

**GIOVANNI IAMIN KOTINDA**

**ABSORVEDOR DINÂMICO DE VIBRAÇÃO TIPO LÂMINA VIBRANTE.**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

**UBERLÂNDIA - MG  
2005**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

- K87a      Kotinda, Giovanni Iamin, 1977-  
              Absorvedor dinâmico de vibração tipo lâmina vibrante / Giovanni  
              Iamin Kotinda. - 2008.  
              120 f. : il.
- Orientador: Valder Steffen Jr.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.
1. Vibração - Teses. I. Steffen Junior, Valder. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621:534

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
Av. João Naves de Ávila, 2121 - 38400-902 Fone: 0XX(34)32394149 Ramal 42  
FAX: 0XX(34)32394282 - Campus Santa Mônica - Uberlândia MG



**ALUNO:** Giovanni Iamin Kotinda

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 5031205-4

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Mecânica dos Sólidos e Vibrações

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

**“ABSORVEDOR DINÂMICO DE VIBRAÇÃO TIPO LÂMINA  
VIBRANTE”**

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Valder Steffen Júnior

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na sala 218, Bloco “1M”, Campus Santa Mônica, em 08 de julho de 2005, às 9:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

Prof. Dr. Valder Steffen Júnior

**ASSINATURA**

UFU

Prof. Dr. José Antônio Pereira Borges

UFU

Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo DEM/UNESP Gilberto Pechoto de Melo

Uberlândia, 08 de julho de 2005.



Aos meus pais Celso e Jussara  
Às minhas irmãs Tatianne e Danielle



## **Agradecimentos**

Aos meus pais Celso e Jussara, por toda compreensão e apoio oferecidos durante esta jornada.

Às minhas irmãs Tatianne e Danielle por todo o incentivo.

Aos meus avós, por todo amor a mim dedicado e pelo carinho com que me assistem crescer.

Ao Prof. Dr. Valder Steffen Jr., pela confiança em meu trabalho e pela orientação sempre presente e incentivadora. Agradeço pela relação de amizade que pode me proporcionar um exemplo de conduta profissional e pessoal.

Ao Prof. Dr. José Antônio Ferreira Borges, por toda a ajuda, incentivo e amizade, que proporcionaram a oportunidade de iniciar este caminho.

Ao Prof. Dr. Elias Bitencourt Teodoro, por toda a ajuda na modelagem analítica.

Ao Prof. Dr. Francisco Paulo Lépore Neto, pelo suporte na fase experimental e conhecimento compartilhado.

Aos amigos Jean, Marcus, Marcelo, Patrick, Rafael, Sebastião e Felipe pelo incentivo e ajuda durante todos estes anos.

Aos colegas e funcionários da FEMEC que, de alguma forma, contribuíram à execução deste trabalho.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo apoio financeiro.



# Absorvedor Dinâmico de Vibração Tipo Lâmina Vibrante

## Sumário

Resumo.....	xiii
Abstract.....	xv

### CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.....	1
-----------------	---

### CAPÍTULO 2

MODELAGEM ANALÍTICA.....	7
2.1 Teoria dos absorvedores dinâmicos não amortecidos aplicados a estruturas primárias de um grau de liberdade – uma revisão.....	7
2.2 Equacionamento de uma corda vibrante tracionada.....	12
2.3 Equacionamento de uma corda vibrante com uma massa concentrada entre as extremidades tracionadas.....	15
2.4 Resultados.....	17

### CAPÍTULO 3

MODELAGEM USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	21
3.1 Modelo da estrutura primária.....	21
3.2 Modelo da corda vibrante com massa.....	24
3.3 Modelo da corda vibrante com massa acoplada à estrutura primária.....	28
3.4 Modelo da lâmina vibrante.....	31
3.5 Modelo da lâmina vibrante com massa concentrada.....	32
3.6 Modelo da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária.....	35
3.7 Modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada.....	39
3.8 Modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária.....	40

### CAPÍTULO 4

ENSAIOS EXPERIMENTAIS.....	45
4.1 Descrição do aparato experimental.....	45

4.1.1. Sistema de um grau de liberdade.....	46
4.1.2. Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Corda Vibrante - ADVCV.....	46
4.1.3. Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante – ADVLV.....	47
<b>4.2 Montagem do experimento.....</b>	<b>48</b>
4.2.1. Experimento utilizando pêndulo e o vibrômetro laser.....	49
4.2.2. Experimento utilizando o excitador eletrodinâmico de vibração ( <i>shaker</i> ) e o acelerômetro.....	57

## CAPÍTULO 5

<b>COMPARAÇÃO DE RESULTADOS.....</b>	<b>67</b>
5.1 Resultados obtidos para o Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Corda Vibrante - ADVCV.....	67
5.1.1 Considerando o ADVCV isoladamente.....	67
5.1.2 Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Corda Vibrante – ADVCV acoplado ao sistema de um grau de liberdade.....	69
5.2 Resultados obtidos para o Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante - ADVLV.....	71
5.2.1 Lâmina vibrante sem massa, considerada isoladamente.....	71
5.2.2 Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante – ADVLV, isoladamente	72
5.2.3 Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante – ADVLV acoplado à estrutura de um grau de liberdade.....	73

## CAPÍTULO 6

<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>77</b>
--	-----------

## ANEXO I

<b>EQUACIONAMENTO ANALÍTICO.....</b>	<b>81</b>
I.1 Equacionamento de uma corda vibrante tracionada.....	81
I.2 Equacionamento de uma corda vibrante com uma massa concentrada entre as extremidades tracionadas.....	85

## ANEXO II

<b>PLANEJAMENTO FATORIAL.....</b>	<b>91</b>
-----------------------------------	-----------

**ANEXO III**

<b>TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS.....</b>	93
III.1 Elemento tipo Shell63.....	93
III.2 Elemento tipo Beam4.....	93
III.3 Elemento tipo Mass21.....	94
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	95



Kotinda, G. I., 2005, "Absorvedor Dinâmico de Vibração Tipo Lâmina Vibrante", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## Resumo

Este trabalho aborda o projeto de um absorvedor dinâmico de vibrações do tipo lâmina vibrante (ADVLV), sendo este constituído por uma lâmina sujeita a uma tração inicial  $T$  com uma massa concentrada  $m$  que pode ser fixada em uma posição  $d$  da lâmina. Este três parâmetros podem ser alterados a fim de se obter a sintonia do ADVLV. Para realizar o estudo deste, foi elaborado um modelo de elementos finitos do sistema, permitindo assim obter a metodologia para seu projeto. Também foram usadas técnicas de planejamento de experimento para obter as melhores configurações, tanto para os ensaios computacionais como experimentais. Foram tomados cuidados na criação das condições de contorno do modelo de elementos finitos, a fim de se obter respostas que representem adequadamente os aspectos físicos do problema. Também foi construído um protótipo e este foi ensaiado no laboratório. Os resultados obtidos foram comparados com os obtidos através da simulação computacional. A partir desta comparação verificou-se a importância de realizar ajustes no modelo de elementos finitos para adequar este à realidade. Também foi estudado o absorvedor dinâmico de vibração do tipo corda vibrante. Entretanto este último ADV apresentou duas freqüências de anti-resonância devido ao acoplamento do primeiro modo de vibrar nas direções horizontal e vertical da corda vibrante com uma massa concentrada. Outro fenômeno observado foi o movimento tridimensional da corda vibrante em torno da sua posição de equilíbrio, resultando uma forma semelhante a um elipsóide de revolução quando uma excitação harmônica com freqüência igual à freqüência de ressonância do sistema primário é aplicada sobre o sistema. Desta forma, o ADVCV não consegue cumprir a sua função de atenuar a amplitude de vibração da estrutura primária, sendo, portanto, completamente ineficiente neste caso. O ADVLV, proposto neste trabalho, apresentou comportamento dinâmico satisfatório, além de uma grande faixa de freqüências na qual o ADV pode ser sintonizado. Este dispositivo é de fácil construção e acoplamento, tanto a sistemas mecânicos, como a estruturas de construção civil.



Kotinda, G. I., 2005, "Vibrating Blade Dynamic Vibration Absorber", MSc Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

## Abstract

This work is dedicated to the design of a vibrating blade dynamic vibration absorber (ADVLV), which is composed by a blade that is subjected to an initial traction  $T$ , and contains a concentrated mass  $m$  that is fixed at a given position  $d$  along the blade. These three parameters can be adjusted so that the ADVLV is tuned. For this aim, a finite element model of the system was built, leading to a design methodology for the absorber. Also, design of experiment techniques were performed to obtain the most interesting configurations for the system, both for the computational and experimental models. Special care was taken with respect to the boundary conditions for the finite element model, so that the dynamic responses could correspond to the physical aspects of the problem, accordingly. Besides, an experimental prototype was constructed and tested under laboratory conditions. The experimental results were compared with those obtained from mathematical simulation. From this comparison, it was concluded that the finite element model had to be updated in such a way that experimental results could match. A vibrating string dynamic vibration absorber (ADVCV) was also studied. However, this DVA configuration presented two anti-resonant frequencies due to the coupling of the first vibration mode along the horizontal and vertical directions with a concentrated mass. Another phenomenon that was observed is the tridimensional motion of the vibrating string around its equilibrium position, leading to an ellipsoid-shape movement when a harmonic excitation whose frequency coincides with the primary system resonance frequency is applied to the system. This way, the ADVCV is not able to attenuate the vibration amplitude of the primary system satisfactorily. It is worth mentioning that the proposed ADVLV presents a good dynamic behavior besides a wide frequency range along which the DVA can be tuned. Besides, the present vibration absorbing device is simple and can be easily connected to the primary system both to mechanical and civil engineering structures.



# **Lista de Figuras**

	Página
Figura 1.1 – Sistema de dois g.d.l e sua função de transferência	1
Figura 1.2 – Comparação dos trabalhos de Den Hartog e Ren	2
Figura 1.3 – Estrutura primária + ADV adaptativo	3
Figura 1.4 – Estrutura primária + ADV ativo	4
Figura 1.5 – ADV tipo corda vibrante	4
Figura 1.6 – Cabo tracionado com suporte massa mola não amortecido	5
Figura 2.1 – Modelo de uma estrutura primária com ADV não amortecido	7
Figura 2.2 – FRF da massa primária $m_1$ , para $m_2/m_1 = 0,1$	9
Figura 2.3 – Variação das freqüências naturais do sistema acoplado em função de $\mu$	12
Figura 2.4 – Corda sob tração	12
Figura 2.5 – Elemento diferencial da corda	13
Figura 2.6 – Formas modais para a corda bi-engastada	15
Figura 2.7 – Corda bi-engastada com uma massa concentrada na posição $x$	15
Figura 2.8 – Representações gráficas da equação (2.29)	19
Figura 2.9 – FRF do sistema primário + ADVCV	20
Figura 3.1 – Modelo da estrutura primária	21
Figura 3.2 – Aplicação de força unitária para a análise harmônica	23
Figura 3.3 – Modo de vibrar da estrutura primária	23
Figura 3.4 – FRF da estrutura primária	24
Figura 3.5 – Modelo da corda vibrante	24
Figura 3.6 – Modelo da corda vibrante acoplado à estrutura primária	28
Figura 3.7 – Primeira etapa da construção do modelo da corda acoplada à estrutura primária	28
Figura 3.8 – Segunda etapa da construção do modelo da corda acoplada à estrutura primária	29
Figura 3.9 – FRF da corda vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária	30
Figura 3.10 – Modelo da lâmina vibrante	31
Figura 3.11 – Modelo da lâmina vibrante com massa concentrada	32

Figura 3.12 – Primeira etapa da construção do modelo da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária	36
Figura 3.13 – Segunda etapa da construção do modelo do ADV tipo lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária	36
Figura 3.14 – Modelo construído em uma única etapa com os nós da estrutura primária engastados e força de tração inicial aplicada	37
Figura 3.15 – Modelo construído em uma única etapa com os nós da base da estrutura primária engastados e força de tração inicial aplicada	37
Figura 3.16 – FRFs do ADV tipo lâmina vibrante + estrutura primária	38
Figura 3.17 – FRFs das configurações 3 e 8	39
Figura 3.18 – Modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada	39
Figura 3.19 – Primeira etapa da construção do modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária	40
Figura 3.20 – Segunda etapa da construção do modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária	41
Figura 3.21 – FRFs dos modelos ajustados	42
Figura 3.22 – FRFs dos ensaios 3 e 8 obtidos a partir do modelo ajustado	43
Figura 4.1 – Bancada Experimental	45
Figura 4.2 – Sistema de um g.d.l. acoplado a quatro lâminas	46
Figura 4.3 – ADV tipo corda vibrante com massa concentrada	46
Figura 4.4 – Massa concentrada do ADVCV (vista explodida)	47
Figura 4.5 – ADVLV tipo lâmina vibrante com massa concentrada	47
Figura 4.6 – Vista explodida do pêndulo utilizado para excitação por impacto	48
Figura 4.7 – Indicação dos índices das FRFs $H(\omega)$	49
Figura 4.8 – Esquema do experimento utilizando o pêndulo e o vibrômetro laser	49
Figura 4.9 – Resposta dos ensaios 1 e 2	51
Figura 4.10 – Resposta dos ensaios 3, 4 e 5	52
Figura 4.11 – Formas modais aproximadas para a lâmina vibrante sem massa concentrada	52
Figura 4.12 – Resultados obtidos para os ensaios de 6 a 10	53
Figura 4.13 – Formas modais aproximadas para a lâmina vibrante com massa concentrada ( $x = 102,5 \cdot 10^{-3} [m]$ )	54
Figura 4.14 – Resultados obtidos para os ensaios de 13 a 17	55

Figura 4.15 – Formas modais aproximadas para a lâmina vibrante com massa concentrada ( $x = 47,5 \cdot 10^{-3}$ [m])	56
Figura 4.16 – Resultados obtidos nos ensaios 11, 12, 18 e 19	56
Figura 4.17 – Esquema do experimento utilizando o shaker e o acelerômetro para o ADVCV	57
Figura 4.18 – Esquema do experimento utilizando shaker e acelerômetro para o ADVLV	57
Figura 4.19 – Estrutura primária	58
Figura 4.20 – FRF da estrutura primária até a freqüência de 200 Hz	59
Figura 4.21 – FRF da estrutura primária sem e com acréscimo de massa	60
Figura 4.22 – Resultados dos ensaios experimentais da estrutura primária + ADVCV	62
Figura 4.23 – Movimento circular do cabo em torno da sua posição de equilíbrio	63
Figura 4.24 – Resultados dos ensaios experimentais da estrutura primária + ADVLV	64
Figura 4.25 – Comparação entre os ensaios 3, 7 e 8	65
Figura 5.1 – Comparação das FRFs obtidas	70
Figura 5.2 – Comparação entre as várias FRFs obtidas	75
Figura I.1 – Corda sob tração	81
Figura I.2 – Elemento diferencial da corda	81
Figura I.3 – Corda bi-engastada com uma massa concentrada na posição $x$	85
Figura II.1 – Hiper-cubo de dimensão 3	91
Figura III.1 – Elemento tipo Shell63	93
Figura III.2 – Elemento tipo Beam4	94
Figura III.3 – Elemento tipo Mass21	94



# Lista de Tabelas

	Página
Tabela 2.1 – Planejamento fatorial $2^3$	18
Tabela 2.2 – Respostas obtidas a partir do planejamento $2^3$	18
Tabela 2.3 – Rígidez Equivalente para o ADVCV	19
Tabela 3.1 – Propriedades associadas aos elementos Shell63 da estrutura primária	22
Tabela 3.2 – Planejamento experimental para a corda + massa concentrada	25
Tabela 3.3 – Freqüência e modo de vibrar do 1º modo da corda vibrante + massa concentrada	25
Tabela 3.4 – Freqüência e modo de vibrar do 2º modo da corda vibrante + massa concentrada	26
Tabela 3.5 – Freqüência e modo de vibrar do 3º modo da corda vibrante + massa concentrada	27
Tabela 3.6 – Modos de vibrar e respectivas freqüências da lâmina vibrante	31
Tabela 3.7 – Propriedades associadas aos elementos SELL63 da lâmina vibrante	32
Tabela 3.8 – Condições de contorno impostas	33
Tabela 3.9 – Freqüências e formas dos modos da lâmina vibrante com massa concentrada na posição $x$	33
Tabela 3.10 – Planejamento fatorial $2^3$ para o ADV tipo lâmina vibrante com massa concentrada	35
Tabela 3.11 – Freqüências naturais obtidas para as oito configurações do ADV	35
Tabela 3.12 – Freqüências obtidas a partir do modelo ajustado	40
Tabela 4.1 – Legenda da Figura 4.6	48
Tabela 4.2 – Legenda da Figura 4.8	50
Tabela 4.3 – Configurações dos ensaios realizados	50
Tabela 4.4 – Configurações do amplificador de carga	51
Tabela 4.5 – Legenda das Figura 4.17 e 4.18	58
Tabela 4.6 – Planejamento fatorial $2^3$ para os ensaios do ADVCV	61
Tabela 4.7 – Planejamento experimental	63
Tabela 5.1 – Comparação da primeira freqüência natural obtida [Hz]	67
Tabela 5.2 – Comparação envolvendo a segunda freqüência natural [Hz]	68

Tabela 5.3 – Comparação envolvendo a terceira freqüência natural [Hz]	69
Tabela 5.4 – Comparação entre as três primeiras freqüências naturais da lâmina vibrante sem massa	71
Tabela 5.5 – Comparação entre as formas modais obtidas para a lâmina vibrante sem massa	71
Tabela 5.6 – Comparação entre as três primeiras freqüências naturais de flexão da lâmina vibrante com a massa na posição $x = 0,0475\text{ m}$	72
Tabela 5.7 – Comparação entre as três primeiras freqüências naturais de flexão da lâmina vibrante com a massa na posição $x = 0,1025\text{ m}$	72
Tabela 5.8 – Comparação entre as formas modais obtidas para a lâmina vibrante com a massa na posição $x = 0,0475\text{ m}$	73
Tabela 5.9 – Comparação entre as formas modais obtidas para a lâmina vibrante com a massa na posição $x = 0,1025\text{ m}$	73
Tabela II.1 – Planejamento Fatorial $2^3$ na ordem padrão	92

# Lista de Símbolos

$L$	→	Comprimento da corda
$\rho$	→	Densidade linear da corda
$T_c$	→	Tração inicial da corda
$m$	→	Massa da massa concentrada
$x$	→	Distância da massa concentrada a partir do suporte da corda, posição de um elemento diferencial da corda
$m_1$	→	Massa da estrutura primária
$k_1$	→	Rigidez da estrutura primária
$m_2$	→	Massa do absorvedor dinâmico de vibração
$k_2$	→	Rigidez do absorvedor dinâmico de vibração
$F_0$	→	Amplitude de uma força harmônica
$\Omega$	→	Freqüência de excitação
$t$	→	Tempo
$F(t)$	→	Força em função do tempo
$\omega_2$	→	Freqüência natural do absorvedor dinâmico de vibração
$\ddot{x}_1(t)$	→	Aceleração da estrutura primária em função do tempo
$x_1(t)$	→	Deslocamento da estrutura primária em função do tempo
$\ddot{x}_2(t)$	→	Aceleração do absorvedor dinâmico de vibração em função do tempo
$x_2(t)$	→	Deslocamento do absorvedor dinâmico de vibração em função do tempo
$X_1$	→	Amplitude da estrutura primária
$X_2$	→	Amplitude do absorvedor dinâmico de vibração
$\omega_1$	→	Freqüência natural da estrutura primária
$g$	→	Razão da freqüência de excitação pela freqüência natural da estrutura primária
$\mu$	→	Razão da massa do absorvedor pela massa da estrutura primária
$\Delta x$	→	Comprimento infinitesimal da corda
$d$	→	Posição da massa concentrada



# Capítulo 1

## Introdução

Absorvedores dinâmicos de vibrações (ADVs) são sistemas constituídos por elementos de massa, rigidez e amortecimento (estrutura secundária) que acoplados em uma estrutura mecânica (estrutura primária) são capazes de atenuar as vibrações desta em uma banda de freqüência. Desde sua criação por Frahm (1911), os ADVs vêm sendo amplamente utilizados em máquinas, equipamentos e construções civis, devido a necessidade de controlar os níveis de vibração estrutural, de modo a assegurar condições satisfatórias de operação, segurança e conforto.

O princípio de funcionamento dos ADVs se baseia na geração de uma força de intensidade igual à força de excitação, porém em oposição de fase a esta, criando condições para o aparecimento de um fenômeno conhecido como anti-ressonância. Para isto é preciso que os parâmetros do ADV (massa, rigidez e amortecimento) sejam escolhidos para uma excitação externa específica (particularmente no que diz respeito à freqüência de vibração em que ocorre tal excitação): diz-se então que o ADVs está sintonizado. A Figura 1.1 mostra um sistema de dois graus de liberdade (g.d.l.) e sua função de transferência, onde pode-se observar a anti-ressonância, conforme delimitada entre as linhas tracejadas.

O equacionamento deste sistema será apresentado no capítulo 2.

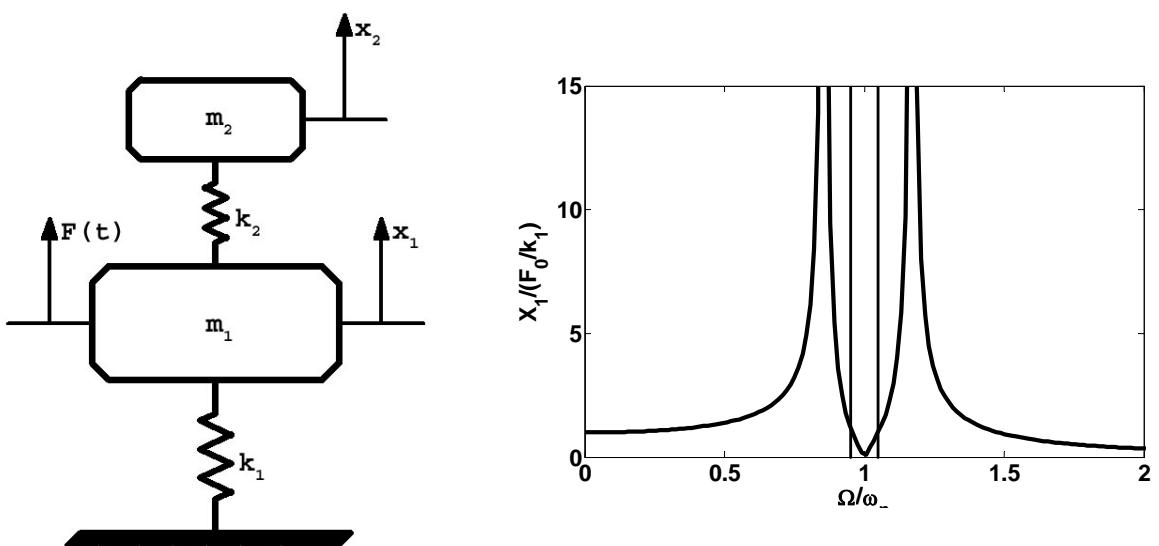
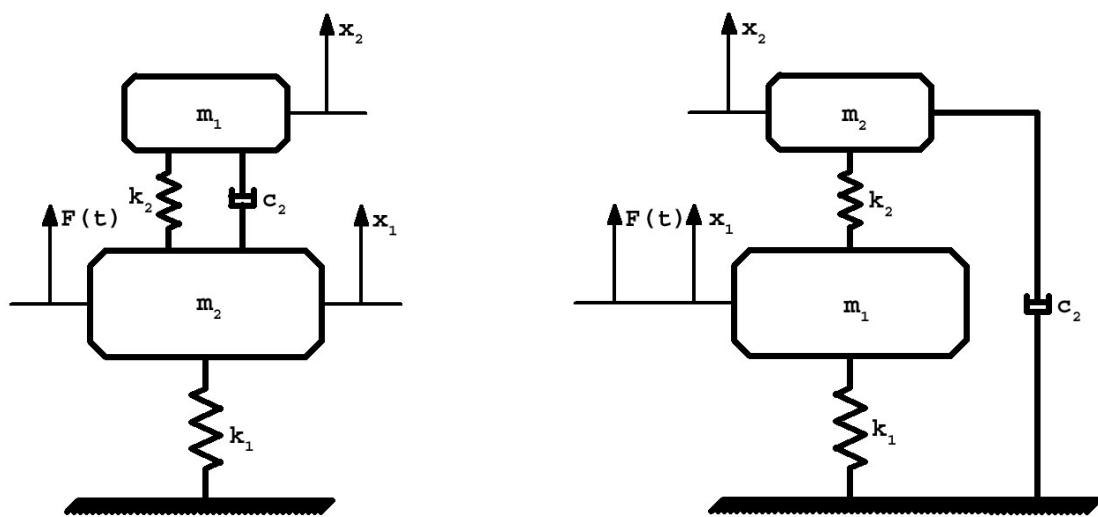


Figura 1.1 – Sistema de dois g.d.l e sua função de transferência

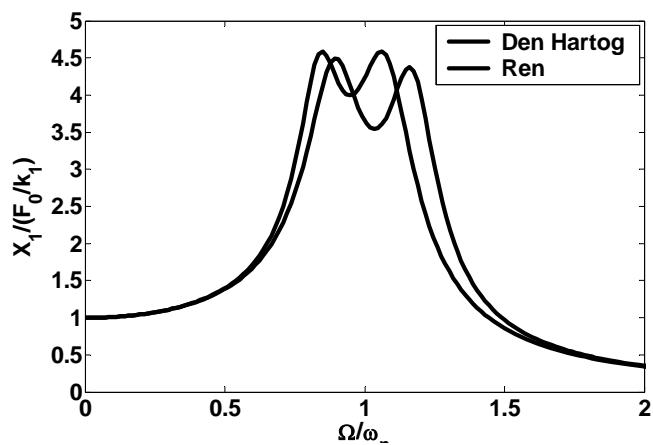
Assim, o absorvedor tende a perder eficiência caso a freqüência de excitação, ou os parâmetros da estrutura primária e/ou da estrutura secundária mudem, mesmo que ligeiramente. Para contornar este problema, três estratégias têm sido exploradas.

A primeira consiste na otimização dos parâmetros do ADV de modo a obter amplitudes mínimas de vibração em uma banda de freqüência a mais larga possível. Varias técnicas de otimização vem sendo empregadas, podendo-se citar tanto trabalho pioneiro de Den Hartog (1956) para a otimização de um ADV com amortecimento, baseado no domínio da freqüência, onde se busca igualar a amplitude dos picos de ressonância do sistema de 2 g.d.l. como o trabalho de Ren (2001), no qual se utiliza o mesmo princípio da otimização desenvolvida por Den Hartog, porém alterando o ponto de ancoragem do amortecedor do ADV. Na Figura 1.2 são apresentados os modelos estudados e as funções de transferência dos sistemas otimizados.



a) Sistema de 2 g.d.l estudado por Den Hartog

b) Sistema de 2 g.d.l estudado por Ren



c) Função de transferência dos sistemas a e b

Figura 1.2 – Comparação dos trabalhos de Den Hartog e Ren

Também se pode citar o trabalho de Rade e Steffen (2000) onde são utilizados métodos clássicos de otimização para obter os parâmetros ótimos de vários ADVs acoplados a uma estrutura com vários g.d.l. utilizando técnicas de acoplamento modal. Cunha (1999), em sua dissertação de mestrado, apresenta alguns métodos para a otimização dos parâmetros dos ADVs.

A segunda estratégia possível é a utilização de componentes capazes de alterar seus parâmetros, especialmente os de rigidez e de amortecimento, para a construção dos ADVs (Figura 1.3). Neste caso eles passam a ser denominados semi-ativos ou adaptativos (ADVA).

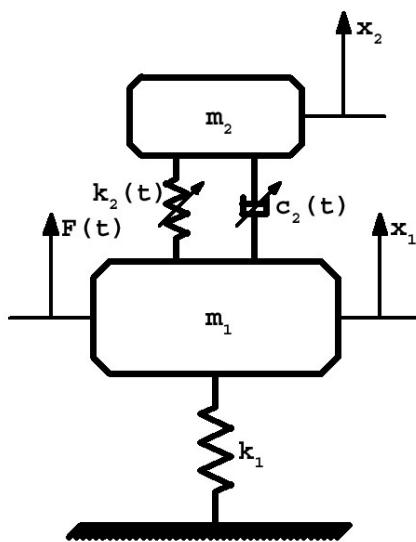


Figura 1.3 – Estrutura primária + ADV adaptativo

Estes sistemas vêm sendo amplamente estudados, conforme Marques (2000) que faz um estudo teórico e numérico de ADVs ativos e adaptativos; Buhr et al. (1997) propõem um controle para a sintonia do ADV baseado na diferença de fase entre este e o ponto de interesse na estrutura primária. Nagaya et al. (1999) utilizam ADV adaptativo sem amortecimento para o controle do primeiro modo de vibração de uma estrutura e a utilização de um ADV passivo com amortecimento para o controle dos modos de freqüência elevada. Williams et al. (2005) utilizam materiais com memória de forma na construção de um ADVA. Carneal et al (2004) minimizam a emissão de som proveniente estruturas com chapas metálicas, através da utilização de um ADVA.

Finalmente, a terceira estratégia tem a ver com a aplicação de força na estrutura através de atuadores, utilizando os chamados absorvedores dinâmicos de vibração ativos. (Figura 1.4).

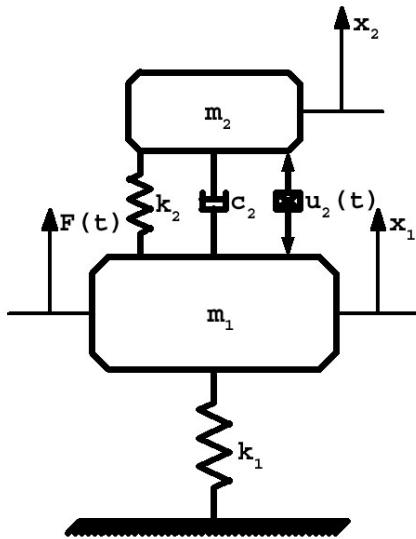


Figura 1.4 – Estrutura primária + ADV ativo

O presente trabalho tem por objetivo a realização de um estudo sobre um absorvedor dinâmico de vibração do tipo corda vibrante (ADVCV). Este tipo de ADV é composto por um cabo de comprimento  $L$  e densidade linear  $\rho$ , submetido a uma tração  $T_c$ , sendo fixada uma massa concentrada  $m$  em uma posição  $x$  ao longo do cabo (Figura 1.5).

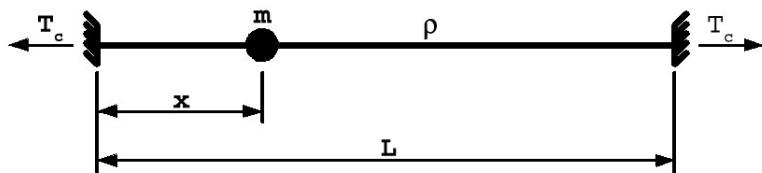


Figura 1.5 – ADV tipo corda vibrante

A sintonia do ADVCV é obtida alterando-se os parâmetros  $L$ ,  $\rho$ ,  $T_c$ ,  $m$  e  $x$ . Em sua forma adaptativa pode-se obter grandes variações de suas freqüências, produzindo assim uma ampla faixa de operação para o ADVCV. Marques (2000) modela este ADV utilizando a técnica de Rayleigh-Ritz a fim de determinar as equações de movimento e as freqüências naturais deste sistema. Teodoro (1994), em seu estudo sobre a dinâmica de linhas de transmissão quando suportadas por absorvedor complacente de energia, apresenta o modelo analítico de um sistema composto por um cabo tracionado, sendo fixado a este um suporte constituído por massa e rigidez. (Figura 1.6)

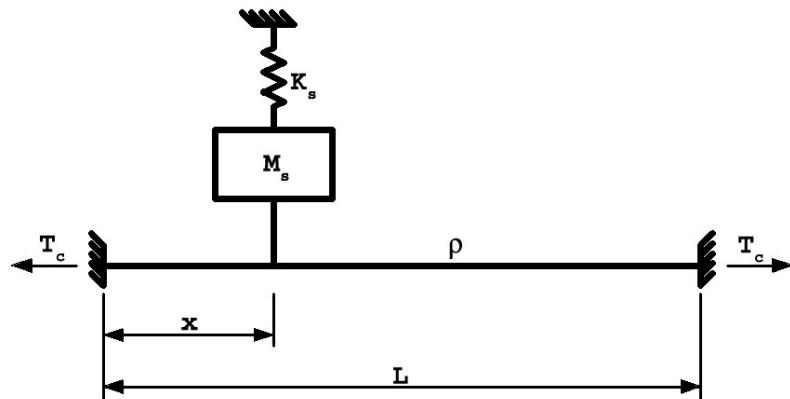


Figura 1.6 – Cabo tracionado com suporte massa mola não amortecido

Este trabalho está dividido em 6 capítulos, organizados da seguinte forma:

No Capítulo 1 são apresentados as considerações introdutórias a esta dissertação.

O Capítulo 2 é dedicado aos fundamentos teóricos dos absorvedores dinâmicos de vibração (ADV) não amortecidos e ao equacionamento analítico do absorvedor dinâmico de vibração tipo corda vibrante (ADVCV).

No Capítulo 3 são apresentados o modelo e os resultados do desenvolvimento do ADVCV através do método dos elementos finitos (MEF).

Os ensaios experimentais são descritos e apresentados no Capítulo 4.

O Capítulo 5 é dedicado às comparações envolvendo os resultados do modelo analítico, MEF e experimental.

Por fim, o Capítulo 6 contém as conclusões gerais do trabalho, assim como propostas para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Modelagem Analítica

Neste capítulo serão abordadas as modelagens analíticas utilizadas para descrever o sistema proposto, o absorvedor de vibração do tipo corda vibrante, assim como as equações que regem um sistema de dois graus de liberdade sem amortecimento. A equação do movimento do ADVCV é obtida a partir da equação do movimento de uma corda vibrante sujeita a uma força de tração inicial, sendo que seu equacionamento detalhado é apresentado no Anexo I. Em seguida são apresentados os resultados obtidos a partir do modelo matemático desenvolvido neste capítulo.

### 2.1 Teoria dos absorvedores dinâmicos não amortecidos aplicados a estruturas primárias de um grau de liberdade – uma revisão.

Seja um sistema vibratório de dois graus de liberdade sem amortecimento composto por uma estrutura primária ( $m_1, k_1$ ) e por uma estrutura secundária, o próprio ADV ( $m_2, k_2$ ), conforme mostrado na Figura 2.1 [Cunha, 1999].

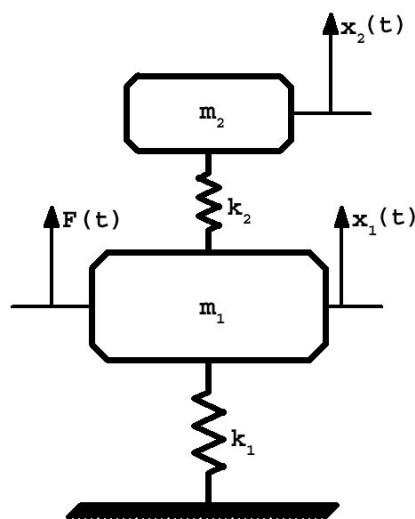


Figura 2.1 – Modelo de uma estrutura primária com ADV não amortecido

Admite-se que a estrutura primária seja excitada por uma força harmônica de amplitude  $F_0$  e freqüência de excitação  $\Omega$ , de valor fixo, que não coincide necessariamente com a freqüência natural desta estrutura, expressa segundo:

$$F(t) = F_0 \cdot e^{i\Omega t} \quad (2.1)$$

Como foi dito no Capítulo 1, para sintonizar o ADV deve-se escolher os parâmetros  $(m_2, k_2)$  de modo a anular a força de excitação  $F(t)$ . Mostrar-se-á que, ao escolher a freqüência natural do ADV,  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ , igual à freqüência  $\Omega$  da força, a resposta harmônica da massa primária  $m_1$  terá amplitude nula para esta freqüência de excitação. Para demonstrar esta afirmação, escrevem-se as equações do movimento do sistema acoplado, representado na Figura 2.1:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2) \cdot x_1(t) - k_2 \cdot x_2(t) &= F(t) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) + k_2 \cdot [x_2(t) - x_1(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

A vibração forçada desse sistema será da forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cdot e^{i\Omega t} \\ x_2(t) &= X_2 \cdot e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assim, fazendo as devidas diferenciações e substituindo as equações (2.3) nas equações (2.2), as equações diferenciais transformam-se nas seguintes equações algébricas:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot (-m_1 \cdot \Omega^2 + k_1 + k_2) - k_2 \cdot X_2 &= F_0 \\ -k_2 \cdot X_1 + X_2 \cdot (-m_2 \cdot \Omega^2 + k_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Introduzindo a notação,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \mapsto \text{freqüência natural da estrutura primária, considerada isoladamente} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \mapsto \text{freqüência natural da estrutura secundária, considerada isoladamente} \end{aligned} \quad (2.5)$$

a seguinte expressão adimensional para a amplitude  $X_1$  da estrutura primária pode ser obtida a partir de (2.6):

$$\frac{X_1}{F_0 \cdot k_1^{-1}} = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{\omega_2} \right)^2 \right]}{\left[ 1 + \frac{k_2}{k_1} - \left( \frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{\omega_2} \right)^2 \right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (2.6)$$

Como pode se observar na equação (2.6), a amplitude da estrutura primária é nula quando o numerador  $\left[ 1 - (\Omega/\omega_2)^2 \right]$  é igual a zero, o que ocorre quando a freqüência  $\Omega$  da força de excitação é a mesma que a freqüência natural do absorvedor,  $\omega_2$ . Isto comprova a afirmação feita anteriormente a respeito do funcionamento dos ADVs de um grau de liberdade não amortecidos.

A Figura 2.2 ilustra a equação (2.6), onde nota-se a função de resposta em freqüência (FRF) típica de um sistema de dois graus de liberdade. Por se tratar de um sistema de dois graus de liberdade, existem duas freqüências naturais e, devido a introdução do ADV, aparece uma anti-ressonância na freqüência  $\Omega = \omega_2$ .

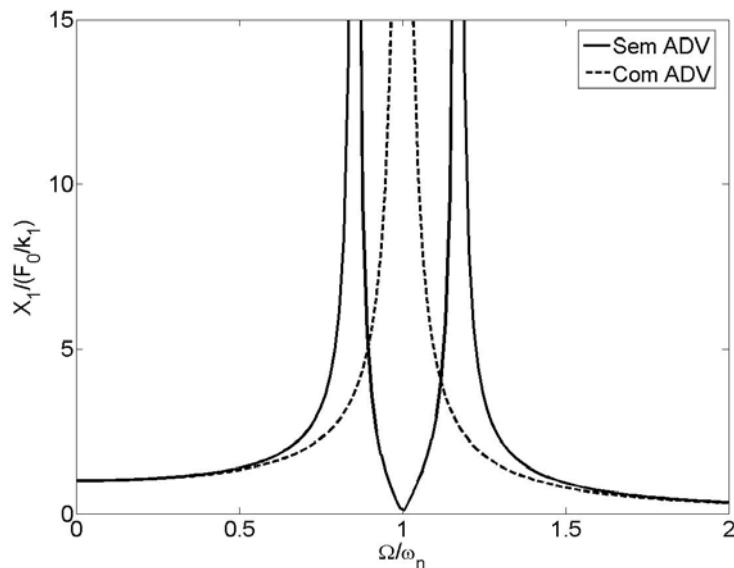


Figura 2.2 – FRF da massa primária  $m_1$ , para  $m_2/m_1 = 0,1$

Na primeira das equações (2.4), se  $X_1 = 0$  e  $\Omega = \omega_2$ , tem-se que a amplitude de vibração da massa  $m_2$  é dada por:

$$X_2 = -\frac{F_0}{k_2} \quad (2.7)$$

Nesta situação, a força exercida pela estrutura secundária sobre a estrutura primária é dada por:

$$F_0 = -k_2 \cdot X_2 \quad (2.8)$$

Desta forma, uma força igual e oposta à força de excitação é exercida sobre a estrutura primária pela estrutura secundária, tendo como consequência o equilíbrio do sistema.

Essas relações são verdadeiras para qualquer valor da razão  $\Omega/\omega_2$ . Entretanto, vê-se que a adição de um absorvedor não tem muita razão de ser, a menos que a estrutura original esteja operando na ressonância ou próximo dela.

Nestes casos, deve-se projetar o ADV de tal forma que sua freqüência natural coincida com a da estrutura primária, de modo a satisfazer:

$$\frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \quad (2.9)$$

Serão usadas a partir de agora as seguintes notações:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\Omega}{\omega_1} \\ \mu &= \frac{m_2}{m_1} \\ \omega_1^2 &= \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pode-se escrever as expressões das FRFs da estrutura primária e do ADV em termos de parâmetros adimensionais, a partir das equações (2.4), sob a forma:

$$\frac{X_1}{F_0 \cdot k_1^{-1}} = \frac{(1-g^2)}{(1-g^2) \cdot (1-g^2 + \mu) - \mu} \quad (2.11)$$

$$\frac{X_2}{F_0 \cdot k_1^{-1}} = \frac{1}{(1-g^2) \cdot (1-g^2 + \mu) - \mu}$$

Observando as equações (2.11), nota-se que seus denominadores são iguais. Quando se efetua a multiplicação dos termos que aparecem no denominador, vê-se que este apresenta um termo proporcional a  $(g^4)$ , um termo proporcional a  $(g^2)$  e um termo independente. Quando igualado a zero, o denominador é uma função quadrática em  $(g^2)$  que tem, necessariamente, duas raízes. Assim, para dois valores da freqüência de excitação  $\Omega$ , ambos os denominadores das equações (2.11) são iguais a zero e, consequentemente,  $X_1$  e  $X_2$  tornam-se infinitamente grandes. Essas são as duas freqüências naturais do sistema acoplado, sendo dadas pela relação:

$$g^2 = 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}} \quad (2.12)$$

Desta forma é possível, antes mesmo do acoplamento do ADV à estrutura primária, saber quais serão as freqüências naturais do sistema de dois g.d.l. resultante e assim concluir acerca do comportamento dinâmico do sistema acoplado. A equação (2.12) é representada através da Figura 2.3. Nota-se que quanto mais a massa do ADV ( $m_2$ ) se aproxima da massa da estrutura primária ( $m_1$ ), mais afastadas são as freqüências naturais do sistema.

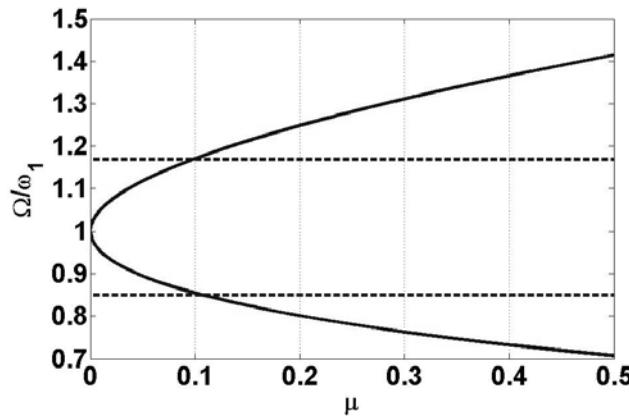


Figura 2.3 – Variação das freqüências naturais do sistema acoplado em função de  $\mu$

Como exemplo, nota-se que a utilização de um ADV de massa igual a 1/10 da massa do sistema primário provoca o aparecimento de duas freqüências naturais do sistema acoplado em 1,17 e 0,85 vezes a freqüência natural da estrutura primária, quando considerada isoladamente.

## 2.2 Equacionamento de uma corda vibrante tracionada

Seja uma corda sobre a qual se aplica uma força de tração  $T_c$  e cuja densidade linear é considerada constante, conforme mostrado na Figura 2.4. Assume-se que a corda não oferece resistência à flexão e que esta se encontra em sua posição de equilíbrio estático. Também se considera que a corda descreve pequenos movimentos transversais no plano vertical e que a deflexão e inclinação de cada ponto da corda são pequenas (em valor absoluto) e que qualquer variação da tensão durante a deflexão da corda pode ser desprezada.

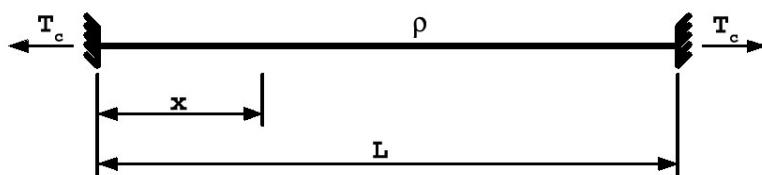


Figura 2.4 – Corda sob tração

A partir destas suposições e do diagrama de corpo livre de uma porção flexionada da corda, mostrado na Figura 2.5, pode-se obter a equação do movimento do sistema [Teodoro, 1994].

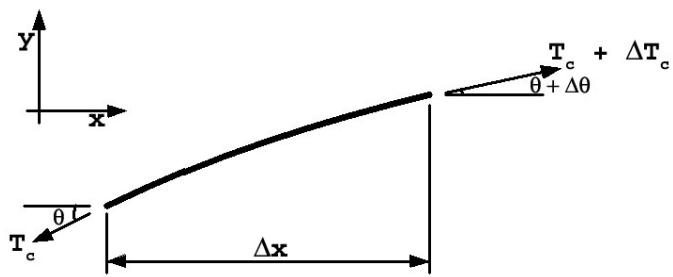


Figura 2.5 – Elemento diferencial da corda

A equação de movimento é dada por:

$$T \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

A solução da equação diferencial (2.13) pode ser escrita na forma de um produto de duas funções, utilizando o método da separação de variáveis:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot Q(t) \quad (2.14)$$

no qual  $Y(x)$  depende somente da variável espacial,  $x$ , e  $Q(t)$  depende somente da variável tempo,  $t$ . Desta forma, a equação (2.13) se torna:

$$\frac{T}{\rho} \cdot \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \frac{\ddot{Q}(t)}{Q(t)} = -\lambda^2 = \text{constante} \quad (2.15)$$

No qual o “ponto” denota a diferenciação em relação a  $t$  e a “linha” denota a diferenciação em relação a  $x$ . Consideram-se somente os valores negativos para a constante, pois valores positivos levam a soluções negativas no tempo, o que não ocorre fisicamente.

A equação (2.15) contém duas equações diferenciais, uma variante no tempo e outra variante no espaço. A equação variante no tempo é dada por:

$$\ddot{Q}(t) + \lambda^2 \cdot Q(t) = 0 \quad (2.16)$$

Já a equação variante no espaço é descrita por:

$$Y''(x) + \left(\frac{\lambda^2}{a}\right) \cdot Y(x) = 0 \quad (2.17)$$

no qual  $a = \sqrt{T/\rho}$ .

A solução geral da equação (2.17) é dada por:

$$Y(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \quad (2.18)$$

As condições de contorno determinam os autovalores (valores de  $\lambda$ ) para os quais existe solução. Supondo que a corda esteja engastada nas duas extremidades, tem-se:

$$\begin{aligned} Y(0) &= 0 \\ Y(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aplicando estas condições de contorno na equação (2.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} Y(0) &= B = 0 \\ Y(L) &= A \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Se  $A = 0$  tem-se uma solução trivial, portanto:

$$\sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) = 0 \quad (2.21)$$

que resulta em:

$$\frac{\lambda}{a} \cdot L = n \cdot \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

Estes valores de  $\lambda$  são os autovalores que determinam as freqüências naturais da corda. Uma equação adimensional para os autovalores pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_n = \frac{\lambda_n}{a} \cdot L = n \cdot \pi \quad (2.23)$$

As formas dos modos, neste caso denominadas de funções próprias, correspondentes para cada valor de  $n$  são dadas por:

$$Y_n(x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{\sigma_n \cdot x}{L}\right) \quad (2.24)$$

Os cinco primeiros modos são apresentados na Figura 2.6.

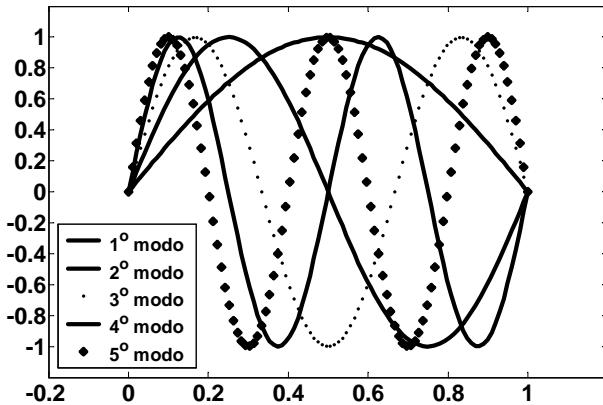


Figura 2.6 – Formas modais para a corda bi-engastada

### 2.3 Equacionamento de uma corda vibrante com uma massa concentrada entre as extremidades tracionadas

Vamos considerar agora a presença de uma massa concentrada e pontual (sem inércia rotativa) na posição  $0 < x = d < L$  e que a corda seja bi-engastada, conforme ilustra a Figura 2.7.

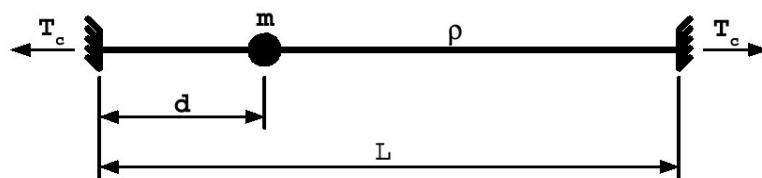


Figura 2.7 – Corda bi-engastada com uma massa concentrada na posição  $x$

Neste caso o cabo é considerado continuo em  $x = d$ , entretanto, o valor da tangente pode ser diferente em cada lado da massa. A condição de continuidade requer que:

$$y(x, t) \Big|_{x=d-\varepsilon} = y(x, t) \Big|_{x=d+\varepsilon} \quad (2.25)$$

no qual  $d - \varepsilon$  se refere à esquerda da massa e  $d + \varepsilon$  à direita da massa.

O balanço das forças na posição da massa é dado por:

$$T \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=d+\varepsilon} - T \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=d-\varepsilon} = m \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=d} \quad (2.26)$$

e a condição de continuidade leva a:

$$Y(d - \varepsilon) = Y(d + \varepsilon) \quad (2.27)$$

Esta situação nos leva a dois problemas de autovalores, um para o lado esquerdo da massa e outro para o lado direito da massa, sendo necessário, entretanto, resolvê-los simultaneamente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \cdot Y_E(x) &= 0 & 0 < x < d \\ \frac{d^2 Y_D(x)}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \cdot Y_D(x) &= 0 & d < x < L \end{aligned} \quad (2.28)$$

Aplicando as condições de contorno dadas pelas equações (2.19) nas equações (2.28) e realizando simplificações, obtém-se:

$$m \cdot \lambda^2 \cdot \sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L - d)\right] \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right) - T \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) = 0 \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é uma equação transcendental que fornece infinitos valores para  $\lambda$ , que são o quadrado das freqüências naturais do sistema estudado. Por se tratar de uma equação transcendental, foram utilizados métodos numéricos para a obtenção dos zeros ( $\lambda$ ) da equação (2.29).

Os modos correspondentes a cada valor de  $\lambda$  são obtidos resolvendo as equações (2.30):

$$\begin{aligned} Y_E(x) &= -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \quad 0 < x < d \\ Y_D(x) &= -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-x)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \quad d < x < L \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.4 Resultados

Como o sistema abordado nesta dissertação pode assumir inúmeras configurações, optou-se pela utilização de técnicas de planejamento de experimentos do tipo fatorial a dois níveis (Montgomery, 1984) para avaliar o sistema dentro de um espaço de projeto previamente definido. Este procedimento permite analisar o espaço de projeto utilizando um número reduzido de experimentos. Além disso, pode-se obter meta-modelos (Box, 1987) representativos do sistema em estudo. Meta-modelos são representações simplificadas do problema.

O sistema corda vibrante com massa concentrada apresenta cinco variáveis de projeto, conforme mencionado no Capítulo 1. Entretanto, neste trabalho, optou-se por trabalhar com apenas três variáveis, quais sejam a massa concentrada, sua posição e a tensão aplicada à corda ( $m$ ,  $x$  e  $T$ ).

A Tabela 2.1 apresenta a planejamento fatorial  $2^3$  utilizado, sendo fixados a densidade linear do cabo, e o comprimento do cabo,  $L = 0,261 [m]$ . O espaço de projeto foi assim definido:  $0,176 \leq m \leq 0,250 [kg]$ ;  $0,0261 \leq x \leq 0,131 [m]$  e  $10,281 \leq T \leq 25,133 [N]$ .

Tabela 2.1 – Planejamento fatorial  $2^3$ 

Nº do Ensaio	Massa [kg]	Posição da Massa [mm]	Tração [N]	Nº do Ensaio	Massa [kg]	Posição da Massa [mm]	Tração [N]
1	0,176	0,0261	10,281	5	0,176	0,0261	25,133
2	0,250	0,0261	10,281	6	0,250	0,0261	25,133
3	0,176	0,131	10,281	7	0,176	0,131	25,133
4	0,250	0,131	10,281	8	0,250	0,131	25,133

Para as comparações que serão apresentadas no Capítulo V, onde diferentes modelos são testados, foram obtidas apenas as freqüências dos três primeiros modos de vibrar do sistema corda vibrante com massa concentrada.

Tabela 2.2 – Respostas obtidas a partir do planejamento  $2^3$ 

Nº do Ensaio	Freqüência [Hz]			Nº do Ensaio	Freqüência [Hz]		
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>		1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>
1	7,94	241,33	482,62	5	12,41	377,32	754,58
2	6,66	241,32	482,61	6	10,41	377,31	754,58
3	4,76	1081,71	28557,18	7	7,44	-11500,72	-5412,11
4	4,00	-15576,64	11682,48	8	6,25	-11500,72	-5412,10

Nota-se na Tabela 2.2 valores superestimados para as freqüências, assim como valores negativos, decorrentes de inadequação do modelo, uma vez que neste modelo a inércia governante é a inércia do cabo e não a inércia da massa concentrada (que corresponde ao caso estudado), e também de imprecisões numéricas.

Não foi utilizado o valor de  $x = L/2$  como limite superior para o espaço de projeto pois, conforme pode ser observado na Figura 2-8, ao se traçar o gráfico correspondente à equação (2.29), nota-se que a função não cruza o eixo das abscissas, sendo assim impossível determinar os zeros desta equação.

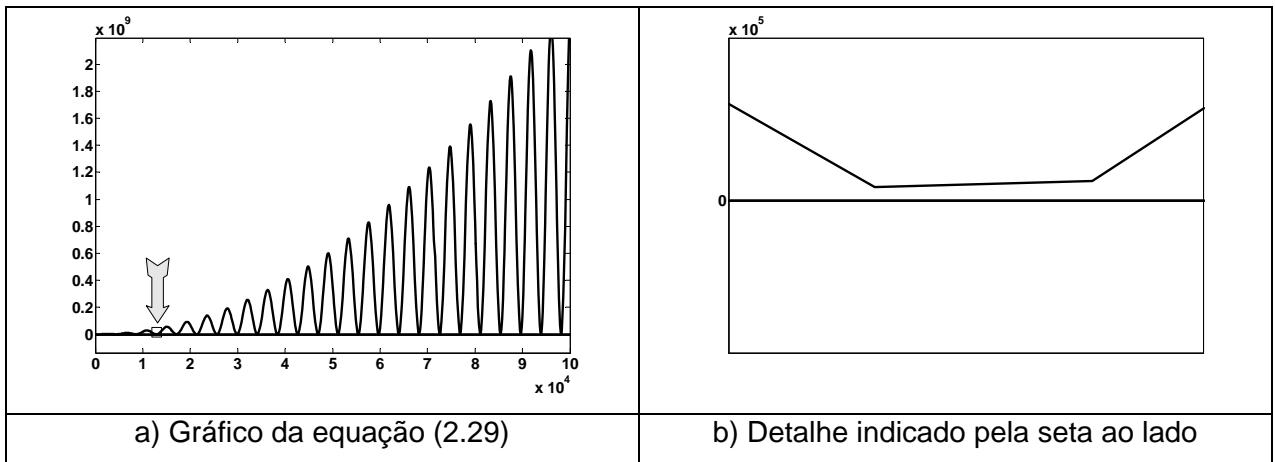


Figura 2-8 – Representações gráficas da equação (2.29)

Para obter a FRF do sistema primário com seu ADV, torna-se necessário determinar a rigidez do absorvedor ( $k_2$ ). Esta rigidez é dada pela soma da rigidez determinada pela ação de cada lado do cabo sobre a massa concentrada, cuja determinação não é simples. Optou-se por determinar uma rigidez equivalente, usando, para isso, o valor da massa concentrada (esta bem conhecida) e a freqüência natural, conforme a segunda expressão da equação (2.5). Os valores obtidos para cada configuração são apresentados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Rigidez Equivalente para o ADVCV

Nº do Ensaio	Rigidez Equivalente [N/m]	Nº do Ensaio	Rigidez Equivalente [N/m]
1	438	5	1070,1
2	437,8	6	1069,6
3	157,4	7	384,6
4	157,9	8	385,5

Os parâmetros do sistema primário utilizados foram obtidos experimentalmente (Capítulo IV), sendo a massa  $m_1 = 4,666 \text{ kg}$  e rigidez  $k_1 = 38336,78 \text{ N/m}$ . A Figura 2.9 apresenta as FRFs obtidas para cada uma das 8 configurações do ADVCV, a partir do planejamento experimental descrito anteriormente (Tabela 2.1), acoplado à estrutura primária. Para isso foi utilizada a equação (2.6).



# Capítulo 3

## Modelagem usando o Método dos Elementos Finitos

Neste capítulo será abordada a confecção dos modelos em elementos finitos do sistema em estudo. Primeiramente foi modelado a estrutura primária, cuja amplitude de vibração se deseja atenuar. Em seguida é modelado o ADV tipo corda vibrante, o ADV tipo lâmina vibrante e, por fim, um modelo ajustado para o ADV tipo lâmina vibrante. Para os três casos, o ADV foi modelado separadamente para a obtenção de seus modos de vibrar e das freqüências naturais, para oito configurações obtidas a partir de planejamentos experimentais. Em seguida, estes modelos foram acoplados ao modelo da estrutura primária para obtenção das FRFs do sistema completo. No presente estudo foi utilizado o programa Ansys®. Os tipos de elementos utilizados encontram-se descritos no Anexo III.

### 3.1 Modelo da estrutura primária

A estrutura primária é constituída por uma mesa suportada por quatro lâminas (Figura 3.1). Pode-se considerar que o sistema apresentado comporta-se como um sistema de um grau de liberdade, caso o deslocamento principal seja considerado na direção  $z$ . Isto se deve ao fato da rigidez do sistema na direção  $x$  ser muito maior que a observada na direção  $z$ .

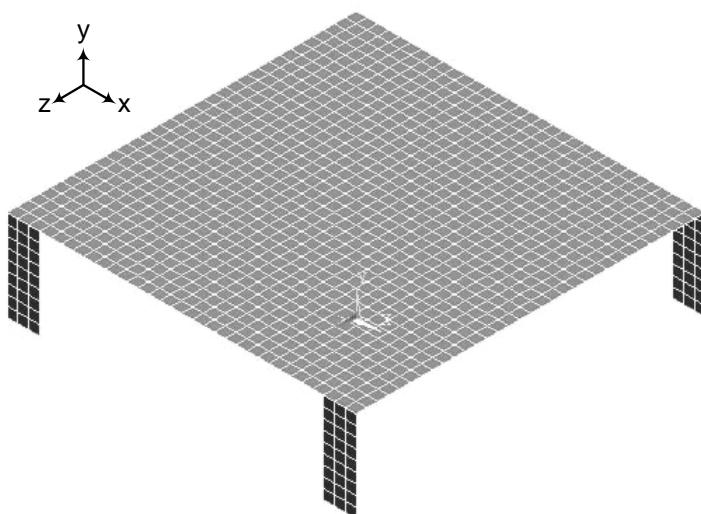


Figura 3.1 – Modelo da estrutura primária

A mesa e as lâminas foram modeladas a partir de elementos do tipo *Shell63*. Na Tabela 3.1 são apresentadas as dimensões da mesa e das lâminas, assim como as propriedades físicas associadas a estes elementos.

Tabela 3.1 – Propriedades associadas aos elementos *Shell63* da estrutura primária

Propriedade	Elementos da lâmina	Elementos da mesa
Dimensões ( $\cdot 10^{-3} m$ )	$24 \times 65,08 \times 0,8$	$250 \times 250 \times 6$
Densidade ( $kg/m^3$ )	7850	12442,7
Modulo de Elasticidade ( $Pa$ )	$2,06 \cdot 10^{11}$	$0,69 \cdot 10^{11}$
Coeficiente de Poisson	0,3	0,33

O suporte do ADV foi modelado com elemento tipo *Beam4*, cuja área da seção transversal é igual a  $0,0009 m^2$ , momentos de inércia iguais a  $6,75 \cdot 10^{-8} m^4$  e espessuras ao longo da seção transversal iguais a  $0,03 m$ . O modulo de elasticidade foi tomado como sendo igual a  $2,06 \cdot 10^{11} Pa$ , o coeficiente de Poisson 0,3 e a densidade foi considerada nula, uma vez que a massa do suporte foi simplesmente adicionada à massa da mesa. Por isso, a densidade da mesa foi tomada como sendo  $12442,7 kg/m^3$ .

A condição de contorno imposta no modelo é a de engastamento da base das lâminas, ou seja, esta condição de contorno restringe todos os 6 graus de liberdade permitidos para cada nó (translação e rotação em torno dos eixos x, y, z são nulos) e deslocamentos iguais na união entre os nós das lâminas e os nós da mesa. Foram realizadas duas análises, sendo a primeira dedicada à obtenção da freqüência natural e dos modos de vibrar da mesa; a segunda, para obtenção da função de transferência do sistema primário. Para esta última análise, foi considerada uma força unitária aplicada à estrutura conforme mostrado na Figura 3.2.

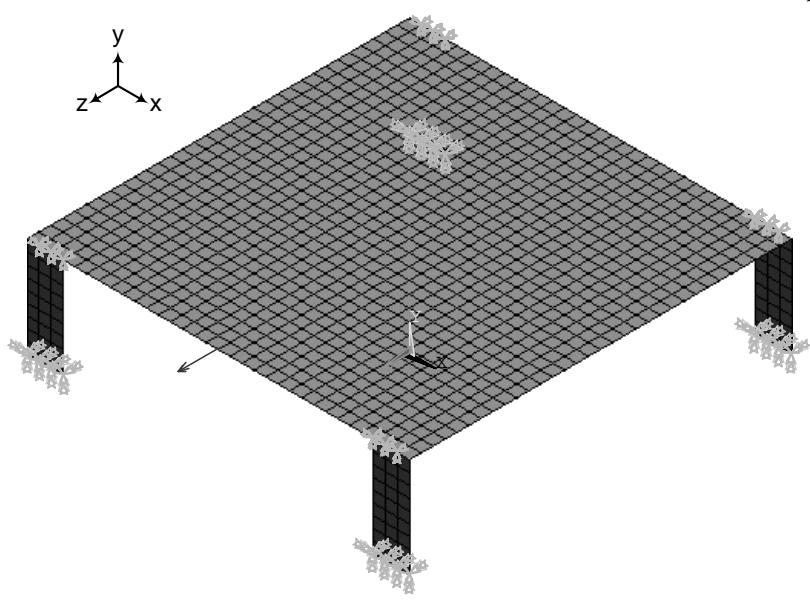


Figura 3.2 – Aplicação de força unitária para a análise harmônica

A freqüência da estrutura primária obtida pela análise modal foi de  $\omega_1 = 14,492 \text{ Hz}$ , sendo o modo de vibrar correspondente apresentado na Figura 3.3.

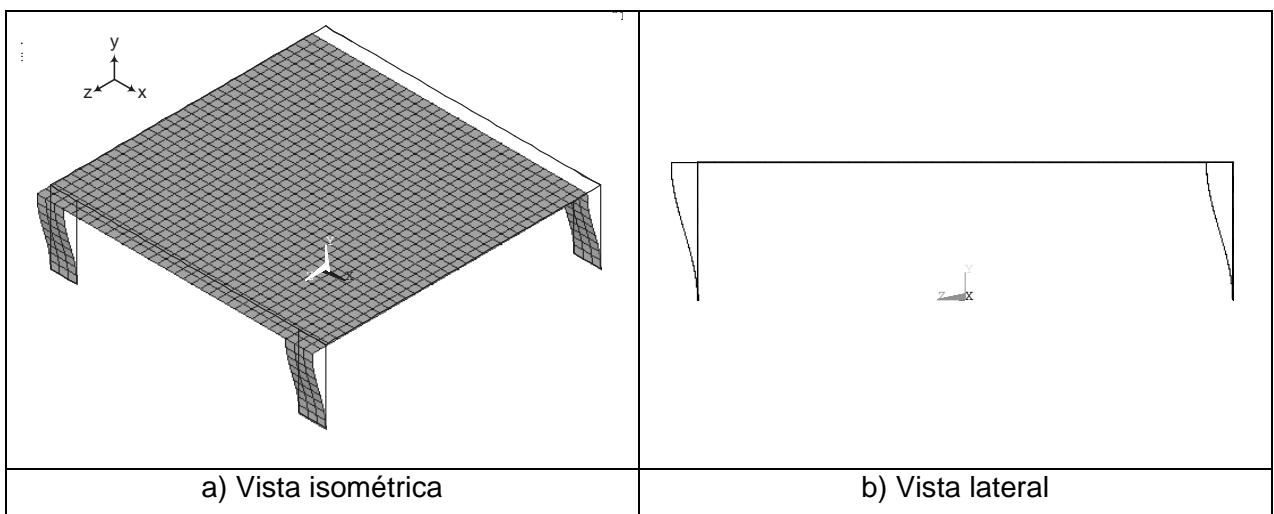


Figura 3.3 – Modo de vibrar da estrutura primária

A função de resposta em freqüência da estrutura primária obtida é apresentada na Figura 3.4. Note que a curva apresenta apenas um pico, indicando assim que a estrutura se comporta como um sistema de apenas um grau de liberdade.

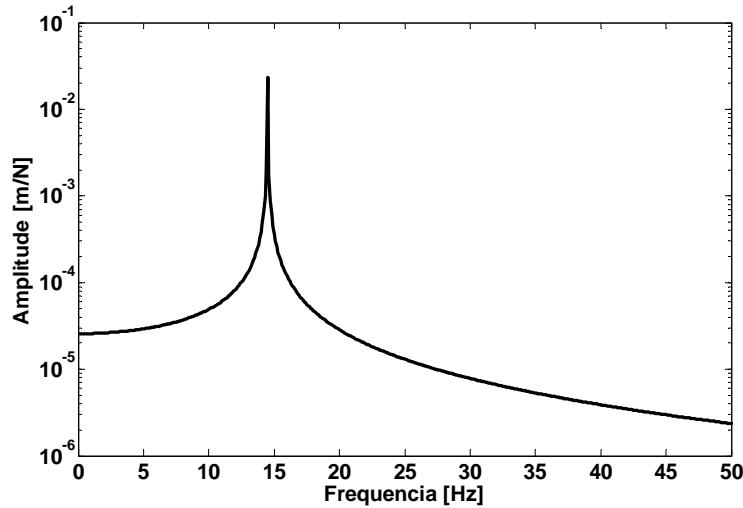


Figura 3.4 – FRF da estrutura primária

### 3.2 Modelo da corda vibrante com massa

A corda vibrante foi modelada com elementos do tipo *Beam4* e a massa concentrada foi modelada com elemento tipo *Mass21*, sem inércia rotacional. A Figura 3.5 mostra o modelo em elementos finitos da corda vibrante.

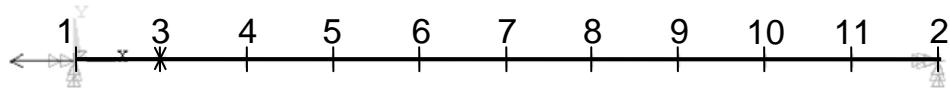


Figura 3.5 – Modelo da corda vibrante

A corda apresenta um comprimento total de  $0,261\text{ m}$ , diâmetro igual a  $0,5 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ , área da seção transversal de  $1,9625 \cdot 10^{-7}\text{ m}^2$  e densidade igual a  $4076,43\text{ kg/m}^3$ . O momento de inércia em torno da seção transversal foi considerado nulo à vista da relação entre diâmetro e comprimento da corda.

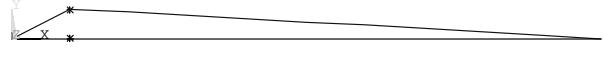
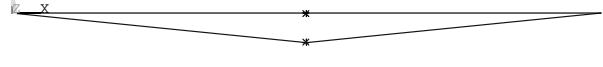
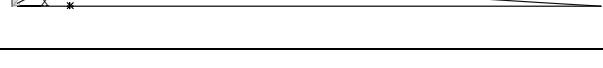
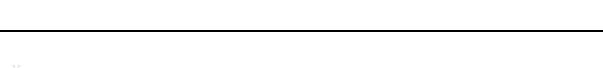
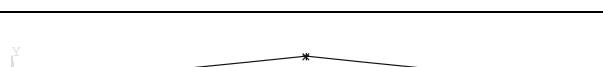
O nó 2 foi engastado e, para o nó 1, apenas deslocamento na direção  $x$  foi permitido, devido à aplicação de tração inicial nesta direção. Utilizando-se do mesmo planejamento apresentado no capítulo anterior, reapresentado agora na Tabela 3.2, foram construídos os modelos para comparação com os resultados obtidos usando o modelo analítico. Para estes modelos foram calculadas as freqüências naturais e os modos de vibrar do ADV.

Tabela 3.2 – Planejamento experimental para a corda + massa concentrada

Nº do Ensaio	Massa [kg]	Posição da Massa [nº do nó]	Tração [N]	Nº do Ensaio	Massa [kg]	Posição da Massa [nº do nó]	Tração [N]
1	0,176	3	10,281	5	0,176	3	25,133
2	0,250	3	10,281	6	0,250	3	25,133
3	0,176	7	10,281	7	0,176	7	25,133
4	0,250	7	10,281	8	0,250	7	25,133

As Tabelas 3.3 a 3.5 apresentam os valores das freqüências obtidas para os três primeiros modos de vibrar e seus respectivos modos.

Tabela 3.3 – Freqüência e modo de vibrar do 1º modo da corda vibrante + massa concentrada

Nº do Ensaio	Freq. 1º Modo [Hz]	1º Modo
1	8,5316	
2	7,1588	
3	4,8774	
4	4,0926	
5	13,339	
6	11,193	
7	7,6259	
8	6,3989	

Nota-se que para os pares de ensaios 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, as formas modais são iguais. Isso ocorre porque a variável que é alterada nestes pares de ensaios é o valor da massa concentrada (evidentemente, as freqüências correspondentes são alteradas) . Se for observado o valor das freqüências nos vários ensaios, notar-se-á que os ensaios pares terão freqüências naturais menores que os ímpares, pois a massa nos ensaios pares é maior do que nos demais casos.

Tabela 3.4 – Freqüência e modo de vibrar do 2º modo da corda vibrante + massa concentrada

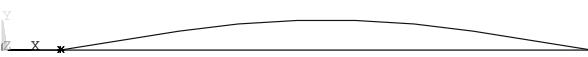
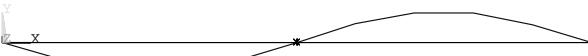
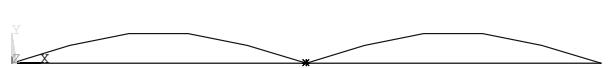
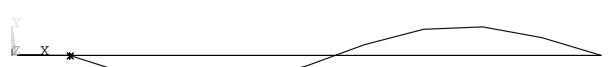
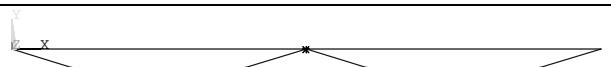
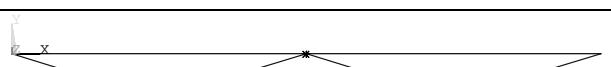
Nº do Ensaio	Freq. 2º Modo [Hz]	2º Modo
1	246,25	
2	246,24	
3	444,78	
4	444,78	
5	385,02	
6	385,01	
7	695,42	
8	695,42	

Tabela 3.5 – Freqüência e modo de vibrar do 3º modo da corda vibrante + massa concentrada

Nº do Ensaio	Freq. 3º Modo [Hz]	3º Modo
1	492,39	
2	492,39	
3	455,78	
4	455,77	
5	769,87	
6	769,86	
7	712,62	
8	712,60	

Para os 2º e 3º modos de vibrar, têm-se as mesmas formas e as mesmas freqüências para os pares de ensaios descritos no parágrafo anterior. Para os pares 1-2 e 5-6, devido à posição da massa concentrada, o cabo não tem energia suficiente para movê-la. Então o cabo passa a vibrar como se a distância entre os apoios fosse reduzida. Já para os pares 3-4 e 7-8, a massa se encontra em um nó (considerada a forma de vibrar do cabo isoladamente), não havendo, portanto, deslocamento da massa. Como nos dois casos descritos tem-se apenas o deslocamento do cabo, as freqüências permanecem iguais, uma vez que, de um par para o outro, as características do cabo permanecem constantes.

### 3.3 Modelo da corda vibrante com massa acoplada à estrutura primária

A Figura 3.6 apresenta o modelo da corda vibrante acoplado à estrutura primária. Este modelo foi construído seguindo os passos descritos a seguir, variando o valor da massa, sua posição e tração inicial na corda, conforme apresentado na Tabela 3.2.

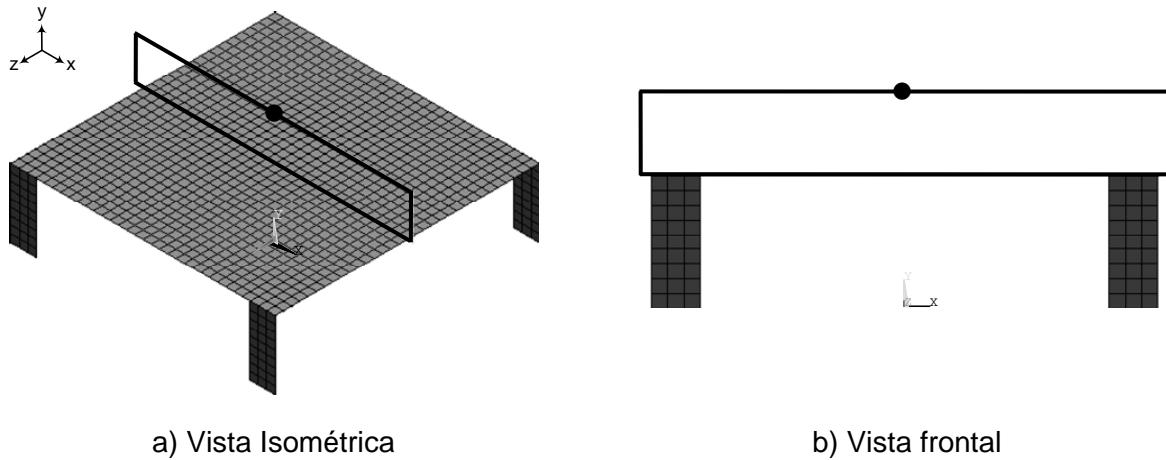


Figura 3.6 – Modelo da corda vibrante acoplado à estrutura primária

Primeiramente foram construídos os modelos da estrutura primária sem o suporte do ADV, mas contendo a corda vibrante e a massa. Todos os nós da estrutura primária foram engastados e a condição de contorno do ADV foi implementada como no item anterior (Figura 3.7). Nesta etapa foram calculadas a tensão e a deformação sofridas pela corda, sendo tais valores armazenados para uso na análise modal e na análise harmônica.

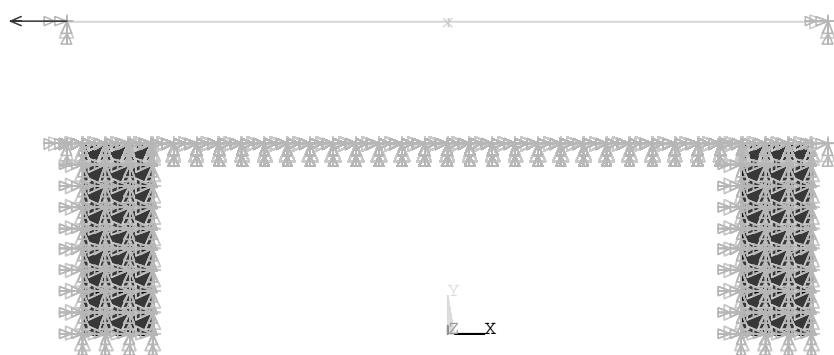


Figura 3.7 – Primeira etapa da construção do modelo da corda acoplada à estrutura primária

Concluída a primeira etapa, adiciona-se os suportes do ADV ao modelo, descarta-se a condição de contorno imposta, reaplicando-a da seguinte maneira: engastamento da base das

lâminas e deslocamentos iguais na união entre os nós das lâminas e os nós da mesa. Igualmente, são considerados iguais os deslocamentos dos nós da mesa e os deslocamentos dos nós do suporte do ADV, assim como os deslocamentos do suporte do absorvedor e os nós do ADV (Figura 3.8). E em seguida são realizados os cálculos modais e harmônicos.

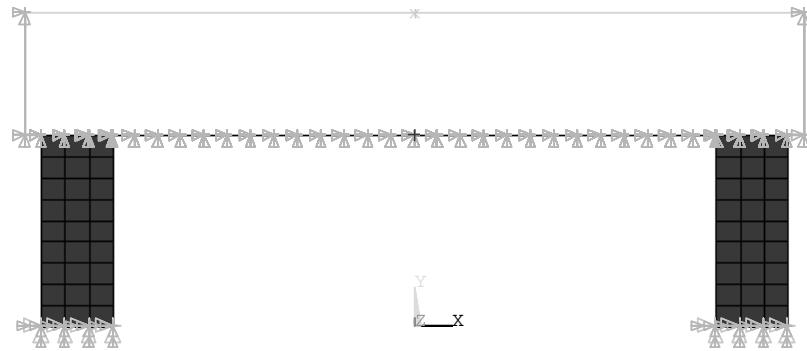


Figura 3.8 – Segunda etapa da construção do modelo da corda acoplada à estrutura primária

A Figura 3.9 apresenta as FRFs do oito modelos do planejamento experimental, agora simulados através do método dos elementos finitos. No ensaio 5 (Figura 3.9 e) observa-se que, nesta configuração, o ADV encontra-se próximo à sintonia ideal de funcionamento, reduzindo ao máximo a vibração da estrutura primaria quando esta é excitada numa freqüência próxima à sua freqüência natural.

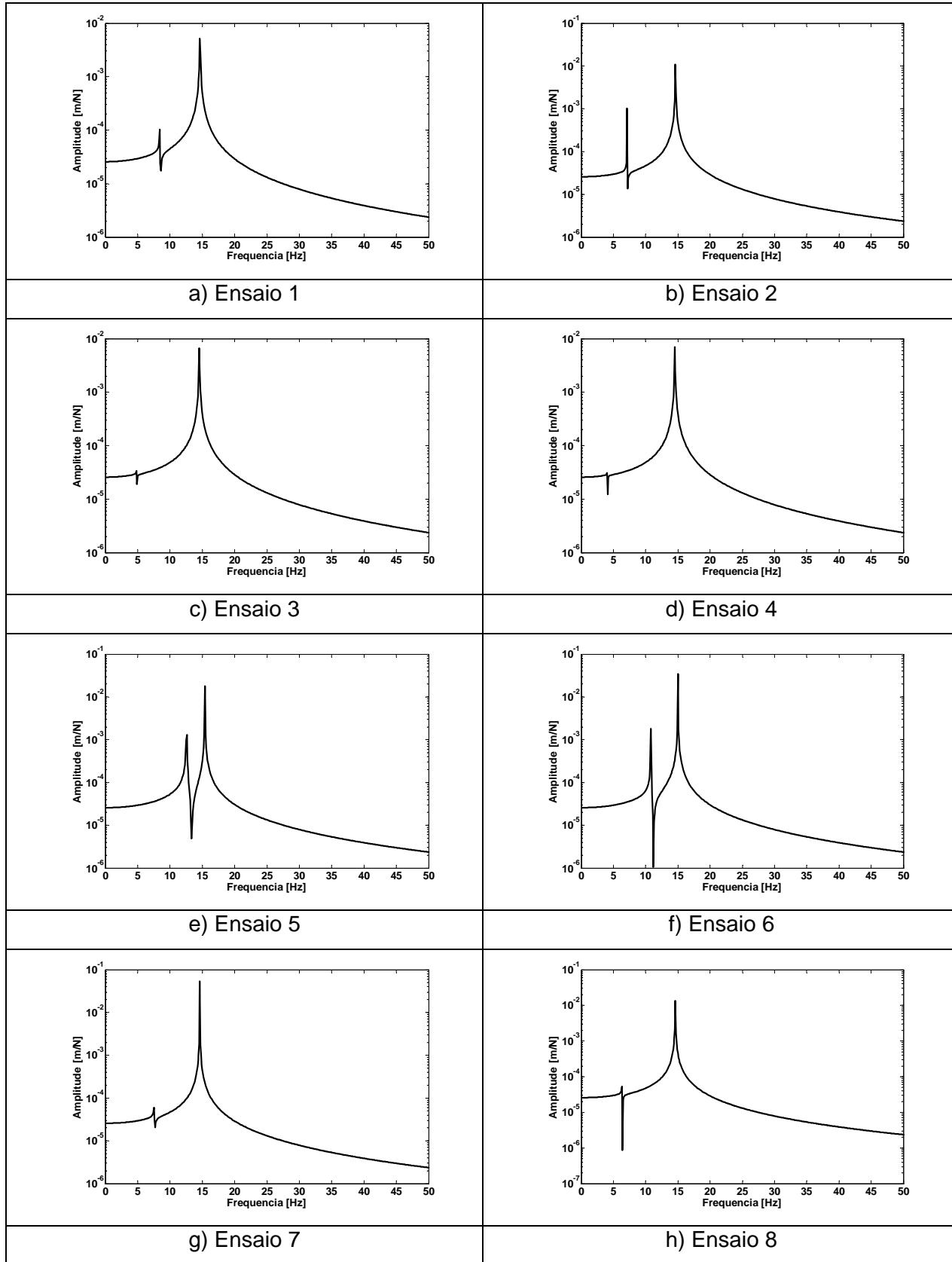


Figura 3.9 – FRF da corda vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária

### 3.4 Modelo da lâmina vibrante

Após serem realizados ensaios experimentais decidiu-se pela substituição da corda por uma lâmina de aço bi-engastada; as razões para esta mudança serão apresentadas no próximo capítulo.

Primeiramente foi elaborado um modelo constituído apenas por uma lâmina de aço de  $261 \cdot 10^{-3} m$  de comprimento e  $28 \cdot 10^{-3} m$  de largura, conforme mostrado na Figura 3.10. Este modelo é constituído por elementos do tipo *Shell63*, espessura de  $0,7 \cdot 10^{-3} m$ , densidade igual a  $7850 \text{ kg/m}^3$ , módulo de elasticidade de  $2,06 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  e coeficiente de Poisson igual a 0,3. Os nós de 1 a 6 estão engastados. O comprimento de cada elemento foi tal que este se aproximasse da metade da largura da viga ( $28 \cdot 10^{-3} m$ ). Foi aplicada uma tração inicial de  $88,29 N$  na lâmina, a fim de se evitar a influência de seu empenamento original.

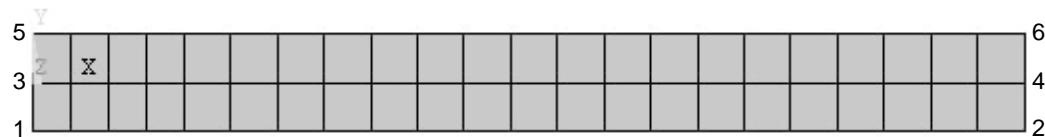


Figura 3.10 – Modelo da lâmina vibrante

No caso em questão, para comparação com o modelo experimental, as respostas de interesse são as três primeiras freqüências naturais de flexão situadas entre 0 a  $500 Hz$  e seus respectivos modos de vibrar.

Tabela 3.6 – Modos de vibrar e respectivas freqüências da lâmina vibrante

Modo	Freqüência [Hz]	Forma modal (vista de topo)
1º	74,909	
2º	181,248	
3º	332,342	

### 3.5 Modelo da lâmina vibrante com massa concentrada

Assim como no modelo anterior, foi utilizado o elemento *Shell63* para a modelagem por elementos finitos, porém dois conjuntos de propriedades foram criados para serem associadas ao elemento *Shell63*. O primeiro conjunto se refere à lâmina (elementos em cinza claro na Figura 3.11) e, o segundo, se refere à massa concentrada (elementos em cinza escuro).

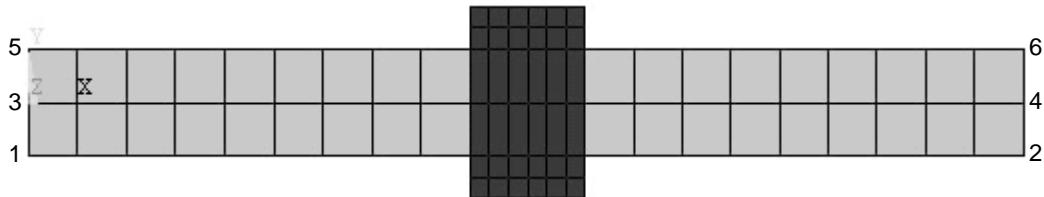


Figura 3.11 – Modelo da lâmina vibrante com massa concentrada

A Tabela 3.7 apresenta os valores para cada conjunto de propriedades. Note que para os elementos de massa são apresentados dois valores de espessura que estão associados aos valores de massa iguais a  $0,326\text{ kg}$  e  $0,532\text{ kg}$  respectivamente, sendo a densidade adotada a do chumbo uma vez que essas massas foram construídas com este material. Entretanto o módulo de elasticidade da massa foi adotado a do aço uma vez que na prática a lâmina é continua e sobre esta fixada a massa.

Tabela 3.7 – Propriedades associadas aos elementos *Shell63* da lâmina vibrante

Propriedade	Elementos da lâmina	Elementos da massa
Espessura ( $\cdot 10^{-3}\text{ m}$ )	0,7	19 31
Densidade ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	7850	11340
Módulo de Elasticidade (Pa)	$2,06 \cdot 10^{11}$	$2,06 \cdot 10^{11}$

Para se determinar as freqüências naturais e os respectivos modos deste modelo, quando a lâmina está sujeita a uma força de tração, são consideradas as seguintes condições de contorno (Tabela 3.8):

Tabela 3.8 – Condições de contorno impostas

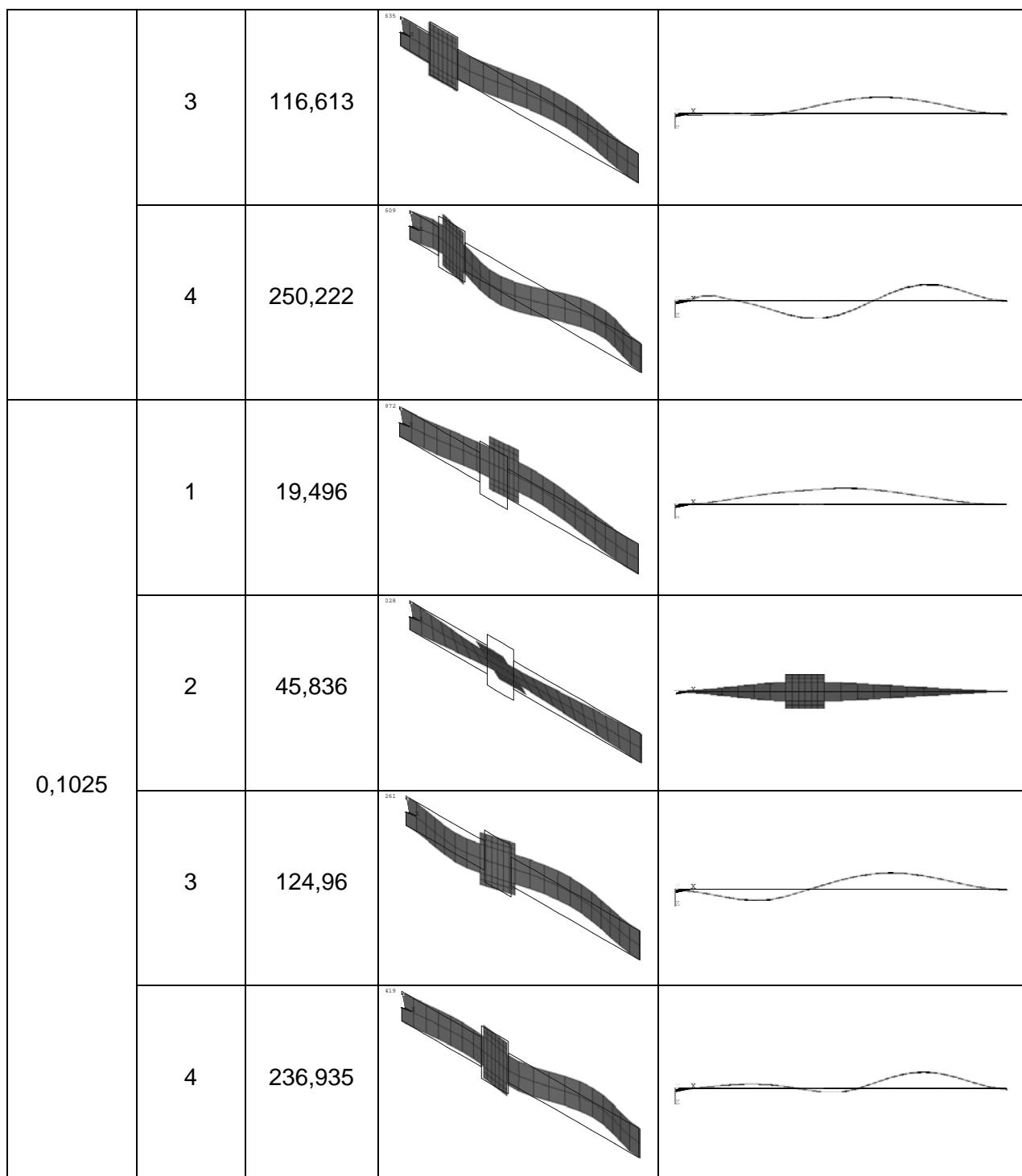
Nó	Translação	Rotação	Força
1	$x = \text{livre}$		
3	$y = 0$	$x = 0$	$F_x = T$
5	$z = 0$	$y = 0$	
2	$x = 0$	$z = 0$	
4	$y = 0$		$F_x = 0$
6	$z = 0$		

Para comparação com os ensaios experimentais foram elaborados dois modelos. Em ambos foi utilizada uma massa concentrada igual a  $0,326\text{ kg}$ , com tração inicial igual a  $88,29\text{ N}$ . A única variável considerada foi a posição da massa concentrada, cujos valores adotados foram  $0,0475$  e  $0,1025\text{ m}$ .

As respostas obtidas foram as freqüências e formas modais dos 3 primeiros modos de flexão e do primeiro modo de torção (Tabela 3.9).

Tabela 3.9 – Freqüências e formas dos modos da lâmina vibrante com massa concentrada na posição  $x$ 

Posição da Massa $x$ [m]	Ordem do Modo	Freqüência [Hz]	Forma (Vista isométrica)	Forma (Vista de topo)
0,0475	1	32,722		
	2	78,101		



Assim como no caso da corda vibrante (anteriormente apresentado) foram elaborados oito modelos a partir do planejamento apresentado na Tabela 3.10, sendo assim obtida a freqüência natural do ADV.

Tabela 3.10 – Planejamento factorial  $2^3$  para o ADV tipo lâmina vibrante com massa concentrada

Nº do Ensaio	Espessura da Massa [m]	Posição da Massa [m]	Tração [N]	Nº do Ensaio	Espessura da Massa [m]	Posição da Massa [m]	Tração [N]
1	0,019	0,030	0,000	5	0,019	0,030	68,847
2	0,031	0,030	0,000	6	0,031	0,030	68,847
3	0,019	0,131	0,000	7	0,019	0,131	68,847
4	0,031	0,131	0,000	8	0,031	0,131	68,847

A Tabela 3.11 apresenta os valores da freqüência natural do ADV obtidos para cada ensaio. Observa-se que a variação da freqüência (diminuição da freqüência) para os pares 1-2, 3-4, 5-6 e 7-8 se deve à variação da massa concentrada, uma vez que de um ensaio para o outro há um aumento da massa. Observando os pares 1-3, 2-4, 5-7 e 6-8, verifica-se a variação da freqüência (diminuição da freqüência) devido à posição da massa concentrada, o que acarreta uma mudança da rigidez equivalente do sistema. Já a influência da tração inicial é observada ao se comparar os valores das freqüências (aumento na freqüência) para os pares 1-5, 2-6, 3-7 e 4-8, pois ao ser aplicada uma tração inicial na lâmina, a rigidez equivalente do sistema é aumentada.

Tabela 3.11 – Freqüências naturais obtidas para as oito configurações do ADV

Nº do Ensaio	Freqüência Natural ADV [Hz]	Nº do Ensaio	Freqüência Natural ADV [Hz]
1	39,969	5	46,578
2	33,313	6	38,580
3	14,241	7	17,607
4	11,235	8	13,890

### 3.6 Modelo da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária

Assim como no caso da seção 3.3, o modelo da lâmina vibrante foi acoplado à estrutura primária seguindo os mesmos procedimentos descritos anteriormente. A Figura 3.12 e a Figura 3.13 apresentam a primeira e a segunda etapa da construção do modelo respectivamente.

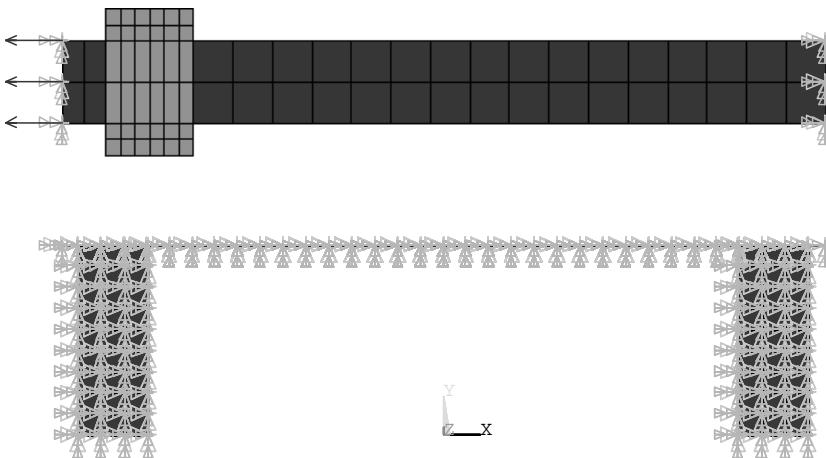


Figura 3.12 – Primeira etapa da construção do modelo da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária

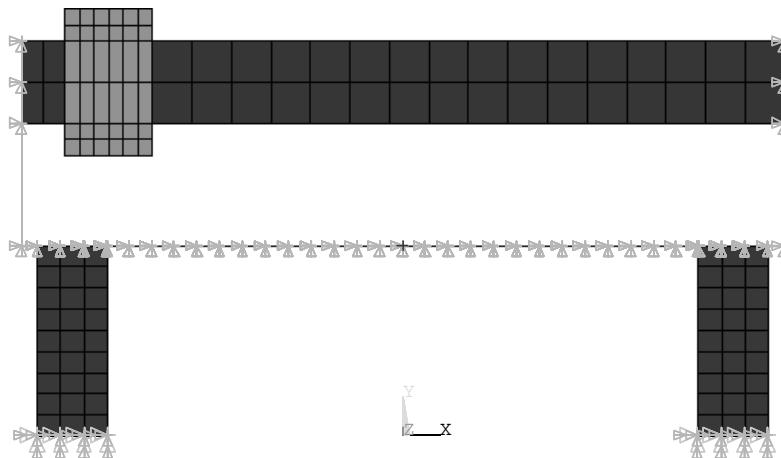


Figura 3.13 – Segunda etapa da construção do modelo do ADV tipo lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária

Este procedimento de criar e simular o modelo em duas etapas tem como objetivo aproximar a forma de aplicação da tração inicial no modelo com aquela utilizada nos ensaios experimentais (Capítulo 4). Se todo o modelo for criado antes dos cálculos, tem-se que, ao ser aplicada a tração, o suporte do ADV se deforma em flexão à semelhança de uma viga engastada livre, resultando assim um momento sobre a lâmina, conforme apresentado na Figura 3.14.

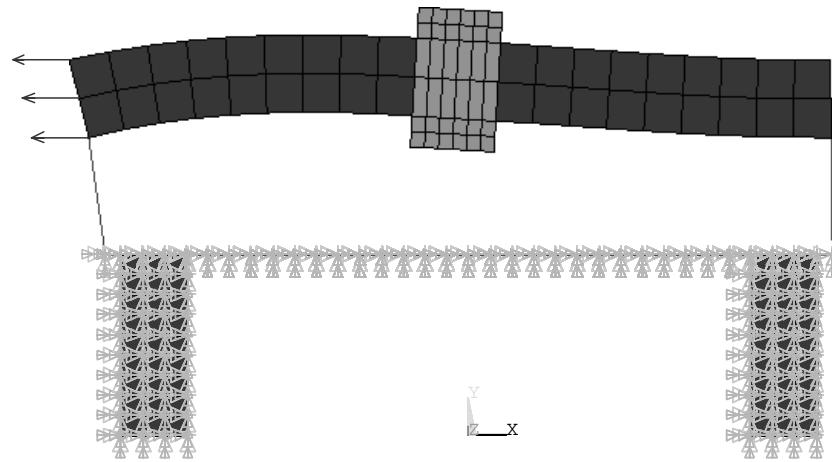


Figura 3.14 – Modelo construído em uma única etapa com os nós da estrutura primária engastados e força de tração inicial aplicada

Caso a mesa esteja somente engastada na sua base, a aplicação da tração implica no aparecimento de uma torção na estrutura primária.

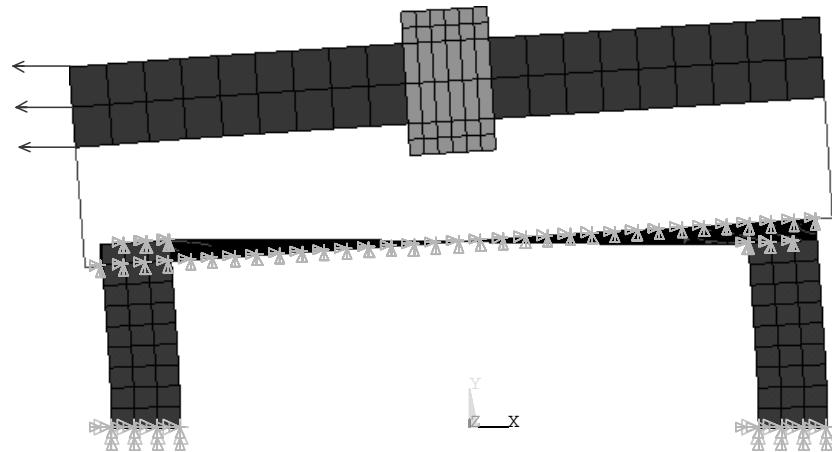


Figura 3.15 – Modelo construído em uma única etapa com os nós da base da estrutura primária engastados e força de tração inicial aplicada

A Figura 3.16 apresenta as FRFs dos oito ensaios realizados computacionalmente. Sabendo-se que a freqüência natural da estrutura primária é igual à  $14,492\text{ Hz}$ , ao se observar a Tabela 3.11 nota-se que os ADV com as configurações 3 e 8 apresentam freqüências naturais próximas à da estrutura primária, caracterizando a sintonia dos ADVs para estas duas configurações (Figura 3.16-c e Figura 3.16-g), anulando a amplitude da estrutura primária do sistema na freqüência acima assinalada.

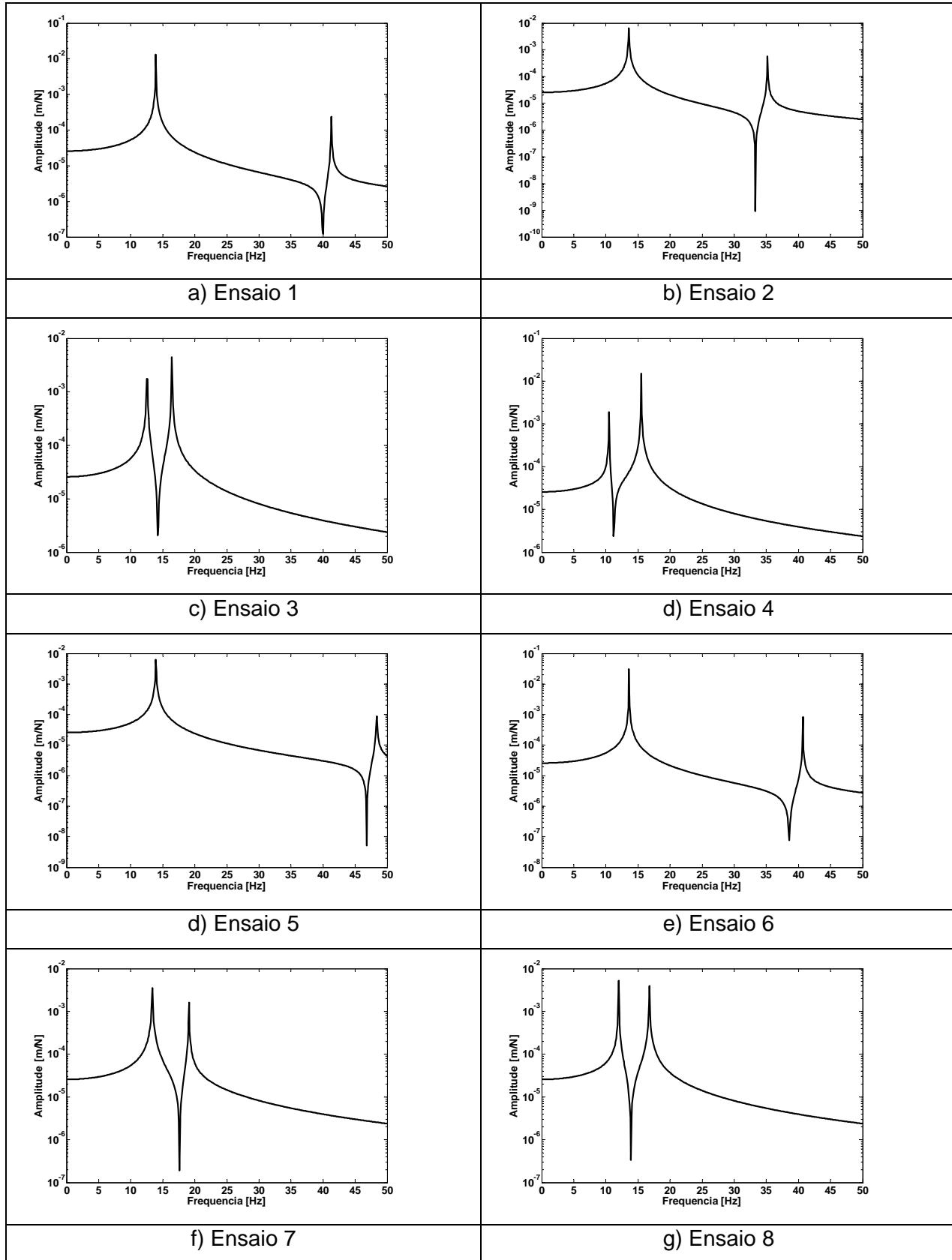


Figura 3.16 – FRFs do ADV tipo lâmina vibrante + estrutura primária

Traçando as FRF das configurações 3 e 8 em um mesmo gráfico (Figura 3.17), nota-se que há um maior afastamento das freqüências naturais do sistema de dois graus de liberdade (estrutura primária + ADV) para a configuração 8. Este maior afastamento se deve ao fato da massa do ADV ser maior para esta configuração, conforme previsto na teoria clássica (Den Hartog, 1956).

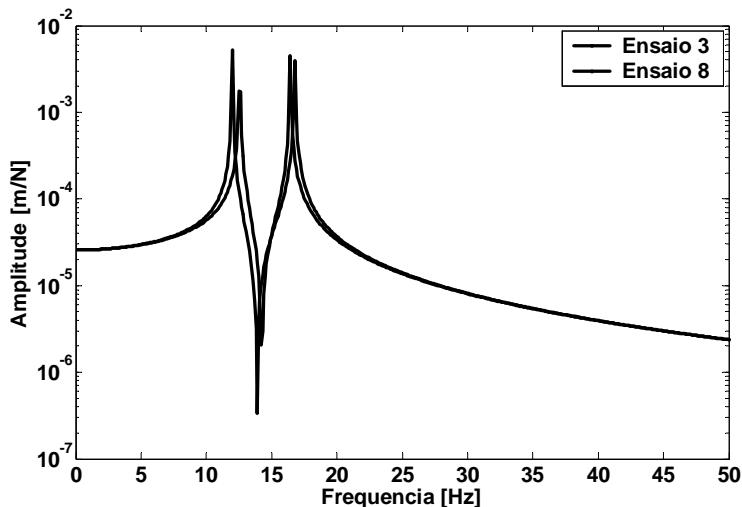


Figura 3.17 – FRFs das configurações 3 e 8

### 3.7 Modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada

Sabe-se que a condição de engastamento (perfeito) é de difícil reprodução experimental. Assim, foi criado um modelo ajustado, visando uma melhor representação do sistema, a partir daquele utilizado nos ensaios experimentais.

A lâmina foi aumentada em suas extremidades de um comprimento igual a  $x_s = 25,4 \cdot 10^{-3} [\text{m}]$  (Figura 3.18). Os nove nós da extensão direita foram impedidos de transladar nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , sendo apenas permitidas as suas rotações. Os nós da outra extremidade foram impedidos de transladar nas direções  $y$  e  $z$ , sendo os graus de liberdade restantes liberados. A tração inicial foi aplicada nos três nós da extremidade esquerda.

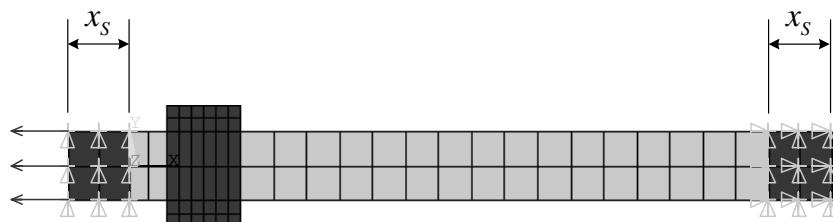


Figura 3.18 – Modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada

Este procedimento insere no modelo uma rigidez torsional nas extremidades da lâmina, evidenciando, assim, o que ocorre experimentalmente.

Foram elaborados modelos com configurações iguais às descritas na seção 3.5. As formas modais são idênticas às obtidas anteriormente, mas com freqüências diferentes. A Tabela 3.12 apresenta as freqüências obtidas para as 10 configurações testadas.

Tabela 3.12 – Freqüências obtidas a partir do modelo ajustado

Nº do Ensaio	Freqüência [Hz]		Nº do Ensaio	Freqüência [Hz]	
1	1º modo	30,589	2	1º modo	18,789
	2º modo	73,604		2º modo	45,152
	3º modo	112,266		3º modo	121,24
	4º modo	235,268		4º modo	228,288
1	35,027		5	41,900	
2	29,030		6	34,373	
3	13,573		7	16,985	
4	10,711		8	13,403	

### 3.8 Modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária

O modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária também foi construído em duas etapas, conforme procedimento anteriormente descrito. A Figura 3.19 apresenta a primeira etapa da construção do modelo.

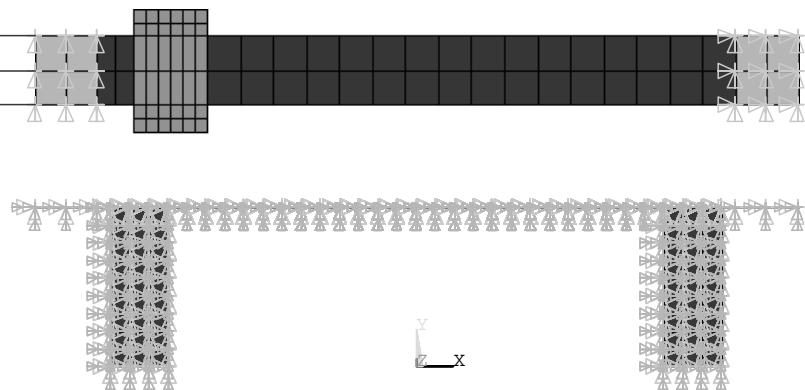


Figura 3.19 – Primeira etapa da construção do modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária

A segunda etapa é mostrada na Figura 3.20, onde os deslocamentos relativos ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) dos nós de mesma posição das extensões da lâmina e dos suportes do ADV foram travados. Na extensão à esquerda, o deslocamento ao longo do eixo  $x$  foi liberado, mantendo assim as mesmas condições de contorno apresentadas na seção anterior.

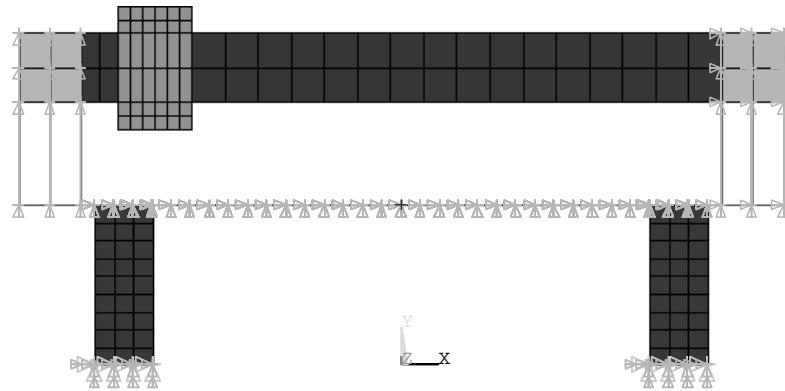


Figura 3.20 – Segunda etapa da construção do modelo ajustado da lâmina vibrante com massa concentrada acoplada à estrutura primária

A Figura 3.21 apresenta as FRFs dos oito ensaios realizados computacionalmente. As mesmas observações feitas na seção 3.6 valem para este caso.

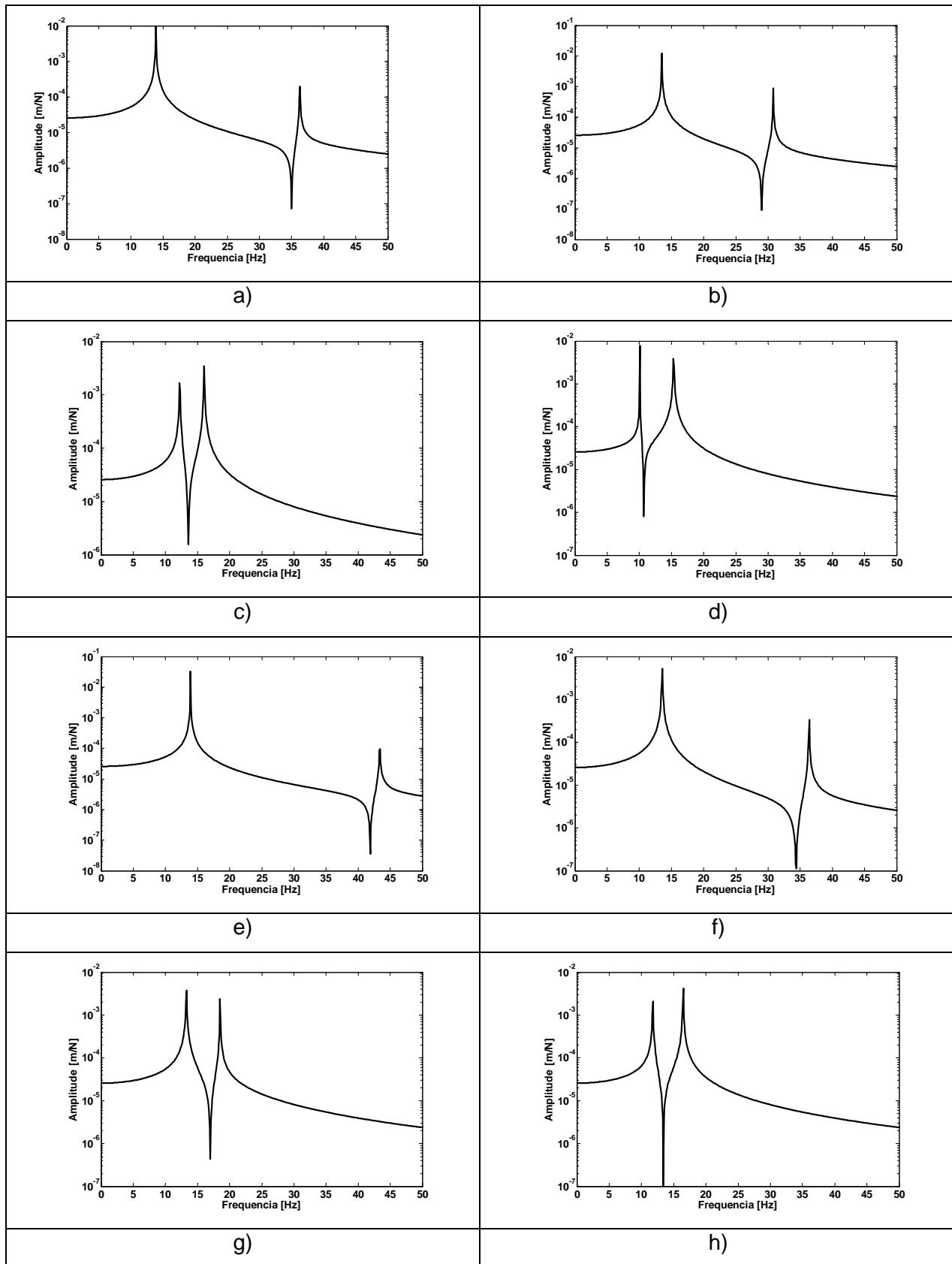


Figura 3.21 – FRFs dos modelos ajustados

A Figura 3.22 apresenta as FRFs das configurações 3 e 8 do modelo em questão.

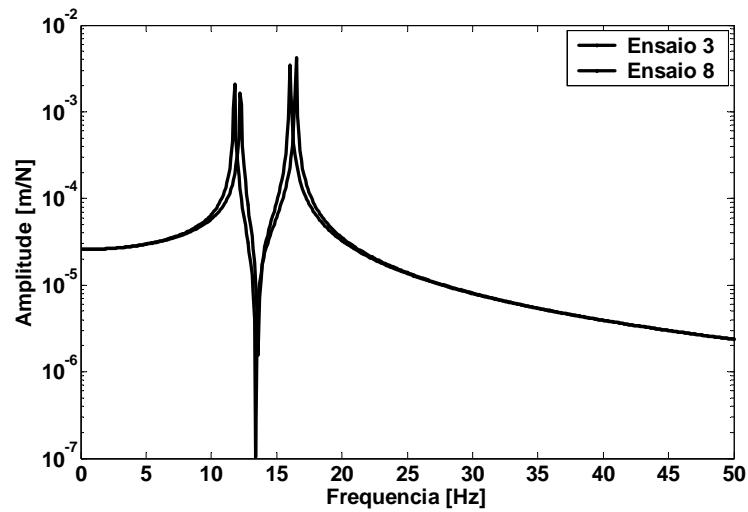


Figura 3.22 – FRFs dos ensaios 3 e 8 obtidos a partir do modelo ajustado



# Capítulo 4

## Ensaios Experimentais

Este capítulo apresenta os procedimentos utilizados e os resultados dos ensaios experimentais realizados. Foram usadas duas configurações de montagem do experimento, a primeira visando a análise do Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante - ADVLV isoladamente e, a segunda, visando a análise do Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Corda Vibrante - ADVCV e ADVLV acoplados, cada um à sua vez, a um sistema de 1 g.d.l. Também será explicada a razão pela qual optou-se pela utilização da lâmina ao invés do cabo de aço na construção do absorvedor dinâmico de vibração estudado.

### 4.1 Descrição do aparato experimental

O aparato experimental utilizado é constituído por um sistema de um grau de liberdade e pelo ADVCV ou ADVLV, conforme o caso, além de um excitador eletrodinâmico de vibração (*shaker*), uma célula de carga e um acelerômetro ou um vibrômetro, todos montados sobre uma mesa inercial conforme mostrado na Figura 4.1. A seguir serão descritos o sistema de um grau de liberdade utilizado, o ADVCV e o ADVLV.

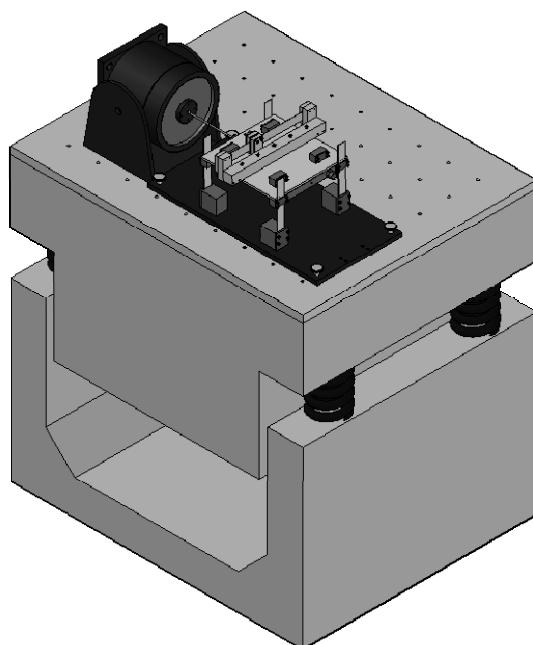


Figura 4.1 – Bancada Experimental

#### **4.1.1. Sistema de um grau de liberdade**

O sistema de um grau de liberdade utilizado é constituído por uma placa de alumínio suspensa por quatro lâminas de aço inox (Figura 4.2). Devido aos momentos de inércia das lâminas, pode-se considerar o movimento da mesa, ao longo de uma das direções horizontais, como sendo de apenas um grau de liberdade. A mesa possui regulagem de altura, permitindo ajustar a rigidez do sistema. Além disso, esta regulagem permite o acoplamento com o excitador eletrodinâmico de vibração.

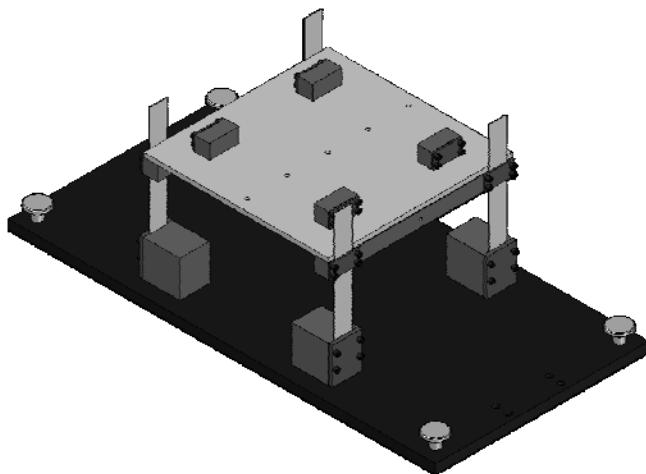


Figura 4.2 – Sistema de um g.d.l. acoplado a quatro lâminas

#### **4.1.2. Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Corda Vibrante - ADVCV**

O ADVCV (Figura 4.3) é constituído por um suporte formado por uma barra quadrada de alumínio, dois suportes para a fixação do cabo de aço e pelo ADV propriamente dito, sendo este constituído de um cabo de aço com uma massa concentrada composta por dois fixadores e massas padrão construídas em aço (Figura 4.4).

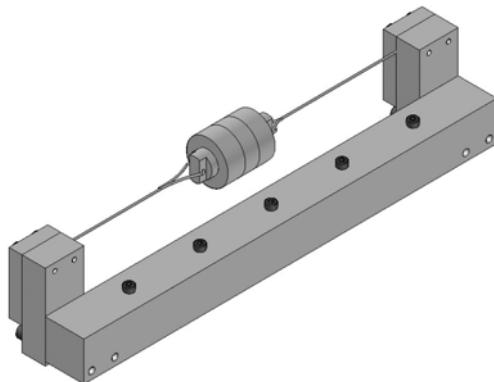


Figura 4.3 – ADV tipo corda vibrante com massa concentrada

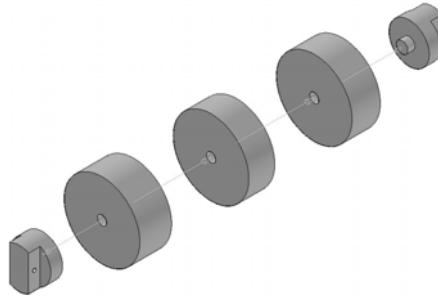


Figura 4.4 – Massa concentrada do ADVCV (vista explodida)

O suporte para a fixação do cabo pode ser posicionado de acordo com a furação da barra quadrada, alterando assim o comprimento  $L$  do ADVCV. A massa  $m$  pode ser alterada de acordo com o número de massas padrão necessárias. Já a posição  $d$  pode ser alterada movendo-se a massa ao longo da corda. E, por fim, a tensão inicial da corda pode ser alterada mediante a aplicação de uma tração na corda antes que esta seja presa pelos suportes.

#### 4.1.3. Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante - ADVLV

O ADVLV é constituído pelo mesmo suporte utilizado no ADVCV, por uma lâmina de aço, além de massas padrão em chumbo (Figura 4.5).

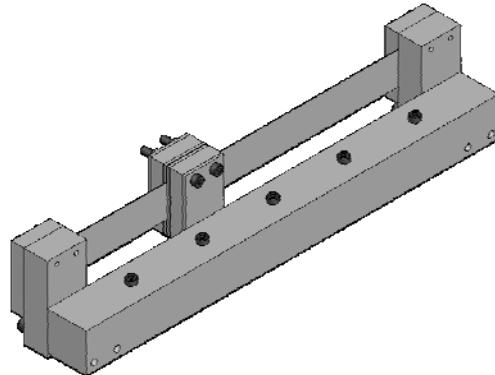


Figura 4.5 – ADV tipo lâmina vibrante com massa concentrada

Como o suporte para a fixação da lâmina é o mesmo utilizado para o ADVCV, a mesma regulagem do comprimento pode ser realizada neste caso. A massa  $m$  pode ser alterada de acordo com o número de massas padrão e a posição  $d$  pode ser modificada movendo-se a massa ao longo da lâmina. E, por fim, à semelhança do caso anterior, a tensão inicial da lâmina pode ser alterada mediante a uma aplicação de tração na lâmina antes que esta seja presa pelos suportes.

## 4.2 Montagem do experimento

Neste trabalho foram realizadas duas montagens experimentais, a primeira utilizando-se de uma excitação por impacto através de um pêndulo (Figura 4.6), sendo as medidas de velocidade realizadas por um vibrômetro laser. Na segunda montagem foi utilizado um *shaker* para realizar a excitação do sistema e instalado um acelerômetro para a medição da aceleração.

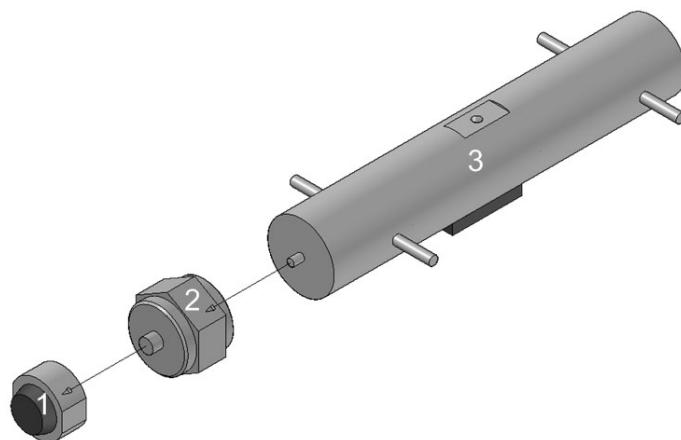


Figura 4.6 – Vista explodida do pêndulo utilizado para excitação por impacto

Tabela 4.1 – Legenda da Figura 4.6

Nº na Figura 4.6	Equipamento	Marca	Modelo	Quantidade
1	Ponta de Borracha, de Plástico ou de Aço	Brüel & Kajaer		1
2	Transdutor de Força	Brüel & Kajaer	8200	1
3	Pêndulo			1

Através do analisador de sinal Spectral Dynamics modelo SD380 foram determinadas as FRFs ( $H(\omega)$ ) do sistema. Para facilitar, foi utilizada a seguinte notação para as funções de resposta em freqüência:  $H_{a,b}(\omega)$  onde  $a$  indica a posição de aplicação da excitação e  $b$  indica o ponto de leitura da aceleração, estes pontos são indicados na Figura 4.7. A aplicação da excitação e a correspondente leitura da aceleração são feitas em lados opostos da lâmina. Note que os pontos 10, 11 e 12 estão solidários à massa do ADVLV, portanto se deslocam juntamente com a massa.

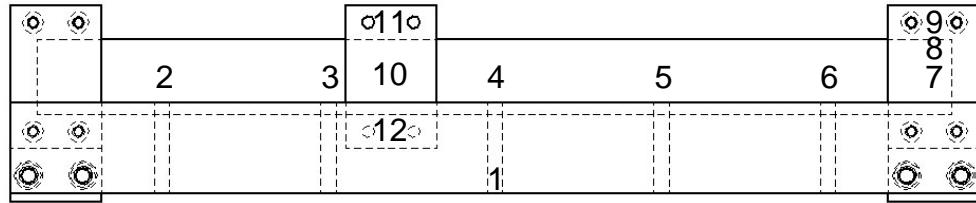


Figura 4.7 – Indicação dos índices das FRFs  $H(\omega)$

#### 4.2.1. Experimento utilizando pêndulo e o vibrômetro laser

O ADVLV foi primeiramente fixado à mesa inercial para a obtenção de seu comportamento de forma isolada e, também, para comparações com o modelo de elementos finitos descrito anteriormente nas seções 3.4 e 3.5. A Figura 4.8 mostra o esquema de montagem do experimento, sendo a legenda descrita na Tabela 4.2.

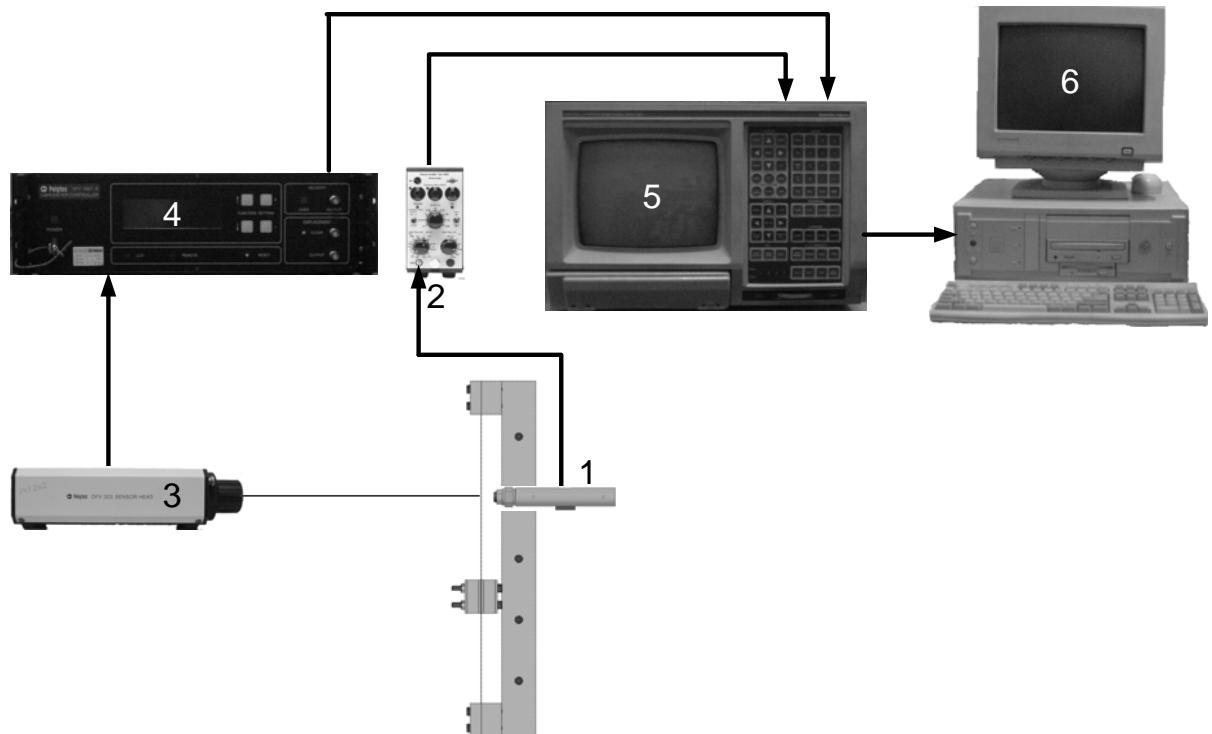


Figura 4.8 – Esquema do experimento utilizando o pêndulo e o vibrômetro laser

Tabela 4.2 – Legenda da Figura 4.8

Nº na Figura 4.8	Equipamento	Marca	Modelo	Quantidade
1	Pêndulo			1
2	Amplificador de Carga	Brüel & Kajaer	2635	1
3	Vibrometro Laser	Polytec	OFV 303	1
4	Controlador Vibrometro	Polytec	OFV 3001 S	1
5	Analizador de Sinais	Scientific-Atlanta	SD380	1
6	Micro-Computador			1

Os ensaios foram realizados de acordo com a Tabela 4.3. Os ensaios 1 e 2 são dedicados à verificação das freqüências das colunas que suportam a lâmina do ADVLV. Os ensaios de 3 a 10 e de 13 a 17 visam a obtenção dos três primeiros modos de vibrar da lâmina e, finalmente, os ensaios números 11, 12, 18 e 19 buscam obter o modo de torção da lâmina. Nestes ensaios foi aplicada uma tração de  $88,29\text{ N}$ , sendo esta utilizada para reduzir os efeitos devido ao empenamento original da lâmina. A ponta de aço e o ponto de impacto do pêndulo na lâmina (ponto 2) foram escolhidos de forma a evitar "repiques" e diminuir o tempo de contato entre o pêndulo e a lâmina, facilitando a obtenção de uma banda de excitação larga (0 a  $400\text{ Hz}$ ). Para cada ensaio foi realizada uma média de 15 amostras.

Tabela 4.3 – Configurações dos ensaios realizados

Nº do ensaio	Posição de medição		Posição da Massa [mm]	Nº do ensaio	Posição de medição		Posição da Massa [mm]
	Força	Aceleração			Força	Aceleração	
1	8	7	Sem Lâmina	11	10	11	102,5
2	8	9		12	10	12	
3	2	2	Sem Massa	13	2	2	47,5
4	2	3		14	2	3	
5	2	4	102,5	15	2	4	
6	2	2		16	2	5	
7	2	3	102,5	17	2	6	
8	2	4		18	10	11	
9	2	5	102,5	19	10	12	
10	2	6					

As configurações apresentadas na Tabela 4.4 para o amplificador de carga, conectado ao transdutor de força, foram utilizadas em todos os dezenove ensaios realizados. O controlador do vibrômetro foi ajustado para um fator de amplificação de  $125 \text{ (m/s}^2\text{)}/V$ .

Tabela 4.4 – Configurações do amplificador de carga

Parâmetro	Valor
Limite inferior de freqüência	$1 \text{ m/s}^2 \rightarrow 2 \text{ Hz}$
Limite superior de freqüência	$1 \text{ kHz}$
Fator de amplificação	$100 \text{ mV/(m/s}^2\text{)}$

Para facilitar as análises comparativas serão apresentados os valores da função de transferência em  $m/N$  (unidade utilizada pelo Programa Ansys®) e não em  $(\text{m/s})/N$ , conforme obtidos originalmente nos ensaios experimentais. Para isto deve-se fazer a conversão de  $H(\omega)$ , obtido em  $V/V$ , valor de saída do analisador de sinais utilizado, para  $(\text{m/s})/N$  e dividir o resultado por  $2\pi f$  obtendo, assim, os valores em  $m/N$ . Como o deslocamento é defasado de menos  $90^\circ$  em relação à velocidade, a fase de  $H(\omega)$  deve ser subtraída de  $90^\circ$ .

Nos ensaios 1 e 2 a freqüência máxima de análise foi ajustada para  $1 \text{ kHz}$  no analisador SD380. A (Figura 4.9) apresenta os resultados obtidos, onde se pode notar que a primeira freqüência natural do suporte ocorre em aproximadamente  $538,0 \text{ Hz}$ . Desta forma, pode-se considerar os suportes como sendo rígidos.

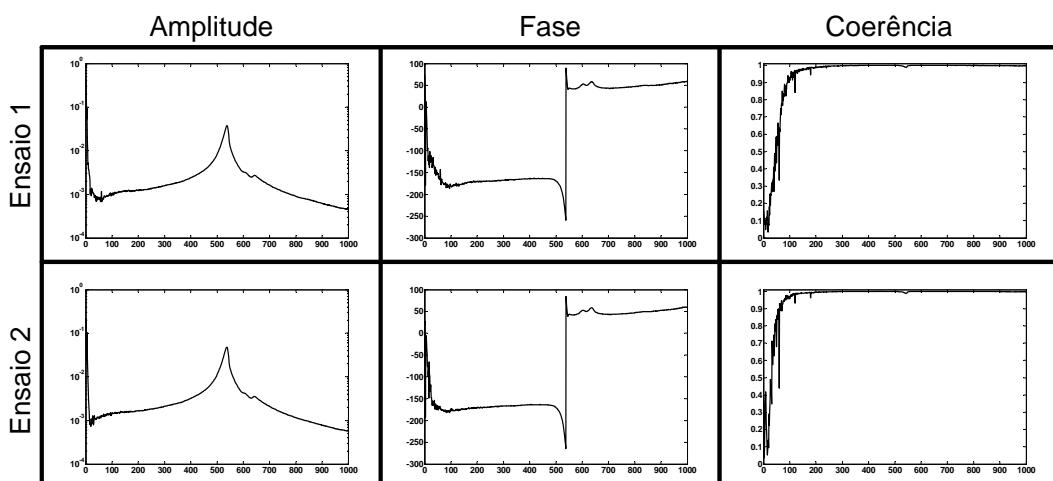


Figura 4.9 – Resposta dos ensaios 1 e 2

Nos demais ensaios, a freqüência máxima de análise foi ajustada para  $400\text{ Hz}$ . A Figura 4.10 apresenta as respostas obtidas para  $H_{22}(\omega)$ ,  $H_{23}(\omega)$  e  $H_{24}(\omega)$ . As respostas  $H_{25}(\omega)$  e  $H_{26}(\omega)$  não foram medidas uma vez que o sistema é simétrico.

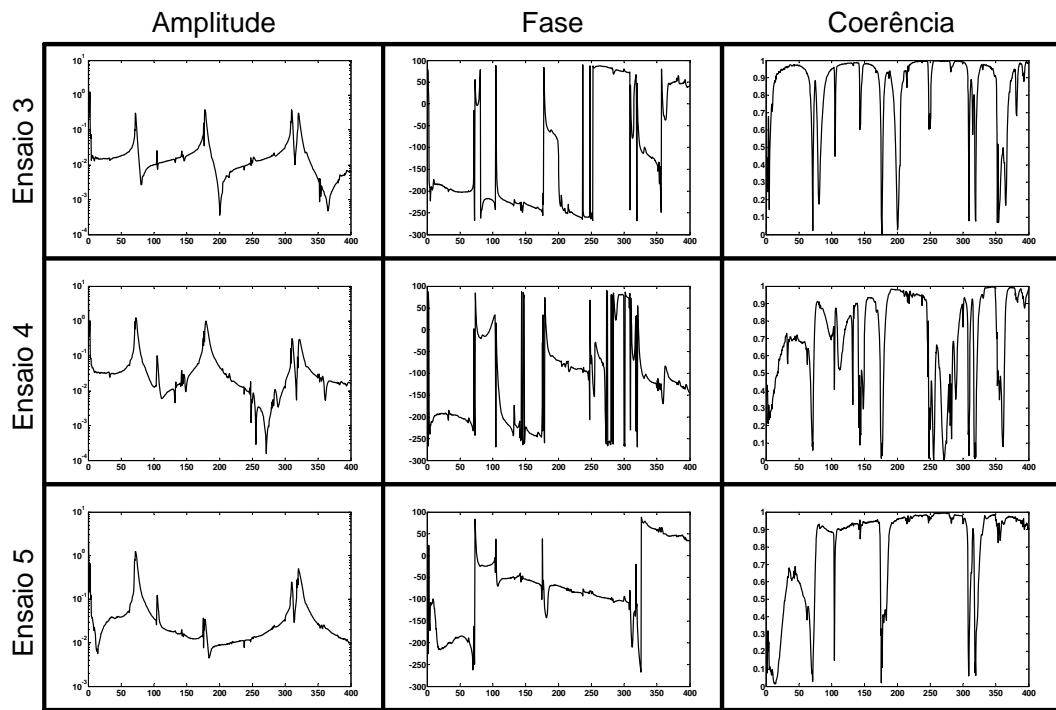


Figura 4.10 – Resposta dos ensaios 3, 4 e 5

A Figura 4.11 apresenta as formas aproximadas dos modos obtidas usando técnicas de análise modal experimental.

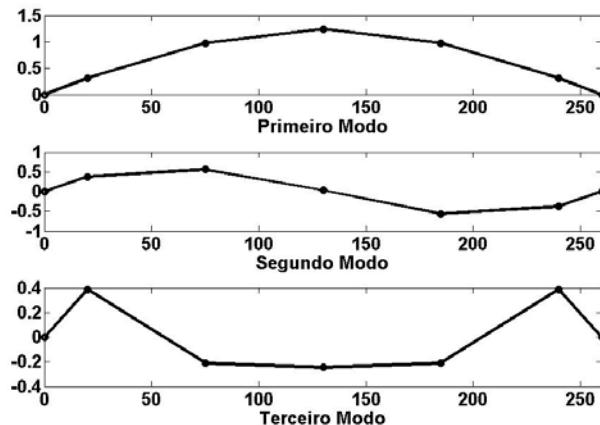


Figura 4.11 – Formas modais aproximadas para a lâmina vibrante sem massa concentrada

Na Figura 4.12 são apresentados os resultados obtidos para os ensaios de 6 a 10.

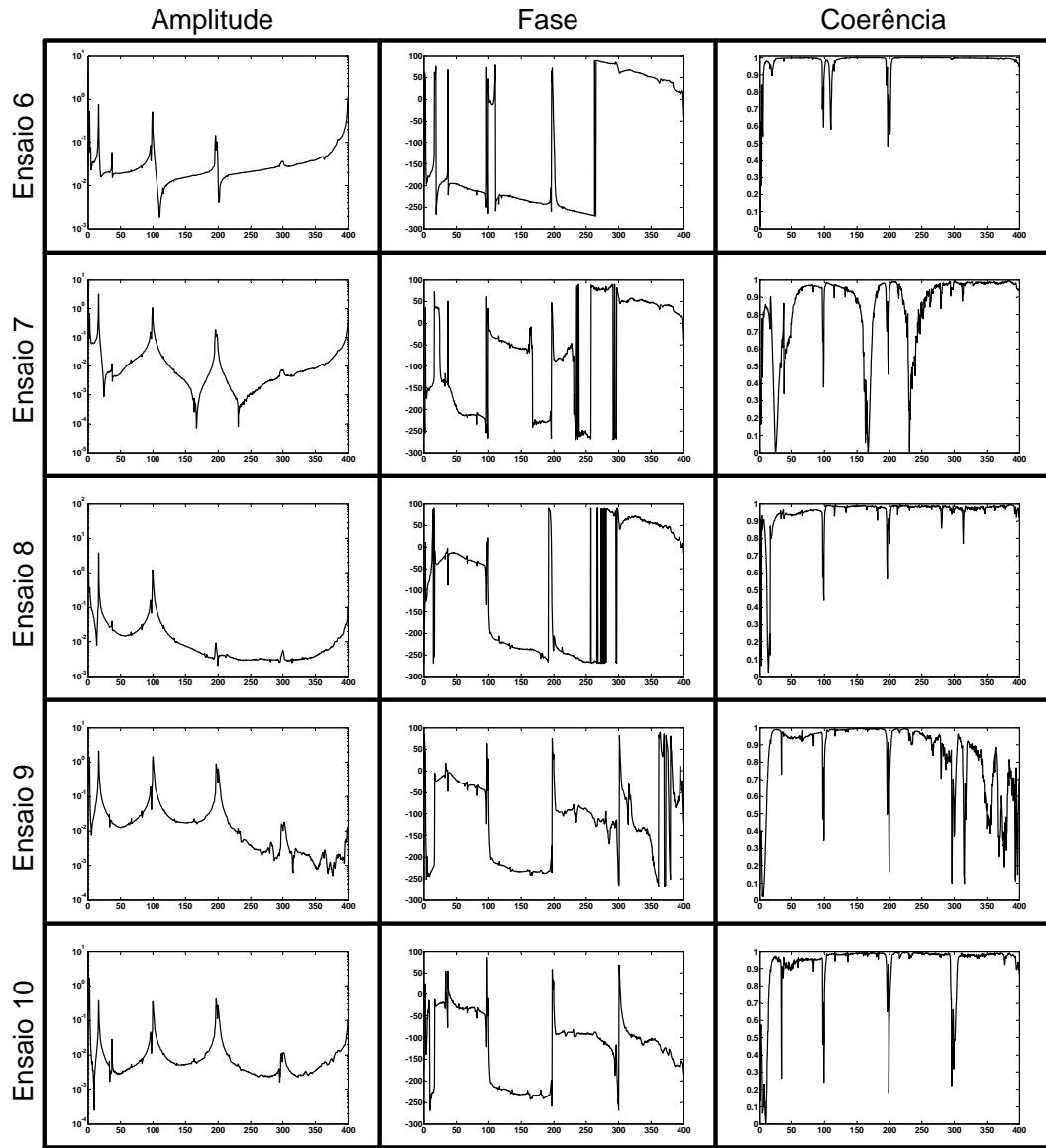


Figura 4.12 – Resultados obtidos para os ensaios de 6 a 10

Assim como no caso anterior foram obtidas as formas modais aproximadas, apresentadas na Figura 4.13.

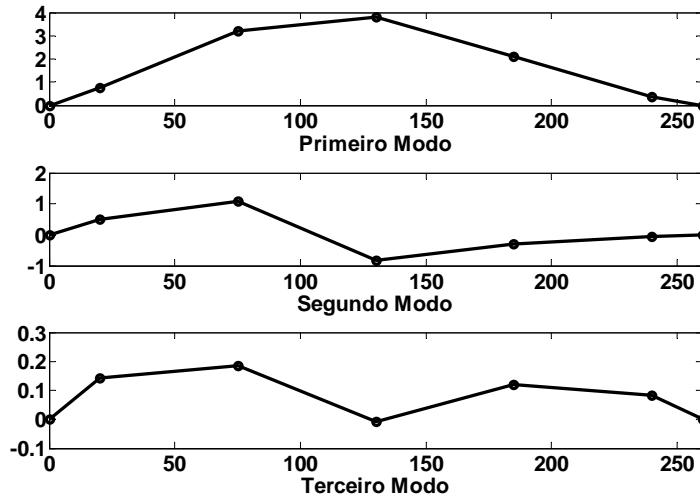


Figura 4.13 – Formas modais aproximadas para a lâmina vibrante com massa concentrada

$$(x = 102,5 \cdot 10^{-3} [m])$$

Na Figura 4.14 são apresentados os resultados obtidos para os ensaios de 13 a 17.

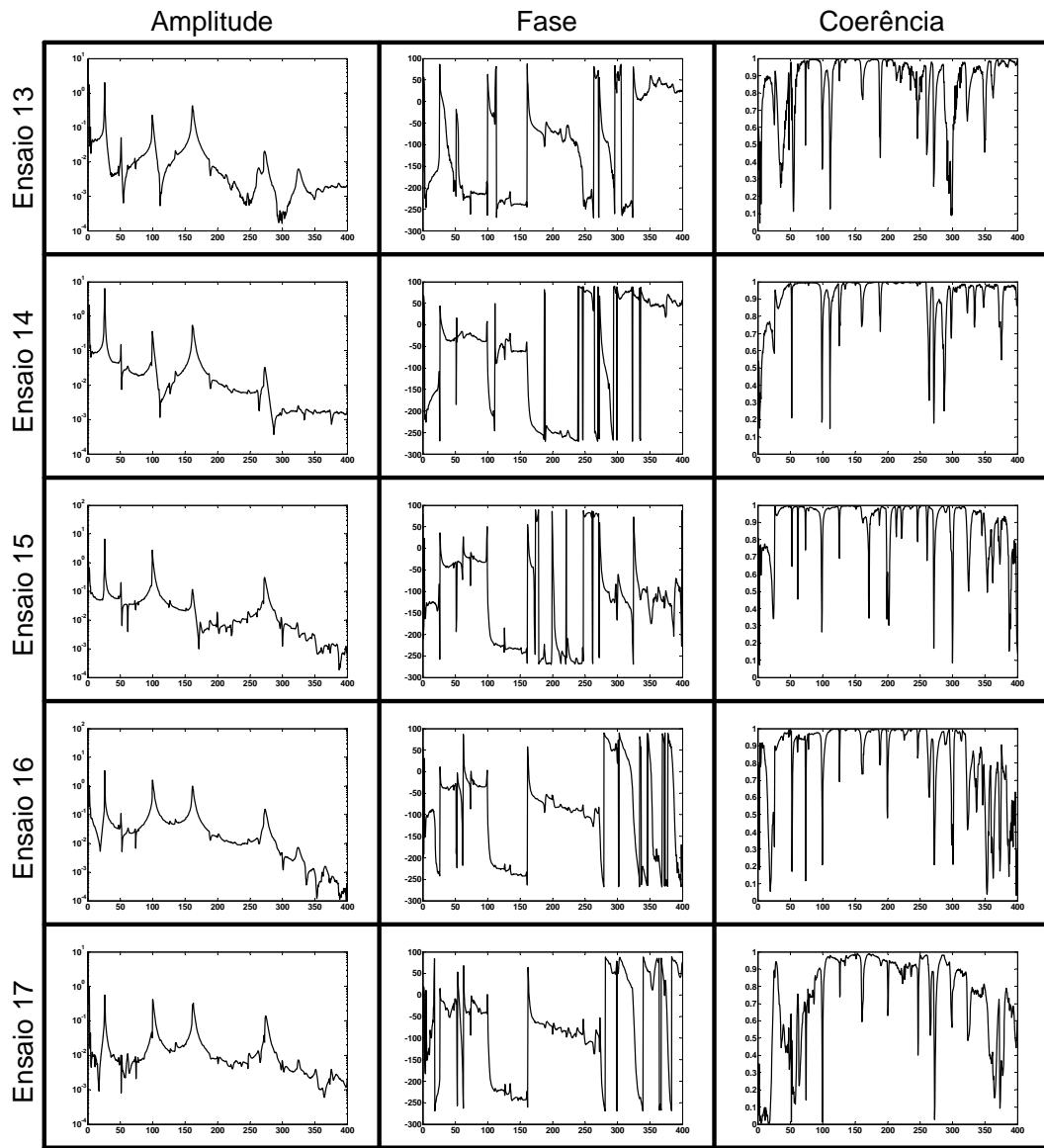


Figura 4.14 – Resultados obtidos para os ensaios de 13 a 17

A Figura 4.15 apresenta as formas modais aproximadas obtidas para a configuração dos ensaios de 13 a 17.

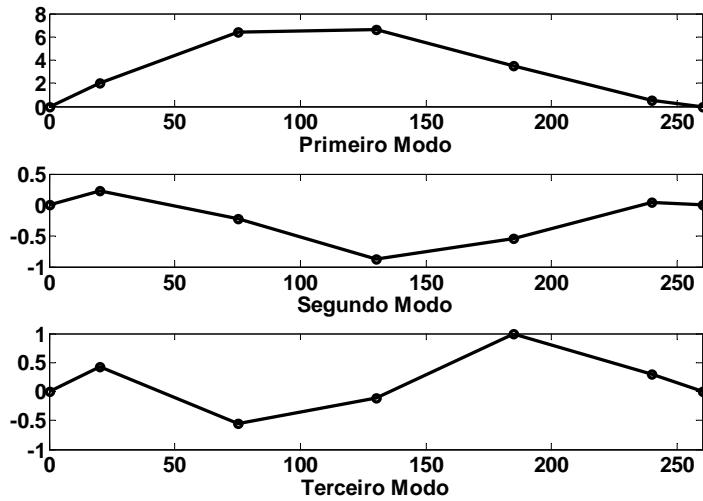


Figura 4.15 – Formas modais aproximadas para a lâmina vibrante com massa concentrada

$$(x = 47,5 \cdot 10^{-3} [m])$$

Na Figura 4.16 são apresentados os resultados obtidos para os ensaios 11, 12, 18 e 19.

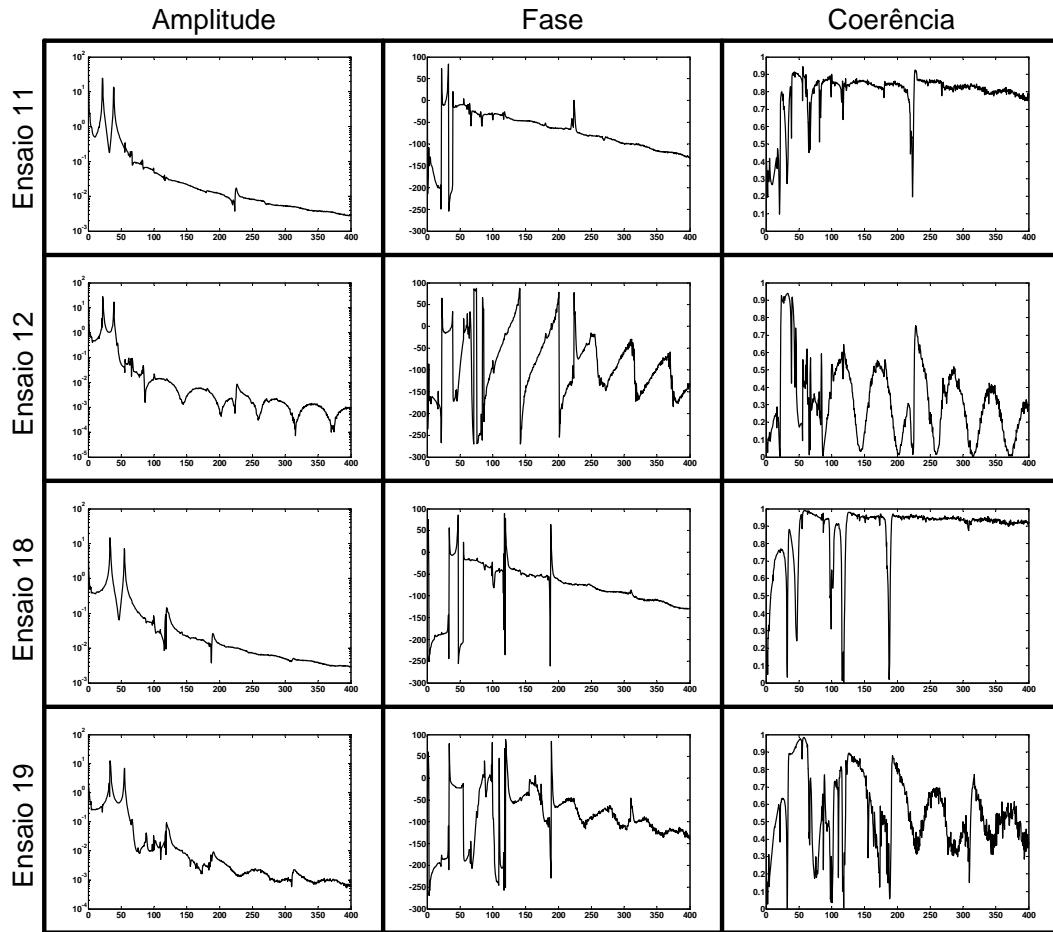


Figura 4.16 – resultados obtidos nos ensaios 11, 12, 18 e 19

#### 4.2.2. Experimento utilizando excitador eletrodinâmico de vibração (*shaker*) e acelerômetro

As Figura 4.17 e 4.18 mostram o esquema de montagem do experimento.

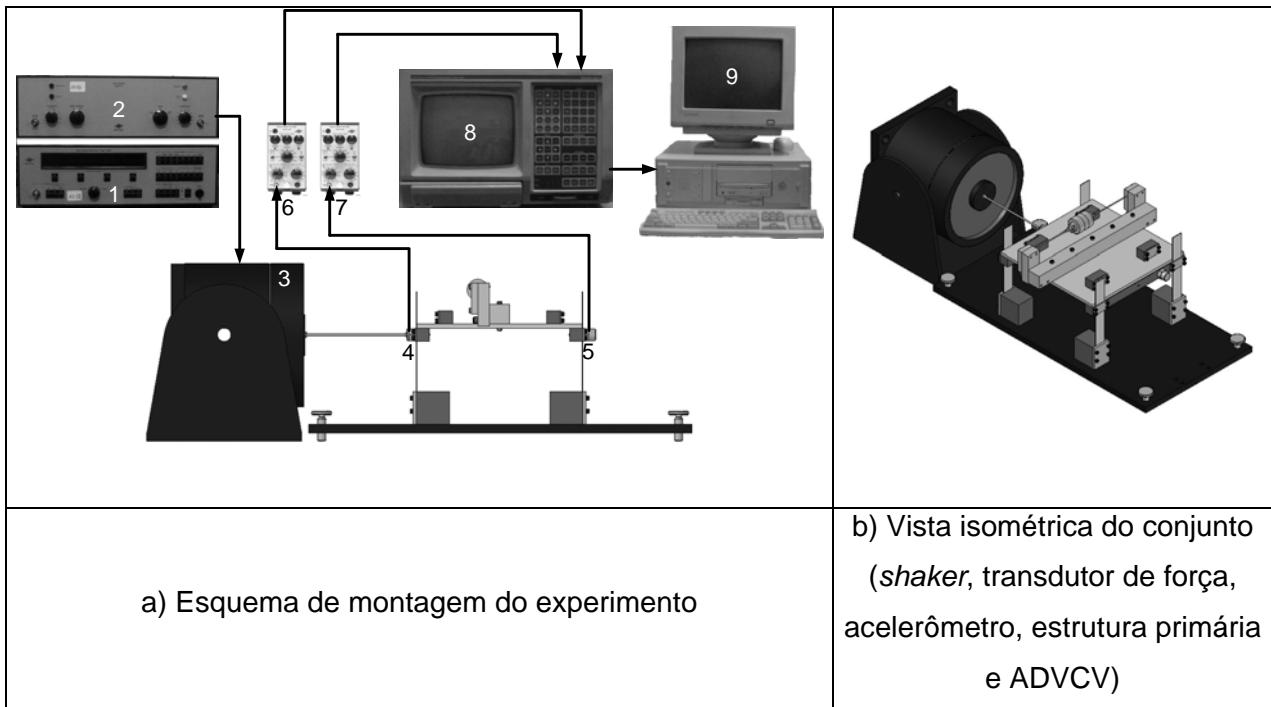


Figura 4.17 – Esquema do experimento utilizando o *shaker* e o acelerômetro para o ADVCV

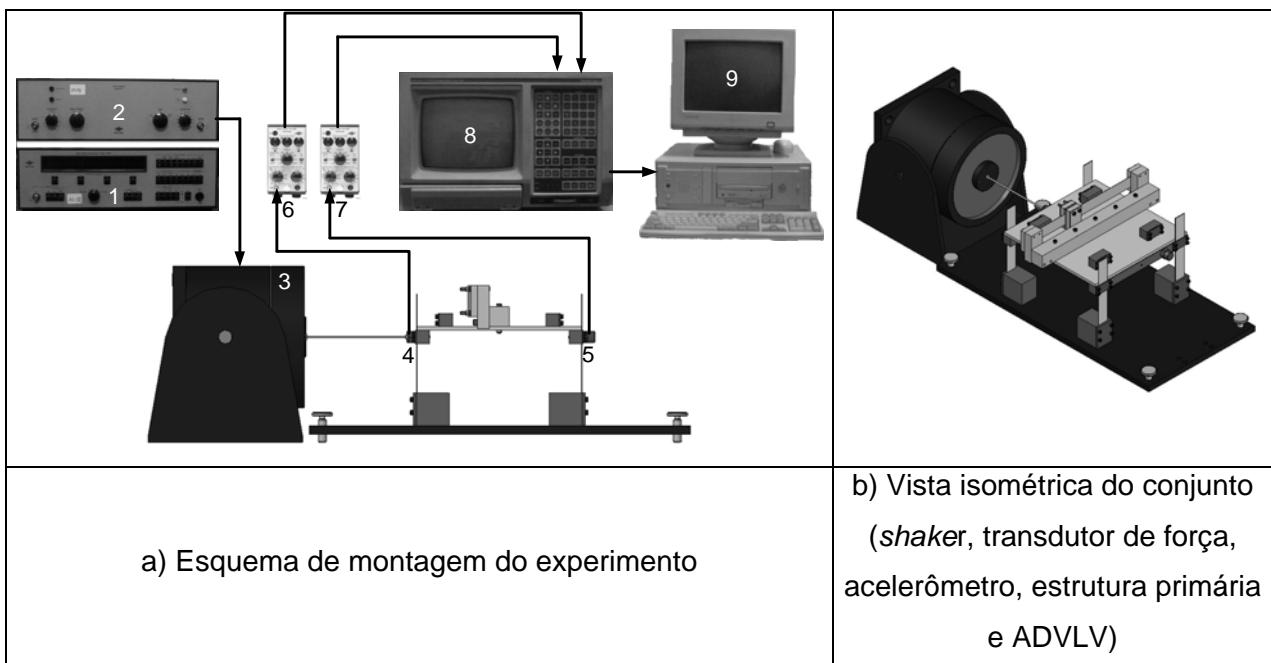


Figura 4.18 – Esquema do experimento utilizando *shaker* e acelerômetro para o ADVLV

Tabela 4.5 – Legenda das Figura 4.17 e 4.18

Nº na Figura 4.8	Equipamento	Marca	Modelo	Quantidade
1	Gerador de Seno / Ruído	Brüel & Kjaer	1049	1
2	Amplificador de Potência	Brüel & Kjaer	2712	1
3	Excitador de Vibração	Brüel & Kjaer	4808	1
4	Transdutor de Força	Brüel & Kjaer	8200	1
5	Acelerômetro	Brüel & Kjaer	4367	1
6 e 7	Amplificador de Carga	Brüel & Kjaer	2635	2
8	Analizador de Sinais	Scientific-Atlanta	SD380	1
9	Micro-Computador			1

Primeiramente foi realizado um ensaio para a determinação da massa e da rigidez do sistema primário (sem absorvedor dinâmico de vibração), sendo este constituído pelo sistema de um g.d.l. mais o suporte do ADVLV (sem a lâmina e a massa) (Figura 4.19).

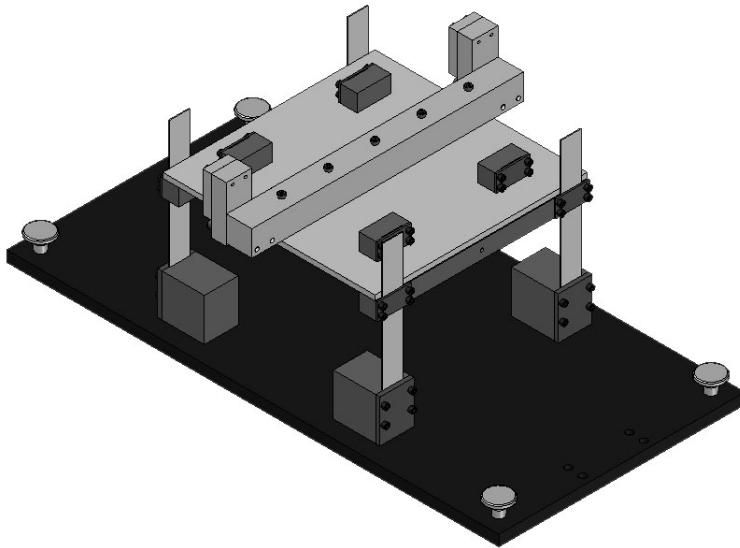


Figura 4.19 – Estrutura primária

O sistema foi excitado com ruído branco com banda de 2 Hz a 2 kHz, tendo os amplificadores de carga sido ajustados para um ganho de 100 mV/(unidade de saída). Primeiramente foi feita uma análise até a freqüência de 200 Hz (Figura 4.20), para comprovar que a estrutura primária apresenta um comportamento igual ao sistema de 1 g.d.l. para a freqüência máxima a ser estudada de 50 Hz (linha tracejada).

De forma semelhante à seção anterior, para facilitar as análises comparativas, serão apresentados os valores da função de transferência em  $m/N$  e não em  $(m/s^2)/N$ , conforme obtidos originalmente nos ensaios experimentais. Para isto deve-se multiplicar o módulo de  $H(\omega)$  por 1, uma vez que os ganhos em ambos os amplificadores de sinais são iguais, para fazer a conversão de  $V/V$  para  $(m/s^2)/N$  e, depois, dividir por  $(2 \cdot \pi \cdot f)^2$  obtendo, assim,  $m/N$ . Como o deslocamento é defasado de menos  $180^\circ$  em relação à aceleração, a fase de  $H(\omega)$  deve ser subtraída de  $180^\circ$ .

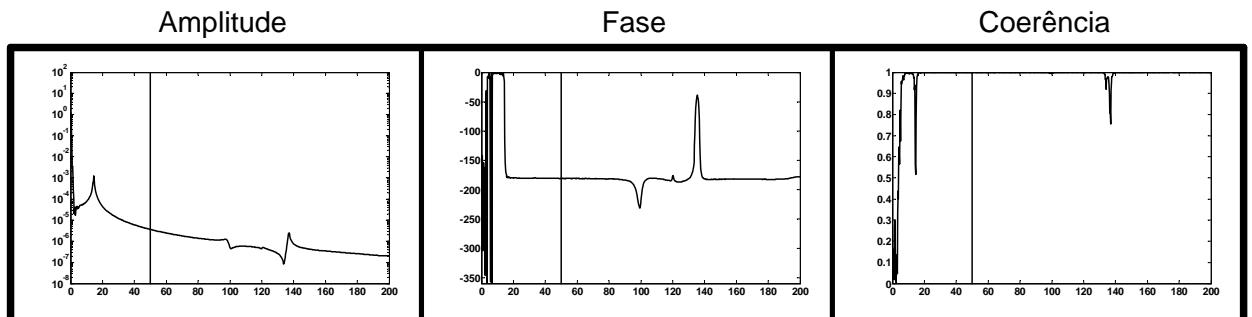
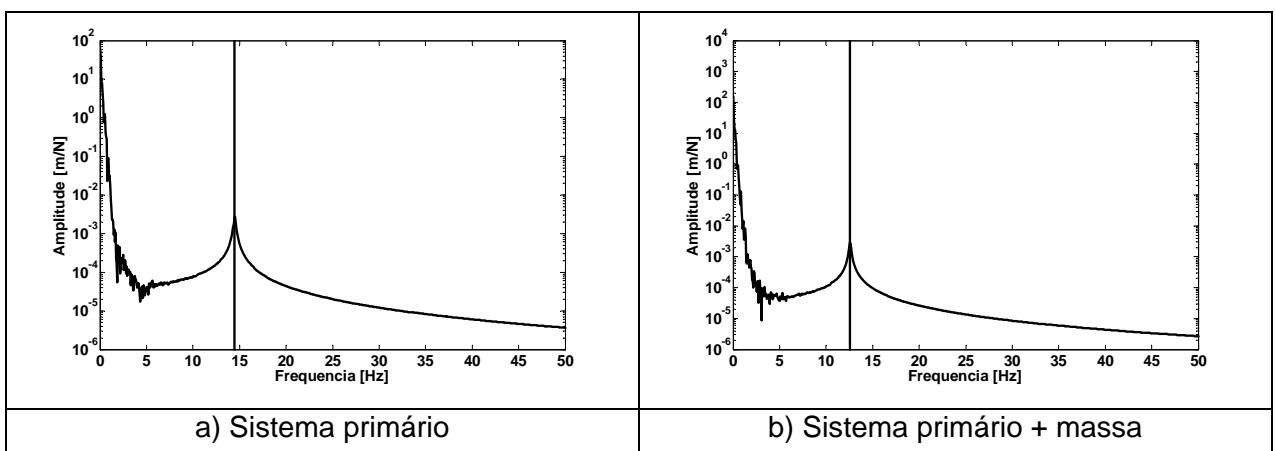


Figura 4.20 – FRF da estrutura primária até a freqüência de  $200\text{ Hz}$

Em seguida a freqüência máxima de análise foi ajustada para  $50\text{ Hz}$  no analisador de sinais SD380. Obteve-se a FRF da estrutura primária e, a partir desta, foi obtida a freqüência natural  $\omega_1$  (Figura 4.21.a). Em seguida, foi adicionada uma massa  $m = 1,516\text{ [kg]}$  à mesa, obtendo, de forma análoga, a nova freqüência natural  $\omega_1^+$  (Figura 4.21.b). A Figura 4.21.c apresenta a comparação entre o sistema primário sem e com o acréscimo de massa. Conforme esperado, a freqüência natural do segundo caso é menor do que a do primeiro.



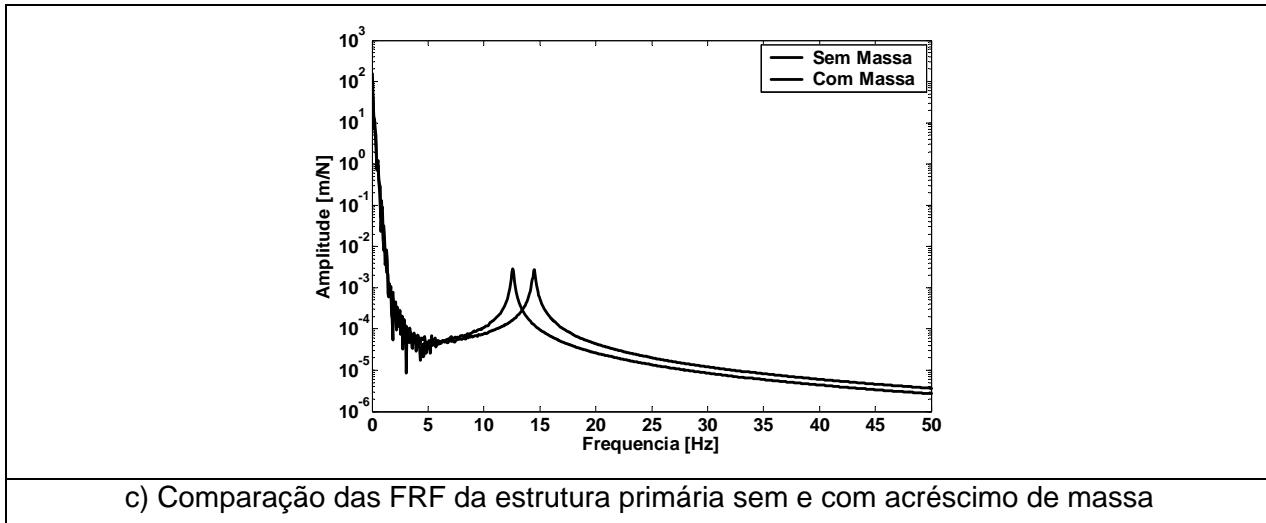


Figura 4.21 – FRF da estrutura primária sem e com acréscimo de massa

Sabendo-se que:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \\ \omega_1^+ &= \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + m}}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Tem-se que:

$$\begin{cases} \omega_1^2 \cdot m_1 - k_1 = 0 \\ (\omega_1^+)^2 \cdot (m_1 + m) - k_1 = 0 \end{cases}\tag{4.2}$$

Resolvendo o sistema de equações (4.2), obtém-se os valores da massa ( $m_1 = 4,666 \text{ kg}$ ) e rigidez ( $k_1 = 38336,78 \text{ N/m}$ ) da estrutura primária.

Utilizando o mesmo planejamento apresentado na seção 2.4, reapresentado a seguir (ver Tabela 4.6), foram realizados os ensaios experimentais para o caso do sistema de 1 g.d.l. e ADVCV.

Tabela 4.6 – Planejamento fatorial  $2^3$  para os ensaios do ADVCV

Nº do Ensaio	Massa [kg]	Posição da Massa [mm]	Tração [N]	Nº do Ensaio	Massa [kg]	Posição da Massa [mm]	Tração [N]
1	0,176	0,0261	10,281	5	0,176	0,0261	25,133
2	0,250	0,0261	10,281	6	0,250	0,0261	25,133
3	0,176	0,131	10,281	7	0,176	0,131	25,133
4	0,250	0,131	10,281	8	0,250	0,131	25,133

A Figura 4.22 apresenta os resultados obtidos nos ensaios experimentais.

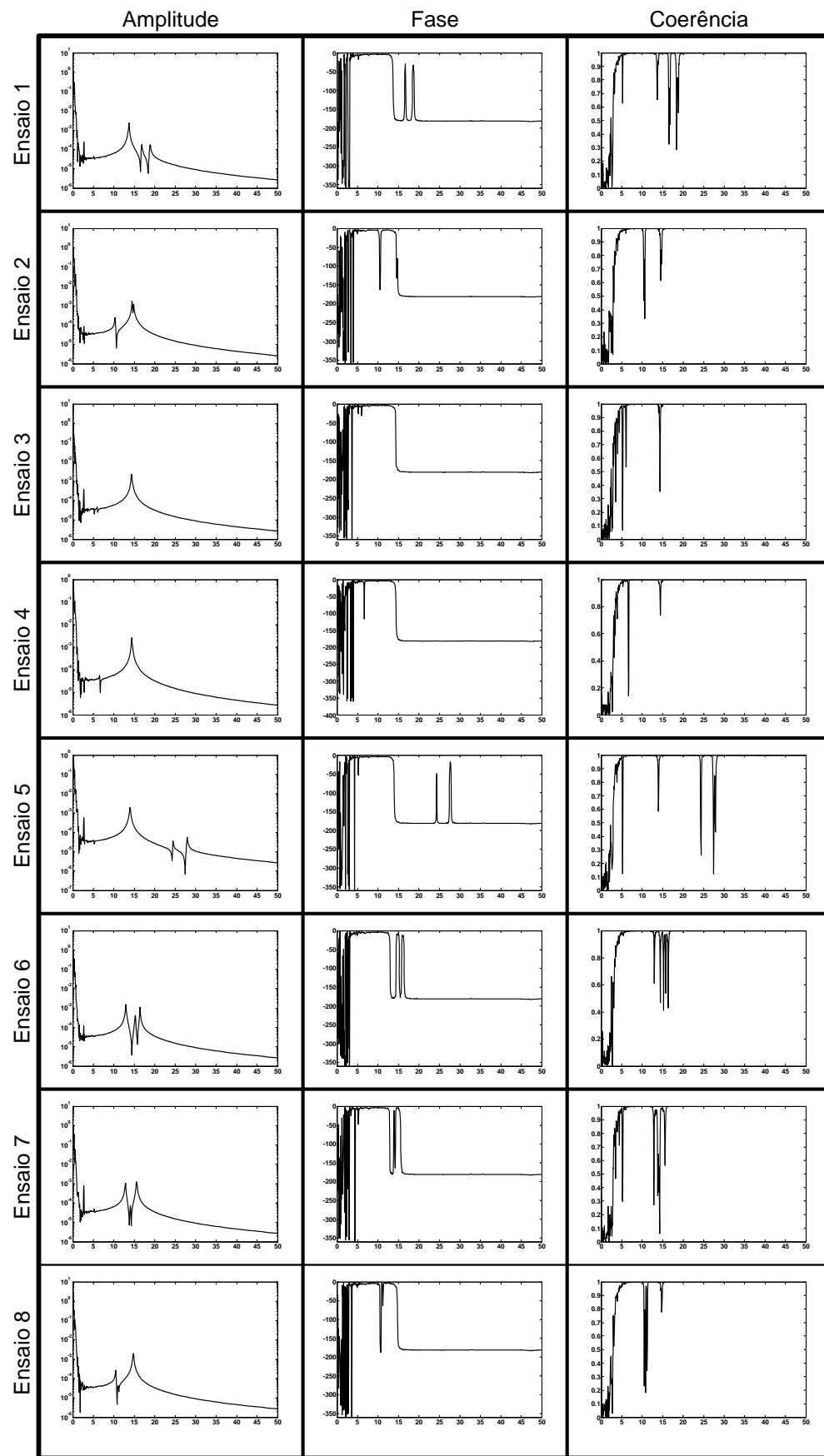


Figura 4.22 – Resultados dos ensaios experimentais da estrutura primária + ADVCV

Nota-se a presença de um grau de liberdade a mais no sistema ao observar as curvas da Figura 4.22 (aparecimento de uma segunda freqüência de anti-resonância e de um terceiro pico de ressonância). Isto se deve ao acoplamento do primeiro modo de vibrar do ADVCV na direção vertical com o primeiro modo na direção horizontal, uma vez que suas freqüências são idênticas, decorrentes da influência associada à torção do cabo de aço.

Caso seja imposta uma excitação harmônica no sistema primário com freqüência igual à freqüência de ressonância, nota-se que o ADVCV descreve um movimento tridimensional do tipo circular em torno da sua posição de equilíbrio, resultando uma forma semelhante a um elipsóide de revolução (Figura 4.23). Desta forma, o ADVCV não consegue cumprir a função de atenuar a amplitude do movimento da estrutura primária. Este fato foi o motivo pelo qual se adotou a lâmina ao invés do cabo de aço. Como a lâmina apresenta momentos de inércia diferentes segundo as direções ortogonais ao comprimento, pode-se facilmente obter uma direção preferencial de vibração.



Figura 4.23 – Movimento circular do cabo em torno da sua posição de equilíbrio

Na Tabela 4.7 são apresentadas as configurações para os ensaios com o sistema primário + ADVCV.

Tabela 4.7 – Planejamento experimental

Nº do Ensaio	Espessura da Massa [m]	Posição da Massa [m]	Tração [N]	Nº do Ensaio	Espessura da Massa [m]	Posição da Massa [m]	Tração [N]
1	0,019	0,030	0,000	5	0,019	0,030	68,847
2	0,031	0,030	0,000	6	0,031	0,030	68,847
3	0,019	0,131	0,000	7	0,019	0,131	68,847
4	0,031	0,131	0,000	8	0,031	0,131	68,847

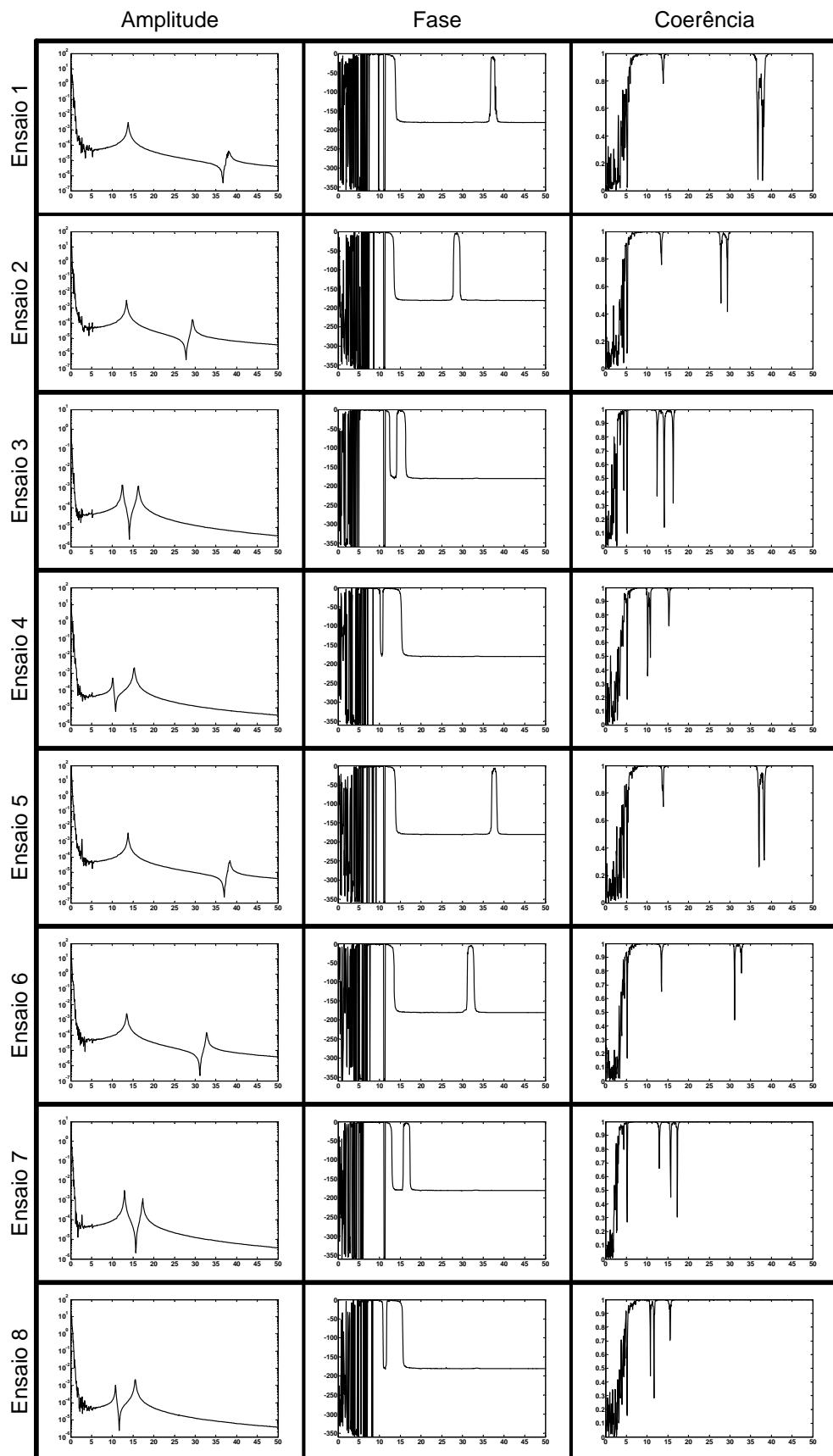


Figura 4.24 – Resultados dos ensaios experimentais da estrutura primária + ADVLV

Observando os resultados obtidos, nota-se que as configurações 3, 7 e 8 são próximas à configuração ideal esperada de um absorvedor dinâmico de vibrações, sendo a configuração 3 aquela que mais próxima do ideal. Na Figura 4.25 são traçados simultaneamente os resultados dos ensaios 3, 7 e 8. Observa-se que, nas configurações 7 e 8, a freqüência natural do ADVLV está acima e abaixo da freqüência natural da estrutura primária, respectivamente.

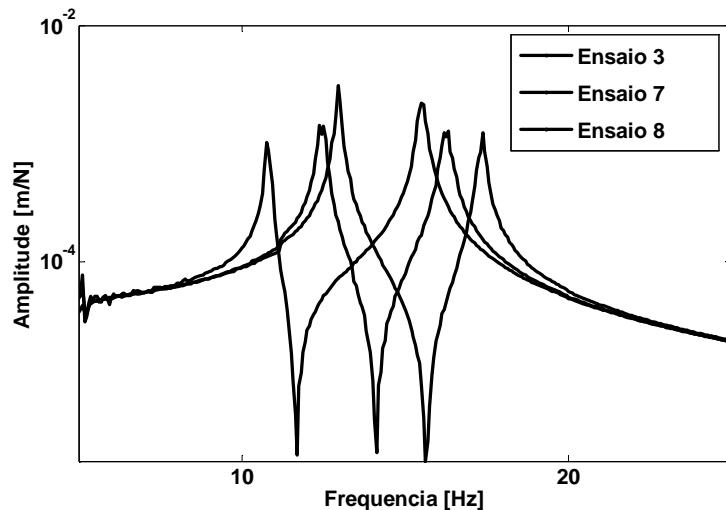


Figura 4.25 – Comparaçāo entre os ensaios 3, 7 e 8



# Capítulo 5

## Comparação de resultados

Neste capítulo serão realizadas as comparações entre os resultados obtidos pelos modelos analíticos, modelos de elementos finitos e pelos resultados obtidos experimentalmente. Também, serão apresentadas as possíveis causas para as diferenças encontradas entre os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos e pelos obtidos experimentalmente.

### 5.1 Resultados obtidos para o Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Corda Vibrante - ADVCV

#### 5.1.1 Considerando o ADVCV isoladamente

Primeiramente serão comparadas as três primeiras freqüências naturais obtidas usando as seguintes estratégias: modelo analítico contínuo equacionado no capítulo 2, modelo analítico discreto desenvolvido por Marques (2000), modelo de elementos finitos apresentado no capítulo 3 e ensaio experimental (capítulo 4), sendo que, para este último, apenas a primeira freqüência natural pode ser obtida (valor da freqüência na anti-ressonância). A Tabela 5.1 apresenta os valores obtidos para a primeira freqüência natural.

Tabela 5.1 – Comparação da primeira freqüência natural obtida [Hz]

Configuração	Modelos					
	Analíticos		Elementos Finitos	Ensaios Experimentais		
	Contínuo	Discreto				
1	7,94	8,4077	8,5316	16,50	18,44	
2	6,66	7,0550	7,1588	10,63	14,63	
3	4,76	4,8434	4,8774	5,188	6,063	
4	4,00	4,0641	4,0926	6,688		
5	12,41	13,1456	13,339	24,19	27,44	
6	10,41	11,0306	11,193	14,38	15,69	
7	7,44	7,5727	7,6259	13,75	14,25	
8	6,25	6,3543	6,3989	10,81	11,25	

Nota-se que a freqüência natural obtida pelo modelo analítico discreto e pelo método dos elementos finitos estão bem próximas, aspecto também observado com relação a segunda e terceira freqüências naturais (Tabela 5.2 e Tabela 5.3). Já o modelo analítico baseado em sistemas contínuos apresenta valores da primeira freqüência natural próximos aos obtidos pelo modelo analítico discreto e pelo modelo de elementos finitos. Entretanto, para as outras duas freqüências estudadas, tem-se um erro significativo que se deve, como dito anteriormente, a imprecisões numéricas e inadequação do modelo. O modelo experimental apresentou duas freqüências não previstas pelos modelos analíticos, devido ao acoplamento entre as freqüências de movimento horizontal e vertical. Nota-se, também, um aumento da freqüência natural do sistema massa-corda vibrante devido a um aumento da rigidez equivalente. Este aumento se deve à diminuição do comprimento útil da corda, proveniente do fato da massa concentrada apresentar uma dimensão que não é desprezível quando comparada ao comprimento total da corda. Não foram obtidos valores para a segunda e terceira freqüências naturais, uma vez que os ensaios foram realizados para uma freqüência máxima de 50 Hz.

Tabela 5.2 – Comparação envolvendo a segunda freqüência natural [Hz]

	Modelos		
	Analíticos		Elementos Finitos
Configuração	Contínuo	Discreto	
1	241,33	244,0850	246,25
2	241,32	244,0756	246,24
3	1081,71	434,1580	444,78
4	-15576,65	434,1578	444,78
5	377,32	381,6326	385,02
6	377,31	381,6180	385,01
7	-11500,72	678,8163	695,42
8	-11500,72	678,8161	695,42

Tabela 5.3 – Comparação envolvendo a terceira freqüência natural [Hz]

Configuração	Modelos		Elementos Finitos
	Analíticos	Discreto	
1	482,62	488,1013	492,39
2	482,61	488,0968	492,39
3	28557,18	449,8370	455,78
4	11682,48	449,8220	455,77
5	754,58	763,1580	769,87
6	754,58	763,1509	769,86
7	-5412,11	703,3309	712,62
8	-5412,10	703,3073	712,60

### 5.1.2 Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Corda Vibrante - ADVCV acoplado ao sistema de um grau de liberdade

A Figura 5.1 apresenta as FRFs obtidas para cada modelo, apresentadas em um único gráfico, para cada uma das oito configurações apresentadas anteriormente. Observa-se que, para os modelos analíticos e para o modelo de elementos finitos, têm-se as curvas praticamente sobrepostas, o que não acontece com a curva resultante do ensaio experimental, que apresenta três ressonâncias e duas anti-ressonâncias.

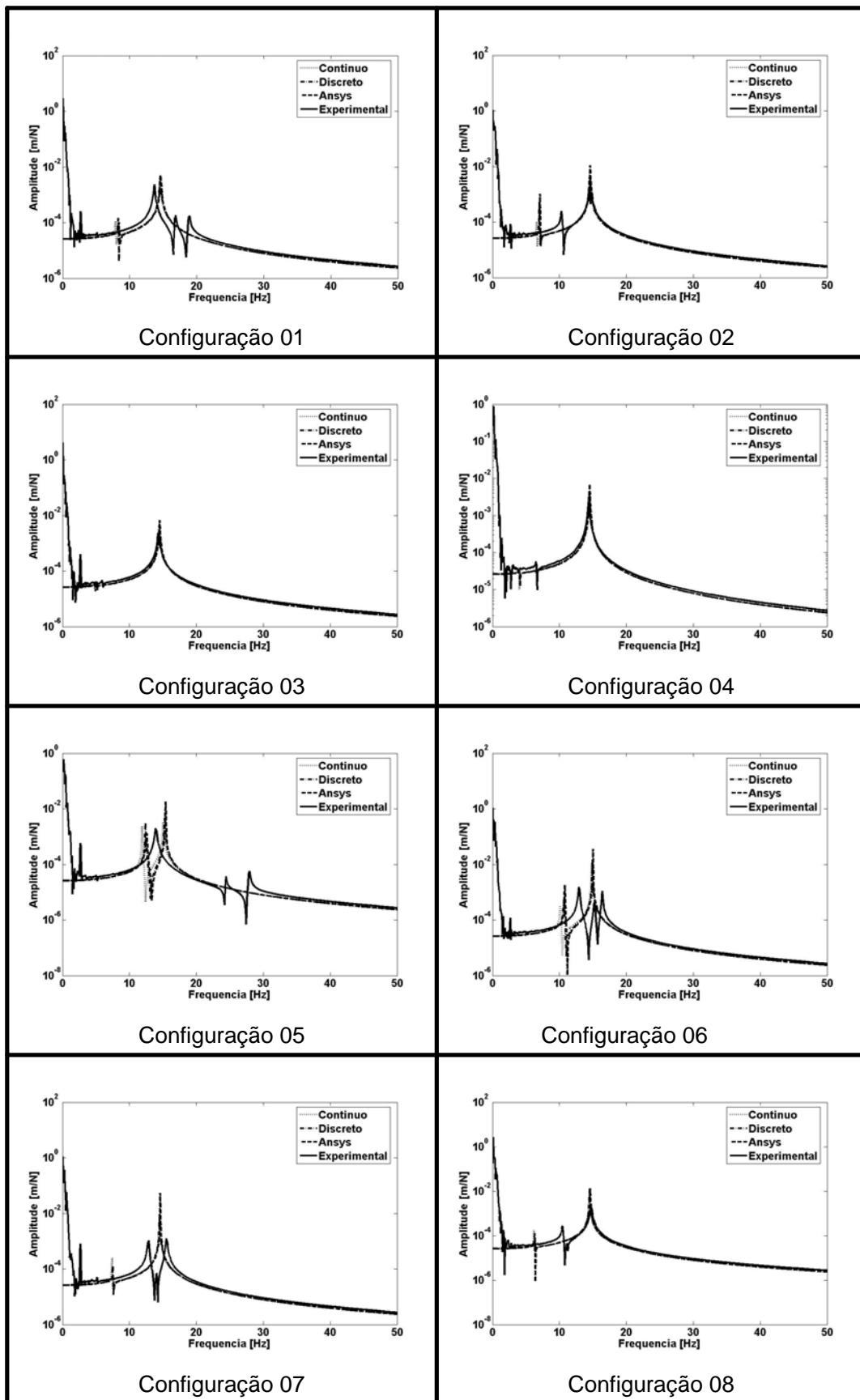


Figura 5.1 – Comparação das FRFs obtidas

## 5.2 Resultados obtidos para o Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante - ADVLV

### 5.2.1 Lâmina vibrante sem massa, considerada isoladamente

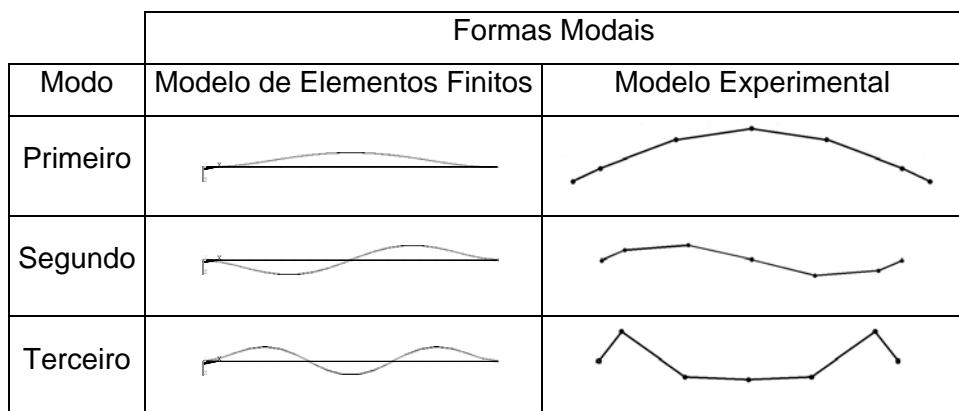
A tabela 5.4 apresenta as três primeiras freqüências de vibração da lâmina sem a massa. Nota-se que as freqüências obtidas experimentalmente são menores do que as obtidas a partir do modelo de elementos finitos. Esta diferença se deve à condição de contorno (engastamento) imposta no modelo de elementos finitos, condição esta que não é garantida no modelo experimental. Os suportes do modelo experimental não asseguram engastamento perfeito, aproximando-se mais de uma condição de rigidez torcional.

Tabela 5.4 – Comparaçāo entre as três primeiras freqüências naturais da lâmina vibrante sem massa

	Freqüência natural (Hz)		
Modelo	Primeira	Segunda	Terceira
Elementos Finitos	74,909	181,248	332,342
Experimental	72	177,5	309,5

A Tabela 5.5 apresenta as formas modais obtidas pelo modelo de elementos finitos e experimentalmente. Note que, para cada modo, as formas obtidas experimentalmente se aproximam satisfatoriamente daquelas que foram obtidas a partir do modelo de elementos finitos, o que significa que o modelo de elementos finitos elaborado pode ser considerado adequado.

Tabela 5.5 – Comparaçāo entre as formas modais obtidas para a lâmina vibrante sem massa



### 5.2.2 Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante – ADVLV, isoladamente

A Tabela 5.6 e a Tabela 5.7 apresentam a comparação entre as três primeiras freqüências naturais de flexão da lâmina vibrante para o caso em que a massa se encontra nas posições dadas por  $x = 0,0475\text{ m}$  e  $x = 0,1025\text{ m}$ , respectivamente. Nota-se, assim como no caso da lâmina vibrante sem massa considerada isoladamente, que as freqüências obtidas experimentalmente apresentam valores de freqüência menores do que os obtidos através do modelo de elementos finitos, provavelmente pelos mesmos motivos apresentados na seção 5.1.1.

Tabela 5.6 – Comparação entre as três primeiras freqüências naturais de flexão da lâmina vibrante com a massa na posição  $x = 0,0475\text{ m}$

Freqüência natural (Hz)			
Modelo	Primeira	Segunda	Terceira
Elementos Finitos	32,722	116,613	250,222
Experimental	26	99	161,5

Tabela 5.7 – Comparação entre as três primeiras freqüências naturais de flexão da lâmina vibrante com a massa na posição  $x = 0,1025\text{ m}$

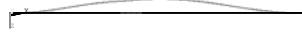
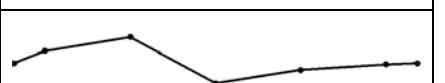
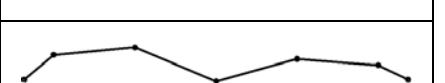
Freqüência natural (Hz)			
Modelo	Primeira	Segunda	Terceira
Elementos Finitos	19,496	124,96	236,935
Experimental	16,5	99	196

A Tabela 5.8 e a Tabela 5.9 apresentam as formas modais obtidas para os dois casos acima. Note que para cada caso, as formas modais obtidas experimentalmente se aproximam das obtidas a partir do modelo de elementos finitos, comprovando assim a boa adequação do modelo de elementos finitos elaborado.

Tabela 5.8 – Comparação entre as formas modais obtidas para a lâmina vibrante com a massa na posição  $x = 0,0475\text{ m}$

Modo	Formas Modais	
	Modelo de Elementos Finitos	Modelo Experimental
Primeiro		
Segundo		
Terceiro		

Tabela 5.9 – Comparação entre as formas modais obtidas para a lâmina vibrante com a massa na posição  $x = 0,1025\text{ m}$

Modo	Formas Modais	
	Modelo de Elementos Finitos	Modelo Experimental
Primeiro		
Segundo		
Terceiro		

### 5.2.3 Absorvedor Dinâmico de Vibração tipo Lâmina Vibrante - ADVLV acoplado à estrutura de um grau de liberdade

A Figura 5.1 apresenta as FRFs obtidas para cada modelo, sendo apresentadas em um único gráfico, para cada uma das oito configurações apresentadas anteriormente. Observa-se que para as configurações 2, 5, 6, 7 e 8 a freqüência de anti-ressonância obtida experimentalmente é menor do que as obtidas por ambos os modelos de elementos finitos. Conforme comentado anteriormente, isto se deve ao fato do apoio não representar um engasgamento perfeito. Note que para os casos 2, 5 e 6 o afastamento das anti-ressonâncias que aparecem no espectro de freqüência é maior do que nos casos 7 e 8, o que pode ser explicado pela distância entre o suporte e a massa verificada entre os dois grupos de ensaios.

Como a massa, nestes casos, está mais próxima do suporte, a força exercida pela massa sobre o suporte é maior do que quando a massa esta no centro, fazendo com que, desta forma, a rotação da lâmina seja maior. Nos casos 3 e 4, apesar da massa estar no centro e ser menor do que a massa utilizada nos casos 7 e 8, a força desta não é suficientemente grande para provocar uma rotação significativa na lâmina, uma vez que, devido à pequena amplitude e aleatoriedade da força de excitação (ruído branco), a força provocada pela massa é relativamente pequena. Para o caso 1 a freqüência obtida foi maior, provavelmente devido a uma melhor fixação (aperto) da lâmina em seu suporte, promovendo, assim, uma maior rigidez torcional, aproximando-se mais da condição de engastamento.

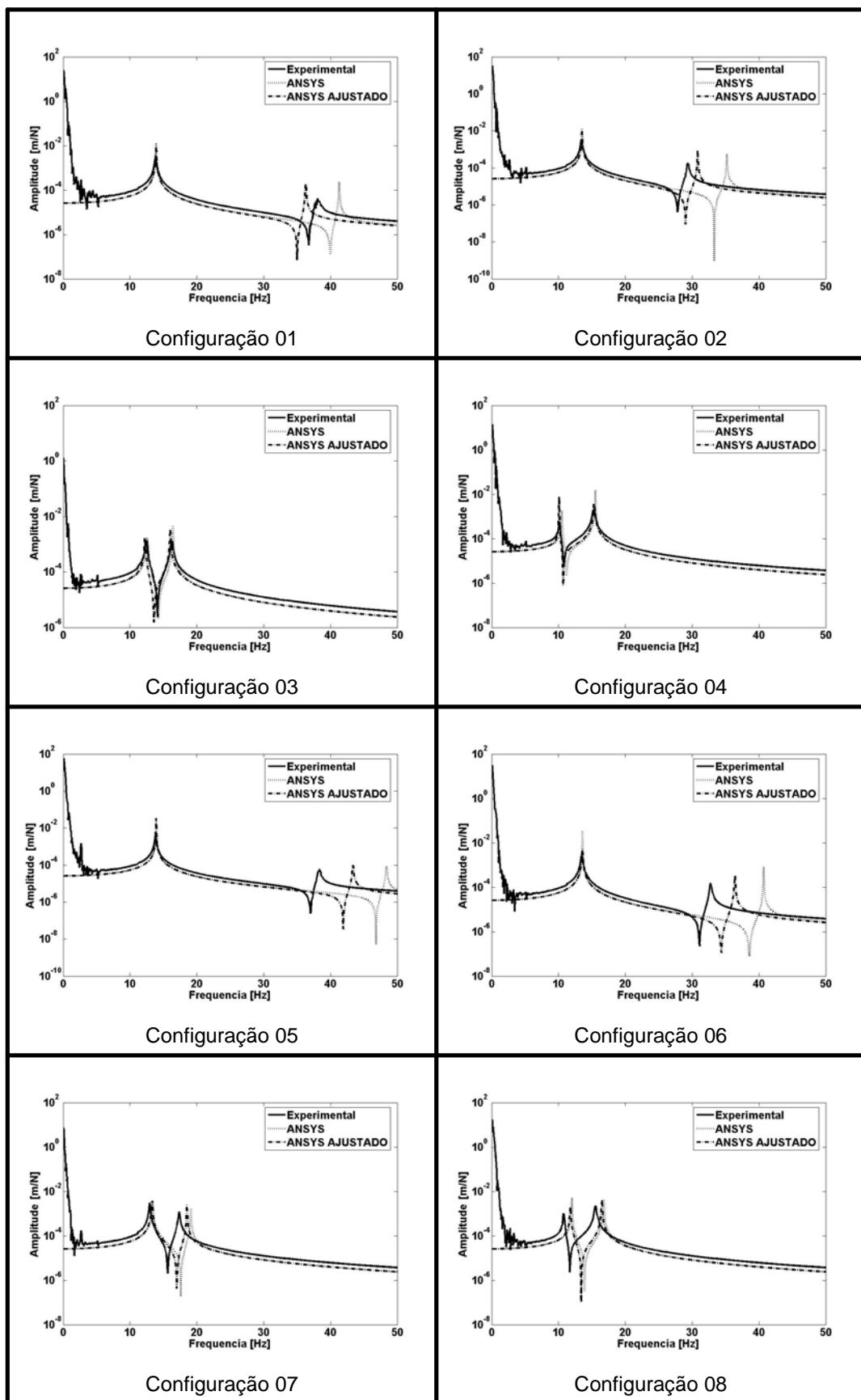


Figura 5.2 – Comparaçao entre as várias FRFs obtidas



# **Capítulo 6**

## **Conclusões e trabalhos futuros**

A motivação inicial deste trabalho foi a de abordar o problema de projetar um absorvedor dinâmico de vibrações do tipo corda vibrante. Com esta finalidade, foram elaborados dois tipos de modelos numéricos (analítico e de elementos finitos), além de um modelo experimental, para avaliação do comportamento dinâmico deste tipo de absorvedor dinâmico de vibração, permitindo assim obter uma metodologia que facilite seu projeto.

No Capítulo 2 foi apresentada a formulação clássica de um absorvedor dinâmico de vibração constituído por um sistema massa-mola acoplado a um sistema vibratório de um grau de liberdade. Também foi apresentada a formulação analítica para o ADV tipo corda vibrante (ADVCV). Devido às considerações iniciais para o desenvolvimento da formulação e a imprecisões numéricas, o modelo analítico obtido não se adequou às oito configurações avaliadas, principalmente para a segunda e terceira freqüência natural, cujos valores obtidos são superestimados. Para a primeira freqüência natural os valores obtidos foram inferiores aos obtidos pelo modelo analítico discreto e pelo modelo de elementos finitos, como observado no Capítulo 5. Verificou-se que dentre as oito configurações avaliadas, uma delas apresentou resposta satisfatória no que se diz respeito à atenuação da amplitude de vibração do sistema primário, quando este é excitado por uma força externa de freqüência igual à freqüência natural do sistema primário, ou seja, o absorvedor foi sintonizado para esta situação.

No Capítulo 3 foram apresentados os modelos em elementos finitos do ADV tipo corda vibrante e do ADV tipo lâmina vibrante (ADVLV). Durante a confecção do modelo de elementos finitos do ADV acoplado à estrutura de um grau de liberdade, foi necessário construir e simular os modelos em duas etapas. A primeira consistiu em modelar a estrutura de um grau de liberdade e o ADV sem o acoplamento destes dois sistemas. Para isso, foi aplicada uma tração inicial no ADV, obtendo então as tensões iniciais na corda ou na lâmina, conforme o caso. Em seguida foi modelado o acoplamento do ADV à estrutura de um g.d.l. e feitas as simulações envolvendo análise modal, aí incluída a resposta a excitação harmônica. Sem a execução deste procedimento, seriam obtidas respostas que não correspondem à natureza física do problema. Para o modelo do ADVCV, foi obtida uma configuração satisfatória dentre as oito configurações avaliadas. No caso do ADVLV, primeiramente, foi considerado um engaste perfeito da fixação da lâmina no suporte. Entretanto esta condição não condiz com a realidade

física do sistema, portanto um novo modelo foi elaborado. Em ambos os casos duas configurações satisfatórias foram obtidas.

Ao serem realizados os ensaios experimentais, Capítulo 4, notou-se o aparecimento de duas freqüências de anti-ressonância devido ao acoplamento do primeiro modo de vibrar nas direções horizontal e vertical da corda vibrante com a massa concentrada. Outro fenômeno observado foi o movimento tridimensional da corda vibrante em torno da sua posição de equilíbrio, resultando uma forma semelhante a um elipsóide de revolução quando uma excitação harmônica com freqüência igual à freqüência de ressonância do sistema primário é aplicada sobre este, ou seja, sobre a mesa vibratória de um grau de liberdade. Desta forma, o ADVCV não consegue cumprir a sua função de atenuar a amplitude de movimento da estrutura primária, sendo, portanto, completamente ineficiente neste caso. Esta foi a razão que motivou a construção de um novo tipo de absorvedor dinâmico de vibração, ou seja, o ADV tipo lâmina vibrante, que utiliza uma lâmina em substituição à corda, uma vez que esta exibe naturalmente uma direção preferencial de vibração de flexão, superando o problema verificado no caso da corda vibrante. Nos ensaios do ADVLV foram verificadas três configurações satisfatórias que comprovam o potencial de utilização deste tipo de dispositivo para atenuar vibrações em sistemas reais.

No Capítulo 5 foram realizadas as comparações entre os modelos, tendo sido mostrado que as freqüências obtidas para a primeira freqüência natural do ADVCV do modelo analítico contínuo resultaram inferiores às do modelo analítico discreto e do modelo de elementos finitos, devido às considerações iniciais para o desenvolvimento da formulação analítica e a imprecisões numéricas. Observou-se também, um aumento da freqüência natural do sistema massa-corda devido a um aumento da rigidez equivalente. Este aumento se deve à diminuição do comprimento útil da corda, proveniente do fato da massa concentrada apresentar um comprimento que não é desprezível quando comparado ao comprimento total da corda. No caso do ADVLV verificou-se que as freqüências naturais do ADV em questão, obtidas experimentalmente, são inferiores às obtidas através dos modelos de elementos finitos uma vez que o suporte não representa um engasgamento perfeito, aspecto este amplamente verificado em várias situações reais de engenharia. Nos casos onde a massa se encontra mais próxima do suporte, a força exercida por esta sobre o suporte é maior do que quando a massa está no centro, fazendo com que, desta forma, a rotação da lâmina seja maior, provocando uma diminuição na freqüência natural do ADV.

O ADVLV, proposto neste trabalho, apresentou comportamento dinâmico satisfatório, apresentando duas configurações sintonizadas dentre os oito casos estudados, além de uma grande faixa de freqüências na qual o ADV pode ser sintonizado. Cabe salientar que o dispositivo proposto é de fácil construção e adaptação, tanto a sistemas mecânicos, como a

estruturas de construção civil. Este último aspecto pode justificar um estudo mais elaborado, dedicado exclusivamente a este tópico.

Este trabalho permitiu ao autor adquirir uma maior familiaridade tanto com a manipulação de modelos analíticos, como com a elaboração de modelos de elementos finitos, a partir de um programa computacional de ampla utilização nos meios acadêmicos e tecnológicos. Além destes tipos de modelos, ambos bastante utilizados na área de engenharia mecânica, o autor utilizou técnicas de planejamento fatorial, emprestadas da estatística, estas capazes de permitir um estudo sistemático de várias configurações do sistema. As dificuldades e limitações destes modelos foram objeto de estudo. Outro aspecto importante foi a realização de um elenco de ensaios experimentais em laboratório, desenvolvendo assim técnicas de análise modal experimental, estas com grande aplicação no estudo de sistemas dinâmicos. Ressalta-se aqui que, além das técnicas mais comuns, foi também utilizado um vibrômetro laser, equipamento mais sofisticado que requer cuidados adicionais (alinhamento, calibração, ajuste de parâmetros do filtro interno), mas, no caso em tela, mostrou-se bastante interessante devido às próprias características dos absorvedores dinâmicos de vibração. Isto porque, nos ensaios comuns, o acréscimo de sensores (acelerômetros ou outros), acrescenta-se massa à estrutura, influenciando as respostas dinâmicas obtidas. Ora, o vibrômetro laser, por utilizar um método ótico de medição, não interfere nos parâmetros do sistema.

Como proposta de continuidade do estudo apresentado neste trabalho, o projeto de atuadores que alteram a posição da massa e a intensidade da tração na lâmina através de um sistema de controle, transforma o ADVLV passivo descrito neste trabalho em um ADV adaptativo. Evidentemente, os ADVs adaptativos são mais robustos no que diz respeito a sua faixa de utilização no domínio da freqüência. No caso do uso de lâminas vibrantes, havendo interesse em acrescentar amortecimento ao sistema, a inclusão de uma camada de material viscoelástico solidário à lâmina coberta por outra lâmina flexível (estrutura “sanduíche”), representa uma alternativa tecnológica importante. Neste caso, é ainda possível adicionar atuadores piezelétricos capazes de modificar a rigidez do absorvedor, a partir de um sistema de controle (camada restrita ativa). Finalmente, cabem estudos adicionais no sentido de se encapsular a corda vibrante (restringindo seu movimento a um plano pré-estabelecido), impedindo que esta execute movimentos espaciais, viabilizando assim sua utilização como componente do absorvedor dinâmico de vibração.



# Anexo I

## Equacionamento Analítico

Neste anexo são detalhados os procedimentos que levam à obtenção das equações de movimento apresentadas no Capítulo 2, permitindo uma maior compreensão da formulação dos modelos matemáticos. Maiores detalhes podem ser encontrados em Teodoro, 1994.

### I.1 Equacionamento de uma corda vibrante tracionada

Vamos considerar uma corda bi-engastada, conforme ilustra a figura abaixo.

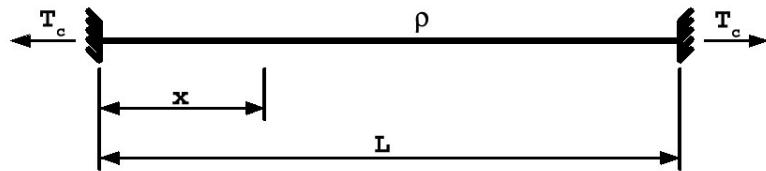


Figura I.1 – Corda sob tração

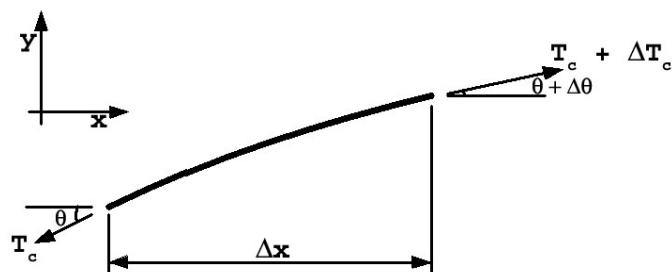


Figura I.2 – Elemento diferencial da corda

Tem-se que:

$$T_c = T(x) \quad (\text{I.1})$$

$$\theta = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \quad (\text{I.2})$$

$$\Delta T_c = \frac{\partial T(x)}{\partial x} \cdot dx \quad (\text{I.3})$$

$$\Delta \theta = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \cdot dx \quad (\text{I.4})$$

Aplicando a segunda lei de Newton no elemento infinitesimal da corda e assumindo que o deslocamento  $y(x, t)$  é suficientemente pequeno de forma que o seno e a tangente do ângulo formado com a horizontal possam ser aproximados pela declividade do deslocamento da corda, tem-se:

$$\left[ T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \cdot dx \right] \cdot \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \cdot dx \right] - T(x) \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \rho(x) \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.5})$$

Realizando o produto dos termos entre colchetes da equação (I.5) resulta:

$$\begin{aligned} & T(x) \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + T(x) \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \cdot dx + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \cdot dx \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \\ & + \frac{\partial T(x)}{\partial x} \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \cdot dx - T(x) \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \rho(x) \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

ignorando os termos de segunda ordem em  $dx$  e dividindo a expressão por  $dx$ , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right] = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.7})$$

A solução da equação diferencial (I.7) pode ser escrita na forma de um produto de duas funções, sendo uma do espaço e, a outra, do tempo. Assim, utilizando o método da separação de variáveis:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot Q(t) \quad (\text{I.8})$$

Substituindo a Eq. (I.8) em (I.7):

$$\frac{d}{dx} \left[ T(x) \cdot \frac{dY(x)}{dx} \right] \cdot Q(t) = \rho(x) \cdot Y(x) \cdot \frac{d^2Q(t)}{dt^2} \quad (\text{I.9})$$

Dividindo a expressão (I.9) por  $\rho(x) \cdot Y(x) \cdot F(t)$ :

$$\frac{1}{\rho(x) \cdot Y(x)} \cdot \frac{d}{dx} \left[ T(x) \cdot \frac{dY(x)}{dx} \right] = \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{d^2Q(t)}{dt^2} \quad (\text{I.10})$$

Considerando a tensão e a densidade do cabo como sendo constantes, ou seja,  $T(x) = T = cte$  e  $\rho(x) = \rho = cte$ , a equação pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\frac{T}{\rho \cdot Y(x)} \cdot \frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{d^2Q(t)}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (\text{I.11})$$

Introduzindo a seguinte notação:

$$Y''(x) = \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \quad (\text{I.12})$$

$$\ddot{Q}(t) = \frac{d^2Q(t)}{dt^2} \quad (\text{I.13})$$

e substituindo agora (I.12) e (I.13) em (I.11), tem-se:

$$\frac{T}{\rho} \cdot \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \frac{\ddot{Q}(t)}{Q(t)} = -\lambda^2 = \text{constante} \quad (\text{I.14})$$

A equação acima contém duas equações diferenciais, uma envolvendo o tempo e, a outra, envolvendo o espaço:

$$\ddot{Q}(t) + \lambda^2 \cdot Q(t) = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$Y''(x) + \left( \frac{\lambda^2}{a} \right) \cdot Y(x) = 0 \quad (\text{I.16})$$

onde:

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\text{I.17})$$

A equação (I.16) apresenta a seguinte solução:

$$Y(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \quad (\text{I.18})$$

Aplicando as condições de contorno tem-se:

$$\begin{aligned} &\mapsto x = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \\ &A \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot 0\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot 0\right) = 0 \\ &B = 0 \\ &\mapsto x = L \Rightarrow Y(L) = 0 \\ &A \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) = 0 \\ &A \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Se  $A = 0$ , tem-se uma solução trivial, portanto:

$$\sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) = 0 \quad (\text{I.20})$$

A solução da equação (I.20) é caracterizada por:

$$\frac{\lambda}{a} \cdot L = n \cdot \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{I.21})$$

Na forma adimensional tem-se:

$$\sigma_n = \frac{\lambda_n}{a} \cdot L = n \cdot \pi \quad (\text{I.22})$$

As formas dos modos correspondentes a cada valor de  $n$  são dadas por:

$$Y_n(x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{\sigma_n \cdot x}{L}\right) \quad (\text{I.23})$$

## I.2 Equacionamento de uma corda vibrante com uma massa concentrada entre as extremidades tracionadas

Vamos considerar agora a existência de uma massa pontual na posição  $0 < x = d < L$  e que a corda seja bi-engastada, conforme ilustra a figura abaixo.

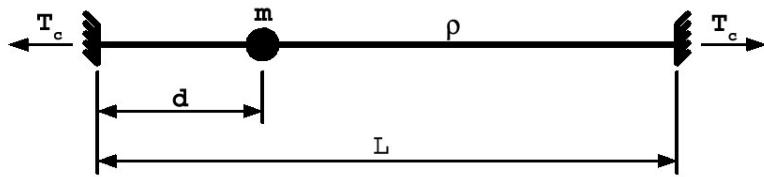


Figura I.3 – Corda bi-engastada com uma massa concentrada na posição  $x$

Neste caso o cabo é considerado continuo em  $x = d$ , entretanto, o valor da tangente pode ser diferente em cada um dos lados da massa. A condição de continuidade requer que:

$$y(x, t)|_{x=d-\varepsilon} = y(x, t)|_{x=d+\varepsilon} \quad (\text{I.24})$$

O equilíbrio das forças na posição da massa é dado por:

$$T \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=d+\varepsilon} - T \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=d-\varepsilon} = m \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=d} \quad (\text{I.25})$$

e a condição de continuidade leva a:

$$Y(d - \varepsilon) = Y(d + \varepsilon) \quad (\text{I.26})$$

O caso em estudo nos leva a dois problemas de autovalores, sendo um para o lado esquerdo da massa e, outro, para o lado direito da massa. Entretanto, estes dois problemas têm que ser resolvidos simultaneamente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y_E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \cdot Y_E(x) &= 0 & 0 < x < d \\ \frac{d^2Y_D(x)}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \cdot Y_D(x) &= 0 & d < x < L \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Note que as equações (I.27) são obtidas a partir da equação (I.16), tendo portanto a seguinte solução:

$$\begin{aligned} Y_E(x) &= A_E \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) + B_E \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) & 0 < x < d \\ Y_D(x) &= A_D \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) + B_D \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) & d < x < L \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Aplicando a condição de contorno para a posição  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \mapsto x = 0 \Rightarrow Y_E(0) &= 0 \\ A_E \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot 0\right) + B_E \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot 0\right) &= 0 \Rightarrow B_E = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

Aplicando a condição de contorno para a posição  $x = L$

$$\begin{aligned} \mapsto x = L \Rightarrow Y_D(L) &= 0 \\ A_D \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) + B_D \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) &= 0 \Rightarrow B_D = -A_D \cdot \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

Substituindo o valor obtido em (I.29) na primeira equação de (I.28), obtém-se a seguinte equação:

$$Y_E(x) = A_E \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \quad (\text{I.31})$$

Substituindo o valor obtido em (I.30) na segunda equação de (I.28), obtém-se a seguinte equação:

$$Y_D(x) = A_D \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) - A_D \cdot \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \quad (\text{I.32})$$

Sabendo que:

$$\sin\left(\frac{\lambda \cdot L}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda \cdot x}{a}\right) = \sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L - x)\right] \quad (\text{I.33})$$

portanto:

$$Y_D(x) = -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L - x)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \quad (\text{I.34})$$

Aplicando a condição de continuidade em  $x = d$

$$\begin{aligned} \mapsto x = d \Rightarrow Y_E(d) &= Y_D(d) \\ A_E \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right) &= -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L - d)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \\ A_E &= -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L - d)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)} \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Substituindo (I.35) em (I.31) obtém-se:

$$Y_E(x) = -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \quad (\text{I.36})$$

Lembrando novamente que:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot Q(t) \quad (\text{I.37})$$

pode-se agora encontrar as derivadas parciais que aparecem na equação (I.25):

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=d-\varepsilon} = \frac{\partial [Y_E(x) \cdot Q(t)]}{\partial x} = -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)} \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot Q(t) \quad (\text{I.38})$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=d+\varepsilon} = \frac{\partial [Y_D(x) \cdot Q(t)]}{\partial x} = A_D \cdot \frac{\cos\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-x)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot Q(t) \quad (\text{I.39})$$

$$\left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=d} = \frac{\partial^2 [Y(x) \cdot Q(t)]}{\partial t^2} = -A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-x)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \cdot \ddot{Q}(t) \quad (\text{I.40})$$

Note que na equação (I.40) pode-se fazer  $Y(x) = Y_E(x)$  ou  $Y(x) = Y_D(x)$ , sendo que neste equacionamento foi utilizada a primeira relação, ou seja,  $Y(x) = Y_E(x)$ .

Substituindo as equações (I.38), (I.39) e (I.40) em (I.25), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& A_D \cdot \frac{\cos\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-x)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot Q(t) + A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)} \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot x\right) \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot Q(t) \\
& = -m \cdot A_D \cdot \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-x)\right]}{\cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right)} \cdot \ddot{Q}(t)
\end{aligned} \tag{I.41}$$

Da equação (I.15) tem-se que:

$$\ddot{Q}(t) = -\lambda^2 \cdot Q(t) \tag{I.42}$$

Substituindo (I.42) em (I.41), obtém-se após manipulação algébrica:

$$\begin{aligned}
& -m \cdot \lambda^2 \cdot Q(t) \cdot \sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] \\
& + T \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot Q(t) \cdot \left\{ \cos\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] + \frac{\sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{I.43}$$

Reorganizando a equação (I.43), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& -m \cdot \lambda^2 \cdot \sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] \\
& + T \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \left\{ \frac{\cos\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right) + \sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right)} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{I.44}$$

Sabendo que:

$$\cos\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right) + \sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L-d)\right] \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right) = \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) \tag{I.45}$$

tem-se:

$$m \cdot \lambda^2 \cdot \sin\left[\frac{\lambda}{a} \cdot (L - d)\right] \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot d\right) - T \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{a} \cdot L\right) = 0 \quad (\text{I.46})$$

## Anexo II

### Planejamento Fatorial

O planejamento experimental é uma ferramenta estatística que determina a melhor forma de amostrar o espaço de projeto fornecendo as informações necessárias para a obtenção de um modelo empírico. Em contrapartida, a amostragem aleatória pode resultar em modelos que não representam a realidade do espaço de projeto amostrado ou levam ao aumento do número de pontos amostrados na tentativa de melhorar a qualidade do modelo estatístico. (Leal, 2001).

O planejamento factorial a dois níveis ( $2^n$ ) é particularmente útil nos primeiros estágios do trabalho experimental, quando provavelmente se tem várias variáveis a serem consideradas. Este planejamento provê o menor número de combinações na qual a influência das  $n$  variáveis pode ser estudada em um arranjo factorial completo. Por terem apenas dois níveis (valor mínimo e valor máximo) para cada variável, deve-se assumir que a resposta é aproximadamente linear dentro da faixa de valores escolhidos para cada variável (espaço de projeto). (Montgomery, 1984)

Em geral, um planejamento factorial ( $2^n$ ) consiste de todas as  $2^n$  configurações possíveis com as variáveis

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$$

onde cada possível combinação de sinais  $\pm$  é selecionada para cada configuração. Geometricamente o planejamento consiste no vértice de um hiper-cubo de dimensão  $n$  (Figura II.1). Com o propósito de análise, é conveniente listar as configurações na *ordem padrão*. Isto é feito escrevendo – e + alternadamente na coluna da variável  $x_1$ , pares alternados -- e ++ na coluna  $x_2$ , quadras alternadas ---- e ++++ na coluna  $x_3$  e assim por diante (Box, 1987), conforme ilustra a Tabela II.1.

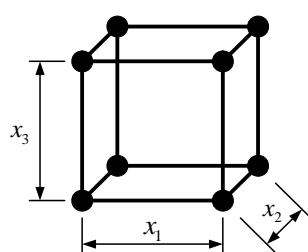


Figura II.1 – Hiper-cubo de dimensão 3

Tabela II.1 – Planejamento Fatorial  $2^3$  na ordem padrão

$x_1$	$x_2$	$x_3$
-1	-1	-1
+1	-1	-1
-1	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1
+1	-1	+1
-1	+1	+1
+1	+1	+1

Para codificar os valores das variáveis utiliza-se a seguinte expressão:

$$x_n = \frac{\xi_n - \bar{\xi}_n}{\frac{\Delta \xi_n}{2}} \quad (\text{II.1})$$

onde

$x_n$  → variável codificada

$\xi_n$  → valor da variável

$\bar{\xi}_n$  → valor médio da variável  $\left( \frac{\xi_{n\min} + \xi_{n\max}}{2} \right)$

$\Delta \xi_n$  → valor da diferença dos limites da variável  $(\xi_{n\max} - \xi_{n\min})$

$\xi_{n\min}$  e  $\xi_{n\max}$  → valor mínimo e máximo que a variável pode assumir

# Anexo III

## Tipos de Elementos Finitos Utilizados

Neste anexo são apresentados os tipos de elementos finitos que foram utilizados neste trabalho.

### III.1 Elemento tipo *Shell63*

O *Shell63* (Figura III.1) é um elemento do tipo plano que apresenta quatro nós, sendo seis graus de liberdade por nó (translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ; e rotações nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ). Ele aceita carregamento tanto no plano quanto na direção normal do plano formado pelo elemento. E pode ser utilizado com elementos de membrana e/ou elementos de flexão.

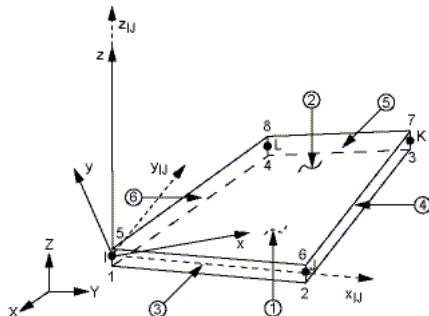


Figura III.1 – Elemento tipo *Shell63* (Fonte: Documentação do ANSYS®)

### III.2 Elemento tipo *Beam4*

O *Beam4* (Figura III.2) é um elemento do tipo uniaxial que apresenta dois nós, sendo seis graus de liberdade por nó. Ele tem a capacidade de trabalhar em tração, compressão, torção e flexão.

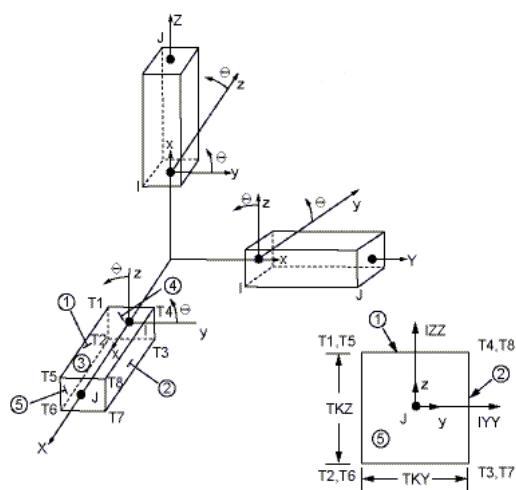


Figura III.2 – Elemento tipo *Beam4* (Fonte: Documentação do ANSYS®)

### III.3 Elemento tipo *Mass21*

O *Mass21* é um elemento do tipo ponto que apresenta seis graus de liberdade. Diferentes massas e inércias rotacionais podem ser associadas a cada direção.

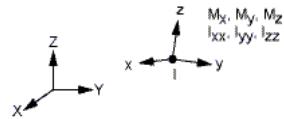


Figura III.3 – Elemento tipo *Mass21* (Fonte: Documentação do ANSYS®)

## Referências Bibliográficas

- Frahm, H., 1911, "Device for Damping Vibrations of Bodies", US Patent 989, 958.
- Den Hartog, J. P., 1956, "Mechanical Vibrations", 4<sup>th</sup> edition. McGraw-Hill, New York.
- Ren, M. Z., 2001, "A Variant Design of the Dynamic Vibration Absorber", Journal of Sound and Vibration, vol. 245, nº 4, pp. 762 – 770.
- Rade, D. A. and Steffen Jr., V., 2000, "Optimisation of Dynamic Vibration Absorbers Over a Frequency Band", Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 14, nº 5, pp. 679 – 690.
- Cunha Jr., S. S., 1999, "Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações", Dissertação de Mestrado, UFU, Uberlândia, M.G.
- Marques, R. F. A., 2000, "Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos", Dissertação de Mestrado, UFU, Uberlândia, M.G.
- Buhr, C., Franchek, M. A. and Bernhard, R. J., 1997, "Non-Collocated Adaptive-Passive Vibration Control", Journal of Sound and Vibration, vol. 206, nº 3, pp. 371 – 398.
- Nagaya, K., Kurusu, A., Ikai, S. and Shitani, Y., 1999, "Vibration Control of a Structure by Using a Tunable Absorber and an Optimal Vibration Absorber Under Auto-Tuning Control", Journal of Sound and Vibration, vol. 228, nº 4, pp. 773 – 792.
- Williams, K. A., Chiu, G. T. –C. and Bernhard, R. J., 2005, "Dynamic Modelling of a Shape Memory Alloy Adaptive Tuned Vibration Absorber", Journal of Sound and Vibration, vol. 280, pp. 211 – 234.
- Carneal, J. P., Charette, F. and Fuller, C. R., 2004, "Minimization of Sound Radiation from Plates Using Adaptive Tuned Vibration Absorbers", Journal of Sound and Vibration, vol. 270, pp. 781 – 792.
- Teodoro, E. B., 1994, "Dynamics of a Power Line When Supported by a Compliant Energy Absorber", Ph. D. Thesis, ISU.

Montgomery, Douglas C., 1984, "Design and Analysis of Experiments", 2<sup>nd</sup> edition. J. Wiley, New York.

Box, G. E. P., 1987, "Empirical Model-Building and Response Surfaces, J. Wiley, New York.

Leal, M. F., 2001, "Otimização do Comportamento Dinâmico de Veículos Usando Superfície de Resposta", Dissertação de Mestrado, UFU, Uberlândia, M.G.