

EDSON BORGES DE ÁVILA

**ESTUDO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO APLICADO À
MODELAGEM DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS COM
AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2010

EDSON BORGES DE ÁVILA

**ESTUDO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO APLICADO À MODELAGEM
DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS COM AMORTECIMENTO
VISCOELÁSTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

UBERLÂNDIA –MG

2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele, nada seria possível e não estaríamos aqui reunidos.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este trabalho.

Ao meu orientador, **Domingos Alves Rade**, pelo exemplo de pesquisador e por todo o auxílio neste trabalho.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

A minha família, Nicolina, Alandino, Alexsandra e Cárita, pelo esforço, dedicação e compreensão, em todos os momentos desta e de outras caminhadas.

Aos meus amigos Adailton Silva Borges e Albert Willian Faria, pela confiança e credibilidade em minha pessoa, durante o período de convivência na UFU e também pela continuidade das nossas amizades após o término dos nossos trabalhos, e, pelo mútuo aprendizado de vida, no campo profissional e particular.

Ao Eng. Thiago de Paula Sales, ex-bolsista de IC, pelas contribuições ao trabalho.

Aos amigos dos laboratórios LMEst pela amizade e discussões que muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Ávila, E. B., **ESTUDO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO APLICADO À MODELAGEM DE SISTEMAS VIBRATÓRIOS COM AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO**. 2010. 99 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

O Cálculo Fracionário é uma ferramenta matemática que vem sendo aplicada nos últimos anos a vários problemas da Ciência e da Engenharia, tais como Reologia, Transferência de Calor e Controle Ativo. Essencialmente, a derivação e a integração fracionárias resultam da extensão do conceito clássico de derivação e integração de ordens inteiras a ordens não inteiras e sua aplicação se justifica principalmente por algumas de suas propriedades que garantem uma modelagem mais precisa de certos fenômenos físicos. A presente dissertação aborda a utilização do Cálculo Fracionário para a modelagem do comportamento viscoelástico no âmbito da Dinâmica Estrutural. Primeiramente, é feita uma apresentação do conceito e principais propriedades da derivada e integração fracionárias, seguindo-se uma revisão de alguns dos métodos de resolução aproximada de sistemas de equações diferenciais de ordem fracionária. Em seguida, é feita uma revisão dos fundamentos da viscoelasticidade linear, incluindo os modelos reológicos clássicos e os modelos de ordem fracionária. Visando à simulação do comportamento dinâmico de sistemas estruturais dotados de amortecedores viscoelásticos no domínio do tempo, duas estratégias consideradas como sendo algumas das mais modernas são utilizadas para a incorporação de modelos viscoelásticos fracionários em modelos de elementos finitos. Simulações numéricas são realizadas visando à validação dos procedimentos de modelagem implementados.

Palavras chave: Cálculo Fracionário, Viscoelasticidade, Elementos Finitos, Amortecimento.

Ávila, E. B., **A Study of Fractional Calculus Applied to the Modeling of Vibratory Systems Containing Viscoelastic Damping**. 2010. 99 f M.Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

ABSTRACT

Fractional Calculus is a mathematical tool that has been applied to various problems of Science and Engineering, such Rheology, Heat Transfer and Active Control. Essentially, fraction integration and derivation can be regarded as extensions of the traditional concepts of integration and derivation of integer orders. Their application is justified mainly by the fact that their properties can provide more accurate modeling of certain physical phenomena. The present dissertation addresses the use of Fractional Calculus for the modeling of viscoelastic behavior in the realm of Structural Dynamics. First, it is presented the fundamental concepts and main properties of fraction integrators and derivatives, followed by the description of some methods intended for the resolution of systems of fractional differential equations. Then, a review of linear viscoelasticity is presented, including classical rheological models and fractional models. Aiming at simulating the dynamic behavior of structural systems containing viscoelastic dampers in the time domain, two strategies, considered as being some of the most modern ones, are used for the incorporation of fractional viscoelastic models into finite element models. Numerical simulations are performed aiming at the validation of the modeling procedures.

Keywords: Fractional Calculus, Viscoelasticity, Finite Elements, Damping.

LISTA DE SÍMBOLOS

ϕ	: Ângulo de fase
A_{j+1}	: Coeficientes de Grünwald
$\varepsilon(t)$: Deformação
$\bar{\varepsilon}(t)$: Deformação anelástica
$\dot{\sigma}(t)$: Derivada primeira da tensão em relação ao tempo
$\dot{\varepsilon}(t)$: Derivada primeira da deformação em relação ao tempo
$R_{\varepsilon}(\tau)$: Espectro de fluência
$R_{\sigma}(\tau)$: Espectro de relaxação
γ_r	: Fator de amortecimento
ω_r^2	: Frequência natural
$\Psi(x)$: Função complementar
$R_*(\tau)$: Função espectral
$\Psi(t)$: Função de fluência
$\Gamma(a)$: Função Gama
$\Phi(t)$: Função de relaxação
$J(t)$: Função de resposta da deformação
$G(t)$: Função de resposta da tensão
$[H(\omega)]$: Matriz das funções de forma
$[M]$: Matriz de massa
$[C]$: Matriz das propriedades elásticas do material
$[K^*]$: Matriz de rigidez modificada inicial
G	: Módulo de cisalhamento
K	: Módulo de rigidez
D^{ν}	: Operação de derivação de ordem ν
$D_n(s)$: Operador de derivação no domínio de Laplace

- $D^{-\nu}$: Operação de integração de ordem ν
 $D_n^{-1}(s)$: Operador de integração no domínio de Laplace
 α, β : Ordens arbitrárias
 $\{\sigma(t)\}$: Vetor de tensão
 $\{\varepsilon(t)\}$: Vetor de deformação
 $\{\tilde{u}(t)\}$: Vetor de deslocamentos nodais generalizados (deslocamentos e rotações)
 $\{r(t)\}$: Vetor de forças externas
 $\{q^{(e)}(t)\}$: Vetor dos graus de liberdade em nível elementar

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - HISTÓRICO E FUNDAMENTOS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO	5
2.1. Aspectos históricos do Cálculo Fracionário	5
2.2. Abordagem moderna do Cálculo Fracionário	11
2.2.1. Derivada e integração de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov	12
2.2.2. Derivada e integração de ordem arbitrária de Riemman-Liouville	18
2.3. A aplicação dos operadores de derivação e integração de ordem arbitrária a funções elementares	23
2.4. Avaliação numérica de derivadas e integrais de ordens arbitrárias	24
2.5. Técnicas Numéricas de Resolução Aproximada de Sistemas de Equações Diferenciais de Ordem Fracionária	26
2.5.1. Método Direto	28
2.5.2. Método Indireto.....	28
2.5.3. Aplicação 1: Método Direto.....	33
2.5.4. Aplicação 2: Método Indireto	33
CAPÍTULO III – APLICAÇÃO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO EM VISCOELASTICIDADE.....	35
3.1. Introdução	35
3.2. Fundamentos da Viscoelasticidade Linear	37
3.3. Modelos Mecânicos.....	40
3.4. Modelos Viscoelásticos Fracionários.....	44
3.5. Módulo Complexo do Modelo de Maxwell Fracionário.....	46
3.5.1. Restrições termodinâmicas.....	47
3.5.2. Análise do comportamento viscoelástico do modelo de Maxwell de derivadas fracionárias (MMDF).....	51
3.5.2.1. Análise da fluência.....	51
3.5.2.2. Análise da relaxação.....	53
3.6. Outras aplicações do cálculo fracionário em viscoelasticidade.....	56
3.7. Incorporação de modelos viscoelásticos fracionários em modelos de elementos finitos.....	62
3.7.1. Resolução numérica das equações do movimento.....	66

3.8. Abordagem alternativa para implementação de modelos viscoelásticos fracionários em associação com o método dos elementos finitos	68
---	----

CAPÍTULO IV – APLICAÇÕES NUMÉRICAS DOS MODELOS

VISCOELÁSTICOS FRACIONÁRIOS	73
4.1. Sistema Vibratório Viscoelástico de Um Grau de Liberdade	73
4.2. Modelagem de uma viga viscoelástica pelo método dos elementos finitos	76
4.3. Modelagem por elementos finitos de vigas multicamadas com camada viscoelástica em associação com o algoritmo proposto por Galucio, Deü e Ohayon (2004)	84

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS

93

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

95

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O Cálculo Fracionário é um campo da análise matemática que data de 300 anos e trata dos fundamentos teóricos e aplicações de integrais e derivadas de ordens arbitrárias, não necessariamente inteiras, como no Cálculo Diferencial e Integral tradicional, tendo atraído a atenção de diversos matemáticos famosos como P. S. Laplace, J. B. J. Fourier, N. H. Abel, J. Liouville, B. Riemann, H. Holmgren, A. K. Grunwald, A.V. Letnikov, H. Laurent, P. A. Nekrassov, A. Krug, J. Hadamard, O. Heaviside, S. Pincherle, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, H. Weyl, P. Lévy, A. Marchaud, H. T. Davis, A. Zygmund, E. R. Love, A. Erdélyi, H. Kober, D. V. Widder, M. Riesz e M. Feller.

Segundo Oldham e Spanier (1974), Abel foi o primeiro a apresentar uma aplicação de operações fracionárias em 1823, quando aplicou o cálculo fracionário à resolução de uma equação integral que surge na formulação do chamado *problema da tautócrona*, que busca determinar a equação da trajetória percorrida por uma partícula que desliza sob ação da gravidade ao longo de uma curva sem atrito, de modo que o tempo de descida seja independente do ponto de partida.

O Cálculo Fracionário vem sendo amplamente empregado durante as três últimas décadas em aplicações modernas de equações diferenciais e integrais à modelagem de diversos tipos de problemas da Ciência e da Engenharia, tais como:

- Processamento de sinais (Barbosa *et al.*, 2006; Bultheel e Martinez-Sulbaran, 2007);
- Redes elétricas (Yifei *et al.*, 2005);
- Mecânica dos fluidos (Amaral, 2003)
- Viscoelasticidade (Bagley e Torvik, 1983; Glockle e Nonnenmacher, 1991; Maia *et al.*, 1998; Adolfsson *et al.*, 2005; Bagley, 2007, e Jia *et al.*, 2007),
- Biologia matemática (Cole, 1933; Anastasio, 1994)

- Eletroquímica (Oldham, 1972; Goto e Ishii, 1975),
- Reologia (Cavazos *et al.*, 2007);
- Transferência de calor (Agrawal, 2004);
- Economia (Meerschaert, 2006);
- Eletromagnetismo (Engheta, 1996; Machado *et al.*, 2006);
- Teoria de controle (Hartley e Lorenzo, 2002; Valério e Costa, 2006)
- Problemas de difusão (Pedron, 2003; Gonçalves *et al.*, 2005; Andrade, 2006).

Dentre as obras que contém análises mais detalhadas de alguns aspectos matemáticos e aplicações físicas de cálculo fracionário, podem-se citar as de Erdélyi (1953), Erdélyi *et al.* (1954), Gel'fond e Shilov (1964), Djrbashian (1993), Gorenflo e Vessella (1991), além dos livros de Miller e Ross (1993) e de Podlubny (1999).

A principal motivação para o uso prático do Cálculo Fracionário é a possibilidade de se obter uma modelagem mais precisa de alguns fenômenos físicos, ao custo de uma maior complexidade analítica e numérica, em comparação com as ferramentas do cálculo tradicional.

De acordo com Podlubny (1999), durante três séculos, a teoria de derivadas fracionárias desenvolveu-se principalmente como um campo teórico puro da Matemática, útil apenas para matemáticos. Entretanto, nas últimas décadas, muitos autores afirmaram que derivadas e integrais de ordem não inteira são muito adequadas para a descrição de propriedades de vários materiais reais como, por exemplo, polímeros. Foi mostrado que novos modelos de ordem fracionária são mais adequados que modelos de ordem inteira previamente utilizados.

Derivadas fracionárias fornecem um excelente instrumento para a descrição das propriedades de memória e hereditariedade de vários materiais e processos. Esta é a principal vantagem das derivadas fracionárias em comparação com modelos clássicos de ordem inteira, nos quais estes efeitos são negligenciados. As vantagens do cálculo fracionário tornam-se aparentes na modelagem de propriedades mecânicas e elétricas de materiais reais, bem como na descrição de propriedades reológicas de rochas, e também em muitos outros campos.

Integrais e derivadas fracionárias também aparecem na teoria de controle de sistemas dinâmicos, quando o sistema controlado ou o controlador são descritos por equações diferenciais de ordem fracionária.

A relevância do tema no âmbito da Ciência e Engenharia é comprovada pelo expressivo e crescente número de publicações existentes sob a forma de livros e artigos científicos, e pela existência de conferências internacionais especificamente dedicadas ao tema.

No Brasil, não são muitos os trabalhos de pesquisa relacionados ao Cálculo Fracionário aplicado a problemas de Engenharia Mecânica, destacando-se os estudos realizados por Espíndola e colaboradores, voltados ao uso de modelos fracionários aplicados a absorvedores dinâmicos de vibrações viscoelásticos (Mendez, 2004; Espíndola *et al.*, 2005; Espíndola *et al.*, 2008), as implementações de modelos viscoelásticos fracionários associados a modelos de elementos finitos, realizadas por Lima (2003), além do estudo preliminar de Ávila *et al.* (2009), voltado ao uso de controladores ativos de ordem fracionária.

Inserida no contexto da matemática aplicada à modelagem de problemas de Engenharia Mecânica, a presente dissertação tem por objetivo geral o estudo dos fundamentos e aplicações do Cálculo Fracionário em problemas de Engenharia, com os seguintes objetivos específicos:

1º. Apresentar um apanhado histórico, as definições e principais propriedades dos operadores de ordem fracionária, com o aprofundamento necessário para o correto entendimento dos conceitos e sua aplicação em problemas de Engenharia sem, entretanto, abordar os aspectos mais teóricos de natureza matemática.

2º. Estudar, analítica e numericamente, a aplicação do Cálculo Fracionário a uma classe de problemas considerados de grande relevância no âmbito da Engenharia Mecânica, que constituem objeto de estudos do grupo de pesquisa do Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis, da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU, a saber, a modelagem de sistemas de controle passivo de vibrações utilizando materiais viscoelásticos.

Além deste primeiro capítulo introdutório, esta Dissertação está estruturada de acordo com os seguintes capítulos e respectivos conteúdos:

O Capítulo 2 traz um apanhado histórico do Cálculo Fracionário, além das principais definições e propriedades dos operadores fracionários encontradas na literatura.

O Capítulo 3 aborda a modelagem fracionária de materiais viscoelásticos no contexto do controle passivo de vibrações de sistemas mecânicos lineares. Após uma revisão bibliográfica, são apresentados os modelos viscoelásticos mais utilizados e os procedimentos

para sua inclusão em modelos dinâmicos discretos ou em modelos contínuos discretizados por elementos finitos.

No Capítulo 4, os modelos implementados computacionalmente, considerados os mais modernos e eficientes do ponto de vista computacional, são avaliados a partir da realização de simulações numéricas.

Por fim, o Capítulo 5 traz as conclusões acerca do trabalho realizado, além de sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

HISTÓRICO E FUNDAMENTOS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo são apresentados os fundamentos do Cálculo Fracionário, sendo primeiramente descrito um breve histórico através do qual são introduzidas as principais definições e notação utilizadas na literatura. Em seguida, são apresentadas as principais definições e propriedades da derivada e integração de ordem arbitrária, bem como alguns dos principais esquemas numéricos propostos para a resolução de problemas modelados por operadores fracionários.

2.1. Aspectos históricos do Cálculo Fracionário

Segundo Podlubny (1996), a denominação “Cálculo Fracionário” é um exemplo de terminologia matemática inapropriada, que não traduz precisamente o significado que deveria traduzir. Este autor define o Cálculo Fracionário como sendo a *“teoria de integrais e derivadas de ordem arbitrária (não necessariamente fracionária), que unifica e generaliza as noções de diferenciação de ordem inteira e integrações múltiplas”*.

O livro de Oldham e Spanier (1974) apresenta, em ordem cronológica, uma sequência de eventos que compõem um amplo apanhado histórico acerca das contribuições de matemáticos célebres para o surgimento e o desenvolvimento do Cálculo Fracionário. Miller e Ross (1993) trazem um levantamento histórico similar.

Segundo estes últimos autores, a pergunta original que levou à denominação *Cálculo Fracionário* foi: *pode o significado da derivada de ordem inteira $d^n y/dx^n$ ser estendido para o caso em que n for uma fração?* Posteriormente, esta pergunta tornou-se: *pode n ser qualquer número: fracionário, irracional ou complexo?* Como a segunda pergunta foi respondida afirmativamente, o nome cálculo fracionário tornou-se inapropriado e esta teoria

deveria, preferencialmente, ser denominada *integração e diferenciação de ordem arbitrária*. Estes autores apresentam as discussões inicialmente conduzidas por diversos matemáticos célebres (L'Hôpital, Leibniz, Wallis, Euler, Lagrange, Lacroix, Laplace, Fourier) na busca das respostas às questões colocadas acima, relatando, muitas vezes, correspondências, às vezes curiosas, trocadas entre eles. Os autores destacam o trabalho de Lacroix que, partindo da função $y = x^m$, com m inteiro positivo, desenvolveu a seguinte expressão para a derivada de ordem n :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (2.1)$$

e utilizando a função Gama para o fatorial generalizado, ele chegou a:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (2.2)$$

Lacroix ainda fornece o exemplo para $m=1$ e $n = 1/2$, obtendo:

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (2.3)$$

Miller e Ross (1993) também mencionam os trabalhos de Abel, a quem atribuem a primeira aplicação do cálculo fracionário na resolução de uma equação integral que aparece na modelagem do problema da *tautócrona*, que consiste em determinar a equação da trajetória descrita por uma partícula que desce sem atrito, sob a ação da gravidade, de um ponto a outro, de modo que o tempo transcorrido seja independente do ponto de partida. Para este problema, se o tempo de deslizamento da partícula, denotado por k , é conhecido, obtém-se a seguinte equação integral:

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt \quad (2.4)$$

onde a função $f(t)$ deve ser determinada.

A integral da Eq. (2.4), exceto por um fator multiplicativo $\Gamma(1/2)$, é um caso particular da integral que define a integração fracionária de ordem $1/2$. Abel expressou o lado direito da Eq. (2.4) sob a forma $\sqrt{\pi} \frac{d^{-1/2} f(x)}{dx^{-1/2}}$ e aplicou o operador $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ em ambos os lados da equação resultante, obtendo:

$$\frac{d^{1/2} k}{dx^{1/2}} = \sqrt{\pi} f(x),$$

dado que os operadores fracionários, sob determinadas condições satisfeitas por f , têm a propriedade $D^{1/2} D^{-1/2} f = D^0 f = f$. Assim, computando a derivada de ordem $1/2$ de k , $f(x)$ pode ser determinada, observando-se que, curiosamente, a derivada de ordem fracionária de uma constante não é sempre nula, fato que causou grande controvérsia.

No apanhado histórico de Miller e Ross (1993) é também dado destaque à contribuição de Liouville, que produziu numerosas publicações e foi exitoso no uso do cálculo fracionário a problemas da teoria potencial. O ponto de partida para os desenvolvimentos teóricos de Liouville é o seguinte resultado amplamente conhecido para derivadas de ordem inteira:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax} \quad (2.5)$$

onde D^m indica a derivação de ordem m em relação à variável independente x .

Liouville estendeu esta propriedade a derivadas de ordem arbitrária v e admitiu, ainda, que a derivada de uma função arbitrária $f(x)$ que pode ser expandida em séries da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \text{Re}(a_n) > 0, \quad (2.6)$$

é dada por:

$$D^v f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x} \quad (2.7)$$

A Eq. (2.7) é conhecida com a primeira fórmula de Liouville para a derivada fracionária, sendo aplicável para qualquer número ν racional, irracional ou complexo, sendo, todavia, limitada apenas a funções exponenciais da forma expressa pela Eq. (2.6).

Para obter sua segunda definição, Liouville partiu da seguinte integral definida, relacionada à definição da função Gama:

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \quad a > 0, x > 0,$$

a qual, com a mudança de variável $xu=t$, leva a:

$$I = x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a), \quad (2.8)$$

donde:

$$x^{-a} = \frac{I}{\Gamma(a)},$$

sendo

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt,$$

a conhecida função Gama.

Aplicando o operador D^ν a ambos os lados da Eq. (2.8), obtém-se:

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+\nu-1} e^{-xu} du \quad (2.9)$$

Deste resultado, Liouville extraiu sua segunda definição para a derivada fracionária:

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu (a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \quad a > 0 \quad (2.10)$$

Aos trabalhos de Liouville seguiu-se intensa controvérsia e confrontação entre suas definições com as de Abel e Lacroix, discutidas anteriormente.

G. F. Bernhard Riemann desenvolveu sua teoria da integração fracionária, mas seus trabalhos somente foram publicados em 1892, após a sua morte. Ele buscou a generalização de uma série de Taylor e obteve:

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \Psi(x) \quad (2.11)$$

onde a função complementar $\Psi(x)$ foi incluída para evitar a ambiguidade na escolha do limite inferior de integração c , como uma forma de quantificar o desvio desta definição da lei dos expoentes que estabelece que, para um dado limite inferior de integração:

$${}_c D_x^{-\nu} {}_c D_x^{-\mu} f(x) = {}_c D_x^{-\mu-\nu} f(x) \quad (2.12)$$

onde os subscritos c e x , adicionados aos operadores, explicitam os limites de integração.

A inclusão da função complementar foi vista por Cayley como uma dificuldade inerente à teoria de Riemann e foi motivo de debate e um engano de interpretação cometido por Liouville.

Em meados do Século 19, Liouville e Hargreave propuseram a seguinte generalização da fórmula de Leibniz para a derivada de ordem ν , não inteiro positivo, de um produto de funções:

$$D^\nu f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} D^n f(x) D^{\nu-n} g(x) \quad (2.13)$$

onde D^n são operadores diferenciais de ordens inteiras, $D^{\nu-n}$ são operadores de ordem fracionária e

$$\binom{\nu}{n} = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu-n+1)}{n!} \quad (2.14)$$

é o coeficiente binomial generalizado.

O primeiro trabalho que levou à definição moderna da derivada fracionária de Riemann-Liouville parece ter sido um artigo publicado por Sonin, em 1869, cujos resultados foram estendidos nos anos seguintes por Letnikov. Estes estudos partiram da derivada de ordem n da fórmula integral de Cauchy, expressa segundo:

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (2.15)$$

a qual pode ser generalizada para n não inteiro mediante a utilização do método de integração em um contorno, desenvolvido posteriormente por Laurent, que conduziu à definição:

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \text{Re } \nu > 0 \quad (2.16)$$

Quando $x > c$, obtém-se a definição de Riemann, dada pela Eq. (2.11), mas sem a função complementar. A versão mais utilizada é aquela em que $c = 0$,

$${}_0 D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \text{Re } \nu > 0 \quad (2.17)$$

Deve-se observar que esta forma da integral fracionária é denominada *integral fracionária de Riemann-Liouville*. Uma condição suficiente para que a Eq. (2.16) convirja é:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(x^{1-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0 \quad (2.18)$$

Quando $c = -\infty$ a Eq. (2.16) torna-se

$${}_{-\infty}D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \nu > 0 \quad (2.19)$$

para a qual, uma condição necessária de convergência é

$$f(-x) = O(x^{-\nu-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, x \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

O histórico apresentado por Miller e Ross (1993) é concluído com um apanhado dos desenvolvimentos ocorridos no Século 20, sendo comentado que uma modesta quantidade de trabalhos dedicados ao cálculo fracionário foi publicada no período de 1900 a 1970. A partir deste período, houve significativa dinamização da pesquisa sobre o assunto, com aumento do número de publicações, incluindo vários livros, e a realização de conferências internacionais em 1974, 1984 e 1989. Os autores comentam que o Cálculo Fracionário encontra aplicações em praticamente todos os ramos da Ciência e da Engenharia e que, não obstante, ainda não estava incluído, na época em que publicaram seu livro, nos currículos universitários, possivelmente porque os matemáticos não estavam familiarizados com sua utilização.

2.2. Abordagem moderna do Cálculo Fracionário

O apanhado histórico apresentado na seção anterior deixa claro que foram propostas várias definições alternativas para os operadores fracionários, as quais resultaram nas definições atualmente utilizadas, sumarizadas nesta Seção.

Sejam consideradas as seguintes séries infinitas de integrais e derivadas múltiplas de uma função arbitrária $f(t)$:

$$\int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \quad \dots$$

$$\frac{df}{dt}, \frac{d^2 f}{dt^2}, \dots$$

A derivada de ordem arbitrária α , denominada de forma abreviada *derivada fracionária*, pode ser considerada como uma interpolação desta sequência de operadores. Seguindo a escolha de Podlubny, será adotada a notação:

$${}_a D_t^\alpha(t)$$

onde os subscritos a e t denotam os limites relacionados à operação de diferenciação fracionária, conforme será evidenciado mais adiante. Estes limites são denominados *terminais* da diferenciação fracionária. A terminologia *integrais fracionárias* designa integrações de ordem arbitrária, e correspondem a valores de ordem negativos. Desta forma, a integral fracionária de ordem $\beta > 0$, será denotada por

$${}_a D_t^{-\beta}(t)$$

Por extensão da terminologia descrita acima, uma *equação diferencial fracionária* é uma equação diferencial que contém derivadas de ordem fracionárias; uma *equação integral fracionária* é uma equação integral que contém integrais de ordem fracionária.

Dentre as várias definições propostas, neste estudo foi dada ênfase às definições de Grünwald-Letnikov e de Liouville, que são detalhadas nas seções que seguem.

2.2.1. Derivada e integração de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov

Seja uma função contínua $y = f(t)$. Segundo a conhecida definição, a derivada de primeira ordem da função $f(t)$ é dada por:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.21)$$

Aplicando esta definição duas vezes obtém-se, para a derivada de segunda ordem, a expressão:

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (2.22)$$

Similarmente, para a derivada de terceira ordem, tem-se:

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (2.23)$$

Por indução, para a derivada de ordem n , escreve-se:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (2.24)$$

onde

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \quad (2.25)$$

são os conhecidos *coeficientes binomiais*.

Considere-se agora a seguinte expressão que generaliza as frações que aparecem no lado direito da Eq. (2.25):

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.26)$$

onde p é um número inteiro arbitrário e n é um número inteiro.

Evidentemente, para $p \leq n$ tem-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \quad (2.27)$$

uma vez que, nestas condições, todos os coeficientes binomiais posteriores a $\binom{p}{p}$ são nulos.

Considerem-se agora valores negativos de p . Por conveniência, introduz-se a notação:

$$\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+r-1)}{r!} \quad (2.28)$$

Substituindo, em Eq. (2.26), p por $-p$, escreve-se:

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) \quad (2.29)$$

Se n for fixado, $f_h^{(-p)}(t)$ tende a zero quando $h \rightarrow 0$. Para evitar esta condição, deve-se supor $n \rightarrow \infty$ quando $h \rightarrow 0$. Neste caso, pode-se tomar $h = \frac{t-a}{n}$ onde a é um número real constante. Nestas condições, denotar-se-á:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n, h = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (2.30)$$

Note-se que ${}_a D_t^{-p} f(t)$ denota um operador aplicado à função $f(t)$, nele intervindo os terminais a e t . Para apreender o significado deste operador, faz-se o desenvolvimento para $p=1$:

$$f_h^{(-1)}(t) = \frac{1}{h^{-1}} \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} 1 \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) \quad (2.31)$$

Levando em conta que $a = t - nh$ e que a função $f(t)$ é admitida contínua, conclui-se que:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

A generalização deste procedimento para valores arbitrários de p leva à seguinte expressão, que pode ser obtida por indução:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.33)$$

Deve-se mostrar agora que a Eq. (2.33) representa uma integral múltipla de ordem p . Primeiramente, derivando a Eq.(2.33), obtém-se a relação:

$$\frac{d}{dt} \left({}_a D_t^{-p} f(t) \right) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t) \quad (2.34)$$

a partir da qual pode-se escrever:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+1} f(t) \right) dt$$

$${}_a D_t^{-p+1} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+2} f(t) \right) dt$$

$${}_a D_t^{-p+2} f(t) = \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+3} f(t) \right) dt \quad \dots$$

Estas relações podem ser combinadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+2} f(t) \right) dt \\
&= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+3} f(t) \right) dt \\
&= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t dt}_p \int_a^t f(t) dt
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Conclui-se, pois, que a derivada de ordem inteira n representada pela Eq. (2.26) e a integral múltipla de ordem p , expressa pela Eq. (2.33) de uma função contínua $f(t)$ são casos particulares da expressão geral:

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t-a=n h}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \tag{2.36}$$

que representa a derivada de ordem m se $p=m$ e a integral múltipla de ordem m , se $p=-m$. Esta constatação conduz à generalização das noções de integração e diferenciação admitindo-se que, na Eq. (2.36), p possa ser um número arbitrário real ou complexo. Nas seções seguintes será considerado apenas o caso em que p é um número real.

Considera-se primeiramente $p < 0$, o que caracteriza a integração de ordem arbitrária. Neste caso, a Eq. (2.36) toma a forma:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t-a=n h}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) \tag{2.37}$$

A partir da demonstração da existência do limite indicado na Eq. (2.37), pode-se mostrar que (Podlubny, 1996):

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t-a=n h}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \tag{2.38}$$

onde $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$ é a função Gama.

Após integrações por partes, a Eq. (2.38) pode ser expressa sob a seguinte forma alternativa:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.39)$$

Para a derivação de ordem arbitrária, deve-se avaliar o limite:

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t-a=nh}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.40)$$

o qual, de acordo com Podlubny (1996), assume a forma:

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.41)$$

A Eq. (2.41) foi obtida admitindo que as derivadas $f^{(k)}(t)$ ($k=1,2, \dots, m+1$) são contínuas no intervalo fechado $[a;t]$ e que m é um número inteiro satisfazendo a condição $m > p-1$. O menor valor possível para m é determinado pela desigualdade $m < p < m+1$.

As relações seguintes traduzem as seguintes propriedades da derivada e integração de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov:

- **Composição de derivadas de ordem arbitrária e derivadas de ordem inteira**

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+n} f(t) \quad (2.42)$$

$${}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \quad (2.43)$$

esta última equação mostra que os operadores $\frac{d^n}{dt^n}$ e ${}_a D_t^n$ são comutativos somente se $f^{(k)}(a) = 0, k = 1, 2, \dots, n-1$.

- **Composição de derivadas e integrais de ordem arbitrária**

Considerando dois operadores ${}_a D_t^p, {}_a D_t^q$, tem-se:

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \quad (2.44)$$

somente se $f^{(k)}(a) = 0, k = 1, 2, \dots, n-1$.

2.2.2. Derivada e integração de ordem arbitrária de Riemman-Liouville

A derivada de Riemann-Liouville de ordem arbitrária p , de uma função $f(t)$ é definida segundo:

$${}_a \mathbf{D}_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad (m \leq p \leq m+1) \quad (2.45)$$

A definição da derivada de Grünwald-Letnikov dada pela Eq. (2.41), obtida admitindo que a função $f(t)$ tem $m+1$ derivadas contínuas, pode ser obtida da Eq. (2.45) sob a mesma hipótese, efetuando sucessivas integrações por partes. Desta forma, considerando a classe de funções continuamente diferenciáveis $m+1$ vezes, as definições de Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov são equivalentes.

Seguindo o procedimento de Podlubny (1996), mostrar-se-á que a definição dada pela Eq.(2.45) permite unificar os operadores de derivadas e integrações de ordem inteira e, subsequentemente, poderá ser estendida aos operadores de ordem arbitrária.

Supondo que $f(t)$ seja contínua e integrável no intervalo $(a ; t)$, então a integral

$$f^{-1}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

existe e assume um valor finito, o qual é nulo quanto $a \rightarrow t$.

Efetuada integrações múltiplas, pode-se escrever:

$$f^{-2}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_a^t d\tau_1 = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$f^{-3}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_a^t d\tau_1 = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Por indução, chega-se à fórmula de Cauchy:

$$f^{-n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.46)$$

Supondo que $n > 1$ seja um inteiro fixo e tomando outro inteiro $k \geq 0$, escreve-se:

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

onde D^{-k} ($k \geq 0$) denota k integrações sucessivas.

De forma similar, supondo que $n > 1$ seja um inteiro fixo e tomando outro inteiro $k \geq n$, escreve-se:

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.48)$$

onde D^k ($k \geq 0$) denota k derivações sucessivas.

Para estender a noção de integrações múltiplas a valores não inteiros de n , pode-se partir da fórmula de Cauchy da Eq. (2.46), e substituir n por um número real $p > 0$:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.49)$$

Se $f(t)$ for contínua em $(t; a)$, então a integração de ordem arbitrária definida na Eq. (2.49) tem a seguinte propriedade:

$${}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) = {}_a D_t^{-p-q} f(t) \quad (2.50)$$

A representação da Eq. (2.48) para a derivada de ordem $k-n$ possibilita a extensão ao caso de diferenciação de ordem não inteira, o que pode ser feito mantendo k inteiro e substituindo n por um número real α de modo que $k-\alpha > 0$. Este procedimento conduz a:

$${}_a \mathbf{D}_t^{(k-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (2.51)$$

ou, alternativamente,

$${}_a \mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (k-1 \leq p < k) \quad (2.52)$$

Uma propriedade dos operadores de ordem arbitrária de Riemann-Liouville é:

$${}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t) \quad (2.53)$$

que tem, como caso particular:

$${}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) \right) = f(t) \quad (2.54)$$

Os operadores de derivação e de integração de ordem arbitrária não são comutativos, ou seja:

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p} \left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \quad (2.55)$$

- **Composição de derivadas de ordem inteira**

Sendo p real positivo e n inteiro, tem-se:

$${}_a\mathbf{D}_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{-p-n+j}}{\Gamma(-p-n+j+1)} \quad (2.56)$$

que é idêntica à propriedade traduzida pela Eq. (2.43).

- **Composição com derivadas de ordem arbitrária**

Sendo p e q reais positivos, tem-se a propriedade:

$${}_a\mathbf{D}_t^q \left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^m \left[{}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)} \quad (2.57)$$

- **Linearidade**

$$D^p (\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha D^p f(t) + \beta D^p g(t) \quad (2.58)$$

onde D^p designa qualquer uma das diferenciações de ordem arbitrária consideradas anteriormente.

- **Regra de Leibniz (derivada do produto de duas funções)**

Se $f(t)$ e $g(t)$ e suas derivadas são contínuas em $[a; t]$, tem-se:

$${}_aD_t^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) {}_aD_t^{p-k} g(t) \quad (2.59)$$

- **Transformadas de Laplace de integrais de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov e de Riemann-Liouville**

Partindo da definição da integração de ordem arbitrária dada pela Eq. (2.49), na qual faz-se $a = 0$, pode-se reescrevê-la utilizando a definição de convolução de duas funções:

$${}_aD_t^{-p} f(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(p)} t^{p-1} * f(t) \quad (2.60)$$

Levando em conta que a transformada de Laplace de t^{p-1} é:

$$L\{t^{p-1}\} = \Gamma(p) s^{-p} \quad (2.61)$$

e considerando que a transformada de Laplace da convolução de duas funções é igual ao produto das respectivas transformadas de Laplace, obtém-se o seguinte resultado para a transformada de Laplace da integral de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov e de Riemann-Liouville:

$$L\left\{{}_0D_t^{-p}f(t)\right\}=L\left\{{}_0\mathbf{D}_t^{-p}f(t)\right\}=s^{-p}F(s) \quad (2.62)$$

- **Transformadas de Laplace de derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville**

$$L\left\{{}_0\mathbf{D}_t^p f(t)\right\}=s^p F(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\mathbf{D}_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (n-1 \leq p < n) \quad (2.63)$$

Segundo Podlubny (1996), a utilidade prática da transformada de Laplace das derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville é limitada pela inexistência de significado físico para os valores das derivadas de ordem arbitrária que devem ser avaliadas no extremo $t = 0$ (que aparecem como condições iniciais no caso de equações diferenciais).

- **Transformadas de Laplace de derivadas de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov**

$$L\left\{{}_0D_t^p f(t)\right\}=s^p F(s), \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (2.64)$$

2.3. A aplicação dos operadores de derivação e integração de ordem arbitrária a funções elementares

De acordo com Podlubny (1999), as equações abaixo mostram os resultados da aplicação dos operadores de ordem fracionária a algumas das funções elementares mais frequentemente utilizadas.

$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad \alpha \in IR, \gamma > -1, t > 0. \quad (2.65)$$

$$D^\alpha (e^{\lambda x}) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}, \text{ para qualquer } \lambda \in IR, \alpha \in IR. \quad (2.66)$$

$$D^\alpha (\text{sen}(ax)) = a^\alpha \text{sen}\left(ax + \frac{\alpha\pi}{2}\right), \text{ com } a \in IR, \alpha > -1. \quad (2.67)$$

$$D^\alpha (\cos(ax)) = a^\alpha \cos\left(ax + \frac{\alpha\pi}{2}\right), \text{ com } a \in IR, \alpha > -1. \quad (2.68)$$

$$D^\alpha (e^{\pm ix}) = D^\alpha \cos(x) \pm i D^\alpha \text{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \pm i \text{sen}\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (2.69)$$

$$D^{-\alpha} k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (2.70)$$

onde k é uma constante.

2.4 Avaliação numérica de derivadas e integrais de ordens arbitrárias

Para a avaliação numérica das derivadas e integrais de ordem arbitrária α , se o intervalo de tempo $T=t-a$ for discretizado em N pontos, de modo que $h=T/N$, então a Eq. (2.40) pode ser expressa sob a forma:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{T}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f\left(t - j \frac{T}{N}\right) \right] \quad (2.71)$$

e a estimação das integrais e derivadas fracionárias pode ser feita pelo truncamento da soma infinita presente na Eq. (2.50):

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx \left[\left(\frac{T}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f\left(t - j \frac{T}{N}\right) \right] \quad (2.72)$$

onde os chamados coeficientes de Grünwald

$$A_{j+1} \equiv \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}$$

resultam da extensão da definição dos coeficientes binomiais para $\binom{p}{j}$ valores de p não inteiros.

Uma redução adicional nos cálculos é obtida utilizando a propriedade:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1),$$

a partir da qual consegue-se a relação recursiva:

$$A_{j+1} = \frac{j-1-\alpha}{j} A_j \quad (2.73)$$

Limitando à análise das derivadas fracionárias, tem-se que $\alpha > 0$ e que:

$$|A_{j+1}| = \overbrace{\left| \frac{j-1-\alpha}{j} \right|}^{<1} |A_j| < |A_j| \text{ para } j > \alpha \quad (2.74)$$

Isso mostra que a série dos termos $|A_{j+1}|$ é estritamente decrescente a partir do momento em que j se torna maior do que α . Quando $j \rightarrow +\infty$, tem-se que:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |A_{j+1}| = \left| \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right| \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \right| < \left| \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right| \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j+1)} \right| \quad (2.75)$$

para $j > \alpha + 2$, já que a função gama $\Gamma(x)$ é estritamente não-decrescente para $x \leq 2$. Como $j \in \mathbb{N}$, tem-se que $\Gamma(j+1) = j!$, e assim:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |A_{j+1}| < \left| \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right| \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{(j-1)!}{j!} \right| = \left| \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right| \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{j} \right) = 0 \quad (2.76)$$

À medida que o índice j toma valores maiores, os coeficientes de Grünwald vão se tornando pesos de valores menores da função f que estão situadas mais ao passado. Esta é a razão do desaparecimento de eventos conforme o tempo passa. Esta propriedade recebe o nome de “memória fraca” e possibilita o truncamento da Eq. (2.63).

2.5 Técnicas Numéricas de Resolução Aproximada de Sistemas de Equações Diferenciais de Ordem Fracionária.

Existem vários métodos para resolver sistemas de equações diferenciais de ordem não inteira, dentre os quais podem se citar: transformadas de Laplace e de Fourier (Gaul *et al.*, 1989; Miller e Ross, 1993 e Podlubny, 1999); expansões via autovetores (Suarez e Shokooh, 1997); fórmula integral de Laguerre (Yuan e Agrawal, 2002); solução direta através de aproximações desenvolvidas por Grünwald-Letnikov (Podlubny, 1999); expansões através de séries de Taylor truncadas (Machado, 2001); método da representação difusiva (Heleschewitz e Matignon, 1998); representações de estado aproximadas (Aoun *et al.*, 2003), além de outros métodos numéricos (Padovan, 1987; Diethelm e Ford, 2004; Diethelm *et al.*, 2005 e Kumar e Agrawal, 2005).

Para ilustrar algumas técnicas de resolução de equações diferenciais de ordem fracionária, considere-se um problema genérico do tipo:

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (2.77)$$

com condições iniciais:

$$y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.78)$$

onde n representa o menor número inteiro maior ou igual a α .

Este problema é equivalente a:

$$y(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (2.79)$$

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_0^{(i)} \frac{t^i}{i!} \quad (2.80)$$

que caracteriza uma equação integral de Volterra. Considerando um tempo máximo de simulação T , e discretizando-o em N segmentos iguais, define-se o passo entre cada tempo $t_j = jh$, $j = 0, \dots, N$ como sendo dado por $h = T/N$. Assumindo que aproximações para os valores de $y(t)$ tenham sido dadas para cada $t_j < T$ com $j = 0, \dots, m$, e admitindo que y e $f(t, y(t))$ variam linearmente a cada passo, pode-se obter a aproximação:

$$y_{m+1} = g_{m+1} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{m+1} a_{j,m+1} f(t_j, y(t_j)) \quad (2.81)$$

$$a_{j,m+1} = \begin{cases} m^{\alpha+1} (m-\alpha)(m+1)^\alpha, & \text{se } j = 0 \\ (m-j+2)^{\alpha+1} + (m-j)^{\alpha+1} 2(m-j+1)^{\alpha+1}, & \text{se } 1 \leq j \leq m, \quad m = 0, \dots, N-1. \\ 1, & \text{se } j = m+1 \end{cases} \quad (2.82)$$

Aproximações não lineares (quadráticas ou cúbicas) também podem ser feitas.

São detalhados, a seguir, dois métodos, sendo eles um método direto, que visa a aproximar o operador derivativo-fracionário, e um método indireto, que envolve representação aproximada no espaço de estado, ambos sugeridos por Poinot e Trigeassou (2003).

2.5.1 Método Direto

Neste método, usam-se aproximações numéricas para obter fórmulas de recorrência ao invés do operador de derivada fracionária. Como existem vários tipos de aproximações, será utilizada a mais usual, dada pela definição de Grünwald, de acordo com Miller e Ross (1993):

$$\frac{d^n}{dt^n} f(Kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f((K-k)h) \quad (2.83)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (2.84)$$

onde h é o período de amostragem.

Seja a equação diferencial de ordem fracionária definida a seguir:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_0 y(t) = b_0 u(t). \quad (2.85)$$

Utilizando a aproximação dada pela Eq. (2.83) na Eq. (2.85), obtém-se a resposta do sistema como sendo dada por:

$$y(Kh) = \frac{b_0 u(Kh) - \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k}{h^n} \binom{n}{k} y((K-k)h)}{a_0 + \frac{1}{h^n}}. \quad (2.86)$$

2.5.2 Método Indireto

De acordo com a teoria do cálculo fracionário, a integração é a inversa da derivação. A definição do operador $D_n^{-1}(s)$ no domínio de Laplace é feita de maneira tal que seu gráfico de Bode seja simétrico ao gráfico de $D_n(s)$.

$$D_n^{-1}(s) = \frac{G_n}{s} \left(\frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_b} \right)}{1 + \left(\frac{s}{\omega_h} \right)} \right)^n \quad (2.87)$$

Utilizando o integrador $1/s$ e o filtro de fase convencional usado por Oustaloup (1995), dado por:

$$A_v(j\omega) = \prod_{i=1}^N \frac{1 + j \left(\frac{s}{\omega'_i} \right)}{1 + j \left(\frac{s}{\omega_i} \right)} \quad (2.88)$$

com N células e definido pelos parâmetros ω'_i , ω_i , α , η (sendo ω'_1 a menor pulsação e ω_N a maior pulsação), chega-se à aproximação do operador $D_n^{-1}(s)$:

$$D_n^{-1}(s) = \frac{G_n}{s} \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \quad (2.89)$$

Nota-se que $D_n^{-1}(s)$ é caracterizado pelos seguintes parâmetros:

- ω'_1 e ω_N definem a faixa de frequência
- N é a quantidade de células
- α e η são parâmetros recursivos para uma ordem n não inteira
- G_n é definido em ordem a se ter um mesmo ganho para $1/s^n$ e $D_n^{-1}(s)$ na pulsação $\omega_u = 1$ rad/s.

As relações recursivas são dadas a seguir:

$$\omega_i = \alpha \omega'_i \quad \omega'_{i-1} = \eta \omega_i \quad n = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta}$$

$$\eta = \left(\frac{\omega_N}{\omega'_1} \right)^{n/N-n} \quad \alpha = \eta^{1-n/n} \quad G_n = 1 / \left| \prod_{i=1}^N \frac{1+j/\omega'_i}{1+j/\omega_i} \right| \quad (2.90)$$

Como $D_n^{-1}(s)$ é composto por um produto de células, conforme ilustrado na Fig. 2.1, adotam-se as variáveis de estado como as saídas de cada uma das células.

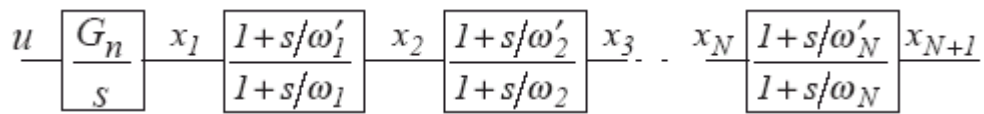


Figura 2.1 - Diagrama de $D_n^{-1}(s)$.

Assim, chega-se à seguinte equação:

$$-\frac{\omega_{n-1}}{\omega'_{n-1}} \dot{x}_{n-1} + \dot{x}_n = \omega_{n-1} (x_{n-1} - x_n) \quad \alpha = \frac{\omega_{n-1}}{\omega'_{n-1}} \quad (2.91)$$

Considerando x_{n+1} :

$$-\alpha \dot{x}_n + \dot{x}_{n+1} = \omega_n (x_n - x_{n+1}) \quad \omega_n = \alpha \eta \omega_{n-1} \quad (2.92)$$

A Eq. (2.92) leva à seguinte representação de estado:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}}_{M_I} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{N+1} \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}_I} = \\
& = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix}}_{A_I} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{bmatrix}}_{\underline{x}_I} + \underbrace{\begin{bmatrix} G_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_I} \cdot u, \quad (2.93)
\end{aligned}$$

onde as matrizes M_I , A_I e \underline{B}_I e o vetor \underline{x}_I são apresentados acima. Representa-se o sistema de equações também na forma algébrica:

$$\underline{\dot{x}}_I = A_I^* \underline{x}_I + \underline{B}_I^* u \quad (2.94)$$

com $A_I^* = M_I^{-1} A_I$ e $\underline{B}_I^* = M_I^{-1} \underline{B}_I$.

Considere-se o sistema:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + s^n} \quad (2.95)$$

que é equivalente a:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_0 y(t) = b_0 u(t). \quad (2.96)$$

Define-se $x(t)$ tal que:

$$X(s) = \frac{1}{s^n + a_0} U(s). \quad (2.97)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} &= -a_0 x(t) + b_0 u(t) \\ y(t) &= b_0 x(t) \end{aligned} \quad (2.98)$$

que é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = G_n(-a_0 x_{N+i} + u) \\ y = b_0 x_{N+i} \end{cases} \quad \text{com} \quad (2.99)$$

$$\begin{cases} i = 1 & \text{se } 0 < n < 1 \\ i = 2 & \text{se } 1 < n < 2 \end{cases}$$

A partir das equações anteriores, obtém-se a seguinte representação no espaço de estado:

$$M \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{B} u, \quad y = \underline{C}^T \underline{x} \quad (2.100)$$

onde:

- Se $0 < n < 1$:

$$A = A_I + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -G_n a_0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \underline{B}_I, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{C}^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_0]$$

- Se $1 < n < 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -G_n a_0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & A_I & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{C}^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_0]$$

2.5.3 Aplicação 1: Método Direto

Para efeito de ilustração, calculou-se a Eq. (2.86), com os seguintes dados: $a_0 = 1$; $b_0 = 1$; $u(t) = 1$ (degrau unitário), $n = 0,5$ e $n = 1,5$. Os resultados da simulação para $n = 0,5$ e $n = 1,5$ são apresentados nas Fig. 2.2 e Fig. 2.3, respectivamente.

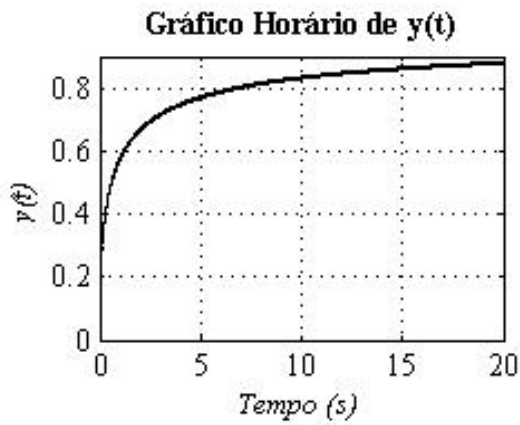


Figura 2.2 - Gráfico da resposta do sistema para $n = 0,5$ obtida pelo método direto.

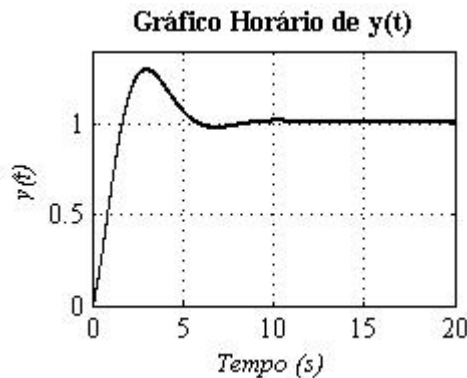


Figura 2.3 - Gráfico da resposta do sistema para $n = 1,5$ obtida pelo método direto.

2.5.4 Aplicação 2: Método Indireto

Programando a Eq. (2.100) com os dados $a_0=1$; $b_0=1$; $\omega'_1=10^{-5}$ rad/s; $\omega_N=10^5$ rad/s; $N=30$; $u(t)=1$ (degrau unitário); $n=0,5$ e $n=1,5$, obtiveram-se os gráficos da resposta dados nas Fig. 2.4 e Fig. 2.5, respectivamente.

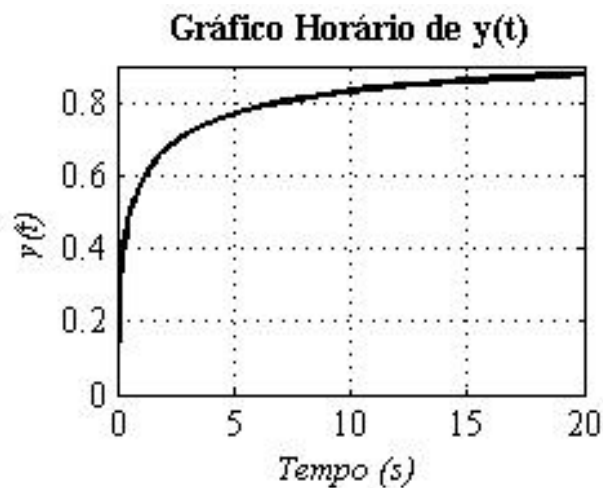


Figura 2.4 - Gráfico da resposta do sistema para $n=0,5$ obtida pelo método indireto.



Figura 2.5 - Gráfico da resposta do sistema para $n=1,5$ obtida pelo método indireto.

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO EM VISCOELASTICIDADE

3.1 Introdução

Viscoelasticidade é uma propriedade apresentada pelos sólidos que, quando submetidos a forças, apresentam um comportamento misto elástico e viscoso.

Diversos autores utilizaram os conceitos de cálculo fracionário para a modelagem do comportamento viscoelástico (Bagley e Torvik, 1983; Glockle e Nonnenmacher, 1991; Maia, 1998; Adolfsson *et al.*, 2005; Bagley, 2007; Jia *et al.*, 2007). As derivadas e integrais de ordem não inteira introduz maior flexibilidade aos modelos para vários materiais.

Há três décadas o conceito de derivadas fracionárias, em conjunto com sua aplicação em viscoelasticidade, vem sendo visto como um método de ajuste de curvas. Bagley e Torvik (1983) apresentam uma justificativa física, tomando por base a teoria molecular de Rouse, depois modificada por Ferry, culminando em derivadas de ordem $1/2$ na relação tensão-deformação em cisalhamento. Resultados semelhantes são obtidos pela consideração da teoria molecular de Zimm, acarretando derivadas fracionárias de ordem $2/3$.

De acordo com Jia *et al.* (2007), o modelo de Maxwell com derivadas fracionárias (MMDF) dá ao comportamento viscoelástico melhores representações que aquelas proporcionadas pelo modelo de Maxwell clássico. O comportamento viscoelástico apresenta as funções de relaxação e fluência como características importantes de sua natureza e pode-se mostrar que o MMDF exibe um comportamento de fluido apenas quando se tem uma derivada fracionária da tensão e uma derivada de primeira ordem da deformação. Segundo Jia *et al.* (2007), Hernández-Jiménez ajustou o MMDF aos polímeros PMMA (metilmetacrilato) e PTFE (politetrafluoretileno) usando derivadas da deformação de ordens 0,0520 e 0,6921,

respectivamente, evidenciando que cada polímero representa um comportamento intermediário entre aquele totalmente elástico e um fluido perfeito. Além disso, os mesmos autores comentam que os materiais viscoelásticos têm um comportamento intermediário entre esses tradicionalmente associados a sólidos e líquidos e que Ferry e Yang, diferenciaram sólidos e líquidos viscoelásticos. Eles concluíram que é possível distinguir as duas categorias através dos módulos de relaxação. Para líquidos, o módulo de relaxação aproxima-se de zero quando o tempo tende ao infinito, enquanto que para o sólido, ele se aproxima de um valor constante finito. Também comentam que Makris, modelou um amortecedor usando o MMDF levando em conta o comportamento de fluido viscoelástico.

Bagley e Torvik (1983) fizeram a investigação da resposta senoidal sobre o modelo fracionário de Kelvin-Voigt. Seguindo esta investigação, a relação entre força e deslocamento do modelo fracionário de Maxwell pôde ser obtida e também pôde ser usada para facilitar o ajuste dos ciclos experimentais de força e deslocamento. Esta resposta senoidal foi analisada e a eficiência do modelo foi comprovada.

Segundo Schmidt e Gaul (2002), Nutting observou que a relaxação de tensão em alguns materiais pode ser modelada por potências fracionária do tempo e que Germant estabeleceu que as propriedades de rigidez e amortecimento de materiais viscoelásticos são mais bem ajustadas pelo uso de potências fracionárias da frequência, sendo este autor o primeiro a propor explicitamente o uso de derivadas fracionárias nas equações constitutivas desses materiais.

Os comentários acima indicam que os modelos baseados em derivadas de ordem fracionária são muito apropriados para aplicações práticas em Engenharia, o que justifica o estudo apresentado neste capítulo.

A próxima seção trata dos fundamentos da viscoelasticidade linear, e baseia-se no trabalho de Carpinteri e Mainardi (1997).

3.2 Fundamentos da Viscoelasticidade Linear

Definições feitas pela teoria da viscoelasticidade linear sugerem que um sólido pode ser representado por um sistema linear para o qual a tensão (ou a deformação) é uma função de entrada e a deformação (ou a tensão) é uma função de saída.

Define-se $J(t)$ como a resposta em deformação para uma tensão descrita por uma função degrau unitário, e $G(t)$ como a resposta em tensão para uma deformação descrita por uma função degrau unitário. As funções $J(t)$ e $G(t)$ são normalmente definidas como *flexibilidade de fluência* e *módulo de relaxação*, respectivamente. O limite destas funções para $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow +\infty$ são relacionados ao comportamento vítreo e de equilíbrio da viscoelasticidade dos sólidos, respectivamente.

Define-se usualmente $J_g := J(0^+)$ como sendo a flexibilidade vítrea, $J_e := J(+\infty)$ como sendo a flexibilidade de equilíbrio, $G_g := G(0^+)$ como sendo o módulo vítreo e $G_e := G(+\infty)$ como sendo o módulo de equilíbrio. Cabe mencionar que as funções do material são sempre positivas. Além disso, para $0 < t < +\infty$, $J(t)$ e $G(t)$ são funções do tempo diferenciáveis, uma sendo crescente e a outra decrescente, respectivamente, sendo válidas as relações:

$$t \in \mathbb{R}^+, \frac{dJ}{dt} > 0 \Rightarrow 0 \leq J(0^+) < J(t) < J(+\infty) \leq +\infty,$$

$$t \in \mathbb{R}^+, \frac{dG}{dt} < 0 \Rightarrow +\infty \geq G(0^+) > G(t) > G(+\infty) \geq 0.$$

A relação deformação-tensão geral pode ser representada por uma função de material ($J(t)$ ou $G(t)$) e é obtida pelo princípio de superposição de Boltzmann e dada pela integral de hereditariedade linear do tipo Stieltjes (Carpinteri e Mainardi, 1997):

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau), \text{ ou } \sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau). \quad (3.1)$$

Partindo da hipótese de que $J(t) = G(t) = 0$ para todo tempo menor que um tempo inicial ($t = 0$), tem-se que

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) d\sigma(\tau) = \sigma(0^+) J(t) + \int_0^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (3.2a)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \varepsilon(0^+) G(t) + \int_0^t G(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (3.2b)$$

onde $\dot{\sigma}(t)$ e $\dot{\varepsilon}(t)$ são as derivadas primeiras em relação ao tempo da tensão e da deformação, respectivamente.

O limite inferior de integração dado por 0^- nas equações anteriores permite um comportamento descontínuo de $\sigma(t)$ e/ou $\varepsilon(t)$ em $t = 0$, e assim $\dot{\sigma}(t)$ e $\dot{\varepsilon}(t)$ podem estar relacionadas à função delta de Dirac, $\delta(t)$. Integrando por partes as Eqs (3.2a) e (3.2b), obtêm-se:

$$\varepsilon(t) = J_g \sigma(\tau) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (3.3a)$$

$$\sigma(t) = G_g \varepsilon(\tau) + \int_0^t \dot{G}(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (3.3b)$$

As primeiras derivadas das funções $J(t)$ e $G(t)$ são conhecidas como as taxas de fluência (flexibilidade) e de relaxação (módulo), respectivamente, e desempenham o papel de funções de memória nas equações anteriores.

Aplicando a transformada de Laplace nas Eqs. (3.2) e (3.3), tem-se:

$$\tilde{\varepsilon}(s) = s \tilde{J}(s) \tilde{\sigma}(s), \quad (3.4a)$$

$$\tilde{\sigma}(s) = s \tilde{G}(s) \tilde{\varepsilon}(s). \quad (3.4b)$$

A equação seguinte mostra uma correspondência entre $J(t)$ e $G(t)$:

$$s \tilde{J}(s) = \frac{1}{s \tilde{G}(s)} \Leftrightarrow \tilde{J}(s) \tilde{G}(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (3.5)$$

Fazendo a convolução da Eq. (3.5) no domínio do tempo, tem-se:

$$J(t) * G(t) := \int_0^t J(t-\tau) G(\tau) d\tau = t. \quad (3.6)$$

Utilizando as propriedades da transformada de Laplace na Eq. (3.5), tem-se:

$$J_g = \frac{1}{G_g}, \quad J_e = \frac{1}{G_e}, \quad (3.7)$$

onde J_g e J_e podem assumir valores entre 0 e $+\infty$. A Tabela 3.1 mostra alguns tipos de valores para a flexibilidade de fluência e para o módulo de relaxação.

Tabela 3.1 - Os quatro tipos de viscoelasticidade (adaptado de Carpinteri e Mainardi (1997)).

Tipo	J_g	J_e	G_g	G_e
I	> 0	$< \infty$	$< \infty$	> 0
II	> 0	$= \infty$	$< \infty$	$= 0$
III	$= 0$	$< \infty$	$= \infty$	> 0
IV	$= 0$	$= \infty$	$= \infty$	$= 0$

As funções do material são dadas por:

$$\begin{cases} J(t) = J_g + \chi_+ \int_0^\infty R_\varepsilon(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d\tau + J_+ t \\ G(t) = G_e + \chi_- \int_0^\infty R_\sigma(\tau) e^{-t/\tau} d\tau + G_- \delta(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

nas quais todos os coeficientes e funções são positivas.

As funções $R_\varepsilon(\tau)$ e $R_\sigma(\tau)$ são definidas como o *espectro de fluência* e o *espectro de relaxação*, respectivamente. As funções $R_\varepsilon(\tau)$ e $R_\sigma(\tau)$ serão denotadas pela função $R_*(\tau)$.

As contribuições das funções do material na integral da Eq. (3.8) são dadas por:

$$\begin{cases} \Psi(t) = \chi_+ \int_0^\infty R_\varepsilon(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d\tau \Rightarrow (-1)^n \frac{d^n \Psi}{dt^n} < 0, & n \in \mathbb{N} \\ \Phi(t) = \chi_- \int_0^\infty R_\sigma(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \Rightarrow (-1)^n \frac{d^n \Phi}{dt^n} > 0, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.9)$$

As funções não negativas $\Psi(t)$ e $\Phi(t)$ são definidas como funções de fluência e relaxação, respectivamente. Na equação anterior, $\Psi(t)$ é uma função crescente com $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(+\infty) = \chi_+$ ou $+\infty$, e $\Phi(t)$ é uma função decrescente com $\Phi(0) = \chi_-$ ou $+\infty$ e $\Phi(+\infty) = 0$.

A próxima seção trata dos modelos mecânicos, conforme descritos por Carpinteri e Mainardi (1997).

3.3 Modelos Mecânicos

Os modelos mecânicos são constituídos de molas e amortecedores lineares, e dentre os modelos mais utilizados têm-se os seguintes, que estão ilustrados na Fig. 3.1: o modelo constituído por uma mola (modelo de Hooke); modelo constituído por um amortecedor (modelo de Newton); modelo constituído por uma mola e um amortecedor em paralelo (modelo de Voigt), e o modelo constituído por uma mola e um amortecedor em série (modelo de Maxwell).

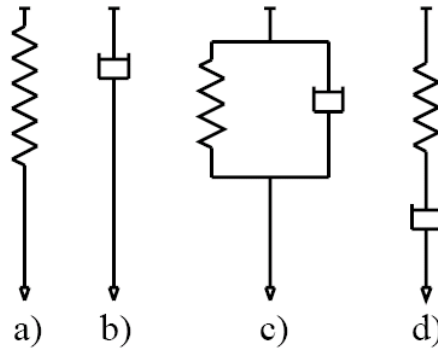


Figura 3.1 - Elementos de modelos mecânicos: a) Hooke, b) Newton, c) Voigt e d) Maxwell.

Para os modelos mecânicos apresentados, a força corresponde à tensão e o deslocamento corresponde à deformação. Para se chegar às funções do material, pode-se partir das equações governantes das relações tensão-deformação para os modelos mecânicos anteriormente citados.

O modelo de Hooke é representado por uma mola, que é um elemento elástico em que o deslocamento é proporcional à força:

$$\sigma(t) = m \varepsilon(t) \quad \begin{cases} J(t) = 1/m \\ G(t) = m \end{cases} \quad (3.10)$$

O modelo de Newton, por outro lado, é representado por um amortecedor, que é um elemento viscoso em que a taxa de deslocamento é proporcional à força:

$$\sigma(t) = b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \begin{cases} J(t) = t/b \\ G(t) = b \delta(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

Para o modelo de Voigt a relação tensão-deformação é dada por:

$$\sigma(t) = m \varepsilon(t) + b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \begin{cases} J(t) = \frac{1}{m} [1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}] \\ G(t) = m + b \delta(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

onde $\tau_\varepsilon = \frac{b}{m}$ é o tempo de retardamento.

O modelo de Maxwell é representado pela equação:

$$\sigma(t) + a \frac{d\sigma}{dt} = b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \begin{cases} J(t) = \frac{a}{b} + \frac{t}{b} \\ G(t) = \frac{b}{a} e^{-t/\tau_\sigma} \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $\tau_\sigma = a$ é o tempo de relaxação.

Observa-se que para os casos de corpos viscoelásticos representados pelos modelos mecânicos, tem-se que os modelos de Hooke e de Newton equivalem aos tipos I e IV, respectivamente, enquanto que os modelos de Voigt e de Maxwell são do tipo III e II, respectivamente. Vale lembrar que estes dois últimos modelos são os corpos viscoelásticos mais simples, para os tipos III e II (vide Tab. 3.1).

Para os modelos de Voigt e de Maxwell têm-se uma fluência da deformação e uma relaxação da tensão exponenciais. Além disso, o modelo de Voigt não exhibe relaxação da tensão, enquanto que o modelo de Maxwell apresenta uma fluência da deformação linear.

No caso de se adicionar uma mola em série à Fig. 3.1c, ter-se-á o modelo da Fig. 3.2a, ou, se adicionada em paralelo à Fig. 3.1d, ter-se-á a Fig 3.2b. Isto implica a adição de uma constante (maior que zero) ao módulo de relaxação de Maxwell e à flexibilidade de fluência de Voigt, o que resulta em $G_e > 0$ e $J_g > 0$. O modelo com estas características é chamado de Sólido Linear Padrão (SLP):

$$\left[1 + a \frac{d}{dt}\right] \sigma(t) = \left[m + b \frac{d}{dt}\right] \varepsilon(t) \quad \text{SLP} \quad \begin{cases} J(t) = J_g + \chi_+ [1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}] \\ G(t) = G_e + \chi_- e^{-t/\tau_\sigma} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} J_g = \frac{a}{b}, & \chi_+ = \frac{1}{m} - \frac{a}{b}, & \tau_\varepsilon = \frac{b}{m}, \\ G_e = m, & \chi_- = \frac{b}{a} - m, & \tau_\sigma = a \end{cases} \quad (3.15)$$

A condição $0 < m < b/a$ garante que χ_+ , χ_- são maiores que zero e por isso $0 < J_g < J_e < \infty$, $0 < G_e < G_g < \infty$ e $0 < \tau_\sigma < \tau_\epsilon < \infty$. O SLP é composto de três parâmetros, sendo o corpo viscoelástico mais simples do tipo I.

No caso de se adicionar um amortecedor em série à Fig. 3.1c, ter-se-á a Fig. 3.2c, ou, se adicionado em paralelo à Fig. 3.1d, obter-se-á o modelo da Fig. 3.2d. Esta adição resultará no corpo viscoelástico mais simples do tipo IV.

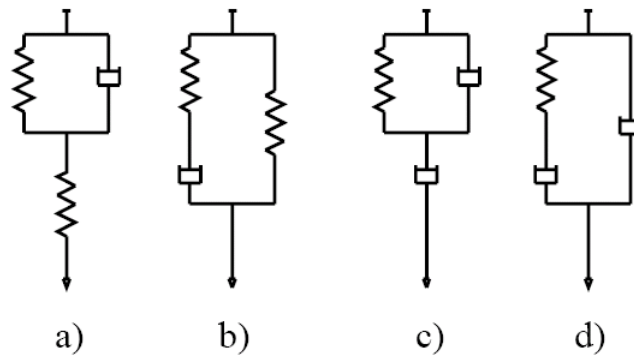


Figura 3.2 - a) Mola em série com Voigt, b) Mola em paralelo com Maxwell, c) Amortecedor em série com Voigt, d) Amortecedor em paralelo com Maxwell.

Como flexibilidades de fluência são somadas quando elementos são adicionados em série e módulos de relaxação são somados quando elementos são acoplados em paralelo (regra de combinação), podem ser formados modelos do tipo:

$$\begin{cases} J(t) = J_g + \sum_n J_n \left[1 - e^{-t/\tau_{\epsilon,n}} \right] + J_+ t, \\ G(t) = G_e + \sum_n G_n e^{-t/\tau_{\sigma,n}} + G_- \delta(t), \end{cases} \quad (3.16)$$

onde todos os coeficientes são não-negativos. As funções da Eq. (3.16) devem estar relacionadas de acordo com a Eq. (3.5). Por intermédio da transformada de Laplace, obtém-se uma relação tensão-deformação na forma de uma equação diferencial linear cujos coeficientes são constantes e positivos, e que é dada por:

$$\left[1 + \sum_{k=1}^p a_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \sigma(t) = \left[m + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \varepsilon(t), \quad p = q \quad \text{ou} \quad p = q + 1. \quad (3.17)$$

3.4 Modelos Viscoelásticos Fracionários

Estendendo os operadores fracionários aos modelos mecânicos clássicos, conseguem-se as equações de ordem fracionária, que são generalizações da Eq. (3.17):

$$\left[1 + \sum_{k=1}^p a_k \frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}} \right] \sigma(t) = \left[m + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}} \right] \varepsilon(t), \quad \alpha_k = k + \alpha - 1. \quad (3.18)$$

Para os modelos fracionários, as funções de fluência e relaxação são do tipo:

$$\begin{cases} \Psi(t) = \chi_+ \left\{ 1 - E_\alpha \left[-(t/\tau_\varepsilon)^\alpha \right] \right\} = \chi_+ \int_0^\infty R_\varepsilon(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d\tau, \\ \Phi(t) = \chi_- E_\alpha \left[-(t/\tau_\sigma)^\alpha \right] = \chi_- \int_0^\infty R_\sigma(\tau) e^{-t/\tau} d\tau. \end{cases} \quad (3.19)$$

Substituindo os sub-índices ε ou σ por $*$, obtêm-se as expressões para os espectros de retardamento e relaxação, respectivamente, que são idênticas:

$$R_*(\tau) = \frac{1}{\pi \tau} \frac{\sin(\alpha \tau)}{(\tau/\tau_*)^\alpha + (\tau/\tau_*)^{-\alpha} + 2 \cos(\alpha \tau)}. \quad (3.20)$$

Para uma melhor compreensão das funções espectral $R_*(\tau)$ e de relaxação $E_\alpha \left[-(t/\tau_*)^\alpha \right]$, são apresentados adiante dois gráficos destas funções para alguns valores de α . Adotando $\tau_* = 1$, os gráficos das funções são mostrados na Fig. 3.3 e na Fig. 3.4.

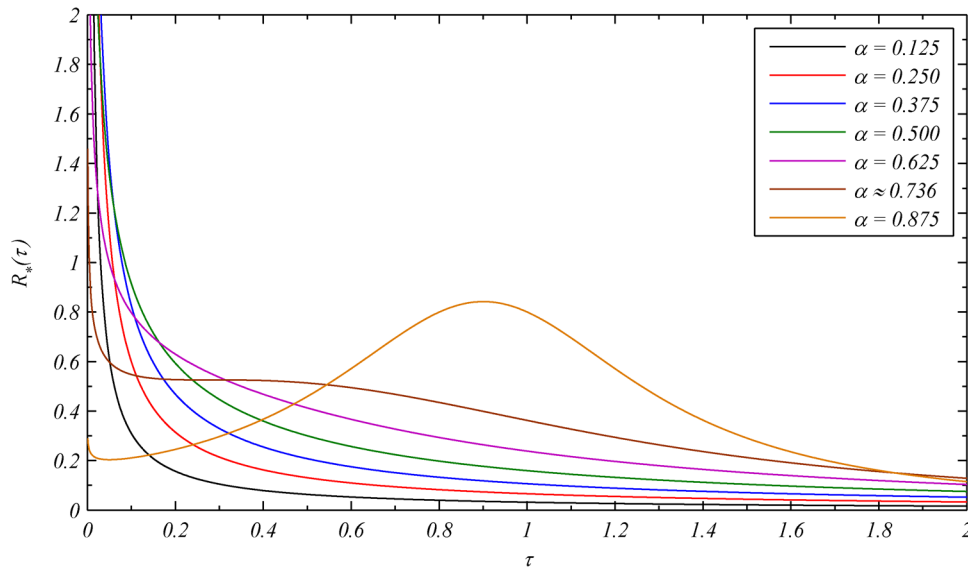


Figura 3.3 - A função espectral para diversos valores de α .

A Fig. 3.3 mostra que a função espectral pode apresentar várias formas diferentes. A função espectral é decrescente para τ quando $0 < \alpha < \alpha_*$, sendo que $\alpha_* \approx 0.736$ é a solução da equação $\alpha = \sin(\alpha\pi)$. Para valores maiores que α_* , a curva mostra, primeiramente, um mínimo e, posteriormente, um máximo. Quando $\alpha \rightarrow 1$ a função espectral tende à função impulso $\delta(\tau - \tau_*)$.

A Fig. 3.4, mostra que a função de relaxação $E_\alpha(-t^\alpha)$ apresenta um comportamento que difere em relação à função exponencial quando se tem $\alpha = 1$. Na equação (3.21), ficam evidentes assíntotas para $E_\alpha(-t^\alpha)$ quando $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow +\infty$,

$$E_\alpha(-t^\alpha) \sim \begin{cases} 1 - t^\alpha / \Gamma(1 + \alpha), & \text{quando } t \rightarrow 0^+, \\ t^{-\alpha} / \Gamma(1 - \alpha), & \text{quando } t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.21)$$

Fazendo uma comparação entre a função exponencial que aparece nos modelos já mencionados (para $\alpha = 1$) e a função de relaxação que aparece nos modelos fracionários, verifica-se um decrescimento muito rápido para $t \rightarrow 0^+$; quando $t \rightarrow +\infty$, ocorre um decrescimento muito lento.

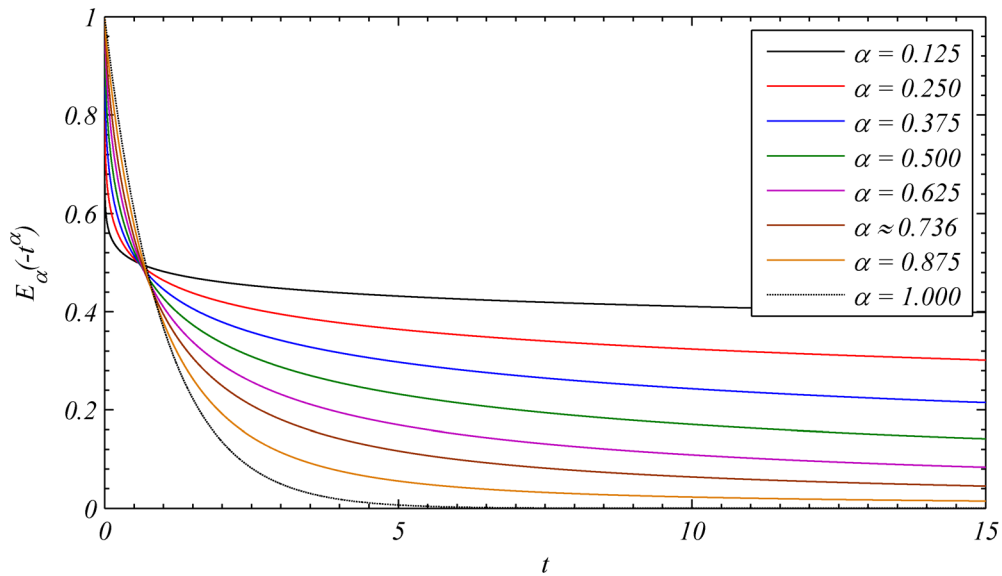


Figura 3.4 - Função de relaxação para diversos valores de α .

A próxima seção trata do módulo complexo do modelo de Maxwell com derivadas fracionárias, com base no trabalho de Jia *et al.* (2007).

3.5 Módulo Complexo do Modelo de Maxwell Fracionário

O modelo fracionário de Maxwell é expresso segundo:

$$\sigma + \lambda \frac{d^r \sigma}{dt^r} = \mu \frac{d^q \varepsilon}{dt^q} \quad (3.22)$$

onde λ e μ são parâmetros do modelo fracionário, r e q são as ordens das derivadas fracionárias ($0 < r < 1$ e $0 < q < 1$), $\sigma(t)$ é a tensão e $\varepsilon(t)$ é a deformação. Os operadores

$\frac{d^r[\]}{dt}$ e $\frac{d^q[\]}{dt}$ denotam derivadas fracionárias. Se $r = q = 1$, o modelo coincide com o modelo clássico de Maxwell, e se $\lambda = 0$ e $q = 1$, o modelo se mostra idêntico ao modelo de fluido Newtoniano.

Aplicando a transformada de Fourier à Eq. (3.22), consegue-se obter o módulo complexo do MMDF. Com isso, os módulos de armazenamento e de perda de cisalhamento, são:

$$G_1(\omega) = \frac{\mu\omega^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) \left[1 + \lambda\omega^r \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right)\right] + \mu\lambda\omega^{q+r} \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right)}{1 + 2\lambda\omega^r \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) + \lambda^2 \omega^{2r}} \quad (3.23)$$

$$G_2(\omega) = \frac{\mu\omega^q \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right) \left[1 + \lambda\omega^r \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right)\right] - \mu\lambda\omega^{q+r} \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right)}{1 + 2\lambda\omega^r \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) + \lambda^2 \omega^{2r}} \quad (3.24)$$

Simplificando as Eqs. (3.23) e (3.24), tem-se:

$$G_1(\omega) = \frac{\mu\omega^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) + \mu\lambda\omega^{q+r} \cos\left(\frac{\pi}{2}(q-r)\right)}{1 + 2\lambda\omega^r \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) + \lambda^2 \omega^{2r}} \quad (3.25)$$

$$G_2(\omega) = \frac{\mu\omega^q \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right) + \mu\lambda\omega^{q+r} \sin\left(\frac{\pi}{2}(q-r)\right)}{1 + 2\lambda\omega^r \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) + \lambda^2 \omega^{2r}} \quad (3.26)$$

3.5.1 Restrições termodinâmicas

Para que um modelo de fenômenos viscoelásticos seja fiel, o mesmo deve apresentar trabalho interno não-negativo e taxa de dissipação de energia não-negativa. Definindo restrições referentes a parâmetros do modelo, pode-se assegurar a validade destas restrições. De acordo com Jia *et al.* (2007), Bagley discutiu restrições termodinâmicas ao modelo fracionário de Kelvin-Voigt.

Considerando um material termorreologicamente simples, uma temperatura uniforme (no tempo e no espaço) pode ser introduzida através de uma frequência reduzida. Os

parâmetros r , q , λ e μ podem ser considerados constantes e independentes da temperatura. Resta o problema de variação da temperatura devida às fontes externas de calor e dissipação de energia. Bagley e Torvik observaram que um elemento de material sobre o qual atua uma deformação uniforme e em regime permanente deveria ficar arbitrariamente próximo de uma temperatura uniforme e permanente, se a condutividade for suficientemente grande e o elemento for suficientemente pequeno. Condições podem ser determinadas por se considerar um estado de temperatura uniforme em um material submetido à aplicação de deformação senoidal uniforme. A deformação senoidal conduzirá a uma tensão senoidal após o transiente ter cessado.

Admite-se então que a deformação seja dada por:

$$\varepsilon = \cos(\omega t) \quad (3.27)$$

Partindo da deformação, chega-se à tensão resultante, dada por:

$$\begin{aligned} \sigma &= |G(i\omega)| \cos(\omega t + \phi) = |G(i\omega)| \cos(\omega t) \cos(\phi) - |G(i\omega)| \sin(\omega t) \sin(\phi) \\ &= G_1(\omega) \cos(\omega t) - G_2(\omega) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde ϕ é o ângulo de fase pelo qual a tensão atrasa a deformação, e:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \operatorname{tg}(\delta) = \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)} \quad (3.29)$$

$G_1(\omega)$ e $G_2(\omega)$ são as partes real e imaginária do módulo complexo $G(i\omega)$, respectivamente, e $\operatorname{tg}(\delta)$ é a taxa de energia dissipada pelo material, e será não-negativa para todas as frequências positivas, ou seja:

$$\begin{cases} G_2(\omega) \geq 0 \\ G_1(\omega) \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} G_2(\omega) \leq 0 \\ G_1(\omega) \leq 0 \end{cases}; \quad 0 < \omega < \infty. \quad (3.30)$$

Partindo das Eqs. (3.27) e (3.28), a taxa de trabalho interno é:

$$\sigma(t) \dot{\epsilon}(t) = \omega |G(i\omega)| \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \omega |G(i\omega)| [\cos(2\omega t + \phi) + \cos(\phi)]. \quad (3.31)$$

O trabalho interno possui uma variação não-negativa para todas as frequências, e $\cos(2\omega t + \phi)$ será não-positivo para algumas frequências; logo $\cos(\phi)$ terá que ser maior ou igual a zero. A Eq. (3.28) leva também a:

$$G_2(\omega) = |G(i\omega)| \cos(\phi). \quad (3.32)$$

Fica evidente que a parte imaginária não-negativa do módulo complexo é igual a $\cos(\phi)$ não-negativo para todas as frequências. É proposta então a seguinte desigualdade:

$$G_2(\omega) > 0; \quad 0 < \omega < \infty. \quad (3.33)$$

Através das Eqs. (3.30) e (3.33), obtêm-se as conclusões que se seguem:

$$G_1(\omega) \geq 0; \quad 0 < \omega < \infty. \quad (3.34)$$

Se as restrições das Eqs. (3.33) e (3.34) forem satisfeitas, o modelo terá trabalho interno não-negativo e taxa de dissipação de energia não-negativa.

Para assegurar que as restrições sejam satisfeitas, restrições aos quatro parâmetros do modelo fracionário devem ser determinadas. Existem apenas duas desigualdades nas Eqs. (3.33) e (3.34) resultantes a partir do MMDF, mas com um total de quatro parâmetros. Logo, é preciso achar outras desigualdades. Na Eq. (3.25), o numerador tem dois termos; se o primeiro termo domina o segundo, o segundo pode ser desconsiderado, caso para o qual a frequência do movimento é bem baixa. Por outro lado, quando a frequência do movimento é alta, o segundo prepondera sobre o primeiro, e assim o primeiro é desconsiderado. Além disso, na mesma equação, o denominador do módulo é evidentemente positivo, de tal modo que um exame dos casos limites para um numerador obtido quando a frequência do movimento for bem baixa, primeiramente, e alta, posteriormente, leva às duas desigualdades adicionais:

$$\mu \omega^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \geq 0 \quad (3.35)$$

e

$$\mu \lambda \omega^{r+q} \cos\left[\frac{\pi}{2}(q-r)\right] \geq 0. \quad (3.36)$$

A Eq. (3.35) é positiva para frequências baixas, enquanto que a Eq. (3.36) é também positiva, mas para frequências altas. Fazendo as mesmas análises na Eq. (3.26), obtém-se:

$$\mu \omega^q \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \geq 0 \quad (3.37)$$

para frequências baixas. Para frequências altas, tem-se que:

$$\mu \lambda \omega^{r+q} \sin\left[\frac{\pi}{2}(q-r)\right] \geq 0. \quad (3.38)$$

Como as derivadas fracionárias são de ordens $0 < r < 1$ e $0 < q < 1$, dadas na definição da Eq. (3.36), afirma-se que as inequações dadas nas Eqs. (3.35) e (3.37) são satisfeitas quando:

$$\mu \geq 0 \quad (3.39)$$

e a inequação dada em (3.36) é satisfeita quando:

$$\lambda \geq 0. \quad (3.40)$$

Com isso, a inequação dada em (3.38) conduz a:

$$q \geq r. \quad (3.41)$$

A Tab. 3.2 mostra as restrições aos parâmetros do MMDF. Estas restrições termodinâmicas levam o MMDF a atender aos requisitos de trabalho interno não-negativo e de taxa de dissipação de energia não-negativa.

As restrições termodinâmicas aos quatro parâmetros do MMDF são:

$$\mu \geq 0,$$

$$\lambda \geq 0$$

e

$$1 \geq q \geq r > 0.$$

3.5.2 Análise do comportamento viscoelástico do MMDF

A natureza de um material viscoelástico é caracterizada por sua relaxação de tensão e por sua resposta de fluência, que são funções importantes para avaliação da confiabilidade do modelo, associada à precisão com a qual este último prevê o que acontece na realidade. Análises da relaxação de tensão e da resposta de fluência podem colaborar para determinar se o modelo está ou não em conformidade para realizar a descrição de materiais fluido-viscoelásticos, e informar sua elasticidade inicial e sua velocidade de fluência, por exemplo. Segundo Jia *et al.* (2007), a flexibilidade de fluência e o módulo de relaxação do MMDF são obtidos usando-se a função Mittag-Leffler, embora estas funções do material possam ser determinadas de forma diferente.

3.5.2.1. Análise de fluência

Aqui é realizada uma avaliação da deformação do material sujeito a uma tensão constante $\sigma(t) = h(t)$. A deformação $\varepsilon(t) = J(t)$, para este caso, é definida como sendo a flexibilidade de fluência.

Para facilitar o cálculo da deformação de fluência, assume-se que:

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda}{\mu} h(t) + \varepsilon_0(t). \quad (3.42)$$

Substituindo a tensão constante e a equação de deformação de fluência na Eq. (3.22), chega-se a:

$$h(t) = \mu D^q [\varepsilon_0(t)] \quad (3.43)$$

pela qual pode-se achar $\varepsilon_0(t)$. Aplicando a transformada de Laplace à Eq. (3.43), tem-se que:

$$\mu s^q \varepsilon_0^*(s) = \frac{1}{s} \quad (3.44)$$

onde $\varepsilon_0^*(s)$ é a transformada de $\varepsilon_0(t)$ e $s^q \varepsilon_0^*(s)$ é a transformada da derivada fracionária de ordem q de $\varepsilon_0(t)$. Isolando $\varepsilon_0^*(s)$, vem:

$$\varepsilon_0^*(s) = \frac{1}{\mu s^{q+1}}. \quad (3.45)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtém-se:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{u(t)}{\mu \Gamma(q+1)} \quad (3.46)$$

sendo $u(t)$ a função degrau unitário:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Fazendo a substituição da Eq. (3.46) na Eq. (3.42), chega-se a:

$$\varepsilon(t) = J(t) = \frac{\lambda}{\mu} h(t) + \frac{u(t)}{\mu \Gamma(q+1)}. \quad (3.48)$$

Quando $t \rightarrow 0^+$, tem-se:

$$J_0(0^+) = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (3.49)$$

Na Eq. (3.22), tem-se que $0 < q < 1$. Assim, pode-se afirmar que a função de fluência é uma função monotonicamente crescente do tempo, tendo valor inicial $\frac{\lambda}{\mu}$ e taxa de aumento menor do que a unidade.

3.5.2.2. Análise da relaxação

Para fazer a análise da relaxação, deve-se avaliar a variação da tensão com o passar do tempo para uma deformação constante $\varepsilon(t) = h(t)$. A função $\sigma(t) = G(t)$ é definida como o módulo de relaxação para esta situação. A tensão $\sigma(t)$ pode ser dividida em duas componentes:

$$\sigma(t) = \frac{\mu}{\lambda} h(t) + \sigma_0(t). \quad (3.50)$$

Substituindo a Eq. (3.50) e $\varepsilon(t) = h(t)$ na Eq. (3.22), escreve-se:

$$\sigma_0(t) + \lambda D^r [\sigma_0(t)] = -\frac{\mu}{\lambda} h(t). \quad (3.51)$$

Aplicando a transformada de Laplace à Eq. (3.51), tem-se:

$$\sigma_0^*(s) + \lambda s^r \sigma_0^*(s) = -\frac{\mu}{\lambda} \quad (3.52)$$

onde $\sigma_0^*(s)$ é a transformada de $\sigma_0(t)$ e $s^r \sigma_0^*(s)$ é a transformada da derivada fracionária de ordem r de $\sigma_0(t)$. Resolvendo para $\sigma_0^*(s)$ chega-se a:

$$\sigma_0^*(s) = -\frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{(1 + \lambda s^r)}. \quad (3.53)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace à Eq. (3.53) vem:

$$\sigma_0(t) = -\frac{\mu}{\lambda} \left(1 - E_r \left[-\frac{t^r}{\lambda} \right] \right) h(t). \quad (3.54)$$

Substituindo a Eq. (3.54) na Eq. (3.50), obtém-se a função de relaxação de tensão, dada por:

$$\sigma(t) = \frac{\mu}{\lambda} E_r \left[-\frac{t^r}{\lambda} \right] h(t). \quad (3.55)$$

As Eqs. (3.54) e (3.55) apresentam a função de Mittag-Leffle, e substituindo elas no resultado da Eq. (3.50), produzindo a seguinte função de relaxação de tensão:

$$\sigma(t) = G(t) = \frac{\mu}{\lambda} h(t) - \frac{\mu}{\lambda} (1 - f(u, \theta)), \quad (3.56)$$

onde:

$$f(u, \theta) = \int_0^\infty \frac{u^{r-1} \sin(r\pi) \exp(-u\theta)}{\pi(1 + 2u^r \cos(r\pi) + u^{2r})} du \quad (3.57)$$

e

$$\theta = t \lambda^{-1/r}. \quad (3.58)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow \infty$, e assim:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(u, \theta) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{u^{r-1} \sin(r\pi) \exp(-u\theta)}{\pi(1 + 2u^r \cos(r\pi) + u^{2r})} du \quad (3.59)$$

Substituindo a Eq. (3.59) na Eq. (3.56), obtém-se a tensão num tempo infinito, dada por:

$$G(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu}{\lambda} h(t) - \frac{\mu}{\lambda} \right) = 0 \quad (3.60)$$

e a taxa de relaxação é:

$$\dot{G}(t) = -\frac{\mu}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{u^r \lambda^{-1/r} \sin(r\pi) \exp(-u\theta)}{\pi(1 + 2u^r \cos(r\pi) + u^{2r})} du < 0. \quad (3.61)$$

A Eq. (3.61) se verifica para uma deformação do tipo degrau unitário e tomando por base as restrições da Tab. 3.2, garantindo o decrescimento da taxa de relaxação. Assim, a função $f(u, \theta)$ é monotonicamente decrescente. Logo, $G(t)$ também é uma função do tempo monotonicamente decrescente, como representado na Fig. 3.5 (ela decresce para zero quando $t \rightarrow \infty$). Constata-se que $\dot{G}(t)$ é diretamente dependente do parâmetro r . Devido ao fato de vários materiais serem distintos entre si, têm-se vários expoentes fracionários r distintos, com $G(t)$ decrescendo em taxas de fluências diferentes.

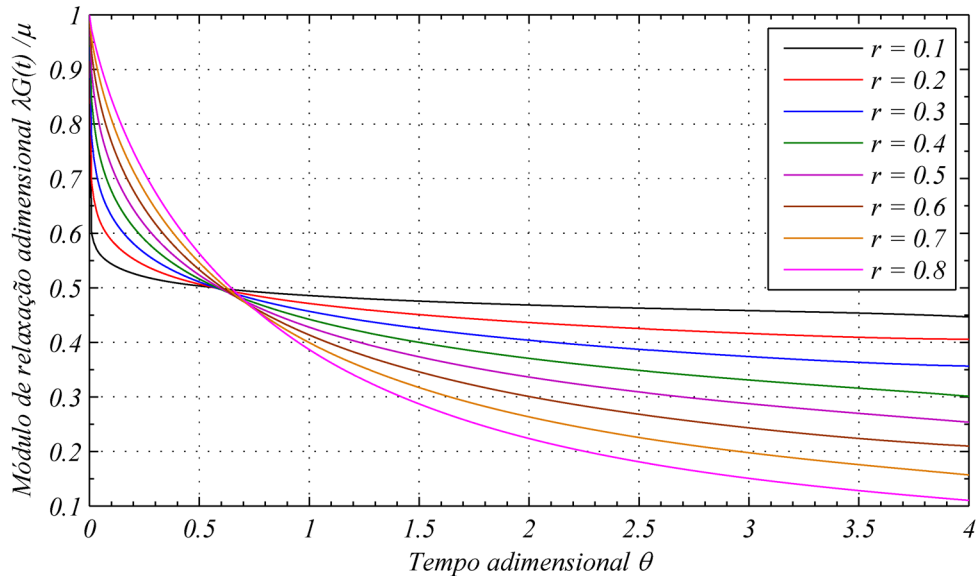


Figura 3.5 - Módulo de relaxação adimensional.

3.6 Outras aplicações do cálculo fracionário em viscoelasticidade

No que diz respeito a aplicações mais recentes do conceito de derivadas fracionárias em Engenharia, a título de exemplo, Maia (1998) discute possíveis aplicações em análise modal e mostra que os modelos de amortecimento usuais podem ser descritos como casos particulares de um modelo mais geral, utilizando cálculo fracionário.

Considerando-se, por exemplo, um sistema composto por uma massa (m), uma mola (k) e um amortecedor (c), com uma força aplicada $f(t) = Fe^{i\omega t}$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + i\alpha x = f(t), \quad (3.62)$$

pode-se fazer a introdução do conceito de derivadas fracionárias para descrever as forças dissipativas presentes no sistema, o que leva ao modelo geral:

$$m\ddot{x} + kx + \sum_{j=1}^l g_j D^{v_j} x = f(t), \quad (3.63)$$

onde g_j são coeficientes complexos e l é o número de componentes das forças de amortecimento (v_j indica a ordem da derivada fracionária associada a cada g_j).

Para um sistema com N graus de liberdade, uma função de resposta de frequência (FRF) para tal sistema pode ser expressa sob a seguinte forma geral:

$$H(i\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r + iB_r\omega^{v_r}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\gamma_r\omega_r^{2-v_r}\omega^{v_r}}, \quad (3.64)$$

onde ω_r^2 e γ_r representam, respectivamente, a frequência natural e o fator de amortecimento relacionados a cada um dos graus de liberdade, e A_r e B_r são coeficientes reais.

Bagley e Torvik (1983) mostram aplicações da derivada fracionária em uma modelagem mais precisa da viscoelasticidade e apresentam um modelo matemático empírico baseado em derivadas de ordem fracionária com o objetivo de representar o comportamento mecânico de elastômeros por meio de ajustes de curvas experimentais, dado por:

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + E_1 D^\alpha \varepsilon(t), \quad (3.66)$$

onde E_0 , E_1 e α são parâmetros do modelo.

Este modelo representa a tensão $\sigma(t)$ dependente do tempo como uma superposição de um termo elástico $E_0\varepsilon(t)$ e um termo viscoelástico contendo uma derivada fracionária de ordem α . A aplicação da transformada de Fourier com respeito ao tempo t no intervalo $(-\infty, +\infty)$ leva a:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \left[E_0 + E_1 (i\omega)^\alpha \right] \tilde{\varepsilon}(\omega), \quad (3.67)$$

onde ω é a variável de Fourier e $\tilde{\sigma}(\omega)$ e $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ são as transformadas de Fourier relativas a $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$, respectivamente.

Heymans e Podlubny (2005) apresentam três modelos de ordem fracionária, sendo:

- o modelo fracionário de Voigt, que associa uma mola em paralelo com um amortecedor, considerado na modelagem viscoelástica. A equação constitutiva deste modelo é:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + K {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (3.68)$$

onde E , K e α são parâmetros do modelo.

- o modelo fracionário de Maxwell, que descreve o comportamento de um sólido viscoelástico, por meio de uma mola, que expressa elasticidade instantânea, associada em série a um amortecedor. A equação constitutiva do modelo de Maxwell pode ser dada por qualquer uma das duas fórmulas seguintes, que são equivalentes:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{K} {}_0D_t^{-\alpha} \sigma(t) \quad (3.69)$$

$$\frac{1}{E} {}_0D_t^\alpha \sigma(t) + \frac{1}{K} \sigma(t) = {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (3.70)$$

onde E , K e α são parâmetros do modelo.

- o modelo fracionário de Zener é, dentre os modelos de ordem fracionária de viscoelasticidade citados anteriormente, o mais geral. A equação constitutiva deste método é

$$\sigma(t) + \nu {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = \lambda \varepsilon(t) + \mu {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (3.71)$$

onde $\lambda = E_\infty$ é o módulo do termo longo, $\mu = K(E_0 - E_\infty)/E_0$, $\nu = \mu/E_0$, e E_0 é o módulo instantâneo.

Para dedução das equações constitutivas viscoelásticas fracionárias parte-se do modelo viscoelástico (tradicional) de três parâmetros, mostrado na Fig. 3.6, que coincide com o modelo de Maxwell quando $E_1 = 0$ e com o modelo de Kelvin-Voigt quando $E_2 \rightarrow \infty$.

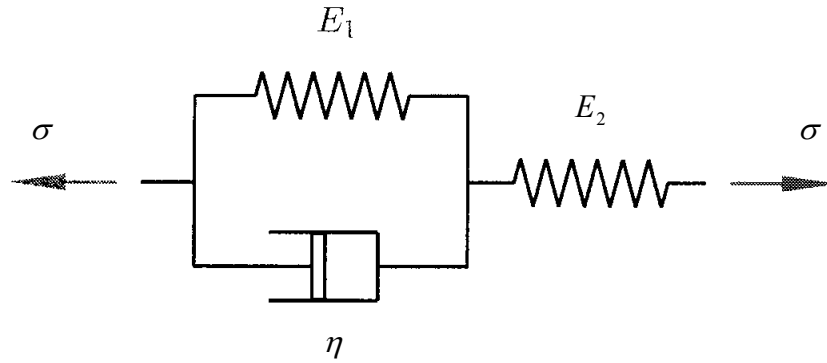


Figura 3.6 - Modelo de 3 parâmetros.

A equação constitutiva do modelo de três parâmetros é:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \frac{d}{dt} \sigma = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \epsilon + \eta \frac{E_2}{E_1 + E_2} \frac{d}{dt} \epsilon \quad (3.72)$$

e pode ser generalizada pela introdução de somatórios:

$$\sigma + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} \sigma = b_0 \epsilon + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^k}{dt^k} \epsilon \quad (3.73)$$

Outra generalização pode ser introduzida pela utilização de derivadas fracionárias:

$$\sigma + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}} \sigma = b_0 \epsilon + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}} \epsilon \quad (3.74)$$

A Eq. (3.74) pode ser então estendida para um caso mais geral tridimensional, e pode-se separar as componentes hidrostática (sub-índice h) e deviatórica (sub-índice d) das tensões e das deformações, levando a:

$$\{\sigma_h\} + \sum_{k=1}^n [A_h]_k \frac{d^{\alpha_{h,k}}}{dt^{\alpha_{h,k}}} \{\sigma_h\} = [C_h] \{\epsilon_h\} + \sum_{k=1}^n [B_h]_k \frac{d^{\beta_{h,k}}}{dt^{\beta_{h,k}}} \{\epsilon_h\} \quad (3.75)$$

$$\{\sigma_d\} + \sum_{k=1}^n [A_d]_k \frac{d^{\alpha_{d,k}}}{dt^{\alpha_{d,k}}} \{\sigma_d\} = [C_d] \{\epsilon_d\} + \sum_{k=1}^n [B_d]_k \frac{d^{\beta_{d,k}}}{dt^{\beta_{d,k}}} \{\epsilon_d\} \quad (3.76)$$

onde a notação $\{\bullet\}$ indica um vetor e a notação $[\bullet]$ indica uma matriz. As matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ dependem do comportamento do material.

As últimas três equações são equações diferenciais fracionárias. Uma solução única destas equações só pode ser obtida pela especificação de condições iniciais adequadas. Ressalta-se que o tempo $t = 0$ denota, fisicamente, o momento a partir do qual uma atividade é iniciada, antes do qual o material se encontra totalmente relaxado. Portanto, todas as condições iniciais são nulas. Levando em consideração a “memória fraca” do meio viscoelástico, materiais que apresentam um histórico não nulo também são passíveis de relaxação, motivando a utilização de condições iniciais nulas também para estes casos.

Para materiais isotrópicos, as tensões e deformações hidrostáticas e deviatóricas podem ser calculadas a partir dos vetores de tensão e de deformação:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}\}^T \quad (3.77)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx}\}^T \quad (3.78)$$

através das relações:

$$\{\sigma_h\} = [T_h]\{\sigma\} \quad \{\sigma_d\} = [T_d]\{\sigma\}$$

$$\{\varepsilon_h\} = [T_h]\{\varepsilon\} \quad \{\varepsilon_d\} = [T_d]\{\varepsilon\}$$

onde:

$$[T_h] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } [T_d] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Além disso, para materiais isotrópicos tem-se também que:

$$[A_h]_k = a_{h,k} [I], [A_d]_k = a_{d,k} [I]$$

$$[B_h]_k = b_{h,k} [I], [B_d]_k = b_{d,k} [I]$$

$$[C_h] = c_h [I], [C_d] = c_d [I]$$

onde $[I]$ é a matriz identidade.

As Eqs. (3.75) e (3.76) são acopladas pelo estado de tensão $\{\sigma\} = \{\sigma_h\} + \{\sigma_d\}$ e pelo estado de deformação $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_h\} + \{\varepsilon_d\}$. Somando estas equações, chega-se a:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} + \sum_{k=1}^n \left(a_{h,k} [T_h] \frac{d^{\alpha_{h,k}}}{dt^{\alpha_{h,k}}} + a_{d,k} [T_d] \frac{d^{\alpha_{d,k}}}{dt^{\alpha_{d,k}}} \right) \{\sigma\} = \\ = [C] \{\varepsilon\} + \sum_{k=1}^n \left(b_{h,k} [T_h] \frac{d^{\beta_{h,k}}}{dt^{\beta_{h,k}}} + b_{d,k} [T_d] \frac{d^{\beta_{d,k}}}{dt^{\beta_{d,k}}} \right) \{\varepsilon\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde:

$$[C] = c_h [T_h] + c_d [T_d] \quad (3.81)$$

descreve a relação instantânea entre a tensão e a deformação.

Caso o material seja puramente elástico, isto é, $a_{h,k} = a_{d,k} = b_{h,k} = b_{d,k} = 0$, o confronto com a lei de Hooke resulta em:

$$c_h = 3K, \quad c_d = 2G \quad (3.82)$$

onde K é o módulo de rigidez e G é o módulo de cisalhamento.

Vale observar que o modelo de Kelvin-Voigt apresenta apenas derivadas das tensões. Assim, o modelo generalizado de Kelvin-Voigt é obtido pela imposição $a_{h,k} = a_{d,k} = 0$.

A próxima seção trata-se da formulação de um elemento finito com comportamento viscoelástico destinado a simulações no domínio do tempo, com base no trabalho de Schmidt e Gaul (2002).

3.7 Incorporação de modelos viscoelásticos fracionários em modelos de elementos finitos

Visando à modelagem de estruturas mais complexas, as equações constitutivas viscoelásticas fracionárias podem ser implementadas em uma formulação por elementos finitos. A equação do movimento obtida pode ser resolvida diretamente através de métodos de integração convencionais. Segundo a teoria do método dos elementos finitos, a formulação por deslocamentos se baseia em:

$$\{u(\{x\}, t)\} = [H(\{x\})]\{\tilde{u}(t)\} \quad (3.83)$$

onde $\{u(\{x\}, t)\}$ é o campo de deslocamento para um elemento arbitrário, $\{\tilde{u}(t)\}$ é o vetor de deslocamentos nodais generalizados (deslocamentos e rotações) e $[H(\{x\})]$ é a matriz das funções de forma.

O campo de deformações, por outro lado, pode ser expresso segundo:

$$\{\varepsilon(\{x\}, t)\} = [B(\{x\})]\{\tilde{u}(t)\} \quad (3.84)$$

onde $[B(\{x\})]$ define as derivadas espaciais adequadas dos deslocamentos generalizados.

A equação do movimento em nível elementar pode ser obtida a partir do princípio do trabalho virtual, resultando em:

$$\int_V [B(\{x\})]^T \{\sigma(\{x\}, t)\} dV + [M]\{\ddot{\tilde{u}}(t)\} = \{r(t)\} \quad (3.85)$$

onde V é o volume definido pelo elemento e $\{r(t)\}$ é o vetor de forças externas e de corpo aplicadas. A matriz de massa $[M]$ é dada por:

$$[M] = \int_V \rho [H]^T [H] dV \quad (3.86)$$

sendo ρ a massa específica do material. Explicitando apenas a dependência do tempo, a equação do movimento resultante é:

$$\int_V [B]^T \{\sigma(t)\} dV + [M] \{\ddot{u}(t)\} = \{r(t)\} \quad (3.87)$$

O vetor de tensões $\{\sigma(t)\}$ é derivado a partir da Eq. (3.80) fazendo uso da formulação discreta de Grünwald para derivadas fracionárias. Assim procedendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \{\sigma(t)\} + \sum_{k=1}^n \left(a_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{h,k}} [T_h] \sum_{j=0}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\alpha_{h,k})} \left\{ \sigma \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) + \right. \\ \left. + a_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{d,k}} [T_d] \sum_{j=0}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\alpha_{d,k})} \left\{ \sigma \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) \right) = \\ = [C] \{\varepsilon(t)\} + \sum_{k=1}^n \left(b_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{h,k}} [T_h] \sum_{j=0}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\beta_{h,k})} \left\{ \varepsilon \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) + \right. \\ \left. + b_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{d,k}} [T_d] \sum_{j=0}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\beta_{d,k})} \left\{ \varepsilon \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.88)$$

A Eq. (3.88) pode ser resolvida explicitamente para $\{\sigma(t)\}$. Utilizando a Eq. (3.84) e a identidade $A_1 := 1$, escreve-se:

$$\begin{aligned}
\{\sigma(t)\} = & \left[[I] + \sum_{k=1}^n \left(a_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{h,k}} [T_h] + a_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{d,k}} [T_d] \right) \right]^{-1} \times \\
& \times \left[\left([C] + \sum_{k=1}^n \left(b_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{h,k}} [T_h] + b_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{d,k}} [T_d] \right) \right) [B] \{\tilde{u}(t)\} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^n \left(b_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{h,k}} [T_h] [B] \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\beta_{h,k})} \left\{ \tilde{u} \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) + \right. \\
& + b_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{d,k}} [T_d] [B] \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\beta_{d,k})} \left\{ \tilde{u} \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) - \\
& - a_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{h,k}} [T_h] \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\alpha_{h,k})} \left\{ \sigma \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) - \\
& \left. \left. - a_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{d,k}} [T_d] \sum_{j=0}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\alpha_{d,k})} \left\{ \sigma \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) \right] \right] \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Das Eqs. (3.89) e (3.87), tem-se:

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [K^*] \{\tilde{u}(t)\} = \{r^*(t)\} \quad (3.90)$$

onde:

$$[K^*] = \int_V [B]^T [F]^{-1} [C^*] [B] dV \quad (3.91)$$

é a matriz de rigidez modificada, expressa em função das seguintes matrizes:

$$[F] = \left[[I] + \sum_{k=1}^n \left(a_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{h,k}} [T_h] + a_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{d,k}} [T_d] \right) \right] \quad (3.92)$$

$$[C^*] = \left[[C] + \sum_{k=1}^n \left(b_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{h,k}} [T_h] + b_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{d,k}} [T_d] \right) \right] \quad (3.93)$$

e:

$$\begin{aligned}
\{r^*(t)\} = & \{r(t)\} - [\Phi_h] \sum_{k=1}^n \left[b_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{h,k}} \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\beta_{h,k})} \left\{ \tilde{u} \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) \right] - \\
& - [\Phi_d] \sum_{k=1}^n \left[b_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\beta_{d,k}} \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\beta_{d,k})} \left\{ \tilde{u} \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) \right] + \\
& + \int_V [B]^T [F]^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[a_{h,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{h,k}} [T_h] \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\alpha_{h,k})} \left\{ \sigma \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) \right] \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n \left[a_{d,k} \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha_{d,k}} [T_d] \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\alpha_{d,k})} \left\{ \sigma \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right\} \right) \right] dV
\end{aligned} \tag{3.94}$$

é o vetor de esforços modificados, sendo:

$$[\Phi_h] = \int_V [B]^T [F]^{-1} [T_h] [B] dV \tag{3.95}$$

e:

$$[\Phi_d] = \int_V [B]^T [F]^{-1} [T_d] [B] dV \tag{3.96}$$

Observa-se que, em contraste com a integral avaliada sobre as tensões, que deve ser resolvida explicitamente a cada passo de tempo, a integral sobre as deformações pode ser simplificada pela decomposição $\{\varepsilon(\{x\}, t)\} = [B(\{x\})]\{\tilde{u}(t)\}$ e calculada apenas uma única vez para cada elemento, resultando nas matrizes $[\Phi_h]$ e $[\Phi_d]$.

A matriz $[K^*]$ pode ser interpretada como uma matriz de rigidez modificada inicial. Os outros termos presentes no segundo membro da Eq. (3.94) são dependentes do histórico tanto das tensões como das deformações hidrostáticas e deviatóricas. Se forem vistos como representativos de forças externas adicionais, a Eq. (3.90) pode ser interpretada como sendo a equação de um movimento puramente elástico. Isto mostra que estas forças adicionais, se assim interpretadas, são as responsáveis pelo comportamento dinâmico do material considerando o efeito viscoelástico.

O modelo de Kelvin-Voigt generalizado que inclui derivadas fracionárias, como já mencionado, pode ser obtido pela imposição $a_{h,k} = a_{b,k} = 0$. Isto implica $[F] = [I]$, bem como no desaparecimento da integral correspondente da Eq. (3.94). Com isso, o esforço computacional para resolução da equação do movimento (Eq. (3.90)) por intermédio do modelo de Kelvin-Voigt é bem inferior àquele gasto na resolução da mesma equação utilizando o modelo fracionário de três parâmetros. A quantidade de memória exigida também é menor, já que apenas o histórico dos deslocamentos nodais deve ser armazenado a cada passo de tempo, enquanto que, para o modelo fracionário de três parâmetros, também há a necessidade de armazenar os valores que compõem o histórico das tensões.

Da Eq. (3.90), ou das Eqs. (3.87) e (3.80), tem-se que a equação do movimento utilizando o modelo de Kelvin-Voigt é da forma:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [\Phi_h] \sum_{k=1}^n \left(b_{h,k} \frac{d^{\beta_{h,k}}}{dt^{\beta_{h,k}}} \{\tilde{u}(t)\} \right) + [\Phi_d] \sum_{k=1}^n \left(b_{d,k} \frac{d^{\beta_{d,k}}}{dt^{\beta_{d,k}}} \{\tilde{u}(t)\} \right) + [K]\{\tilde{u}(t)\} = \{r(t)\} \quad (3.97)$$

onde:

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV \quad (3.98)$$

denota a matriz de rigidez.

A Eq. (3.97) pode ser vista como uma generalização da equação do movimento tradicional pelo uso de amortecimento viscoso proporcional à velocidade, tal qual o amortecimento de Rayleigh, que é utilizado com frequência nos códigos de elementos finitos.

3.7.1 Resolução numérica das equações do movimento

A implementação da Eq. (3.90) em um código de elementos finitos pela utilização de um processo direto de integração é semelhante à implementação de uma equação do movimento de um sistema puramente elástico, com exceção da necessidade de cálculo da matriz de rigidez modificada e do vetor de esforços modificado. Apesar da matriz de rigidez

modificada poder ser calculada apenas uma vez para cada elemento e ser constante com o tempo, no vetor de esforços modificados estão incluídos os históricos da deformação e da tensão até o tempo corrente t . Entretanto, o deslocamento no tempo $t + \Delta t$ pode ser calculado, já que o mesmo depende apenas do vetor de forças modificado avaliado até o instante anterior. Como a Eq. (3.90) pode ser estabelecida para o tempo $t + \Delta t$, não existe restrição ao esquema de integração que será utilizado, isto é, tanto integradores explícitos como integradores implícitos podem ser utilizados.

Observa-se que a determinação do vetor de tensões é feita de maneira direta: ao término de cada passo de tempo o novo vetor de deslocamentos nodais $\{\tilde{u}(t + \Delta t)\}$ é conhecido, de modo que o cálculo do novo vetor das tensões $\{\sigma(t + \Delta t)\}$ pode ser realizado por meio da Eq. (3.89).

Devido à definição de derivadas fracionárias estabelecida por Grünwald, há a necessidade do conhecimento dos históricos da tensão e da deformação nos mesmos instantes de tempo. O passo de tempo entre dois valores consecutivos da função é dado por $\frac{t}{N}$ e não necessariamente é o mesmo daquele usado para integração no tempo, aqui denotado por Δt . Contudo, é útil fazer com que os valores necessários para cálculo das derivadas fracionárias sejam espaçados de forma igual ou como múltiplo do passo de tempo utilizado para integração no tempo:

$$\frac{t}{N} = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.99)$$

especialmente se Δt for constante. Logo, caso o passo de tempo Δt se altere, os históricos da deformação e da tensão devem ser determinados em outros tempos discretos. Para isso, uma interpolação linear ou quadrática pode ser feita.

Ao término de cada passo de tempo, os novos deslocamentos e, em consequência, as novas deformações, são conhecidas. As novas tensões, necessárias no próximo tempo para atualização do vetor de esforços modificado, devem ser então calculadas a partir da Eq. (3.89) com nova deformação $\{\varepsilon(t + \Delta t)\}$ e com os valores armazenados para a tensão e para a deformação.

Assumindo que:

$$\frac{t}{N} = \Delta t \quad (3.100)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(t + \Delta t)\} = f(\{\varepsilon(t + \Delta t)\}, \{\varepsilon(t)\}, \{\varepsilon(t - \Delta t)\}, \dots, \\ \{\sigma(t)\}, \{\sigma(t - \Delta t)\}, \{\sigma(t - 2\Delta t)\}, \dots) \end{aligned} \quad (3.101)$$

3.8. Abordagem alternativa para implementação de modelos viscoelásticos fracionários em associação com o método dos elementos finitos

No âmbito da implementação de relações constitutivas fracionárias que representem modelos de viscoelasticidade associadas à formulação de elementos finitos, Schmidt e Gaul (2002) desenvolveram um elemento finito tridimensional que leva em conta as relações tensão-deformação fracionárias do material e que é solucionado pelo método de discretização de Grünwald-Letnikov, sendo necessário o histórico dos deslocamentos e das tensões em tempos anteriores. Esta abordagem foi apresentada na Seção 3.7.

Mais recentemente Galucio, Deü e Ohayon (2004) apresentaram outro método que, em termos de eficiência computacional, é superior à metodologia adotada por Schmidt e Gaul (2002). A idéia dos autores é eliminar uma das derivadas fracionárias presentes no modelo viscoelástico unidimensional por eles adotado:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon(t) , \quad (3.102)$$

onde t denota a variável temporal, $\sigma(t)$ denota a tensão, $\varepsilon(t)$ denota a deformação, τ é o tempo de relaxação do material, E_0 é o módulo estático (ou de baixa frequência) do material, e E_∞ é o módulo dinâmico (ou de alta frequência) do material. Para tanto, os autores utilizam-se da seguinte substituição de variável:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_\infty}, \quad (3.103)$$

sendo $\bar{\varepsilon}(t)$ a deformação anelástica. Pela introdução dessa definição na Eq. (3.102), tem-se que a relação tensão-deformação do material toma a seguinte forma:

$$\bar{\varepsilon}(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \bar{\varepsilon}(t) = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t). \quad (3.104)$$

Fazendo uso da discretização da derivada fracionária pelo modelo de Grünwald-Letnikov, expressa pela Eq. (2.72), pode-se chegar à forma discretizada da Eq. (3.104):

$$\bar{\varepsilon}(t + \Delta t) = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t + \Delta t) - c \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \bar{\varepsilon}(t + \Delta t - j\Delta t), \quad (3.105)$$

sendo c uma constante adimensional dada por:

$$c = \frac{\tau^\alpha}{\tau^\alpha + (\Delta t)^\alpha}, \quad (3.106)$$

e $A_{j+1}^{(\alpha)}$ os coeficientes de Grünwald associados a uma derivação de ordem α , que podem ser calculados recursivamente a partir da Eq. (2.73), repetida aqui por conveniência:

$$A_{j+1}^{(\alpha)} = \frac{j-1-\alpha}{j} A_j^{(\alpha)}, \quad (3.107)$$

com $A_1^{(\alpha)} := 1$ para qualquer valor de α .

Galucio, Deü e Ohayon (2004) destacam que os coeficientes de Grünwald, que são estritamente decrescentes à medida que j aumenta, são os responsáveis pelo efeito de memória exibido por materiais viscoelásticos. Este comportamento estabelece que a conduta do material viscoelástico em um dado instante de tempo depende mais fortemente de seu histórico temporal recente do que do histórico temporal mais distante.

A implementação da relação constitutiva do material dada na Eq. (3.105) à formulação de elementos finitos é feita, pelos mesmos autores, em um modelo de viga sanduíche de três camadas. No caso por eles analisado, as camadas externas são constituídas por materiais lineares, isotrópicos e homogêneos, sendo essas modeladas de acordo com a teoria de viga de Euler-Bernoulli. Por outro lado, para a camada interna admite-se o modelo viscoelástico fracionário para o comportamento do material e a teoria de viga de Timoshenko, que leva em conta efeitos relacionados ao momento fletor e à força cortante na obtenção da equação diferencial do modelo de viga.

Deve-se observar que, como a representação do comportamento viscoelástico trata de uma relação tensão-deformação, as modificações devidas à sua inclusão no modelo de elementos finitos aparecerão na formulação da parcela referente a esforços internos. Ainda, como pode ser percebido pela análise da Eq. (3.105), uma das parcelas associadas à lei constitutiva do material depende do histórico temporal da deformação anelástica, enquanto a outra depende apenas da deformação instantânea. Assim sendo, cada uma destas parcelas é tratada de forma diferente: a parcela que não depende de um histórico temporal, mas depende apenas da deformação instantânea do elemento, é incorporada à matriz de rigidez original do elemento, ao passo que a parcela que depende do histórico temporal da deformação anelástica é tratada como um vetor de forças externas aplicadas ao elemento.

Considerando um modelo de elementos finitos qualquer, em nível elementar, a parcela de energia potencial devida exclusivamente à deformação do material, $U_{def.}$, pode ser calculada segundo:

$$\begin{aligned}
 U_{def.} &= \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV \\
 &= \frac{1}{2} \{q^{(e)}(t)\}^T \int_V [B]^T [C] [B] dV \{q^{(e)}(t)\} \\
 &= \frac{1}{2} \{q^{(e)}(t)\}^T [K^{(e)}] \{q^{(e)}(t)\} ,
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

onde: $\{q^{(e)}(t)\}$ é o vetor de graus de liberdade em nível elementar; $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$ são os vetores de tensão e de deformação em nível elementar, respectivamente, cada um deles sendo dependente de $\{q^{(e)}(t)\}$ e das coordenadas espaciais $\{x\}$; $[C]$ é a matriz das propriedades do

material que relaciona deformação à tensão, de modo que $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$, e que depende de $\{x\}$; $[B]$ é a matriz que relaciona os graus de liberdade do elemento a sua deformação, $\{\varepsilon\} = [B]\{q^{(e)}(t)\}$, sendo ela dependente, no caso de análises para pequenos deslocamentos, de $\{x\}$ e estando relacionada a derivadas das funções de forma adotadas na formulação do elemento finito; e $[K^{(e)}] = \int_V [B]^T [C] [B] dV$ é a matriz de rigidez do elemento em nível elementar.

No caso da utilização de um material viscoelástico, a lei de tensão não é mais dada por $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B]\{q^{(e)}(t)\}$. Por outro lado, para o modelo fracionário aqui adotado, a partir da Eq. (3.103), tem-se que:

$$\sigma = E_\infty [\varepsilon - \bar{\varepsilon}] . \quad (3.109)$$

Através da utilização da discretização anteriormente adotada para $\bar{\varepsilon}$ e da extensão da relação tensão-deformação a um modelo tridimensional, considerando que o material viscoelástico seja isotrópico, tem-se:

$$\{\sigma(t + \Delta t)\} = [C] \left[\left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \{\varepsilon(t + \Delta t)\} + c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{\varepsilon}(t + \Delta t - j\Delta t)\} \right] , \quad (3.110)$$

sendo $[C]$ a matriz de propriedades do material, e E_0 , E_∞ e c parâmetros relacionados ao modelo fracionário para o material viscoelástico, dado na Eq. (3.104).

Levando em conta ainda que $\{\bar{\varepsilon}\} = [B]\{\bar{q}^{(e)}(t)\}$, sendo $\{\bar{q}^{(e)}(t)\}$ o vetor de graus de liberdades anelásticos, e que $\{\varepsilon\} = [B]\{q^{(e)}(t)\}$, a introdução da Eq. (3.110) na Eq. (3.108) conduz a:

$$\begin{aligned}
\int_V [B]^T \{\sigma\} dV = \\
= \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0}\right) [K^{(e)}] \{q^{(e)}(t + \Delta t)\} + \\
+ c \frac{E_\infty}{E_0} [K^{(e)}] \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{q}^{(e)}(t + \Delta t - j\Delta t)\}, \quad (3.111)
\end{aligned}$$

sendo $\{\bar{q}^{(e)}(t + \Delta t)\}$, a partir da Eq. (3.105), dado por:

$$\{\bar{q}^{(e)}(t + \Delta t)\} = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \{q^{(e)}(t + \Delta t)\} - c \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{q}^{(e)}(t + \Delta t - j\Delta t)\}. \quad (3.112)$$

Logo, a equação do movimento em nível elementar, discretizada no tempo, com inclusão do comportamento viscoelástico, é dada por:

$$\begin{aligned}
[M^{(e)}] \{\ddot{q}^{(e)}(t + \Delta t)\} + \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0}\right) [K^{(e)}] \{q^{(e)}(t + \Delta t)\} = \\
= \{F^{(e)}(t + \Delta t, \{q^{(e)}(t + \Delta t)\})\} - c \frac{E_\infty}{E_0} [K^{(e)}] \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{q}^{(e)}(t + \Delta t - j\Delta t)\}, \quad (3.113)
\end{aligned}$$

sendo $[M^{(e)}]$ a matriz de massa a nível elementar, $\{F^{(e)}(t, \{q^{(e)}(t)\})\}$ o vetor de esforços externos a nível elementar, e $[K^{(e)}]$ a matriz de rigidez a nível elementar original (não modificado) do elemento.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES NUMÉRICAS DOS MODELOS VISCOELÁSTICIDADE FRACIONÁRIOS

4.1. Sistema vibratório viscoelástico de um grau de liberdade

Considere-se o sistema de um grau de liberdade representado na Fig. 4.1. Aplicando a 2ª Lei de Newton ao mesmo, obtém-se a seguinte equação diferencial do movimento:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f_v(t) = f(t) \quad (4.1)$$

onde m denota a massa da partícula, $x(t)$ denota seu deslocamento, $f_v(t)$ designa a força exercida pelo material viscoelástico e $f(t)$ a força externa aplicada.

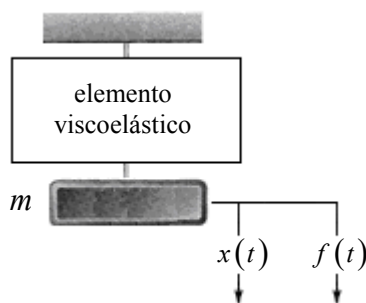


Figura 4.1 - Sistema mecânico de 1 g.d.l. com amortecimento viscoelástico.

Passando a Eq. (4.1) ao domínio de Laplace, obtém-se:

$$m s^2 X(s) + F_v(s) = F(s) \quad (4.2)$$

Admitindo o modelo fracionário de Zener para o material viscoelástico, escreve-se:

$$F_v(s) = K(s) X(s), \quad (4.3)$$

com:

$$K(s) = \frac{\mu + a s^\alpha}{1 + b s^\beta} \quad (4.4)$$

Combinando as Eqs. (4.3) e (4.4) com (4.2), chega-se à seguinte função de transferência do sistema em análise:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1 + b s^\beta}{\mu + a s^\alpha + m s^2 + m b s^{2+\beta}} \quad (4.5)$$

Com base na Eq. (4.5) foi construído o diagrama de blocos representativo do sistema, apresentado na Fig. 4.2. Fazendo uso da ferramenta computacional Simulink[®] pôde-se então realizar simulações do comportamento do sistema. O material viscoelástico adotado nas simulações foi o ISD112, da fabricante 3M[®]. Os parâmetros do modelo adotado para este material a 27°C foram identificados por Lima (2003), e seus valores estão dispostos na Tab. 4.1.

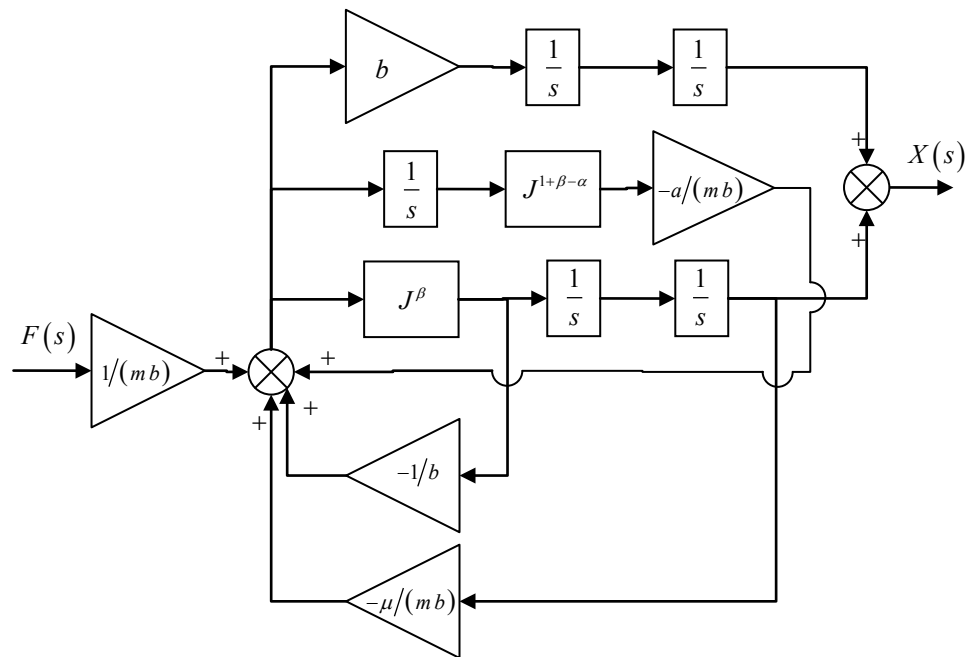


Figura 4.2 - Diagrama de blocos para o sistema em análise.

Tabela 4.1 - Parâmetros identificados para o modelo fracionário de Zener para o material ISD112 (Lima, 2003).

a	α	μ (Pa)	b (Pa)	β
$1,0015 \times 10^{-3}$	0,40376	$4,2688 \times 10^5$	$8,8438 \times 10^3$	0,40376

Além disso, adotaram-se os valores $m = 0,1$ kg, $x|_{t=0} = 0,2$ m, $dx/dt|_{t=0} = 0$ m/s e $f(t) = 0,1u(t)$ N, sendo $u(t)$ a função degrau unitário.

Para modelagem de um integrador fracionário, fez-se uso de um método desenvolvido no espaço de estado proposto pelos autores Poinot e Trigeassou (2003), o qual acopla a um integrador de ordem inteira convencional um filtro de fase.

Como resultados, foram obtidas as respostas temporal e em frequência (amplitude e fase) para o sistema analisado, que são apresentadas graficamente nas Figs. 4.3 e 4.4. O decaimento das amplitudes da resposta temporal evidencia o efeito de amortecimento proporcionado pelo material viscoelástico.

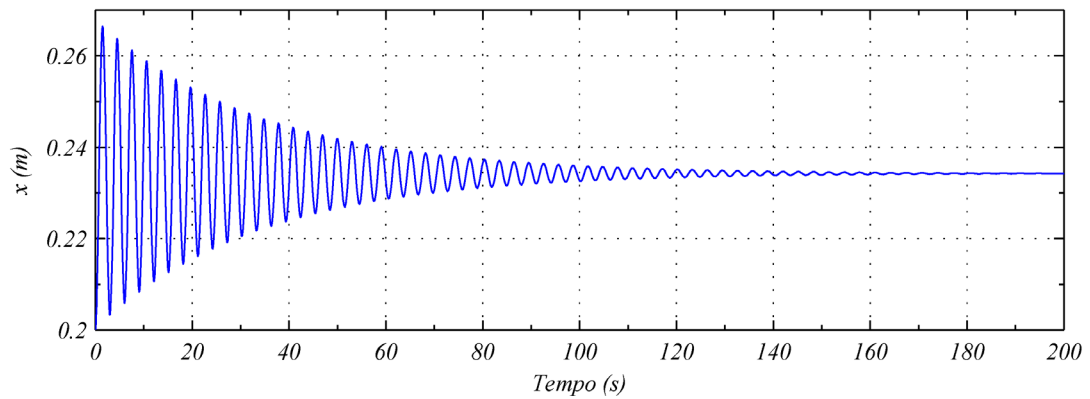


Figura 4.3 - Resposta temporal do sistema analisado.

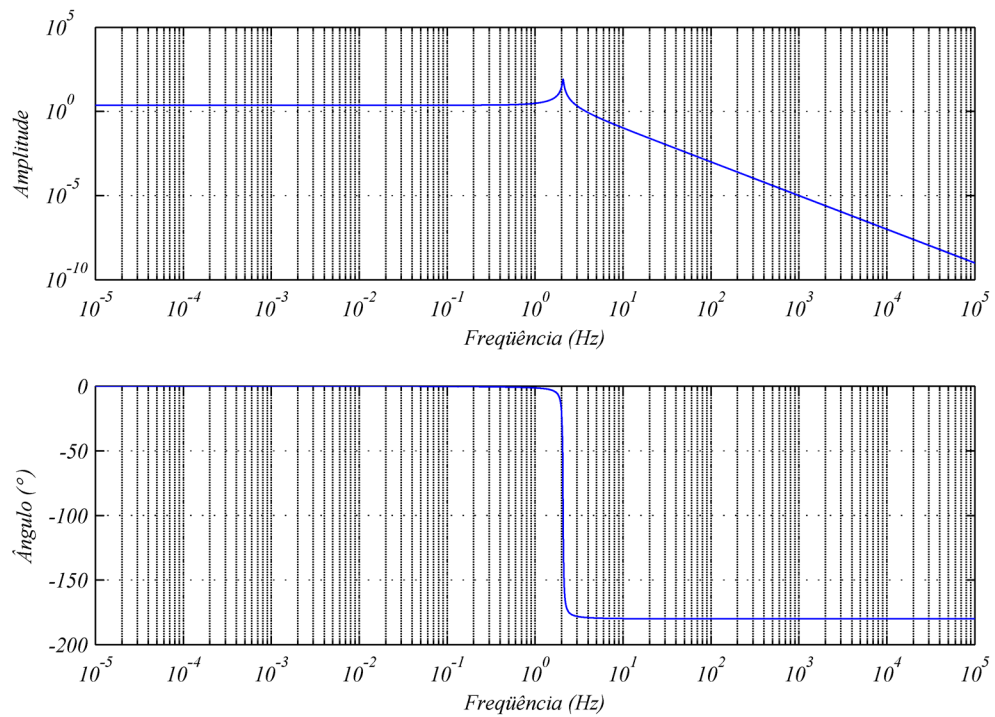


Figura 4.4 - Resposta em frequência do sistema analisado.

4.2 Modelagem de uma viga viscoelástica pelo método dos elementos finitos

Para comprovar a validade do modelo anteriormente apresentado e proposto por Schmidt e Gaul (2002), calculou-se a resposta livre de uma viga tridimensional por intermédio do método dos elementos finitos, utilizando os parâmetros viscoelásticos utilizados na simulação apresentada na Seção 4.1. Entretanto, como a equação constitutiva

tridimensional apresentada na Eq. (3.80) necessita de mais constantes do que aquelas disponíveis, admitiu-se que os parâmetros hidrostáticos fossem iguais aos deviatóricos:

$$a_h = a_d = a, \alpha_h = \alpha_d = \alpha, b_h = b_d = b, \beta_h = \beta_d = \beta$$

A discretização foi feita, no caso estudado por Schmidt e Gaul (2002), pela utilização de elementos isoparamétricos de 8 nós com funções de forma lineares para os deslocamentos. Assim, uma malha fina de elementos finitos é necessária, segundo estes autores, para proporcionar resultados precisos. O modelo da viga é dado na Fig. 4.5, sendo engastado na extremidade esquerda por intermédio de condições de contorno adequadas para os deslocamentos nodais. Na extremidade direita uma carga pontual é aplicada na direção z para representar uma deflexão instantânea. Posteriormente, esta carga é removida e não são aplicados outros esforços externos.

A integração das equações do movimento no domínio do tempo é realizada por utilização do método de Newmark.

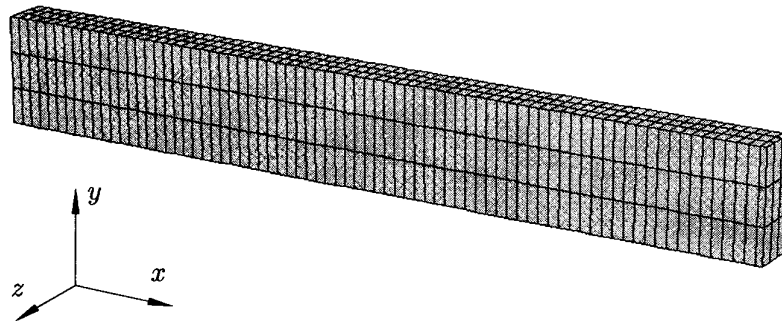


Figura 4.5 - Modelo de elementos finitos utilizado por Schmidt e Gaul (2002).

Para fins de referência, as deflexões da extremidade livre da viga calculadas numericamente e medidas experimentalmente por Schmidt e Gaul (2002) são apresentadas em conjunto na Fig. 4.6. Além disso, as oscilações de decaimento livre foram utilizadas para a determinação do módulo complexo do material, que foi então comparado àquele medido experimentalmente, conforme apresentado na Tab. 4.2. Nota-se que os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos se mostram em boa concordância com os dados experimentais.

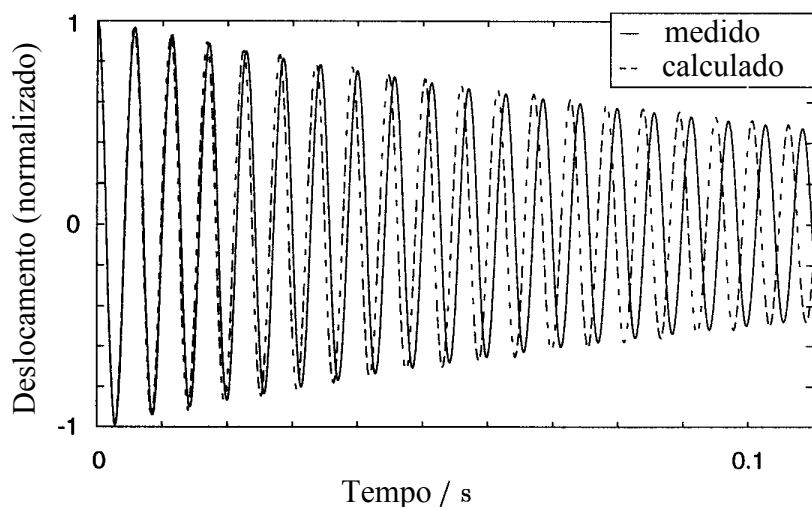


Figura 4.6 - Comparação entre as respostas calculada e medida (adaptado de Schmidt e Gaul (2002)).

Tabela 4.2 - Comparação dos módulos complexos identificado e calculado (adaptado de Schmidt e Gaul (2002)).

	Identificado	Calculado	Erro relativo
Frequência	176,4 Hz	179,3 Hz	1,6%
E'	2994,9 N/mm ²	3093,6 N/mm ²	3,3%
E''	39,9 N/mm ²	37,6 N/mm ²	5,9%

Foi realizada pelo autor desta Dissertação uma simulação cuja resposta se aproximasse daquela apresentada por Schmidt e Gaul (2002). Ressalta-se que o código implementado em ambiente MATLAB®, embora inspirado no modelo tridimensional proposto pelos autores Schmidt e Gaul, é baseado num modelo de elementos finitos de viga unidimensional que leva em conta as hipóteses relacionadas à teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Cada elemento finito utilizado conta com 2 nós, e 2 graus de liberdade por nó, um referente ao deslocamento transversal e outro referente à rotação. As funções de forma utilizadas são polinômios Hermitianos de terceira ordem, o que justifica a adoção de um número significativamente menor de elementos finitos para o modelo do que aquele adotado pelos autores anteriormente mencionados.

A introdução do comportamento viscoelástico ao modelo de viga utilizado é feita tomando por base versões adaptadas a uma situação de análise unidimensional das Eqs. (3.88) a (3.98). O algoritmo consiste em:

a) Inicializar as condições iniciais (posições, velocidades e acelerações generalizadas), a matriz de massa em nível global, a matriz $[F]$ e sua inversa $[F]^{-1}$, a matriz $[C^*]$, a matriz $[\Phi] = [\Phi_h] + [\Phi_d]$, a matriz de rigidez global modificada, os parâmetros necessários ao integrador (no caso de se tratar de um integrador de Newmark, são estes δ e α , conforme Bathe (1996)), e o vetor das tensões em nível elementar. Ressalta-se que, de acordo com a teoria de vigas adotada e o elemento finito a ela associado, tem-se:

- as matrizes de transformação para obtenção das parcelas hidrostática e deviatórica das tensões e deformações se degeneram para resultar em $[T_h] = T_h = \frac{1}{3}$ e

$$[T_d] = T_d = \frac{2}{3};$$

- a matriz das funções de forma é dada por:

$$[H(x)] = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 \\ x - 2L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 \\ 3\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 \\ -L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + L_e\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 \end{bmatrix}^T,$$

onde x é a coordenada na direção longitudinal do elemento, variando de 0 a L_e , sendo este o comprimento do elemento finito;

- a matriz que relaciona deformação a deslocamentos generalizados é dada por:

$$[B(x)] = -y \frac{d^2}{dx^2} [H(x)] = -y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L_e^2} + 12 \left(\frac{x}{L_e^3} \right) \\ -\frac{4}{L_e} + 6 \left(\frac{x}{L_e^2} \right) \\ \frac{6}{L_e^2} - 12 \left(\frac{x}{L_e^3} \right) \\ -\frac{2}{L_e} + 6 \left(\frac{x}{L_e^2} \right) \end{bmatrix}^T,$$

onde y é a coordenada na direção transversal do elemento, variando de $-h_e/2$ a $h_e/2$, sendo h_e é a altura do elemento (espessura da viga);

- a matriz de massa a nível elementar é dada por:

$$[M]^e = \frac{\rho_e L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix},$$

onde ρ_e é a massa específica do material do qual a viga é constituído;

- $[F] = F = 1 + a(\Delta t)^{-\alpha} \Rightarrow [F]^{-1} = \frac{1}{F} = \frac{1}{1 + a(\Delta t)^{-\alpha}};$
- $[C^*] = C^* = c + b(\Delta t)^{-\beta};$
- a matriz de rigidez modificada a nível elementar é dada por:

$$[K^*]^e = \frac{[c + b(\Delta t)^{-\beta}] I_e}{1 + a(\Delta t)^{-\alpha}} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} \\ -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} \end{bmatrix},$$

onde I_e é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em torno do eixo do qual são aplicados os momentos fletores;

$$\bullet \quad [\Phi] = \frac{I_e}{F} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} \\ -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} \end{bmatrix} = \frac{I_e}{1 + a(\Delta t)^{-\alpha}} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} \\ -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4}{L_e} \end{bmatrix};$$

- a tensão inicial a nível elementar é dada por:

$$\{\sigma(x, t_0)\}^e = \sigma^e(x, t_0) = \frac{C^*}{F} [B(x)] \{\tilde{u}(t_0)\}^e$$

b) Para cada passo de tempo associado ao procedimento de integração numérica deve-se, então:

- Avaliar o vetor de esforços modificados em nível global, sendo que, em nível elementar, ele é dado por:

$$\begin{aligned} \{r^*(t)\}^e &= \{r(t)\}^e - [\Phi] b(\Delta t)^{-\beta} \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\beta)} \{\tilde{u}(t - j\Delta t)\}^e \right) + \\ &+ \frac{a(\Delta t)^{-\alpha}}{1 + a(\Delta t)^{-\alpha}} \int_0^{L_e} [B(x)]^T \sum_{j=1}^{N_l} \left(A_{j+1}^{(\alpha)} \{\sigma(x, t - j\Delta t)\}^e \right) dx \end{aligned}$$

- Determinar as posições, velocidades e acelerações generalizadas do passo de tempo seguinte, no caso de integração explícita, ou do passo de tempo atual, no caso de integração implícita;
- Avaliar o vetor das tensões em nível elementar:

$$\begin{aligned} \{\sigma(x,t)\}^e = \sigma^e(x,t) = & \frac{C^*}{F} [B(x)] \{\tilde{u}(t)\}^e + \\ & + \frac{b(\Delta t)^{-\beta}}{F} [B(x)] \sum_{j=1}^{N_t} \left(A_{j+1}^{(\beta)} \{\tilde{u}(t-j\Delta t)\}^e \right) - \\ & - \frac{a(\Delta t)^{-\alpha}}{F} \sum_{j=1}^{N_t} \left(A_{j+1}^{(\alpha)} \sigma^e(x,t-j\Delta t) \right) \end{aligned}$$

- Proceder ao passo de tempo seguinte.

Nas equações anteriores, $(\bullet)^e$ denota uma grandeza vetorial ou matricial em nível elementar.

Como no trabalho de Schmidt e Gaul (2002) não são fornecidos todos os dados utilizados em sua simulação, para que fosse feita a computação da resposta visando validação do código desenvolvido, a razão de aspecto da viga utilizada no trabalho dos primeiros autores foi estimada visualmente e um fator multiplicativo foi introduzido. Em outras palavras:

- a) A razão de aspecto da viga foi estimada como sendo de L unidades u para sua largura, A unidades u para sua altura e C unidades u para seu comprimento;
- b) Em seguida, por meio de ajustes numéricos, que interferiam apenas na amplitude inicial da resposta obtida, e não em seu comportamento ou em sua taxa de decaimento devido ao amortecimento, determinou-se um fator multiplicativo K cuja unidade é milímetros / (unidades u) ;
- c) A dimensão real da viga é então tomada como sendo $(L \times A \times C) \cdot K$.

Um resumo dos parâmetros utilizados para obtenção dos resultados apresentados na Fig. 4.7 mediante simulação é apresentado na seqüência:

- Aspecto da viga ($L \times A \times C$): $3[u] \times 9[u] \times 76[u]$;
- Fator multiplicativo (K): $\frac{25}{12} = 2.0833 \left[\frac{\text{mm}}{u} \right]$;
- Número de termos utilizados na aproximação do operador fracionário: 1500;
- Tempo final de simulação: 0,11 s;

- Número de pontos utilizados na discretização temporal: 1500;
- Número de elementos finitos utilizados: 10.

Além disso, para simulação de uma condição de deslocamento inicial, uma força com amplitude de 10000 N foi aplicada à extremidade livre da viga no instante $t = 0$ s. Para os instantes de tempo posteriores, a força aplicada é nula. Trata-se de uma aproximação de um impulso (função Delta de Dirac).

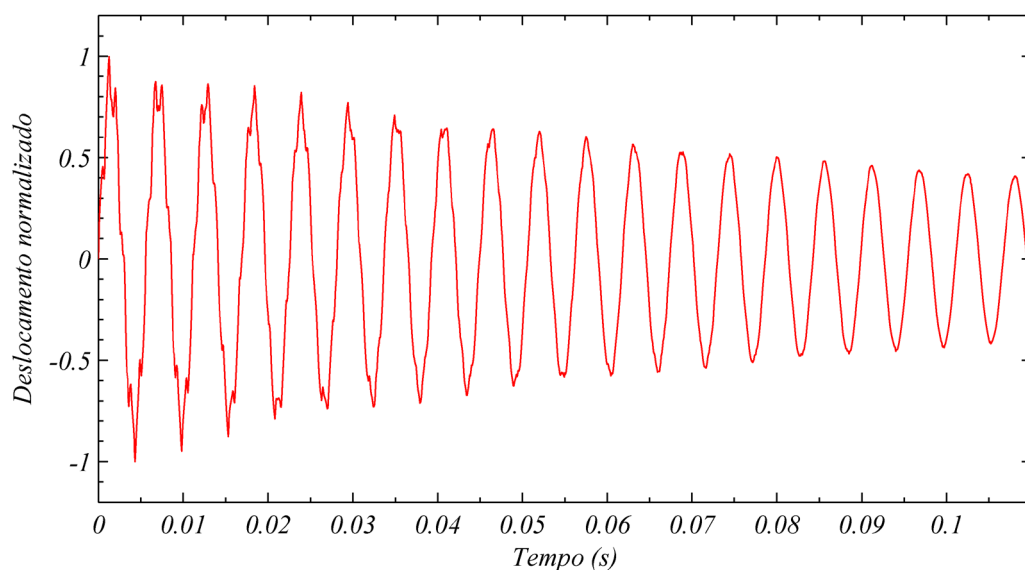


Figura 4.7 - Resposta calculada para a deflexão da extremidade livre de uma viga engastada a partir de modelo próprio visando reproduzir os resultados de Schmidt e Gaul (2002).

A comparação da Fig. 4.6 com a Fig. 4.7 permite concluir que o código computacional implementado pelo autor do presente trabalho é válido. Entretanto, alguns problemas encontrados na comparação entre ambos os resultados são:

- uma pequena diferença na frequência de oscilação da resposta. Este erro é bastante compreensível, tendo em vista que os dados utilizados por Schmidt e Gaul (2002) em sua simulação não são disponíveis;
- leves distúrbios nas oscilações iniciais na resposta obtida pelo algoritmo implementado, o que pode ser justificado pela natureza da condição inicial imposta. Esta última está relacionada à aplicação de uma força descrita por uma função impulso, como já mencionado, que se trata de um sinal que não é bem comportado em termos matemáticos, embora seja bem definido. Como o

programa desenvolvido não contempla uma situação como esta, é compreensível a presença de erros desta natureza.

Ressalta-se, por último, que o fator que contribui de maneira decisiva para a aceitação do programa implementado é a semelhança da taxa de decaimento observada em ambas as figuras.

4.3 Modelagem por elementos finitos de vigas multicamadas com camada viscoelástica em associação com o algoritmo proposto por Galucio, Deü e Ohayon (2004)

A presente aplicação está relacionada à implementação de uma lei constitutiva viscoelástica expressa segundo uma equação diferencial fracionária, Eq. (3.102), em associação com um modelo de elementos finitos de vigas multicamadas. A metodologia de implementação do comportamento do material é aquela proposta por Galucio, Deü e Ohayon (2004), e foi detalhada anteriormente, na Seção 3.8.

No tocante ao equacionamento de um elemento finito de vigas multicamadas, aqui é apresentado um procedimento baseado naquele apresentado por Zhang e Erdman (2001), similar aos apresentado por Galucio, Deü e Ohayon (2004) que, por sua vez, referenciam o trabalho de Trindade, Benjeddou e Ohayon (2001).

O tipo de viga multicamada considerado é admitido como contendo duas faces externas elásticas, modeladas segundo a teoria de viga de Euler-Bernoulli, e um núcleo modelado segundo a teoria de viga de Timoshenko. Esta camada interna será modelada como exibindo comportamento viscoelástico utilizando a metodologia proposta por Galucio, Deü e Ohayon (2004). São hipóteses, ainda, que as três camadas da viga são rigidamente unidas e que estão todas submetidas a um estado plano de tensão. A cinemática do conjunto pode ser visualizada na Fig. 4.8.

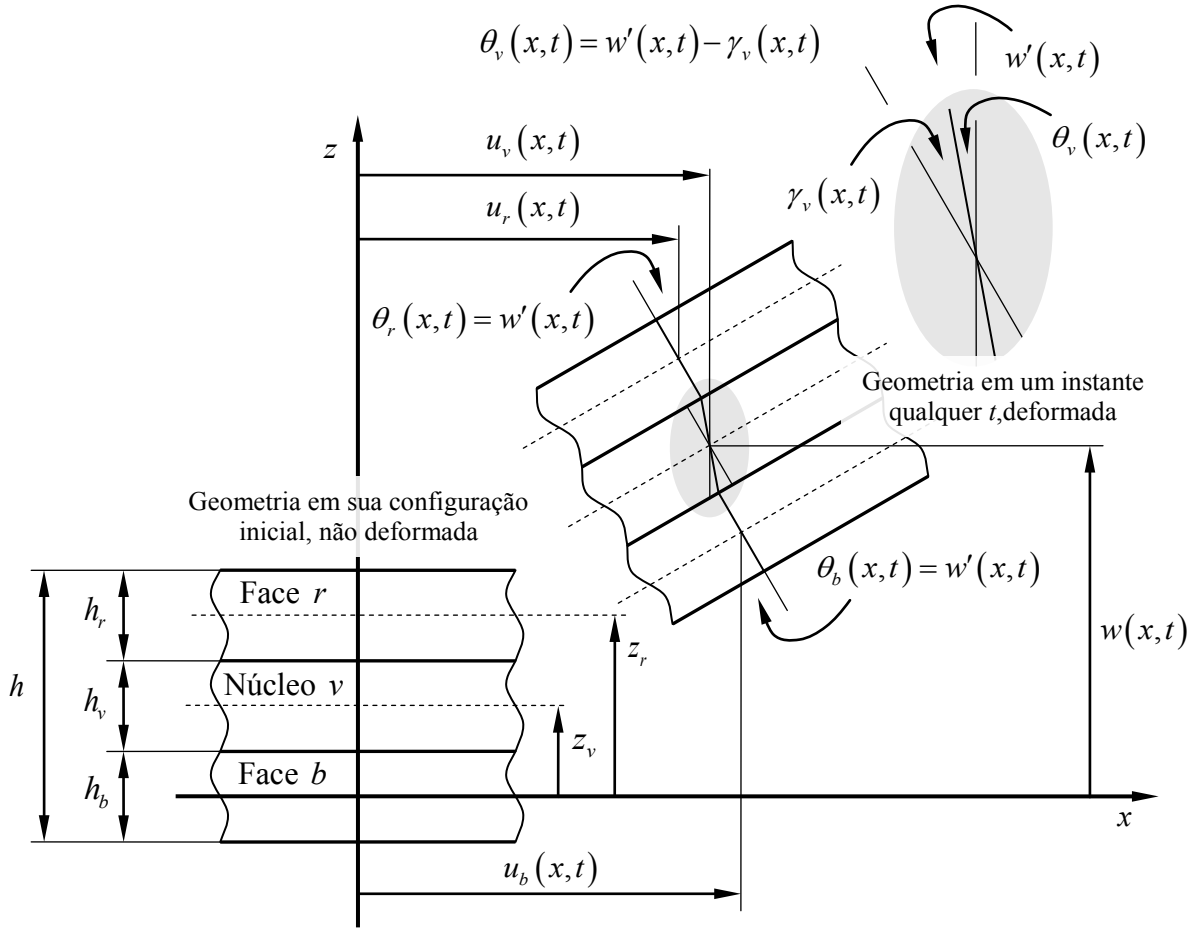


Figura 4.8 - Cinemática da viga multicamadas analisada.

O deslocamento de um ponto genérico da i -ésima camada é dado por:

$$u_{xi}(x, z, t) = u_i(x, t) - (z - z_i)\theta_i(x, t) ; \quad (4.6)$$

$$u_{zi}(x, z, t) = w(x, t) , \quad (4.7)$$

onde o sub-índice i está relacionado à designação das camadas: superior, quando $i = r$ (camada restringente); inferior, quando $i = b$ (viga base); e interna, quando $i = v$ (camada viscoelástica). Por hora considera-se comportamento elástico para todas as camadas.

As variáveis $u_{xi}(x, z, t)$ e $u_{zi}(x, z, t)$ denotam os deslocamentos nas direções axial e transversal da camada i , respectivamente, enquanto $u_i(x, t)$ e $\theta_i(x, t)$ são o deslocamento axial e a rotação da fibra média de cada camada. Ainda, $w(x, t)$ é o deslocamento transversal

da viga, idêntico para todas as camadas. Ressalta-se que, com base na Fig. 4.8, $u_v(x, t)$ e $\theta_v(x, t)$ podem ser obtidos a partir de $u_b(x, t)$, $u_r(x, t)$ e $w(x, t)$ por meio das relações:

$$u_v(x, t) = \frac{u_b(x, t) + u_r(x, t)}{2} + \frac{h_r - h_b}{4} \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) ; \quad (4.8)$$

$$\theta_v(x, t) = - \left[\frac{u_r(x, t) - u_b(x, t)}{h_v} + \frac{h_r + h_b}{2h_v} \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \right] . \quad (4.9)$$

As deformações presentes nos modelos de viga são as deformações normais na direção axial da viga, para as três camadas, e a deformação cisalhante para a camada interna, dadas por:

$$\varepsilon_{xvi}(x, z, t) = \varepsilon_i(x, t) + (z - z_i) \kappa_i(x, t) ; \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{xv}(x, z, t) = \gamma_v(x, t) , \quad (4.11)$$

onde $\varepsilon_i(x, t)$ e $\kappa_i(x, t)$ são as deformações de membrana e de flexão da i -ésima camada, e $\gamma_v(x, t)$ é a deformação cisalhante da camada intermediária:

$$\varepsilon_r(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_r(x, t) = u'_r(x, t) ; \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_b(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_b(x, t) = u'_b(x, t) ; \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_v(x, t) = u'_v(x, t) = \frac{u'_b(x, t) + u'_r(x, t)}{2} + \frac{h_r - h_b}{4} w''(x, t) ; \quad (4.15)$$

$$\kappa_r(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} \theta_r(x, t) = - \theta'_r(x, t) = w''(x, t) ; \quad (4.16)$$

$$\kappa_b(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} \theta_b(x, t) = - \theta'_b(x, t) = w''(x, t) ; \quad (4.17)$$

$$\kappa_v(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \theta_v(x, t) = -\theta'_v(x, t) = \frac{u'_r(x, t) - u'_b(x, t)}{h_v} + \frac{h_r + h_b}{2h_v} w''(x, t) ; \quad (4.18)$$

$$\gamma_v(x, t) = w'(x, t) - \theta_v(x, t) = \frac{u_r(x, t) - u_b(x, t)}{h_v} + \left(1 + \frac{h_r + h_b}{2h_v}\right) w'(x, t) . \quad (4.19)$$

A formulação do elemento finito com as três camadas modeladas admitindo comportamento elástico é feita, então, tomando por base a discretização do vetor dos deslocamentos generalizados $\{w^{(e)}(x, t)\} = \{u_b(x, t) \quad w(x, t) \quad u_r(x, t)\}^T$ segundo funções de forma lineares e cúbicas para os deslocamentos axiais e deflexões, respectivamente.

Sendo os graus de liberdade dados pelo vetor:

$$\{\mathcal{D}^{(e)}(t)\} = \{u_{b,1}(t) \quad w_1(t) \quad w'_1(t) \quad u_{r,1}(t) \quad u_{b,2}(t) \quad w_2(t) \quad w'_2(t) \quad u_{r,2}(t)\}^T , \quad (4.20)$$

tem-se que $\{w^{(e)}(x, t)\} = [\Phi(x)] \{\mathcal{D}^{(e)}(t)\}$, com:

$$[\Phi(x)] = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & 0 & 0 & 0 & \phi_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_3(x) & \phi_4(x) & 0 & 0 & \phi_5(x) & \phi_6(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_1(x) & 0 & 0 & 0 & \phi_2(x) \end{bmatrix} , \quad (4.21)$$

onde $[\Phi(x)]$ é a matriz das funções de forma e $\phi_k(x)$, $k = 1, \dots, 6$, são dadas por:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L_e} ; \quad (4.22)$$

$$\phi_2(x) = \frac{x}{L_e} ; \quad (4.23)$$

$$\phi_3(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L_e}\right)^3 ; \quad (4.24)$$

$$\phi_4(x) = x \left(1 - \frac{x}{L_e} \right)^2 ; \quad (4.25)$$

$$\phi_5(x) = \left(\frac{x}{L_e} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{x}{L_e} \right) ; \quad (4.26)$$

$$\phi_6(x) = \frac{x^2}{L_e} \left(\frac{x}{L_e} - 1 \right) . \quad (4.27)$$

Ressalta-se que a notação $\bullet^{(e)}$ denota uma grandeza em nível elementar, que os sub-índices 1 e 2 fazem referência aos nós de um elemento finito e que L_e indica seu comprimento.

Ainda, as matrizes que relacionam deformações de membrana, flexão e cisalhante aos graus de liberdade nodais:

$$\varepsilon_i(x, t) = \{B_{mi}(x)\} \{ \delta^{(e)}(t) \} ; \quad (4.28)$$

$$\kappa_i(x, t) = \{B_{bi}(x)\} \{ \delta^{(e)}(t) \} ; \quad (4.29)$$

$$\gamma_v(x, t) = \{B_{sv}(x)\} \{ \delta^{(e)}(t) \} , \quad (4.30)$$

são dadas por:

$$\{B_{mi}(x)\} = \{\Phi'_{xi}(x)\} ; \quad (4.31)$$

$$\{B_{bi}(x)\} = \{\Phi'_{ri}(x)\} ; \quad (4.32)$$

$$\{B_{sv}(x)\} = \{\Phi_{rv}(x)\} - \{\Phi_{rf}(x)\} , \quad (4.33)$$

onde:

$$\{\Phi_{xf}(x)\} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2}\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2}\phi_2 \end{bmatrix}, \quad (+) \text{ para } f = r, \\ (-) \text{ para } f = b; \quad (4.34)$$

$$\{\Phi_{xv}(x)\} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \frac{\tilde{h}}{4}\phi'_3 & \frac{\tilde{h}}{4}\phi'_4 & 0 & \phi_2 & \frac{\tilde{h}}{4}\phi'_5 & \frac{\tilde{h}}{4}\phi'_6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{h} = h_r - h_b; \quad (4.35)$$

$$\{\Phi_z(x)\} = [0 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad 0 \quad 0 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \quad 0]; \quad (4.36)$$

$$\{\Phi_{rf}(x)\} = [0 \quad -\phi'_3 \quad -\phi'_4 \quad 0 \quad 0 \quad -\phi'_5 \quad -\phi'_6 \quad 0]; \quad (4.37)$$

$$\{\Phi_{rv}(x)\} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{h}}{h_v}\phi'_3 & \frac{\bar{h}}{h_v}\phi'_4 & \frac{1}{h_v}\phi_1 & 0 & \frac{\bar{h}}{h_v}\phi'_5 & \frac{\bar{h}}{h_v}\phi'_6 & \frac{1}{h_v}\phi_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{h} = \frac{h_r + h_b}{2}, \quad (4.38)$$

de maneira que $u_i(x, t) = \{\Phi_{xi}(x)\}\{\delta^{(e)}(t)\}$, $w(x, t) = \{\Phi_z(x)\}\{\delta^{(e)}(t)\}$ e $\theta_i(x, t) = \{\Phi_{ri}(x)\}\{\delta^{(e)}(t)\}$ para $i = r, b, v$.

A equação do movimento do elemento finito é então dada por:

$$\left(\left[M_r^{(e)} \right] + \left[M_v^{(e)} \right] + \left[M_b^{(e)} \right] \right) \{\ddot{\delta}^{(e)}(t)\} + \dots \\ \dots + \left(\left[K_r^{(e)} \right] + \left[K_v^{(e)} \right] + \left[K_b^{(e)} \right] \right) \{\delta^{(e)}(t)\} = \{R^{(e)}(t)\}, \quad (4.39)$$

onde $\{R^{(e)}(t)\}$ é o vetor de forças externas, e $\left[M_i^{(e)} \right]$ e $\left[K_i^{(e)} \right]$ são as matrizes de massa e de rigidez, respectivamente, da i -ésima camada, dadas por:

$$\left[M_i^{(e)} \right] = \int_0^{L_e} \rho_i \left[A_i \left(\left[\Phi_{xi} \right]^T \left[\Phi_{xi} \right] + \left[\Phi_z \right]^T \left[\Phi_z \right] \right) + I_i \left[\Phi_{ri} \right]^T \left[\Phi_{ri} \right] \right] dx, \\ \text{para } i = r, v, b; \quad (4.40)$$

$$\left[K_f^{(e)} \right] = \int_0^{L_e} E_f \left[A_f \left[B_{mf} \right]^T \left[B_{mf} \right] + I_f \left[B_{bf} \right]^T \left[B_{bf} \right] \right] dx, \quad \text{para } f = r, b; \quad (4.41)$$

$$\left[K_v^{(e)} \right] = \int_0^{L_e} E_v \left[A_v \left[B_{mv} \right]^T \left[B_{mv} \right] + I_v \left[B_{bv} \right]^T \left[B_{bv} \right] \right] dx + k_v \int_0^{L_e} G_v A_v \left[B_{sv} \right]^T \left[B_{sv} \right] dx, \quad (4.42)$$

nas quais ρ_i , A_i , I_i e E_i denotam a massa específica, a área da seção transversal, o momento de inércia da seção transversal e o módulo de elasticidade, respectivamente, para $i = r, v, b$, k_v é o fator de correção do cisalhamento, relacionado à teoria de vigas de Timoshenko, e G_v é o módulo de cisalhamento, estes dois últimos relacionados à camada interna da viga.

A aplicação da metodologia descrita na Seção 3.8 à formulação detalhada anteriormente permite a inclusão de efeito relacionado a comportamento viscoelástico para a camada interna à viga sanduíche considerada. Neste caso, a equação do movimento é modificada para tomar a forma:

$$\begin{aligned} & \left(\left[M_r^{(e)} \right] + \left[M_v^{(e)} \right] + \left[M_b^{(e)} \right] \right) \left\{ \ddot{\delta}^{(e)}(t + \Delta t) \right\} + \dots \\ & \dots + \left(\left[K_r^{(e)} \right] + \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \left[K_v^{(e)} \right] + \left[K_b^{(e)} \right] \right) \left\{ \delta^{(e)}(t + \Delta t) \right\} = \\ & = \left\{ R^{(e)}(t + \Delta t) \right\} - c \frac{E_\infty}{E_0} \left[K_v^{(e)} \right] \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \left\{ \bar{\delta}^{(e)}(t + \Delta t - j\Delta t) \right\}, \quad (4.43) \end{aligned}$$

onde:

$$\left\{ \bar{\delta}^{(e)}(t + \Delta t) \right\} = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \left\{ \delta^{(e)}(t + \Delta t) \right\} - c \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \left\{ \bar{\delta}^{(e)}(t + \Delta t - j\Delta t) \right\}. \quad (4.44)$$

A título de exemplo e validação de código computacional próprio, foi simulado exemplo apresentado pelos autores Galucio, Deü e Ohayon (2004). A Fig. 4.9 apresenta a resposta dinâmica de uma viga do tipo sanduíche engastada-livre cujas características são dadas na Tab. 4.3, juntamente com as propriedades físicas dos materiais simulados. Outros dados referentes à simulação são o número de elementos finitos utilizado (quinze), bem como o esforço externo aplicado (na extremidade livre da viga, direção transversal):

$$f(t) = \begin{cases} 500t[s], & \text{se } 0 \leq t < 2 \text{ ms} \\ 2 - 500t[s], & \text{se } 2 \leq t < 4 \text{ ms} \\ 0, & \text{se } t \geq 4 \text{ ms} \end{cases} \quad (3.157)$$

Tabela 4.3 - Parâmetros dos materiais e geométricos utilizados na simulação(GALUCIO, DEÜ, OHAYON, 2004).

Camada da Viga		Externas (Idênticas)	Interna
Material		Alumínio	ISD112
Parâmetros do Material	ρ [kg/m ³]	2690	1600
	ν	0,345	0,5
	E_0 [MPa]	70,3.10 ³	1,5
	E_∞ [MPa]	-	69,9495
	τ [s]	-	1,4052.10 ⁻²
	α	-	0,7915
	k_c	-	5/6
Geometria	L [mm]	200	200
	b [mm]	10	10
	t [mm]	1	0,2

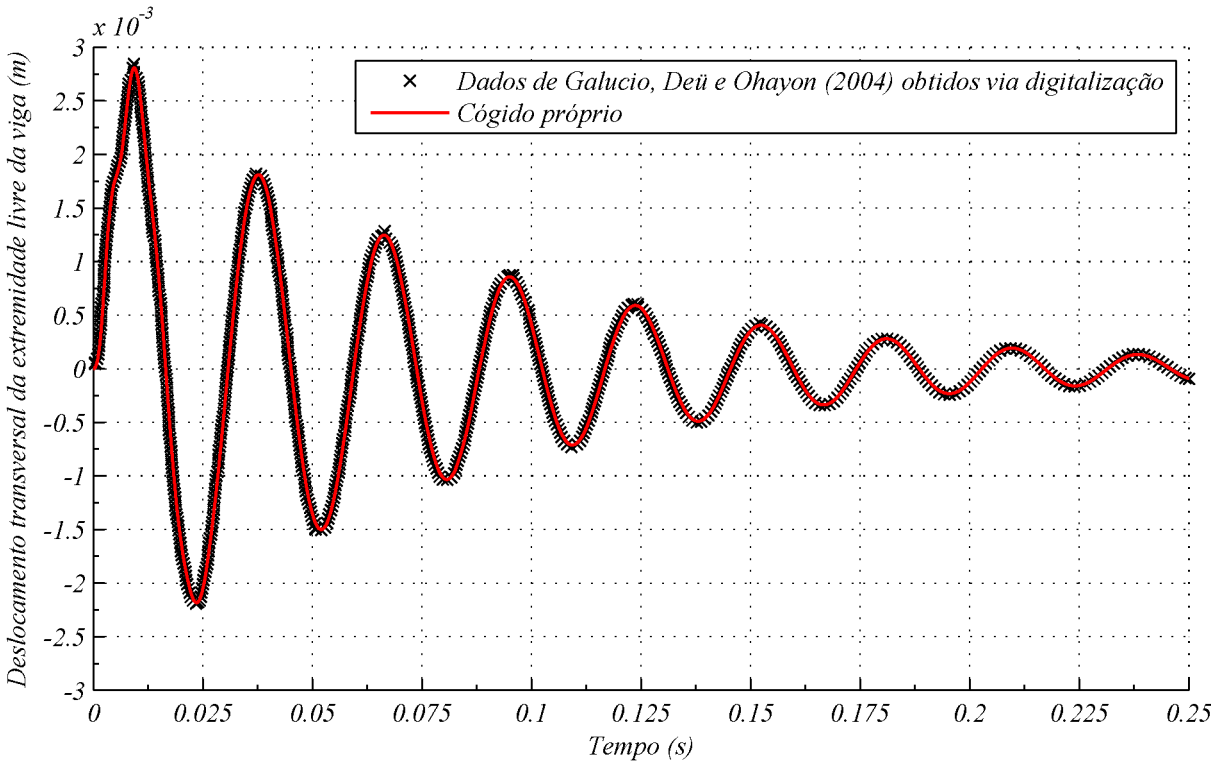


Figura 3.15 - Deslocamento transversal da extremidade livre da viga multicamadas analisada.

Por inspeção da Fig. 4.9, pode-se concluir que o código computacional implementado é válido, já que os resultados comparados encontram-se muito próximos daqueles obtidos por

Galucio, Deü e Ohayon (2004), ainda que os dados por estes autores não sejam exatos, uma vez que foram obtidos via digitalização da curva por eles apresentada em seu trabalho.

Discute-se, neste ponto, a eficiência em termos computacionais dos dois algoritmos implementados em associação com formulações por elementos finitos.

O primeiro, proposto por Schmidt e Gaul (2002), considera um modelo fracionário com cinco parâmetros e faz uso dos históricos do campo de deslocamentos e das tensões, ambos associados a cada um dos elementos utilizados para a discretização do domínio.

A segunda abordagem, por outro lado, faz uso de um modelo de quatro parâmetros e necessita apenas do histórico associado a deslocamentos nodais anelásticos, introduzidos a partir de uma transformação de coordenadas. O procedimento associado, neste caso, é fruto do trabalho de Galucio, Deü e Ohayon (2004).

Embora seja limitado, devido ao fato do modelo contemplado no trabalho de Galucio, Deü e Ohayon (2004) dispor de apenas quatro parâmetros para ajuste do comportamento do material, o algoritmo proposto pelos autores é superior àquele sugerido por Schmidt e Gaul (2002). Isto se faz verdade devido à necessidade de menor quantidade de memória para armazenamento de variáveis introduzidas quando na resolução das equações diferenciais que regem o problema associado. Além disso, pelo fato da abordagem de Schmidt e Gaul (2002) fazer uso do histórico das tensões, o tempo de simulação computacional é, comparativamente, muito elevado, devido à necessidade de integração de matrizes associadas às funções de forma utilizadas na interpolação dos graus de liberdade nodais a cada novo passo de tempo.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS

Na presente Dissertação foram apresentados os principais fundamentos teóricos do Cálculo Fracionário e estudadas aplicações, suas aplicações na modelagem de sistemas com comportamento viscoelástico no âmbito da Dinâmica Estrutural.

Com base no estudo realizado pode-se concluir que, embora envolva conhecimentos teóricos mais aprofundados e técnicas numéricas mais sofisticadas, os métodos baseados no Cálculo Fracionário permitem modelagem mais precisa de uma classe de problemas da Física e da Engenharia, fato que justifica seu emprego.

Especificamente no tocante à modelagem de sistemas viscoelásticos, os modelos de ordem fracionária são considerados como sendo alguns dos mais eficientes, especialmente no que diz respeito a simulações de respostas no domínio do tempo. Neste sentido, vale comentar que análises no domínio da frequência têm sido realizadas adequadamente com base no conceito de módulo complexo. Entretanto, respostas temporais são necessárias quando o interesse é dirigido a condições envolvendo impacto ou outros tipos de cargas transitórias.

O estudo aqui reportado abordou alguns procedimentos numéricos destinados à resolução de equações diferenciais de ordem arbitrária. Em específico, foram descritos procedimentos de resolução baseados na discretização por elementos finitos, em associação com modelos viscoelásticos de ordem fracionária e com algoritmos numéricos de integração passo a passo. Duas metodologias consideradas entre as mais modernas, sugeridas por Schmidt e Gaul (2002) e por Galucio, Deü e Ohayon (2004) foram implementadas e aplicadas à caracterização do comportamento dinâmico de estruturas amortecidas. Os resultados obtidos permitiram validar parcialmente as implementações e confrontar as características das duas

metodologias. Acredita-se que a metodologia de Galucio, Deü e Ohayon (2004) conduza a significativo aumento da eficiência computacional, especialmente no caso de modelos com elevados números de graus de liberdade.

Com base na experiência adquirida com a realização do estudo, são apontadas as seguintes perspectivas para sua continuidade:

- emprego do Cálculo Fracionário no âmbito do controle ativo de vibrações, mediante a proposição e avaliação do desempenho de controladores de ordem fracionária;
- associação de modelos viscoelásticos de ordem fracionária com outros tipos de elementos finitos (placas e sólidos), de modo a permitir a modelagem de componentes estruturais mais complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adolfsson, K., Enelund, M., Olsson, P., **On the Fractional Order Model of Viscoelasticity**, 2005, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 9, p. 15-34.

Agrawal, O. P., **Application of Fractional Derivatives in Thermal Analysis of Disk Brakes**, 2004, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38, p. 191-206.

Amaral, B. D., **Solução da Equação de Transporte Multidimensional em Geometria Cartesiana e Meio Infinito Usando Derivada Fracionária**, 2003, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

Anastasio, T. J., **The Fractional-Order Dynamics of Brainstem Vestibulo-Oculomotor Neurons**, 1994, *Biol. Cybernet.*, Vol. 72, Nº 1, p. 69-79.

Andrade, M. F., **Equações de Difusão Fracionárias e Não-Lineares: Soluções e Difusão Anômala**, 2006, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.

Aoun, M., Malti, R., Levron, F., Oustaloup, A., **Numerical Simulation of Fractional Systems**, 2003, em: *Proceedings of DETC2003*, 2003 ASME Design Engineering Technical Conferences, September 2–6, Chicago, Illinois.

Ávila, E. B., Sales, T. P., Rade, D. A., Lacerda, H. B., **Assessment of Fractional-Order Controllers for Active Vibration Control**, 2009, *Proceedings of COBEM 2009- 20th International Congress of Mechanical Engineering*, Porto Alegre, RS.

Barbosa, R. S., Machado, J. A. T., Silva, M. F., **Time Domain Design of Fractional Differintegrators Using Least-Squares**, 2006, *Signal Processing*, Vol. 86, p. 2567-2581.

Bagley, R. L., Torvik, P. J., **A Theoretical Basic for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity**, 1983, *Journal of Rheology*, Vol. 27, Nº 3, p. 201-210.

Bagley, R., **On the Equivalence of the Riemann-Liouville and the Caputo Fractional Order Derivatives in Modeling of Linear Viscoelastic Materials**, 2007, *An International Journal for Theory and Applications*, Vol. 10, Nº 2, p. 123-126.

Bathe, K. J., **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

Bultheel, A., Martínez-Sulbaran, H., **Recent Developments in the Theory of the Fractional Fourier and Linear Canonical Transforms**, 2007, Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin, Vol. 13, N° 5, p. 971-1005.

Carpinteri, A. and Mainardi, F., **Fractals and fractional calculus in continuum mechanics**, In: **Mainardi, F., Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics**, Springer Verlag, Wien and New York, 1997, p. 291-348.

Cavazos, F. R. G., Melo, M. E. R., González, V. A. G., Salazar, C. A. G., Loera, A. G., **Aplicación del Cálculo Fraccional a la Reología de Materiales Poliméricos, Ingenierías**, 2007, Vol. X, N° 35, p. 42-47.

Cole, K. S., **Electric Conductance of Biological Systems**, 1933, Proc. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol., New York, p. 107-116.

Diethelm, K., Ford, N. J., **Multi-Order Fractional Differential Equations and their Numerical Solution**, 2004, Appl. Math. Comput., Vol. 154, N° 3, p. 621–640.

Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D., Luchko, Y., **Algorithms for the Fractional Calculus: a Selection of Numerical Methods**, 2005, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 194, p. 743–773.

Djrbashian, M. M., **Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain**, Boston: Birkhauser, 1993.

Engheta, N., **On Fractional Calculus and Fractional Multipoles in Electromagnetism**, 1996, IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol. 44, N° 4, p. 554-566.

Erdélyi, A. *et al.*, **Higher Transcendental Functions**, V. I. McGrawHill Book Co., Inc., New York, 1953.

Erdélyi, A., Oberhettinger, M. F., and Tricomi, F. G., **Tables of Integral Transforms, Based, in Part, on Notes Left by Harry Bateman and Compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project**, 1954, New York: McGraw-Hill, V. 2.

Espíndola, J. J. ; Silva Neto, J. M da, Lopes, E. M. O., **A Generalized Fractional Derivative Approach to Viscoelastic Material Properties Measurements**, 2005, Applied Mathematics and Computation, v. 164, n. 2, p. 493-506.

Espíndola, J. J., Bavastri, C. A., Lopes, E. M. O., **Design of Optimum Systems of Viscoelastic Vibration Absorbers for a Given Material Based on the Fractional Calculus Model**, 2008, Journal of Vibration and Control, v. 14, p. 1607-1630.

Galucio, A. C., Deü, J.-F., Ohayon, R., **Finite Element Formulation of Viscoelastic Sandwich Beams Using Fractional Derivative Operators**, 2004, Computational Mechanics, v. 33, p. 282-291.

Gaul, L., Klein, P., Kempfle, S., **Impulse Response Function of an Oscillator with Fractional Derivative in Damping Description**, 1989, Mech. Res. Commun, Vol. 16, Nº 5, p. 4447-4472.

Gel'fand, I. M., Shilov, G. E., **Generalized functions**, V. I, Academic Press, 1964.

Glockle, W. G. and Nonnenmacher, T. F., **Fractional Integral Operators and Fox Functions in the Theory of Viscoelasticity**, 1991, Macromolecules, Vol. 24, p. 6426-6434.

Gonçalves, G., Lenzi, M. K., Moraes, L. S., Lenzi, E. K., Andrade, M. F., **Difusão Anômala e Equações de Difusão**, 2005, Acta Sci. Technol, Vol. 27, Nº 2, p. 123-131.

Gorenflo, R., and Vessella, S., **Abel Integral Equations: Analysis and Applications**, 1991, Springer-Verlag, Berlin, 215 p.

Goto, M., and Ishii, D., **Semidifferential Electroanalysis**, 1975, J. Electroanal. Chem. And Interfacial Electrochem., Vol. 61, p. 361-365.

Hartley, T. T., Lorenzo, C. F., **Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order Systems**, **Nonlinear Dynamics**, 2002, Vol. 29, p. 201-233.

Heleschewitz, D., Matignon, D., **Diffusive Realizations of Fractional Integrodifferential Operators: Structural Analysis Under Approximation**, 1998, Proceedings IFAC Conference System, Structure and Control, Nantes, France, Vol. 2, p. 243-248.

Heymans, N., Podlubny, I., **Physical Interpretation of Initial Conditions For Fractional Differential Equations with Riemann-Liouville Fractional Derivatives**, Rheologica Acta, 2005.

Jia, J-H., Shen, X-Y., Hua, H-X., **Viscoelastic Behavior Analysis and Application of the Fractional Derivative Maxwell Model**, 2007, Journal of Vibration and Control, Vol. 13, N° 4, p. 385-401.

Kumar, P., Agrawal, O. P., **Numerical Scheme for the Solution of Fractional Differential Equations**, 2005, Proceedings of the 2005 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information Engineering Conference, Long Beach, California, September 24–28.

Lima, A. M. G., **Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Materiais Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas**, 2003, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Machado, J. A. T., **Discrete-Time Fractional-Order Controllers**, 2001, FCAA J., Vol. 4, p. 47–66.

Machado, J. A. T., Jesus, I. S., Galhano, A., Cunha, J. B., **Fractional Order Electromagnetics, Signal Processing**, 2006, Vol. 86, p. 2637-2644.

Maia, N. M. M., Silva, J. M. M. and Ribeiro, A. M. R., **On a General Model for Damping**, 1998, Journal of Sound and Vibration, Vol. 218, N° 5, p. 749-767.

Meerschaert, M. M., **Fractional Calculus Models in Finance**, 2006, Department of Mathematics & Statistics, University of Otario.

Mendez, G. A., **Projeto Ótimo de Neutralizadores Viscoelásticos Baseado no Modelo a Derivadas Fracionárias**, 2004, Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Miller, K.S., Ross, B., **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**, 1993, John Wiley & Sons, 366 p.

Oldham, K. B., **A Signal-Independent Electroanalytical Method**, 1972, Anal. Chem., Vol. 44, N° 1, p. 196-198.

Oldham, K. B., Spanier, J., **The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order**, Academic Press, California, 1974, 240 p., Vol. 111.

Oustaloup, A., **La Dérivation Non Entière: Théorie, Synthèse et Applications**, Hermès, 1995.

Padovan, J., **Computational Algorithms and Finite Element Formulation Involving Fractional Operators**, 1987, *Comput. Mech.*, Vol. 2, p. 271–287.

Pedron, I. T., **Estudos em Difusão Anômala**, 2003, Tese de Doutorado, Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.

Podlubny, I., and El-Sayed, A.M.A.: **On Two Definitions of Fractional Derivatives**, 1996, *Inst. Exp. Phys, Slovak Acad. Sci., Kosice*, 21 p.

Podlubny, I., **Fractional Differential Equations**, Academic Press, New York, 1999.

Poinot, T., Trigeassou, J. C., **A Method for Modelling and Simulation of Fractional Systems**, 2003, *Signal Processing*, Vol. 83, p. 2319-2333.

Schmidt, A. and Gaul, L., **Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives**, 2002, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 29, p. 37-55.

Suarez, L. E., Shokooh, A., **An Eigenvector Expansion Method for the Solution of Motion Containing Fractional Derivatives**, 1997, *ASME. J. Appl. Mech.*, Vol. 64, p. 629–635.

Trindade, M. A., Benjeddou, A., Ohayon, R., **Finite Element Modelling of Hybrid Active-Passive Vibration Damping of Multilayer Piezoelectric Sandwich Beams – Part I: Formulation; Part II: System Analysis**, 2001, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, v. 51, p. 835-864.

Valério, D., Costa, J. S., **Tuning of Fractional PID Controllers with Ziegler-Nichols-Type Rules**, 2006, *Signal Processing*, Vol. 86, p. 2771-2784.

Yifei, P., Xiao, Y., Ke, L., Jiliu, Z., Ni, Z., Yi, Z., Xiaoxian, P., **Structuring Analog Fractance Circuit for $\frac{1}{2}$ Order Fractional Calculus**, 2005, *IEEE*, p. 1039-1042.

Yuan, L., Agrawal, O. P., **A Numerical Scheme for Dynamic Systems Containing Fractional Derivatives**, 2002, *Transactions of the ASME, J. Vib. Acoust.*, Vol. 124, p. 321–324.

Zhang, X., Erdman, A. G., **Dynamic Responses of Flexible Linkage Mechanisms with Viscoelastic Constrained Layer Damping Treatment**, 2001, *Computers and Structures*, v. 79, p. 1265-1274.