

THIAGO DE PAULA SALES

**MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL
DE SISTEMAS MULTICORPOS FLEXÍVEIS
CONTENDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2012

Página intencionalmente deixada em branco.

THIAGO DE PAULA SALES

**MODELAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL
DE SISTEMAS MULTICORPOS FLEXÍVEIS
CONTENDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade.

UBERLÂNDIA – MG

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

S163m Sales, Thiago de Paula, 1988-
2012 Modelagem numérico-computacional de sistemas multicorpos flexíveis contendo materiais viscoelásticos / Thiago de Paula Sales. - 2012. 106 f. : il.

Orientador: Domingos Alves Rade.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Viscoelasticidade - Teses. 3. Vibração - Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

AGRADECIMENTOS

A minha amiga, namorada e noiva Martina Pafume Coelho, a minha mãe Norma de Jesus Sales, a meu irmão Dhiego de Paula Sales, e a todos meus familiares, pela compreensão e paciência comigo mantidas durante a execução deste trabalho de pesquisa.

A meu orientador, prof. Dr. Domingos Alves Rade, pela sua orientação, pelo convívio, e pelo exemplo de pessoa dedicada e comprometida com suas responsabilidades.

A todos os colegas e amigos que fazem ou fizeram parte do Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis com os quais tive a oportunidade de conviver, antes e durante o período de realização deste trabalho, pela amizade e pelos momentos de descontração proporcionados. Não cito seus nomes aqui por insegurança no que toca ao esquecimento de um ou outro. Tenho convicção de que sabem quem são.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica com quem tive o prazer de adquirir novos conhecimentos.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade concedida para realização do curso.

E aos órgãos de fomento de pesquisa CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico –, CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior –, e FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais –, pelo suporte e auxílio financeiro.

Página intencionalmente deixada em branco.

SALES, T. P.. **Modelagem Numérico-Computacional de Sistemas Multicorpos Flexíveis Contendo Materiais Viscoelásticos**. 2012. 106 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

Esta Dissertação lida com a modelagem dinâmica de sistemas mecânicos dotados de múltiplos corpos contendo elementos flexíveis, os quais são submetidos à presença de amortecimento viscoelástico para o fim de controle passivo de vibrações. Dado que a grande maioria dos estudos anteriormente realizados tratam do controle passivo de estruturas de geometria fixa, os objetivos principais do presente estudo são: i) integrar, de forma sistemática, as formulações atinentes aos diversos aspectos abordados na derivação de modelos numéricos de sistemas multicorpos flexíveis dotados de dispositivos viscoelásticos, a saber: abordagem Lagrangeana da dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis, discretização por elementos finitos, modelos constitutivos viscoelásticos, e integração de sistemas de equações algébrico-diferenciais; ii) implementar computacionalmente e validar um conjunto de procedimentos computacionais destinados à modelagem dinâmica de sistemas multicorpos contendo elementos viscoelásticos; iii) avaliar, por meio de simulações numéricas, a eficiência de utilização da técnica de controle de vibração baseada em materiais viscoelásticos, aplicada a dois tipos específicos de sistemas mecânicos, a saber, mecanismos planos de cadeia fechada e sistemas espaciais contendo apêndices flexíveis. Para modelagem do comportamento viscoelástico, uma lei constitutiva baseada em derivadas fracionárias é considerada. O Método dos Elementos Finitos, associado a sistemas de referência flutuantes, e o Método dos Modos Assumidos são utilizados para a discretização espacial das equações do movimento não lineares dos sistemas analisados. As simulações numéricas são conduzidas para um mecanismo de quatro barras plano flexível e um satélite artificial com apêndices flexíveis e controle de atitude baseado em roda de reação. Os resultados obtidos a partir de integração numérica das equações do movimento dos referidos sistemas permitem evidenciar a influência da flexibilidade nas respostas associadas aos mesmos e comprovam que tratamentos viscoelásticos são eficientes na atenuação de vibrações associadas a deformações elásticas.

Palavras Chave: Viscoelasticidade; Sistemas Multicorpos Flexíveis; Controle Passivo de Vibrações.

Página intencionalmente deixada em branco.

SALES, T. P.. **Computational-Numerical Modeling of Flexible Multibody Systems Containing Viscoelastic Materials**. 2012. 106 f. M.Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

ABSTRACT

This dissertation deals with the dynamic modeling of flexible multibody systems subjected to viscoelastic damping for the purpose of passive vibration control. Accounting for the fact that the large majority of previous research work has been focused on viscoelastic vibration control of fixed-geometry structures, the main goals of this essay are: i) to integrate, systematically, the formulation pertaining to the various aspects addressed in the derivation of the numerical models of viscoelastic flexible multibody systems, namely: Lagrangean approach as applied to flexible multibody systems, finite element discretization, viscoelastic constitutive models, algorithms for numerical solution of differential-algebraic systems of equations; ii) to implement and validate computer codes intended for the dynamics simulation of flexible multibody systems containing viscoelastic elements; iii) to appraise, through numerical simulations, the effectiveness of viscoelastic treatments in terms of vibration mitigation of two types of mechanical systems, namely: closed-chain plane mechanisms and spacecraft containing flexible appendages. A constitutive law based of fractional derivatives is considered for the modeling of the viscoelastic behavior. Both the Finite Element Method, associated to floating reference frames, and the Assumed Modes Method are used to perform spatial discretization of the equations of motion. Numerical simulations are accomplished for two different multibody systems: a plane flexible four bar linkage, and an artificial satellite containing flexible appendages and attitude control based on a reaction wheel. The results obtained from numerical integration of the nonlinear dynamic equations of motion enabled to evaluate the influence of the components' compliance on the dynamic responses. They also prove that viscoelastic treatments can be effectively implemented.

Keywords: Viscoelasticity; Flexible Multibody Systems; Passive Vibration Control.

Página intencionalmente deixada em branco.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	V
RESUMO	VII
ABSTRACT	IX
SUMÁRIO.....	XI
CAPÍTULO I: Introdução	1
1.1 Contextualização do Estudo	1
1.2 Objetivos do Estudo.....	10
1.3 Organização da Dissertação	10
CAPÍTULO II: Revisão Bibliográfica	13
2.1 Dinâmica de Sistemas Multicorpos	13
2.2 Controle Passivo de Vibrações com a Utilização de Materiais Viscoelásticos.....	24
2.3 Controle de Vibrações em Sistemas Multicorpos Flexíveis	26
CAPÍTULO III: Modelagem do Comportamento Viscoelástico	31
3.1 Fundamentos da Viscoelasticidade Linear.....	32
3.2 Funções Dinâmicas de um Material Viscoelástico: Flexibilidade Complexa e Módulo Complexo	37
3.3 Influência de Fatores Ambientais e Operacionais sobre o Desempenho de Materiais Viscoelásticos Destinados ao Controle Passivo de Vibrações.....	40
3.4 O Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura	43

3.5 Modelos Modernos	45
3.5.1 <i>Modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM)</i>	45
3.5.2 <i>Modelo dos Campos de Deslocamentos Anelásticos (CDA)</i>	45
3.5.3 <i>Abordagem pelo Módulo Complexo sob Forma Tabulada.....</i>	46
3.5.4 <i>Modelos com Derivadas Fracionárias.....</i>	46
3.6 Implementação do Comportamento Viscoelástico a Modelos de Elementos Finitos através do Modelo Fracionário de Zener.....	48
3.7 Identificação de Parâmetros Associados ao Comportamento Viscoelástico de Materiais	54
CAPÍTULO IV: Análise Dinâmica de Sistemas Mecânicos pelo Método dos Elementos Finitos e pelo Método dos Modos Assumidos.....	61
4.1 Modelagem de Vigas pelo Método dos Elementos Finitos.....	62
4.1.1 <i>Elemento Finito de Viga de Euler-Bernoulli</i>	62
4.1.2 <i>Elemento Finito de Viga Sanduíche com Camada Viscoelástica</i>	69
4.2 O Método dos Modos Assumidos	78
4.2.1 <i>Modelo de Viga Sanduíche Baseado em Modos Assumidos</i>	79
CAPÍTULO V: Dinâmica de Sistemas Multicorpos Flexíveis.....	85
5.1 Métodos Utilizados para a Modelagem da Dinâmica de Sistemas Multicorpos Flexíveis	85
5.2 Modelagem de Sistemas Multicorpos Flexíveis pela Utilização de Referenciais Flutuantes e do Método dos Elementos Finitos.....	88
5.2.1 <i>Cinemática e Discretização Espacial pelo Uso do Método dos Elementos Finitos.....</i>	88
5.2.2 <i>Desenvolvimento da Expressão para a Energia Cinética</i>	93
5.2.3 <i>Trabalho Virtual e Esforços Generalizados Associados às Tensões e aos Esforços Externos ao Sistema</i>	95
5.2.4 <i>Equações de Restrição</i>	98
5.2.5 <i>Uso das Equações de Lagrange para Obtenção das Equações de Equilíbrio Dinâmico de Sistemas Multicorpos</i>	99
5.3 Integração Numérica das Equações Algébrico-Diferenciais do Movimento	102
5.4 Análise Modal de Sistemas Multicorpos	113

CAPÍTULO VI: Aplicação Numérica: Mecanismo de Quatro Barras Plano Flexível.....	117
6.1 Descrição do Sistema Estudado.....	117
6.2 Análise Modal do Mecanismo de Quatro Barras Plano Flexível.....	119
6.3 Simulações Transientes	123
6.3.1 <i>Validação do Código Implementado no Software MATLAB®.....</i>	125
6.3.2 <i>Influência da Flexibilidade no Comportamento do Sistema.....</i>	128
6.3.3 <i>Utilização de Material Viscoelástico para o Controle de Vibrações do Sistema.....</i>	135
6.3.4 <i>Influências Paramétricas sobre o Comportamento do Tratamento Viscoelástico.....</i>	141
CAPÍTULO VII: Aplicação Numérica: Controle Passivo de Vibrações de Painéis Flexíveis de Satélites Artificiais	147
7.1 Introdução.....	147
7.2 Descrição do Satélite Artificial e Hipóteses de Modelagem.....	148
7.3 Modelagem Matemática do Satélite	150
7.3.1 <i>Cinemática dos Painéis do Satélite Artificial Considerado</i>	150
7.3.2 <i>Expressão para a Energia Cinética do Sistema</i>	152
7.3.3 <i>Trabalhos Virtuais Realizados pelas Tensões e pelos Esforços Externos</i>	154
7.3.4 <i>Equações de Equilíbrio Dinâmico do Sistema.....</i>	155
7.3.5 <i>Funções Admissíveis Associadas ao Método dos Modos Assumidos</i>	156
7.4 Simulações Numéricas	159
7.4.1 <i>Influência do Comprimento do Tratamento Viscoelástico Superficial Restrito.....</i>	161
7.4.2 <i>Influência da Espessura da Camada Restringente.....</i>	162
7.4.3 <i>Influência da Espessura da Camada Viscoelástica</i>	171
7.4.4 <i>Influência da Temperatura</i>	176
CAPÍTULO VIII: Conclusões e Perspectivas Futuras	181
CAPÍTULO IX: Referências Bibliográficas.....	185

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO I

Introdução

1.1 Contextualização do Estudo

Durante as últimas décadas, diversos pesquisadores têm dado atenção à dinâmica de sistemas multicorpos, como pode ser comprovado pela vasta literatura disponível sobre o tema; os artigos de revisão de Wasfy e Noor (2003) e de Dwivedy e Eberhard (2006), por exemplo, fornecem os números impressionantes de 877 e 433 referências acerca do assunto, respectivamente. Enquadra-se nesta grande linha de pesquisa acadêmica, que apresenta grande potencial de aplicação nas áreas industrial e de desenvolvimento tecnológico, a dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis. Como apontado por Shabana (1997), este termo está relacionado à modelagem computacional e à análise de sistemas formados por um conjunto de corpos os quais apresentam a capacidade de se deformar, que se sujeitam a restrições e que são submetidos a movimentos de grande amplitude (o que inclui movimentos de corpo rígido, envolvendo grandes rotações, e também movimentos devidos a deformações). Ainda, tal tipo de sistema pode conter, simultaneamente, elementos flexíveis e rígidos, sendo uns conectados aos outros por intermédio de juntas e/ou elementos capazes de produzir forças, o que abrange, por exemplo, molas, amortecedores e atuadores. Devido às restrições introduzidas por conexões, os deslocamentos aos quais os corpos são submetidos não são totalmente independentes uns dos outros. Além do tratamento dos problemas devidos a restrições e a grandes rotações, empenho também deve ser voltado para que uma correta modelagem da deformação dos corpos flexíveis seja conseguida. Também é importante reconhecer que movimentos devidos à flexibilidade do sistema podem afetar de maneira significativa a metodologia utilizada na formulação do problema de grandes rotações e das restrições. O fato é que, independentemente dos corpos apresentarem pequenas ou grandes deformações, as equações que regem o movimento são altamente não lineares e geralmente exibem um forte acoplamento não linear entre diferentes modos de deslocamento (SHABANA, 1997). Desta forma, há a necessidade de utilização de dinâmica computacional

para a construção e solução de modelos para sistemas multicorpos flexíveis, uma vez que, além das não linearidades inerentes a esta classe de problema, um grande número de coordenadas se faz necessário para que um modelo matemático confiável seja conseguido.

Wasfy e Noor (2003) concordam com Shabana (1997) sobre a definição de sistemas multicorpos flexíveis e sobre a dinâmica que os rege. Ressaltam a possibilidade de haver contato entre corpos do sistema ou mesmo com o ambiente que os cerca. Citam ainda algumas das conexões mais utilizadas em modelos dinâmico-computacionais e em sistemas físicos reais, quais sejam: juntas de revolução, prismáticas, esféricas e planares; parafusos de potência, engrenagens e cames. Ilustrações esquemáticas de algumas destas conexões são fornecidas na Fig. 1.1. Quanto às configurações geométricas que sistemas multicorpos podem assumir, Wasfy e Noor (2003) mencionam as de cadeias fechada e cadeia aberta, que compreendem, respectivamente, mecanismos e manipuladores, por exemplo. Destacam ainda que os problemas que envolvem a dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis podem ser classificados em: problemas diretos, em que os históricos de movimentos, de deformações e de tensões são calculados como resultado de forças e/ou restrições externas aplicadas e/ou devidos a condições iniciais; e problemas inversos, para os quais se deseja determinar as forças generalizadas necessárias à produção de um movimento pré-estabelecido. A importância da dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis também é aludida pelos pesquisadores em questão (WASFY, NOOR, 2003), segundo os quais ela pode desempenhar papel importante na análise, no projeto e no controle de muitos sistemas práticos de engenharia, como em: veículos de transporte terrestre, aéreo e espacial (bicicletas, automóveis, trens, aeronaves, espaçonaves); máquinas-ferramenta e de precisão; manipuladores e sistemas robóticos; mecanismos; estruturas terrestres articuladas (guindastes, pontes levadiças); estruturas espaciais articuladas (satélites, estações espaciais); e sistemas biomecânicos (corpo humano, animais, insetos).

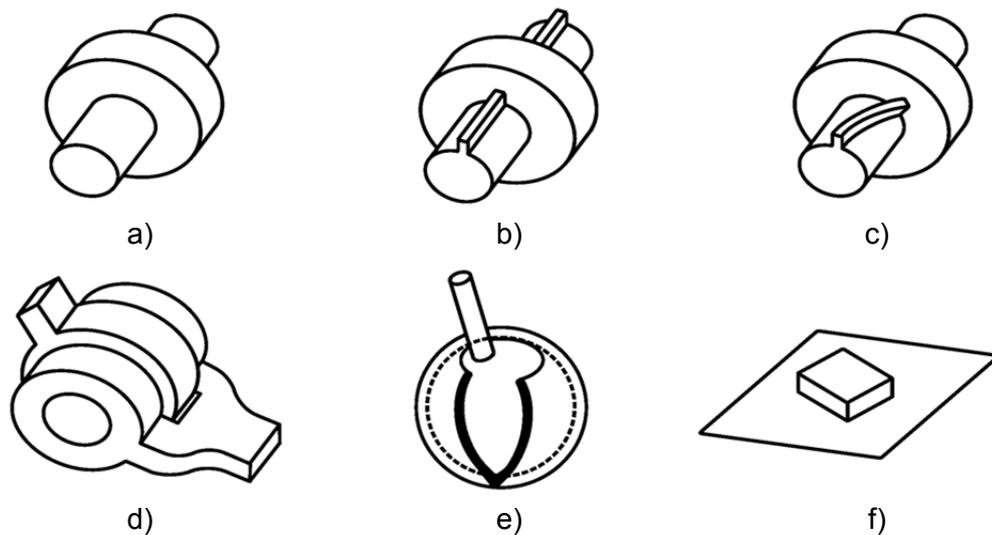


Figura 1.1 - Ilustrações de algumas juntas usadas em sistemas multicorpos: a) junta cilíndrica; b) junta prismática; c) parafuso; d) junta de revolução; e) junta esférica; f) junta planar (adaptado de (BAUCHAU, 2010)).

Devido às exigências cada vez mais rigorosas associadas às aplicações práticas de sistemas multicorpos quanto às necessidades de peso reduzido (que na maioria dos casos leva a um aumento da flexibilidade do sistema) e de altas velocidades, o problema de vibração a eles associado demanda cada vez mais atenção da comunidade científica (SHABANA, 1997; WASFY, NOOR, 2003; SHABANA, 2005; SCHIEHLEN, 2006). Isto se faz verdade uma vez que vibrações atuantes em sistemas mecânicos estão intimamente relacionadas a processos de fadiga, de desgaste e de nucleação/propagação de defeitos, os quais podem levar à falha estrutural; e à transmissão de vibrações e ruído, que pode representar risco à saúde de operadores e/ou usuários de determinados equipamentos. Desta forma, se faz razoável introduzir mecanismos de controle de vibrações, visando tanto o aumento da vida útil da estrutura, como o cumprimento de normas de segurança (CASCIATI, MAGONETTE, MARAZZI, 2006; SILVA, 2007).

O controle de vibrações em estruturas pode ser conseguido, por sua vez, pela utilização de diversas técnicas, as quais podem ser distribuídas nas seguintes classes (LIMA, 2003; CASCIATI, MAGONETTE, MARAZZI, 2006):

- a) *Controle ativo*: neste tipo de abordagem, uma fonte externa de energia é utilizada para acionar um ou mais atuadores que aplicam força(s) pré-estabelecida(s) ao sistema tomando por base seu modelo matemático e/ou respostas do mesmo, obtidas por meio de sensores;
- b) *Controle passivo*: consiste em alterar parâmetros do sistema através de modificações estruturais, através da utilização de mecanismos discretos responsáveis por

dissipar energia vibratória (como amortecedores viscosos, absorvedores dinâmicos de vibração ou elementos piezelétricos combinados com circuitos elétricos ressonantes passivos), ou através da aplicação de materiais capazes de dissipar energia, por exemplo, sob a forma de calor (como materiais com comportamento viscoelástico, empregados em tratamentos que envolvem camadas restritas ou juntas dissipativas);

- c) *Controle híbrido*: faz uso de técnicas combinadas de controle ativo e passivo (como no caso de uma estrutura equipada com um tratamento superficial viscoelástico suplementado por um amortecedor ativo, ou no caso de uma estrutura com base isolada e atuadores controlados ativamente para o aumento de performance);
- d) *Controle semiativo*: implementa alterações controladas nos parâmetros físicos do sistema (massa e/ou rigidez e/ou amortecimento). Materiais inteligentes, como fluidos magneto-reológicos, materiais com memória de forma e materiais piezelétricos, cujas propriedades físicas podem ser alteradas mediante variações de campo magnético, temperatura e campo elétrico, respectivamente, têm sido empregados com essa finalidade.

Embora os controles ativo, híbrido e semiativo sejam mais desejáveis em determinadas aplicações, as técnicas de controle passivo continuam sendo uma alternativa viável tendo em vista as vantagens por elas apresentadas: baixo custo relativo de implementação; estabilidade inerente; e a não dependência de uma fonte de energia externa, o que resolve questões relacionadas à possibilidade de falha, que é muito provável durante eventos ambientais severos.

Ainda, é importante salientar que a utilização de técnicas de controle que atuam em tempo real com vistas à redução de níveis de vibração e de ruído pode não ser factível. Como apontado por Shabana (1997, 2005), Wasfy e Noor (2003), e Bauchau (2010), modelos desenvolvidos para sistemas multicorpos flexíveis são fortemente não lineares e estão associados a um alto custo computacional devido ao grande número de coordenadas necessário para descrever seu movimento, o que dificulta a implementação de técnicas de controle ativo e/ou semiativo, por exemplo. Esforços têm sido dedicados, inclusive, para a redução de modelos não lineares, como se comprova pelos trabalhos recentes desenvolvidos por Brüls (2005) e Koutsovasilis (2009).

Desta forma, o emprego de técnicas de controle passivo de vibrações em sistemas multicorpos flexíveis torna-se ainda mais atrativo. Entre estas técnicas encontra-se a estratégia que utiliza materiais viscoelásticos para a dissipação de energia vibratória sob a forma de energia térmica. Estes materiais têm sido amplamente utilizados nas indústrias aeroespacial, aeronáutica, automobilística e civil, por exemplo (SAMALI, KWOK, 1995; RAO, 2003;

LIMA, 2003; LIMA 2007; SMAC, 2012). São empregados, geralmente, sob a forma de fitas adesivas ou de amortecedores pré-fabricados, como mostrado nas Figs. 1.2 e 1.3 dispostas a seguir.

As Figs. 1.4 a 1.9 exemplificam sua utilização. Na primeira, amortecedores viscoelásticos são mostrados aplicados à *Scuola Gentile-Fermi di Fabriano Potenza* na Itália com o objetivo de dissipar energia proveniente de abalos sísmicos. Na Fig. 1.5, alguns catálogos de publicidade da empresa norte-americana Sorbothane® podem ser visualizados, os quais mostram a aplicação de viscoelasticidade para o controle de vibrações e de choque em aplicações mecânicas e eletrônicas. Um toca-discos sueco cuja base faz uso de uma camada de material viscoelástico com 25 mm de espessura para eliminar vibrações indesejáveis é mostrado na Fig. 1.6. Tacos de golfe da fabricante Cleveland® que incorporam tratamento viscoelástico superficial restrito visando reduzir vibrações indesejáveis são considerados na Fig. 1.7. Quanto à Fig. 1.8, a mesma ilustra blocos de borracha com alta capacidade de amortecimento, comumente utilizados para o isolamento de bases de edifícios com vistas à proteção sísmica. Por fim, a Fig. 1.9 mostra produtos da empresa francesa SMAC® que fazem uso de material viscoelástico com vistas a aplicações nas áreas aeronáutica, aeroespacial, de defesa e automotiva.



Figura 1.2 - Fitas de material viscoelástico da fabricante 3M® (3M, 2012).



Figura 1.3 - Coxins que fazem uso de materiais elastoméricos disponibilizados pela empresa ISOTECH® (ISOTECH, 2012).



Figura 1.4 - Amortecedores viscoelásticos aplicados na área de construção civil (CLEMENTE et al., 2004).



Figura 1.5 - Catálogos publicitários da empresa Sorbothane® (SORBOTHANE, 2012).



Figura 1.6 - Toca-discos com base viscoelástica (DISC ROTATOR, 2012).



Figura 1.7 - Tacos de golfe que incorporam tratamento viscoelástico (CLEVELAND GOLF, 2012).



Figura 1.8 - Aplicação de amortecedores viscoelásticos para isolamento de estruturas civis (MARIONI, 1998; DUSI et al., 2007).

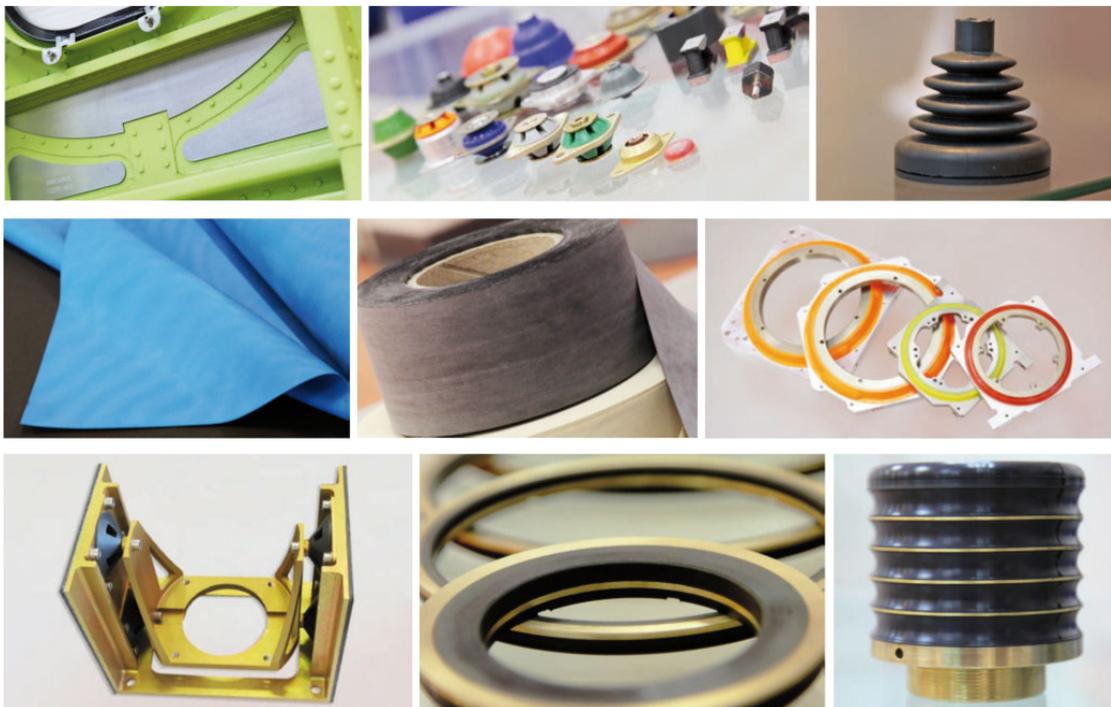


Figura 1.9 - Exemplos de produtos fornecidos pela empresa SMAC® (SMAC, 2012).

Para que uma redução significativa nos níveis de vibração de uma máquina ou estrutura possa ser conseguida com a utilização de materiais viscoelásticos, modelos confiáveis de

seu comportamento elastodinâmico devem estar disponíveis. Como relatado na literatura (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985; JONES, 2001), são várias as influências ambientais e operacionais as quais devem ser consideradas quando do estabelecimento de suas relações constitutivas. Aquelas consideradas mais importantes estão relacionadas à temperatura e à frequência de excitação; outros parâmetros que podem exercer influência por vezes significativa são a carga dinâmica e a pré-carga estática.

Com vistas à inclusão de efeitos induzidos pela temperatura e pela frequência de excitação no comportamento de materiais viscoelásticos, várias estratégias de modelagem são comumente empregadas. A combinação do conceito de módulo complexo com o Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura (PEFT) constitui uma forma clássica de abordar a questão. Neste tipo de modelagem, atribui-se ao material viscoelástico um conjunto de módulos de valor complexo, cujo número depende do material ser isotrópico ou não. Estes últimos são dependentes apenas da frequência. Para inclusão do efeito relacionado à temperatura, o PEFT pode ser usado, uma vez que este estabelece a equivalência entre a influência da variação da frequência de excitação e a influência da variação de temperatura sobre os módulos do material.

A partir da abordagem pelo módulo complexo, previsões podem ser realizadas para estruturas que contêm materiais viscoelásticos no domínio da frequência. Entretanto, quando da simulação de respostas transientes, dificuldades adicionais mostram-se presentes, estando estas relacionadas, por exemplo, à maior complexidade teórica e à disponibilidade de recursos computacionais (capacidade de memória e tempo de processamento). Isto é claramente evidenciado quando são inspecionadas as formas constitutivas clássicas para o comportamento viscoelástico, as quais lidam com integrais de convolução. Por estes motivos, uma grande parte dos trabalhos de pesquisa reportados na literatura tem dado enfoque aos procedimentos de modelagem do comportamento dinâmico no domínio da frequência e, apenas mais recentemente, tem sido dada ênfase ao desenvolvimento de ferramentas computacionais adequadas à simulação dinâmica de materiais viscoelásticos no domínio do tempo, em especial quando associadas à metodologia de discretização do contínuo por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF).

Uma destas técnicas consiste no modelo dos Campos de Deslocamentos Anelásticos (CDA) (LESIEUTRE, BIANCHINI, 1995), o qual decompõe o deslocamento mecânico total em duas partes: uma primeira elástica, e uma segunda anelástica. Esta última é utilizada para representar a parte das deformações que não é instantaneamente proporcional às tensões, o que é conseguido por meio de uma expansão em série composta por campos anelásticos individuais; a evolução de cada um destes no domínio do tempo é regida por uma equação diferencial de primeira ordem. O sistema de equações resultante pode ser expres-

so sob a mesma forma que aquele associado a sistemas mecânicos discretos com vários graus de liberdade sob a presença de amortecimento viscoso.

Outra possibilidade consiste no uso do modelo desenvolvido por Golla e Hughes (1985) e posteriormente considerado por McTavish e Hughes (1993), comumente designado por modelo GHM (Golla-Hughes-McTavish). Neste caso, o módulo complexo é expandido no domínio de Laplace como a soma de funções de transferência racionais. As equações do movimento no domínio do tempo podem ser conseguidas a partir da utilização da transformada inversa de Laplace; variáveis dissipativas internas podem ser definidas e relacionadas às variáveis elásticas. Como acontece para o modelo dos CDA, para o modelo de GHM também resulta um sistema linear de equações diferenciais do movimento de segunda ordem.

Modelos que envolvem derivadas fracionárias constituem mais uma estratégia de modelagem para o fenômeno de viscoelasticidade. Bagley e Torvik (1983a, 1983b, 1985) foram os pioneiros em usar esta abordagem. No início, estes modelos lidavam principalmente com análises no domínio da frequência. Bagley e Torvik (1983a) situaram os modelos que envolvem derivadas fracionárias num contexto molecular, eliminando a ideia de que os mesmos serviriam ao propósito único de ajustes de curvas. Desde então, implementações no domínio do tempo associadas a modelos desenvolvidos com auxílio do MEF começaram a receber maior atenção da comunidade científica; nestes casos, os principais problemas associados a implementações eficientes e robustas dizem respeito ao caráter não local do operador de derivação fracionária, assim como à escolha de um método de discretização particular para o mesmo. Schmidt e Gaul (2001) desenvolveram um modelo de elementos finitos tridimensional considerando uma equação constitutiva diferencial fracionária com cinco parâmetros; Schmidt e Gaul (2006) puderam melhorar a eficiência do referido modelo quando na consideração de um novo esquema de discretização para o operador de derivação fracionária. Galucio, Deü e Ohayon (2004) implementaram um elemento finito de viga sanduíche com uma camada viscoelástica a partir de um modelo constitutivo fracionário com quatro parâmetros, o qual é resolvido pela utilização do método de Grünwald-Letnikov de discretização; o modelo considerado envolve apenas uma variável interna (que deve ser armazenada durante os cálculos), e sua implementação é relativamente simples; visando melhor convergência dos resultados, Galucio et al. (2006) também propuseram um novo esquema de discretização para o operador de derivação fracionária. Mais recentemente, Deü e Matignon (2010) fizeram uso de um esquema difusivo de Newmark para simular sistemas mecânicos com amortecimento a partir de um modelo constitutivo fracionário com quatro parâmetros para a viscoelasticidade; entre os exemplos apresentados em seu trabalho, uma viga viscoelástica discretizada espacialmente pelo MEF foi considerada; os autores destacam a

eficiência numérica em comparação com a estratégia adotada por Galucio, Deū e Ohayon (2004), mas também enfatizam que aspectos associados à avaliação dos parâmetros difusivos do método necessitam melhor investigação.

O principal inconveniente do uso dos modelos dos CDA e de GHM quando associados à discretização por elementos finitos é que eles conduzem a sistemas globais contendo um número muito elevado de graus de liberdade, em virtude do acréscimo de graus de liberdade associados a variáveis dissipativas, tornando esses métodos inviáveis para a análise de grandes sistemas industriais amortecidos (LIMA, 2007). Por este motivo prefere-se a utilização dos modelos que trabalham com derivadas fracionárias, que é implementado no domínio do tempo; e/ou da abordagem pelo módulo complexo, que é implementado no domínio da frequência.

1.2 Objetivos do Estudo

Com base na argumentação precedente, torna-se claro que a implementação de técnicas de controle passivo baseadas em materiais viscoelásticos em sistemas multicorpos flexíveis pode se mostrar efetiva. Assim, os objetivos principais do presente estudo são:

- a) desenvolver os fundamentos teóricos e um conjunto de procedimentos numéricos destinados à modelagem numérico-computacional de sistemas multicorpos flexíveis contendo elementos viscoelásticos aplicados sob a forma de tratamentos superficiais;
- b) avaliar a eficiência de utilização desta técnica de controle de vibração aplicada ao tipo específico de sistema mecânico considerado – isto é, a sistemas multicorpos.

1.3 Organização da Dissertação

Além deste Capítulo I, que introduz as motivações de execução do trabalho e apresenta o objetivo geral do estudo realizado, esta Dissertação conta com ainda mais oito Capítulos, organizados como se descreve a seguir.

No Capítulo II, uma revisão bibliográfica acerca dos temas relacionados ao trabalho é apresentada com um nível maior de detalhamento do que aquele considerado nesta Introdução. Estudos associados à modelagem de materiais viscoelásticos são contemplados, assim como aqueles dedicados à modelagem dinâmica de sistemas multicorpos rígidos e flexíveis. Enfoque também é dado à literatura que aborda a questão do controle de vibra-

ções em sistemas multicorpos flexíveis, bem como técnicas adotadas para a resolução de sistemas de equações algébrico-diferenciais, encontrados quando da formulação do equilíbrio dinâmico de sistemas multicorpos.

No Capítulo III, fundamentos relacionados à teoria da viscoelasticidade linear são apresentados. Equações constitutivas comumente empregadas para representar o comportamento elastodinâmico de materiais viscoelásticos são abordadas. Atenção especial é dada à lei constitutiva que faz uso de diferenciação fracionária e que é posteriormente empregada durante a realização de simulações numéricas.

No Capítulo IV são considerados, sucintamente, dois métodos numéricos empregados para a modelagem numérica do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos. São eles o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Modos Assumidos. As formulações matemáticas associadas a um elemento finito de viga de Euler-Bernoulli e a outro de viga sanduíche são apresentadas. Fazendo uso da mesma teoria de viga sanduíche considerada para o desenvolvimento do elemento finito mencionado anteriormente, um modelo baseado no Método dos Modos Assumidos é ainda desenvolvido para uma viga dotada de tratamento viscoelástico superficial restrito.

No Capítulo V, apresenta-se a fundamentação matemática associada à modelagem dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis. Detalhes maiores são fornecidos para os casos em que os campos de deslocamento do contínuo são discretizados por intermédio do Método dos Elementos Finitos. O algoritmo numérico adotado para a resolução do sistema de equações algébrico-diferenciais que descreve o comportamento de um sistema multicorpos também é descrito neste Capítulo. É também contemplada a análise modal de sistemas multicorpos.

Depois de estabelecidas as bases matemáticas sobre as quais se fundamentam o presente trabalho, são apresentados nos Capítulos VI e VII os resultados oriundos de simulações numéricas.

Primeiramente, no Capítulo VI, um mecanismo plano de quatro barras com elementos de ligação flexíveis é considerado. A validação do código numérico-computacional implementado em ambiente MATLAB[®] é feita por confrontação com resultados obtidos pela utilização do software ANSYS[®] em análises modais e transientes. Posteriormente, a influência da flexibilidade sobre a resposta do sistema é aludida, de forma a evidenciar a importância do controle de vibrações em sistemas multicorpos. A aplicação de tratamento viscoelástico superficial restrito é então considerada para redução de movimentos oriundos da flexibilidade associada aos componentes do sistema. Para avaliar o desempenho da técnica considerada sob determinadas condições geométricas e operacionais, análises paramétricas são também conduzidas.

Então, no Capítulo VII, um satélite artificial constituído por um cubo rígido ao qual painéis flexíveis são acoplados é estudado. Propõe-se a utilização de painéis que admitam camada viscoelástica restrita para a redução de oscilações associadas à flexibilidade do sistema. O modelo matemático considerado para o sistema é apresentado, e resultados obtidos por meio de simulações numéricas permitem evidenciar a potencialidade da estratégia considerada. Análises paramétricas são realizadas, com vistas à avaliação do desempenho da técnica de controle passivo de vibrações frente a certas configurações específicas de operação.

No Capítulo VIII são finalmente apresentadas as conclusões gerais e específicas proporcionadas pelo estudo. Vantagens e desvantagens da metodologia utilizada, assim como pontos que merecem investigação futura, são apontados.

As referências citadas ao longo do texto são apresentadas no Capítulo IX.

CAPÍTULO II

Revisão Bibliográfica

Neste Capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica relacionada a temas abordados nesta Dissertação. É evidente que uma análise que contempla todos os trabalhos relacionados ao tema encontra-se fora do escopo desta Dissertação. Ao invés disso, a revisão foi conduzida para um número restrito de trabalhos, selecionados a partir de sua correlação com os temas em estudo.

O Capítulo está organizado de maneira que o enfoque é primeiramente dado à modelagem de sistemas multicorpos, bem como a métodos numéricos de resolução de sistemas de equações algébrico-diferenciais (ou de redução destes problemas a sistemas de equações puramente diferenciais). Posteriormente, trabalhos associados à viscoelasticidade dedicada ao controle passivo de vibrações são contemplados. Por último, estudos dedicados ao controle de vibrações em sistemas multicorpos flexíveis são considerados.

2.1 Dinâmica de Sistemas Multicorpos

A dinâmica de sistemas multicorpos, como apontado por Bauchau (2010), teve início como uma ferramenta para a análise de sistemas simples, com topologia em árvore. Contudo, desenvolveu-se rapidamente, podendo no seu estágio atual ser aplicada a sistemas complexos que envolvem elasticidade linear e/ou não linear, e a estruturas que apresentam topologias arbitrárias.

Vários livros dedicados ao assunto estão disponíveis. Poucos são dedicados a tópicos menos gerais, como aqueles de Nikraves (2007) e de Shabana (2010a), que lidam essencialmente com sistemas com corpos rígidos, ainda que bastante detalhados. Em sua maioria, abordam questões fundamentais ao entendimento do assunto, num primeiro momento, entre as quais se encontram fundamentos de álgebra linear, cinemática de corpos rígidos e flexíveis, mecânica de corpos deformáveis e possíveis leis constitutivas, formulação das

equações de equilíbrio dinâmico pelas Leis de Newton e/ou pelo Princípio de D'Alembert, fundamentos de mecânica analítica, o princípio do trabalho virtual aplicado a sistemas estáticos e dinâmicos, dinâmica Lagrangeana, etc.. Somente em etapas posteriores conceitos associados a sistemas dinâmicos restritos são geralmente introduzidos, quando restrições são abordadas, e sua incorporação à dinâmica de sistemas é levada em conta. Como é praticamente mandatória a utilização de métodos numéricos para a resolução das equações diferenciais parciais que regem o movimento, uma vez que soluções analíticas são conhecidas apenas para uma pequena gama particular de problemas, uma breve revisão de técnicas de discretização espacial, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), e o Método dos Modos Assumidos (MMA), é, por vezes, apresentada. Mais comum é a presença de seções dedicadas a algoritmos adotados para integração de equações diferenciais ordinárias, que resultam após discretização espacial para problemas que envolvem flexibilidade, ou nas situações em que apenas corpos rígidos constituem um sistema estudado. As obras de De Jalón e Bayo (1994), Gêradin e Cardona (2001), Shabana (2005), Jain (2011) e Bauchau (2010) constituem alguns exemplos de livros disponíveis acerca da dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis.

Várias dissertações e teses são também dedicadas ao estudo de algumas particularidades relacionadas à dinâmica de sistemas multicorpos.

Mäkinen (2004) apresenta em seu trabalho uma formulação geral para a mecânica de sistemas multicorpos flexíveis. De acordo com o autor, como tais sistemas estão geralmente sujeitos a várias restrições, geometria diferencial é necessária para o entendimento da geometria e da cinemática associadas a determinado corpo do conjunto analisado. Desta forma, a formulação apresentada por Mäkinen (2004) é baseada em geometria diferencial, e enfoque especial é dado à variedade de rotação (*rotation manifold*, no inglês); o autor mostra, por exemplo, que vetores de rotação incremental, vetores de velocidade angular e vetores de aceleração angular, quando expressos com respeito à configuração de referência do sistema, pertencem a diferentes espaços tangentes à variedade de rotação. A formulação desenvolvida é ainda aplicada à teoria de vigas de Reissner, que é geometricamente exata; resulta então um elemento finito de viga geometricamente exato baseado num procedimento de atualização totalmente Lagrangeano. Outra aplicação desenvolvida por Mäkinen (2004) diz respeito à parametrização da variedade de restrições (*constraint manifold*, no inglês), a qual surge quando da consideração de equações de restrição holonômicas pontuais.

A Formulação por Coordenadas Nodais Absolutas (FCNA) (*Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF*, no inglês) para o desenvolvimento de elementos finitos de viga, de placa e de casca isoparamétricos é considerada por Gumus (2010). Em sua dissertação, este autor alude às vantagens desta abordagem para o tratamento físico-matemático dado a sis-

temas multicorpos flexíveis. De fato, a FCNA tem sido bem vista pela comunidade que lida com sistemas multicorpos flexíveis; destaca-se aqui que o assunto é introduzido ao leitor na obra de Shabana (2005), e uma coletânea de artigos acerca do tema é incluída na tese de habilitação de Gerstmayr (2007). A técnica considerada adota coordenadas globais de deslocamento, bem como inclinações globais, como coordenadas elementares, de maneira que estas coordenadas, ditas absolutas, podem ser empregadas em conjunto com funções de forma tradicionais para modelar de forma exata a dinâmica associada a corpos rígidos. Outra particularidade da formulação é que a mesma permite a obtenção de matrizes de inércia constantes, de maneira a tornar nulas forças relacionadas às acelerações centrífugas e de Coriolis; contudo, resultam matrizes de rigidez altamente não lineares. Gumus (2010) aplica a metodologia para modelar um absorvedor dinâmico de vibrações posicionado na extremidade de uma viga, para advertir sobre o acoplamento não linear que existe entre os grandes deslocamentos apresentados pela viga e o absorvedor. Enfoque também é dado pelo autor à absorção de vibrações autoparamétricas, e resultados numéricos são comparados àqueles obtidos pela realização de experimentos e através do software computacional MSC Adams[®].

Elkaranshaw (1995), por sua vez, utiliza a formulação baseada em elementos finitos corrotacionais para a análise de sistemas multicorpos flexíveis sujeitos a impactos, com atrito. Além de prever forças de contato e o movimento do sistema, isto é, as posições, as velocidades e as acelerações associadas a seus componentes, a formulação também possibilita avaliar a duração de impactos e as deformações a eles associadas. O autor admite a Lei de Coulomb para modelar forças de atrito, e duas abordagens são adotadas para modelar impactos. A primeira delas é baseada num modelo modificado de balanço de quantidade de movimento; um método baseado em energia é adotado para corrigir erros de balanço de energia que surgem quando no emprego da lei de impacto de Newton ou das hipóteses de Poisson. A segunda estratégia faz uso do método dos multiplicadores de Lagrange; neste caso o modelo respeita as condições de compatibilidade geométrica durante contatos. Várias simulações são também consideradas para ilustrar as técnicas desenvolvidas.

Shi (1998) considera uma nova abordagem para a modelagem de sistemas multicorpos flexíveis. Como apontado pelo autor, a metodologia desenvolvida estende o método dos grafos utilizado para a dinâmica de sistemas multicorpos para que se possibilite a inclusão de corpos flexíveis quando na consideração do trabalho virtual associado a estes últimos. Desta forma, o autor obtém redução do número de equações adotadas para a descrição de sistemas de cadeia fechada, comumente abordados por meio de formulações que fazem uso de coordenadas absolutas ou de coordenadas que caracterizam o movimento de juntas. Vários elementos para compor diagramas de grafos são desenvolvidos pela utilização da

metodologia proposta; entre estes estão incluídos, por exemplo, o elemento de corpo flexível, o elemento de braço flexível e o elemento dependente do trabalho virtual. A cinemática de uma viga de Euler-Bernoulli tridimensional também é considerada, uma vez que Shi (1998) desenvolve um modelo adequado para a mesma em termos da metodologia que se baseia na teoria dos grafos.

Outra contribuição importante à dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis foi dada por Brüls (2005). Em sua tese de doutorado, o autor aborda a questão de redução de modelos não lineares, dando enfoque principalmente à simulação de sistemas multicorpos flexíveis quando estão sujeitos a algum procedimento de controle. O autor propõe o uso de elementos finitos não lineares para modelar a mecânica de sistemas multicorpos flexíveis, e acopla sistemas de controle a esta abordagem numérico-computacional pelo intermédio de diagramas de blocos; ambas as metodologias são combinadas em uma formulação única representativa da totalidade do sistema. Várias aplicações são consideradas nas áreas de robótica e de dinâmica veicular. Outra contribuição de Brüls (2005) é uma metodologia sistemática de redução de modelos não lineares, que transforma um modelo de elementos finitos de alta ordem num modelo de baixa ordem e explícito. Para tanto, o movimento do mecanismo considerado é separado e descrito em termos de modos rígidos e flexíveis, os quais apresentam uma interpretação física no espaço das configurações que o sistema pode exibir. Batizada pelo autor de Parametrização Modal Global (PMG) (*Global Modal Parametrization, GMP*, no inglês), a técnica é empregada para a simulação de um mecanismo de quatro barras, bem como de uma máquina ferramenta que apresenta topologia cinemática paralela.

Leyendecker (2006) preocupa-se com o desenvolvimento de métodos robustos que propiciem acurácia adequada e mostrem-se eficientes para integração das equações que regem a dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis. Além de apresentar um contexto unificado para a dinâmica computacional associada a sistemas multicorpos flexíveis, o autor ainda considera formalismos Lagrangeanos e Hamiltonianos para modelagem da dinâmica, cinco métodos diferentes para que restrições sejam satisfeitas, e três maneiras alternativas de discretização temporal das equações do movimento.

A integração implícita de sistemas de equações algébrico-diferenciais associados a sistemas multicorpos é abordada por Negrut (1998). Em sua tese, um algoritmo que particiona o vetor de coordenadas generalizadas é adotado, de forma que um conjunto de coordenadas independentes pode ser escolhido para representar a evolução temporal do sistema considerado. Em seguida, adota-se um esquema numérico de integração implícita para resolução do sistema de equações ordinárias de segunda ordem resultante, o qual é representado no espaço de estados. Várias fórmulas adotadas para integração numérica são consi-

deradas, entre as quais se encontram: as fórmulas de Newmark de passos múltiplos; as fórmulas de Runge-Kutta; e as fórmulas de Rosenbrock-Nystrom, e um algoritmo SDIRK (acrônimo para *Stiffly-accurate singly diagonal implicit Runge-Kutta*, no inglês), ambos com convergência de quarta ordem com respeito ao passo de tempo adotado. Vários algoritmos também são desenvolvidos por Negrut (1998) para a resolução de sistemas de equações algébrico-diferenciais associados a sistemas multicorpos. De acordo com o autor, além de serem robustos e propiciarem boa precisão, estes se destacam em comparação com algoritmos explícitos tradicionalmente usados pela comunidade – um ganho de duas ordens de grandeza na velocidade de processamento pôde ser percebido quando na simulação de um modelo numericamente rígido adotado para um veículo militar multitarefas com grande mobilidade. O autor destaca que os métodos computacionais por ele propostos possibilitam análise dinâmica eficiente de sistemas que contêm mancais, subsistemas flexíveis que se mostram numericamente rígidos, e subsistemas caracterizados por altas frequências, por exemplo, os quais necessitavam, anteriormente, de grande quantidade de tempo de processamento devido a limitações associadas a métodos de integração até então utilizados.

Heckmann (2005) considera a inclusão dos fenômenos de piezeletricidade e de termoelasticidade a modelos de sistemas multicorpos flexíveis. O trabalho é suportado pelo fato de que tem se tornado corrente a presença de dispositivos piezocerâmicos, por exemplo, em sistemas inteligentes ou adaptativos, visando aumento de desempenho e de conforto frente a vibrações indesejáveis. Além disso, como é comum a geração de grande quantidade de calor em sistemas sujeitos a atrito, torna-se imprescindível a realização de análises térmicas e elásticas combinadas. Heckmann (2005) considera então as influências que os campos eletrostáticos e térmicos exercem sobre a resposta de componentes flexíveis de sistemas multicorpos. A abordagem considerada se distingue por poder ser interpretada como uma extensão da abordagem modal clássica adotada para meios flexíveis lineares e apresentar boa eficiência numérica. Exemplos de moderada complexidade são considerados para validação dos códigos desenvolvidos, e duas aplicações avançadas, envolvendo a estrutura de um vagão ferroviário e uma máquina ferramenta com deslocamentos induzidos por gradientes térmicos, mostram a capacidade da metodologia desenvolvida.

O trabalho de dissertação de Trindade (1996) trata de uma introdução à modelagem dinâmica de sistemas multicorpos. Vários aspectos básicos e fundamentais são levantados pelo autor. Tópicos estudados englobam: a parametrização da operação intrinsecamente não linear de rotação; a utilização do MMA para descrição da flexibilidade de corpos de um determinado sistema; e a obtenção das equações do movimento pela utilização da metodologia Lagrangeana e das equações de Maggi-Kane. As estratégias de controle ótimo e de con-

trole baseado na imposição de polos também são investigadas no âmbito da dinâmica de sistemas multicorpos.

No que diz respeito a artigos publicados acerca da dinâmica de sistemas multicorpos, alguns se dedicam à revisão do tema, tanto apresentando conceitos básicos, como situando os trabalhos de pesquisa mais recentes e mais relevantes do campo considerado.

Wasfy e Noor (2003), por exemplo, abordam as seguintes questões associadas à dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis: modelagem de componentes flexíveis; modelagem de restrições; técnicas de solução; estratégias de controle; problemas acoplados; projeto; e estudos experimentais. As características das formulações que empregam referenciais flutuantes, referenciais corrotacionais e apenas um referencial inercial para a descrição da dinâmica de sistemas multicorpos são levantadas e comparadas. Os autores indicam, ainda, possíveis direções para a condução de pesquisas, envolvendo, por exemplo, aplicações nas áreas de sistemas micro e nanomecânicos, técnicas e estratégias voltadas para o aumento da fidelidade e da eficiência associadas a modelos computacionais, bem como o desenvolvimento de ferramentas que possibilitem a melhoria dos processos e procedimentos adotados para o projeto de sistemas multicorpos flexíveis. Os autores citam a impressionante quantidade de 877 referências.

Dwivedy e Eberhard (2006) lidam com a análise dinâmica de manipuladores robóticos flexíveis. Apresentam uma revisão da literatura relacionada ao tema, de modo que enfoque é dado tanto para trabalhos que consideram flexibilidade de componentes, como para aqueles em que a flexibilidade de juntas é dominante. Métodos de análise utilizados para ambos os casos, suas vantagens e desvantagens, e possibilidade de extensão dos mesmos para problemas gerais são avaliados. Estudos que envolvem modelagem, controle e experimentos são examinados; 433 artigos desenvolvidos nos anos que se estendem de 1974 a 2005 são apreciados pelos autores.

Desenvolvimentos passados, e à época recentes, relacionados à dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis, são considerados por Shabana (1997). Além de lidar com as abordagens tradicionais adotadas para as análises cinemática e dinâmica computacionais de sistemas multicorpos flexíveis, o autor ainda se preocupa em apontar futuras direções de pesquisa para a área. Estas envolvem, por exemplo: estabelecer relações entre as diversas formulações utilizadas para a modelagem de sistemas multicorpos; o estudo da dinâmica associada a impactos e a contatos; a interação que se mostra presente entre algoritmos e estratégias adotadas para controle e o comportamento estrutural de sistemas; o uso de métodos de identificação modal e experimental para a simulação de sistemas; a aplicação de técnicas voltadas a sistemas multicorpos flexíveis para computação gráfica; problemas numéricos; e problemas que envolvem grandes deformações.

O trabalho de Schiehlen (1997), publicado em paralelo àquele de Shabana (1997), traz informações a respeito da origem, do estado da arte e de perspectivas futuras para o campo da dinâmica de sistemas multicorpos rígidos. Como apontado pelo autor, observações históricas mostram que a área considerada baseia-se em mecânica clássica, com aplicações voltadas à análise e ao projeto de mecanismos, giroscópios, satélites, robôs e biomecânica. Schiehlen (1997) aponta como direções futuras para o campo: a padronização de dados; o acoplamento de códigos com programas de auxílio ao desenho (ferramentas *CAD – Computer Aided Drawing*); a identificação de parâmetros; animação em tempo real; problemas que envolvem contato e impacto; a extensão dos formalismos para contemplar sistemas de controle e mecatrônicos; o projeto ótimo de sistemas; análises de resistência; e interação com fluidos. Atenção também é ressaltada para a necessidade do desenvolvimento de métodos analíticos e numéricos voltados à redução de modelos, e a algoritmos especiais associados à resolução de equações diferenciais ordinárias e de sistemas de equações algébrico-diferenciais que se mostrem numericamente eficientes.

Outra parcela de artigos disponibilizados pela comunidade científica é dedicada a temas específicos, geralmente relacionados à fronteira do conhecimento. Estes podem ser divididos, por exemplo, nas categorias relacionadas a: modelagem, análise e aplicações da dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis (envolvendo aspectos analíticos, materiais com comportamento não linear, inclusão de folgas e atrito em modelos, etc.); redução de modelos não lineares; integração numérica de equações algébrico-diferenciais, e/ou puramente diferenciais, com respeito ao tempo; e controle de vibrações.

A modelagem de sistemas multicorpos flexíveis propriamente dita é abordada por vários autores.

Gasbarri (2002) lida com as equações do movimento de um sistema espacial plano, constituído por uma série de barras rígidas interconectadas entre si.

Pennestri, Valentini e De Falco (2010) aplicam a formulação de Udwadia-Kalaba para a modelagem de um sistema multicorpos flexíveis, e particionamento de coordenadas para obter sua resposta transiente.

Schiehlen (2006) apresenta o arcabouço teórico associado a sistemas multicorpos, aborda a eficiência de algoritmos recursivos, apresenta métodos para sua análise dinâmica, e aplicações nas áreas de dinâmica veicular e biomecânica.

Shabana (1998) dá detalhes sobre a implementação computacional da FCNA, quando adotada para aplicações em sistemas multicorpos flexíveis. O autor propõe a utilização de decomposições QR e de Cholesky para obter matrizes esparsas associadas ao sistema com estrutura ótima do ponto de vista numérico, por exemplo.

Ambrósio (1996) apresenta a formulação para a dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis e a aplicação da mesma para o estudo de sistemas estruturais que experimentam deformações não lineares (geométricas e/ou associadas ao material). O procedimento apresentado é utilizado para avaliar a segurança de vagões ferroviários numa situação de impacto representativa de um acidente, e resultados são comparados àqueles obtidos por um software comercial de elementos finitos, e também por meio de ensaios em um modelo em escala real do sistema.

Samin et al. (2007) utilizam a teoria associada à dinâmica de sistemas multicorpos para propor novas abordagens de modelagem e análise de sistemas mecatrônicos industriais, utilizando formulações simbólicas e numéricas, simultaneamente. Os autores aplicam seus conceitos para realizar o controle de uma suspensão semiativa de um automóvel de passageiros real, e em seguida lidam com a otimização do sistema mecatrônico, considerando tanto o modelo multifísico do sistema como o controlador projetado para o mesmo.

Ibrahimbegovic, Taylor e Lim (2003) examinam vários aspectos relacionados à modelagem de sistemas multicorpos flexíveis pelo MEF; os autores apresentam as formulações por eles utilizadas, bem como resultados de diversas simulações numérico-computacionais.

Flores et al. (2006) apresentam uma metodologia de análise de sistemas que têm juntas com folgas e/ou lubrificadas, casos comumente encontrados na realidade. Para tanto, adotam um modelo de contato e o associam a uma força de Coulomb modificada, ou à teoria da hidrodinâmica adotada para mancais, conforme o caso.

Schwab e Meijaard (2003) mostram como equações de restrição não holonômicas podem ser incluídas em formulações que adotam o MEF para discretização espacial. Três exemplos de aplicação são apresentados.

Bauchau e Ju (2006) discutem a inclusão de atrito em juntas mecânicas presentes em sistemas multicorpos. Em seu texto, consideram vários fenômenos, como a cinemática de contato, condições de contato, e a modelagem de forças normais e tangenciais. Alertam também para o fato de que o uso da Lei de Coulomb para o atrito seco pode produzir resultados questionáveis frente à possibilidade de coexistência de regiões de aderência e de escorregamento numa única área de contato (*stick-slip motion*, em inglês), o que provém de instabilidades cinemáticas.

Juntas com folga também são tema de estudo por Flores e Ambrósio (2004), quando apresentam uma metodologia para sua análise computacional. Ilustram o procedimento desenvolvido pela aplicação da mesma a um sistema plano simples.

Quanto à incorporação de materiais com comportamento não linear em sistemas multicorpos, Ledesma et al. (1996) apresentam uma formulação para buchas viscoelásticas que permite sua inclusão em sistemas multicorpos. A validação da abordagem proposta é feita

tomando por base dados coletados pela realização de experimentos com um braço de suspensão veicular.

Zhang et al. (2002) desenvolveram uma metodologia para a avaliação da resposta elastodinâmica de sistemas multicorpos que contêm sensores e atuadores piezelétricos.

Neto, Ambrósio e Leal (2006) estenderam as formulações adotadas para sistemas multicorpos flexíveis para que pudessem incorporar componentes elásticos feitos de materiais compostos laminados. Os pesquisadores aplicam a metodologia para a análise do desdobramento de uma antena de um satélite e discutem os resultados obtidos.

Heckmann e Arnold (2005), por sua vez, colocam em evidência a necessidade de se considerar expansão e outros efeitos térmicos na análise de determinados sistemas multicorpos, como em freios por atrito, máquinas ferramenta com cargas térmicas, dispositivos microeletromecânicos com aquecimento resistivo, etc.. Os autores desenvolvem, desta maneira, fundamentação para a inclusão de materiais com comportamento termoelástico nas formulações tradicionalmente usadas para modelagem da dinâmica de sistemas multicorpos.

Zhang et al. (2009) proporcionam uma nova metodologia para a análise de sistemas multicorpos que apresentam componentes com comportamento viscoelástico; para tanto, fazem uso de um modelo constitutivo que apresenta derivadas fracionárias, e o associam à FCNA adotada para sistemas multicorpos flexíveis.

Aspectos analíticos, como mencionado anteriormente, também são por vezes investigados. El-Absy e Shabana (1996) averiguam o acoplamento entre modos de corpo rígido e flexíveis, dependentes de referenciais locais admitidos na formulação do problema.

Sugiyama, Gerstmayr e Shabana (2006) apresentam interpretação dos modos de deformação obtidos quando na utilização da FCNA em associação com várias métricas de deformação. Com isso, possibilitam a redução do modelo de elementos finitos, reduzindo o tamanho do modelo e, conseqüentemente, os tempos associados a processamento.

Shabana e Schwertassek (1998) discutem a equivalência entre a formulação que faz uso de referenciais flutuantes e a FCNA.

Schwertassek, Wallrapp e Shabana (1999) lidam com a escolha das funções de forma a serem adotadas para discretização espacial, já que são dependentes do referencial local admitido para cada componente do sistema.

El-Absy e Shabana (1997) preocupam-se com a influência de enrijecimento geométrico (centrífugo) na estabilidade de modos elásticos e de corpo rígido de uma viga rotativa.

Vlasenko e Kasper (2008) apresentam uma metodologia para reformular as equações do movimento de um sistema multicorpos escritas num referencial inercial para que sejam válidas num referencial local flutuante.

Shabana (2010b) mostra que as frequências naturais de um sistema linearizado associado a um sistema multicorpos não linear são dependentes do conjunto de parâmetros adotados para descrever a orientação de seus componentes.

Existem ainda trabalhos que lidam com outros tópicos relacionados à modelagem de sistemas multicorpos, mas talvez não se enquadrem bem nas categorias consideradas anteriormente. Por exemplo, Wang, Wang e He (2008) estudam a simulação do comportamento dinâmico de sistemas multicorpos quando estes estão sujeitos a incertezas paramétricas. Fazem uso do Método de Monte Carlo e do Método de Perturbação para solucionar o modelo dito estocástico.

Vários trabalhos dedicados à redução de modelos não lineares também podem ser encontrados na literatura, já que este procedimento é praticamente mandatório para a implementação de controladores em sistemas reais, e mesmo para possibilitar a simulação em tempo real de sistemas multicorpos.

Koutsovasilis e Beitelschmidt (2008) comparam várias técnicas admitidas para a redução de modelos mecânicos com vários graus de liberdade. Consideram, para tanto, um pistão elástico de um motor a combustão interna.

Ripepi e Masarati (2011) discutem a resolução de problemas de autovalor generalizados para a construção de modelos reduzidos a partir da linearização de modelos adotados para sistemas multicorpos.

Verlinden, Dehombreux e Conti (1997) apresentam procedimentos úteis para adequar métodos clássicos de redução de modelos ao contexto de modelagem de sistemas multicorpos. Propõem, também, a adição de modos de aceleração para melhor representar o comportamento dinâmico de sistemas que são submetidos a grandes deslocamentos, e destacam a importância das condições de contorno naturais do problema quando da seleção de modos representativos para o mesmo.

Brüls, Duysinx e Golinval (2004) apresentam um método que possibilita a redução sistemática de modelos adotados para sistemas multicorpos. Propõem a construção de um modelo de elementos finitos que é reduzido em pontos específicos do espaço de trabalho de determinado mecanismo, e a utilização de interpolação por partes para ajustar os dados coletados.

Brüls, Duysinx e Golinval (2007) apresentam um método de redução para modelos não lineares que se baseia na projeção em um subespaço do espaço de trabalho, de maneira a eliminar as restrições associadas ao problema. Os autores definem uma metodologia que distingue modos rígidos e flexíveis, os quais são dependentes da configuração do sistema – consideram a estratégia de PMG, definida por Brüls (2005).

Outro ponto que concentra grande parte dos trabalhos relacionados à dinâmica de sistemas multicorpos é aquele ligado à eficiente resolução de sistemas de equações algébrico-diferenciais e, conseqüentemente, métodos para tratamento de restrições visando à simplificação de sistemas deste tipo a sistemas de equações diferenciais ordinárias. Por isso, em certos casos enfoque também é voltado à resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Bauchau (2003) apresenta um novo algoritmo desenvolvido com a finalidade de fazer com que restrições sejam obedecidas por um sistema multicorpos modelado através do MEF. O algoritmo proposto satisfaz restrições em termos de posição e de velocidade exatamente, e ainda apresenta estabilidade não linear incondicional já que se faz nulo o trabalho realizado pelas forças de restrição quando combinado com discretizações específicas adotadas para os esforços inerciais e elásticos.

Shabana e Hussein (2009) propõem um esquema numérico de integração para a resolução de sistemas de equações algébrico-diferenciais, que é implícito, conta com dois *loops*, e é aplicável a matrizes esparsas, visando ao aumento de desempenho computacional. Ainda, as restrições cinemáticas são satisfeitas, neste caso, em termos de posição, velocidade e aceleração.

Masarati (2011) propõe uma nova metodologia para adicionar restrições cinemáticas a sistemas mecânicos representados por meio de equações diferenciais ordinárias. Uma projeção da solução do problema garante que a mesma respeite derivadas de até segunda ordem das equações de restrição holônomicas, dentro de limites de precisão estabelecidos pelo usuário.

Hussein, Negrut e Shabana (2008) avaliam dois integradores numéricos, um implícito e outro explícito, adotados para a solução de um modelo obtido por meio da FCNA.

McGrath e Rampalli (2000) fazem uso de um integrador numérico implícito baseado em fórmulas de diferenciação retrógrada em conjunto com um esquema de particionamento de coordenadas, que utiliza as equações de restrição e as matrizes jacobianas associadas às mesmas.

Blajer (2011) compara três métodos diferentes que podem ser utilizados para supressão de violação de restrição, quais sejam, o método de Baumgarte, um método de projeção das equações do movimento num espaço que é tangente às equações de restrições, e outro método denominado Braun-Goldfarb.

Simeon (2001) apresenta recomendações para integração numérica de sistemas de equações algébrico-diferenciais.

Fisette e Vaneghem (1996) aplicam o método de Newmark para integração do sistema de equações diferenciais ordinárias obtido a partir de um sistema de equações algébrico-

diferenciais pela utilização do método de particionamento das coordenadas generalizadas utilizadas para descrever o estado do sistema.

2.2 Controle Passivo de Vibrações com a Utilização de Materiais Viscoelásticos

A utilização de materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações em sistemas mecânicos já advém de longa data, o que é comprovado pela maturidade adquirida acerca do tema, e também pelo grande volume de publicações relacionadas. O que motiva o emprego desta classe de materiais para a finalidade ora considerada, como já mencionado no Capítulo I, é a ocorrência de laços de histerese, que implicam dissipação de energia, quando os mesmos são submetidos a carregamentos cíclicos. É claro, contudo, que modelos confiáveis para seu comportamento elastodinâmico devem estar disponíveis para que projetos confiáveis possam ser desenvolvidos.

Quanto à atividade científica relacionada à área, vários livros, teses, dissertações e artigos podem ser encontrados na literatura.

Aspectos básicos e avançados associados à teoria da viscoelasticidade são abordados na obra de Lakes (2009). O tema também é tratado nos livros de Ferry (1980), Drozdov (1998), Shaw e MacKnight (2005), Brinson e Brinson (2008), e Lin (2011). Todos os textos anteriores preocupam-se com a fenomenologia do comportamento viscoelástico, com ensaios para sua caracterização, com técnicas de modelagem uni e multidimensional, com análises de deformação e de tensão, além de fornecerem, por vezes, exemplos elucidativos para certos pontos. Alguns também dão enfoque a assuntos mais específicos, como processos de fabricação de polímeros, aspectos avançados sobre comportamento viscoelástico em nível molecular, e mesmo envelhecimento e degradação de propriedades. A obra de Mainardi (2010), por outro lado, apesar de apresentar os fundamentos básicos associados à viscoelasticidade linear, dá enfoque principalmente a modelos que fazem uso de diferenciação fracionária. Além dos anteriores, podem ser citadas ainda as obras de Nashif, Jones e Henderson (1985) e de Jones (2001), que dão enfoque ao controle de vibrações pela utilização de materiais viscoelásticos.

No que toca a dissertações e teses, Wang (2001) apresenta um estudo que diz respeito à análise de estruturas dos tipos viga e placa sanduíches com núcleo viscoelástico. O autor em questão adota várias abordagens numéricas para conduzir suas análises, sejam elas o MEF, o MMA e o Método dos Elementos Finitos Espectrais. Para o último caso, a dependência da rigidez e do amortecimento de materiais viscoelásticos já pode ser diretamente incluída na formulação, enquanto que para os outros dois, abordagens paramétricas

mostram-se necessárias – no caso em questão o modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM) foi empregado. Os resultados obtidos, consistindo nas frequências naturais, fatores de amortecimento e funções de resposta em frequência para estruturas particulares, foram comparados com dados experimentais, e permitiram validar a abordagem desenvolvida.

Potvin (2001) dá enfoque à modelagem de materiais viscoelásticos no domínio do tempo. O autor compara modelos clássicos àqueles que envolvem derivadas fracionárias e realiza identificação de parâmetros para dois materiais distintos. Considerando uma viga rotativa, os vários modelos estudados são comparados.

Austin (1998) avalia a veracidade da hipótese de que o deslocamento transversal de estruturas sanduíches é constante ao longo de suas espessuras. O autor contesta que a mesma seja válida apenas para os casos em que o tratamento viscoelástico superficial é de pequena espessura, e o material da camada restringente não interfere na resistência à flexão do conjunto. Por meio de experimentos, mostra-se que previsões errôneas para o nível de amortecimento da estrutura podem ser obtidas, principalmente em situações nas quais o tratamento viscoelástico é parcial.

Silva (2003) investiga a influência da temperatura no comportamento de materiais viscoelásticos, e a conseqüente influência deste parâmetro operacional sobre a eficiência de controladores. Modelos de variáveis internas são admitidos para levar em conta a dependência de parâmetros do material com respeito à temperatura, e investigação é feita para avaliar se tais variáveis internas podem ou não ser contempladas quando na redução do modelo mecânico para realização de controle. A partir da utilização de curvas que caracterizam a mudança das propriedades do material com respeito à temperatura, uma metodologia para compensar efeitos oriundos de variações na temperatura é desenvolvida e validada.

Pálfalvi (2010) lida com a descrição do comportamento mecânico exibido por polímeros. Inicialmente, o autor escolhe um modelo para descrição do fenômeno, faz o ajuste de propriedades do material, e compara previsões por parte do mesmo em associação com o MEF com resultados experimentais associados a uma parte de uma máquina. Em seguida, o modelo dos Campos de Deslocamentos Anelásticos (CDA) é considerado em conjunto com o MEF para modelar uma viga e investigar questões até então abertas e não contempladas na literatura. Por fim, uma comparação entre vários métodos utilizados para a solução de equações diferenciais fracionárias, usadas para implementação de viscoelasticidade em modelos mecânicos, é realizada, culminando com a proposição de um novo método que é comparativamente muito mais eficiente.

Trindade e Benjeddou (2002) apresentam um artigo de revisão sobre o controle híbrido de vibrações pela utilização conjunta de materiais viscoelásticos e piezolétricos. Avaliam configurações geométricas propostas na literatura, abordagens para a modelagem de siste-

mas do tipo considerado, e leis empregadas para controle de vigas. A otimização de quatro tipos diferentes de tratamentos viscoelásticos com faces laminadas constituídas por materiais elásticos e piezelétricos é também conduzida através de análises paramétricas relativas ao comprimento e à espessura do tratamento conduzido.

Trindade (2007) apresenta uma metodologia para otimização geométrica e topológica de tratamentos híbridos destinados a aumento de amortecimento estrutural. O tratamento considerado pelo autor conta com camadas viscoelástica, restringente e espaçadora, além de uma viga base e de atuadores piezelétricos. Um modelo de elementos finitos é empregado em conjunto com teoria de estruturas laminadas e com a implementação da viscoelasticidade por meio do modelo dos CDA. Uma redução modal é feita em duas etapas, e o modelo resultante é acoplado a uma estratégia de controle ótimo com entrada limitada. Algoritmos genéticos são utilizados para maximizar o amortecimento ativo-passivo e minimizar o peso adicionado à estrutura.

Espíndola, Silva Neto e Lopes (2005) propõem uma nova técnica adequada à medição do módulo de armazenamento e do fator de perda associados a materiais viscoelásticos. Para tanto, é considerada pelos autores uma função de transmissibilidade complexa. Os parâmetros de um dado material podem ser determinados por meio de um procedimento de ajuste de curvas aplicado a dados experimentais.

2.3 Controle de Vibrações em Sistemas Multicorpos Flexíveis

Além dos trabalhos já considerados anteriormente, ainda são discutidos neste Capítulo algumas publicações relacionadas ao controle de vibrações em sistemas multicorpos flexíveis. Várias estão relacionadas ao controle propriamente dito, enquanto outras apresentam ferramentas úteis para se conduzir a análise modal de sistemas da natureza mencionada, por exemplo.

Ghoneim e Karkoub (2001) investigam a supressão de vibração em um mecanismo de quatro barras flexível. Para tanto, os autores adotam técnicas que fazem uso de tratamento viscoelástico superficial restrito, com camada restringente admitindo configurações passiva, com circuito ressonante passivo, e ativa. As equações são desenvolvidas pela utilização de mecânica Lagrangeana com o auxílio do MMA para discretização espacial, e respostas de decaimento livre, devida a uma deflexão inicial, e transiente, devida a uma excitação externa, são contempladas. As várias estratégias admitidas são comparadas.

Preiswerk e Venkatesh (1994) analisam a possibilidade de controle de vibrações em mecanismos planos flexíveis pela utilização de materiais piezocerâmicos. Os autores utili-

zam o MEF em associação com dinâmica Lagrangeana para estabelecer as equações de equilíbrio dinâmico dos sistemas analisados, e aplicam uma estratégia de controle simples baseada na alocação de polos da função de transferência associada ao sistema em malha fechada. Apresentam resultados numéricos com o fim de avaliar e discutir a estratégia considerada.

Changjian, Xianmin e Yunwen (2000) desenvolvem uma metodologia para mitigar a resposta vibratória associada a mecanismos flexíveis sujeitos a altas velocidades de operação baseada no uso de materiais piezelétricos. O modelo utilizado para controle ativo é desenvolvido com o emprego do MEF em conjunto com uma abordagem variacional modificada do Princípio de Hamilton. Um controlador híbrido modal independente é desenvolvido e implementado tomando como referência a teoria de modos complexos; o mesmo conta com leis de retroalimentação de estado e de controle por antecipação (*feedforward*) de perturbações. Um exemplo baseado num mecanismo de quatro barras flexível é considerado para mostrar a eficácia da estratégia.

Benosman e Le Vey (2004) apresentam uma revisão das estratégias empregadas para o controle de manipuladores flexíveis. Mencionam que os objetivos de controle comumente adotados para esta classe de sistema envolvem regulação do elemento terminal de manipuladores, a parada do mesmo em um intervalo de tempo pré-estabelecido, e o rastreamento de trajetória de elementos terminais e/ou de juntas do sistema. Para tanto, várias estratégias podem ser empregadas, como controle PD, linearização da função de transferência baseada em retroalimentação estática de estado, controle baseado em redes neurais, controle adaptativo, controle com avanço-atraso (*lead-lag*) de fase, etc..

Yen (1996) adota um sistema de controle distribuído baseado em redes neurais para o controle de vibrações em sistemas multicorpos flexíveis.

Galucio, Deü e Ohayon (2007) e Deü, Galucio e Ohayon (2008) desenvolvem um elemento finito de viga sanduíche corrotacional que é empregado para a implementação de controle passivo e híbrido em sistemas multicorpos flexíveis. O referido elemento conta com núcleo de material viscoelástico e faces constituídas por materiais elásticos e piezelétricos. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência da metodologia proposta.

Caracciolo e Trevisani (2001) e Trevisani (2003) propõem e testam, numericamente, um esquema de controle para um mecanismo de quatro barras flexível. A estratégia adotada pelos autores consiste na seleção de um número reduzido de coordenadas que auxiliam no controle independente de posição e de vibração do sistema citado. Para o primeiro caso, admite-se uma lei PID, enquanto que para amortecimento das componentes fundamentais das oscilações associadas às barras do mecanismo é admitida uma lei proporcional. A dinâmica do sistema é representada por um modelo completamente não linear baseado no

MEF. Experimentos são conduzidos por Trevisani (2003) para confirmar a validade da estratégia empregada.

Zhang et al. (2001) apresentam um método de controle robusto baseado na norma H_∞ adequado a mecanismos sujeitos a altas velocidades de operação que contam com sensores e atuadores piezelétricos. O controlador robusto H_∞ é projetado tomando por base as teorias de modos complexos e de controle H_∞ . Simulações numéricas mostram que níveis de vibrações podem ser significativamente reduzidos pelo emprego da técnica desenvolvida, com a aplicação de tensões elétricas admissíveis para os atuadores.

Mohamed et al. (2005) apresentam resultados oriundos de investigações experimentais associadas aos controles de vibrações com retroalimentação e por antecipação em um manipulador muito flexível e que conta com altos níveis de amortecimento por atrito. Depois de conduzirem o desenvolvimento e implementação das estratégias, avaliam sua robustez e comparam seus desempenhos.

Khulief (2001) considera a utilização de controle modal ativo para o controle de vigas rotativas. O modelo dinâmico desenvolvido é baseado no MEF, e escrito em termos de um conjunto reduzido de coordenadas modais. Observação e controle ponto-a-ponto são empregados em conjunto com uma estratégia ótima de retroalimentação de variáveis de estado. A resposta dinâmica do sistema é avaliada numericamente.

Até o momento, apenas estratégias de controle ativo, híbrido ou semiativo foram consideradas. Isto se deve à grande maioria dos trabalhos científicos relacionados à área contemplada, de controle de vibrações em sistemas multicorpos, não verem na opção de controle passivo uma alternativa viável à solução do problema. Autores que optam por essa estratégia são Zhang e Erdman (2001), por exemplo, que avaliam o desempenho de um tratamento viscoelástico superficial restrito aplicado a um mecanismo de quatro barras. Para tanto, o MEF é utilizado na obtenção das equações do movimento. Contudo, para a inclusão de comportamento viscoelástico, uma estratégia demasiado complexa, baseada em carregamentos de memória, implementados por meio de um modelo constitutivo que considera uma integração de convolução, é considerada. Após conduzir integração numérica das equações de equilíbrio dinâmico com o uso do algoritmo de Newmark, os autores conseguem ilustrar a eficácia de tratamentos viscoelásticos superficiais restritos com a finalidade de controle passivo de vibrações em mecanismos flexíveis.

Quanto a ferramentas para avaliação do controle de vibrações em sistemas multicorpos flexíveis, três trabalhos são aqui enumerados; todos lidam com análise modal da referida classe de sistemas.

Escalona e Chamorro (2008) dedicam-se à análise de estabilidade de veículos em trajetórias circulares. Propõem uma nova metodologia para avaliação da mesma sem que seja

necessário recorrer à teoria de Floquet, tornando a averiguação mais simples e computacionalmente eficiente. Para tanto, no decorrer de seu trabalho, apresentam uma metodologia de linearização e de resolução do problema de autovalor associado a sistemas multicorpos, descritos por equações algébrico-diferenciais.

Masarati (2009), por sua vez, apresenta uma metodologia para análise direta do problema de autovalor associado a sistemas mecânicos restritos, similar àquela encontrada no trabalho de Escalona e Chamorro (2008). Um exemplo de aplicação é considerado para ilustrar os passos necessários para completar a análise, e comentários são ainda realizados com respeito à interpretação da solução.

Bratland, Haugen e Rølvåg (2011), em trabalho mais recente, abordam a questão do problema de autovalor associado a sistemas ativos multicorpos flexíveis em malha fechada. Os sistemas considerados admitem controladores que fazem retroalimentação do tipo PID com múltiplas entradas e múltiplas saídas. O modelo dinâmico do sistema mecânico é desenvolvido quando da consideração do MEF. Para diferenciar a estratégia proposta pelos autores daquelas correntes, consideram dois exemplos de aplicação.

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO III

Modelagem do Comportamento Viscoelástico

O presente Capítulo abordará alguns dos principais aspectos relacionados a metodologias utilizadas para modelagem e caracterização do comportamento elastodinâmico de materiais viscoelásticos. Numa primeira instância, alguns fundamentos relacionados à viscoelasticidade linear serão considerados; os fenômenos de relaxação e de fluência serão introduzidos, e apresentar-se-ão os conceitos de funções dinâmicas de um material (flexibilidade complexa, módulo complexo). Em seguida, será comentado a respeito da influência de fatores ambientais e operacionais sobre as propriedades de materiais viscoelásticos. Então serão apresentados alguns dos modelos utilizados para caracterização da dinâmica destes materiais; entre os grupos considerados estão aqueles dos modelos baseados em elementos reológicos simples, bem como aqueles por vezes denominados de modelos modernos. Adianta-se aqui que estes últimos compreendem, por exemplo, o modelo proposto por Golla, Hughes e McTavish (GHM), o modelo baseado nos Campos de Deslocamentos Anelásticos (CDA), a abordagem pela utilização de um módulo complexo sob forma tabulada, e os modelos que envolvem leis constitutivas com derivadas fracionárias. Ênfase será dada a estes últimos, tendo em vista as vantagens por eles apresentadas no tocante a simulações dinâmicas transientes, como custo computacional moderado e facilidade de implementação numérica. Além disso, será deste tipo o modelo adotado para implementação de comportamento viscoelástico em modelos desenvolvidos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), tópico este que também será considerado neste Capítulo.

3.1 Fundamentos da Viscoelasticidade Linear

A teoria clássica da elasticidade lida com propriedades mecânicas de sólidos elásticos, para os quais, de acordo com a Lei de Hooke, a tensão é sempre diretamente proporcional à deformação para pequenas deformações, mas independente da taxa de deformação. Por outro lado, a teoria clássica da fluidodinâmica lida com propriedades de fluidos viscosos para os quais, de acordo com a Lei de Newton para os fluidos, a tensão cisalhante é sempre diretamente proporcional à taxa de deformação, mas independente da deformação.

Materiais viscoelásticos são aqueles que exibem comportamento que é uma combinação daqueles exibidos por sólidos perfeitamente elásticos e por fluidos perfeitamente viscosos. Quando deformações e taxas de deformação são infinitesimais, e as relações temporais entre tensão e deformação podem ser descritas por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, o comportamento viscoelástico é dito linear. Tem-se então que a razão entre tensão e deformação é uma função apenas do tempo, e não da magnitude da tensão. Caso contrário, o comportamento viscoelástico é dito não linear (FERRY, 1980).

Algumas variações quanto à definição de viscoelasticidade podem ser encontradas na literatura. Por exemplo, de acordo com Lakes (2009), materiais viscoelásticos são aqueles para os quais as relações entre tensões e deformações dependem do tempo; de certa forma, esta é completamente equivalente à definição dada por Ferry (1980).

As classes de materiais que exibem comportamento marcadamente viscoelástico são os polímeros, borrachas, borrachas porosas, e géis. Os mesmos podem ser caracterizados por seus módulos (longitudinais) de armazenamento, E' , e de perda, E'' , a partir dos quais pode-se ainda definir o fator de perda $\eta = E''/E' = \tan \delta$. O anterior será considerado em mais detalhes ainda neste Capítulo. São citados neste momento já que a Fig. 3.1 disposta a seguir mostra um gráfico apresentado por Lakes (2009) do módulo de Young de várias das classes de materiais citadas em função do nível de amortecimento interno apresentado pelas mesmas. A partir do gráfico, pode-se facilmente verificar que materiais viscoelásticos não só armazenam energia, mas também a dissipam. Destaca-se que a linha diagonal representa $\tan \delta = 0,6$, e que a maioria dos materiais ocupa a região à esquerda da mesma.

Ressalta-se que o estudo da viscoelasticidade iniciou-se com a análise de fibras de metal e de vidro a altas temperaturas, ainda que à temperatura ambiente estes materiais exibam efeitos viscoelásticos desprezíveis (FERRY, 1980).

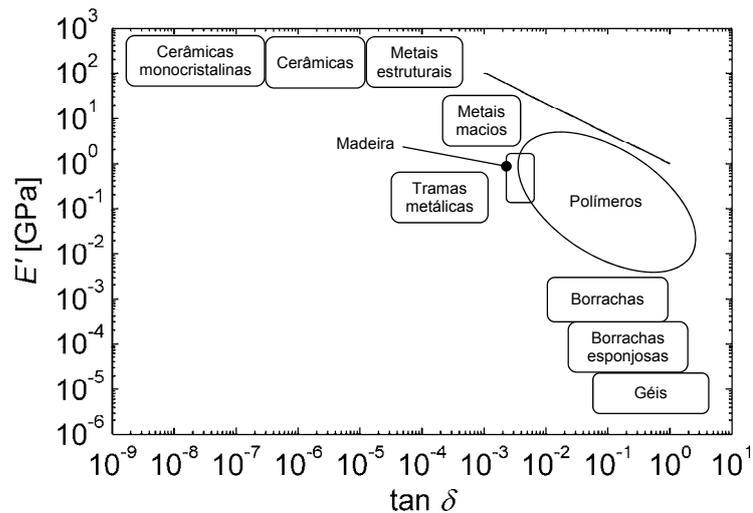


Figura 3.1 - Módulo de elasticidade em função do fator de perda para várias classes de materiais de engenharia (adaptado de (LAKES, 2009)).

Como já mencionado, o comportamento viscoelástico exibido por um material é oriundo da combinação de dois comportamentos bem conhecidos em nível de engenharia.

O primeiro deles é o de um sólido perfeitamente elástico e linear, o qual obedece à Lei de Hooke, que, nos casos de solicitações axial e cisalhante, é dada, respectivamente, por:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) \quad (3.1)$$

e:

$$\tau(t) = G \gamma(t), \quad (3.2)$$

onde $\sigma(t)$ e $\tau(t)$ designam as tensões normal e cisalhante, e $\varepsilon(t)$ e $\gamma(t)$ representam as deformações normal e cisalhante, respectivamente, todas variáveis função do tempo, t . E , é o módulo de elasticidade, ou módulo de Young, e G , que representa o módulo de cisalhamento.

O segundo comportamento está associado àquele exibido por fluidos viscosos e que obedecem à Lei de Newton para os fluidos, que estabelece que a tensão de cisalhamento $\tau(t)$ é diretamente proporcional à taxa de deformação cisalhante $d\gamma(t)/dt = \dot{\gamma}(t)$ pela propriedade física denominada viscosidade, μ :

$$\tau(t) = \mu \frac{d\gamma(t)}{dt} = \mu \dot{\gamma}(t). \quad (3.3)$$

A caracterização do comportamento viscoelástico pode ser feita, por sua vez, segundo o uso de funções que descrevem os fenômenos de fluência e de relaxação associadas ao material (MAINARDI, 2010; LAKES, 2009; FERRY, 1980).

A chamada função de fluência está relacionada a uma alteração na deformação à medida que o tempo passa para uma tensão de solitação constante σ_0 . A flexibilidade de fluência é uma função que descreve este comportamento e é aqui denotada por $J(t)$:

$$J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0. \quad (3.4)$$

Por outro lado, o módulo de relaxação é a função que descreve a variação dinâmica da tensão em resposta a uma deformação constante ε_0 . É aqui representada por $G(t)$, e dada por:

$$G(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0. \quad (3.5)$$

Ressalta-se que, embora $J(t) = 1/G(t)$ para sólidos perfeitamente elásticos (já que $J(t) = J$ e $G(t) = G$, isto é, a flexibilidade de fluência e o módulo de relaxação são independentes do tempo), $J(t) \neq 1/G(t)$ para materiais cujo comportamento é viscoelástico.

Curvas típicas representativas das funções $J(t)$ e $G(t)$ são mostradas na Fig. 3.2.

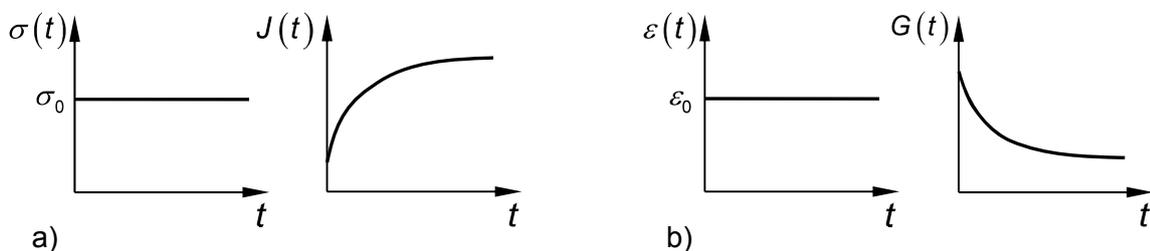


Figura 3.2 - Funções que caracterizam o comportamento de materiais viscoelásticos:

a) histórico de tensão aplicada constante e flexibilidade de fluência; b) histórico de deformação aplicada constante e função de relaxação.

Faz-se importante destacar certas características relacionadas às funções de fluência e de relaxação associadas a um determinado material. Em primeiro lugar, ambas são funções consideradas causais, isto é, nulas para $t < 0$. Os valores limites das funções do material, $J(t)$ e $G(t)$, para $t \rightarrow 0^+$ e para $t \rightarrow +\infty$, estão relacionados aos comportamentos instantâneo (ou vítreo) e de equilíbrio, respectivamente. Adota-se, pois, a notação $J_g := J(0^+)$, $J_e := J(+\infty)$, $G_g := G(0^+)$ e $G_e := G(+\infty)$ para designar a flexibilidade instantânea, a flexibilidade de equilíbrio, o módulo instantâneo e o módulo de equilíbrio, respectivamente (os subscritos g e e fazem referência às palavras inglesas *glass* e *equilibrium*, respectivamente).

Além disso, $J(t)$, no intervalo $0 < t < +\infty$, é uma função diferenciável e crescente, o que pode ser expresso por:

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{dJ(t)}{dt} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq J_g < J(t) < J_e < +\infty, \quad (3.6)$$

enquanto $G(t)$, neste mesmo intervalo, é uma função diferenciável decrescente, o que implica:

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{dG(t)}{dt} < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq G_e < G(t) < G_g < +\infty. \quad (3.7)$$

Tais propriedades estão relacionadas a observações experimentais relacionadas aos fenômenos físicos de fluência e de relaxação.

Utilizando o princípio da superposição de Boltzmann (MAINARDI, 2010), a relação constitutiva de um material viscoelástico, no caso unidimensional, pode ser expressa pela seguinte integral de hereditariedade linear (um caso particular de integral de convolução):

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad (3.8)$$

ou por:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau). \quad (3.9)$$

O caso multidimensional pode ser representado por equações similares às Eqs. (3.8) e (3.9) substituindo as grandezas escalares pelas correspondentes grandezas tensoriais.

Partindo das hipóteses de que para $t < 0$ o material encontra-se sem deformação e de históricos causais e diferenciáveis para $t \in \mathbb{R}_+$, as Eqs. (3.8) e (3.9) podem ser manipuladas para resultar em (MAINARDI, 2010):

$$\sigma(t) = \int_{0^-}^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \varepsilon(0^+)G(t) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.10)$$

e:

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau) = \sigma(0^+)J(t) + \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.11)$$

Nestas equações, o limite inferior de integração é tomado como sendo 0^- para levar em conta a possibilidade de descontinuidades de $\sigma(t)$ e/ou de $\varepsilon(t)$ em $t=0$.

Outra forma de expressar a relação constitutiva dada nas Eqs. (3.8) e (3.9) é integrando por partes as Eqs. (3.10) e (3.11), de modo a se obter:

$$\sigma(t) = G_g \varepsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

e:

$$\varepsilon(t) = J_g \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (3.13)$$

onde $\dot{J}(t)$ e $\dot{G}(t)$ são as taxas de fluência e de relaxação, respectivamente.

No domínio de Laplace, as Eqs. (3.10) a (3.13), por se tratarem de tipo especial de integral de convolução, assumem as formas:

$$\tilde{\sigma}(s) = s \tilde{G}(s) \tilde{\varepsilon}(s); \quad (3.14)$$

$$\tilde{\varepsilon}(s) = s \tilde{J}(s) \tilde{\sigma}(s), \quad (3.15)$$

sendo S a variável de Laplace. Ressalta-se que $\tilde{f}(s)$ denota a transformada de Laplace da função causal $f(t)$, dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (3.16)$$

A partir das Eqs. (3.14) e (3.15) é possível mostrar que:

$$s\tilde{J}(s) = \frac{1}{s\tilde{G}(s)} \Leftrightarrow \tilde{J}(s)\tilde{G}(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (3.17)$$

Por utilização da transformada inversa de Laplace, a Eq. (3.17) pode ser reescrita para resultar em:

$$J(t)*G(t) := \int_0^t J(t-\tau)G(\tau) d\tau = \int_0^t G(t-\tau)J(\tau) d\tau = t. \quad (3.18)$$

A partir da Eq. (3.17), pode-se deduzir, ainda, levando em conta teoremas relacionados a limites e à transformada de Laplace, que:

$$J_g = 1/G_g \quad (3.19)$$

e que:

$$J_e = 1/G_e. \quad (3.20)$$

3.2 Funções Dinâmicas de um Material Viscoelástico: Flexibilidade Complexa e Módulo Complexo

Outra forma comum de caracterizar o comportamento viscoelástico é considerar excitações harmônicas que atuam sobre um corpo de tal natureza. As respostas correspondentes são denominadas funções dinâmicas do material, e descrevem por completo o comportamento viscoelástico quando consideradas em conjunto com as funções apresentadas anteriormente, relacionadas à fluência e à relaxação. De acordo com Findley, Lai e Onaram

(1976, apud MAINARDI, 2010), experimentos de fluência e de relaxação podem fornecer informações sobre determinado material viscoelástico a partir de um limite inferior para a escala de tempo, da ordem de 10 segundos; as funções dinâmicas, por sua vez, são capazes de propiciar dados para a representação de materiais na região delimitada pelas ordens de grandeza de 10^{-8} a 10^3 segundos. Além disso, as funções dinâmicas de materiais viscoelásticos estão diretamente relacionadas ao armazenamento e à dissipação de energia mecânica.

As funções dinâmicas do material podem ser obtidas a partir de excitação harmônica; esta pode ser estabelecida tanto em termos de deformação quanto em termos de tensão, de forma que:

$$\sigma(t) = e^{j\omega t} \quad \text{ou} \quad \varepsilon(t) = e^{j\omega t}, \quad \omega > 0, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (3.21)$$

sendo ω a frequência angular da função harmônica de excitação ($\omega = 2\pi f$, com f sendo a frequência cíclica, dada em Hz) e $j = \sqrt{-1}$.

Levando em conta as Eqs. (3.8) e (3.9), as excitações anteriores levam às respostas seguintes:

$$\sigma(t) = e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t) = J^*(\omega) e^{j\omega t}, \quad J^*(\omega) = j\omega \int_0^{+\infty} J(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (3.22)$$

$$\varepsilon(t) = e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \sigma(t) = G^*(\omega) e^{j\omega t}, \quad G^*(\omega) = j\omega \int_0^{+\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.23)$$

Para as funções $J^*(\omega)$ e $G^*(\omega)$ são comumente adotadas as nomenclaturas de flexibilidade complexa, e módulo complexo, respectivamente. Estas estão relacionadas à transformada de Fourier, ou alternativamente à transformada de Laplace, para $s = j\omega$, das funções $J(t)$ e $G(t)$.

Caso seja introduzida a defasagem $\delta(\omega)$ entre a excitação e a resposta de um material viscoelástico linear, como definidas nas Eqs. (3.22) e (3.23), torna-se possível escrever a flexibilidade e o módulo complexos como disposto a seguir:

$$J^*(\omega) = J'(\omega) - jJ''(\omega) = |J^*(\omega)| e^{-j\delta(\omega)}; \quad (3.24)$$

$$\mathbf{G}^*(\omega) = \mathbf{G}'(\omega) + j\mathbf{G}''(\omega) = |\mathbf{G}^*(\omega)| e^{j\delta(\omega)}. \quad (3.25)$$

Devido a considerações energéticas, deve-se ter que $\delta(\omega)$ é positivo; mais especificamente, $0 < \delta(\omega) < \pi/2$, já que as componentes reais e imaginárias de $J^*(\omega)$ e $G^*(\omega)$ (J' , J'' , G' e G'') devem ser positivas. Usualmente adota-se a nomenclatura de flexibilidade de armazenamento e módulo de armazenamento para $J'(\omega)$ e $G'(\omega)$, respectivamente; quanto a $J''(\omega)$ e $G''(\omega)$, são denominados de flexibilidade de perda e de módulo de perda. Estas nomenclaturas estão associadas com o armazenamento e com a perda (dissipação) de energia mecânica que ocorrem nos materiais viscoelásticos. Adicionalmente, pode ainda ser definido o fator de perda como:

$$\eta(\omega) = \tan \delta(\omega) = \frac{J''(\omega)}{J'(\omega)} = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)}, \quad (3.26)$$

parâmetro este que está diretamente relacionado à capacidade de um material viscoelástico dissipar energia.

Conforme demonstrado por Mainardi (2010), um parâmetro útil para a análise da quantidade de energia W_s armazenada pelo material é a média tomada durante um ciclo completo da excitação. Esta é dada por:

$$\langle W_s(\omega) \rangle := \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W_s(\tau) d\tau = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_0^2 \omega G'(\omega) \int_0^{2\pi/\omega} (1 - \cos 2\omega\tau) d\tau = \frac{1}{4} \varepsilon_0^2 G'(\omega), \quad (3.27)$$

a qual corresponde à metade da quantidade máxima de energia coerente armazenável.

Para a quantidade de energia dissipada W_d , geralmente se considera a quantidade de energia coerente que seria dissipada durante um ciclo completo da excitação:

$$\Delta W_d(\omega) := \int_t^{t+T} \dot{W}_d(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0^2 G''(\omega) \int_0^{2\pi/\omega} (1 + \cos 2\omega\tau) d\tau = \pi \varepsilon_0^2 G''(\omega). \quad (3.28)$$

Por inspeção das Eqs. (3.27) e (3.28) pode-se justificar a nomenclatura comumente adotada para os módulos de armazenamento e de perda, $G'(\omega)$ e $G''(\omega)$, respectivamente.

Para quantificar o nível de amortecimento proporcionado por um material viscoelástico, é usualmente adotada a função de dissipação específica (por unidade de volume de material), ou o amortecimento interno, ambos sendo iguais ao inverso do fator de qualidade $Q(\omega)$:

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W_d(\omega)}{W_s^*}, \quad (3.29)$$

onde $W_s^* = 2 \langle W_s(\omega) \rangle$ é a quantidade máxima de energia coerente armazenada durante um ciclo de excitação. Fazendo uso das Eqs. (3.27) a (3.29), verifica-se que:

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W_d(\omega)}{W_s^*} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi \varepsilon_0^2 G''(\omega)}{\frac{1}{2} \varepsilon_0^2 G'(\omega)} = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} = \tan \delta(\omega) = \eta(\omega), \quad (3.30)$$

donde se justifica a nomenclatura adotada para o fator de perda $\eta(\omega)$, como definido na Eq. (3.26).

3.3 Influência de Fatores Ambientais e Operacionais sobre o Desempenho de Materiais Viscoelásticos Destinados ao Controle Passivo de Vibrações

A compreensão de como o amortecimento de materiais viscoelásticos varia de acordo com condições ambientais e operacionais a que são submetidos é essencial para que um projeto de controle de ruídos e vibrações seja realizado de maneira efetiva e funcional (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985).

A temperatura é usualmente considerada como sendo o fator ambiental mais importante que afeta as propriedades de um material com características de amortecimento. Sua influência pode ser observada na Fig. 3.3, na qual quatro regiões distintas podem ser observadas.

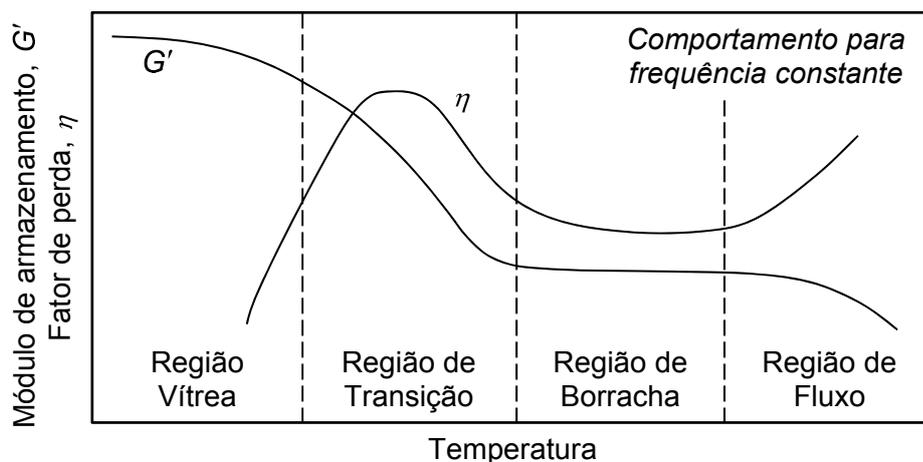


Figura 3.3 - Comportamento típico do módulo de armazenamento e do fator de perda em função da temperatura para materiais viscoelásticos (adaptado de (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985)).

A primeira é a região de comportamento vítreo, onde o módulo de armazenamento do material apresenta seu máximo e o fator de perda é significativamente pequeno. Nesta região, percebe-se pouca variação do módulo de armazenamento com a temperatura; o fator de perda, contudo, aumenta rapidamente à medida que se eleva o valor do parâmetro considerado. A segunda região, a de transição, é caracterizada por um máximo no fator de perda e rápido decaimento do módulo de armazenamento. A terceira, por sua vez, é a região de borracha, para a qual tanto o módulo de armazenamento quanto o fator de perda assumem valores pequenos e que quase não variam com a temperatura. Por último, tem-se a região de fluxo, típica de poucos materiais viscoelásticos e termoplásticos. Nesta, o módulo de armazenamento continua a diminuir à medida que o material vai se tornando fluido, enquanto o fator de perda volta a assumir valores altos. Vale ressaltar que a região de fluxo não é comumente empregada no projeto de sistemas de amortecimento em face de instabilidades e outras propriedades físicas não desejáveis. Ainda, ela não existe para uma gama de materiais, como para polímeros que apresentam cadeias cruzadas.

Quando da utilização prática de materiais viscoelásticos para o fim de controle de vibrações e ruído, o desejável é que estes se encontrem na região de transição, por ser nela onde se fazem presentes os maiores valores para o fator de perda, responsável pela dissipação de energia sob a forma de calor. Muitas vezes, contudo, são empregados na região de borracha, já que nesta situação há elevada estabilidade estrutural e poucas variações do fator de amortecimento com a temperatura, o que poderia representar um risco e/ou um aspecto crítico em determinado projeto.

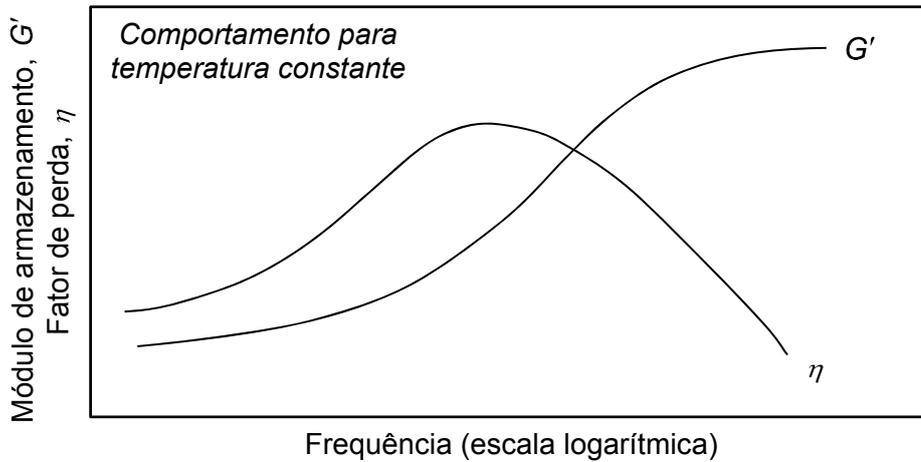


Figura 3.4 - Comportamento típico do módulo de armazenamento e do fator de perda em função da frequência para materiais viscoelásticos (adaptado de (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985)).

A Fig. 3.4 mostra a influência da frequência de excitação sobre as propriedades do material. A faixa de frequências é da ordem de 10 décadas e a temperatura é mantida fixa. Na comparação entre as Figs. 3.3 e 3.4 percebe-se que o comportamento em frequência é o inverso daquele em temperatura, qualitativamente. Entretanto, são necessárias várias décadas de frequência para que o comportamento do material seja equivalente àquele relacionado à mudança de alguns poucos graus na temperatura (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985).

Este fenômeno é um dos mais importantes aspectos da teoria da viscoelasticidade linear, fornecendo a base para o Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura, o qual é utilizado para transformar as propriedades do material do domínio da frequência para o domínio da temperatura, e vice-versa (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985; LIMA, 2003).

Como apontado por Nashif, Jones e Henderson (1985), outros fatores como deformação dinâmica cíclica e pré-carga estática também influenciam o comportamento de materiais viscoelásticos. Entretanto, o amortecimento que é inerente desta classe de materiais advém da relaxação e recuperação da cadeia polimérica depois de deformada, no caso de polímeros, ou da relaxação e recuperação devida a condições de equilíbrio termodinâmicas, no caso de estruturas vítreas. Em qualquer uma das situações, o que se faz presente é o mecanismo de movimentação molecular, que é significativamente influenciado pela temperatura e pela frequência da excitação. Em virtude disto, tanto as influências oriundas de deformação cíclica dinâmica quanto aquelas provenientes de pré-carga estática não serão aqui contempladas.

3.4 O Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura

Considere-se um material para o qual a viscoelasticidade é devida a processos de rearranjo molecular ou de difusão. Nestes casos, a temperatura pode ser tomada como um parâmetro de medida da velocidade destes processos, uma vez que o movimento molecular é afetado pela variável em questão (LAKES, 2009). Se todos os processos que contribuem à viscoelasticidade do material são acelerados da mesma maneira quando submetidos a um determinado aumento de temperatura, então o módulo de cisalhamento complexo do material pode ser escrito sob a forma:

$$G^*(\omega, T) = G^*(\omega_r, T_0), \quad (3.31)$$

onde T denota a temperatura e $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ é denominada frequência reduzida, sendo $\alpha_T(T)$ um fator de deslocamento; T_0 é uma temperatura de referência. A classe de materiais que obedece a Eq. (3.31), ou atendem ao Princípio da Equivalência Frequência-Temperatura (PEFT), é denominada de materiais termoreologicamente simples (SCHWARZL, STAVERMAN, 1952, apud LAKES, 2009).

Para esta classe de materiais viscoelásticos, uma mudança na temperatura alonga ou comprime a escala efetiva de frequência. Como as propriedades de materiais viscoelásticos geralmente são fornecidas como funções logarítmicas da frequência, uma mudança na temperatura corresponde a um deslocamento horizontal nas curvas de propriedades do material na direção do eixo logarítmico da frequência. Curvas de propriedades que são construídas a partir da frequência reduzida ω_r (ou equivalentemente a partir do fator de deslocamento α_T) são denominadas curvas mestras. Um exemplo é mostrado na Fig. 3.5 para o material ISD112TM da fabricante 3M[®], para o qual são disponibilizadas as seguintes equações empíricas (DRAKE, SOOVERE, 1984; SILVA, 2003):

$$G^*(\omega_r, T_0) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_5 (jf_r/B_3)^{-B_6} + (jf_r/B_3)^{-B_4}}; \quad (3.32)$$

$$\log_{10} \alpha_T = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + 2.303 \left(\frac{2a}{T_0} - b \right) \log_{10} \left(\frac{T}{T_0} \right) + \left(\frac{b}{T_0} - \frac{a}{T_0^2} - S_{A0} \right) (T - T_0). \quad (3.33)$$

Nestas equações, B_i ($i = 1, \dots, 6$), a , b e S_{A0} são constantes usadas para ajustar as Eqs. (3.32) e (3.33) a dados experimentais. As mesmas são fornecidas na Tab. 3.1.

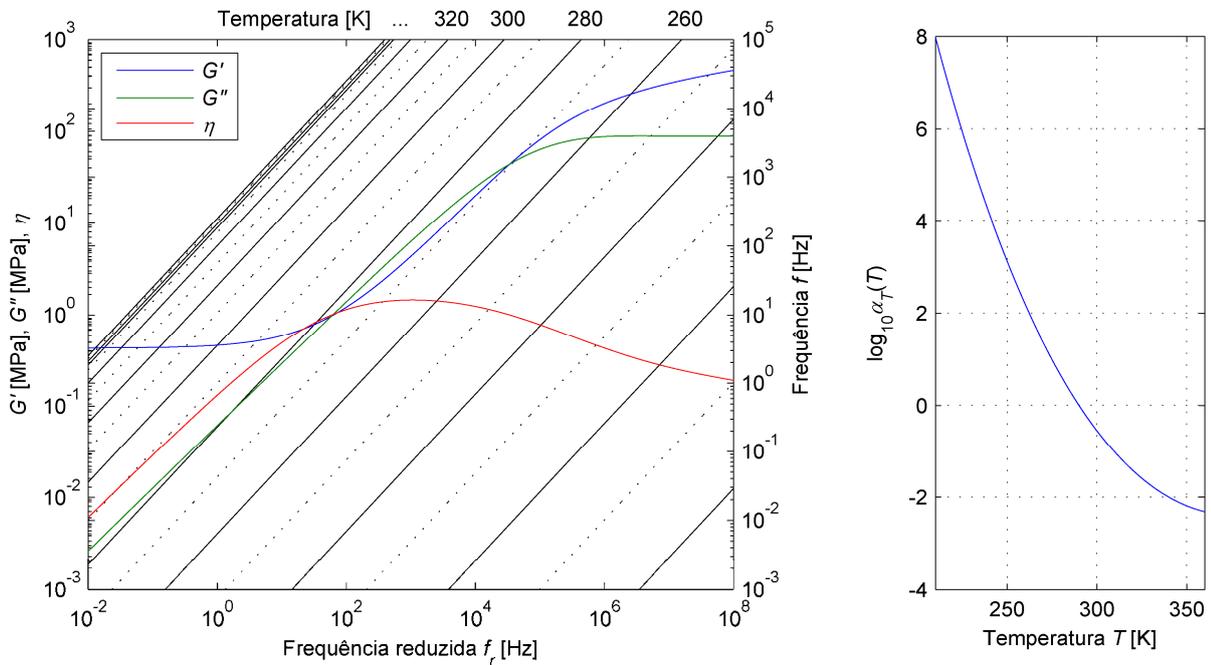


Figura 3.5 - Propriedades associadas ao material viscoelástico ISD112™ da fabricante 3M®: a) módulo de armazenamento, módulo de perda e fator de perda em função da frequência reduzida; b) fator de deslocamento em função da temperatura absoluta.

Tabela 3.1 - Constantes associadas ao módulo complexo e ao fator de deslocamento do material ISD112™, dados nas Eqs. (3.32) e (3.33), respectivamente.

B_1 [MPa]	0,4307	$a = (D_B C_C - C_B D_C) / D_E$ $b = (C_A D_C - D_A C_C) / D_E$ $C_A = (1/T_L - 1/T_0)^2$ $D_A = (1/T_H - 1/T_0)^2$ $C_B = 1/T_L - 1/T_0$ $D_B = 1/T_H - 1/T_0$ $C_C = S_{AL} - S_{A0}$ $D_C = S_{AH} - S_{A0}$ $D_E = D_B C_A - C_B D_A$
B_2 [MPa]	1200	
B_3 [MHz]	1,543	
B_4	0,6847	
B_5	3,241	
B_6	0,18	
T_0 [K]	290	
T_L [K]	210	
T_H [K]	360	
S_{A0} [1/K]	0,05956	
S_{AL} [1/K]	0,1474	
S_{AH} [1/K]	0,009725	

3.5 Modelos Modernos

Diversas abordagens têm sido consideradas para modelagem do comportamento viscoelástico de materiais. Neste trabalho, elas são agrupadas numa classe de modelos “modernos” para a viscoelasticidade, ainda que alguns já estejam em estudo há mais de uma década.

3.5.1 Modelo de Golla-Hughes-McTavish (GHM)

O modelo de GHM faz uso da seguinte expressão analítica para o módulo complexo do material no domínio de Laplace:

$$s\tilde{G}(s) = G_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{n_{GHM}} \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right), \quad (3.34)$$

onde G_0 , α_i , ζ_i e ω_i , $i = 1, \dots, n_{GHM}$, são os parâmetros a serem identificados e associados ao material. Para avaliar o módulo complexo $G^*(\omega)$ a partir da Eq. (3.34), basta fazer $s = j\omega$. Devido à semelhança da função de transferência que aparece na expansão em série com aquela associada a sistemas mecânicos amortecidos, fala-se que o modelo de GHM é constituído pela associação de n_{GHM} miniosciladores.

Para mais detalhes acerca do modelo propriamente dito e sobre sua implementação em associação com o Método de Elementos Finitos, recomenda-se a consulta dos trabalhos de Golla e Hughes (1985) e de McTavish e Hughes (1993).

3.5.2 Modelo dos Campos de Deslocamentos Anelásticos (CDA)

O modelo dos CDA é análogo, em termos, ao de GHM. Para o mesmo, o módulo complexo do material no domínio de Laplace é expandido como segue:

$$s\tilde{G}(s) = G_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{n_{CDA}} \frac{\Delta_i s}{s + \Omega_i} \right), \quad (3.35)$$

onde G_0 , Δ_i e Ω_i , $i = 1, \dots, n_{CDA}$, são os parâmetros a serem identificados para correta representação do comportamento viscoelástico de determinado material; Ω_i representa o inverso do tempo característico de relaxação do material (a deformação constante), enquanto que Δ_i é a magnitude desta relaxação.

Para mais detalhes acerca do modelo dos CDA, consultar Lesieutre e Bianchini (1995), Lesieutre e Lee (1996) e Enelund e Lesieutre (1999).

3.5.3 Abordagem pelo Módulo Complexo sob Forma Tabulada

Outra possibilidade para modelar o comportamento de materiais viscoelásticos consiste em utilizar um ou mais módulos complexos sob forma tabulada, em quantidade que depende do grau de anisotropia do meio. Por exemplo, se o material for isotrópico e o seu coeficiente de Poisson ν for considerado independente da frequência, o que ajuda na análise, mas pode ser inconsistente com dados experimentais para diversos materiais (LAKES, 2009), então apenas um de seus módulos complexos necessita ser conhecido – o longitudinal $E^*(\omega) = E_{xx}^* = E_{yy}^* = E_{zz}^*$, ou o transversal $G^*(\omega) = G_{xy}^* = G_{yz}^* = G_{zx}^*$, já que nesta situação:

$$E^*(\omega) = 2(1 + \nu)G^*(\omega). \quad (3.36)$$

Ainda, se considerado o PEFT, discutido na Seção 3.4, pode-se estabelecer um valor para $G^*(\omega, T)$ caso se conheça $\alpha_T(T)$ – ver Eq. (3.31). De forma simplificada, tem-se à disposição, então, dados do material para certa quantidade de pares (ω, T) sob forma tabulada. Fazendo uso de interpolações e extrapolações baseadas no comportamento do material, simulações realistas podem ser conseguidas quando da associação desta técnica com o MEF (BALMÈS, BOBILLOT, 2002; LIMA et al., 2009).

Por ser uma abordagem não paramétrica, fica claro que não é necessária a identificação de parâmetros de modelos a partir de um procedimento numérico de otimização, por exemplo.

3.5.4 Modelos com Derivadas Fracionárias

A utilização de derivadas fracionárias (isto é, de ordem não inteira) para auxiliar na representação do comportamento de materiais data da primeira metade do século XX, de acordo com Mainardi (2010). Vários resultados semelhantes foram conseguidos de forma independente, o que dá suporte a sua utilização. Entretanto, foi apenas na década de 1980 que a estratégia tornou-se mais bem difundida com a publicação de trabalhos por Bagley (1979) e Bagley e Torvik (1979, 1983a, 1983b, 1986).

Por exemplo, o Sólido Fracionário Padrão Generalizado pode ser conseguido por meio da proposição de relações constitutivas em que tensão e deformação são submetidas a operadores diferenciais de ordens fracionárias:

$$\left(1 + \sum_{k=1}^p a_k \frac{d^{v_k}}{dt^{v_k}}\right) \sigma(t) = \left(m + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^{v_k}}{dt^{v_k}}\right) \varepsilon(t), \quad v_k = k + \nu - 1, \quad (3.37)$$

sendo $0 < \nu < 1$, a_k ($k = 1, \dots, p$), m e b_k ($k = 1, \dots, q$) os parâmetros associados ao modelo. Define-se aqui o operador de diferenciação fracionária como a seguir:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = {}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.38)$$

onde $\Gamma(z)$ denota a função Gamma:

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} u^{z-1} e^{-u} du, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (3.39)$$

Para definições matemáticas mais rigorosas e informações mais detalhadas sobre Cálculo Fracionário, consultar a literatura (OLDHAM, SPANIER, 1974; MILLER, ROSS, 1993; PODLUBNY, 1999).

As seguintes funções de flexibilidade e de relaxação estão relacionadas à Eq. (3.37):

$$J(t) = J_g + \sum_n J_n \left\{ 1 - E_\nu \left[-\left(\frac{t}{\tau_{\varepsilon,n}}\right)^\nu \right] \right\} + J_+ \frac{t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}; \quad (3.40)$$

$$G(t) = G_e + \sum_n G_n E_\nu \left[-\left(\frac{t}{\tau_{\sigma,n}}\right)^\nu \right] + G_- \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \quad (3.41)$$

onde todos os coeficientes são não-negativos e $E_\alpha(z)$ é a função de Mittag-Leffler:

$$E_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.42)$$

A partir da Eq. (3.37), vários modelos mais simples podem ser obtidos:

Modelo fracionário de Newton:

$$\sigma(t) = b_1 \frac{d^\nu \varepsilon(t)}{dt^\nu} \quad \left\{ \begin{array}{l} J(t) = \frac{t^\nu}{b_1 \Gamma(1+\nu)} \\ G(t) = \frac{b_1 t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Modelo fracionário de Kelvin-Voigt:

$$\sigma(t) = m \varepsilon(t) + b_1 \frac{d^\nu \varepsilon(t)}{dt^\nu} \quad \left\{ \begin{array}{l} J(t) = \frac{1}{m} \left\{ 1 - E_\nu \left[-(t/\tau_\varepsilon)^\nu \right] \right\} \\ G(t) = m + \frac{b_1 t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Modelo fracionário de Maxwell:

$$\sigma(t) + a_1 \frac{d^\nu \sigma(t)}{dt^\nu} = b_1 \frac{d^\nu \varepsilon(t)}{dt^\nu} \quad \left\{ \begin{array}{l} J(t) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{t^\nu}{b_1 \Gamma(1+\nu)} \\ G(t) = \frac{b_1}{a_1} E_\nu \left[-(t/\tau_\sigma)^\nu \right] \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Modelo fracionário de Zener:

$$\sigma(t) + a_1 \frac{d^\nu \sigma(t)}{dt^\nu} = m \varepsilon(t) + b_1 \frac{d^\nu \varepsilon(t)}{dt^\nu} \quad \left\{ \begin{array}{l} J(t) = J_g + J_1 \left\{ 1 - E_\nu \left[-(t/\tau_\varepsilon)^\nu \right] \right\} \\ G(t) = G_e + G_1 E_\nu \left[-(t/\tau_\sigma)^\nu \right] \end{array} \right. \quad (3.46)$$

onde, na Eq. (3.46), $J_g = a_1/b_1$, $J_1 = 1/m - a_1/b_1$, $\tau_\varepsilon = b_1/m$, $G_e = m$, $G_1 = b_1/a_1 - m$, e $\tau_\sigma = a_1$.

3.6 Implementação do Comportamento Viscoelástico a Modelos de Elementos Finitos através do Modelo Fracionário de Zener

Nesta Seção é apresentada uma forma de implementar o comportamento viscoelástico de materiais a modelos de elementos finitos quando na utilização daqueles modelos com derivadas fracionárias considerados anteriormente. Mais especificamente, será dado enfoque à implementação do modelo fracionário de Zener, já que ele é mais geral que os modelos fracionários de Newton, Kelvin-Voigt e Maxwell. Credita-se a abordagem apresentada aqui a Galucio, Deü e Ohayon (2004). Destaca-se, contudo, que outras abordagens para

implementação de comportamento viscoelástico associado a modelos de elementos finitos (pela utilização dos modelos com derivadas fracionárias) podem ser encontradas na literatura. Entre as mais recentes encontram-se as propostas por Schmidt e Gaul (2001) e por Deü e Matignon (2010).

A abordagem proposta por Schmidt e Gaul (2001) é muito semelhante à utilizada por Galucio, Deü e Ohayon (2004). Nestes trabalhos, os autores fazem uso do esquema de discretização de Grünwald-Letnikov para o operador de derivação fracionária de forma a obter uma expressão explícita para a tensão desenvolvida no material. Com isso, o trabalho virtual devido aos esforços relacionados às tensões que aparecem no contínuo pode ser formulado no contexto do MEF, conduzindo, ao final do procedimento, com a utilização dos Princípios Variacionais da Mecânica, às equações que governam o movimento de determinado corpo. Schmidt e Gaul (2001) fazem uso de um modelo constitutivo derivativo fracionário que apresenta cinco parâmetros (similar àquele apresentado na Eq. (3.46), mas com ordens de derivação fracionária diferentes para a tensão e para a deformação); desta forma, a tensão num dado instante de tempo é expressa em termos dos históricos de deformações e de tensões. Com isso, integração numérica no domínio do elemento deve ser realizada a cada passo de tempo para que a parcela de contribuição devida às tensões passadas ao vetor de esforços devidos às mesmas possa ser computada. Galucio, Deü e Ohayon (2004) utilizam o modelo fracionário de Zener, Eq. (3.46), para modelar a equação constitutiva da viscoelasticidade; como as derivadas da tensão e da deformação são de ordens idênticas, os autores realizam uma substituição de variável de forma a discretizar apenas uma das derivadas fracionárias. Com isso, faz-se necessário armazenar o histórico de uma única variável interna (uma deformação anelástica), que pode ser expandida em termos do vetor de coordenadas generalizadas quando na consideração das interpolações adotadas para as deformações.

Deü e Matignon (2010), por outro lado, propõem a simulação de sistemas cujo amortecimento é dado por uma lei derivativo-fracionária pela utilização simultânea do método clássico de integração de Newmark e da representação difusiva de operadores fracionários (que os transforma em sistemas diagonais de equações diferenciais lineares). Os autores aplicam a metodologia à simulação de um sistema discretizado espacialmente pelo MEF, e ainda alegam superioridade com respeito à abordagem utilizada por Galucio, Deü e Ohayon (2004). Entretanto, como apontado pelos próprios autores, uma melhor investigação deve ser conduzida no que diz respeito à seleção dos valores numéricos assumidos pelos parâmetros que regem os processos difusivos associados a operadores diferenciais fracionários, bem como no que toca à estabilidade do esquema.

Para o desenvolvimento a ser apresentado, o modelo fracionário de Zener, Eq. (3.46), é reescrito da forma sugerida por Galucio, Deü e Ohayon (2004):

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad (3.47)$$

onde τ é um tempo de relaxação, e E_0 e E_∞ são os módulos relaxado (para $\omega \rightarrow 0$) e não-relaxado (para $\omega \rightarrow +\infty$) do material, respectivamente. Comparando as Eqs. (3.46) e (3.47), tem-se:

$$\alpha = \nu, \quad \tau = \sqrt[3]{a_1}, \quad E_0 = m, \quad E_\infty = b_1/a_1. \quad (3.48)$$

Introduzindo a deformação anelástica:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \sigma(t)/E_\infty, \quad (3.49)$$

que é uma variável interna utilizada para resolução da equação constitutiva considerada, pode-se reescrever a Eq. (3.47) como segue:

$$\bar{\varepsilon}(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)}{dt^\alpha} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t). \quad (3.50)$$

Eliminada uma das derivadas fracionárias que aparecem na Eq. (3.47), pode-se fazer uso do esquema de discretização de Grünwald-Letnikov para o operador de diferenciação fracionária de forma a possibilitar a resolução da Eq. (3.50). Este esquema de discretização estabelece que:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = {}_0D_t^\alpha f(t) \approx (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha) f(t - k\Delta t), \quad (3.51)$$

onde Δt é o passo de tempo utilizado na discretização temporal, N_α é o número de termos utilizados para aproximação de ${}_0D_t^\alpha f(t)$, e $A_{k+1}(\alpha)$ são os denominados coeficientes de Grünwald, dados por:

$$A_{k+1}(\alpha) = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} = \frac{k-\alpha-1}{k} A_k(\alpha), \quad A_1(\alpha) := 1. \quad (3.52)$$

Fazendo uso da Eq. (3.51) para aproximar $d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)/dt^\alpha$ na Eq. (3.50), resulta a solução:

$$\bar{\varepsilon}(t) = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t) - c \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha) \bar{\varepsilon}(t - k\Delta t), \quad (3.53)$$

onde $c = \frac{\tau^\alpha}{\tau^\alpha + (\Delta t)^\alpha}$ é uma constante adimensional.

Se considerada a expressão para a deformação anelástica dada na Eq. (3.49), pode-se escrever a tensão $\sigma(t)$ como:

$$\sigma(t) = E_\infty [\varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t)] = [E_0 + c(E_\infty - E_0)] \varepsilon(t) + c E_\infty \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha) \bar{\varepsilon}(t - k\Delta t). \quad (3.54)$$

O resultado apresentado na Eq. (3.54) é válido para sollicitação uniaxial. Nos casos de sollicitação multiaxial, os tensores tensão e deformação podem ser expressos sob forma vetorial, e o tensor das propriedades relaxadas do material sob forma matricial. Denotando estes três últimos por $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ e \mathbf{E}_0 , respectivamente, e considerando comportamento isotrópico, bem como coeficiente de Poisson constante (independente da frequência), resulta, a partir da Eq. (3.54), que:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0}\right) \mathbf{E}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(t) + c \frac{E_\infty}{E_0} \mathbf{E}_0 \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t - k\Delta t). \quad (3.55)$$

No contexto do MEF, como será mais bem esclarecido no Capítulo IV desta Dissertação, um vetor $\mathbf{w}^j(\mathbf{x}, t)$ que agrupa um conjunto de diferentes campos de deslocamento independentes é geralmente interpolado no interior do domínio de um elemento finito j como disposto a seguir:

$$\mathbf{w}^j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}^j(\mathbf{x}) \mathbf{e}^j(t), \quad (3.56)$$

onde $\mathbf{S}^j(\mathbf{x})$ é a matriz das funções de forma (ou de interpolação) associada ao elemento finito j , sendo \mathbf{x} o vetor posição no interior do mesmo, e $\mathbf{e}^j(t)$ é o vetor dos graus de liberdade elementares.

A partir da Eq. (3.56), as velocidades $\dot{\mathbf{w}}^j(\mathbf{x}, t)$ podem ser avaliadas, e então a energia cinética elementar T^j pode ser expressa sob a forma:

$$T^j = \frac{1}{2} \int_{V^j} \rho^j (\dot{\mathbf{w}}^j)^T \dot{\mathbf{w}}^j dV^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^j)^T \int_{V^j} \rho^j (\mathbf{S}^j)^T \mathbf{S}^j dV^j \dot{\mathbf{e}}^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^j)^T \mathbf{M}^j \dot{\mathbf{e}}^j, \quad (3.57)$$

onde $V^j = V^j(\mathbf{x})$ é o domínio do elemento, ρ^j é sua massa específica, e \mathbf{M}^j é a matriz de inércia elementar.

As deformações que ocorrem no domínio do material podem ser obtidas através de diferenciação espacial dos campos de deslocamentos generalizados:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D} \mathbf{w}^j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D} \mathbf{S}^j(\mathbf{x}) \mathbf{e}^j(t), \quad (3.58)$$

sendo \mathbf{D} um operador diferencial. Ainda, considerando a Eq. (3.55), as tensões a nível elementar são dadas por:

$$\boldsymbol{\sigma}^j(\mathbf{x}, t) = \left(1 + c^j \frac{E_\infty^j - E_0^j}{E_0^j} \right) \mathbf{E}_0^j \boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}, t) + c^j \frac{E_\infty^j}{E_0^j} \mathbf{E}_0^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha^j) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^j(\mathbf{x}, t - k\Delta t), \quad (3.59)$$

de forma que o trabalho virtual elementar associado às mesmas pode ser calculado a partir de:

$$\delta W_s^j = - \int_{V^j} [\boldsymbol{\sigma}^j(\mathbf{x}, t)]^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}, t) dV^j. \quad (3.60)$$

Se as deformações anelásticas forem interpoladas como a seguir:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D} \mathbf{S}^j(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{e}}^j(t), \quad (3.61)$$

onde $\bar{\mathbf{e}}^j(t)$ é um vetor de variáveis internas, então pode-se combinar as Eqs. (3.58) a (3.61) para que resulte:

$$\delta W_s^j = (\mathbf{Q}_s^j)^T \delta \mathbf{e}^j(t). \quad (3.62)$$

Nesta última equação, \mathbf{Q}_s^j denota o vetor de esforços associado às tensões a nível elementar, dado por:

$$\mathbf{Q}_s^j = - \left(1 + c^j \frac{E_\infty^j - E_0^j}{E_0^j} \right) \mathbf{K}^j \mathbf{e}^j(t) - c^j \frac{E_\infty^j}{E_0^j} \mathbf{K}^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t), \quad (3.63)$$

onde:

$$\mathbf{K}^j = \int_{V^j} [\mathbf{S}^j(\mathbf{x})]^T \mathbf{D}^T \mathbf{E}_0^j \mathbf{D} \mathbf{S}^j(\mathbf{x}) dV^j \quad (3.64)$$

representa a matriz de rigidez elementar.

Se o trabalho virtual relacionado aos esforços externos puder ser escrito sob a forma:

$$\delta W_e^j = (\mathbf{Q}_e^j)^T \delta \mathbf{e}^j(t), \quad (3.65)$$

onde \mathbf{Q}_e^j é o vetor de carregamentos externos generalizados, pela utilização das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^j}{\partial \dot{\mathbf{e}}^j} \right)^T - \left(\frac{\partial T^j}{\partial \mathbf{e}^j} \right)^T = \mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}_s^j + \mathbf{Q}_e^j \quad (3.66)$$

resulta o seguinte sistema de equações do movimento em nível elementar:

$$\mathbf{M}^j \ddot{\mathbf{e}}^j(t) + \left(1 + c^j \frac{E_\infty^j - E_0^j}{E_0^j} \right) \mathbf{K}^j \mathbf{e}^j(t) = \mathbf{Q}_e^j - c^j \frac{E_\infty^j}{E_0^j} \mathbf{K}^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t). \quad (3.67)$$

Ressalta-se que a equação utilizada para atualização do vetor de variáveis internas $\bar{\mathbf{e}}^j(t)$ pode ser derivada a partir das Eqs. (3.53), (3.58) e (3.61):

$$\bar{\mathbf{e}}^j(t) = (1 - c^j) \frac{E_\infty^j - E_0^j}{E_\infty^j} \mathbf{e}^j(t) - c^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t). \quad (3.68)$$

Como fica claro por inspeção da Eq. (3.67), o modelo fracionário de Zener para a viscoelasticidade conduz a modificações simples nas equações do movimento associadas a elementos finitos baseados em relações constitutivas de materiais lineares elásticos. Primeiramente, constata-se a modificação da matriz de rigidez estática (que aparece no lado esquerdo da equação) por uma constante que depende dos parâmetros que caracterizam o comportamento do material, bem como do passo de tempo utilizado para discretização temporal. Em segundo lugar, um vetor de carregamento dependente do histórico do vetor de variáveis internas aparece no lado direito da equação, e está associado, de certa forma, à parcela de energia que é dissipada pelo material.

3.7 Identificação de Parâmetros Associados ao Comportamento Viscoelástico de Materiais

Para que análises de sistemas que admitam componentes com comportamento viscoelástico possam ser realizadas a partir da utilização do modelo apresentado na Subseção anterior, os parâmetros E_0 , E_∞ , τ e α associados a um dado material, para uma determinada temperatura, devem ser identificados a partir de dados obtidos mediante a condução de procedimentos experimentais adequados, geralmente pela solução de um problema inverso mediante uso de técnicas de otimização. Como a caracterização de comportamento viscoelástico não constitui objeto principal de estudo do presente trabalho, recomenda-se ao leitor a consulta à literatura para maiores informações sobre o tema (FERRY, 1980; NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985; JONES, 2001; LAKES, 2009).

Aqui, a identificação dos parâmetros associados ao modelo fracionário de Zener considerado anteriormente é realizada no domínio da frequência. A partir da aplicação da transformada de Fourier à Eq. (3.47), pode-se estabelecer que os módulos complexos de um dado material são obtidos a partir de (GALUCIO, DEÜ, OHAYON, 2004):

$$E^*(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{\sigma\}}{\mathcal{F}\{\varepsilon\}} = \frac{E_0 + E_\infty (j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha}; \quad G^*(\omega) = \frac{E^*(\omega)}{2(1+\nu)}, \quad (3.69)$$

onde ν denota o coeficiente de Poisson, admitido independente da frequência. Na Eq. (3.69), $\mathcal{F}\{f\}$ representa a transformada de Fourier de uma dada função $f = f(t)$, a qual pode ser obtida formalmente a partir de:

$$\mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.70)$$

Quanto à transformada de Fourier de uma derivada fracionária, esta vale (MILLER, ROSS, 1993):

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha}\right\} = (j\omega)^\alpha \mathcal{F}\{f\}. \quad (3.71)$$

O material aqui considerado para realização de ajustes é aquele ISD112™ da fabricante 3M®, para o qual já se deu atenção na Subseção 3.4. Quanto ao procedimento adotado para condução dos ajustes, o mesmo faz uso daquelas expressões dadas para o módulo complexo e para o fator de deslocamento associados ao referido material, apresentadas nas Eqs. (3.32) e (3.33), respectivamente. Embora não se tratem de dados experimentais propriamente ditos, as expressões consideradas foram ajustadas a uma dada coleção destes por Drake e Soovere (1984), como comentado anteriormente.

A partir das referidas equações, e também daquela apresentada para o módulo complexo associado ao modelo fracionário de Zener, Eq. (3.69), um procedimento de otimização foi estabelecido para que pudessem ser determinados os parâmetros associados ao referido modelo derivativo-fracionário. O mesmo baseia-se na minimização da seguinte função objetivo F :

$$F(E_0, E_\infty, \tau, \alpha) = \sum_{k=1}^{N_\omega} \left\| \frac{\operatorname{Re}[G^*(\omega_k)] - \operatorname{Re}[G_{D-S}^*(\omega_k)]}{\operatorname{Re}[G_{D-S}^*(\omega_k)]} \right\| + \left\| \frac{\operatorname{Im}[G^*(\omega_k)] - \operatorname{Im}[G_{D-S}^*(\omega_k)]}{\operatorname{Im}[G_{D-S}^*(\omega_k)]} \right\|, \quad (3.72)$$

onde N_ω é o número de frequências amostradas e usadas para o procedimento de ajuste, $G_{D-S}^*(\omega)$ denota o módulo complexo proposto por Drake e Soovere (1984), conforme Eqs. (3.32) e (3.33), e $G^*(\omega)$ é o módulo complexo associado à equação constitutiva considerada, dado na Eq. (3.69).

Ressalta-se mais uma vez que o problema de otimização deve ser resolvido para cada uma das temperaturas para as quais se deseja obter os parâmetros do modelo considerado. Para sua solução, admite-se aqui um procedimento híbrido de otimização, que conta com uma primeira estratégia heurística, pela utilização de Algoritmos Genéticos, seguida de outra clássica, com o emprego de Programação Quadrática Sequencial. A seguinte restrição de desigualdade relacionada à termodinâmica do material foi considerada:

$$E_0 - E_\infty \leq 0, \quad (3.73)$$

juntamente com as seguintes restrições laterais:

$$0 \leq E_0 \leq \infty, \quad 0 \leq E_\infty \leq \infty, \quad 0 \leq \tau \leq \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.74)$$

Quanto aos parâmetros adotados para a otimização via Algoritmos Genéticos, considerou-se uma população com 5000 indivíduos, número máximo de 1000 gerações; uma elite com 500 indivíduos, com intervalo de migração de 200 gerações englobando 20% do total de indivíduos; seleção aleatória com distribuição uniforme; inclusão de restrições pelo uso de penalidades com Lagrangeano aumentado; população inicial aleatória com distribuição uniforme; mutação em direções randômicas, geradas para se mostrarem adaptativas à última geração, e respeitarem restrições linearizadas; e limite de estagnação de 100 gerações, tolerância de mudança no valor da função de adaptação de 10^{-10} , e tolerância na mudança de indivíduos de 10^{-6} como critérios de parada. Para a etapa de otimização via Programação Quadrática Sequencial, uma mudança máxima de 10^{-10} foi considerada tanto para a função objetivo quanto para o vetor das variáveis de projeto; um máximo de 5000 iterações foi ainda adotado.

A estratégia híbrida de otimização foi utilizada até que os erros relativos máximos observados entre os módulos de armazenamento, módulos de perda, e fatores de perda dados pelas curvas de Drake e Soovere (1984) – Eqs. (3.32) e (3.33) – e pelo modelo adotado – Eq. (3.69) – fossem inferiores a 5% na banda de frequência de 8 a 8000 Hz. As frequências ω_k adotadas para o procedimento de ajuste foram escolhidas em número de 8, uniformemente espaçadas entre os limites inferior e superior da banda de análise ($f_1 = 8$ Hz, $f_2 = 1149,7$ Hz, $f_3 = 2291,4$ Hz, ..., $f_8 = 8000$ Hz, $\omega_k = 2\pi f_k$).

A Tab. 3.2 apresenta os parâmetros do modelo considerado identificados para o material ISD112™ seguindo a estratégia detalhada. As Figs. 3.6 a 3.9 ilustram alguns dos ajustes realizados.

Tabela 3.2 - Parâmetros do modelo derivativo-fracionário para o material viscoelástico ISD112™ em função da temperatura.

TEMPERATURA [°C]	E_0 [MPa]	E_∞ [MPa]	τ [ms]	α
0	0,851917	757,8531	0,009194	0,64081
5	1,154951	660,5557	0,005522052	0,65749
10	1,252611	572,4416	0,003403	0,668214
12	1,279207	529,9496	0,002931	0,673042
14	1,23147	517,9866	0,002281	0,672124
15	1,249397	543,2045	0,001797621	0,66720
16	1,270968	507,2474	0,001786	0,672156
18	1,257138	532,0732	0,001235	0,667725
20	1,282995	460,2353	0,001242	0,675873
22	1,274785	480,5801	0,000881	0,672204
24	1,243746	411,3937	0,000905	0,678548
25	1,288291	411,6754	0,000799303	0,67855
26	1,281655	454,5182	0,000594	0,674399
27 ⁽¹⁾	1,500000	69,9495	0,014052	0,7915
28	1,289691	388,3685	0,000617	0,679601
30	1,290179	373,1119	0,000524	0,680224
35	1,293526	299,1808	0,000438442	0,68392
40	1,27482	207,6466	0,000478	0,688654
45	1,293454	194,5614	0,000334460	0,68825
50	1,287977	166,4865	0,000282	0,688936
55	1,293091	144,4575	0,000243290	0,69046
60	1,293366	119,578	0,000233	0,691055

⁽¹⁾ Os parâmetros dados para esta temperatura foram identificados por Galucio, Deü e Ohayon (2004).

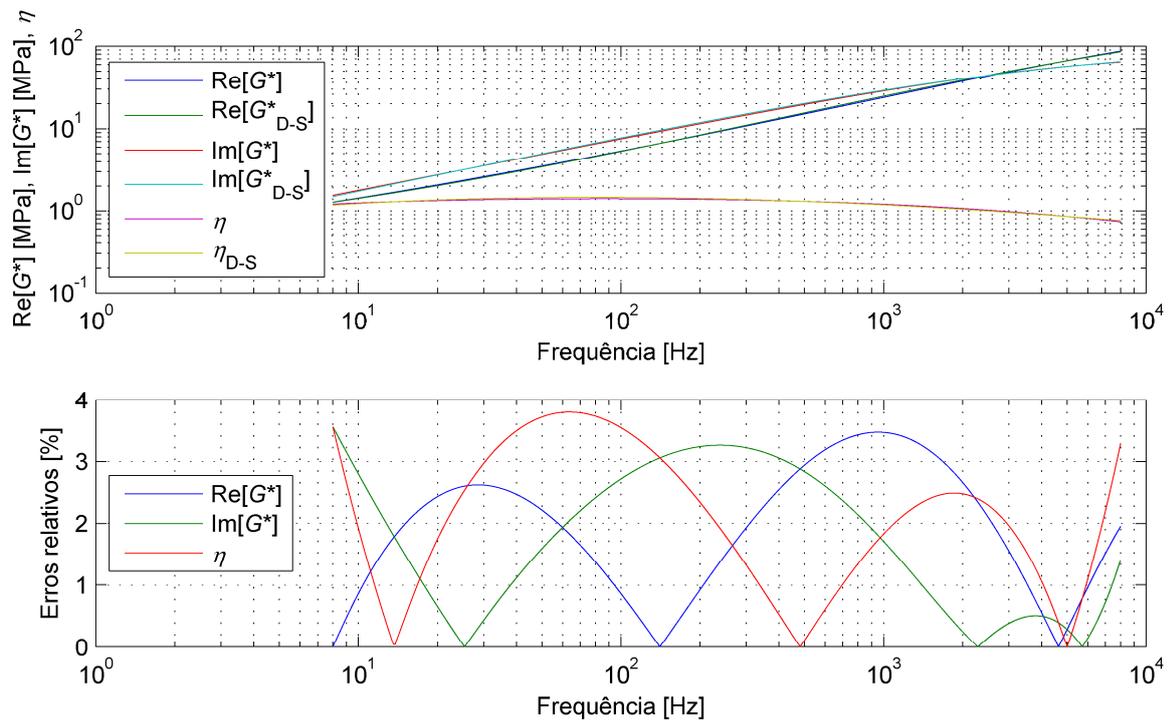


Figura 3.6 - Curvas de referência dadas por Drake e Soovere (1984) para o material ISD112™ à temperatura de 0 °C e aquelas associadas ao modelo derivativo-fracionário para viscoelasticidade com parâmetros determinados através de otimização.

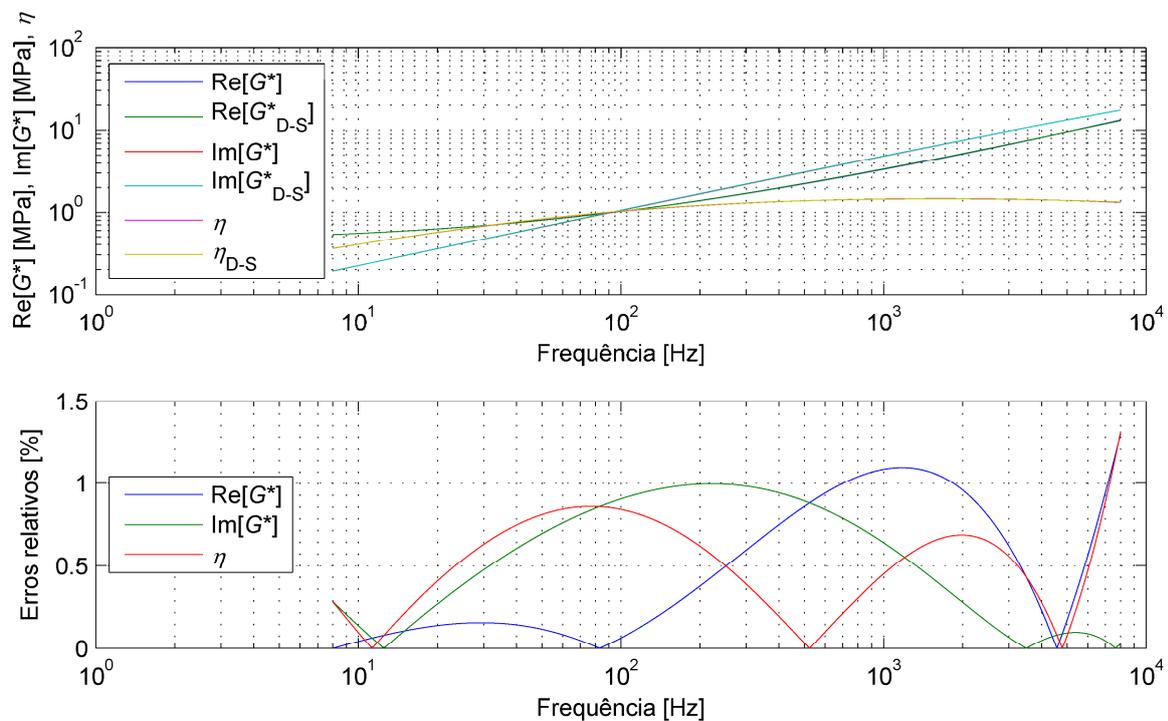


Figura 3.7 - Curvas de referência dadas por Drake e Soovere (1984) para o material ISD112™ à temperatura de 20 °C e aquelas associadas ao modelo derivativo-fracionário para viscoelasticidade com parâmetros determinados através de otimização.

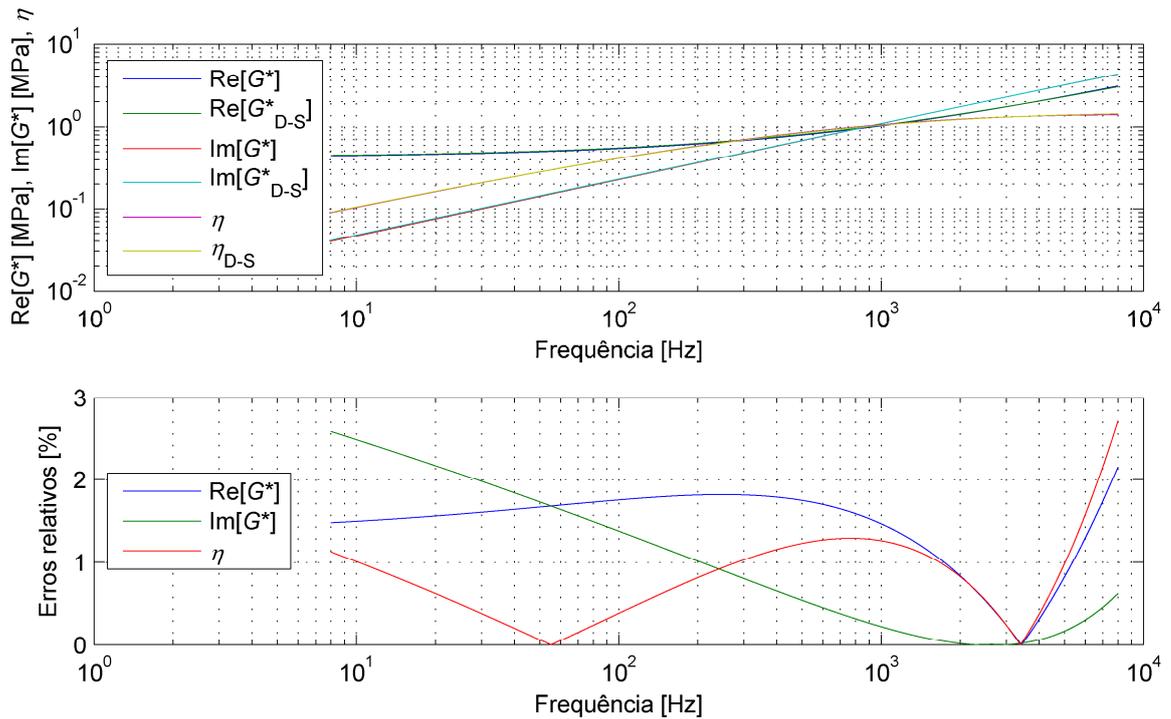


Figura 3.8 - Curvas de referência dadas por Drake e Soovere (1984) para o material ISD112TM à temperatura de 40 °C e aquelas associadas ao modelo derivativo-fracionário para viscoelasticidade com parâmetros determinados através de otimização.

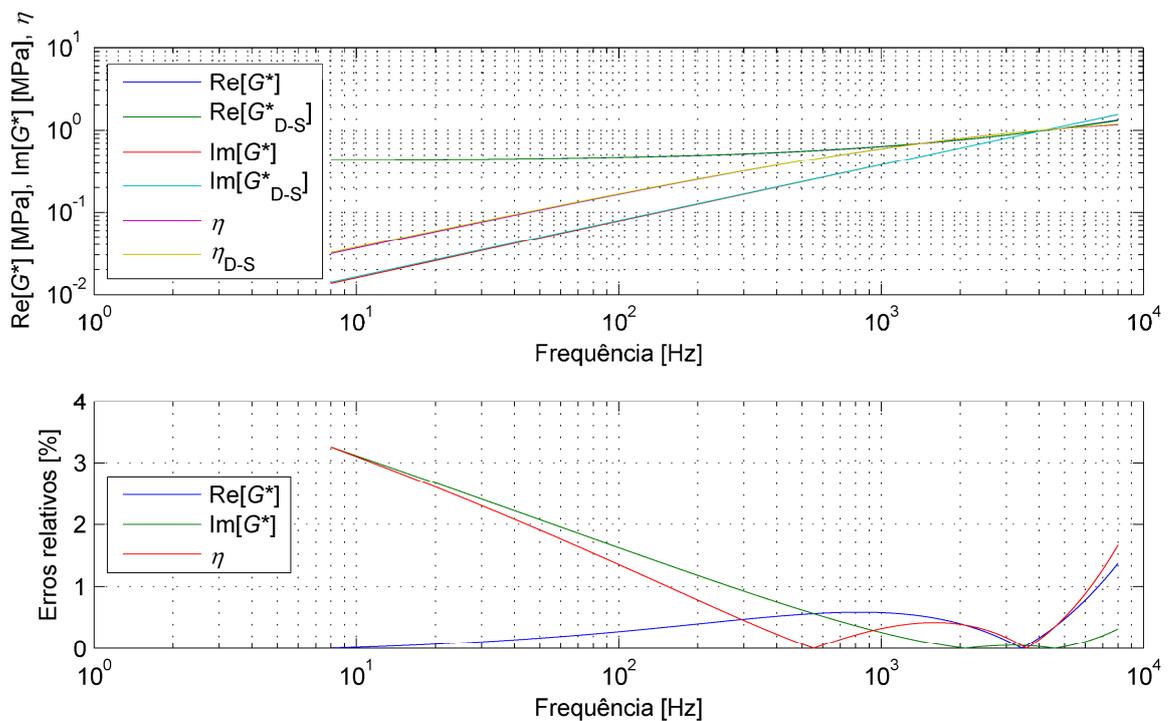


Figura 3.9 - Curvas de referência dadas por Drake e Soovere (1984) para o material ISD112TM à temperatura de 60 °C e aquelas associadas ao modelo derivativo-fracionário para viscoelasticidade com parâmetros determinados através de otimização.

Página intencionalmente deixada em branco.

CAPÍTULO IV

Análise Dinâmica de Sistemas Mecânicos pelo Método dos Elementos Finitos e pelo Método dos Modos Assumidos

Quando na análise dinâmica de sistemas mecânicos complexos, dificuldades inerentes associadas à geometria e às condições de contorno a eles aplicadas mostram-se presentes. Tais complicações associadas às equações diferenciais parciais que regem o movimento de um corpo particular podem tornar impossível a obtenção de soluções analíticas sob forma fechada. Esta é a base para o desenvolvimento de técnicas numéricas de resolução de equações diferenciais parciais. Discretização espacial pode ser conduzida, por exemplo, pelo emprego do Método de Ritz, que está intimamente relacionado aos Métodos dos Elementos Finitos (MEF) e dos Modos Assumidos (MMA). Outras técnicas também utilizadas são derivadas do Método dos Resíduos Ponderados, entre as quais se encontram o Método de Galerkin, o Método dos Mínimos Quadrados, o Método de Colocação e o Método dos Subdomínios (BATHE, 2007).

Por possibilitar a utilização de funções de interpolação simples para a solução aproximada de problemas que envolvem geometrias complexas, o MEF firmou-se como uma ferramenta computacional de auxílio à análise e ao projeto de engenharia. Este fato comprova-se pela grande quantidade de programas computacionais oferecidos à comunidade; entre os mais conhecidos encontram-se os softwares ADINA[®], ANSYS[®], COMSOL Multiphysics[®], FEMtools[®], LS-DYNA[®], Nastran[®], SAMCEF[®] e SIMULIA-Abaqus[®].

Outra técnica numérica adotada para a modelagem dinâmica de sistemas mecânicos é o MMA. Este conduz a um modelo idêntico àquele propiciado pelo Método de Rayleigh-Ritz se um mesmo conjunto de funções admissíveis for usado para representar a solução do problema sob a forma de uma combinação linear entre estas e as coordenadas generalizadas adotadas. Apesar da técnica em questão introduzir dificuldade com respeito à seleção de funções admissíveis que respeitem as condições de contorno do problema (pelo menos as geométricas), geralmente conduz a um modelo com um número reduzido de graus de

liberdade em comparação com aqueles propiciados pelo MEF. Desta forma, o MMA pode ser empregado com sucesso para implementação de técnicas de controle ativo, por exemplo, sem que técnicas de redução de modelos façam-se necessárias.

Ao invés de apresentar os fundamentos associados às técnicas numéricas consideradas nesta Dissertação, sejam elas o MEF e o MMA, ao longo deste Capítulo melhor detalhamento será dado à formulação dos elementos finitos unidimensionais de viga de Euler-Bernoulli (com dois nós, e três graus de liberdade por nó) e de viga sanduíche com camada viscoelástica (com dois nós, e quatro graus de liberdade por nó). Estes são utilizados para modelagem de partes do sistema multicorpos flexíveis considerado no Capítulo VI. A formulação pelo MMA de uma viga sanduíche também será detalhada, já que é considerada em outro exemplo de aplicação de materiais viscoelásticos dedicados ao controle passivo de vibrações em sistemas multicorpos, a ser apresentado no Capítulo VII. Mais informações a respeito do MEF e do MMA podem ser encontradas na literatura (MEIROVITCH, 1967; RAO, 2005; CRAIG, KURDILA, 2006; RADE, 2008).

4.1 Modelagem de Vigas pelo Método dos Elementos Finitos

Nas próximas Subseções serão abordadas as formulações de dois elementos finitos de viga distintos. Um primeiro será baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, enquanto que o outro, além de levar em conta a teoria de vigas de Mindlin, tratar-se-á, também, de um elemento de viga sanduíche com uma camada de material viscoelástico. Este último será utilizado para a modelagem de tratamentos superficiais do tipo camada viscoelástica restrita.

4.1.1 Elemento Finito de Viga de Euler-Bernoulli

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli adota as seguintes hipóteses:

- a) a viga é longa e fina, o que significa dizer que a razão entre sua espessura e seu comprimento tende a zero; garante-se desta forma que tensões transversais sejam muito menores do que aquela longitudinal;
- b) a viga é carregada em seu plano de simetria, não ocorrendo, portanto, torção;
- c) as deformações são pequenas, o que simplifica a teoria da elasticidade a sua forma linear; não há consideração de flambagem, ou de plasticidade, ou de materiais cujo comportamento é não linear;
- d) o material da viga é isotrópico;
- e) as seções transversais da viga permanecem planas e ortogonais a seu eixo neutro, após ela ter se deformado.

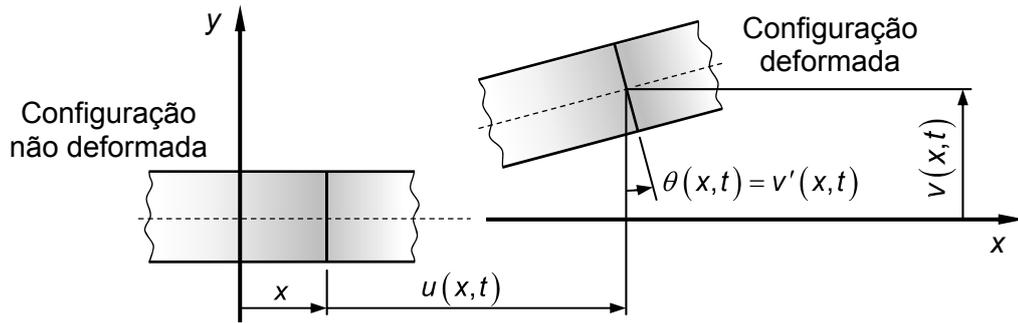


Figura 4.1 - Cinemática da viga de Euler-Bernoulli.

A cinemática da viga de Euler-Bernoulli pode ser visualizada na Fig. 4.1. Destaca-se que o equacionamento aqui apresentado toma por base os desenvolvimentos apresentados por Trindade, Benjeddou e Ohayon (2001), Galucio, Deü e Ohayon (2004), e Bathe (2007).

A partir da Fig. 4.1, já que é assumida a hipótese de pequenos deslocamentos, pode-se verificar que:

$$u_x(x, y, t) = u(x, t) - y\theta(x, t); \quad (4.1)$$

$$u_y(x, y, t) = v(x, t), \quad (4.2)$$

onde $u_x(x, y, t)$ e $u_y(x, y, t)$ denotam os deslocamentos nas direções axial e transversal da viga, respectivamente, associados a um ponto genérico $P(x, y)$ para o tempo t . Ainda, $u(x, t)$ e $\theta(x, t)$ representam o deslocamento axial da fibra neutra da viga e a rotação de sua seção transversal com respeito à configuração não deformada do sistema, respectivamente. O parâmetro $v(x, t)$, por sua vez, denota o deslocamento transversal da viga; como a mesma é fina, assume-se que o mesmo não depende da coordenada y . Além disso, pode-se também constatar, devido à hipótese de pequenos deslocamentos, que:

$$\theta(x, t) = v'(x, t). \quad (4.3)$$

De acordo com a presente teoria, a única deformação não nula que se desenvolve na viga é a longitudinal, no sentido de x , que é dada por:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x} [u_x(x, y, t)] = \varepsilon_m(x, t) - y\kappa(x, t), \quad (4.4)$$

onde $\varepsilon_m(x,t)$ e $\kappa(x,t)$ são a deformação de membrana e a curvatura linearizada da viga:

$$\varepsilon_m(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [u(x,t)] = u'(x,t); \quad (4.5)$$

$$\kappa(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [\theta(x,t)] = \theta'(x,t) = v''(x,t). \quad (4.6)$$

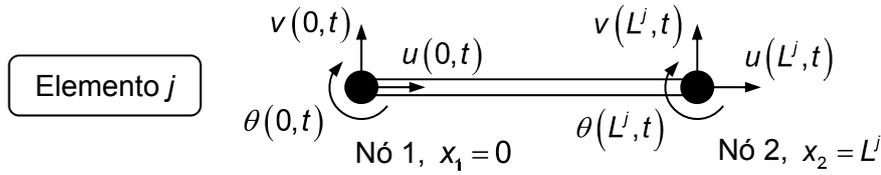


Figura 4.2 - Elemento finito de viga de Euler-Bernoulli.

Um elemento finito que obedece à teoria de vigas apresentada anteriormente é agora introduzido. O mesmo é ilustrado na Fig. 4.2 e conta com dois nós, localizados em $x = x_1 = 0$ e em $x = x_2 = L^j$, sendo L^j o comprimento do elemento de viga. São admitidos como graus de liberdade nodais os valores dos campos de deslocamento $u(x,t)$, $v(x,t)$ e $\theta(x,t)$ avaliados para as coordenadas nodais x_i , $i = 1, 2$. As funções de interpolação adotadas são polinomiais. Um polinômio cúbico é adotado para interpolar $v(x,t)$, ao passo que um polinômio de primeira ordem é assumido para interpolar $u(x,t)$. Além disso:

$$\mathbf{e}_i^j = [u(x_i,t) \quad v(x_i,t) \quad \theta(x_i,t)]^T, \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

representa o vetor de graus de liberdades nodais e:

$$\mathbf{e}^j = [(\mathbf{e}_1^j)^T \quad (\mathbf{e}_2^j)^T]^T = [u(0,t) \quad v(0,t) \quad \theta(0,t) \quad u(L^j,t) \quad v(L^j,t) \quad \theta(L^j,t)]^T \quad (4.8)$$

é o vetor de graus de liberdade elementares. Sabendo que as interpolações são dadas por:

$$\begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \\ \theta(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]^T = \Phi \mathbf{\alpha}, \quad (4.9)$$

impondo a condição de que as variáveis de campo devem assumir os valores das quantidades nodais nas respectivas posições nodais, ou seja:

$$\mathbf{e}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^j \\ \mathbf{e}_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi|_{x=x_1} \\ \Phi|_{x=x_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.10)$$

resulta que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \Phi|_{x=x_1} \\ \Phi|_{x=x_2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{e}^j. \quad (4.11)$$

Fazendo uso conjunto das Eqs. (4.9) e (4.11), chega-se às seguintes equações de interpolação:

$$\begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \\ \theta(x,t) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \Phi|_{x=x_1} \\ \Phi|_{x=x_2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{e}^j = \mathbf{S}^j \mathbf{e}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_u^j \\ \mathbf{S}_v^j \\ \mathbf{S}_\theta^j \end{bmatrix} \mathbf{e}^j, \quad (4.12)$$

onde:

$$\mathbf{S}_u^j = [1 - \xi \quad 0 \quad 0 \quad \xi \quad 0 \quad 0]; \quad (4.13)$$

$$\mathbf{S}_v^j = \left[0 \quad 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad L^j (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \quad 0 \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad L^j (\xi^3 - \xi^2) \right]; \quad (4.14)$$

$$\mathbf{S}_\theta^j = \left[0 \quad (6\xi^2 - 6\xi)/L^j \quad 3\xi^2 - 4\xi + 1 \quad 0 \quad (6\xi - 6\xi^2)/L^j \quad 3\xi^2 - 2\xi \right], \quad (4.15)$$

com $\xi = x/L^j$, são as matrizes das funções de forma associadas ao elemento finito.

Como se fará uso das equações de Lagrange (SHABANA, 2005):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^j}{\partial \mathbf{e}^j} \right)^T - \left(\frac{\partial T^j}{\partial \mathbf{e}^j} \right)^T = \mathbf{Q}^j \quad (4.16)$$

para se determinar as equações do movimento do elemento finito agora considerado, são determinadas na sequência sua energia cinética T^j e os trabalhos virtuais realizados pelas tensões que se desenvolvem no material e pelos carregamentos externos aplicados ao elemento, a partir dos quais se pode determinar o vetor de esforços generalizados \mathbf{Q}^j .

Para determinar a energia cinética elementar T^j , primeiramente se verifica que a velocidade de um ponto genérico P do elemento finito considerado é dada por:

$$\dot{\mathbf{w}}^j = \begin{bmatrix} \dot{u}_x(x,y,t) \\ \dot{u}_y(x,y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}(x,t) - y\dot{\theta}(x,t) \\ \dot{v}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_u^j - y\mathbf{S}_\theta^j \\ \mathbf{S}_v^j \end{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}^j. \quad (4.17)$$

Como a energia cinética elementar vale:

$$T^j = \frac{1}{2} \int_{V^j} \rho^j (\dot{\mathbf{w}}^j)^T \dot{\mathbf{w}}^j dV^j, \quad (4.18)$$

onde ρ^j é a massa específica do material e V^j é o volume elementar, então:

$$T^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^j)^T \mathbf{M}^j \dot{\mathbf{e}}^j, \quad (4.19)$$

onde \mathbf{M}^j é a matriz de inércia elementar. Esta pode ser obtida de acordo com:

$$\mathbf{M}^j = \int_{x_1}^{x_2} \rho^j \left\{ A^j \left[(\mathbf{S}_u^j)^T \mathbf{S}_u^j + (\mathbf{S}_v^j)^T \mathbf{S}_v^j \right] + I^j (\mathbf{S}_\theta^j)^T \mathbf{S}_\theta^j \right\} dx = \frac{\rho^j A^j L^j}{420} \tilde{\mathbf{M}}_t^j + \frac{\rho^j I^j}{30L^j} \tilde{\mathbf{M}}_r^j; \quad (4.20)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_t^j = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L^j & 0 & 54 & -13L^j \\ 0 & 22L^j & 4(L^j)^2 & 0 & 13L^j & -3(L^j)^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L^j & 0 & 156 & -22L^j \\ 0 & -13L^j & -3(L^j)^2 & 0 & -22L^j & 4(L^j)^2 \end{bmatrix}; \quad (4.21)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_r^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L^j & 0 & -36 & 3L^j \\ 0 & 3L^j & 4(L^j)^2 & 0 & -3L^j & -(L^j)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L^j & 0 & 36 & -3L^j \\ 0 & 3L^j & -(L^j)^2 & 0 & -3L^j & 4(L^j)^2 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

sendo A^j a área e I^j o momento de inércia de segunda ordem de área relacionados à seção transversal da viga.

Quanto à deformação que ocorre na direção longitudinal da viga, se consideradas ambas as Eqs. (4.4) e (4.12), pode ser reescrita sob a forma:

$$\varepsilon_{xx}^j(x, y, t) = u'(x, t) - y \theta'(x, t) = (\mathbf{S}_u^j - y \mathbf{S}_\theta^j) \mathbf{e}^j. \quad (4.23)$$

Como o material é considerado linear-elástico, a única tensão não nula é dada por:

$$\sigma_{xx}^j(x, y, t) = E^j \varepsilon_{xx}^j(x, y, t) = E^j (\mathbf{S}_u^j - y \mathbf{S}_\theta^j) \mathbf{e}^j, \quad (4.24)$$

onde E^j denota o módulo de elasticidade longitudinal do material.

O trabalho virtual realizado pelas tensões então se escreve:

$$\delta W_s^j = - \int_{V^j} \sigma_{xx}^j(x, y, t) \delta \varepsilon_{xx}^j(x, y, t) dV^j = (\delta \mathbf{e}^j)^\top (-\mathbf{K}^j \mathbf{e}^j), \quad (4.25)$$

onde:

$$\mathbf{K}^j = \int_{x_1}^{x_2} E^j \left[A^j (\mathbf{S}_u^j)^\top \mathbf{S}_u^j + I^j (\mathbf{S}_\theta^j)^\top \mathbf{S}_\theta^j \right] dx = \frac{E^j A^j}{L^j} \tilde{\mathbf{K}}_m^j + \frac{E^j I^j}{(L^j)^3} \tilde{\mathbf{K}}_b^j \quad (4.26)$$

designa a matriz de rigidez a nível elementar, com:

$$\tilde{\mathbf{K}}_m^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.27)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_b^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L^j & 0 & -12 & 6L^j \\ 0 & 6L^j & 4(L^j)^2 & 0 & -6L^j & 2(L^j)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L^j & 0 & 12 & -6L^j \\ 0 & 6L^j & 2(L^j)^2 & 0 & -6L^j & 4(L^j)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Quanto ao trabalho virtual realizado pelos carregamentos externos, designado por δW_e^j , pode ser expresso de maneira geral sob a forma:

$$\delta W_e^j = (\delta \mathbf{e}^j)^\top \mathbf{Q}_e^j, \quad (4.29)$$

onde \mathbf{Q}_e^j denota o vetor de carregamentos generalizados externos (forças concentradas, carregamentos distribuídos, momentos, etc.) aplicados ao elemento finito.

Do trabalho virtual elementar total:

$$\delta W^j = \delta W_e^j + \delta W_s^j = (\delta \mathbf{e}^j)^\top (\mathbf{Q}_e^j - \mathbf{K}^j \mathbf{e}^j), \quad (4.30)$$

constata-se que o vetor de carregamentos generalizados \mathbf{Q}^j é dado por:

$$\mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}_e^j - \mathbf{K}^j \mathbf{e}^j. \quad (4.31)$$

Retomando as equações de Lagrange dadas na Eq. (4.16) e as expressões desenvolvidas para a energia cinética elementar e para o vetor de carregamentos generalizados, dadas respectivamente nas Eqs. (4.19) e (4.31), pode-se estabelecer a equação de equilíbrio dinâmico a nível elementar:

$$\mathbf{M}^j \ddot{\mathbf{e}}^j + \mathbf{K}^j \mathbf{e}^j = \mathbf{Q}_e^j. \quad (4.32)$$

Para obter equações a nível global, pode-se considerar a interconectividade entre elementos fazendo uso de matrizes booleanas \mathbf{B}^j que relacionam o vetor dos graus de liberdade globais do modelo, \mathbf{e} , aos vetores de graus de liberdade elementares \mathbf{e}^j , de acordo com a relação:

$$\mathbf{e}^j = \mathbf{B}^j \mathbf{e}. \quad (4.33)$$

Assim, podem ser computadas as matrizes de inércia e de rigidez expandidas se a Eq. (4.33) for substituída nas equações que proporcionam a energia cinética elementar e o trabalho virtual realizado pelas tensões. Somando as parcelas energéticas associadas a cada um dos elementos da malha considerada para discretizar o contínuo, após utilização das equações de Lagrange, chega-se a um sistema global de equações de equilíbrio dinâmico que descreve o movimento do domínio considerado como um todo. Detalhes acerca do procedimento descrito podem ser encontrados em livros dedicados ao MEF (RAO, 2005; BATHE, 2007).

4.1.2 Elemento Finito de Viga Sanduíche com Camada Viscoelástica

A teoria de viga sanduíche a ser apresentada na sequência faz uso da teoria de vigas de Mindlin. Esta última, assim como a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, opta pela adoção de hipóteses na resolução das equações que regem a elasticidade. São semelhantes às aquelas apresentadas anteriormente. Assume-se que:

- a) a viga é carregada em seu plano de simetria, não ocorrendo, portanto, torção;
- b) as deformações são pequenas, o que simplifica a teoria da elasticidade a sua forma linear; não há consideração de flambagem, ou de plasticidade, ou de materiais cujo comportamento é não linear;
- c) o material da viga é isotrópico;
- d) as seções transversais da viga permanecem planas, mas não necessariamente ortogonais a seu eixo, após ela ter se deformado.

A cinemática da viga sanduíche considerada é ilustrada na Fig. 4.3, notando-se que a mesma dispõe de três camadas. As duas faces externas (viga base, b ; camada restringente, r) são admitidas elásticas e modeladas a partir da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. O núcleo, por sua vez, é de material viscoelástico (camada viscoelástica, v), e para o mesmo são assumidas as hipóteses da teoria de Mindlin, apresentadas anteriormente.

Como hipóteses adicionais, assume-se que as três camadas da viga, b , v e r , são perfeitamente unidas umas às outras, de maneira que não há escorregamento entre elas, e que todas estão submetidas a estado plano de tensão.

Salienta-se que a teoria apresentada aqui já foi considerada em trabalhos publicados na literatura (TRINDADE, BENJEDDOU, OHAYON, 2001; GALUCIO, DEÜ, OHAYON, 2004; ZHANG, ERDMAN, 2001).

Quanto à geometria da viga sanduíche, destaca-se que h_i , b_i e L_i denotam a espessura, a largura e o comprimento da i -ésima camada da mesma, respectivamente, com $i = b, v, r$; todas as camadas da viga têm seção transversal retangular. Ainda, constata-se, da Fig. 4.3, que $y_b = 0$, $y_v = \frac{1}{2}(h_b + h_v)$ e $y_r = \frac{1}{2}(h_b + h_r) + h_v$.

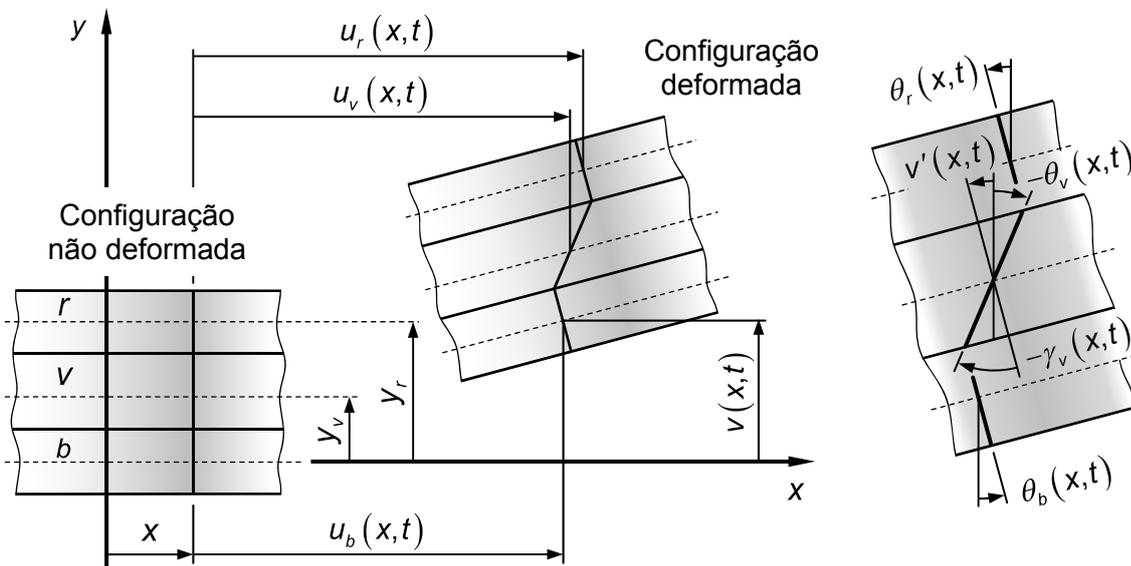


Figura 4.3 - Cinemática de deformação da viga sanduíche; b - viga base; v - camada viscoelástica; r - camada restringente (adaptado de (GALUCIO, DEÜ, OHAYON, 2004)).

Da Fig. 4.3, verifica-se que para cada camada i da viga sanduíche considerada, com $i = b, v, r$, os campos de deslocamento nas direções de x e y , $u_{xi}(x, y, t)$ e $u_{yi}(x, y, t)$, respectivamente, são dados por:

$$u_{xi}(x, y, t) = u_i(x, t) - (y - y_i)\theta_i(x, t); \quad (4.34)$$

$$u_{yi}(x, y, t) = v(x, t), \quad (4.35)$$

onde $u_i(x, t)$ é o deslocamento longitudinal do plano médio da camada i , $\theta_i(x, t)$ é a rotação da seção transversal desta mesma camada, e $v(x, t)$ é o deslocamento transversal da viga, assumido idêntico para todas as camadas.

Devido às hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli assumidas para as faces elásticas da viga, sabe-se que:

$$\theta_b(x, t) = \theta_r(x, t) = v'(x, t). \quad (4.36)$$

Considerando as condições de continuidade de deslocamento longitudinal entre as diferentes camadas da viga sanduíche, escreve-se:

$$u_{xb}(x, \frac{1}{2}h_b, t) = u_{xv}(x, \frac{1}{2}h_b, t), \quad u_{xv}(x, h_v + \frac{1}{2}h_b, t) = u_{xr}(x, h_v + \frac{1}{2}h_b, t), \quad (4.37)$$

de onde:

$$u_v(x, t) = \frac{1}{2}[u_b(x, t) + u_r(x, t)] + \frac{1}{4}(h_r - h_b)v'(x, t); \quad (4.38)$$

$$\theta_v(x, t) = -h_v^{-1}[u_r(x, t) - u_b(x, t)] - 2h_v^{-1}(h_r + h_b)v'(x, t). \quad (4.39)$$

As deformações que se desenvolvem na i -ésima camada da viga podem ser calculadas a partir da teoria da elasticidade. Como pequenos deslocamentos são assumidos, tem-se:

$$\varepsilon_{xxi}(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x}[u_{xi}(x, y, t)] = \varepsilon_{mi}(x, t) - (y - y_i)\kappa_i(x, t); \quad (4.40)$$

$$\gamma_{xyi}(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x}[u_{yi}(x, y, t)] + \frac{\partial}{\partial y}[u_{xi}(x, y, t)] = v'(x, t) - \theta_i(x, t); \quad (4.41)$$

$\varepsilon_{mi}(x, t)$ e $\kappa_i(x, t)$ denotam a deformação de membrana e a curvatura linearizada associadas à i -ésima camada da viga sanduíche:

$$\varepsilon_{mi}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}[u_i(x, t)] = u'_i(x, t); \quad (4.42)$$

$$\kappa_i(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [\theta_i(x,t)] = \theta_i'(x,t). \quad (4.43)$$

Pode-se verificar facilmente que $\gamma_{xyb}(x,y,t) = \gamma_{xyr}(x,y,t) = 0$ quando combinadas as Eqs. (4.36) e (4.41). Desta forma, a hipótese de ausência de cisalhamento transversal para a viga base e para a camada restringente da viga sanduíche é verificada.

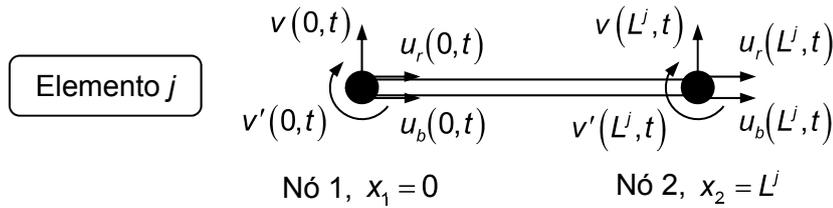


Figura 4.4 - Elemento finito de viga sanduíche.

O elemento finito utilizado neste trabalho, ilustrado na Fig. 4.4 e baseado na teoria de viga sanduíche, conta com dois nós, localizados em $x = x_1 = 0$ e em $x = x_2 = L^j$, sendo L^j o comprimento do elemento de viga. Como graus de liberdade nodais são assumidos os valores dos campos de deslocamento $u_b(x,t)$, $u_r(x,t)$, $v(x,t)$ e $v'(x,t)$ avaliados para as coordenadas nodais x_i , $i = 1, 2$. São adotadas funções polinomiais para interpolar as variáveis de campo. Um polinômio cúbico é adotado para interpolar $v(x,t)$, ao passo que um polinômio de primeira ordem é assumido para interpolar $u_b(x,t)$ e $u_r(x,t)$. O vetor de graus de liberdade nodais é dado por:

$$\mathbf{e}_i^j = [u_b(x_i,t) \quad u_r(x_i,t) \quad v(x_i,t) \quad v'(x_i,t)]^T, \quad i = 1, 2; \quad (4.44)$$

o vetor de graus de liberdade elementares escreve-se então:

$$\mathbf{e}^j = \left[(\mathbf{e}_1^j)^T \quad (\mathbf{e}_2^j)^T \right]^T = \begin{bmatrix} u_b(0,t) & u_r(0,t) & v(0,t) & v'(0,t) \\ u_b(L^j,t) & u_r(L^j,t) & v(L^j,t) & v'(L^j,t) \end{bmatrix}^T. \quad (4.45)$$

As interpolações admitidas podem ser expressas como a seguir:

$$\begin{bmatrix} u_b(x,t) \\ u_r(x,t) \\ v(x,t) \\ v'(x,t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{[\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3]^T}_{\alpha}. \quad (4.46)$$

Impondo as condições de que as variáveis de campo devem assumir os valores das quantidades nodais nas respectivas posições nodais, escreve-se:

$$\mathbf{e}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^j \\ \mathbf{e}_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi|_{x=x_1} \\ \Phi|_{x=x_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.47)$$

e pode-se estabelecer que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \Phi|_{x=x_1} \\ \Phi|_{x=x_2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{e}^j. \quad (4.48)$$

Combinando as Eqs. (4.46) e (4.48), resulta:

$$\begin{bmatrix} u_b(x,t) \\ u_r(x,t) \\ v(x,t) \\ v'(x,t) \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \Phi|_{x=x_1} \\ \Phi|_{x=x_2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{e}^j = \mathbf{S}^j \mathbf{q}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ub}^j \\ \mathbf{S}_{ur}^j \\ \mathbf{S}_v^j \\ \mathbf{S}_{v'}^j \end{bmatrix} \mathbf{e}^j, \quad (4.49)$$

onde:

$$\mathbf{S}_{ub}^j = [1 - \xi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \xi \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \quad (4.50)$$

$$\mathbf{S}_{ur}^j = [0 \quad 1 - \xi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \xi \quad 0 \quad 0]; \quad (4.51)$$

$$\mathbf{S}_v^j = [0 \quad 0 \quad 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad L^j(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \quad 0 \quad 0 \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad L^j(\xi^3 - \xi^2)]; \quad (4.52)$$

$$\mathbf{S}_{v'}^j = [0 \quad 0 \quad (6\xi^2 - 6\xi)/L^j \quad 3\xi^2 - 4\xi + 1 \quad 0 \quad 0 \quad (6\xi - 6\xi^2)/L^j \quad 3\xi^2 - 2\xi], \quad (4.53)$$

com $\xi = x/L^j$, são as matrizes das funções de forma do elemento finito.

Mais uma vez, como na Subseção 4.1.1, para obtenção das equações do movimento, far-se-á uso das equações de Lagrange, como expressas na Eq. (4.16). Procede-se então à determinação da energia cinética elementar T^j e do vetor de carregamentos generalizados \mathbf{Q}^j associados ao elemento finito de viga sanduíche considerado.

Constata-se, primeiramente, que a velocidade associada a um ponto genérico P pertencente à i -ésima camada do elemento de viga considerado, com $i = b, v$ ou r , pode ser calculada como a seguir:

$$\dot{\mathbf{w}}_i^j = \begin{bmatrix} \dot{u}_{xi}(x, y, t) \\ \dot{u}_{yi}(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_i(x, t) - (y - y_i)\dot{\theta}_i(x, t) \\ \dot{v}(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ui}^j - (y - y_i)\mathbf{S}_{\theta i}^j \\ \mathbf{S}_v^j \end{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}^j, \quad (4.54)$$

onde, das Eqs. (4.38), (4.39), (4.36) e (4.49):

$$\mathbf{S}_{uv}^j = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{ub}^j + \mathbf{S}_{ur}^j) + \frac{1}{4}(h_r - h_b)\mathbf{S}_v^j \quad : \quad u_v(x, t) = \mathbf{S}_{uv}^j \mathbf{e}^j; \quad (4.55)$$

$$\mathbf{S}_{\theta v}^j = -h_v^{-1}(\mathbf{S}_{ur}^j - \mathbf{S}_{ub}^j) - 2h_v^{-1}(h_r + h_b)\mathbf{S}_v^j \quad : \quad \theta_v(x, t) = \mathbf{S}_{\theta v}^j \mathbf{e}^j; \quad (4.56)$$

$$\mathbf{S}_{\theta b}^j = \mathbf{S}_{\theta r}^j = \mathbf{S}_v^j = \mathbf{S}_v^j \quad : \quad \theta_b(x, t) = \mathbf{S}_{\theta b}^j \mathbf{e}^j, \quad \theta_r(x, t) = \mathbf{S}_{\theta r}^j \mathbf{e}^j. \quad (4.57)$$

Com auxílio da Eq. (4.54), pode-se verificar que a energia cinética associada à i -ésima camada do elemento finito de viga sanduíche considerado, $i = b, v, r$, é dada por:

$$T_i^j = \frac{1}{2} \int_{V_i^j} \rho_i^j (\dot{\mathbf{w}}_i^j)^T \dot{\mathbf{w}}_i^j dV_i^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^j)^T \mathbf{M}_i^j \dot{\mathbf{e}}^j, \quad (4.58)$$

onde ρ_i^j é a massa específica do material da camada considerada e V_i^j é o volume associado à mesma. \mathbf{M}_i^j representa a parcela da matriz de inércia elementar associada à camada i da viga sanduíche, a qual pode ser expressa como se segue:

$$\mathbf{M}_i^j = \int_{x_1}^{x_2} \rho_i^j \left[A_i^j \left[(\mathbf{S}_{ui}^j)^T \mathbf{S}_{ui}^j + (\mathbf{S}_v^j)^T \mathbf{S}_v^j \right] + I_i^j (\mathbf{S}_{\theta i}^j)^T \mathbf{S}_{\theta i}^j \right] dx, \quad (4.59)$$

sendo A_i^j a área e I_i^j o momento de inércia de segunda ordem de área relacionados à seção transversal da i -ésima camada da viga, os quais podem ser computados a partir de:

$$\begin{bmatrix} A_i^j & I_i^j \end{bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}b_i^j}^{\frac{1}{2}b_i^j} \int_{y_i - \frac{1}{2}h_i^j}^{y_i + \frac{1}{2}h_i^j} \begin{bmatrix} 1 & (y - y_i)^2 \end{bmatrix} dy dz. \quad (4.60)$$

A energia cinética elementar total pode ser obtida a partir da soma das parcelas de energia associadas a cada uma das camadas da viga, computadas como detalhado anteriormente, a partir da Eq. (4.58). Simbolicamente, tem-se:

$$T^j = \sum_i^{b,v,r} T_i^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^j)^T \mathbf{M}^j \dot{\mathbf{e}}^j, \quad (4.61)$$

onde $\mathbf{M}^j = \sum_i^{b,v,r} \mathbf{M}_i^j$ é a matriz de inércia associada ao elemento finito considerado.

Para determinar a parcela de \mathbf{Q}^j devida às tensões que se desenvolvem na viga sanduíche, as deformações são primeiramente reescritas em termos de \mathbf{e}^j com auxílio das Eqs. (4.40), (4.41) e (4.49):

$$\varepsilon_{xxi}^j(x, y, t) = u_i'(x, t) - (y - y_i) \theta_i'(x, t) = \left[\mathbf{S}_{ui}^j - (y - y_i) \mathbf{S}_{\theta i}^j \right] \mathbf{e}^j; \quad (4.62)$$

$$\gamma_{xyi}^j(x, y, t) = v'(x, t) - \theta_i(x, t) = \left(\mathbf{S}_v^j - \mathbf{S}_{\theta i}^j \right) \mathbf{e}^j. \quad (4.63)$$

Quanto às tensões, estas são dadas por:

$$\sigma_{xxb}^j(x, y, t) = E_b^j \varepsilon_{xxb}^j(x, y, t) = E_b^j \left[\mathbf{S}_{ub}^j - (y - y_b) \mathbf{S}_{\theta b}^j \right] \mathbf{e}^j; \quad (4.64)$$

$$\sigma_{xxr}^j(x, y, t) = E_r^j \varepsilon_{xxr}^j(x, y, t) = E_r^j \left[\mathbf{S}_{ur}^j - (y - y_r) \mathbf{S}_{\theta r}^j \right] \mathbf{e}^j, \quad (4.65)$$

para as faces externas da viga, constituídas de materiais lineares elásticos; E_b^j e E_r^j denotam os módulos de elasticidade longitudinais associados aos materiais da viga base e da camada restringente, respectivamente.

Quanto às tensões que se desenvolvem no núcleo viscoelástico do elemento finito de viga sanduíche, estas podem ser computadas levando-se em conta a relação constitutiva apresentada no Capítulo III, Seção 3.6, Eq. (3.47). Na ocasião, mostrou-se que as tensões

podem ser obtidas de maneira explícita, como disposto na Eq. (3.55), pelo uso de um esquema de discretização para o operador de diferenciação fracionária. Fazendo uso do então apresentado, pode-se estabelecer para o caso em análise:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxv}^j(x, y, t) &= \left(1 + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j - E_{0v}^j}{E_{0v}^j} \right) E_{0v}^j \varepsilon_{xxv}^j(x, y, t) \\
&\quad + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j}{E_{0v}^j} E_{0v}^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha_v^j) \bar{\varepsilon}_{xxv}^j(x, y, t - k\Delta t) \\
&= \left(1 + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j - E_{0v}^j}{E_{0v}^j} \right) E_{0v}^j [\mathbf{s}_{uv}^j - (y - y_v) \mathbf{s}_{\theta v}^j] \mathbf{e}^j \\
&\quad + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j}{E_{0v}^j} E_{0v}^j [\mathbf{s}_{uv}^j - (y - y_v) \mathbf{s}_{\theta v}^j] \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha_v^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t);
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xyv}^j(x, y, t) &= \left(1 + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j - E_{0v}^j}{E_{0v}^j} \right) G_{0v}^j \gamma_{xyv}^j(x, y, t) \\
&\quad + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j}{E_{0v}^j} G_{0v}^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha_v^j) \bar{\gamma}_{xyv}^j(x, y, t - k\Delta t) \\
&= \left(1 + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j - E_{0v}^j}{E_{0v}^j} \right) G_{0v}^j (\mathbf{s}_v^j - \mathbf{s}_{\theta v}^j) \mathbf{e}^j \\
&\quad + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j}{E_{0v}^j} G_{0v}^j (\mathbf{s}_v^j - \mathbf{s}_{\theta v}^j) \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha_v^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Nas Eqs. (4.66) e (4.67), E_{0v}^j , $E_{\infty v}^j$, α_v^j e τ_v^j , com $c_v^j = (\tau_v^j)^{\alpha_v^j} / [(\tau_v^j)^{\alpha_v^j} + (\Delta t)^{\alpha_v^j}]$, representam os parâmetros do modelo derivativo fracionário para viscoelasticidade – módulo de elasticidade longitudinal não-relaxado, módulo de elasticidade longitudinal relaxado, ordem de derivação fracionária e tempo de relaxação, respectivamente. Como se percebe da expressão fornecida para c_v^j , a discretização temporal, por intermédio do passo de tempo Δt , desempenha papel importante nesta etapa de discretização do contínuo; claro, isto se deve ao caráter não local do comportamento de materiais viscoelásticos, bem como ao efeito de memória exibido pelos mesmos (tensões mais recentes dependem dos históricos de tensões e de deformações passadas). Ainda no tocante à Eq. (4.67): $G_{0v}^j = E_{0v}^j / [2(1 + \nu_v^j)]$ é o módulo de elasticidade transversal não-relaxado do material viscoelástico do núcleo do elemento de viga sanduíche considerado; e $\bar{\mathbf{e}}^j$ é o vetor de graus de liberdade anelásticos, que coleciona variáveis internas associadas ao modelo adotado para viscoelasticidade.

Com o uso das Eqs. (4.62) a (4.67) torna-se possível computar os trabalhos virtuais fornecidos a seguir:

$$\delta W_{sb}^j = -\int_{V_b^j} \sigma_{xxb}^j(x, y, t) \delta \varepsilon_{xxb}^j(x, y, t) dV_b^j = (\delta \mathbf{e}^j)^\top (-\mathbf{K}_b^j \mathbf{e}^j); \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{sv}^j &= -\int_{V_v^j} \sigma_{xxv}^j(x, y, t) \delta \varepsilon_{xxv}^j(x, y, t) dV_v^j - \int_{V_v^j} \tau_{xyv}^j(x, y, t) \delta \gamma_{xyv}^j(x, y, t) dV_v^j \\ &= (\delta \mathbf{e}^j)^\top \left[-\left(1 + c_v^j \frac{E_{\infty v}^j - E_{0v}^j}{E_{0v}^j}\right) \mathbf{K}_v^j \mathbf{e}^j - c_v^j \frac{E_{\infty v}^j}{E_{0v}^j} \mathbf{K}_v^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha_v^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t) \right]; \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\delta W_{sr}^j = -\int_{V_r^j} \sigma_{xxr}^j(x, y, t) \delta \varepsilon_{xxr}^j(x, y, t) dV_r^j = (\delta \mathbf{e}^j)^\top (-\mathbf{K}_r^j \mathbf{e}^j). \quad (4.70)$$

Nas equações acima, \mathbf{K}_i^j , $i = b, v, r$, são as contribuições individuais de cada uma das camadas da viga sanduíche a sua rigidez, dadas por:

$$\mathbf{K}_b^j = \int_{x_1}^{x_2} E_b^j \left[A_b^j (\mathbf{S}'_{ub}^j)^\top \mathbf{S}'_{ub}^j + I_b^j (\mathbf{S}'_{\theta b}^j)^\top \mathbf{S}'_{\theta b}^j \right] dx; \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_v^j &= \int_{x_1}^{x_2} E_{0v}^j \left[A_v^j (\mathbf{S}'_{uv}^j)^\top \mathbf{S}'_{uv}^j + I_v^j (\mathbf{S}'_{\theta v}^j)^\top \mathbf{S}'_{\theta v}^j \right] dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} G_{0v}^j k_v^j A_v^j (\mathbf{S}'_v^j - \mathbf{S}'_{\theta v}^j)^\top (\mathbf{S}'_v^j - \mathbf{S}'_{\theta v}^j) dx; \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{K}_r^j = \int_{x_1}^{x_2} E_r^j \left[A_r^j (\mathbf{S}'_{ur}^j)^\top \mathbf{S}'_{ur}^j + I_r^j (\mathbf{S}'_{\theta r}^j)^\top \mathbf{S}'_{\theta r}^j \right] dx. \quad (4.73)$$

Destaca-se que a constante k_v^j é utilizada para correção da área cisalhada na Eq. (4.72).

Somando as contribuições das camadas da viga ao trabalho virtual realizado pelas tensões desenvolvidas nos materiais que a compõe, resulta:

$$\delta W_s^j = \sum_i^{b,v,r} \delta W_{si}^j = (\delta \mathbf{e}^j)^\top \left[-(\mathbf{K}^j + \tilde{\mathbf{K}}_v^j) \mathbf{q}^j - c_v^j \frac{E_{\infty v}^j}{E_{0v}^j} \mathbf{K}_v^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1}(\alpha_v^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t) \right], \quad (4.74)$$

onde $\mathbf{K}^j = \sum_i^{b,v,r} \mathbf{K}_i^j$ é a matriz de rigidez elementar e $\tilde{\mathbf{K}}_v^j = c_v^j \frac{E_{\infty v}^j - E_{0v}^j}{E_{0v}^j} \mathbf{K}_v^j$.

O trabalho virtual realizado pelos carregamentos externos é mais uma vez expresso de maneira generalizada como se segue:

$$\delta W_e^j = (\delta \mathbf{e}^j)^\top \mathbf{Q}_e^j, \quad (4.75)$$

onde \mathbf{Q}_e^j denota o vetor de carregamentos generalizados externos (forças concentradas, carregamentos distribuídos, momentos, etc.) aplicados ao elemento finito.

Fazendo uso combinado das Eqs. (4.74) e (4.75), o trabalho virtual elementar total pode ser calculado:

$$\begin{aligned} \delta W^j &= \delta W_e^j + \delta W_s^j \\ &= (\delta \mathbf{e}^j)^\top \left[\mathbf{Q}_e^j - (\mathbf{K}^j + \tilde{\mathbf{K}}_v^j) \mathbf{e}^j - c_v^j \frac{E_{\alpha v}^j}{E_{\beta v}^j} \mathbf{K}_v^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1} (\alpha_v^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t) \right], \end{aligned} \quad (4.76)$$

a partir do qual se torna possível avaliar o vetor de carregamentos generalizados \mathbf{Q}^j :

$$\mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}_e^j - (\mathbf{K}^j + \tilde{\mathbf{K}}_v^j) \mathbf{e}^j - c_v^j \frac{E_{\alpha v}^j}{E_{\beta v}^j} \mathbf{K}_v^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1} (\alpha_v^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t). \quad (4.77)$$

A partir das equações de Lagrange dadas na Eq. (4.16), as equações do movimento a nível elementar são agora estabelecidas. Com o auxílio das Eqs. (4.61) e (4.77), pode-se escrever:

$$\mathbf{M}^j \ddot{\mathbf{e}}^j + (\mathbf{K}^j + \tilde{\mathbf{K}}_v^j) \mathbf{e}^j = \mathbf{Q}_e^j - c_v^j \frac{E_{\alpha v}^j}{E_{\beta v}^j} \mathbf{K}_v^j \sum_{k=1}^{N_\alpha^j} A_{k+1} (\alpha_v^j) \bar{\mathbf{e}}^j(t - k\Delta t). \quad (4.78)$$

As equações a nível global podem ser obtidas por meio do procedimento descrito no final da Subseção 4.1.1.

4.2 O Método dos Modos Assumidos

De acordo com Meirovitch (1967), o MMA é uma técnica de discretização de sistemas contínuos que está estreitamente relacionada ao Método de Rayleigh-Ritz. Segundo o autor, a única distinção que pode ser feita entre ambos é que o segundo lida com a discretização de um problema de autovalor, enquanto que aquele primeiro é aplicável a problemas de va-

lor de contorno. Por isso mostra-se corrente a confusão entre qual método de fato está sendo utilizado em determinadas situações.

Conforme exposto no livro-texto de Craig e Kurdila (2006), o MMA pauta-se na expansão de campos de deslocamento de uma estrutura tomando por base um conjunto de funções admissíveis. Por exemplo, o campo de deslocamento axial de uma barra seria expresso como se segue:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) q_k(t) \quad (4.79)$$

onde q_k , $k = 1, \dots, n$, denota as coordenadas generalizadas associadas à discretização escolhida, e ψ_k , $k = 1, \dots, n$, é um conjunto de funções de forma, que devem satisfazer os requisitos associados a funções admissíveis. Entre estes requisitos encontram-se as necessidades de formarem um conjunto de funções linearmente independentes e de respeitarem ao menos as condições de contorno geométricas do problema.

Com o aumento da complexidade da geometria e a presença de condições de contorno geométricas não ideais, a seleção das funções admissíveis ψ_k pode-se tornar difícil e onerosa. Esta desvantagem é o que tem motivado o crescente uso de técnicas como a do MEF. Contudo, o MMA pode conduzir a modelos com um número de graus de liberdade bastante reduzido, desde que uma seleção adequada das funções de forma seja conduzida. A técnica merece, assim, destaque, por poder ser diretamente aplicada a projeto de sistemas de controle, por exemplo, sem que técnicas de redução de modelo sejam utilizadas. Ainda, cabe ressaltar que o MMA também pode ser encarado como uma técnica de redução de modelos, como discutido por Craig e Kurdila (2006).

4.2.1 Modelo de Viga Sanduíche Baseado em Modos Assumidos

Considere-se um modelo de viga sanduíche desenvolvido tomando por base o MMA. A teoria de viga sanduíche considerada é idêntica àquela apresentada na Subseção 4.1.2, na qual um elemento finito fora introduzido.

São admitidas as seguintes expansões em série para os campos de deslocamento $u_b(x, t)$, $u_r(x, t)$ e $v(x, t)$:

$$u_b(x, t) = \sum_{k=1}^{n_{ub}} [\bar{\psi}_{ub}(x)]_k [q_{ub}(t)]_k = \bar{\Psi}_{ub} \mathbf{q}_{ub} = \Psi_{ub} \mathbf{q}; \quad (4.80)$$

$$u_r(x, t) = \sum_{k=1}^{n_{ur}} [\bar{\psi}_{ur}(x)]_k [q_{ur}(t)]_k = \bar{\Psi}_{ur} \mathbf{q}_{ur} = \Psi_{ur} \mathbf{q}; \quad (4.81)$$

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{n_v} [\bar{\psi}_v(x)]_k [q_v(t)]_k = \bar{\psi}_v \mathbf{q}_v = \boldsymbol{\Psi}_v \mathbf{q}; \quad (4.82)$$

n_{ub} , n_{ur} e n_v são os números de funções admissíveis usadas para representar os campos de deslocamento considerados. Ainda:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{ub}^T \quad \mathbf{q}_{ur}^T \quad \mathbf{q}_v^T]^T \quad (4.83)$$

é o vetor que coleciona as coordenadas generalizadas adotadas para o problema e:

$$\boldsymbol{\Psi}_{ub} = [\bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ub} \quad \mathbf{0}_{1 \times n_{ur}} \quad \mathbf{0}_{1 \times n_v}]; \quad (4.84)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{ur} = [\mathbf{0}_{1 \times n_{ub}} \quad \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{ur} \quad \mathbf{0}_{1 \times n_v}]; \quad (4.85)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_v = [\mathbf{0}_{1 \times n_{ub}} \quad \mathbf{0}_{1 \times n_{ur}} \quad \bar{\boldsymbol{\Psi}}_v] \quad (4.86)$$

são matrizes expandidas que agrupam as funções de forma adotadas para expansão de cada um dos campos de deslocamento independentes do problema.

Combinando as Eqs. (4.80), (4.81) e (4.82) com aquelas que preveem a cinemática da viga sanduíche – Eqs. (4.36) a (4.39) –, pode-se estabelecer que:

$$\boldsymbol{\Psi}_{uv} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Psi}_{ub} + \boldsymbol{\Psi}_{ur}) + \frac{1}{4}(h_r - h_b)\boldsymbol{\Psi}'_v \quad : \quad u_v(x, t) = \boldsymbol{\Psi}_{uv} \mathbf{q}; \quad (4.87)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{\theta v} = -h_v^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_{ur} - \boldsymbol{\Psi}_{ub}) - 2h_v^{-1}(h_r + h_b)\boldsymbol{\Psi}'_v \quad : \quad \theta_v(x, t) = \boldsymbol{\Psi}_{\theta v} \mathbf{q}; \quad (4.88)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{\theta b} = \boldsymbol{\Psi}_{\theta r} = \boldsymbol{\Psi}'_v \quad : \quad \theta_b(x, t) = \boldsymbol{\Psi}_{\theta b} \mathbf{q}, \quad \theta_r(x, t) = \boldsymbol{\Psi}_{\theta r} \mathbf{q}. \quad (4.89)$$

No que diz respeito às deformações, podem ser expressas como segue:

$$\varepsilon_{xxi}(x, y, t) = u'_i(x, t) - (y - y_i)\theta'_i(x, t) = [\boldsymbol{\Psi}'_{ui} - (y - y_i)\boldsymbol{\Psi}'_{\theta i}] \mathbf{q}; \quad (4.90)$$

$$\gamma_{xyi}(x, y, t) = v'_i(x, t) - \theta_i(x, t) = (\boldsymbol{\Psi}'_v - \boldsymbol{\Psi}_{\theta i}) \mathbf{q} \quad (4.91)$$

para $i = b, v, r$.

Quanto à velocidade de um ponto P arbitrário pertencente à i -ésima camada da viga sanduíche, pode ser computada a partir de:

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \dot{u}_{xi}(x, y, t) \\ \dot{u}_{yi}(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_i(x, t) - (y - y_i)\dot{\theta}_i(x, t) \\ \dot{v}(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{ui} - (y - y_i)\boldsymbol{\Psi}_{\theta i} \\ \boldsymbol{\Psi}_v \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.92)$$

A energia cinética associada à camada i da viga sanduíche é dada por:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{u}}_i^T \dot{\mathbf{u}}_i dV_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.93)$$

onde ρ_i é a massa específica do material da camada considerada e V_i é o volume ocupado pela mesma.

Quanto à parcela da matriz de inércia associada à camada i da viga sanduíche, \mathbf{M}_i , esta pode ser expressa como segue:

$$\mathbf{M}_i = \int_{x_{1i}}^{x_{2i}} \rho_i \left[A_i (\boldsymbol{\Psi}_{ui}^T \boldsymbol{\Psi}_{ui} + \boldsymbol{\Psi}_v^T \boldsymbol{\Psi}_v) + I_i \boldsymbol{\Psi}_{\theta i}^T \boldsymbol{\Psi}_{\theta i} \right] dx, \quad (4.94)$$

sendo A_i a área e I_i o momento de inércia de segunda ordem de área relacionados à seção transversal da i -ésima camada da viga, dados por:

$$[A_i \quad I_i] = \int_{-\frac{1}{2}b_i}^{\frac{1}{2}b_i} \int_{y_i - \frac{1}{2}h_i}^{y_i + \frac{1}{2}h_i} \begin{bmatrix} 1 & (y - y_i)^2 \end{bmatrix} dy dz. \quad (4.95)$$

Ainda, x_{1i} e x_{2i} denotam as posições de início e de término da i -ésima camada da viga, e b_i e h_i denotam a largura e a espessura da camada i .

Quanto à energia cinética total da viga, a mesma pode ser calculada pela soma das contribuições individuais de cada camada que compõe a mesma, de forma que:

$$T = \sum_i^{b,v,r} T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.96)$$

onde $\mathbf{M} = \sum_i^{b,v,r} \mathbf{M}_i$ é a matriz de inércia associada à viga sanduíche.

Para se determinar o trabalho virtual realizado pelas tensões, as relações constitutivas para o material de cada camada da mesma devem ser levadas em conta quando na avaliação das mesmas a partir daquelas deformações apresentadas, sob forma discretizada, nas Eqs. (4.90) e (4.91). Procedese como na Subseção 4.1.2: para as faces externas da viga admite-se comportamento linear elástico; e para o núcleo viscoelástico faz-se uso daquele modelo derivativo fracionário considerado no Capítulo III, Seção 3.6. Desta forma, pode-se escrever:

$$\sigma_{xxb}(x, y, t) = E_b \varepsilon_{xxb}(x, y, t) = E_b [\psi'_{ub} - (y - y_b) \psi'_{\theta b}] \mathbf{q}; \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xxv}(x, y, t) &= \left(1 + c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \right) E_{0v} \varepsilon_{xxv}(x, y, t) \\ &\quad + c_v \frac{E_{\infty v}}{E_{0v}} E_{0v} \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\varepsilon}_{xxv}(x, y, t - k\Delta t) \\ &= \left(1 + c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \right) E_{0v} [\psi'_{uv} - (y - y_v) \psi'_{\theta v}] \mathbf{q} \\ &\quad + c_v \frac{E_{\infty v}}{E_{0v}} E_{0v} [\psi'_{uv} - (y - y_v) \psi'_{\theta v}] \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{q}}(t - k\Delta t); \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\sigma_{xxr}(x, y, t) = E_r \varepsilon_{xxr}(x, y, t) = E_r [\psi'_{ur} - (y - y_r) \psi'_{\theta r}] \mathbf{q}; \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xyv}(x, y, t) &= \left(1 + c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \right) G_{0v} \gamma_{xyv}(x, y, t) \\ &\quad + c_v \frac{E_{\infty v}}{E_{0v}} G_{0v} \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\gamma}_{xyv}(x, y, t - k\Delta t) \\ &= \left(1 + c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \right) G_{0v} (\psi'_v - \psi'_{\theta v}) \mathbf{q} \\ &\quad + c_v \frac{E_{\infty v}}{E_{0v}} G_{0v} (\psi'_v - \psi'_{\theta v}) \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{q}}(t - k\Delta t), \end{aligned} \quad (4.100)$$

onde $\bar{\mathbf{q}}$ é o vetor de graus de liberdade anelásticos, que coleciona variáveis internas associadas ao modelo adotado para viscoelasticidade. As constantes dos materiais são definidas como na Subseção 4.1.2, mas não estão associadas, neste caso, a um elemento finito particular; representam a propriedade de determinado material ao longo de todo o comprimento da viga.

Apresentadas as tensões nas Eqs. (4.97) a (4.100), os trabalhos virtuais associados às mesmas escrevem-se, para cada uma das camadas da viga sanduíche:

$$\delta W_{sb} = -\int_{V_b} \sigma_{xxb}(x, y, t) \delta \varepsilon_{xxb}(x, y, t) dV_b = \delta \mathbf{q}^T (-\mathbf{K}_b \mathbf{q}); \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{sv} &= -\int_{V_v} \sigma_{xxv}(x, y, t) \delta \varepsilon_{xxv}(x, y, t) dV_v - \int_{V_v} \tau_{xyv}(x, y, t) \delta \gamma_{xyv}(x, y, t) dV_v \\ &= \delta \mathbf{q}^T \left[-\left(1 + c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}}\right) \mathbf{K}_v \mathbf{q} - c_v \frac{E_{\infty v}}{E_{0v}} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{q}}(t - k\Delta t) \right]; \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\delta W_{sr} = -\int_{V_r} \sigma_{xxr}(x, y, t) \delta \varepsilon_{xxr}(x, y, t) dV_r = \delta \mathbf{q}^T (-\mathbf{K}_r \mathbf{q}). \quad (4.103)$$

As contribuições individuais de cada uma das camadas da viga sanduíche a sua rigidez, \mathbf{K}_i , $i = b, v, r$, são dadas por:

$$\mathbf{K}_b = \int_{x_{1b}}^{x_{2b}} E_b \left(A_b \boldsymbol{\psi}'_{ub}{}^T \boldsymbol{\psi}'_{ub} + I_b \boldsymbol{\psi}'_{\theta b}{}^T \boldsymbol{\psi}'_{\theta b} \right) dx; \quad (4.104)$$

$$\mathbf{K}_v = \int_{x_{1v}}^{x_{2v}} E_{0v} \left(A_v \boldsymbol{\psi}'_{uv}{}^T \boldsymbol{\psi}'_{uv} + I_v \boldsymbol{\psi}'_{\theta v}{}^T \boldsymbol{\psi}'_{\theta v} \right) dx + \int_{x_{1v}}^{x_{2v}} G_{0v} k_v A_v \left(\boldsymbol{\psi}'_v - \boldsymbol{\psi}'_{\theta v} \right)^T \left(\boldsymbol{\psi}'_v - \boldsymbol{\psi}'_{\theta v} \right) dx; \quad (4.105)$$

$$\mathbf{K}_r = \int_{x_{1r}}^{x_{2r}} E_r \left(A_r \boldsymbol{\psi}'_{ur}{}^T \boldsymbol{\psi}'_{ur} + I_r \boldsymbol{\psi}'_{\theta r}{}^T \boldsymbol{\psi}'_{\theta r} \right) dx. \quad (4.106)$$

Somando as contribuições das camadas da viga ao trabalho virtual realizado pelas tensões desenvolvidas nos materiais que a compõe, resulta:

$$\delta W_s = \sum_i^{b,v,r} \delta W_{si} = \delta \mathbf{q}^T \left[-(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}_v) \mathbf{q} - c_v \frac{E_{\infty v}}{E_{0v}} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{q}}(t - k\Delta t) \right], \quad (4.107)$$

onde $\mathbf{K} = \sum_i^{b,v,r} \mathbf{K}_i$ é a matriz de rigidez associada à viga e $\tilde{\mathbf{K}}_v = c_v \frac{E_{\infty v} - E_{0v}}{E_{0v}} \mathbf{K}_v$.

Mais uma vez admite-se que \mathbf{Q}_e denota, de forma geral, o vetor de carregamentos generalizados externos aplicados à viga. O trabalho virtual realizado pelo mesmo é dado por:

$$\delta W_e = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_e, \quad (4.108)$$

de maneira que, combinado as Eqs. (4.107) e (4.108), o trabalho virtual total pode ser calculado como disposto a seguir:

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_s = \delta \mathbf{q}^T \left[\mathbf{Q}_e - (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}_v) \mathbf{q} - c_v \frac{E_{\infty V}}{E_{0V}} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{q}}(t - k\Delta t) \right]. \quad (4.109)$$

Da Eq. (4.109) constata-se que o vetor de carregamentos generalizados \mathbf{Q} vale:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_e - (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}_v) \mathbf{q} - c_v \frac{E_{\infty V}}{E_{0V}} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{q}}(t - k\Delta t). \quad (4.110)$$

Então, a partir das equações de Lagrange (SHABANA, 2005):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}, \quad (4.111)$$

as equações de equilíbrio dinâmico podem ser estabelecidas:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}_v) \mathbf{q} = \mathbf{Q}_e - c_v \frac{E_{\infty V}}{E_{0V}} \mathbf{K}_v \sum_{k=1}^{N_\alpha} A_{k+1}(\alpha_v) \bar{\mathbf{q}}(t - k\Delta t). \quad (4.112)$$

Informações relacionadas à seleção das funções de forma que foram adotadas para as expansões apresentadas nas Eqs. (4.80) a (4.82) serão adiadas até o Capítulo VII, quando da apresentação de um exemplo numérico, já que a escolha das mesmas deve-se pautar nas condições de contorno geométricas do problema.

CAPÍTULO V

Dinâmica de Sistemas Multicorpos Flexíveis

Neste Capítulo, a modelagem de sistemas multicorpos flexíveis é considerada. Uma síntese das principais abordagens utilizadas para esta finalidade é, num primeiro momento, realizada. Na sequência, enfoque é dado à modelagem baseada no uso de referenciais flutuantes em conjunto com o Método dos Elementos Finitos (MEF) para discretização espacial. Também são abordados procedimentos utilizados para integração numérica das equações algébrico-diferenciais que descrevem o movimento de um sistema multicorpos, assim como aqueles adotados para a realização de análise modal.

Destaca-se que apenas a dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis submetidos a pequenas deformações é considerada. Isto significa que a relação tensorial deslocamento-deformação para um componente flexível específico do sistema analisado é linear, e, ainda, as componentes do tensor das deformações são consideradas pequenas.

5.1 Métodos Utilizados para a Modelagem da Dinâmica de Sistemas Multicorpos Flexíveis

De acordo com Wasfy e Noor (2003), quando na consideração de problemas de dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis, um referencial inercial serve como um sistema de referência global para os componentes do sistema. Ainda, referenciais intermediários locais são associados a cada um dos corpos. Tais referenciais geralmente tentam seguir o movimento médio de corpo rígido (rotação e translação) do corpo ao qual estão vinculados. Desta forma, o movimento da parte considerada com respeito a um determinado referencial local é, praticamente, devido apenas a sua flexibilidade. Esta abordagem pode simplificar o cálculo das tensões que surgem no material com respeito ao sistema de referência local, uma vez que métricas de tensão e de deformação as quais não são invariantes a movimen-

tos de corpo rígido, como o tensor de tensões de Cauchy e o tensor de deformações infinitesimais, podem ser utilizadas.

Dois tipos principais de sistemas intermediários são comumente empregados para a modelagem dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis, a saber: sistemas de referência flutuantes e sistemas de referência corrotacionais (WASFY, NOOR, 2003). Este último tipo de referência é utilizado principalmente quando da discretização de corpos flexíveis através do MEF, caso em que um sistema corrotacional é associado a cada um dos elementos finitos que, juntos, representam o componente considerado. Neste caso, também, o sistema de referência intermediário segue o movimento de corpo rígido médio apresentado pelo elemento finito ao qual está associado. Sistemas flutuantes, por sua vez, seguem o movimento de corpo rígido de toda uma subestrutura participante do sistema multicorpos, e pode ser utilizado, ainda, em situações em que não se faz emprego do MEF para discretização do contínuo.

Outra abordagem possível envolve a consideração de métricas não lineares para deformações finitas, e das correspondentes métricas de tensão, para avaliar as forças devidas às tensões desenvolvidas no material. Nesta situação, os movimentos de corpo rígido e devido à flexibilidade do contínuo são tratados, sem que haja distinção entre ambos, diretamente no sistema de referência inercial global, de forma que não se mostra necessária a utilização de referenciais intermediários.

A Fig. 5.1, adaptada do trabalho de Wasfy e Noor (2003), ilustra esquematicamente os referenciais utilizados por cada uma das formulações consideradas.

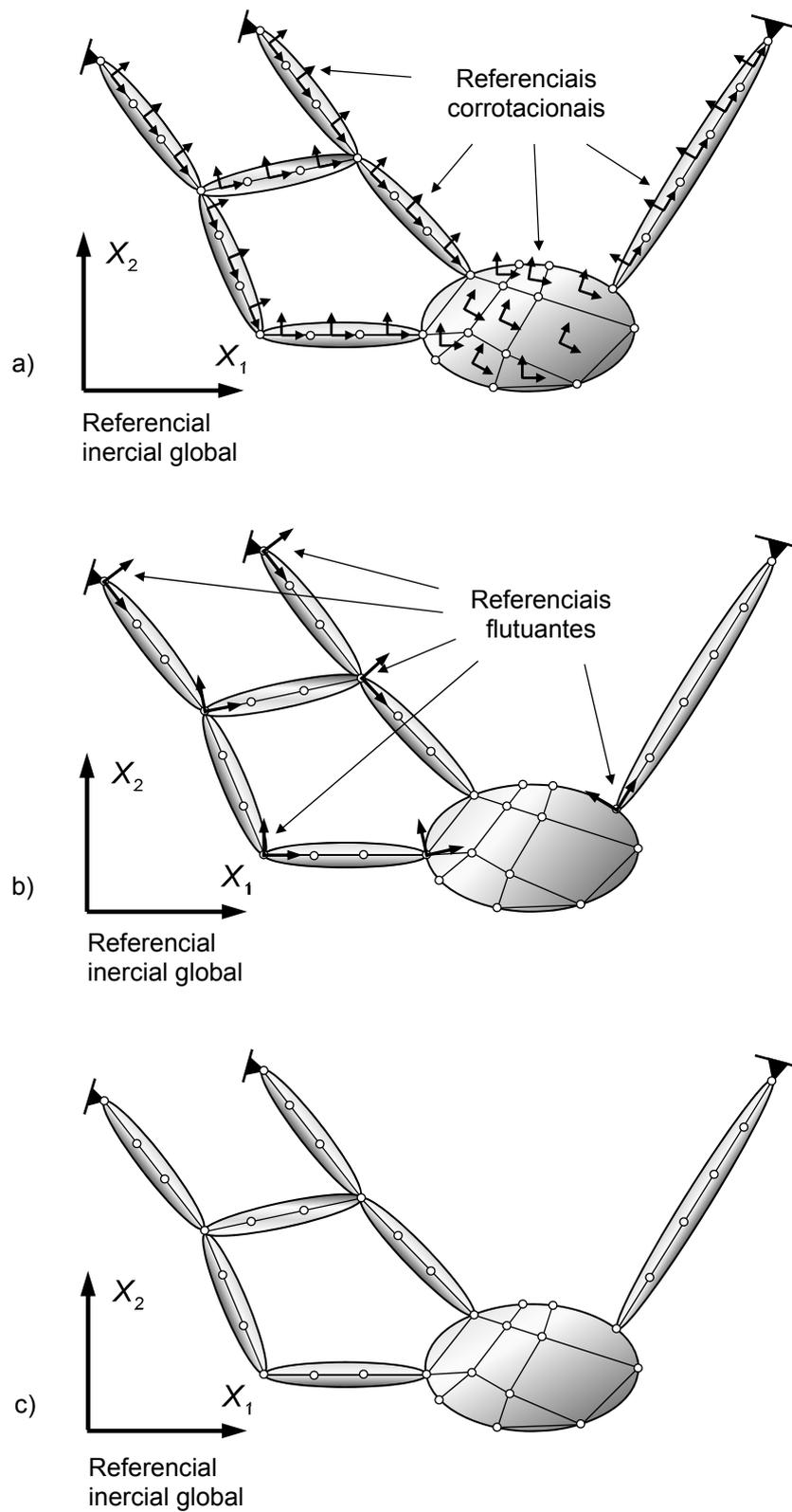


Figura 5.1 - Referenciais utilizados pelas principais formulações consideradas para modelagem de sistemas multicorpos: a) Referenciais flutuantes; b) Referenciais corrotacionais; c) Referencial inercial global (adaptado de (WASFY, NOOR, 2003)).

5.2 Modelagem de Sistemas Multicorpos Flexíveis pela Utilização de Referenciais Flutuantes e do Método dos Elementos Finitos

Nesta Seção, a formulação matemática associada à modelagem de sistemas multicorpos flexíveis quando do emprego de sistemas de referência flutuantes e do MEF é considerada. A mesma está organizada de modo a apresentar, na sequência: a cinemática associada a problemas da natureza considerada; a formulação de uma expressão para a energia cinética associada a um corpo constituinte de um sistema analisado; expressões para os trabalhos virtuais relacionados às tensões e aos esforços externos a um corpo e/ou ao sistema; equações de restrição; e, por fim, as equações algébrico-diferenciais que descrevem o comportamento elastodinâmico de um sistema, obtidas pelo uso das equações de Lagrange. Adverte-se que a apresentação é toda baseada na obra de Shabana (2005), e que, ainda que seja relativamente longa, alguns detalhes são omitidos.

5.2.1 Cinemática e Discretização Espacial pelo Uso do Método dos Elementos Finitos

A equação básica utilizada para descrever a cinemática de um corpo flexível quando na utilização de um referencial intermediário flutuante em conjunto com o MEF é análoga àquela empregada quando na análise de um corpo rígido que se encontra em movimento tridimensional geral (SHABANA, 2005):

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^{ij}, \quad (5.1)$$

onde \mathbf{r}^{ij} é o vetor posição de um ponto arbitrário do elemento j que faz parte da malha que discretiza o corpo flexível i , expresso no referencial inercial global $O X_1 X_2 X_3$; \mathbf{R}^i é o vetor posição da origem do referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$ associado ao mesmo corpo flexível considerado; \mathbf{A}^i é a matriz de rotação associada ao referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$ que dá informação sobre sua orientação; e $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$ é o vetor posição de um ponto arbitrário do elemento j associado ao corpo flexível i , este expresso no referencial local flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$. Cabe salientar que:

- a) os vetores \mathbf{r}^{ij} e $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$ são dependentes do tempo t e da posição do ponto considerado no interior do elemento j do corpo i , aqui denotada por \mathbf{x}^{ij} , esta sendo mensurada com respeito ao referencial local $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$ de cada elemento;
- b) o vetor \mathbf{R}^i é dependente do tempo t ;

- c) a matriz de rotação \mathbf{A}^i é expressa em função de um vetor de parâmetros de rotação $\boldsymbol{\theta}^i$, tais como ângulos de Euler, parâmetros de Euler, parâmetros de Rodriguez, cossenos diretores, etc., sendo o mesmo dependente do tempo t .

Salienta-se que estas dependências não serão explicitadas em grande parte das equações aqui apresentadas para simplificar a notação.

Os referenciais utilizados para descrição da cinemática de um elemento finito são mostrados na Fig. 5.2. Como já mencionado, $O X_1 X_2 X_3$, $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$ e $O^{ij} X_1^{ij} X_2^{ij} X_3^{ij}$ são os referenciais inercial global, flutuante associado ao corpo flexível i e do elemento finito j que compõe a malha deste mesmo corpo, respectivamente. Na figura considerada é mostrado ainda outro referencial intermediário, $O^i X_{i1}^{ij} X_{i2}^{ij} X_{i3}^{ij}$, associado a cada elemento finito utilizado na discretização do corpo flexível considerado. Este referencial tem origem coincidente com aquela do referencial flutuante associado ao componente i do sistema, e orientação fixa com respeito ao mesmo. Desta forma, ambos os referenciais $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$ e $O^i X_{i1}^{ij} X_{i2}^{ij} X_{i3}^{ij}$ estão sujeitos aos mesmos movimentos de translação e de rotação. Ainda, a orientação inicial do referencial $O^i X_{i1}^{ij} X_{i2}^{ij} X_{i3}^{ij}$ é idêntica àquela assumida pelo referencial do elemento $O^{ij} X_1^{ij} X_2^{ij} X_3^{ij}$ para a configuração indeformada do sistema. Feitas estas considerações, o referencial intermediário $O^i X_{i1}^{ij} X_{i2}^{ij} X_{i3}^{ij}$ está completamente caracterizado. Comentários sobre a necessidade de seu emprego na modelagem de sistemas multicorpos flexíveis discretizados pelo MEF são tecidos na obra de Shabana (2005).

Para que se obtenha uma expressão apropriada para o vetor posição $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$, é considerada inicialmente a equação de interpolação do campo de deslocamentos generalizados \mathbf{w}^j no interior de um elemento arbitrário j :

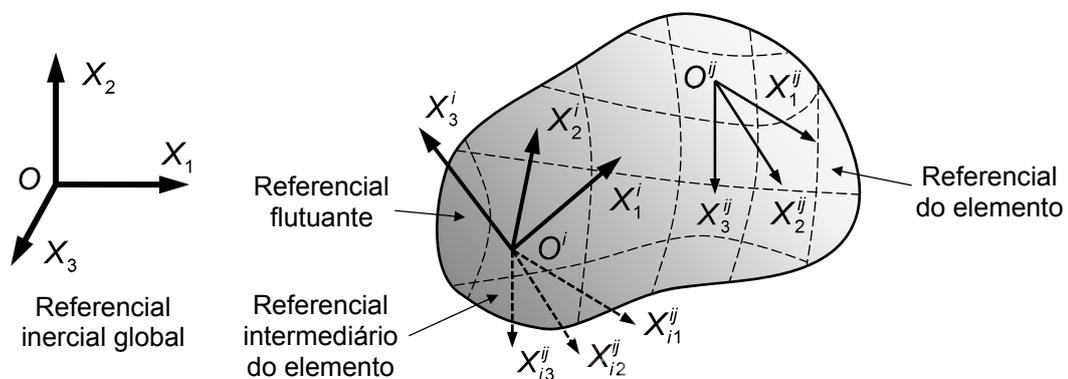


Figura 5.2 - Referenciais utilizados para descrição da cinemática associada à formulação por referenciais flutuantes e elementos finitos (adaptado de (SHABANA, 2005)).

$$\mathbf{w}^j = \mathbf{S}^j \mathbf{e}^j, \quad (5.2)$$

onde \mathbf{S}^j é a matriz das funções de forma, dependente de \mathbf{x}^j , e \mathbf{e}^j é o vetor que contém os graus de liberdade nodais, dependentes do tempo t . Cabe mencionar que a Eq. (5.2) é válida uma vez que é expressa no referencial do elemento finito $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$.

Para desenvolvimentos posteriores, salienta-se que o vetor dos graus de liberdade nodais \mathbf{e}^j pode ser decomposto em uma parcela \mathbf{e}_0^j associada aos valores por eles assumidos quando o componente encontra-se na situação indeformada e em outra parcela \mathbf{e}_f^j relacionada à flexibilidade do corpo analisado e que leva em conta as deformações às quais o elemento é submetido. Matematicamente, isto é expresso segundo:

$$\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_0^j + \mathbf{e}_f^j. \quad (5.3)$$

Como se considera que a matriz das funções de forma \mathbf{S}^j é capaz de descrever movimentos de translação de corpo rígido, a Eq. (5.2) pode ser expressa em qualquer referencial que é inicialmente paralelo ao referencial do elemento finito $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$, particularmente no referencial intermediário $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$. Desta forma, é possível estabelecer que:

$$\mathbf{w}_i^j = \mathbf{S}_i^j \mathbf{e}_i^j, \quad (5.4)$$

onde \mathbf{w}_i^j e \mathbf{e}_i^j são os vetores de deslocamentos generalizados e dos graus de liberdade elementares, respectivamente, ambos expressos no referencial $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$. Como este último referencial tem orientação fixa com respeito ao referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$, o vetor \mathbf{e}_i^j dos graus de liberdade nodais, expressos no referencial intermediário do elemento finito j associado ao corpo flexível i , pode ser definido a partir de uma rotação dos graus de liberdade nodais \mathbf{q}_n^j associados ao mesmo elemento finito e expressos, por sua vez, no referencial flutuante associado ao componente flexível, isto é:

$$\mathbf{e}_i^j = \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{q}_n^j, \quad (5.5)$$

onde $\bar{\mathbf{C}}^j$ é uma matriz de transformação ortogonal e constante, de dimensões iguais ao número de graus de liberdade elementar. De forma análoga, o vetor posição $\bar{\mathbf{u}}^j$ expresso no

sistema de referência flutuante pode ser obtido a partir de uma transformação do vetor de deslocamentos generalizados \mathbf{w}_i^j definido com respeito a $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$, como segue:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{w}_i^j, \quad (5.6)$$

onde \mathbf{C}^j é uma matriz de passagem entre os referenciais mencionados previamente, de dimensões 2×2 ou 3×3 para problemas bi e tridimensionais, respectivamente. Substituindo a Eq. (5.4) na Eq. (5.6) resulta:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{w}_i^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \mathbf{e}_i^j, \quad (5.7)$$

e considerando a Eq. (5.5), pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \mathbf{e}_i^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{q}_n^j. \quad (5.8)$$

Como informado por Shabana (2005), esta equação define o vetor posição de um ponto arbitrário de um elemento finito do corpo flexível considerado com respeito ao sistema de coordenadas flutuante a ele associado.

Com respeito ao sistema de coordenadas intermediário $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$, Shabana (2005) salienta sua importância no desenvolvimento da formulação não linear que envolve sistemas de referência flutuantes e discretizações por elementos finitos para sistemas multicorpos flexíveis. De acordo com o autor, o uso deste sistema de coordenadas, em conjunto com elementos finitos que apresentam funções de forma capazes de descrever movimentos de translação de corpos rígidos, proporciona a modelagem exata da cinemática de corpo rígido a que os corpos flexíveis do sistema estão sujeitos. Sem o uso deste referencial, a modelagem exata desta cinemática não pode ser obtida quando elementos de viga e de placa tradicionais são utilizados na discretização de corpos flexíveis, uma vez que a utilização de graus de liberdade nodais de rotação leva à linearização daquela teoria quando elementos finitos experimentam grandes rotações.

As condições de conectividade entre elementos são impostas pelo uso da equação seguinte:

$$\mathbf{q}_n^j = \mathbf{B}_1^j \mathbf{q}_n^i, \quad (5.9)$$

onde \mathbf{B}_1^j é uma matriz de transformação Booleana e \mathbf{q}_n^i é o vetor que contém todos os graus de liberdade nodais associados ao componente i do sistema considerado. Da introdução da Eq. (5.9) na Eq. (5.8) resulta:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{q}_n^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{B}_1^j \mathbf{q}_n^i = \mathbf{N}^j \mathbf{q}_n^i. \quad (5.10)$$

Nesta equação, $\mathbf{N}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{B}_1^j$ é uma matriz dependente da posição \mathbf{x}^j e que pode ser interpretada como uma matriz de interpolação expandida (por interpolar deslocamentos generalizados a partir do vetor de todos os graus de liberdades nodais associados ao corpo flexível i) e expressa no referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$.

Pode-se observar que a Eq. (5.10) contempla modos de corpo rígido para $\bar{\mathbf{u}}^j$ devido à presença da matriz das funções de forma \mathbf{S}^j associada aos elementos finitos considerados. Entretanto, os modos de corpo rígido de cada componente do sistema já são considerados no modelo devido à utilização da Eq. (5.1), na qual se mostram presentes uma translação e uma rotação entre referenciais, associadas ao vetor \mathbf{R}^i e à matriz \mathbf{A}^i , respectivamente. Parte-se então para a eliminação dos modos de corpo rígido presentes na Eq. (5.10). Considerando a Eq. (5.3), o vetor \mathbf{q}_n^i pode ser decomposto sob a forma:

$$\mathbf{q}_n^i = \mathbf{q}_0^i + \bar{\mathbf{q}}_f^i, \quad (5.11)$$

onde \mathbf{q}_0^i e $\bar{\mathbf{q}}_f^i$ são os vetores que contêm as contribuições aos graus de liberdades nodais devidas à configuração inicial (não deformada) e à flexibilidade, respectivamente. Para eliminar modos de corpo rígido devidos às funções de forma associadas aos elementos finitos utilizados para discretização de um componente do sistema é então utilizado um conjunto de equações algébricas que relacionam a parte flexível dos graus de liberdade nodais. Isto pode ser feito através de uma matriz de transformação linear \mathbf{B}_2^i para que se defina um novo conjunto de graus de liberdade nodais flexíveis \mathbf{q}_f^i que sejam independentes entre si. Para este efeito, escreve-se:

$$\bar{\mathbf{q}}_f^i = \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i. \quad (5.12)$$

Fazendo uso das Eqs. (5.11) e (5.12), a Eq. (5.10) pode ser reescrita sob a forma:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{N}^j \mathbf{q}_n^i = \mathbf{N}^j (\mathbf{q}_0^i + \bar{\mathbf{q}}_f^i) = \mathbf{N}^j (\mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i). \quad (5.13)$$

Esta última equação é adequada para a correta representação, em conjunto com a Eq. (5.1), do campo de deslocamentos para os pontos do elemento finito arbitrário j presente na malha de um corpo flexível i . Isto se faz verdade já que nesta última o campo de deslocamentos não apresenta modos de corpo rígido.

Substituindo a Eq. (5.13) na Eq. (5.1), resulta finalmente a seguinte equação para o vetor posição \mathbf{r}^j expresso no referencial inercial global:

$$\mathbf{r}^j = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j (\mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i). \quad (5.14)$$

5.2.2 Desenvolvimento da Expressão para a Energia Cinética

Derivando a Eq. (5.14) em relação ao tempo, o vetor velocidade pode ser obtido:

$$\dot{\mathbf{r}}^j = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^j + \mathbf{A}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}^j = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^j + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i \dot{\mathbf{q}}_f^i, \quad (5.15)$$

onde pontos sobrescritos denotam diferenciação com respeito a tempo. Para avaliar $\dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^j$, a regra da cadeia deve ser empregada, já que, como colocado anteriormente, \mathbf{A}^i é função de um vetor que contém parâmetros de rotação $\boldsymbol{\theta}^i$, o qual varia com t . Assim:

$$\dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^j = \frac{\partial (\mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^j)}{\partial \boldsymbol{\theta}^i} \dot{\boldsymbol{\theta}}^i = \mathbf{B}^j \dot{\boldsymbol{\theta}}^i, \quad (5.16)$$

onde (SHABANA, 2005):

$$\mathbf{B}^j = \frac{\partial (\mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^j)}{\partial \boldsymbol{\theta}^i} = \left[\frac{\partial (\mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^j)}{\partial \theta_1^i} \quad \frac{\partial (\mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^j)}{\partial \theta_2^i} \quad \dots \quad \frac{\partial (\mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^j)}{\partial \theta_{n_r}^i} \right], \quad (5.17)$$

sendo n_r o número de parâmetros rotacionais utilizados para descrição da orientação do referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$, isto é, $\boldsymbol{\theta}^i \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$. Então, da Eq. (5.15) resulta:

$$\dot{\mathbf{r}}^j = \dot{\mathbf{R}}^i + \mathbf{B}^j \dot{\boldsymbol{\theta}}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i \dot{\mathbf{q}}_f^i = \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{B}^j \quad \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i \right] \left[\left(\dot{\mathbf{R}}^i \right)^T \quad \left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^i \right)^T \quad \left(\dot{\mathbf{q}}_f^i \right)^T \right]^T. \quad (5.18)$$

A expressão da energia cinética associada a cada elemento finito pode ser então construída da seguinte forma:

$$T^j = \frac{1}{2} \int_{V^j} \rho^j (\dot{\mathbf{r}}^j)^T \dot{\mathbf{r}}^j dV^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{M}^j \dot{\mathbf{q}}^i, \quad (5.19)$$

onde ρ^j é a massa específica do material que ocupa o volume V^j do elemento finito e:

$$\mathbf{q}^i = \left[(\mathbf{R}^i)^T \quad (\boldsymbol{\theta}^i)^T \quad (\mathbf{q}_r^i)^T \right]^T = \left[(\mathbf{q}_r^i)^T \quad (\mathbf{q}_f^i)^T \right]^T \quad (5.20)$$

é o vetor dos graus de liberdade associados ao corpo flexível considerado, o qual pode ser dividido em uma parcela rígida $\mathbf{q}_r^i = \left[(\mathbf{R}^i)^T \quad (\boldsymbol{\theta}^i)^T \right]^T$ e em outra flexível \mathbf{q}_f^i . Além disso:

$$\mathbf{M}^j = \mathbf{M}^j(\mathbf{q}^i) = \int_{V^j} \rho^j \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^j & \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i \\ (\mathbf{B}^j)^T & (\mathbf{B}^j)^T \mathbf{B}^j & (\mathbf{B}^j)^T \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i \\ (\mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i)^T & (\mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i)^T \mathbf{B}^j & (\mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i)^T \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i \end{bmatrix} dV^j = (\mathbf{M}^j)^T \quad (5.21)$$

é a matriz de inércia associada ao elemento finito, a qual é dependente do vetor \mathbf{q}^i definido anteriormente. Esta dependência resulta uma vez que $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^i(\boldsymbol{\theta}^i)$ e $\mathbf{B}^j = \mathbf{B}^j(\boldsymbol{\theta}^i, \mathbf{q}_f^i)$.

Para obter expressões mais simplificadas para a matriz de inércia apresentada anteriormente, faz-se uso das seguintes relações (SHABANA, 2005):

$$\dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{B}^j \dot{\boldsymbol{\theta}}^i = \mathbf{A}^i (\bar{\boldsymbol{\omega}}^i \times \bar{\mathbf{u}}^j) = -\mathbf{A}^i (\bar{\mathbf{u}}^j \times \bar{\boldsymbol{\omega}}^i) = -\mathbf{A}^i \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^j \bar{\boldsymbol{\omega}}^i = -\mathbf{A}^i \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^j \bar{\mathbf{G}}^i \boldsymbol{\theta}^i, \quad (5.22)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\omega}}^i$ é o vetor velocidade angular associado ao corpo i e definido no referencial local $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$, $\tilde{\bar{\mathbf{u}}}^j$ é uma matriz antissimétrica definida a partir do vetor de deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}^j$ da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \left[\bar{u}_1^j \quad \bar{u}_2^j \quad \bar{u}_3^j \right]^T \Leftrightarrow \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^j = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{u}_3^j & \bar{u}_2^j \\ \bar{u}_3^j & 0 & -\bar{u}_1^j \\ -\bar{u}_2^j & \bar{u}_1^j & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^j = -(\tilde{\bar{\mathbf{u}}}^j)^T, \quad (5.23)$$

e $\bar{\mathbf{G}}^i$ é a matriz que relaciona o vetor velocidade angular $\bar{\boldsymbol{\omega}}^i$ definido no referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$ à derivada temporal do vetor de parâmetros de rotação $\dot{\boldsymbol{\theta}}^i$:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}^i = \bar{\mathbf{G}}^i \dot{\boldsymbol{\theta}}^i. \quad (5.24)$$

Da Eq. (5.22) verifica-se que:

$$\mathbf{B}^{ij} = -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^{ij} \bar{\mathbf{G}}^i, \quad (5.25)$$

a qual pode ser substituída na Eq. (5.21) para que resulte, após manipulações:

$$\mathbf{M}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^{ij} \bar{\mathbf{G}}^i & \mathbf{A}^i \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i \\ -(\bar{\mathbf{G}}^i)^\top (\tilde{\mathbf{u}}^{ij})^\top (\mathbf{A}^i)^\top & (\bar{\mathbf{G}}^i)^\top (\tilde{\mathbf{u}}^{ij})^\top \tilde{\mathbf{u}}^{ij} \bar{\mathbf{G}}^i & (\bar{\mathbf{G}}^i)^\top \tilde{\mathbf{u}}^{ij} \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i \\ (\mathbf{B}_2^i)^\top (\mathbf{N}^{ij})^\top (\mathbf{A}^i)^\top & (\mathbf{B}_2^i)^\top (\mathbf{N}^{ij})^\top (\tilde{\mathbf{u}}^{ij})^\top \bar{\mathbf{G}}^i & (\mathbf{B}_2^i)^\top (\mathbf{N}^{ij})^\top \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i \end{bmatrix} dV^{ij}. \quad (5.26)$$

Quanto à energia cinética total associada ao corpo i , a mesma pode ser obtida a partir da soma das contribuições individuais de cada um dos elementos finitos utilizados quando na discretização do corpo flexível em questão, ou seja:

$$\mathbf{T}^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} T^{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^\top \left[\sum_{j=1}^{n_e^i} \mathbf{M}^{ij} \right] \dot{\mathbf{q}}^i = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^\top \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i, \quad (5.27)$$

onde n_e^i é o número de elementos utilizados na discretização do corpo flexível i e $\mathbf{M}^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} \mathbf{M}^{ij} = \mathbf{M}^i(\mathbf{q}^i)$ é a matriz de inércia a ele associada, a qual incorpora contribuições vinculadas tanto às parcelas rígidas quanto àquelas flexíveis de seu movimento.

5.2.3 Trabalho Virtual e Esforços Generalizados Associados às Tensões e aos Esforços Externos ao Sistema

Outro aspecto que deve ser levado em conta quando da modelagem da dinâmica de sistemas multicorpos flexíveis diz respeito ao trabalho realizado pelas tensões provocadas no material, que pode ser escrito sob a forma:

$$W_s^{ij} = -\int_{V^{ij}} (\boldsymbol{\sigma}^{ij})^T \boldsymbol{\varepsilon}^{ij} dV^{ij}, \quad (5.28)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^{ij}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^{ij}$ são os vetores que contêm as componentes dos tensores das tensões e das deformações às quais o elemento j do corpo flexível i está sujeito.

Considerando uma variação virtual dos deslocamentos, resulta o trabalho virtual associado às tensões, expresso segundo:

$$\delta W_s^{ij} = -\int_{V^{ij}} (\boldsymbol{\sigma}^{ij})^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{ij} dV^{ij}. \quad (5.29)$$

Faz-se necessário expressar o vetor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^{ij}$ em termos dos deslocamentos devidos à flexibilidade do contínuo $\bar{\mathbf{u}}_f^{ij}$. Sendo consideradas pequenas deformações, pode-se estabelecer a relação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ij} = \mathbf{D}^{ij} \bar{\mathbf{u}}_f^{ij}, \quad (5.30)$$

onde \mathbf{D}^{ij} é uma matriz que contém operadores diferenciais.

Considerando a Eq. (5.13), o vetor de deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$ pode ser escrito como a soma de duas parcelas $\bar{\mathbf{u}}_0^{ij}$ e $\bar{\mathbf{u}}_f^{ij}$ analogamente ao apresentado nas Eqs. (5.3) e (5.11):

$$\bar{\mathbf{u}}^{ij} = \bar{\mathbf{u}}_0^{ij} + \bar{\mathbf{u}}_f^{ij}. \quad (5.31)$$

Comparando a Eq. (5.13) com a Eq. (5.31), identifica-se:

$$\bar{\mathbf{u}}_0^{ij} = \mathbf{N}^{ij} \mathbf{q}_0^i; \quad (5.32)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_f^{ij} = \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i. \quad (5.33)$$

Fazendo uso das Eqs. (5.30) e (5.33), o trabalho virtual δW_s^{ij} , dado na Eq. (5.29), pode ser reescrito como:

$$\delta W_s^{ij} = -\int_{V^{ij}} (\boldsymbol{\sigma}^{ij})^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{ij} dV^{ij} = -\int_{V^{ij}} (\boldsymbol{\sigma}^{ij})^T \mathbf{D}^{ij} \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i dV^{ij} \delta \mathbf{q}_f^i. \quad (5.34)$$

Assumindo hipóteses de que o material seja linear e isotrópico, as tensões podem ser expressas em termos das deformações de acordo com:

$$\boldsymbol{\sigma}^{ij} = \mathbf{E}^{ij} \boldsymbol{\varepsilon}^{ij}, \quad (5.35)$$

onde \mathbf{E}^{ij} é a matriz das constantes elásticas do material do elemento considerado. Introduzindo esta relação na Eq. (5.34), chega-se a:

$$\begin{aligned} \delta W_s^{ij} &= -\int_{V^{ij}} (\boldsymbol{\sigma}^{ij})^T \mathbf{D}^{ij} \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i dV^{ij} \delta \mathbf{q}_f^i \\ &= -(\mathbf{q}_f^i)^T \int_{V^{ij}} (\mathbf{B}_2^i)^T (\mathbf{N}^{ij})^T (\mathbf{D}^{ij})^T (\mathbf{E}^{ij})^T \mathbf{D}^{ij} \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i dV^{ij} \delta \mathbf{q}_f^i \\ &= -(\mathbf{q}_f^i)^T (\mathbf{K}_{ff}^{ij})^T \delta \mathbf{q}_f^i = -(\mathbf{q}^i)^T (\mathbf{K}^{ij})^T \delta \mathbf{q}^i, \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde \mathbf{K}_{ff}^{ij} é a matriz de rigidez associada ao elemento j da malha utilizada para o corpo flexível i , expressa segundo:

$$\mathbf{K}_{ff}^{ij} = \int_{V^{ij}} (\mathbf{B}_2^i)^T (\mathbf{N}^{ij})^T (\mathbf{D}^{ij})^T (\mathbf{E}^{ij})^T \mathbf{D}^{ij} \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i dV^{ij}, \quad (5.37)$$

e \mathbf{K}^{ij} é dada por:

$$\mathbf{K}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ff}^{ij} \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

A contribuição de todas as tensões que se desenvolvem no corpo flexível i é dada pela soma das contribuições individuais associadas a cada um dos elementos finitos:

$$\delta W_s^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} \delta W_s^{ij} = -(\mathbf{q}^i)^T \left[\sum_{j=1}^{n_e^i} (\mathbf{K}_{ff}^{ij})^T \right] \delta \mathbf{q}^i = -(\mathbf{q}^i)^T (\mathbf{K}^i)^T \delta \mathbf{q}^i, \quad (5.39)$$

na qual $\mathbf{K}^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} \mathbf{K}^{ij}$ é a matriz de rigidez associada a todo o corpo flexível i .

Faz-se aqui a observação de que, no desenvolvimento anterior, uma lei constitutiva diferente daquela de Hooke, do tipo $\boldsymbol{\sigma}^{ij} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}^{ij}, \dots)$, poderia ter sido levada em conta. Em Capítulos subsequentes, por exemplo, elementos finitos de viga sanduíche são considerados

para representar tratamento viscoelástico superficial. Para sua implementação, pode-se proceder de maneira análoga, como já mencionado, considerando-se a lei constitutiva para o material de cada camada que compõe a viga. Esta etapa é similar àquela desenvolvida no Capítulo IV, Subseção 4.1.2, e, por esta razão, não será aqui detalhada novamente.

Pode acontecer, ainda, de forças externas estarem aplicadas ao corpo flexível considerado. Estas podem ser incluídas na formulação por meio da consideração de seu trabalho virtual. De maneira geral, pode-se escrever o trabalho virtual dos esforços externos generalizados δW_e^i associados ao corpo i sob a forma:

$$\delta W_e^i = (\mathbf{Q}_e^i)^T \delta \mathbf{q}^i, \quad (5.40)$$

onde \mathbf{Q}_e^i é o vetor dos esforços externos generalizados.

5.2.4 Equações de Restrição

Outro ponto importante a ser levado em conta quando na modelagem da dinâmica de sistemas multicorpos é a presença de restrições. Estas podem ser holonômicas ou não holonômicas, e podem ser devidas à presença de vínculos entre um ou mais componentes do sistema, à especificação de movimentos, ou ao contato. Restrições holonômicas podem ser expressas sob a forma apresentada na Eq. (5.41), isto é, que podem ser estabelecidas em função do vetor \mathbf{q}^i e de t , apenas. Se o tempo não aparecer explicitamente neste tipo de restrição, recebem o nome especial de restrições escleronômicas; caso contrário, são ditas reonômicas.

Por outro lado, se, para descrever uma restrição, for necessária a utilização de derivadas temporais de \mathbf{q}^i , como o vetor de velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}^i$, então ela é dita não holonômica. Cabe a observação de que restrições não holonômicas são não integráveis, uma vez que poderiam ser expressas apenas em termos de \mathbf{q}^i caso o fossem. Para maiores detalhes a respeito de restrições e suas classificações, recomenda-se consultar as obras de Meirovitch (1970) e Shabana (2005).

Equações algébricas não lineares que representam restrições holonômicas podem ser escritas sob a forma seguinte (SHABANA, 2005):

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \quad (5.41)$$

onde $\mathbf{q} = \left[(\mathbf{q}^1)^T \quad (\mathbf{q}^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{q}^{n_b})^T \right]^T$ é o vetor que contém todas as coordenadas rígidas e flexíveis adotadas para descrever o movimento de todos os n_b corpos que constituem o sistema analisado. A matriz Jacobiana das restrições \mathbf{C}_q pode ser obtida derivando o vetor de restrições \mathbf{C} com respeito ao vetor de coordenadas generalizadas \mathbf{q} , ou seja:

$$\mathbf{C}_q = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

onde $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$ e n é o número de coordenadas generalizadas utilizadas para descrição do movimento do sistema por completo. Assume-se, sem perda de generalidade, que $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = [C_1(\mathbf{q}, t) \quad C_2(\mathbf{q}, t) \quad \dots \quad C_{n_c}(\mathbf{q}, t)]^T$ seja composta por n_c ($\leq n$) equações de restrição linearmente independentes. Destaca-se ainda que $\mathbf{C}_q \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$.

Note-se que a identificação de equações linearmente dependentes entre si pode ser feita pelo emprego de fatoração LU, por exemplo, da matriz Jacobiana das restrições, e a construção de um novo vetor de equações algébricas não lineares capazes de representar as restrições e que sejam linearmente independentes entre si pode ser realizada. Cabe salientar que o número global de graus de liberdade do sistema é dado por $n - n_c$.

5.2.5 *Uso das Equações de Lagrange para Obtenção das Equações de Equilíbrio Dinâmico de Sistemas Multicorpos*

As equações de Lagrange podem ser utilizadas para que se estabeleçam as equações do movimento de cada um dos corpos flexíveis que constituem o sistema multicorpos analisado. De acordo com a mecânica analítica, quando restrições do tipo considerado na Eq. (5.41) aplicam-se ao sistema considerado, as equações de Lagrange a serem utilizadas para cada um dos corpos flexíveis são da forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T - \left(\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^i, \quad (5.43)$$

onde \mathbf{C}_q^i é a matriz Jacobiana das restrições associada ao corpo flexível i , $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$ é um vetor de multiplicadores de Lagrange utilizados para inclusão das restrições na formulação, e \mathbf{Q}^i é o vetor dos esforços generalizados associados, também, ao corpo i . Para se deter-

minar este último vetor, faz-se necessário considerar o trabalho virtual δW^i realizado por todos os esforços que atuam no corpo que não aqueles devidos à inércia. No caso considerado, δW^i é dado por:

$$\delta W^i = \delta W_s^i + \delta W_e^i, \quad (5.44)$$

com δW_s^i e δW_e^i dados nas Eqs. (5.39) e (5.40), respectivamente. Fazendo uso das mesmas, resulta que:

$$\delta W^i = \delta W_s^i + \delta W_e^i = -(\mathbf{q}^i)^\top (\mathbf{K}^i)^\top \delta \mathbf{q}^i + (\mathbf{Q}_e^i)^\top \delta \mathbf{q}^i = (\mathbf{Q}^i)^\top \delta \mathbf{q}^i, \quad (5.45)$$

de onde se obtém:

$$\mathbf{Q}^i = -\mathbf{K}^i \mathbf{q}^i + \mathbf{Q}_e^i. \quad (5.46)$$

Uma expressão para a energia cinética T^i foi apresentada na Eq. (5.27), a partir da qual se pode calcular:

$$\left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^\top = \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^\top \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \right] \right\}^\top; \quad (5.47)$$

$$\left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^\top = \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^\top = \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i. \quad (5.48)$$

Substituindo as Eqs. (5.46) – (5.48) na Eq. (5.43), resulta:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i + \mathbf{C}_q^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e^i + \mathbf{Q}_v^i, \quad (5.49)$$

onde:

$$\mathbf{Q}_v^i = -\dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^\top \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \right] \right\}^\top \quad (5.50)$$

é o vetor que dá as contribuições devidas às forças de inércia centrífugas e de Coriolis, quadráticas em relação às componentes do vetor de velocidades $\dot{\mathbf{q}}^i$. Expressões mais desenvolvidas para esta grandeza vetorial podem ser encontradas no trabalho de Shabana (2005).

Estabelecidas as equações do movimento para cada um dos corpos do sistema, um sistema global de equações diferenciais da seguinte forma pode ser construído:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v, \quad (5.51)$$

onde:

$$\mathbf{q} = \left[(\mathbf{q}^1)^T \quad (\mathbf{q}^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{q}^{n_b})^T \right]^T; \quad (5.52)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}^1, \mathbf{M}^2, \dots, \mathbf{M}^{n_b}); \quad (5.53)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2, \dots, \mathbf{K}^{n_b}); \quad (5.54)$$

$$\mathbf{C}_q^T = \left[(\mathbf{C}_{q^1}^T)^T \quad (\mathbf{C}_{q^2}^T)^T \quad \dots \quad (\mathbf{C}_{q^{n_b}}^T)^T \right]^T; \quad (5.55)$$

$$\mathbf{Q}_e = \left[(\mathbf{Q}_e^1)^T \quad (\mathbf{Q}_e^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{Q}_e^{n_b})^T \right]^T; \quad (5.56)$$

$$\mathbf{Q}_v = \left[(\mathbf{Q}_v^1)^T \quad (\mathbf{Q}_v^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{Q}_v^{n_b})^T \right]^T. \quad (5.57)$$

Para que o sistema de equações diferenciais mostrado na Eq. (5.51) possa ser resolvido, devem ser consideradas, simultaneamente, as equações de restrição dadas na Eq. (5.41). Outra maneira de abordar a questão é perceber que a Eq. (5.51) apresenta como incógnitas n coordenadas generalizadas contidas no vetor \mathbf{q} , além dos n_c multiplicadores de Lagrange contidos no vetor $\boldsymbol{\lambda}$; entretanto, o sistema apresentado contém apenas n equações, implicando a necessidade de mais n_c equações para que um problema adequado à solução seja obtido, estas se tratando, no caso, das equações de restrição apresentadas na Eq. (5.41). Obtém-se desta forma um sistema de equações formado tanto por equações

diferenciais quanto por equações algébricas, para o qual comumente se adota a nomenclatura de sistema de equações algébrico-diferenciais:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (5.58)$$

cuja resolução mostra-se desafiadora tendo em vista que as equações diferenciais são não lineares devido ao fato que a matriz \mathbf{M} depende do vetor de coordenadas \mathbf{q} , e à presença do vetor \mathbf{Q}_v . Além disso, a ordem do sistema completo pode ser elevada e acarretar mau condicionamento de matrizes. Por estes motivos pode-se tornar mandatório o emprego de técnicas de redução de modelos.

5.3 Integração Numérica das Equações Algébrico-Diferenciais do Movimento

Conforme apontado por Fiset e Vaneghem (1996), apesar de formulações baseadas em técnicas que utilizam multiplicadores de Lagrange existirem na literatura há um período relativamente longo de tempo, foi somente a partir da década de 1980 que as equações do movimento de sistemas restringidos mecanicamente foram tratadas como sendo não apenas diferenciais, mas algébrico-diferenciais. Estas, por sua vez, ainda de acordo com os mesmos autores, na área de sistemas multicorpos, são comumente solucionadas pela utilização de métodos de estabilização das restrições, métodos de particionamento de coordenadas, ou métodos diretos.

A ideia subjacente aos métodos diretos é a tentativa de tratar a totalidade das equações algébrico-diferenciais de forma direta, pela aplicação, por exemplo, de um esquema de diferenciação retrógrada às variáveis desconhecidas e pela resolução do sistema de equações resultante para cada passo de tempo através de um método baseado no esquema de Newton-Raphson (FISSETTE, VANEGHEM, 1996; BATHE, 2007).

Vale ressaltar as principais vantagens e desvantagens de cada uma das três classes de técnicas anteriormente mencionadas (FISSETTE, VANEGHEM, 1996):

- a) Os métodos que realizam estabilização das restrições, sendo baseados em conceitos simples e computacionalmente eficientes, carecem de conhecimento que possibilite a otimização no tocante à escolha dos parâmetros de estabilização. Consequentemente, tais técnicas podem ocasionalmente propiciar resultados errôneos

mesmo quando o sistema apresenta soluções válidas. Um estudo comparativo de técnicas desta natureza é feito por Blajer (2011);

- b) O método geral de particionamento das coordenadas tem a grande vantagem de permitir a resolução rigorosa das restrições em termos de posição, velocidade e aceleração, mesmo para casos de cadeias cinemáticas altamente não lineares. O método é teoricamente válido e leva a resultados precisos para uma ampla gama de aplicações. Em termos de limitações, deve-se primeiro mencionar uma baixa eficiência computacional associada ao procedimento de redução, que envolve operações matriciais, e também dificuldades quando da resolução de sistemas numericamente rígidos, já que o método não é diretamente aplicável em conjunto com um integrador implícito;
- c) Métodos diretos parecem exibir altíssima eficiência em termos de velocidade computacional. Seu principal inconveniente é que, apesar do desenvolvimento de teorias matemáticas que visam aumentar sua estabilidade e precisão na presença de restrições impostas por equações algébricas, faltam esquemas de integração largamente aplicáveis e robustos para sistemas descritos por equações algébrico-diferenciais.

Estas considerações ajudam no entendimento e na justificativa do trabalho desenvolvido por Fissette e Vaneghem (1996), que acopla ao método de particionamento de coordenadas um integrador implícito de Newmark. Ainda de acordo com estes autores, a robustez do método de integração com respeito à solução das restrições é presumida como sendo um critério fundamental para correta resolução das equações algébrico-diferenciais.

Apesar da simplicidade exibida pelo método de integração de Newmark, e deste exibir bom desempenho para o caso de equações puramente diferenciais, o mesmo torna-se instável quando da análise de sistemas não lineares, como é o caso de sistemas multicorpos. Para contornar esta dificuldade, Bathe e Baig (2005) propõem um esquema de integração temporal composto, que é testado frente a métodos tradicionais de integração, como aqueles de Newmark e Wilson- θ .

Neste trabalho, para resolução numérica das equações algébrico-diferenciais do movimento, expresso pela Eq. (5.58), faz-se uso da metodologia proposta do Fissette e Vaneghem (1996) associada ao integrador numérico composto apresentado por Bathe e Baig (2005).

Inicialmente, assume-se conhecida a solução do problema até o instante de tempo t . Deseja-se, a partir do conhecido, avaliar a solução do modelo matemático para o problema no instante de tempo $t + \Delta t$. Fazendo uso do algoritmo de integração de Bathe e Baig

(2005), primeiramente é realizada uma estimativa de solução para $t + \gamma\Delta t$, com $\gamma \in (0,1)$, a partir da utilização da regra trapezoidal, a qual estabelece a aproximação:

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t + \gamma\Delta t) \approx \dot{\mathbf{q}}_i(t) + \frac{1}{2}\gamma\Delta t [\ddot{\mathbf{q}}_i(t) + \ddot{\mathbf{q}}_i(t + \gamma\Delta t)]; \quad (5.59)$$

$$\mathbf{q}_i(t + \gamma\Delta t) \approx \mathbf{q}_i(t) + \gamma\Delta t \dot{\mathbf{q}}_i(t) + \left(\frac{1}{2}\gamma\Delta t\right)^2 [\ddot{\mathbf{q}}_i(t) + \ddot{\mathbf{q}}_i(t + \gamma\Delta t)]. \quad (5.60)$$

Nestas equações, \mathbf{q}_i é um vetor de coordenadas independentes associadas ao problema. O mesmo é obtido a partir do particionamento do vetor das coordenadas generalizadas \mathbf{q} em uma parcela independente \mathbf{q}_i e noutra dependente \mathbf{q}_d , de forma que $\mathbf{q} = \left[(\mathbf{q}_i)^T \quad (\mathbf{q}_d)^T \right]^T$. Este particionamento pode ser construído tomando por base uma variação virtual das equações algébricas não lineares de restrição dadas na Eq. (5.41). Deste procedimento resulta:

$$\delta \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{C}_q \delta \mathbf{q} = \mathbf{C}_{q_d} \delta \mathbf{q}_d + \mathbf{C}_{q_i} \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{0}, \quad (5.61)$$

donde:

$$\delta \mathbf{q}_d = -\mathbf{C}_{q_d}^{-1} \mathbf{C}_{q_i} \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{C}_{d_i} \delta \mathbf{q}_i, \quad (5.62)$$

na qual $\mathbf{C}_{d_i} = -\mathbf{C}_{q_d}^{-1} \mathbf{C}_{q_i}$. Além disso, por diferenciação da Eq. (5.41) com respeito ao tempo, velocidades e acelerações dependentes podem ser relacionadas àquelas independentes a partir das equações seguintes:

$$\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{C}_{d_i} \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_{q_d}^{-1} \mathbf{C}_t; \quad (5.63)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{C}_{d_i} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_{q_d}^{-1} \mathbf{Q}_c, \quad (5.64)$$

onde $\mathbf{C}_t = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}$ e $\mathbf{Q}_c = -\mathbf{C}_{tt} - 2\mathbf{C}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}}$.

Sendo admitidas conhecidas soluções aproximadas $\ddot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$, $\dot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$, $\mathbf{q}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$ e $\boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$ para o instante de tempo $t + \gamma\Delta t$, adota-se um esquema de atualização-correção da forma seguinte:

$$\Delta \text{var}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} := \text{var}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} - \text{var}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}, \quad \text{var} = \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, \quad (5.65)$$

onde a notação $(\cdot)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$ indica que a grandeza (\cdot) é avaliada para a k -ésima aproximação disponível para o instante de tempo $t + \gamma\Delta t$. Estabelece-se, então, o equilíbrio para o instante de tempo $t + \gamma\Delta t$ avaliado para a $(k+1)$ -ésima aproximação, dado por:

$$\mathbf{M}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \ddot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} + \mathbf{K}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \mathbf{q}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} + \mathbf{C}_q^T|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{Q}_e|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} + \mathbf{Q}_v|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)}. \quad (5.66)$$

Esta última equação pode ser colocada sob a forma seguinte:

$$\mathcal{R}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{M}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \ddot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} + \mathbf{K}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \mathbf{q}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} + \mathbf{C}_q^T|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} - \mathbf{Q}_e|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} - \mathbf{Q}_v|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{0}, \quad (5.67)$$

onde \mathcal{R} é um resíduo. Como não é conhecida a $(k+1)$ -ésima aproximação para o instante de tempo $t + \gamma\Delta t$, não são conhecidas as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C}_q^T avaliadas para este instante de tempo, como ocorre para os vetores \mathbf{Q}_e e \mathbf{Q}_v . Desta forma, é útil expandir o resíduo $\mathcal{R}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)}$ em uma série de Taylor tomando como referência a k -ésima solução aproximada disponível para o mesmo instante de tempo. Assim, resulta que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} = \mathcal{R}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right]_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ \dots + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \mathcal{O}(\Delta^2) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde $\mathcal{O}(\Delta^2)$ denota termos de ordem superior com respeito a $\Delta \ddot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$, $\Delta \dot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$, $\Delta \mathbf{q}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$ e $\Delta \boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$, estes últimos definidos conforme Eq. (5.65), e:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}; \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \bar{\mathbf{C}} = -\frac{\partial \mathbf{Q}_e}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial \dot{\mathbf{q}}}; \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{K}} = \frac{\partial (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{K} + \frac{\partial (\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{Q}_e}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial \mathbf{q}}; \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{C}_q^T. \quad (5.72)$$

Sendo negligenciados os termos de ordem superior, resulta da Eq. (5.68) a aproximação:

$$\mathcal{R}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \approx \mathcal{R}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \mathbf{M}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \bar{\mathbf{C}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \bar{\mathbf{K}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \mathbf{C}_q^T|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx \mathbf{0}. \quad (5.73)$$

Fazendo uso do particionamento de coordenadas introduzido anteriormente no parágrafo anterior à Eq. (5.61), resulta que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} \approx & \begin{bmatrix} \mathcal{R}_i \\ \mathcal{R}_d \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{id} \\ \mathbf{M}_{di} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \Delta \ddot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{ii} & \bar{\mathbf{C}}_{id} \\ \bar{\mathbf{C}}_{di} & \bar{\mathbf{C}}_{dd} \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}}_i \\ \Delta \dot{\mathbf{q}}_d \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ii} & \bar{\mathbf{K}}_{id} \\ \bar{\mathbf{K}}_{di} & \bar{\mathbf{K}}_{dd} \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_i \\ \Delta \mathbf{q}_d \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{q_i}^T \\ \mathbf{C}_{q_d}^T \end{bmatrix}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Se o segundo bloco das equações anteriores for multiplicado por $\left[\mathbf{C}_{q_i}^T (\mathbf{C}_{q_d}^T)^{-1} \right]|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} =$
 $= \left[\mathbf{C}_{q_i}^T (\mathbf{C}_{q_d}^{-1})^T \right]|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} = \left[(\mathbf{C}_{q_d}^{-1} \mathbf{C}_{q_i})^T \right]|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} = (-\mathbf{C}_{di}^T)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$ e o resultado for subtraído do primeiro bloco de equações, procede-se à eliminação do vetor $\Delta \boldsymbol{\lambda}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$, de modo a se obter:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{di} \right)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \left(\mathbf{M}_{id} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{dd} \right)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_d|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{C}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{di} \right)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \left(\bar{\mathbf{C}}_{id} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{dd} \right)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_d|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{K}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{di} \right)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \left(\bar{\mathbf{K}}_{id} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{dd} \right)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}_d|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx - \left(\mathcal{R}_i + \mathbf{C}_{di}^T \mathcal{R}_d \right)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Expandindo as equações das restrições, Eq. (5.41), em série de Taylor em torno de $\text{var}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$, $\text{var} = \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}$, resulta que:

$$\mathbf{C}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{C}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \mathbf{C}_{\mathbf{q}}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \mathcal{O}(\Delta^2) = \mathbf{0}. \quad (5.76)$$

Desprezando os termos de ordem superior, e admitindo que a k -ésima solução aproximada para $t + \gamma\Delta t$ satisfaça $\mathbf{C}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} = \mathbf{0}$, resulta da equação anterior que:

$$\Delta \mathbf{q}_d|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx \mathbf{C}_{di}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}. \quad (5.77)$$

Derivando a Eq. (5.77) com respeito ao tempo, obtém-se, ainda:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_d|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx \mathbf{C}_{di}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}; \quad (5.78)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{q}}_d|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx \mathbf{C}_{di}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}. \quad (5.79)$$

Substituindo as aproximações apresentadas nas Eqs. (5.77) – (5.79) na Eq. (5.75), resulta:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{di} + \mathbf{M}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{C}}_{ij} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{di} + \bar{\mathbf{C}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{K}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{di} + \bar{\mathbf{K}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx - \left(\mathcal{R}_i + \mathbf{C}_{di}^T \mathcal{R}_d \right)_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Fazendo uso das aproximações dadas pela regra trapezoidal, Eqs. (5.59) e (5.60), pode-se verificar que:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} = \left(\frac{1}{2} \gamma \Delta t \right) \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}; \quad (5.81)$$

$$\Delta \mathbf{q}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} = \left(\frac{1}{2} \gamma \Delta t \right)^2 \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}. \quad (5.82)$$

Daí e da Eq. (5.80) resulta a seguinte expressão para $\Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$:

$$\mathcal{G}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} \approx -(\mathcal{R}_i + \mathbf{C}_{di}^T \mathcal{R}_d)|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}. \quad (5.83)$$

onde $\mathcal{G}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}$ é uma matriz de iteração para o primeiro passo de tempo intermediário associado ao algoritmo de integração adotado, avaliada a partir da k -ésima solução aproximada disponível para $t + \gamma\Delta t$, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} = & (\mathbf{M}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{di} + \mathbf{M}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{dd} \mathbf{C}_{di})|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\frac{1}{2} \gamma\Delta t\right) (\bar{\mathbf{C}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{di} + \bar{\mathbf{C}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{dd} \mathbf{C}_{di})|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\frac{1}{2} \gamma\Delta t\right)^2 (\bar{\mathbf{K}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{di} + \bar{\mathbf{K}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{dd} \mathbf{C}_{di})|_{t+\gamma\Delta t}^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

A resolução sucessiva do sistema linear apresentado na Eq. (5.83) permite que uma solução aproximada que satisfaz critérios de tolerância pré-estabelecidos seja obtida para o instante de tempo $t + \gamma\Delta t$. A partir desta solução e daquela associada ao instante de tempo t , Bathe e Baig (2005) avaliam a solução para $t + \Delta t$ fazendo uso das aproximações:

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t) \approx \frac{1}{c_3} \ddot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t) - \frac{1}{c_3} [c_1 \dot{\mathbf{q}}_i(t) + c_2 \dot{\mathbf{q}}_i(t + \gamma\Delta t)]; \quad (5.85)$$

$$\mathbf{q}_i(t + \Delta t) \approx \frac{1}{c_3} \ddot{\mathbf{q}}_i(t + \Delta t) - \frac{1}{c_3} [c_1 \dot{\mathbf{q}}_i(t) + c_2 \dot{\mathbf{q}}_i(t + \gamma\Delta t)] - \frac{1}{c_3} [c_1 \mathbf{q}_i(t) + c_2 \mathbf{q}_i(t + \gamma\Delta t)], \quad (5.86)$$

obtidas a partir da fórmula de diferenciação retrógrada:

$$\dot{f}(t + \Delta t) \approx c_1 f(t) + c_2 f(t + \gamma\Delta t) + c_3 f(t + \Delta t), \quad (5.87)$$

para $f = \mathbf{q}_i$ e $f = \dot{\mathbf{q}}_i$, e onde $c_1 = (1 - \gamma)/(\gamma\Delta t)$, $c_2 = -[\gamma\Delta t(1 - \gamma)]^{-1}$ e $c_3 = (2 - \gamma)/[\Delta t(1 - \gamma)]$.

Para a situação agora considerada, procede-se de maneira semelhante àquela relatada anteriormente. Formula-se inicialmente o resíduo avaliado para uma solução aproximada $k + 1$ ainda desconhecida e relacionada ao instante de tempo $t + \Delta t$, sendo o mesmo dado por:

$$\mathcal{R}|_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{M}|_{t+\Delta t}^{(k+1)} \ddot{\mathbf{q}}|_{t+\Delta t}^{(k+1)} + \mathbf{K}|_{t+\Delta t}^{(k+1)} \mathbf{q}|_{t+\Delta t}^{(k+1)} + \mathbf{C}_q^T|_{t+\Delta t}^{(k+1)} \lambda|_{t+\Delta t}^{(k+1)} - \mathbf{Q}_e|_{t+\Delta t}^{(k+1)} - \mathbf{Q}_v|_{t+\Delta t}^{(k+1)} = \mathbf{0}. \quad (5.88)$$

Realizando uma expansão em série de Taylor tomando por base a k -ésima solução aproximada para o problema e desprezando termos de ordem superior, resulta a aproximação:

$$\mathcal{R}|_{t+\Delta t}^{(k+1)} \approx \mathcal{R}|_{t+\Delta t}^{(k)} + \mathbf{M}|_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}|_{t+\Delta t}^{(k)} + \bar{\mathbf{C}}|_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}|_{t+\Delta t}^{(k)} + \bar{\mathbf{K}}|_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}|_{t+\Delta t}^{(k)} + \mathbf{C}_q^T|_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\lambda}|_{t+\Delta t}^{(k)} \approx \mathbf{0}, \quad (5.89)$$

onde $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ são dadas nas Eqs. (5.70) e (5.71), respectivamente, e:

$$\Delta \text{var}|_{t+\Delta t}^{(k)} := \text{var}|_{t+\Delta t}^{(k+1)} - \text{var}|_{t+\Delta t}^{(k)}, \quad \text{var} = \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.90)$$

Pode-se então particionar a Eq. (5.89) e proceder à eliminação do vetor $\Delta \boldsymbol{\lambda}|_{t+\Delta t}^{(k)}$, de forma a se obter:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{di} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} + \left(\mathbf{M}_{id} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{dd} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_d|_{t+\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{C}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{di} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} + \left(\bar{\mathbf{C}}_{id} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{dd} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_d|_{t+\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{K}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{di} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} + \left(\bar{\mathbf{K}}_{id} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{dd} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}_d|_{t+\Delta t}^{(k)} \approx - \left(\mathcal{R}_i + \mathbf{C}_{di}^T \mathcal{R}_d \right)_{t+\Delta t}^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Fazendo uso das Eqs. (5.77) – (5.79) quando consideradas para o instante de tempo $t + \Delta t$, estabelece-se ainda:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{di} + \mathbf{M}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{C}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{di} + \bar{\mathbf{C}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \left(\bar{\mathbf{K}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{di} + \bar{\mathbf{K}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \mathbf{q}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} \approx - \left(\mathcal{R}_i + \mathbf{C}_{di}^T \mathcal{R}_d \right)_{t+\Delta t}^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Considerando então as Eqs. (5.85) e (5.86), verifica-se que:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} = \frac{1}{c_3} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)}; \quad (5.93)$$

$$\Delta \mathbf{q}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} = \frac{1}{c_3^2} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)}. \quad (5.94)$$

Substituindo as anteriores na Eq. (5.92) resulta a equação de iteração para $\Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)}$:

$$\mathcal{G}|_{t+\Delta t}^{(k)} \Delta \ddot{\mathbf{q}}_i|_{t+\Delta t}^{(k)} \approx -(\mathcal{R}_i + \mathbf{C}_{di}^T \mathcal{R}_d)|_{t+\Delta t}^{(k)}, \quad (5.95)$$

onde $\mathcal{G}|_{t+\Delta t}^{(k)}$ é uma matriz de iteração para o segundo passo de tempo intermediário associado ao algoritmo de integração adotado, avaliada a partir da k -ésima solução aproximada disponível para $t + \Delta t$, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}|_{t+\Delta t}^{(k)} = & \left(\mathbf{M}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{di} + \mathbf{M}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \mathbf{M}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)|_{t+\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{c_3} \left(\bar{\mathbf{C}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{di} + \bar{\mathbf{C}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{C}}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)|_{t+\Delta t}^{(k)} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{c_3^2} \left(\bar{\mathbf{K}}_{ii} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{di} + \bar{\mathbf{K}}_{id} \mathbf{C}_{di} + \mathbf{C}_{di}^T \bar{\mathbf{K}}_{dd} \mathbf{C}_{di} \right)|_{t+\Delta t}^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

A Fig. 5.3 mostra um fluxograma simplificado para o algoritmo descrito anteriormente.

Ainda no que tange ao algoritmo admitido para integração numérica das equações algébricas diferenciais do movimento, alguns comentários são, por fim, realizados.

Menciona-se, primeiramente, que a escolha de seu parâmetro γ é, de certa forma, arbitrária, principalmente quando o esquema de integração considerado é aplicado à obtenção de respostas associadas a sistemas não lineares. Como apontado por Bathe e Baig (2005), o método por eles apresentado representa a combinação de dois algoritmos incondicionalmente estáveis quando aplicados a sistemas lineares, ambos admitindo convergência de segunda ordem com respeito ao passo de tempo utilizado para discretização temporal. Assim sendo, o algoritmo de integração composto também apresenta, mesmo para sistemas não lineares, convergência de segunda ordem, além de ser, em princípio, estável, independentemente do valor escolhido para γ . Destaca-se que isto não significa que neste caso o integrador seja incondicionalmente estável como o é para sistemas lineares.

A título de exemplo, pode-se mencionar que Bathe e Baig (2005) e Bathe (2007) adotam $\gamma = 0,5$. Silva e Bezerra (2008) avaliam, por outro lado, pelo estudo de um pêndulo rígido, que as parcelas de energia total e de quantidade de movimento angular dissipadas pelo algoritmo diminuem quando se tem $\gamma < 0,5$ (o estudo dos referidos autores considera $0,4 < \gamma < 0,6$). Para o caso de aplicação do algoritmo à obtenção de respostas associadas a sistemas lineares, Dharmaraja, Wang e Strang (2010), assim como Bathe e Noh (2012), mencionam que a escolha $\gamma = 2 - \sqrt{2}$ é mais interessante por propiciar matrizes de iteração

idênticas para ambos os passos de tempo intermediários, reduzindo o esforço computacional associado à fatoração da mesma (que pode ser neste caso ser realizada uma única vez).

Outro ponto importante está associado à estabilidade do algoritmo. Devido à maneira pela qual o mesmo foi concebido, busca-se garantir sua estabilidade quando aplicado a sistemas não lineares (BATHE, BAIG, 2005). Silva e Bezerra (2008) observam estabilidade mesmo para passos de integração relativamente grandes quando da consideração de exemplos numéricos. Uma análise das propriedades de estabilidade e de precisão do algoritmo podem ser ainda encontradas no trabalho de Bathe e Noh (2012), no qual os autores apresentam o raio espectral associado ao integrador, por exemplo, mas apenas para quando o mesmo é utilizado para obtenção de respostas de sistemas lineares.

Nesta Dissertação, como um sistema não linear é considerado, não necessariamente se aplicam as análises anteriores. É mais preocupante o fato de o integrador ser aplicado à resolução de sistemas de equações algébrico-diferenciais, e não puramente diferenciais. Isto pode ocasionar perda de estabilidade do algoritmo, tendo em vista o método empregado para redução do sistema de equações algébrico-diferenciais a um sistema equivalente de sistemas de equações puramente diferenciais. De qualquer forma, ainda que considerados os comentários anteriores, o algoritmo desenvolvido e apresentado é neste texto utilizado sem rigorosa avaliação de sua estabilidade, com a utilização de valores arbitrários para γ quando na consideração de exemplos numéricos. A motivação para tal escolha é a relatada boa estabilidade do algoritmo de integração composto considerado.

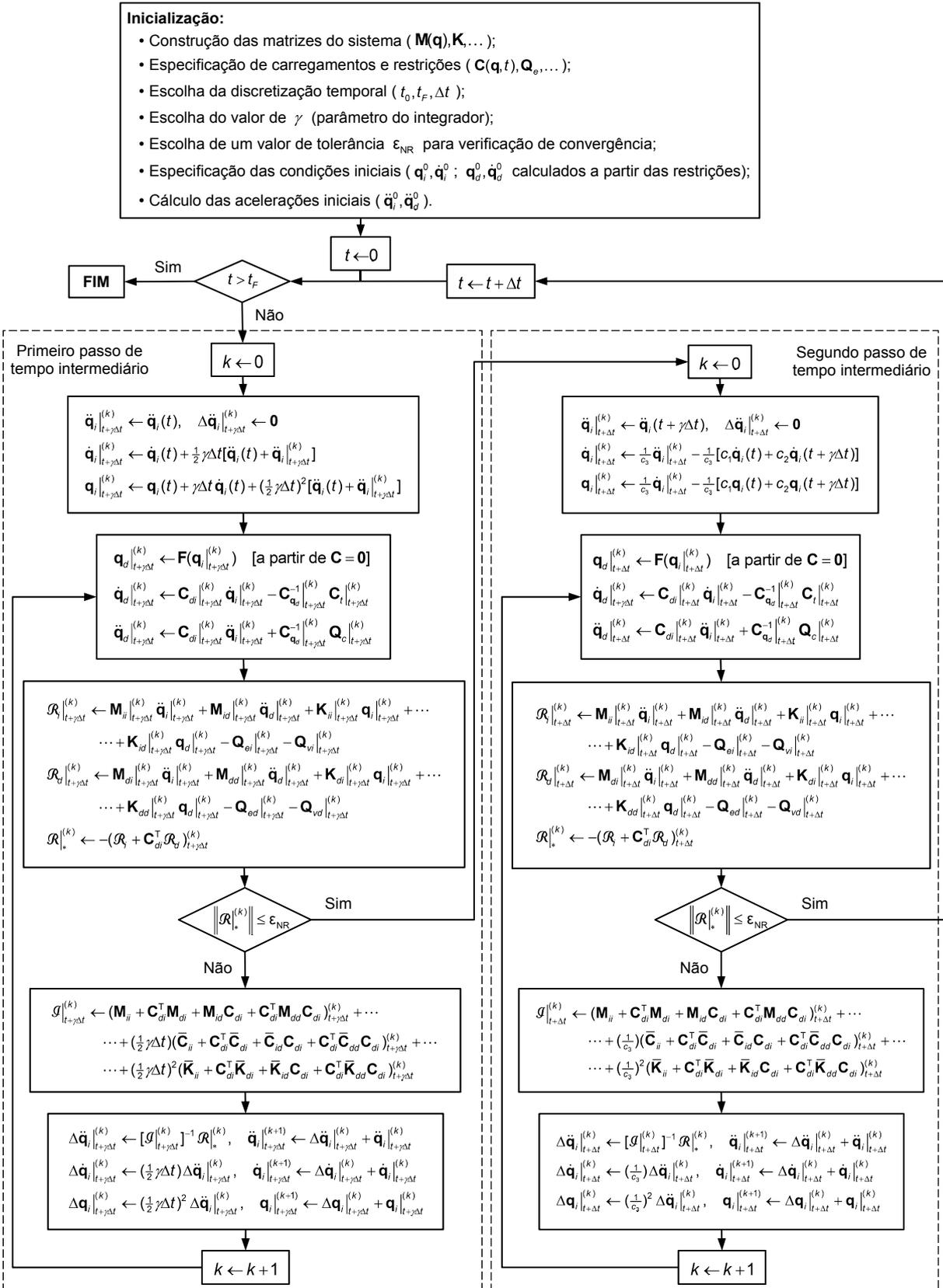


Figura 5.3 - Fluxograma do algoritmo de integração utilizado para resolução do sistema de equações algébrico-diferenciais que descrevem a dinâmica de um sistema multicorpos flexíveis.

5.4 Análise Modal de Sistemas Multicorpos

A análise modal de sistemas multicorpos foi objeto de estudo recente nos trabalhos de Escalona e Chamorro (2008), que aborda ainda a questão de estabilidade, e de Masarati (2009), que trata da análise modal de sistemas mecânicos sujeitos a restrições.

De acordo com Escalona e Chamorro (2008), um primeiro passo na análise modal de sistemas multicorpos consiste na avaliação das posições de equilíbrio $\mathbf{q}_{\text{eq.}}$ do sistema, obtidas a partir da imposição de que as velocidades e acelerações do mesmo são nulas, isto é, $\dot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}} = \ddot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}} = \mathbf{0}$. Matematicamente, a partir da Eq. (5.58), tem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}_{\text{eq.}}) \ddot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{\text{eq.}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}_{\text{eq.}} = \mathbf{Q}_e(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}}) + \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, t) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{q}_{\text{eq.}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}_{\text{eq.}} = \mathbf{Q}_e(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, \mathbf{0}) + \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, \mathbf{0}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.97)$$

A Eq. (5.97) representa um sistema de $n + n_c$ equações algébricas não lineares nas incógnitas $\mathbf{q}_{\text{eq.}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $\boldsymbol{\lambda}_{\text{eq.}} \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$. Pela resolução de tal sistema, as configurações de equilíbrio do sistema multicorpos flexíveis podem ser determinadas, a partir das quais a análise modal pode se proceder. Para tanto, realiza-se uma expansão em série de Taylor da Eq. (5.58) no entorno de cada uma das configurações de equilíbrio, $\mathbf{q}_{\text{eq.}}$. Primeiramente, verifica-se que o sistema de equações algébrico-diferenciais em questão é equivalente a:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{R}_{\text{aum.}} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.98)$$

onde $\mathcal{R}_{\text{aum.}}$ é um resíduo aumentado. Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{aum.}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{R}|_{\text{eq.}} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right]_{\text{eq.}} \Delta \ddot{\mathbf{q}}|_{\text{eq.}} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]_{\text{eq.}} \Delta \dot{\mathbf{q}}|_{\text{eq.}} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{\text{eq.}} \Delta \mathbf{q}|_{\text{eq.}} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]_{\text{eq.}} \Delta \boldsymbol{\lambda}|_{\text{eq.}} + \mathcal{O}(\Delta^2) \\ \mathbf{C}|_{\text{eq.}} + \mathbf{C}_q|_{\text{eq.}} \Delta \mathbf{q}|_{\text{eq.}} + \mathcal{O}(\Delta^2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.99)$$

onde $\Delta\ddot{\mathbf{q}}|_{\text{eq.}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}} = \ddot{\mathbf{q}}$, $\Delta\dot{\mathbf{q}}|_{\text{eq.}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}} = \dot{\mathbf{q}}$, $\Delta\mathbf{q}|_{\text{eq.}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{eq.}}$ e $\Delta\boldsymbol{\lambda}|_{\text{eq.}} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_{\text{eq.}}$. As expressões para $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{q}}$, $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$ e $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}$ são dadas nas Eqs. (5.69) – (5.72). Como $\mathbf{C}|_{\text{eq.}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, t) = \mathbf{0}$ e $\mathcal{R}|_{\text{eq.}} = \mathcal{R}(\mathbf{q}_{\text{eq.}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{eq.}}, t) = \mathbf{0}$, resulta da Eq. (5.99), desprezando termos de ordem superior, o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}|_{\text{eq.}} \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{C}}|_{\text{eq.}} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{K}}|_{\text{eq.}} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{eq.}}) + \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T|_{\text{eq.}} (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_{\text{eq.}}) \\ \mathbf{C}_{\mathbf{q}}|_{\text{eq.}} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{eq.}}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.100)$$

que pode ser escrito sob a forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\text{eq.}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{C}} & -\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T \\ -\mathbf{C}_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\text{eq.}} \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{eq.}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_{\text{eq.}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.101)$$

onde se fez uso da identidade $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{y} = \left[(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{eq.}})^T, \dot{\mathbf{q}}^T, (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_{\text{eq.}})^T \right]^T$, pode-se escrever:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}; \quad (5.102)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\text{eq.}}; \quad (5.103)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{C}} & -\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T \\ -\mathbf{C}_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\text{eq.}}. \quad (5.104)$$

Admitindo que $\mathbf{y} = \mathbf{Y}e^{st}$, com \mathbf{Y} sendo um vetor constante, resulta da Eq. (5.102) o problema de autovalor generalizado:

$$(\mathbf{B} - s\mathbf{A})\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad (5.105)$$

onde s_i e \mathbf{Y}_i , $i = 1, \dots, 2n + n_c$, são os autovalores e os autovetores do sistema, respectivamente.

Como apontado por Escalona e Chamorro (2008) e Masarati (2009), deste problema resultam $2n + n_c$ autovalores, e seus respectivos autovetores. Destes, n_c assumem o valor de $\pm\infty$, por estarem vinculados a multiplicadores de Lagrange aos quais uma massa nula está associada; estes não são associados, desta forma, ao comportamento dinâmico do sistema nas vizinhanças das posições de equilíbrio do mesmo, e seus autovetores possuem apenas uma componente não nula na posição do autovalor ao qual estão associados. Outros $2n_c$ autovalores estão vinculados a variáveis dependentes devidas às restrições do problema, e também assumem valores de $\pm\infty$; mais uma vez, não são associados à dinâmica do problema. Finalmente, um terceiro conjunto de $2(n - n_c)$ autovalores encontra-se associado aos graus de liberdade (coordenadas independentes) do sistema físico e é aquele que determina a dinâmica do sistema nas vizinhanças de suas posições de equilíbrio.

Página intencionalmente deixada em branco.