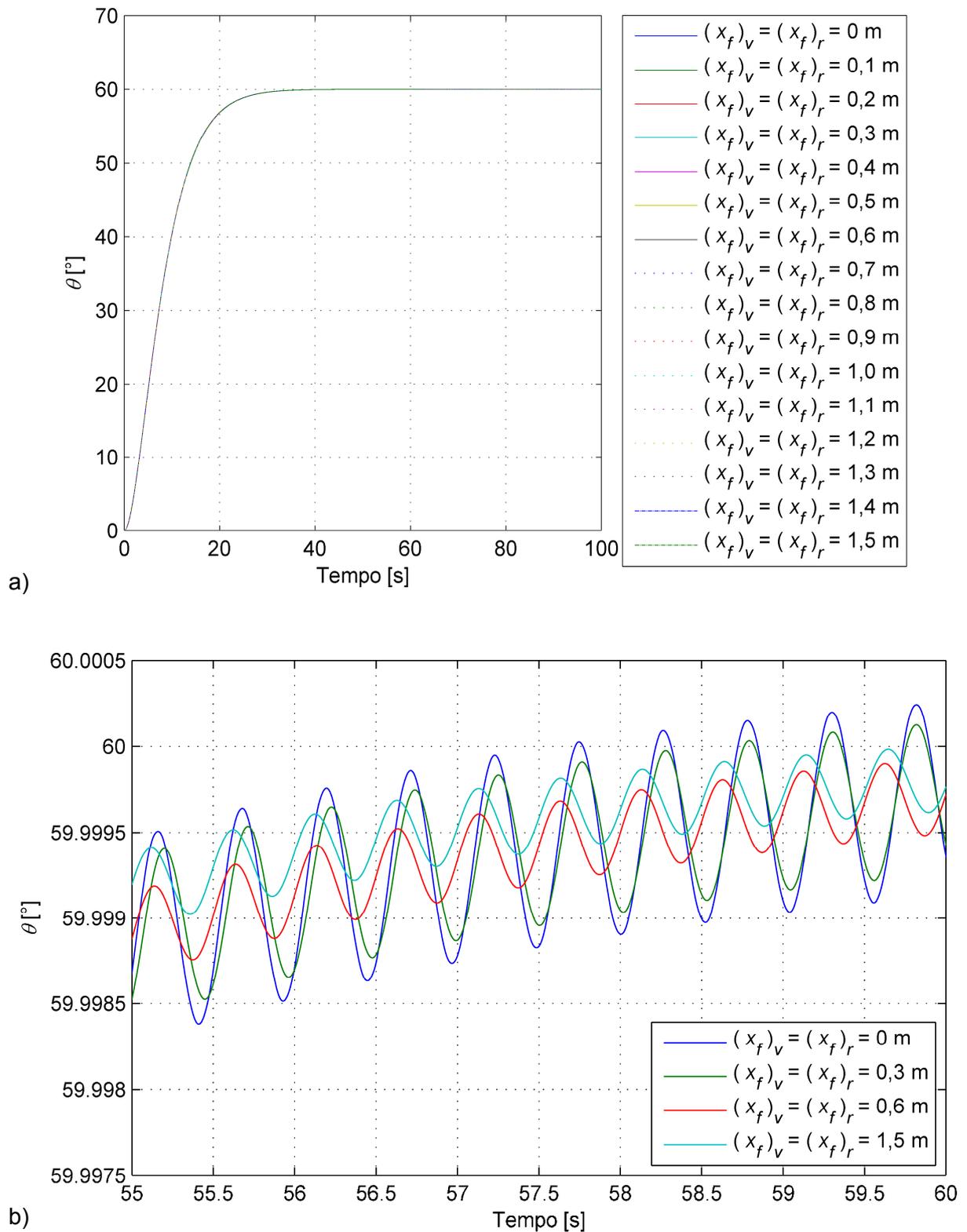


Figura 7.8 - Ângulos de orientação do satélite: a) históricos temporais para vários comprimentos do tratamento viscoelástico; b) detalhes para alguns valores deste comprimento.

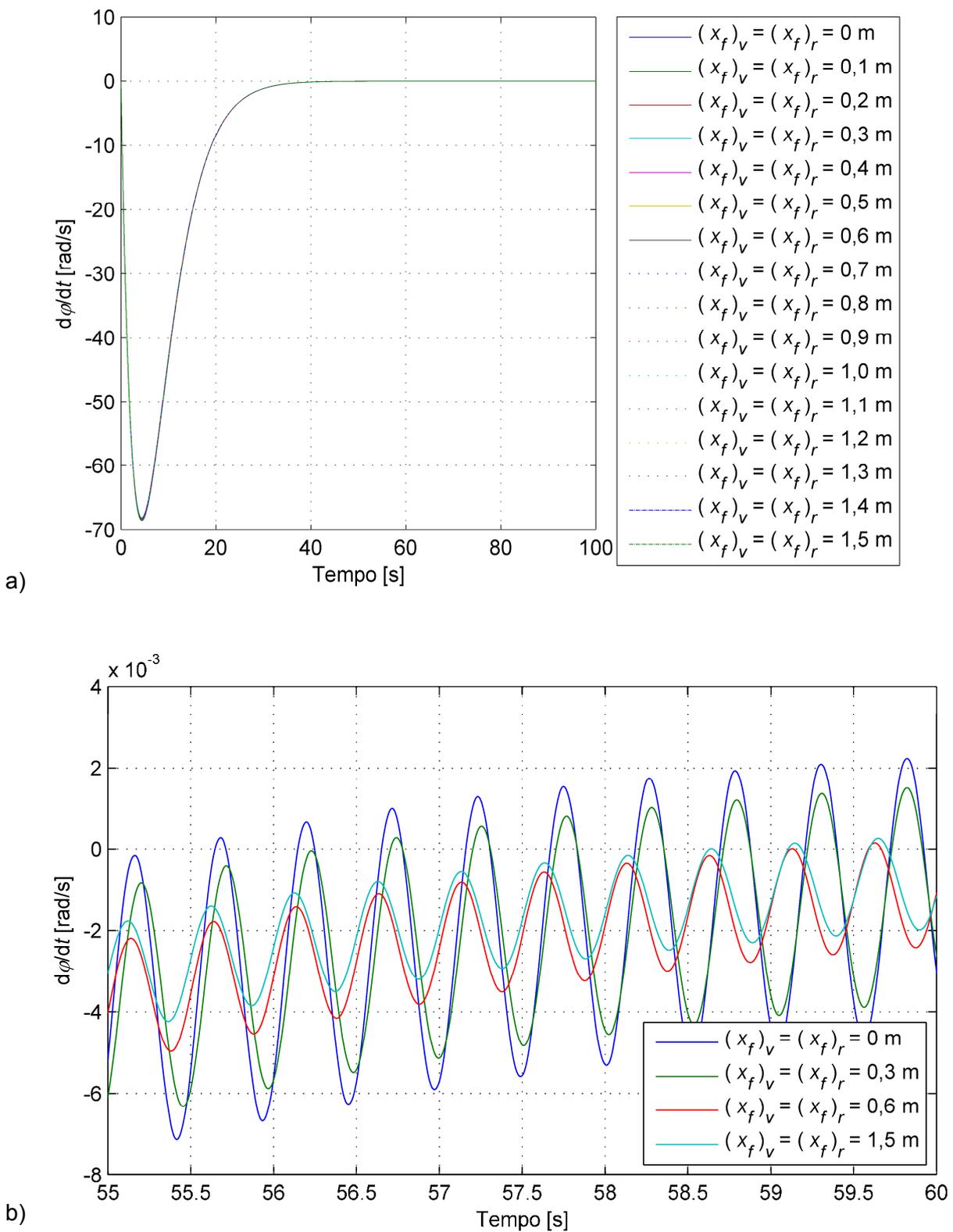


Figura 7.9 - Velocidade angular da roda de reação do satélite: a) históricos temporais para vários comprimentos do tratamento viscoelástico; b) detalhes para alguns valores deste comprimento.

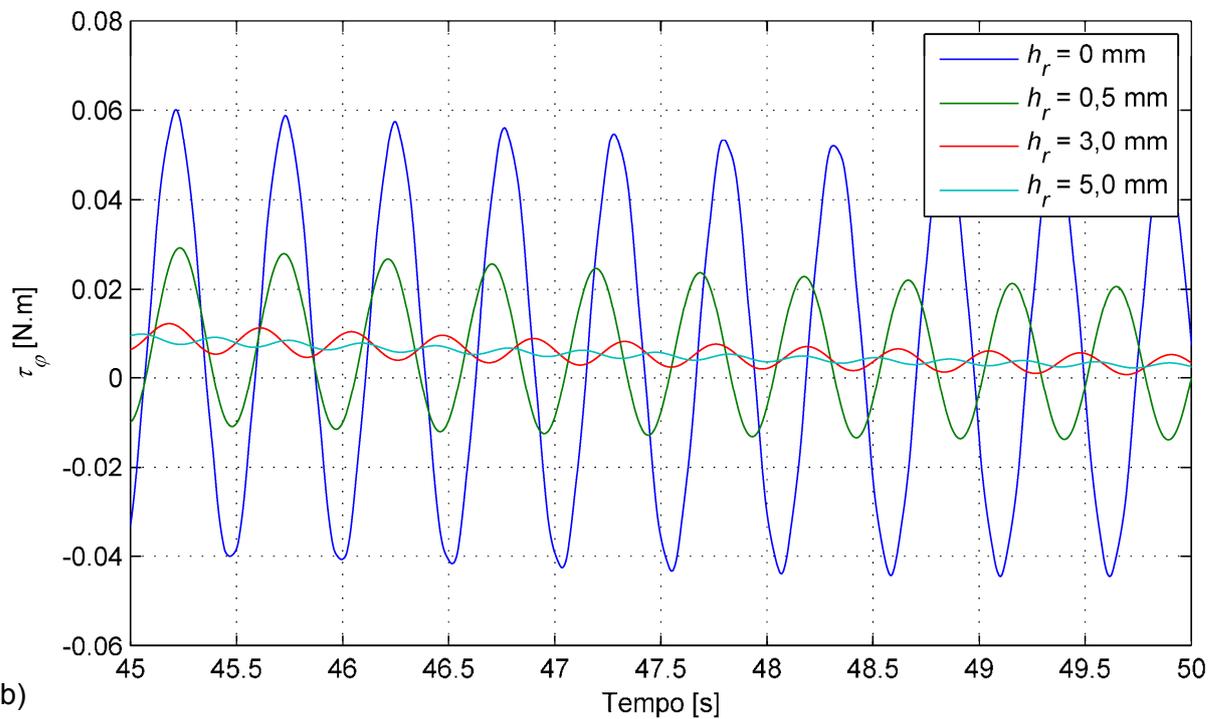
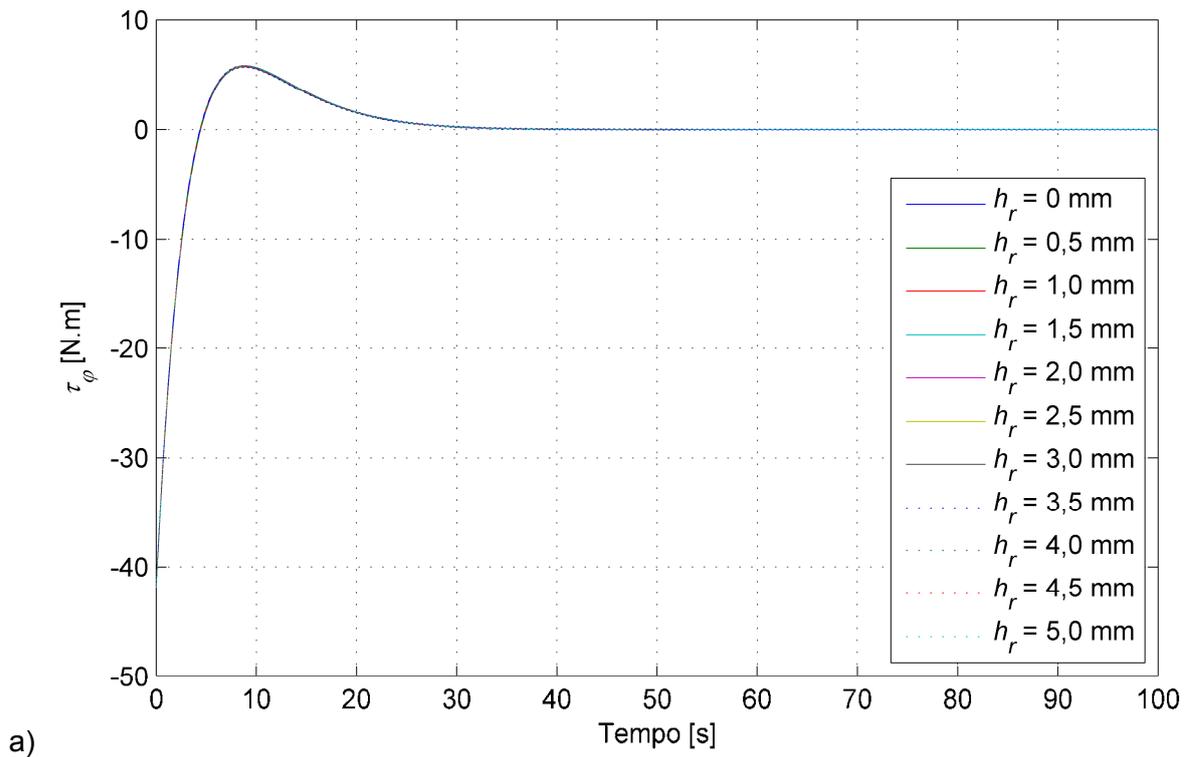


Figura 7.10 - Torque de controle proporcional-derivativo: a) históricos temporais para várias espessuras da camada restrigente; b) detalhes para alguns valores deste parâmetro.

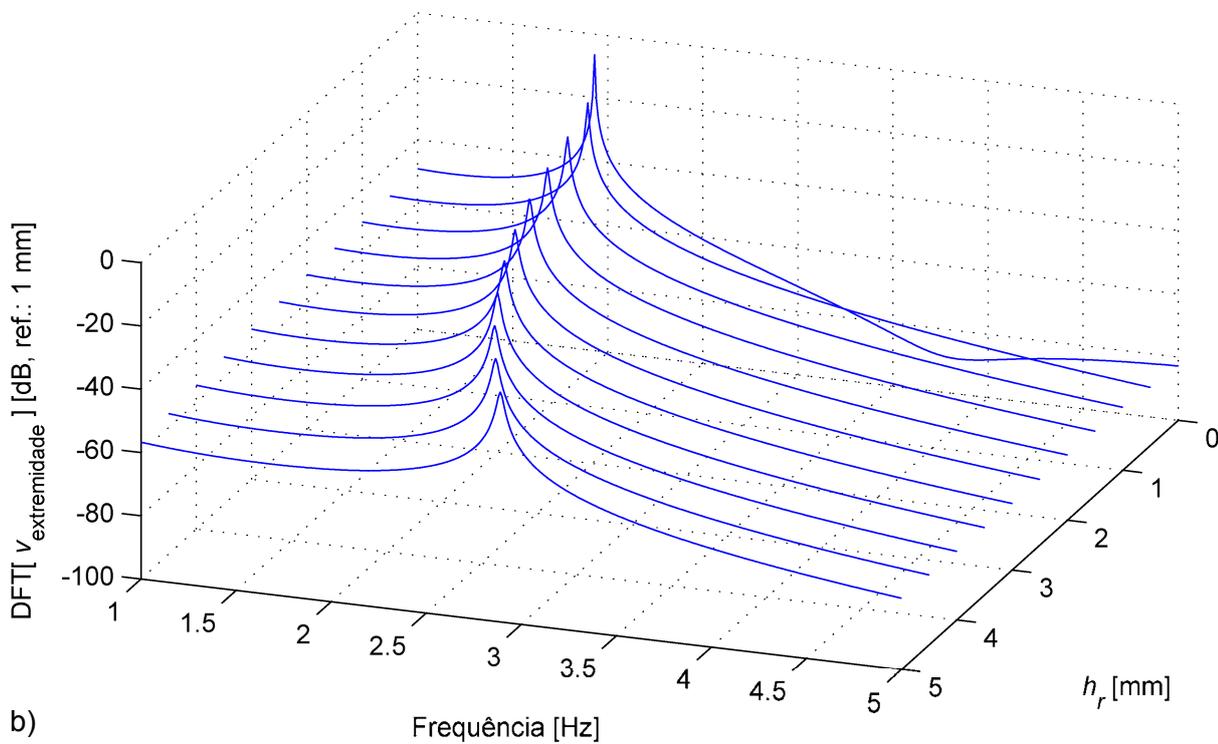
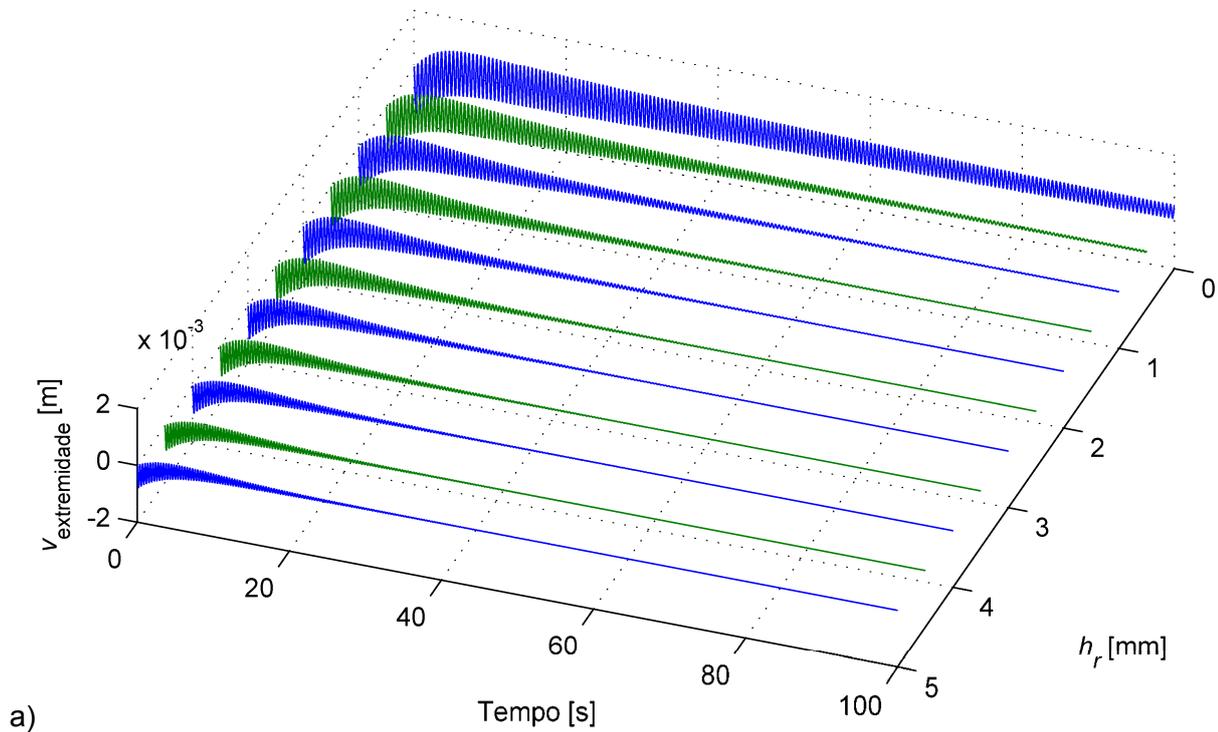


Figura 7.11 - Deslocamento transversal associado às extremidades livres dos painéis do satélite: a) históricos temporais para várias espessuras da camada restringente; b) detalhes de seu conteúdo espectral, evidenciando a primeira ressonância.

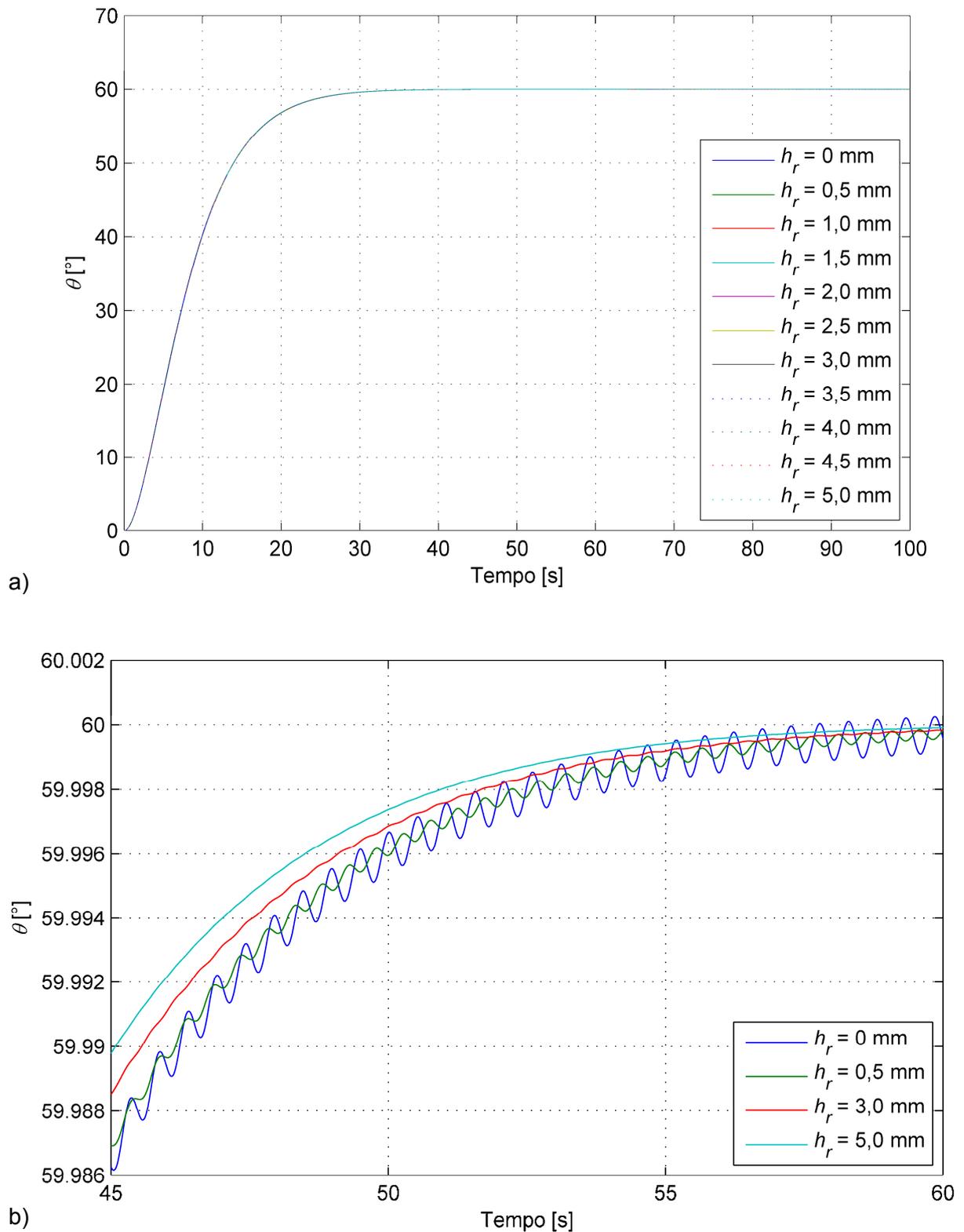
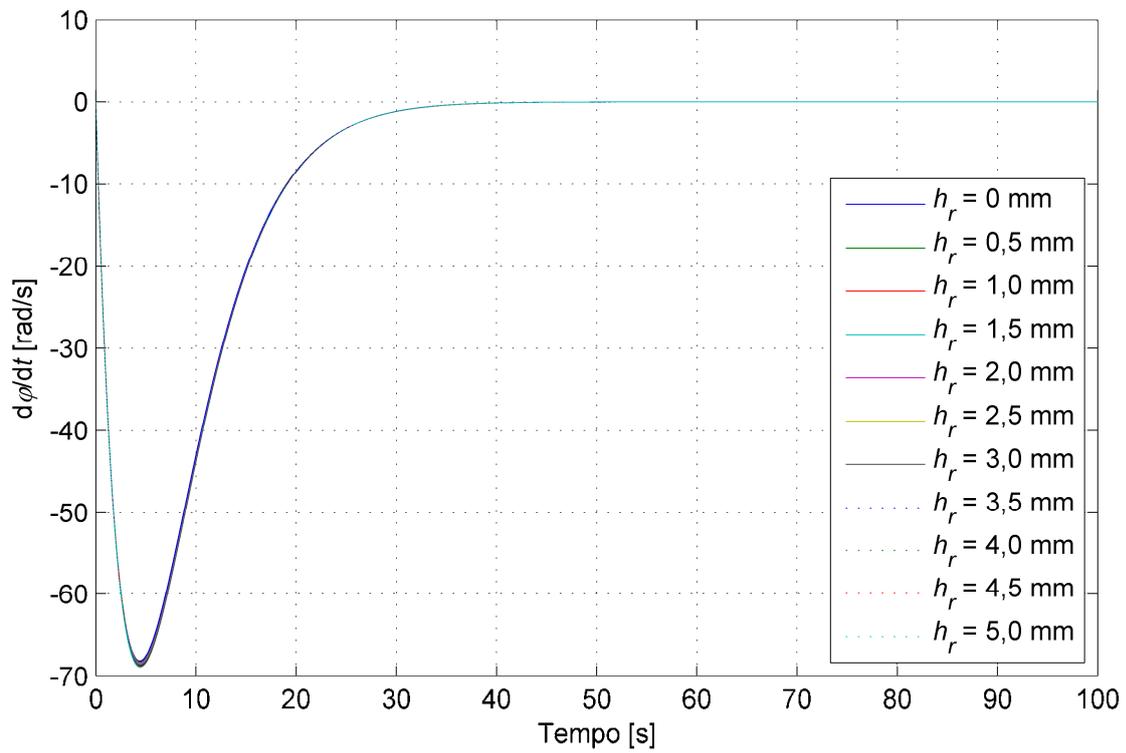
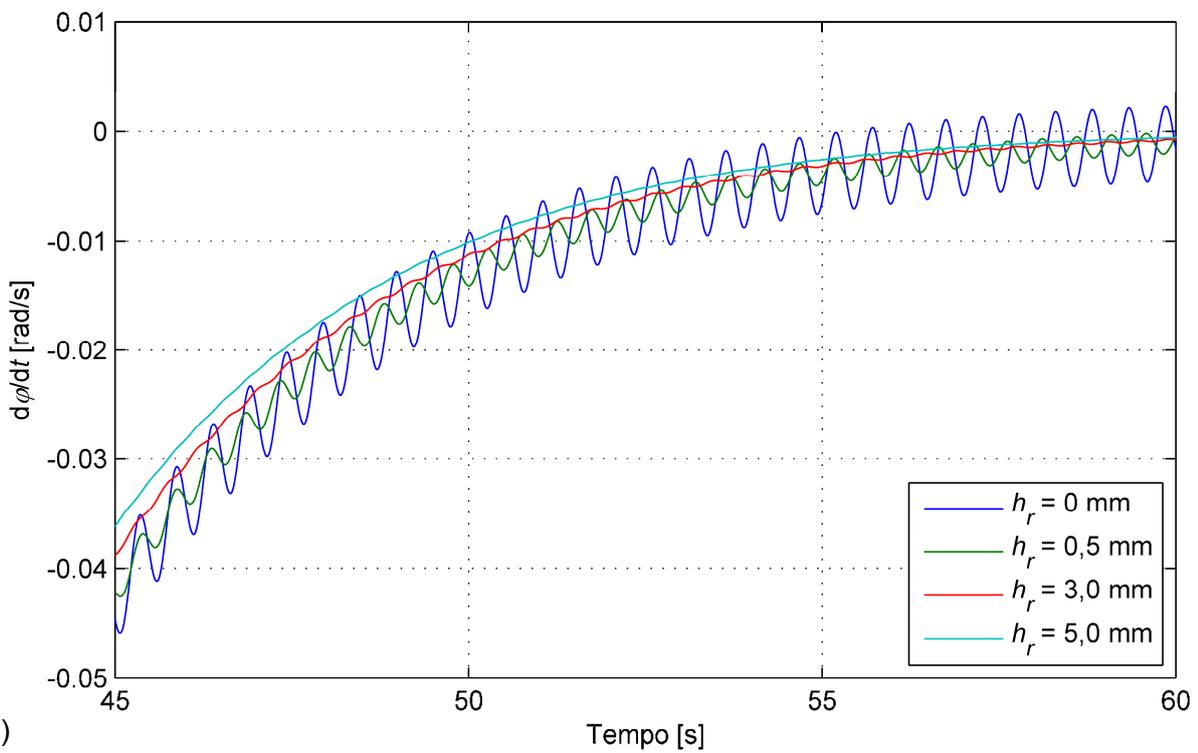


Figura 7.12 - Ângulo de orientação do satélite: a) históricos temporais para várias espessuras da camada restrigente; b) detalhes para alguns valores deste parâmetro.



a)



b)

Figura 7.13 - Velocidade angular da roda de reação do satélite: a) históricos temporais para várias espessuras da camada restringente; b) detalhes para alguns valores deste parâmetro.

7.4.3 *Influência da Espessura da Camada Viscoelástica*

O último parâmetro geométrico para o qual se realiza uma análise paramétrica é a espessura do núcleo viscoelástico presente nos painéis sanduíches do satélite. Como no caso anteriormente examinado, considera-se mais uma vez $(x_f)_v = (x_f)_r = 0,8$ m e uma temperatura de trabalho igual a 27 °C. Ainda, toma-se $h_r = 0,5$ mm, e são admitidos valores para h_v os quais se situam na faixa delimitada por 0,1 e 1,5 mm, inclusive, espaçados entre si de 0,1 mm.

As Figs. 7.14 a 7.17 mostram o torque de controle, o deslocamento transversal experimentado pelas extremidades livres dos painéis do satélite, sua orientação angular, e a velocidade angular a qual sua roda de reação é submetida, todos em função de h_v .

Da Fig. 7.14, pouco pode ser constatado sobre a influência de h_v sobre a resposta do sistema, já que o torque de controle mostra-se praticamente invariante para aqueles valores considerados para o referido parâmetro. Entretanto, da Fig 7.15a verifica-se que quanto menor a espessura da camada viscoelástica, melhor é o desempenho do tratamento considerado, já que menores oscilações, associadas a uma maior taxa de decaimento temporal, podem ser relacionadas às respostas. Com auxílio da Fig. 7.15b, constata-se ainda que um aumento no valor de h_v induz um maior nível de amortecimento na resposta investigada, além de acarretar uma diminuição da flexibilidade, como comprovado pelo aumento no valor da frequência de ressonância do conjunto analisado.

Do ponto de vista físico, este julgamento pode ser justificado como segue. Para maiores valores de h_v menores que h_r , a camada restringente ainda pode lidar satisfatoriamente com o aumento que ocorre no movimento do núcleo viscoelástico dos painéis. Contudo, à medida que h_v supera o valor de h_r , a camada restringente perde sua função, devido a um aumento predominante de inércia, e então não pode proporcionar maior amortecimento no sistema – por não ser capaz de induzir maiores deformações cisalhantes no material viscoelástico utilizado no tratamento. Esta interpretação física está em acordo com aqueles resultados e com a discussão realizada acerca da influência da espessura da camada restringente sobre o tratamento passivo considerado.

Embora não aparente das Figs. 7.16 e 7.17, as respostas de corpo rígido também confirmam que valores muito grandes de h_v estão associados a uma menor rigidez do sistema sem que o amortecimento seja aumentado.

Um comentário final é feito sobre a influência da espessura da camada viscoelástica sobre a eficácia da estratégia de controle de vibrações considerada: o amortecimento não aumenta indefinidamente com a diminuição de h_v , já que uma menor quantidade de material

está disponível. Contudo, oscilações de menores amplitudes resultam devido a um comportamento mais rígido do sistema.

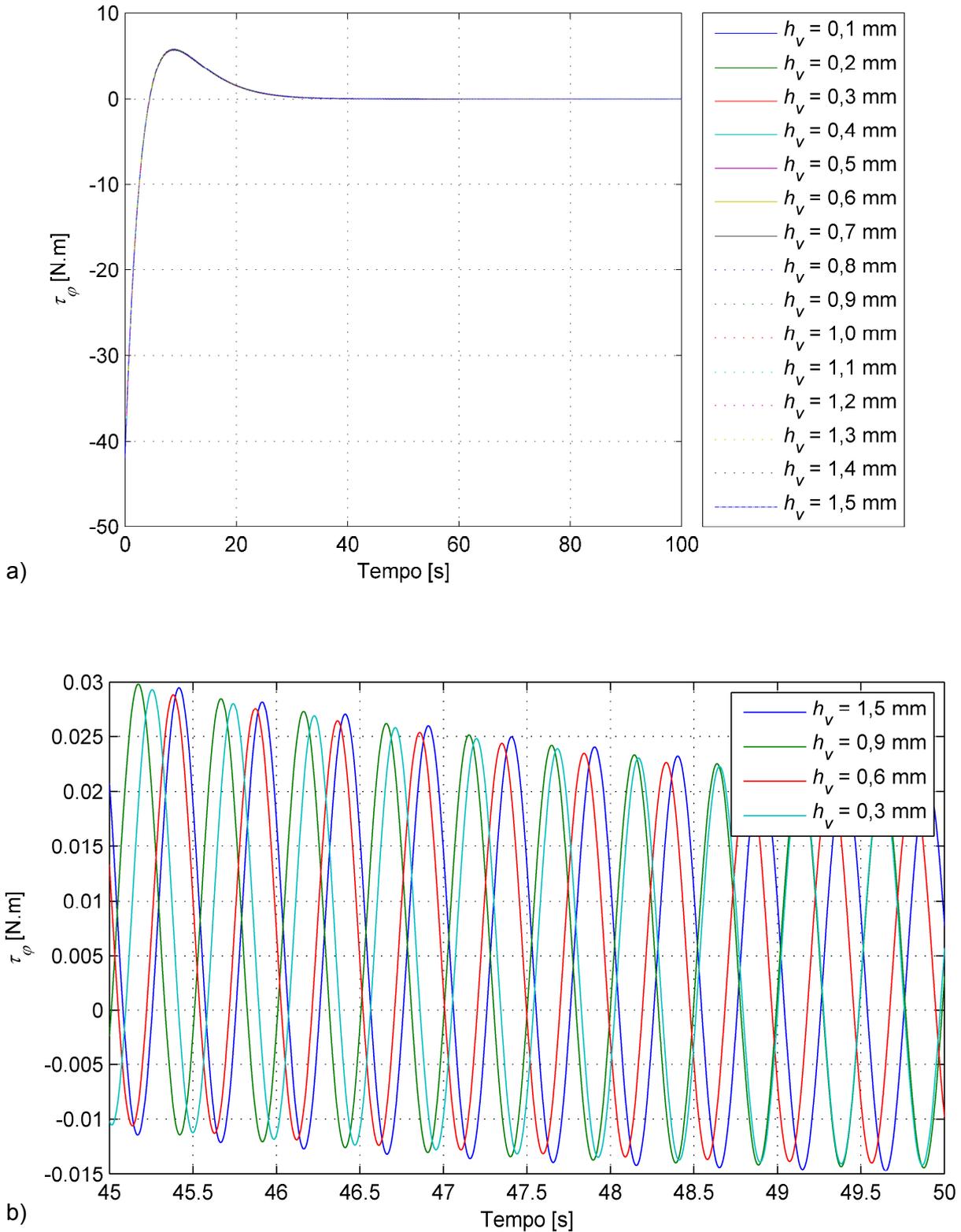


Figura 7.14 - Torque de controle proporcional-derivativo: a) históricos temporais para várias espessuras da camada viscoelástica; b) detalhes para alguns valores deste parâmetro.

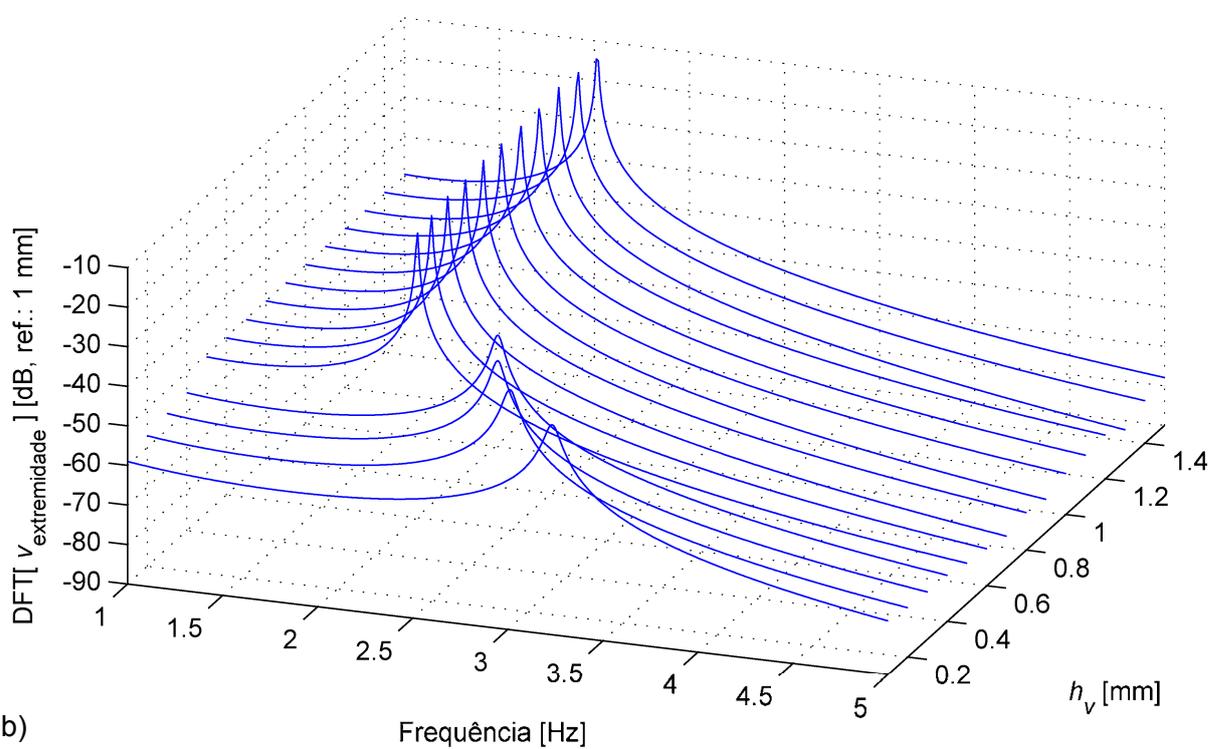
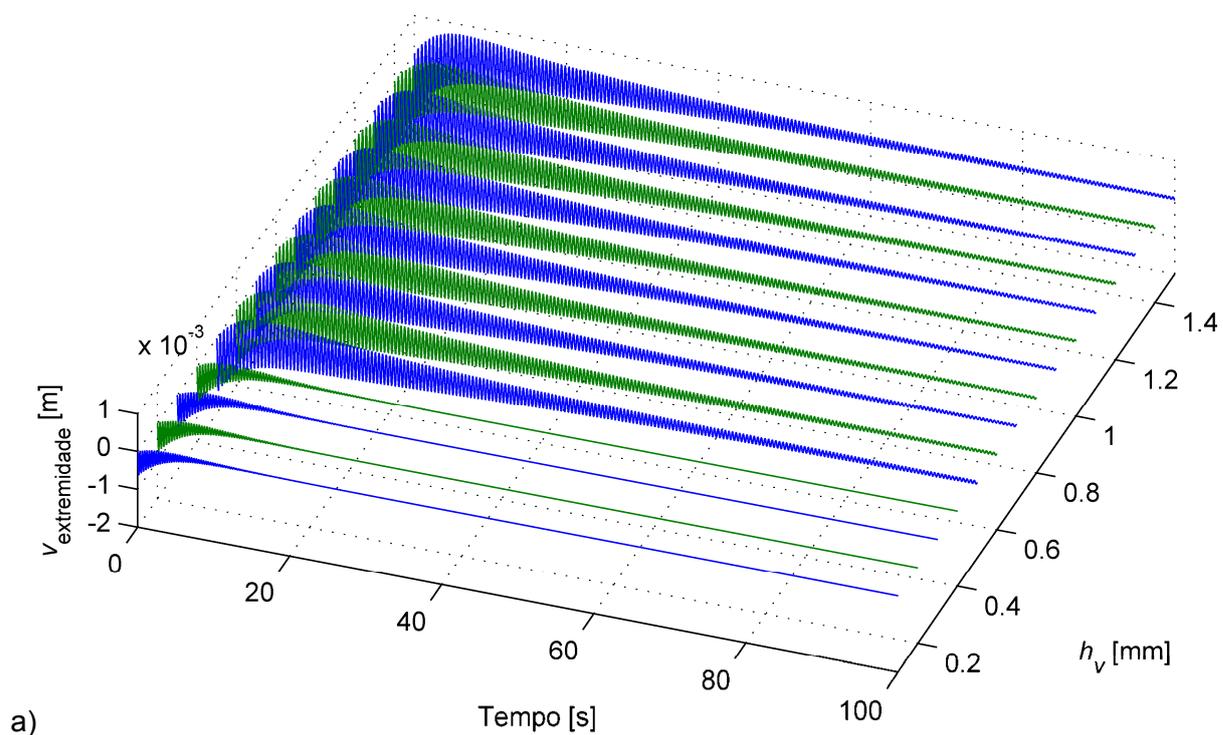


Figura 7.15 - Deslocamento transversal associado às extremidades livres dos painéis do satélite: a) históricos temporais para várias espessuras da camada viscoelástica; b) detalhes de seu conteúdo espectral, evidenciando a primeira ressonância.

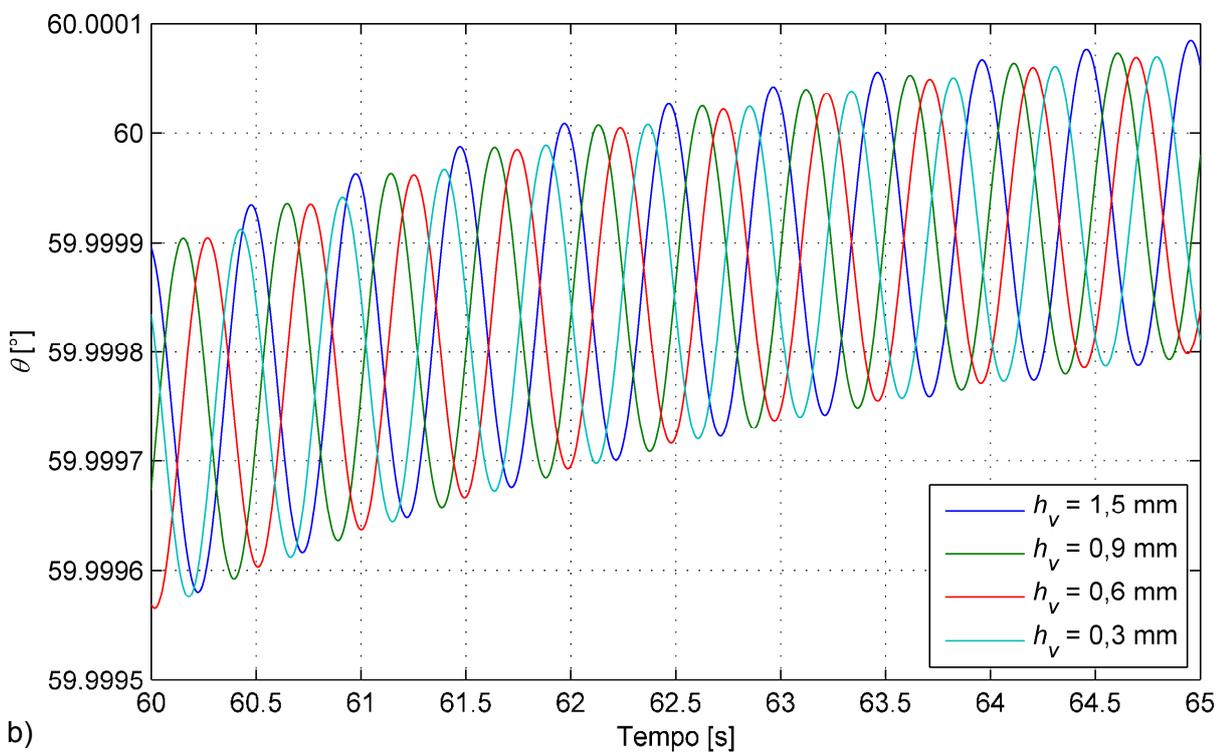
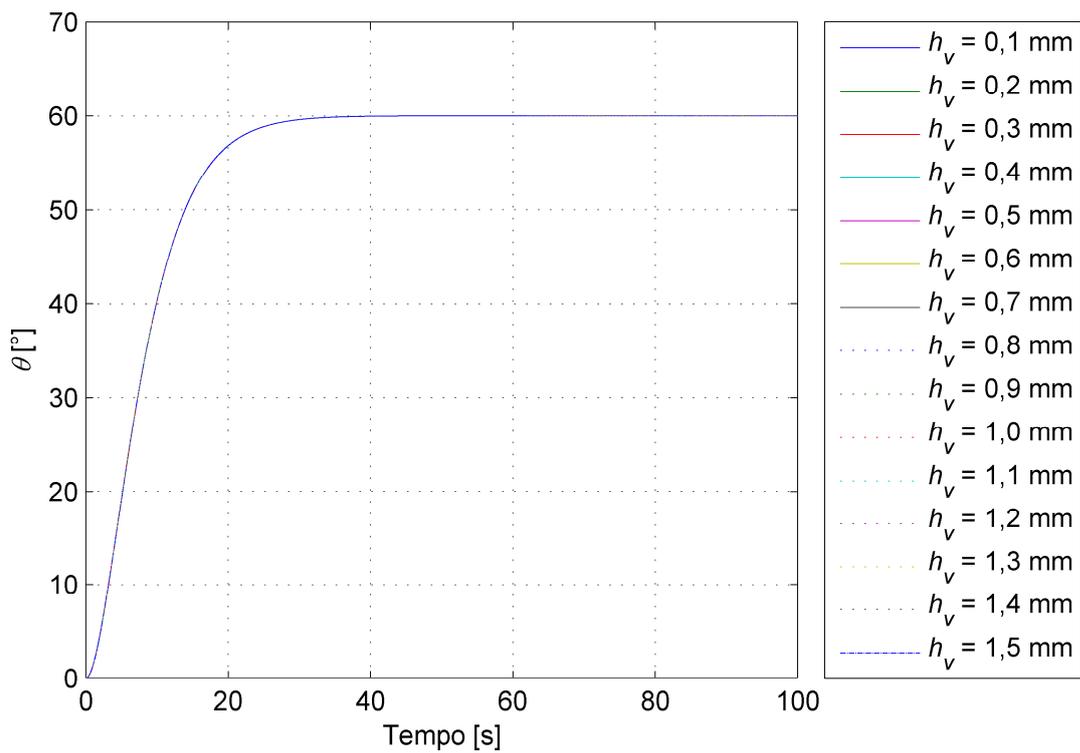


Figura 7.16 - Ângulo de orientação do sistema aeroespacial: a) históricos temporais para várias espessuras da camada viscoelástica; b) detalhes para alguns valores deste parâmetro.

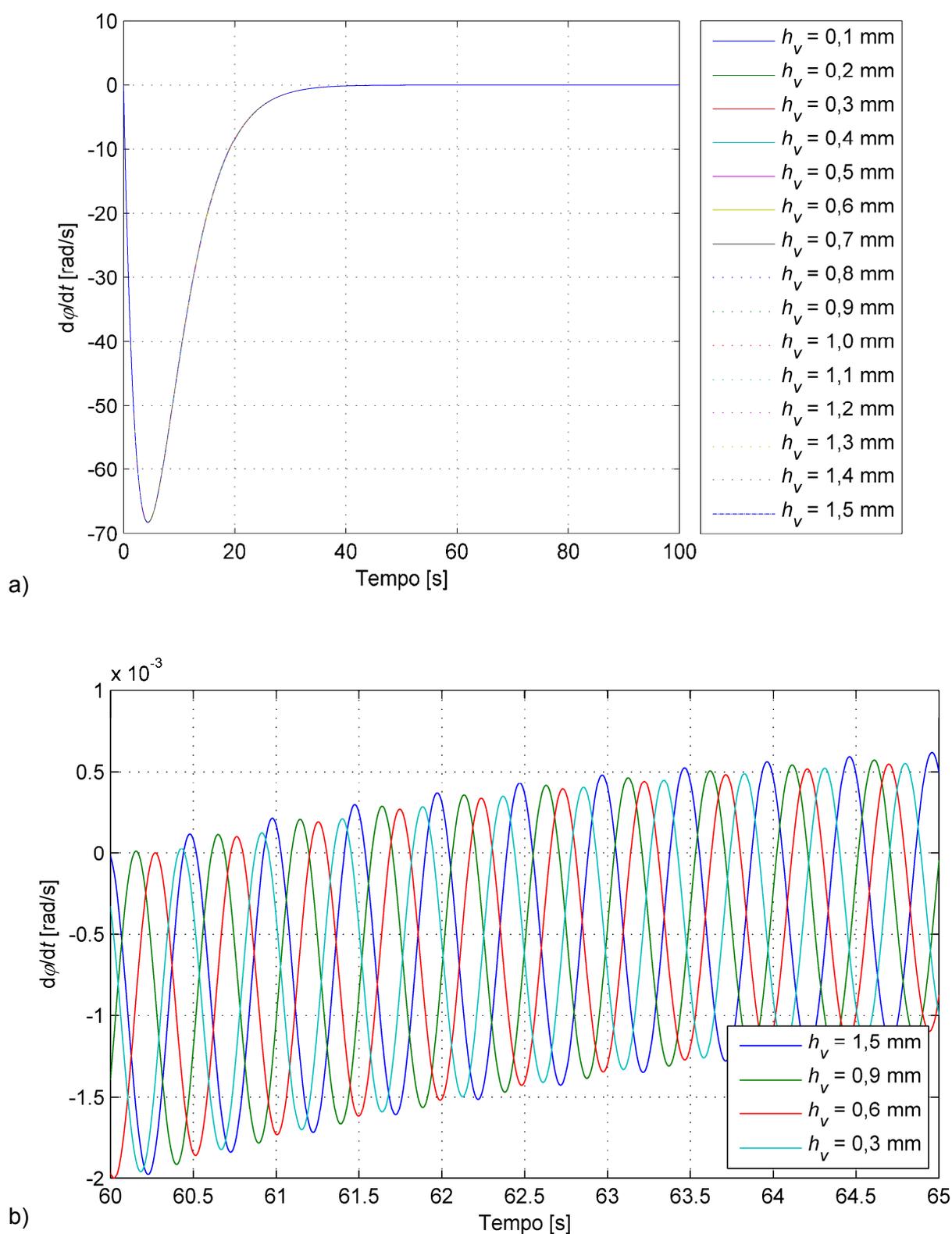


Figura 7.17 - Velocidade angular da roda de reação do satélite: a) históricos temporais para várias espessuras da camada viscoelástica; b) detalhes para alguns valores deste parâmetro.

7.4.4 *Influência da Temperatura*

Depois de investigadas as influências devidas aos parâmetros geométricos relacionados ao tratamento viscoelástico sobre a resposta do satélite artificial aqui considerado, considera-se a influência da temperatura, dado que, como ficou evidenciado no Capítulo VI, Seção 6.3.4, as características mecânicas dos materiais viscoelásticos são fortemente influenciados por este fator. Para tanto, a temperatura foi variada de 0 a 60 °C em incrementos de 5 °C. Para os parâmetros $(x_f)_v = (x_f)_r$, h_v e h_r foram adotados os valores constantes de 0,8 m, 0,5 mm e 0,5 mm, respectivamente.

A Fig 7.18 mostra o torque de controle em função da temperatura. Enquanto a Fig. 7.18a exibe um gráfico que contém todos os resultados obtidos por intermédio de simulações, a Fig. 7.18b apresenta detalhes das curvas mostradas no gráfico anterior para alguns valores selecionados de temperatura. Observa-se claramente que para maiores valores de temperatura, oscilações com maiores amplitudes desenvolvem-se no torque de controle.

A Fig. 7.19, por sua vez, confirma a observação anterior a partir dos gráficos apresentados nos domínios do tempo e da frequência para o deslocamento transversal das extremidades livres dos painéis sanduíche do satélite artificial. Como se pode observar nesta figura, o nível de amortecimento propiciado pelo tratamento viscoelástico reduz-se drasticamente com o aumento da temperatura de trabalho do sistema. Este comportamento está em completo acordo com características tradicionais associadas a materiais viscoelásticos, conforme discutido no Capítulo III.

Para complementar os resultados já mostrados nas figuras anteriores, as Figs. 7.20 e 7.21 apresentam as respostas de corpo rígido $\theta(t)$ e $\dot{\phi}(t)$, respectivamente. Estas também corroboram as constatações anteriores, e confirmam que amortecimento viscoelástico pode ser efetivo para o controle de vibrações em sistemas aeroespaciais, como acontece no considerado neste Capítulo, desde que sua utilização seja conduzida sob condições geométricas e operacionais favoráveis.

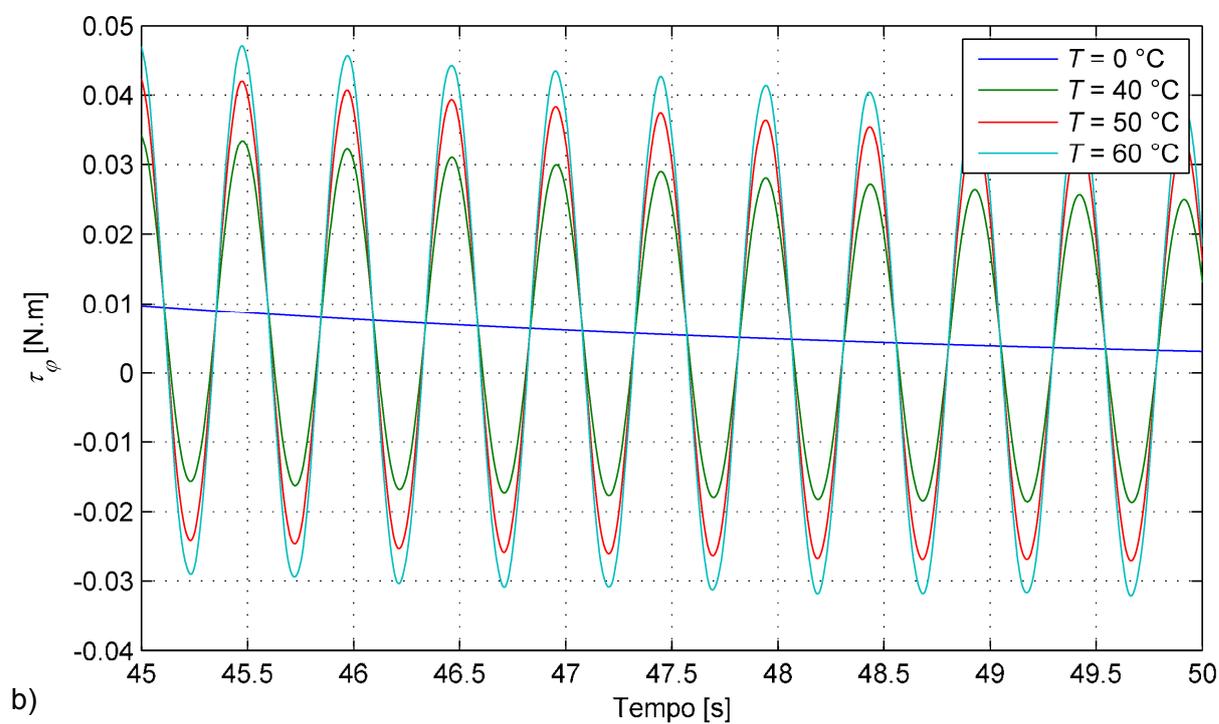
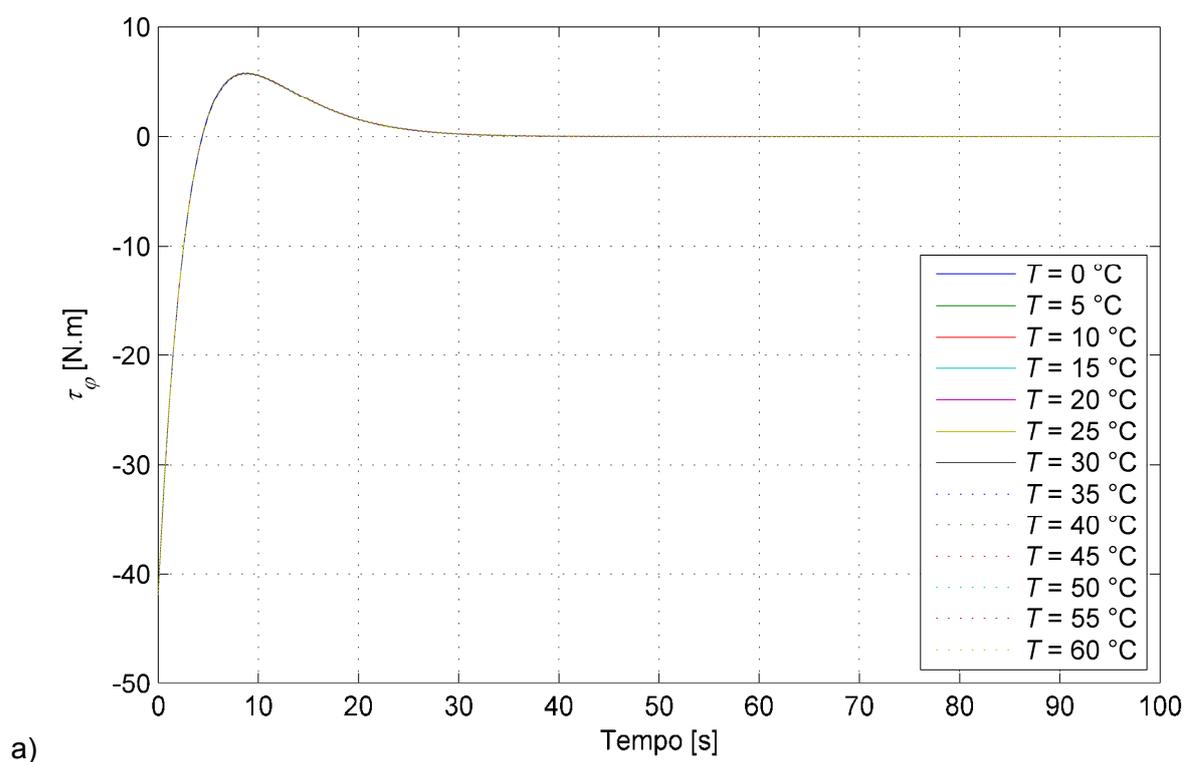
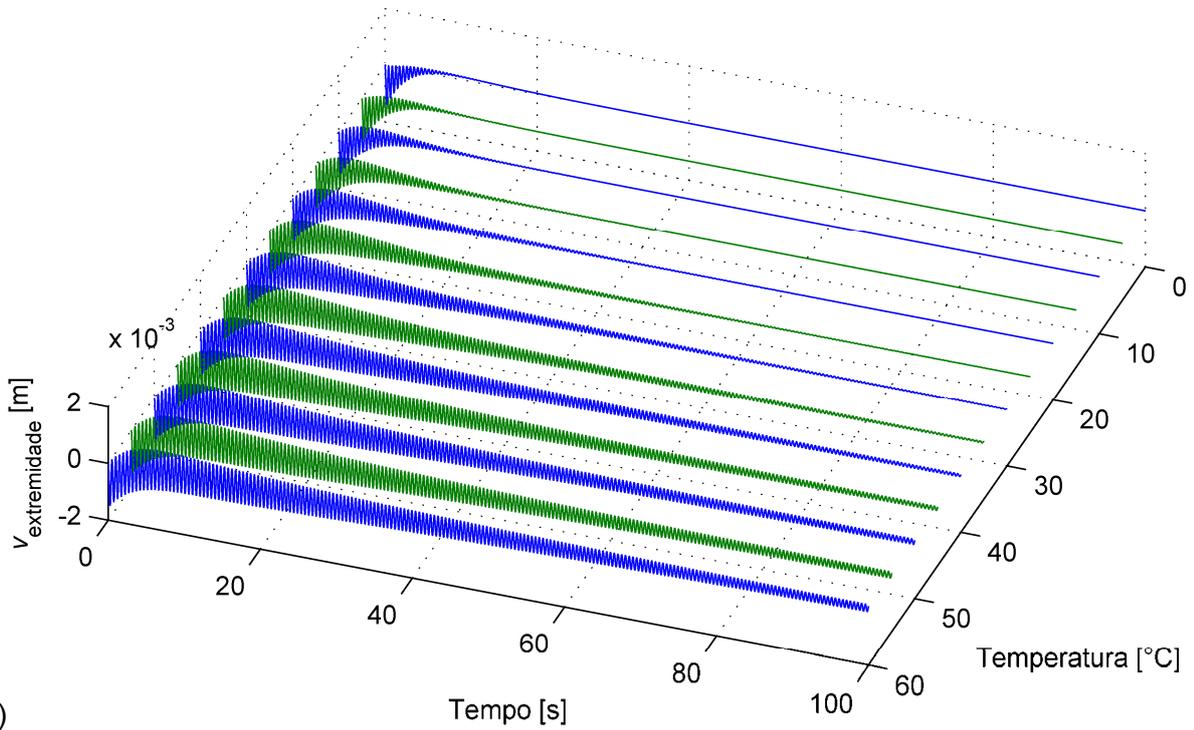
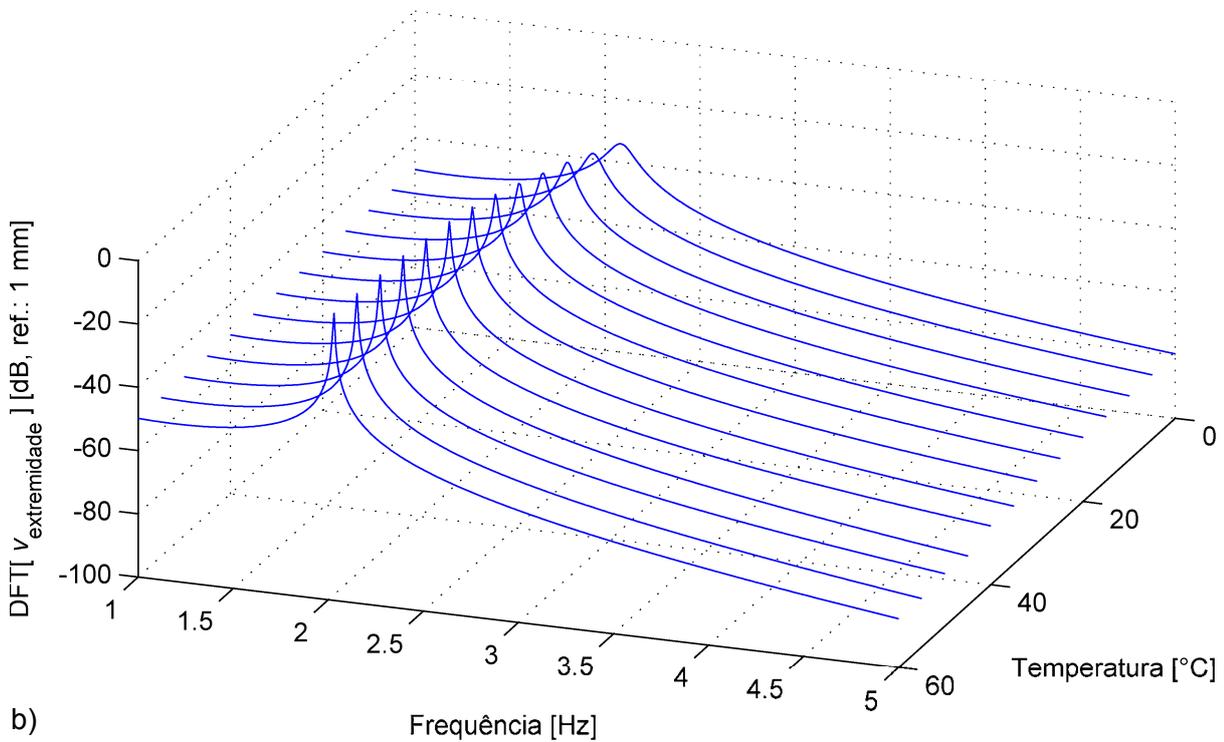


Figura 7.18 - Torque de controle proporcional-derivativo: a) históricos temporais para várias temperaturas; b) detalhes para alguns valores de temperatura.



a)



b)

Figura 7.19 - Deslocamento transversal associado às extremidades livres dos painéis do satélite: a) históricos temporais para várias temperaturas; b) detalhes de seu conteúdo espectral, evidenciando a primeira ressonância.

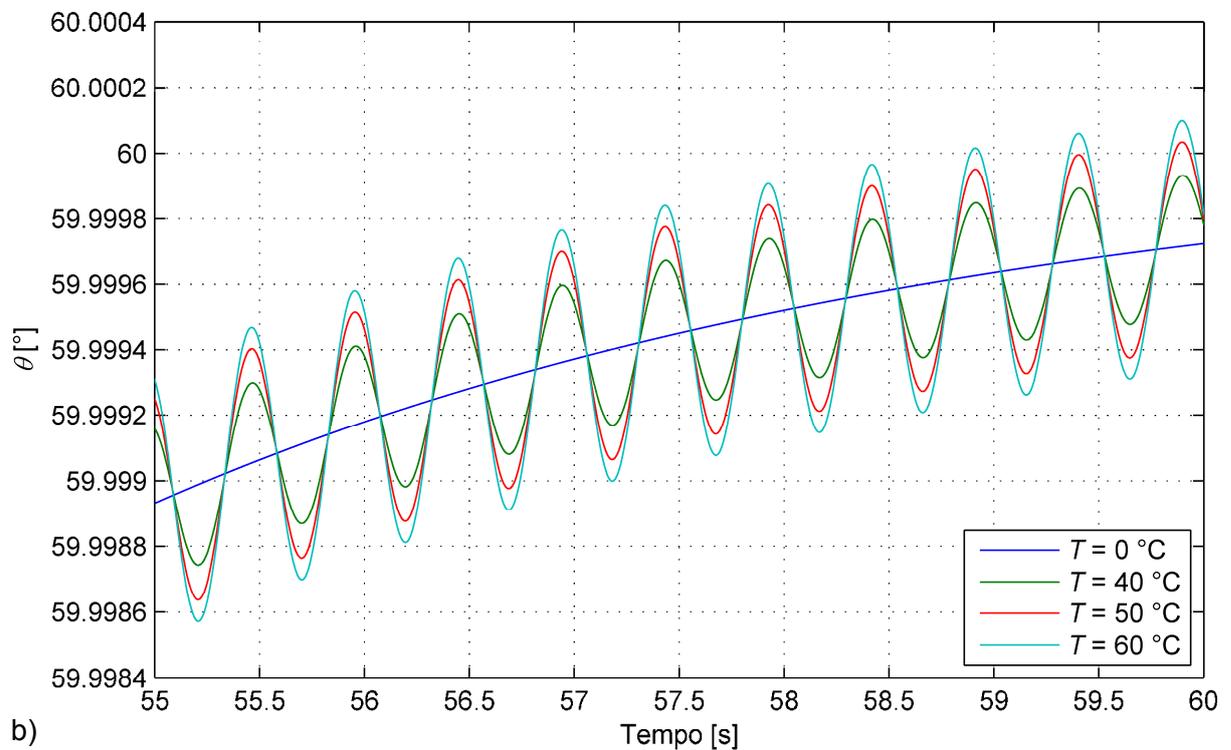
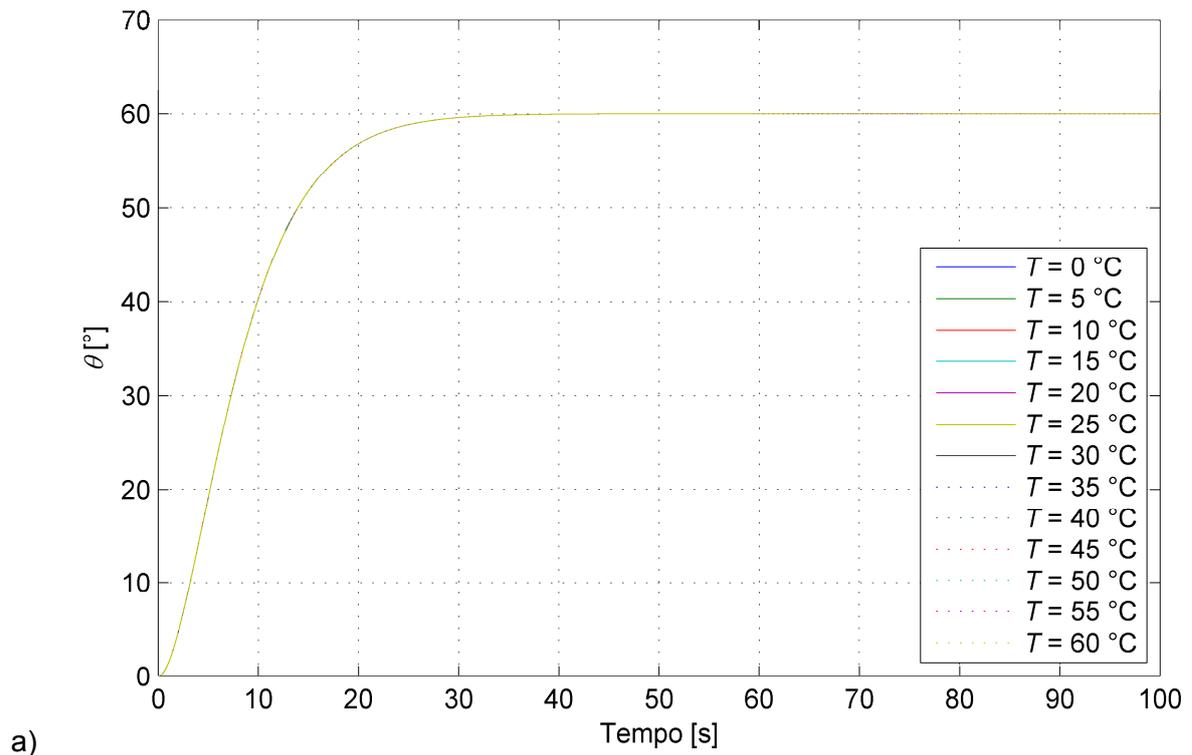
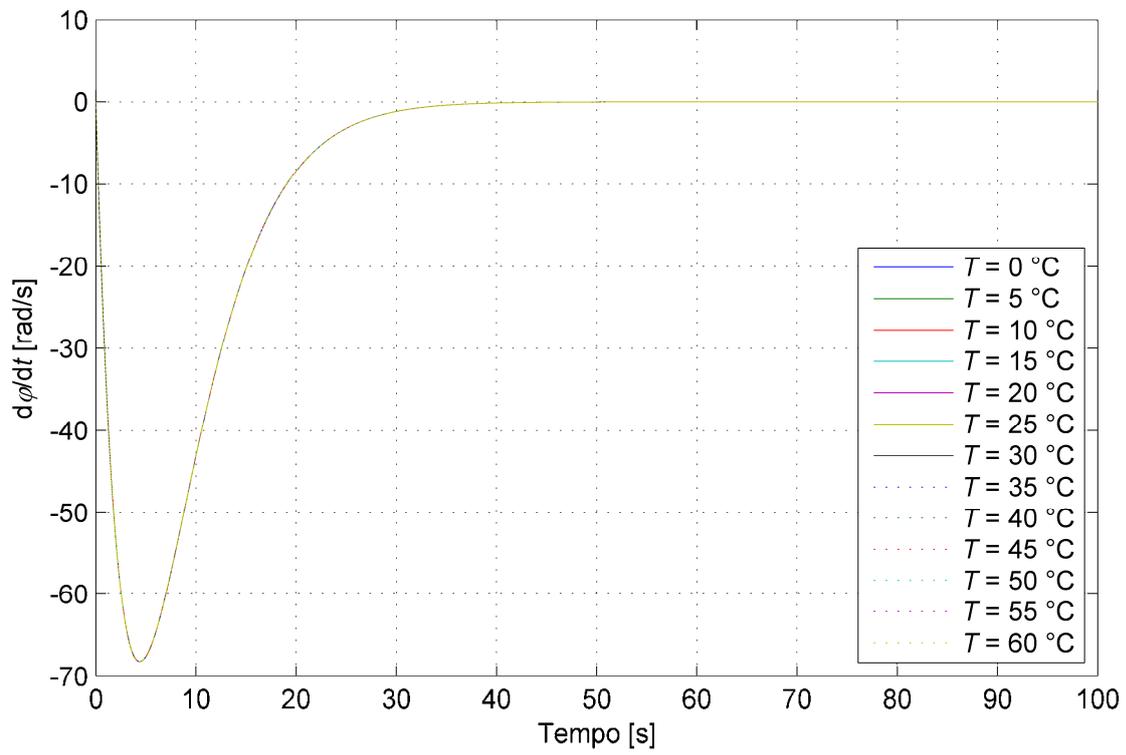
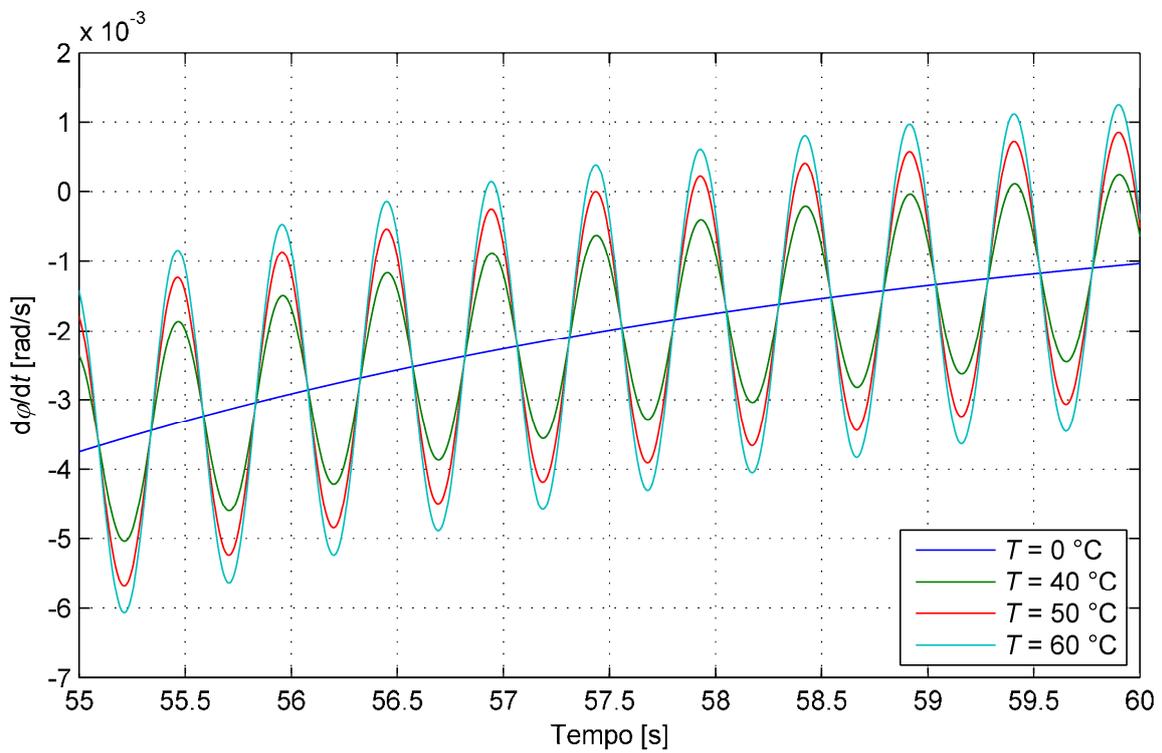


Figura 7.20 - Ângulo de orientação do sistema aeroespacial: a) históricos temporais para várias temperaturas; b) detalhe para alguns valores de temperatura.



a)



b)

Figura 7.21 - Velocidade angular da roda de reação do satélite: a) históricos temporais para várias temperaturas; b) detalhes para alguns valores de temperatura.

CAPÍTULO VIII

Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesta Dissertação, a modelagem numérico-computacional de sistemas multicorpos flexíveis submetidos à presença de amortecimento viscoelástico foi considerada. Uma breve revisão bibliográfica foi realizada acerca de temas correlatos ao estudo apresentado. Apresentação mais detalhada foi dada para as formulações matemáticas empregadas no desenvolvimento de modelos numérico-computacionais quando da consideração de aplicações numéricas. Foram apreciados, neste contexto, a modelagem de comportamento viscoelástico linear, métodos empregados para modelagem dinâmica de sistemas contínuos, e uma das diversas técnicas adotadas para formulação das equações que descrevem o equilíbrio dinâmico associado a sistemas multicorpos. Relembra-se que a estratégia adotada opta pelo uso de referenciais flutuantes em combinação com multiplicadores de Lagrange para inclusão de forças de restrição à formulação. Para o comportamento viscoelástico, priorizou-se o emprego de uma lei constitutiva que faz uso de diferenciação de ordem não inteira.

Duas aplicações numéricas, escolhidas em virtude do interesse prático industrial, foram apresentadas: um mecanismo de quatro barras plano flexível, e um satélite artificial contendo painéis flexíveis.

Com base na formulação desenvolvida e nas aplicações numéricas realizadas, o objetivo principal estabelecido para o trabalho pôde ser alcançado, qual seja, o de avaliar a viabilidade de aplicação de amortecimento viscoelástico a sistemas multicorpos flexíveis. Como comprovado por análises apresentadas nos Capítulos VI e VII, a estratégia de controle passivo que faz uso de tratamento viscoelástico superficial restrito mostrou-se capaz de reduzir a influência de deslocamentos induzidos pela flexibilidade dos componentes dos sistemas avaliados sobre suas respostas.

Análises paramétricas conduzidas nos mesmos Capítulos serviram ainda ao propósito de avaliar influências geométricas e operacionais sobre o desempenho da técnica de controle estudada, permitindo evidenciar que se faz necessário o correto projeto do tratamento superficial restrito frente a possíveis variações geométricas e ambientais.

Destaca-se que ferramentas computacionais como as desenvolvidas neste trabalho de pesquisa são de valia para auxiliar no projeto e desenvolvimento de sistemas destinados à redução de níveis de vibração e de emissão de ruído pela utilização de dispositivos de amortecimento viscoelástico.

Embora não tenham sido consideradas ao longo do presente trabalho, outras estratégias de amortecimento viscoelástico, que fazem uso de dispositivos discretos, por exemplo, poderiam ter sido admitidas para os sistemas analisados, uma vez que as rotinas computacionais podem ser facilmente adaptadas para estas situações. Ademais, modelos para sistemas tridimensionais também podem ser desenvolvidos a partir da metodologia utilizada.

Também não foram consideradas no texto restrições não holonômicas quando da formulação de modelos para sistemas multicorpos. As mesmas podem, por vezes, dificultar a resolução das equações do movimento associadas a sistemas do referido tipo. Entretanto, técnicas podem ser encontradas na literatura, como relatado no Capítulo II, para sua efetiva inclusão em modelos dinâmicos.

A principal limitação associada à metodologia empregada diz respeito à não consideração de não linearidades geométricas nos sistemas multicorpos. Desta forma, efeitos não lineares, oriundos de acoplamento entre deformações longitudinais e transversais e/ou de enrijecimento centrífugo, por exemplo, mostram-se de difícil implementação.

Observa-se, também, que a formulação desenvolvida é aplicável para a análise de sistemas dotados de amortecimento viscoelástico no domínio do tempo, apenas. Isto se faz devido ao modelo considerado para inclusão de comportamento viscoelástico nas equações do movimento de sistemas dinâmicos restritos. O fato levantado talvez não se mostre realmente como uma restrição tendo em vista o caráter não linear associado às equações que regem o equilíbrio dinâmico de sistemas multicorpos. Por serem desta natureza, sua análise é predominantemente conduzida no domínio temporal, ainda que possa ser realizada também no domínio de Fourier. Contudo, análise transiente pode ser conduzida exclusivamente para a primeira situação, uma vez que a segunda dedica-se a situações de regime permanente.

Com base na experiência adquirida com o desenvolvimento desta Dissertação, os seguintes pontos são sugeridos para investigação futura:

- a) Consideração de não linearidades físicas (materiais com comportamento não linear) e geométricas (grandes deslocamentos e deformações) na modelagem de sistemas multicorpos flexíveis;
- b) Extensão da formulação para que possa contemplar restrições não holonômicas, podendo estas estar relacionadas à presença de atrito e/ou de folgas em juntas, por exemplo;

- c) Validação experimental dos modelos numérico-computacionais desenvolvidos;
- d) Consideração de técnicas de redução de modelos não lineares para melhora do desempenho associado à simulação computacional de sistemas multicorpos flexíveis;
- e) Aplicação de análise de sensibilidade para obtenção de orientações que auxiliem o projeto de sistemas de amortecimento viscoelástico aplicados a sistemas multicorpos flexíveis;
- f) Modelagem da propagação de incertezas associadas a parâmetros dos sistemas multicorpos flexíveis;
- g) Consideração e implementação de dispositivos discretos de amortecimento viscoelástico, como juntas rotacionais;
- h) Estudo da influência de segmentação de tratamentos viscoelásticos superficiais restritos visando o aumento de seu desempenho.

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO IX

Referências Bibliográficas

3M DO BRASIL. **Espírito de inovação**. Disponível em: <<http://www.3m.com.br>>. Acesso em: 08 ago. 2012.

AMBRÓSIO, J. A. C.. Dynamics of structures undergoing gross motion and nonlinear deformations: a multibody approach. **Computers and Structures**, v. 59, n. 6, p. 1001-1012, 1996.

AUSTIN, E. M.. **Influences of higher order modeling techniques on the analysis of layered viscoelastic damping treatments**. Blacksburg, Virginia, 1998, 150 p..

BAGLEY, R. L.. **Applications of generalized derivatives to viscoelasticity**. Air Force Institute of Technology, 1979, 133p..

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J.. A generalized derivative model for an elastomer damper. **The Shock and Vibration Bulletin**, v. 49, n. 2, p. 135-143, 1979.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J.. A theoretical basis for the application of fractional calculus. **Journal of Rheology**, v. 27, n. 3, p. 201-210, 1983a.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J.. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures, **AIAA Journal**, v. 23, n. 6, p. 918-925, 1985.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J.. Fractional calculus: a different approach to the finite element analysis of viscoelastically damped structures. **AIAA Journal**, v. 21, n. 5, p. 741-748, 1983b.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J.. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, v. 30, n. 1, p. 133-155, 1986.

BALMÈS, E.; BOBILLOT, A.. Analysis and design tools for structures damped by viscoelastic materials. In: 20th International Modal Analysis Conference, 2002, Los Angeles, Estados Unidos da América. **Anais**, p. 210-216.

BANG, H.; HA, C.-K.; KIM, J. H.. Flexible spacecraft attitude maneuver by application of sliding mode control. **Acta Astronautica**, v. 57, n. 11, p. 841-850, 2005.

BANG, H.; OH, C.-S.. Predictive control for the attitude maneuver of a flexible spacecraft. **Aerospace Science and Technology**, v. 8, n. 5, p. 443-452, 2004.

BATHE, K.-J.. Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: A simple implicit time integration scheme. **Computers and Structures**, v. 85, n. 7-8, p. 437-445, 2007.

BATHE, K.-J.. **Finite element procedures**. [S.l.]: Klaus-Jürgen Bathe, 2007.

BATHE, K.-J.; BAIG, M. M. I.. On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics. **Computers and Structures**, v. 83, n. 31-32, p. 2513-2524, 2005.

BATHE, K.-J.; NOH, G.. Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics. **Computers and Structures**, v. 98-99, p. 1-6, 2012.

BAUCHAU, O. A.. A self-stabilized algorithm for enforcing constraints in multibody systems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 13-14, p. 3253-3271, 2003.

BAUCHAU, O. A.. **Flexible multibody dynamics**. [S.l.]: Springer, 2010.

BAUCHAU, O. A.; JU, C.. Modeling friction phenomena in flexible multibody dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 50, p. 6909-6924, 2006.

BENOSMAN, M.; LE VEY, G.. Control of flexible manipulators: a survey. **Robotica**, v. 22, n. 5, p. 233-245, 2004.

BLAJER, W.. Methods for constraint violation suppression in the numerical simulation of constrained multibody systems - a comparative study. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, n. 13-16, p. 1568-1576, 2011.

BRATLAND, M.; HAUGEN, B.; RØLVÅG, T.. Modal analysis of active flexible multibody systems. **Computers and Structures**, v. 89, n. 9-10, p. 750-761, 2011.

BRINSON, H. F.; BRINSON, L. C.. **Polymer engineering science and viscoelasticity: an introduction**. [S.I.]: Springer, 2008.

BRÜLS, O.. **Integrated simulation and reduced-order modeling of controlled flexible multibody systems**. Université de Liège, 2005, 256 p..

BRÜLS, O.; DUYSINX, P.; GOLINVAL, J.-C.. A systematic model reduction method for the control of flexible multibody systems. In: 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 2004, Warsaw, Polônia. **Anais**.

BRÜLS, O.; DUYSINX, P.; GOLINVAL, J.-C.. The global modal parameterization for non-linear model-order reduction in flexible multibody dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 69, n. 5, p. 948-977, 2007.

CAI, C.; ZHENG, H.; LIU, G. R.. Vibration analysis of a beam with PCLD patch. **Applied Acoustics**, v. 65, n. 11, p. 1057-1076, 2004.

CARACCILO, R.; TREVISANI, A.. Simultaneous rigid-body motion and vibration control of a flexible four-bar linkage. **Mechanism and Machine Theory**, v. 36, n. 2, p. 221-243, 2001.

CASCIATI, F.; MAGONETTE, G.; MARAZZI, F.. **Technology of semiactive devices and applications in vibration mitigation**. [S.I.]: Wiley-Blackwell, 2006.

CHANGJIAN, S.; XIANMIN, Z.; YUNWEN, S.. Complex mode active vibration control of high-speed flexible linkage mechanisms. **Journal of Sound and Vibration**, v. 234, n. 3, p. 491-506, 2000.

CLEMENTE, P.; INDIRLI, M.; SPADONI, B.; ARATO, G. B.; MARTELLI, A.. History of an earthquake. In: 13th World Conference on Earthquake Engineering, 2004, Vancouver, Canadá. **Anais**, Paper n. 2244.

CLEVELAND GOLF. **Golf clubs and accessories**. Disponível em: <<http://www.clevelandgolf.com>>. Acesso em: 08 ago. 2012.

CRAIG, R. R.; KURDILA, A. J.. **Fundamentals of structural dynamics**. 2. ed. [S.I.]: Wiley, 2006.

CUI, M.; XU, S.. Optimal attitude control of flexible spacecraft with minimum vibration. In: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2010, Toronto, Canadá. **Anais**. Paper n. AIAA-2010-8201.

DE JALÓN, J. G.; BAYO, E.. **Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge**. New York: Springer-Verlag, 1994.

DEÜ, J.-F.; GALUCIO, A. C.; OHAYON, R.. Dynamic responses of flexible-link mechanisms with passive/active damping treatment. **Computers and Structures**, v. 86, n. 3-5, p. 258-268, 2008.

DEÜ, J.-F.; MATIGNON, D.. Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 59, n. 5, p. 1745-1753, 2010.

DHARMARAJA, S.; WANG, Y.; STRANG, G.. Optimal stability for trapezoidal-backward difference split-steps. **IMA Journal of Numerical Analysis**, v. 30, n. 1, p. 141-148, 2010.

DISC ROTATOR. **Vinyl pleasure perfected**. Disponível em:
<<http://www.thediscrotator.com/menu.html>>. Acesso em: 08 ago. 2012.

DRAKE, M. L.; SOOVERE, J.. A design guide for damping of aerospace structures. In: Vibration Damping Workshop, 1984, Long Beach, Califórnia, Estados Unidos da América. **Anais**.

DROZDOV, A. D.. **Viscoelastic structures: mechanics of growth and aging**. [S.l.]: Academic Press, 1998.

DUSI, A.; FULLER, K.; TEOH, C. C.; MEZZI, M.. Some recent applications of base isolation using high damping rubber bearings. In: 8th Pacific Conference on Earthquake Engineering Conference, 2007, Cingapura. **Anais**.

DWIVEDY, S. K.; EBERHARD, P.. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. **Mechanism and Machine Theory**, v. 41, n. 7, p. 749-777, 2006.

EL-ABSY, H.; SHABANA, A. A.. Coupling between rigid body and deformation modes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 198, n. 5, p. 617-637, 1996.

EL-ABSY, H.; SHABANA, A. A.. Geometric Stiffness and stability of rigid body modes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 207, n. 4, p. 465-496, 1997.

ELKARANSHAWY, H. A.-E.. **Dynamic Modelling of Flexible Multibody Systems Subjected to Frictional Impact**. McMaster University, 1995, 180 p..

ENELUND, M.; LESIEUTRE, G. A.. Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, n. 29, p. 4447-4472, 1999.

ESCALONA, J. L.; CHAMORO, R.. Stability analysis of vehicles on circular motions using multibody dynamics. **Nonlinear Dynamics**, v. 53, n. 3, p. 237-250, 2008.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA NETO, J. M.; LOPES, E. M. O.. A generalized fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. **Applied Mathematics and Computation**, v. 164, n. 2, p. 493-506, 2005.

FASANA, A.; MARCHESIELLO, S.. Rayleigh-Ritz analysis of sandwich beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 241, n. 4, p. 643-652, 2001.

FERRY, J. D.. **Viscoelastic properties of polymers**. 3. ed. [S.I.]: John Wiley & Sons, 1980.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAM, K.. **Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials with an introduction to linear viscoelasticity**. Amsterdam: North-Holland, 1976.

FISSETTE, P.; VANEGHEM, B.. Numerical integration of multibody system dynamic equations using the coordinate partitioning method in an implicit Newmark scheme. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 135, n. 1-2, p. 85-105, 1996.

FLORES, P.; AMBRÓSIO, J.. Revolute joints with clearance in multibody systems. **Computers and Structures**, v. 82, n. 17-19, p. 1359-1369, 2004.

FLORES, P.; AMBRÓSIO, J.; CLARO, J. C. P.; LANKARANI, H. M.; KOSHY, C. S.. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication. **Mechanism and Machine Theory**, v. 41, n. 3, p. 247-261, 2006.

GALUCIO, A. C.; DEÜ, J.-F.; MENGUÉ, S.; DUBOIS, F.. An adaptation of the Gear scheme for fractional derivatives. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 44-47, p. 6073-6085, 2006.

GALUCIO, A. C.; DEÜ, J.-F.; OHAYON, R.. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. **Computational Mechanics**, v. 33, n. 4, p. 282-291, 2004.

GALUCIO, A. C.; DEÜ, J.-F.; OHAYON, R.. Hybrid active-passive damping treatment of sandwich beams in non-linear dynamics. **Journal of Vibration and Control**, v. 13, n. 7, p. 851-881, 2007.

GASBARRI, P.. A two-dimensional approach to multibody free dynamics in space environment. **Acta Astronautica**, v. 51, n. 12, p. 831-842, 2002.

GÉRADIN, M.; CARDONA, A.. **Flexible multibody dynamics: a finite element approach**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.

GERSTMAYR, J.. **Absolute coordinate formulations for flexible multibody dynamics systems**. Johannes Kepler Universität Linz, 2007.

GHONEIM, H.; KARKOUB, M. A.. Active, shunted, and passive constrained layer damping for the vibration suppression of a flexible four-bar mechanism. **Journal of Vibration and Control**, v. 7, n. 4, p. 551-563, 2001.

GOLLA, D. F.; HUGHES, P. C.. Dynamics of viscoelastic structures - a time-domain, finite element formulation. **Journal of Applied Mechanics**, v. 52, n. 4, p. 897-906, 1985.

GUMUS, E. M.. **Analysis of vibration absorbers using flexible multi-body dynamics**. Texas Tech University, 2010.

HECKMANN, A.. **The modal multifield approach in multibody dynamics**. Universität Hannover, 2005.

HECKMANN, A.; ARNOLD, M.. Flexible bodies with thermoelastic properties in multibody dynamics. In: Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conference, 2005, Madri, Espanha. **Anais**.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L.. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 283-292, 1977.

HU, Q.; SHI, P.; GAO, H.. Adaptive variable structure and commanding shaped vibration control of flexible spacecraft. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 30, n. 3, p. 804-815, 2007.

- HUSSEIN, B.; NEGRUT, D.; SHABANA, A. A.. Implicit and explicit integration in the solution of the absolute nodal coordinate differential/algebraic equations. **Nonlinear Dynamics**, v. 54, n. 4, p. 283-296, 2008.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L.; LIM, H.. Non-linear dynamics of flexible multibody systems. **Computers and Structures**, v. 81, n. 12, p. 1113-1132, 2003.
- ISOTECH. **Linear motion components - ball slides, crossed roller slides and positioning tables**. Disponível em: <<http://www.isotechinc.com>>. Acesso em: 08 ago. 2012.
- JAIN, A.. **Robot and multibody dynamics: analysis and algorithms**. [S.l.]: Springer, 2011.
- JONES, D. I. G.. **Handbook of viscoelastic vibration damping**. [S.l.]: Wiley, 2001.
- KHULIEF, Y. A.. Vibration suppression in rotating beams using active modal control. **Journal of Sound and Vibration**, v. 242, n. 4, p. 681-699, 2001.
- KOUTSOVASILIS, P.. **Model order reduction in structural mechanics: coupling the rigid and elastic multi body dynamics**. Technische Universität Dresden, 2009.
- KOUTSOVASILIS, P.; BEITELSCHMIDT, M.. Comparison of model reduction techniques for large mechanical systems. **Multibody System Dynamics**, v. 20, n. 2, p. 111-128, 2008.
- KWAK, M. K.. New admissible functions for the dynamic analysis of a slewing flexible beam. **Journal of Sound and Vibration**, v. 210, n. 5, p. 581-592, 1998.
- LAKES, R. S.. **Viscoelastic materials**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- LEDESMA, R.; MA, Z.-D.; HULBERT, G.; WINEMAN, A.. A nonlinear viscoelastic bushing element in multibody dynamics. **Computational Mechanics**, v. 17, n. 5, p. 287-296, 1996.
- LESIEUTRE, G. A.; BIANCHINI, E.. Time-domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 117, n. 4, p. 424-430, 1995.
- LESIEUTRE, G. A.; LEE, U.. A finite element model for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastic material properties. **Smart Materials and Structures**, v. 5, n. 5, p. 615-627, 1996.
- LEYENDECKER, S.. **Mechanical integrators for constrained dynamical systems in flexible multibody dynamics**. Technischen Universität Kaiserslautern, 2006.

LI, Z.-B.; WANG, Z.-L.; LI, J.-F.. A hybrid control scheme of adaptive and variable structure for flexible spacecraft. **Aerospace Science and Technology**, v. 8, n. 5, p. 423-430, 2004.

LIMA, A. M. G.. **Procedimentos de modelagem numérica e avaliação experimental de elementos viscoelásticos aplicado ao controle passivo de vibrações mecânicas**. Universidade Federal de Uberlândia, 2003.

LIMA, A. M. G.. **Projeto robusto ótimo de dispositivos de amortecimento viscoelástico aplicados a sistemas estruturais complexos**. Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; LÉPORE NETO, F. P.. An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, n. 4, p. 1272-1281, 2009.

LIN, Y.-H.. **Polymer viscoelasticity: basics, molecular theories, experiments and simulations**. 2. ed. [S.I.]: World Scientific, 2011.

MAGANTI, G. B.; SINGH, S. N.. Simplified adaptive control of an orbiting flexible spacecraft. **Acta Astronautica**, v. 61, n. 7-8, p. 575-589, 2007.

MAINARDI, F.. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models**. Cingapura: Imperial College Press, 2010.

MÄKINEN, J.. **A formulation for flexible multibody mechanics: Lagrangian geometrically exact beam elements using constraint manifold parametrization**. Tampere University of Technology, 2004.

MARIONI, A.. The use of high damping rubber bearings for the protection of the structures from the seismic risk. In: Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, 1998, Lisboa, Portugal. **Anais**.

MASARATI, P.. Constraint stabilization of mechanical systems in ordinary differential equations form. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics**, v. 225, n. 1, p. 12-33, 2011.

MASARATI, P.. Direct eigenanalysis of constrained system dynamics. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics**, v. 223, n. 4, p. 335-342, 2009.

- MCGRATH, J. F.; RAMPALLI, R.. Implicit integration with coordinate partitioning. **Applied Mathematics and Computation**, v. 111, n. 1, p. 7-31, 2000.
- MCTAVISH, D. J.; HUGHES, P. C.. Modeling of linear viscoelastic space structures. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 115, n. 1, p. 103-110, 1993.
- MEIROVITCH, L.. **Analytical methods in vibrations**. [S.I.]: Prentice Hall, 1967.
- MEIROVITCH, L.. **Methods of analytical dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1970.
- MILLER, K. S.; ROSS, B.. **An introduction to the fractional calculus and fractional differentia equations**. [S.I.]: John Wiley & Sons, 1993.
- MOHAMED, Z.; MARTINS, J. M.; TOKHI, M. O.; SÁ DA COSTA, J.; BOTTO, M. A.. Vibration control of a very flexible manipulator system. **Control Engineering Practice**, v. 13, n. 3, p. 267-277, 2005.
- NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P.. **Vibration damping**. [S.I.]: Wiley-Interscience, 1985.
- NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T.. **Nonlinear oscillations**. [S.I.]: Wiley-VCH, 1995.
- NEGRUT, D.. **On the implicit integration of differential-algebraic equations of multibody dynamics**. The University of Iowa, 1998.
- NETO, M. A.; AMBRÓSIO, J. A. C.; LEGAL, R. P.. Composite materials in flexible multibody systems. **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 50-51, p. 6860-6873, 2006.
- NIKRAVESH, P. E.. **Planar multibody dynamics: formulation, programming and applications**. [S.I.]: CRC Press, 2007.
- OLDHAM, K. B.; SPANIER, J.. **The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**. [S.I.]: Academic Press, 1974.
- PÁLFALVI, A.. **Modelling and measuring of viscoelastic material behaviour under cyclic loads**. Budapest University of Technology and Economics, 2010.
- PENNESTRÌ, E.; VALENTINI, P. P.; DE FALCO, D.. An application of the Udwadia-Kalaba dynamic formulation to flexible multibody systems. **Journal of the Franklim Institute**, v. 347, n. 1, p. 173-194, 2010.

PODLUBNY, I.. **Fractional differential equations**. [S.I.]: Academic Press, 1999.

POTVIN, M.-J.. **Comparison of time-domain finite element modelling of viscoelastic structures using an efficient fractional Voigt-Kelvin model or Prony series**. McGill University, 2001.

PREISWERK, M.; VENKATESH, A.. An analysis of vibration control using piezoceramics in planar flexible-linkage mechanisms. **Smart Materials and Structures**, v. 3, n. 2, p. 190-200, 1994.

RADE, D. A.. **O Método dos Elementos Finitos em Engenharia Mecânica**. Notas de aula. 2008.

RAO, M. D.. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 262, n. 3, p. 457-474, 2003.

RAO, S. S.. **The finite element method in engineering**. 4. ed. [S.I.]: Elsevier, 2005.

RIPEPI, M.; MASARATI, P.. Reduced order models using generalized eigenanalysis. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics**, v. 225, n. 1., p. 52-65, 2011.

SAMALI, B.; KWOK, K. C. S.. Use of viscoelastic dampers in reducing wind- and earthquake-induced motion of building structures. **Engineering Structures**, v. 17, n. 9, p. 639-654, 1995.

SAMIN, J. C.; BRÜLS, O.; COLLARD, J. F.; SASS, L.; FISETTE, P.. Multiphysics modeling and optimization of mechatronic multibody systems. **Multibody System Dynamics**, v. 18, n. 3, p. 345-373, 2007.

SCHIEHLEN, W.. Computational dynamics: theory and applications of multibody systems. **European Journal of Mechanics A/Solids**, v. 25, n. 4, p. 566-594, 2006.

SCHIEHLEN, W.. Multibody system dynamics: roots and perspectives. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 2, p. 149-188, 1997.

SCHMIDT, A.; GAUL, L.. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. **Nonlinear Dynamics**, v. 29, n. 1-4, p. 37-55, 2001.

SCHMIDT, A.; GAUL, L.. On the numerical evaluation of fractional derivatives in multi-degree-of-freedom systems. **Signal Processing**, v. 86, n. 10, p. 2592-2601, 2006.

SCHWAB, A. L.; MEIJAARD, J. P.. Dynamics of flexible multibody systems with non-holonomic constraints: a finite element approach. **Multibody System Dynamics**, v. 10, n. 1, p. 107-123, 2003.

SCHWARZL, F.; STAVERMAN, A. J.. Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior. **Journal of Applied Physics**, v. 23, n. 8, p. 838-843, 1952.

SCHWERTASSEK, R.; WALLRAPP, O. SHABANA, A. A.. Flexible multibody simulation and choice of shape functions. **Nonlinear Dynamics**, v. 20, n. 4, p. 361-380, 1999.

SHABANA, A. A.. **Computational dynamics**. 3. ed. [S.I.]: John Wiley & Sons, 2010a.

SHABANA, A. A.. Computer implementation of the absolute nodal coordinate formulation for flexible multibody dynamics. **Nonlinear Dynamics**, v. 16, n. 3, p. 293-306, 1998.

SHABANA, A. A.. **Dynamics of multibody systems**. 3. ed. [S.I.]: Cambridge University Press, 2005.

SHABANA, A. A.. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 2, p. 189-222, 1997.

SHABANA, A. A.. On the definition of the natural frequency of oscillations in nonlinear large rotation problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 15, p. 3171-3181, 2010b.

SHABANA, A. A.; HUSSEIN, B. A.. A two-loop sparse matrix numerical integration procedure for the solution of differential/algebraic equations: application to multibody dynamics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 327, n. 3-5, p. 557-563, 2009.

SHABANA, A. A.; SCHWERTASSEK, R.. Equivalence of the floating frame of reference approach and finite element formulations. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 33, n. 3, p. 417-432, 1998.

SHAW, M. T.; MACKNIGHT, W. J.. **Introduction to polymer viscoelasticity**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005.

SHI, P.. **Flexible multibody dynamics: a new approach using virtual work and graph theory**. University of Waterloo, 1998.

SILVA, C. W.. **Vibration damping, control and design**. [S.I.]: CRC Press, 2007.

SILVA, L. A.. **Internal variable and temperature modeling behavior of viscoelastic structures - a control analysis**. Blacksburg, Virginia, 2003.

SILVA, W. T. M.; BEZERRA, L. M.. Performance of composite implicit time integration scheme for nonlinear dynamic analysis. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2008, Artigo 815029, 16 páginas, 2008.

SIMEON, B.. Numerical analysis of flexible multibody systems. **Multibody System Dynamics**, v. 6, n. 4, p. 305-325, 2001.

SMAC. **Damping products**. Disponível em: <<http://www.smac.fr>>. Acesso em: 08 ago. 2012.

SORBOTHANE. **Shock and vibration solutions**. Disponível em: <<http://www.sorbothane.com>>. Acesso em: 08 ago. 2012.

SUGIYAMA, H.; GERSTMAYR, J.; SHABANA, A. A.. Deformation modes in the finite element absolute nodal coordinate formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 298, n. 4-5, p. 1129-1149, 2006.

TREVISANI, A.. Feedback control of flexible four-bar linkages: a numerical and experimental investigation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 268, n. 5, p. 947-970, 2003.

TRINDADE, M. A.. Optimization of active-passive damping treatments using piezoelectric and viscoelastic materials. **Smart Materials and Structures**, v.16, n. 6, p. 2159-2168, 2007.

TRINDADE, M. A.. **Uma introdução à dinâmica de sistema de multicorpos**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1996.

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A.. Hybrid active-passive damping treatments using viscoelastic and piezoelectric materials: review and assessment. **Journal of Vibration and Control**, v. 8, n. 6, p. 699-745, 2002.

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A.; OHAYON, R.. Finite element modelling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams - Part I: formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 51, n. 7, p. 835-854, 2001.

VARGAS, R.; SOUZA, L. C. G.. Application of the LQG/LTR method for the attitude control of a rigid-flexible satellite. In: 56th International Astronautical Congress, 2005, Fukuoka, Japão. **Anais**. Paper n. IAC-05-C2.2.03.

VERLINDEN, O.; DEHOMBREUX, P.; CONTI, C.. New component modes for flexible multibody systems. In: ASME Design Engineering Technical Conferences, 1997, Sacramento, Califórnia, Estados Unidos da América. **Anais**, Paper VIB-4213.

VLASENKO, D.; KASPER, R.. Method of transformation from inertial to reference frame formulation of flexible multibody systems. In: World Congress on Engineering, 2008, Londres, Reino Unido. **Anais**, v. 2.

WANG, G.. **Analyses of sandwich beams and plates with viscoelastic cores**. The University of Maryland, 2001.

WANG, S.-X.; WANG, Y.-H.; HE, B.-Y.. Dynamic modeling of flexible multibody systems with parameter uncertainty. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 36, n. 3, p. 605-611, 2008.

WASFY, T. M.; NOOR, A. K.. Computational strategies for flexible multibody systems. **Applied Mechanics Reviews**, v. 56, n. 6, p. 553-613, 2003.

YEN, G. G.. Distributive vibration control in flexible multibody dynamics. **Computers and Structures**, v. 61, n. 5, p. 957-965, 1996.

ZHANG, X.; ERDMAN, A. G.. Dynamic responses of flexible linkage mechanisms with viscoelastic constrained layer damping treatment. **Computers and Structures**, v. 79, n. 13, p. 1265-1274, 2001.

ZHANG, X.; SHAO, C.; LI, S.; XU, D.; ERDMAN, A. G.. Robust H_∞ vibration control for flexible linkage mechanism systems with piezoelectric sensors and actuators. **Journal of Sound and Vibration**, v. 243, n. 1, p. 145-155, 2001.

ZHANG, X.; SHAO, C.; SHEN, Y.; ERDMAN, A. G.. Complex mode dynamic analysis of flexible mechanism systems with piezoelectric sensors and actuators. **Multibody System Dynamics**, v. 8, n. 1, p. 51-70, 2002.

ZHANG, Y.; TIAN, Q.; CHEN, L.; YANG, J.. Simulation of a viscoelastic flexible multibody system using absolute nodal coordinate and fractional derivative methods. **Multibody System Dynamics**, v. 21, n. 3, p. 281-303, 2009.

ZHENG, H.; CAI, C.; TAN, X. M.. Optimization of partial constrained layer damping treatment for vibrational energy minimization of vibrating beams. **Computers and Structures**, v. 82, n. 29-30, p. 2493-2507, 2004.

ZHENG, H.; TAN, X. M.; CAI, C.. Damping analysis of beams covered with multiple PCLD patches. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 48, n. 12, p. 1371-1383, 2006.

ZHENG, J.; BANKS, S. P.; ALLEYNE, H.. Optimal attitude control for three-axis stabilized flexible spacecraft. **Acta Astronautica**, v. 56, n. 5, p. 519-528, 2005.