

**TOBIAS SOUZA MORAIS**

**Contribuição ao Estudo de Máquinas Rotativas  
na presença de Não-Linearidades**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**2010**

Tobias Souza Morais

Contribuição ao Estudo de Máquinas Rotativas na presença  
de Não-Linearidades

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Valder Steffen, Jr.

**Uberlândia - MG**

**2010**

## Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer ao Professor Valder Steffen Jr. Suas orientações durante os últimos 4 anos foram fundamentais para o meu desenvolvimento e o desta tese. Um exemplo de profissional e pessoa ser seguida.

Gostaria de agradecer aos meus pais: José Cássio Morais e Rosemeire Gomes de Souza Morais, juntamente com meus irmãos: Vinícius, Douglas e Cássio, pelo apoio incondicional.

À minha esposa, Marina Furtado Melo, pelas inúmeras trocas de impressões e comentários ao trabalho, pelos incentivos, paciência e compreensão.

Ao professor Jarir Mahfoud por toda ajuda em Lyon e pelas boas idéias trocadas.

Aos professores Johan Der Hagopian e Nicolò Bachschmid pelos ensinamentos.

Aos professores Marcelo Braga dos Santos e Francisco Paulo Lépre pelas orientações durante o projeto da bancada de teste.

Aos amigos que muito contribuíram durante as longas discussões sobre o trabalho, dentre os quais gostaria de citar: Adailton Borges, Odair Nunes, Lizeth Palomino, Karina Tsuruta, Edson Koroishi e Bartolomé Seguí. Em especial, gostaria de agradecer ao amigo Aldemir Cavalini Jr que muito ajudou e que dará continuidade a alguns temas desta tese.

À Tractebel pela motivação e interesse na área de balanceamento de rotores flexíveis, um tema importante tratado nesta tese.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este Curso.

Ao CNPq pela bolsa de doutorado.

MORAIS, T. S. **Contribuição ao Estudo de Máquinas Rotativas contendo Não-Linearidades**. 2010. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

## Resumo

Esta tese procura focar problemas relacionados a rotores inteligentes, ou seja, aqueles que são capazes de monitorar seu comportamento dinâmico, analisá-lo, propor soluções com certa autonomia e garantir seu funcionamento mesmo quando do aparecimento de falhas que podem comprometer seu comportamento seguro ou sua eficiência.

Este trabalho, de maneira geral, está inserido no contexto da dinâmica de máquinas rotativas com características não-lineares. Mais especificamente, interessa-se a não-linearidades causadas por rotores que apresentam parâmetros variantes no tempo, como é o caso dos eixos trincados, e de sistemas com atuadores eletromagnéticos (AEM) que introduzem forças que são funções inversas do quadrado do deslocamento. Neste sentido, três assuntos mais significativos foram abordados, conforme abaixo especificado.

O primeiro assunto está relacionado com a identificação de parâmetros variantes no tempo, através da expansão dos sinais de entrada e saída do sistema, além da expansão, também, dos parâmetros físicos do sistema em séries de funções ortogonais, permitindo, desta forma, a identificação dos parâmetros desconhecidos do sistema rotativo, tanto daqueles que são constantes como daqueles que variam com o tempo. Assim, um eixo contendo uma trinca foi considerado como um sistema de parâmetros variantes, ao qual se aplicou a metodologia proposta para identificação destes parâmetros. Para tanto, uma

modelagem para a trinca foi desenvolvida, possibilitando a simulação completa da estrutura a partir do método dos elementos finitos.

O segundo caso estudado foi sobre a possível aplicação de um atuador eletromagnético (AEM) com a finalidade de manter a trinca fechada, controlando assim o processo de fadiga de um eixo rotativo. O comportamento dinâmico da trinca é, principalmente, influenciado pelos momentos causados em sua superfície. Esses momentos podem ser determinados através da variação entre os deslocamentos angulares nos nós da extremidade do elemento com a trinca. Observou-se, através de simulações feitas que, a utilização dos AEM permite modificar várias características da dinâmica do sistema rotativo, tais como velocidades críticas, amplitude dos deslocamentos, dentre outras. Como consequência das alterações do deslocamento angular, verificou-se a possibilidade de utilização dos AEM para manter a fissura fechada. Resulta uma metodologia para auto-correção do problema criado pela presença da trinca (*self healing*).

O terceiro e último tópico abordado está relacionado com a identificação do desbalanceamento através da utilização de técnicas de problemas inversos. Para isso, o modelo da máquina rotativa tem que ser conhecido (ou ter sido previamente identificado). Assim, foi utilizada uma metodologia baseada numa técnica heurística de otimização, buscando o balanceamento do sistema tanto para o caso linear (sem os atuadores eletromagnéticos) como do sistema contendo atuadores eletromagnéticos que introduzem não-linearidades. Deve-se salientar que as técnicas clássicas de balanceamento não podem resolver este tipo de problema, uma vez que partem do princípio da linearidade entre a excitação (desbalanceamento) e a resposta (vibração) do rotor, característica esta que não é verificada nos sistemas não-lineares.

---

*Palavras – chave: Rotores Inteligentes, Rotores não-lineares, Desbalanceamento, Trincas em rotores, Atuadores eletromagnéticos, Diagnóstico de falhas em máquinas rotativas, Identificação de parâmetros variantes no tempo.*

MORAIS, T. S. **Contribution to the Study of Rotating Machines containing nonlinearities**. 2010. PhD Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, Brazil.

### **Abstract**

This thesis focuses specifically on issues related to smart rotors, i.e., those which are able of monitoring their dynamic behavior, analyze their response and propose solutions with a certain degree of autonomy so that safe operation is ensured even in the presence of faults that may compromise either the rotors' safety or efficiency.

In general terms, this work encompasses rotating machines with nonlinear characteristics. More specifically, it is interested on nonlinearities associated with rotors that have time-varying parameters, such as cracked shafts and systems with electromagnetic actuators (EMA). The electromagnetic actuators introduce forces that are inversely proportional to the squared gap value. In this sense, three most significant issues are addressed in the present work, as described in the following.

The first issue is related to the identification of time-varying parameters, through the expansion of the system input and output signals together with the expansion of the physical parameters of the system, in series of orthogonal functions, thus allowing the identification of the unknown parameters of the system. Both constant and varying parameters can be identified. A cracked shaft was considered as a varying parameters system and the proposed methodology was applied to determine the crack parameters. For this aim, a crack model was developed, enabling the complete simulation of the structure by using the finite element technique.

The second case studied was the possible application of an electromagnetic actuator (EMA) for the purpose of maintaining the crack closed by controlling the fatigue process of a rotating shaft. The crack dynamics behavior is mainly influenced

by the moments caused on the crack's surface. These moments can be determined through the variation of the angular displacements in the nodes at the ends of the cracked element. It was observed through the simulations that the use of EMA allows modifying several dynamics characteristics of the rotation system, such as critical speed, amplitude of vibration, etc. As a result of changes in the angular displacement, it was verified the possibility of using EMA to keep the crack closed along the rotation of the shaft. It follows a methodology for self-correction of the problem created by the presence of the crack (self-healing scheme).

The third and last topic is related to the unbalance identification through the use of inverse problems techniques. For this, the rotating machine model must be known (or have been previously identified). Thus, a methodology based on a heuristic optimization technique was used aiming at balancing the system for the linear case (without the electromagnetic actuators) as well as for the system containing electromagnetic actuators that insert nonlinearity. It should be noted that classic techniques of balancing cannot solve such problem since they assume a linear relation between the excitation (unbalance) and the response (vibration) of the rotor.

---

*Keywords: smart rotors, nonlinear rotors, balancing, cracks in rotors, electromagnetic actuators, fault diagnosis in rotating machines, identification of time varying parameters.*

## Lista de Símbolos

$\varphi_k(t)$	é um conjunto de funções ortogonais
$\phi_k(t)$	é um conjunto de funções ortonormais
$[a,b] \subset \mathfrak{R}$	é o intervalo de integração fechado contido no domínio do conjunto dos números reais
$\delta_{mn}$	é o delta de Kronecker
$w(t)$	função peso
$c_m, a_n$ e $b_n$	são os coeficientes da série
$[P]$	é a matriz operacional de integração
$T$	é o período.
“ $r$ ”	número de termos de expansão dos sinais de entrada e saída
“ $rp$ ”	número de termos de expansão dos parâmetros variantes
$L_n(t)$	polinômios de Legendre
$T_i(t)$	polinômios de Chebyshev
$[M]$	matriz de massa
$[C]$	matriz de amortecimento
$[K]$	matriz rigidez
$[K(t)]$	matriz rigidez variante no tempo
$\{x(t)\}$	resposta do sistema
$\{f(t)\}$	força de entrada no sistema
$\hat{K}$	é o coeficiente de expansão da matriz rigidez
$\Theta(t)$	é uma base vetorial qualquer usada na expansão da matriz rigidez
$g(t)$	é uma função auxiliar dada pelo produto entre a base vetorial (usada para a expansão do parâmetro variante no tempo) e o sinal de resposta do sistema.
$G$	é o coeficiente de expansão de $g(t)$ .
$[X]$	é a matriz dos coeficientes de expansão de $\{x(t)\}$

$[F]$	é a matriz dos coeficientes de expansão de $\{f(t)\}$
$\{\eta\}$ e $\{\xi\}$	são os deslocamentos em coordenadas rotativas
$\theta$	é a posição angular
$\Omega$	é a velocidade de rotação
$h_0$	é a flexibilidade do eixo sem trinca
$\Delta h_\eta$	é a flexibilidade adicionada pela trinca na direção $\eta$
$\Delta h_\xi$	é a flexibilidade adicionada pela trinca na direção $\xi$
$f_\eta$ e $f_\xi$	são as forças aplicadas na direção $\eta$ e $\xi$
$S_0$	é a rigidez do eixo sem trinca
$\Delta S_\eta$ e $\Delta S_\xi$	são as variações da rigidez devido à trinca em cada uma das direções, $\eta$ e $\xi$ .
$\omega_\eta$ e $\omega_0$	são as frequências naturais do rotor com e sem trinca.
$G$	é a taxa de alívio de energia potencial
$U$	é a energia total de deformação do elemento trincado
$u_{ia}$	é o deslocamento adicional na direção $i$ , devido à trinca com profundidade constante e comprimento unitário.
$A$	é a área de secção transversal
$P_i$ e $M_i$	é o carregamento e o momento na direção $i$ .
$K$	são os fatores de intensificação de tensão.
$\sigma_{ij}$	são as tensões envolvidas no modo de abertura
$a$	é a profundidade da trinca.
$h$	é o comprimento da seção transversal retangular da viga
$F_k$	são as funções de forma definidas pela razão $a/h$
$K_k$	é a contribuição do carregamento $P_i$ ou do momento $M_i$ para o modo de abertura $k$
$\theta_x$ e $\theta_z$	são os deslocamentos angulares
$E$	é o módulo de elasticidade do material
$\rho$	é a densidade do material
$\nu$	é o módulo de poisson
$L_c$	é o comprimento equivalente deste elemento trincado
$C_g$	é a posição do centro geométrico

$I_{xx}, I_{zz}$ e $I_{xz}$	são os momentos de inércia de área, respectivamente na direção x, na direção z e na direção cruzada.
$K_c(t)$	é a matriz rigidez do elemento com trinca
$\Gamma$	é o contorno de integração.
$\vec{B}$	é o campo de indução
$I$	é a corrente que circula na bobina
$\mu_0$	é a permeabilidade magnética do vácuo.
$\mu$	é a permeabilidade magnética do material.
$\mu_r$	é a permeabilidade magnética relativa.
$\psi$	é o fluxo magnético através de uma secção transversal reta.
$[C_b]$	é a matriz de amortecimento viscoso dos mancais.
$[C_g]$ e $[K_g]$	são as matrizes devido ao efeito giroscópio com respeito à velocidade de rotação e o efeito da variação da velocidade de rotação.
$F_u(t)$	são as forças devidas ao desbalanceamento.
$a, b, c, d, f$	são as dimensões do circuito ferromagnético
$e \pm \delta$	é a distância do entreferro variando em função da vibração do rotor
$N$	é o número de espiras
$F_{AEM}(t)$	são as forças introduzidas pelo atuador eletromagnético.

## Sumário

<b>Capítulo I</b> .....	<b>1</b>
Introdução.....	1
<b>Capítulo II</b> .....	<b>7</b>
Identificação de parâmetros de sistemas mecânicos variantes no tempo .....	7
2.1 Introdução .....	7
2.2 Funções Ortogonais.....	8
2.2.1 Séries de Fourier .....	10
2.2.3 Polinômios de Chebyshev.....	17
2.3 Metodologia de Identificação de Parâmetros Variantes Usando Funções Ortogonais .....	21
<b>Capítulo III</b> .....	<b>25</b>
Modelos de Trinca .....	25
3.1 Introdução aos Modelos de Trinca Existentes.....	25
3.2 O Modelo Gasch .....	26
3.3 O Modelo “ <i>Switching</i> ” .....	30
3.4 Modelo de Mayes Modificado.....	33
3.5 Modelos Baseados na Mecânica da Fratura.....	36
3.5.1 Modelagem da “flexibilidade local” da secção trincada.....	37

3.5.2	O Modelo SERR .....	41
3.5.3	O Modelo Flex.....	42
3.5.3.1	Modelagem da trinca passo a passo pelo modelo Flex .....	42
3.5.3.2	Matriz de rigidez equivalente do elemento trincado .....	47
3.5.4	O Modelo de trinca 3D .....	50
3.5.5	Comparação dos três modelos apresentados.....	50
<b>Capítulo IV</b>	<b>.....</b>	<b>53</b>
	Noção de circuito Eletromagnético .....	53
4.1	Teorema de Ampère Aplicado a Circuitos Magnéticos .....	53
4.2	Modelagem de uma Bobina Eletromagnética.....	56
<b>Capítulo V</b>	<b>.....</b>	<b>60</b>
	Estudo de Casos .....	60
5.1	Identificação de Parâmetros Variáveis no Tempo.....	60
5.1.1	Estudo de Caso 1 – Identificação de rigidez do tipo hardening ..	60
5.1.2	Estudo de Caso 2 – Identificação de trincas em eixos de máquinas rotativas.....	67
5.1.3	Considerações parciais.....	75
5.2	Estudo de Caso 3 - Controle de Abertura de Trincas em Rotores por meio de Atuadores Eletromagnéticos .....	76
5.2.1	Descrição da Metodologia.....	77
5.2.2	Identificação das correntes de alimentação das bobinas.....	82

5.2.3	Resultados e discussões .....	84
5.2.3.1	Rotor Vertical .....	84
5.2.3.2	Rotor Horizontal .....	88
5.2.4	Considerações parciais.....	93
5.3	Estudo de Caso 4 - Identificação do Desbalanceamento em Máquinas Rotativas Não-Lineares e sua Correção .....	94
5.3.1	Modelagem do sistema rotativo usada nas simulações e no experimento.....	97
5.3.2	Comportamento dinâmico do sistema para diferentes parâmetros do atuador eletromagnético .....	101
5.4	Estudo de Caso 5 – Balanceamento sem Massa de Teste do Rotor Linear e Não-linear usando Técnicas de Otimização e Técnicas de Problemas Inversos .....	112
5.4.1	Rotor de comportamento linear.....	112
5.4.2	Rotor de comportamento não-linear .....	126
<b>Capítulo VI</b>	.....	<b>132</b>
	Resultados Experimentais do balanceamento de Rotor linear e não-linear sem massa de teste .....	132
6.1	Caracterização dos Atuadores eletromagnéticos.....	133
6.2	Ajuste dos Parâmetros do Modelo Gerado em Elementos Finitos em Relação ao Modelo Experimental .....	138
6.3	Validação do Modelo Analítico para o Sistema em Rotação.....	143

6.4	Determinação do Desbalanceamento Considerando o Sistema Linear e Não-Linear.....	145
6.5	Considerações sobre os Resultados da Identificação do Desbalanceamento.....	150
<b>Capítulo VII</b>	.....	<b>151</b>
	Conclusão.....	151
<b>Capítulo VIII</b>	.....	<b>156</b>
	Referências Bibliográficas .....	156

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

A compreensão do comportamento da dinâmica de sistemas rotativos foi e vem sendo estudada sob os mais variados aspectos. A necessidade do aumento das velocidades de trabalho e a redução de gastos operacionais levam à necessidade de melhor compreensão do comportamento dinâmico de máquinas rotativas. Estas máquinas são consideradas flexíveis e podem trabalhar em velocidades de rotação acima de várias velocidades críticas<sup>1</sup>.

Sabe-se que a passagem pelas velocidades críticas ou a operação da máquina em velocidades próximas destas é bastante perigosa, pois o alto nível de vibração pode proporcionar sobrecargas e levar à falha dos mancais, aumentar a possibilidade de aparecimento de trincas, além de outros fatores. Como as velocidades de rotação são muito elevadas, a energia cinética armazenada na máquina rotativa pode ocasionar grandes catástrofes decorrentes de falhas. Pequenas trincas podem aparecer e desenvolver-se ao ponto de provocar o colapso do eixo. Sabe-se que alguns rotores trabalham muitos anos com eixos trincados e, se forem devidamente monitorados, podem continuar em operação por mais tempo, até que sua substituição seja recomendada. As altas velocidades de trabalho dos

---

<sup>1</sup> Velocidades críticas são as velocidades de rotação do rotor em que o sistema entra em ressonância (a excitação, podendo ser síncrona ou assíncrona se aproxima de uma das frequências naturais do rotor para aquela rotação, atingindo picos de vibração). Sabe-se que o sistema rotativo apresenta alterações de suas frequências naturais em função de sua velocidade de rotação. O fator responsável por provocar essas alterações é o efeito giroscópico. Este aparece em decorrência do eixo de rotação modificar sua orientação no espaço, provocando alteração na direção do vetor quantidade de movimento angular. Entre outros fatores, as frequências naturais do sistema rotativo suportado por mancais hidrodinâmicos variam também em função da rotação.

rotores causam preocupações também com o desbalanceamento que o sistema apresenta, pois a força induzida por ele aumenta com o quadrado da velocidade de rotação, sendo este responsável por solicitações dinâmicas importantes que podem levar componentes à fadiga.

Assim, a identificação e modelagem de trincas, bem como a identificação e correção do desbalanceamento são temas importantes e atuais, apesar de já virem sendo estudados nas últimas décadas. Restringindo apenas a estudos realizados na UFU, Burbano (2005), em sua dissertação de mestrado, apresenta o desenvolvimento do modelo de trincas Mayes juntamente com sua validação experimental. Saldarriaga (2009) apresenta a identificação do desbalanceamento em sistemas rotativos por meio de uma alteração na metodologia dos coeficientes de influência, na qual utilizou-se redes neurais artificiais para a determinação das massas de correção. Esta técnica permite a identificação do desbalanceamento em rotores altamente flexíveis.

A dinâmica de rotores trincados vem sendo investigada por vários autores, dentre eles Wauer (1990), Gasch (1993) e Dimarogonas (1996). Geralmente a transição entre a abertura e o fechamento da trinca é assumida abrupta, como desenvolvido por Gasch (1993). Outros modelos bastante empregados assumem uma transição entre a abertura e o fechamento da trinca, conforme representada por uma função harmônica. Algumas investigações levam em conta o fenômeno mais realístico do comportamento da trinca, o chamado mecanismo de “*breathing*”<sup>2</sup> apresentado pelas trincas transversais, no qual são caracterizados a abertura e o fechamento da seção da trinca ao longo da rotação do rotor. Quando os carregamentos estáticos prevalecem sobre os carregamentos dinâmicos, o mecanismo de “*breathing*” pode ser pré-determinado e o comportamento dinâmico pode ser determinado por uma aproximação linear. Isso ocorre em máquinas rotativas horizontais pesadas, com velocidade de rotação baixa e/ou desbalanceamento relativamente pequeno. No caso dos carregamentos dinâmicos

---

<sup>2</sup> *Breathing* é o processo de abertura e fechamento da trinca, característico em eixos trincados submetidos a carregamentos dinâmicos, girando horizontalmente.

serem iguais ou maiores que os estáticos, isso ocorre em rotores leves ou na posição vertical, com velocidades de rotação elevadas acima das primeiras críticas, o problema torna-se não-linear e o mecanismo de “*breathing*” deve ser analisado para cada passo de tempo ao longo da rotação do sistema.

Muitos trabalhos são dedicados à análise de rotores leves, enfatizando os efeitos não-lineares, instabilidades e outros efeitos, mas esses efeitos são geralmente muito pequenos ou são desprezíveis, devido ao amortecimento causado pelo filme de óleo, por exemplo, ou outros fatores dissipativos. Modelos como o de Jeffcott são substituídos por modelos mais realísticos, como pode ser visto em Bachschmid e Tanzi (2003) e (2006). Esses autores também trabalharam com diferentes geometrias da trinca, como as trincas inclinadas (*slant cracks*), cuja ocorrência parece ser extremamente rara, Pennacchi et al. (2006).

O modelo de trinca desenvolvido neste trabalho é conhecido como o modelo Flex proposto por Bachschmid e Tanzi (2003). Este modelo foi validado experimentalmente por aqueles autores e leva em consideração o campo de tensão que ocorre na região da trinca, sendo bastante realístico. O modelo é não-linear, no qual os parâmetros do elemento que contém a trinca são identificados, a partir da resposta do sistema, e a resposta é gerada dependendo dos parâmetros da trinca. Para identificação dos parâmetros da trinca em um sistema rotativo, uma metodologia de identificação de parâmetros utilizando funções ortogonais (Pacheco e Steffen, 2004 e Melo e Steffen, 1993) foi modificada e adaptada para este fim, permitindo, conseqüentemente, a identificação da trinca.

Trincas podem ocorrer em decorrência do desbalanceamento que acentua o carregamento dinâmico sobre a estrutura. Com vistas ao balanceamento, técnicas clássicas, tais como o conhecido método dos coeficientes de influência, consideram que estes sistemas apresentam uma relação linear entre a excitação, devido ao desbalanceamento, e a resposta medida na estrutura. Quando esta relação de linearidade não é respeitada, estas técnicas não funcionam adequadamente e os resultados apresentados para as massas de correção, com suas devidas posições angulares, não atendem à finalidade a que se propõem, podendo até aumentar ainda mais o desbalanceamento da estrutura. O comportamento não-linear não é

levado em conta na formulação das técnicas de balanceamento consideradas como clássicas.

A metodologia proposta para identificação do desbalanceamento de máquinas rotativas não-lineares foi desenvolvida utilizando métodos de otimização pseudo-aleatórios, a partir de um modelo não-linear validado para o rotor. A não-linearidade foi introduzida por um atuador eletromagnético (AEM), composto por quatro bobinas que aplicam forças inversamente proporcionais ao quadrado da folga (*gap*), lembrando que esta é influenciada pela vibração do rotor. Isso significa que são utilizadas técnicas de problemas inversos de engenharia, baseadas em otimização heurística, para se determinar a excitação da máquina rotativa proveniente do desbalanceamento distribuído. Fica assim caracterizado um método que dispensa massas de teste, necessitando, entretanto, do modelo matemático-computacional do sistema em estudo. Viana (2008) apresenta em sua tese de doutorado vários métodos de otimização pseudo aleatórios inspirados na natureza e também disponibiliza estes métodos em um pacote de sub-rotinas computacionais denominado *Simple optimization toolbox*.

Ao se considerar o tema modelagem e identificação de trincas com o problema de balanceamento de rotores com atuadores eletromagnéticos (rotores não-lineares) surgiu naturalmente a idéia de aplicação desses atuadores como uma ferramenta capaz de interromper o processo de fadiga em eixos rotativos trincados, no contexto de monitoramento e manutenção da integridade estrutural. A operação segura de eixos trincados permite que estes possam ser utilizados o maior tempo possível antes de sua substituição ou reparo.

Como o processo de fadiga é caracterizado pela abertura e fechamento da trinca durante a rotação, propõe-se um procedimento baseado em atuadores eletromagnéticos capaz de prover atuação dinâmica sobre a estrutura, evitando a abertura total da trinca. Isso é feito pelo controle do comportamento dinâmico do rotor, promovendo a interrupção do processo de fadiga, permitindo o aumento do tempo de vida do eixo. Em 2003, Changsheng Zhu et al. publicaram um trabalho no qual relataram algumas dificuldades associadas à identificação de trincas em eixos suportados por mancais magnéticos. De acordo com esses autores “é impossível

usar o método tradicional que considera os componentes frequenciais em 2X e 3X na região de velocidades super-críticas para detectar a trinca” (tradução livre do texto original em inglês). Em 2006, Quinn et al. relatam a possibilidade de identificação de trincas em eixos suportados por mancais magnéticos ativos. Em ambos os trabalhos, o modelo da trinca não considera o fenômeno do *breathing* como uma função do comportamento dinâmico da estrutura, sendo o comportamento da trinca predeterminado como função da posição angular do rotor. Assim, o atuador eletromagnético não influencia na dinâmica da trinca. Neste trabalho, o comportamento da trinca é observado como uma função dos momentos dinâmicos que ocorrem nas extremidades do elemento trincado. O AEM é usado para formar um sistema de auto-reparo (*self-healing*) para que o rotor possa continuar em operação, evitando o aumento da profundidade da trinca devido à fadiga. Evidentemente, a introdução de atuadores eletromagnéticos com o objetivo de manter o eixo trincado em funcionamento não é simples e pode ser caro, mas os sistemas que já trabalham com estes atuadores podem ser programados de maneira que, quando da ocorrência de uma trinca ainda em sua fase incipiente, eles possam entrar em funcionamento, promovendo um maior tempo de utilização do rotor.

Portanto, a presente contribuição está focada na modelagem e simulação de sistemas rotativos com dois aspectos não-lineares: uma trinca que causa variação na rigidez em função da dinâmica da estrutura, e um atuador eletromagnético que, em sua concepção, aplica forças inversamente proporcionais ao quadrado do entreferro. Além disso, os AEM, devidamente programados, podem promover um aumento da vida útil do rotor trincado, reduzindo os efeitos da fadiga. Resulta uma nova possibilidade de aplicação não apenas dos atuadores eletromagnéticos, mas também para os mancais magnéticos ativos.

De uma maneira geral, as contribuições efetivas deste trabalho foram a modificação da metodologia das funções ortogonais para a identificação de parâmetros variantes, a identificação do desbalanceamento e do plano de balanceamento de rotores não-lineares na presença de AEM e a utilização destes atuadores para o controle da fadiga, mantendo uma trinca fechada. Vale ressaltar que as rotinas computacionais usadas neste trabalho foram todas desenvolvidas pelo próprio autor.

Os vários assuntos desta tese encontram-se apresentados conforme segue. Primeiramente, foi feita, no capítulo I, uma Introdução ao trabalho. No capítulo II apresenta-se a Identificação de parâmetros de sistemas mecânicos variantes no tempo. No capítulo III são apresentados alguns modelos conhecidos de trinca, além daquele adotado neste trabalho. No capítulo IV foram descritos os conceitos básicos dos atuadores eletromagnéticos. Já no capítulo V, encontram-se as aplicações dos conceitos apresentados pelos capítulos anteriores - o item 5.1 apresenta aplicações voltadas para a identificação de parâmetros variantes no tempo; o item 5.2 apresenta o controle do processo de fadiga em eixo rotativo e, nos itens 5.3 e 5.4, apresenta-se a identificação e correção do desbalanceamento em rotores não-lineares. No capítulo VI apresenta a validação experimental da identificação do desbalanceamento do rotor com AEM. Por fim, as conclusões são apresentadas no capítulo VII e as referências bibliográficas no capítulo VIII.

# CAPÍTULO II

## IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS MECÂNICOS VARIANTES NO TEMPO

### 2.1 Introdução

Para a identificação de parâmetros de sistemas mecânicos que contenham partes que variam no tempo, utilizou-se, no presente trabalho, uma metodologia através das funções ortogonais, na qual os sinais de resposta, as entradas, bem como os parâmetros desconhecidos do sistema, são expandidos em séries de funções ortogonais (Pacheco e Steffen, 2002 e 2003). Através da aplicação destas expansões no conjunto de equações diferenciais que rege o comportamento dinâmico do sistema mecânico, é possível transformá-lo em um sistema de equações algébricas, cuja resolução nos permite determinar os parâmetros desejados.

A identificação de parâmetros que variam no tempo é relativamente mais complexa que a identificação de parâmetros cujos valores são constantes. Em outras palavras, identificar parâmetros variantes é o mesmo que identificar parâmetros constantes para cada passo de tempo considerado durante o experimento ou a simulação. Assim, no caso desenvolvido, a modelagem matemática se torna mais complexa e a convergência da identificação para os parâmetros desejados torna-se muito dependente do número de termos usados para a expansão e do passo de tempo adotado na simulação.

## 2.2 Funções Ortogonais

A base da técnica de identificação de parâmetros variantes no tempo proposta neste trabalho é, como acima mencionado, a transformação do sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas, por meio das propriedades que um conjunto especial de funções, ditas funções ortogonais, apresentam.

De uma maneira geral, um conjunto de funções reais  $\varphi_k(t), k=1,2,3\dots$ , definidas no intervalo  $[a,b] \subset \mathfrak{R}$ , é dito ortogonal neste intervalo se a integral dada pela Eq. (2.1) for respeitada (Spiegel, 1976):

$$\int_a^b \varphi_m(t)\varphi_n(t)d(t) = K \quad (2.1)$$

na qual  $K$  é uma constante igual a zero se  $m \neq n$  e, diferente de zero, se  $m = n$ .

O conjunto de funções  $\phi_k(t)$  é dito ortonormal se for válida a relação (Spiegel, 1976):

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \delta_{mn} \quad (2.2)$$

na qual  $\delta_{mn}$ , denominado delta de Kronecker, define-se como 0, se  $m \neq n$ , ou 1 se  $m = n$ , sendo  $\phi_k(t)$  o conjunto de funções ortonormais.

Se o conjunto  $\varphi_k(t)$  é ortonormal em relação à função densidade ou função peso  $w(t)$ , na qual  $w(t) \geq 0$ , então o conjunto de funções ortonormais é obtido através da equação:

$$\phi_k(t) = \sqrt{w(t)}\varphi_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

Daí verifica-se a relação dada pela Eq. (2.4), após substituir a Eq. (2.3) na Eq. (2.2).

$$\int_a^b \varphi_m(t) \varphi_n(t) w(t) dt = \delta_{mn} \quad (2.4)$$

Se uma função  $f(t)$  é contínua ou seccionalmente contínua no intervalo  $[a, b]$ , então,  $f(t)$  pode ser expandida em séries de funções ortonormais, ou seja:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \quad (2.5)$$

Tais séries, chamadas séries ortonormais, constituem generalizações das séries de Fourier. Admitindo que a série da Eq. (2.5) convirja para  $f(t)$ , pode-se multiplicar ambos os membros por  $\phi_m(t)$  e integrá-los no intervalo  $[a, b]$ , obtendo-se, assim, os coeficientes da série, como pode ser visto na Eq. (2.6).

$$c_m = \int_a^b f(t) \phi_m(t) dt \quad (2.6)$$

na qual  $c_m$  são os coeficientes generalizados de Fourier.

Um conjunto finito de funções ortonormais possui a seguinte propriedade em relação à sua integração sucessiva no intervalo  $[0, t]$ :

$$\int_0^t \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n \text{ vezes}} \{\phi_m(\tau)\} (d\tau) \cong [P]^n \{\phi_m(t)\} \quad (2.7)$$

na qual  $\{\phi_m(t)\} = \{\phi_0(t) \ \phi_1(t) \ \dots \ \phi_r(t)\}^T$  é o conjunto finito da série ortogonal e  $[P]$  é uma matriz quadrada de ordem “ $r$ ”, com elementos constantes, denominada matriz operacional de integração.

Na verdade, se for utilizada a base vetorial completa, ou seja, se a série não for truncada, a relação obtida na Eq. (2.7) torna-se uma igualdade. Porém, na prática, isto se torna inviável, devido à ordem elevada da matriz  $[P]$ .

### 2.2.1 Séries de Fourier

A base vetorial  $\{\varphi(t)\}$  das séries de Fourier, no intervalo  $[0, T]$ , é dada por (Spiegel, 1976):

$$\{\varphi(t)\} = \{\varphi_0(t) \ \varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_s(t) \ \varphi_1^*(t) \ \dots \ \varphi_s^*(t)\}^T \quad (2.8)$$

sendo:

$$\varphi_n(t) = \cos \frac{2n\pi t}{T} \quad n = 0, 1, \dots, s$$

$$\varphi_n^*(t) = \sin \frac{2n\pi t}{T} \quad n = 1, \dots, s$$

onde  $T$  é definido como sendo o período.

Utilizando as equações anteriores, pode-se obter as primeiras funções das séries de Fourier, como pode ser visto na Eq. (2.9) e na Fig. 2.1.

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1 \\ \varphi_1(t) &= \cos \frac{2\pi t}{T} & \varphi_1^*(t) &= \text{sen} \frac{2\pi t}{T} \\ \varphi_2(t) &= \cos \frac{4\pi t}{T} & \varphi_2^*(t) &= \text{sen} \frac{4\pi t}{T} \end{aligned} \quad (2.9)$$

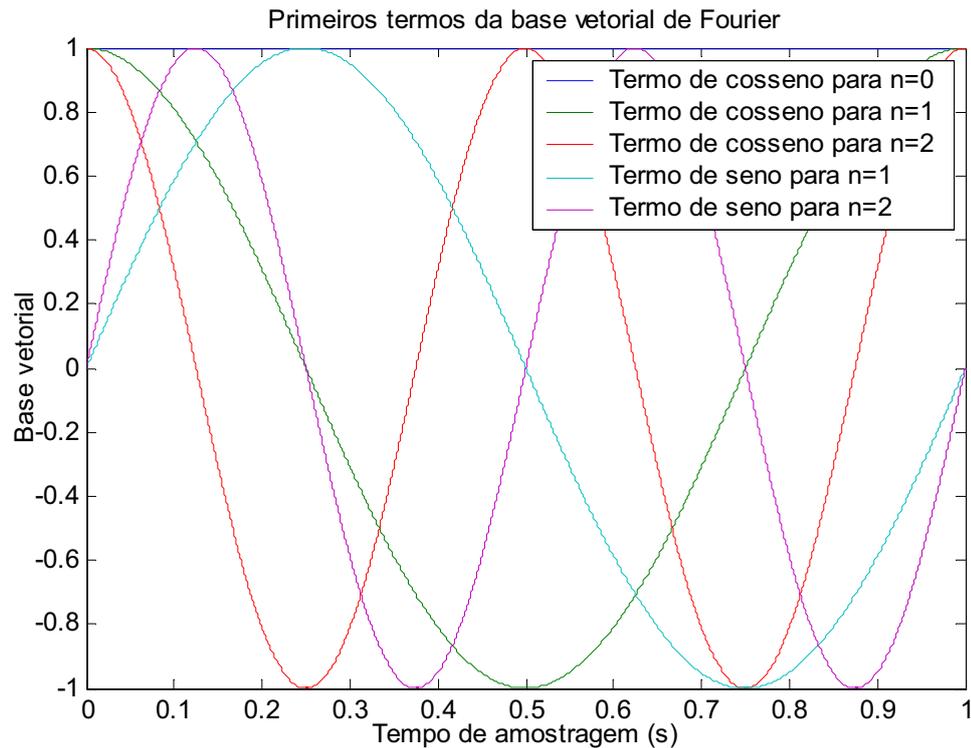


Figura 2.1 – Primeiros termos da base vetorial de Fourier.

Uma função  $f(t)$  pode ser expandida em séries de Fourier da seguinte forma:

$$f(t) = a_0\varphi_0(t) + \sum_1^{\infty} \{a_n\varphi_n(t) + b_n\varphi_n^*(t)\} \quad (2.10)$$

na qual os coeficientes de Fourier  $a_n$  e  $b_n$  são dados por:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt & n = 1, 2, \dots, s \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt & n = 1, 2, \dots, s
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Na prática, a expansão é feita truncando-se a série com “ $r$ ” termos ( $r = 2s + 1$ ), sendo  $s$  o número de termos em senos e cossenos, como observado na Eq. (2.8).

$$f(t) \cong a_0 \varphi_0(t) + \sum_1^s \{a_n \varphi_n(t) + b_n \varphi_n^*(t)\} \quad (2.12)$$

Para a obtenção da matriz operacional de integração, cada função da base vetorial é integrada no intervalo  $[0, t]$ , (Paraskevopoulos e Kekkeris, 1984):

$$\int_0^t \varphi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \quad (2.13)$$

$$\int_0^t \varphi_n(\sigma) d\sigma = \int_0^t \cos \frac{2n\pi\sigma}{T} d\sigma = \frac{T}{2n\pi} \int_0^t d \left( \text{sen} \frac{2n\pi\sigma}{T} \right) = \frac{T}{2n\pi} \varphi_n^*(t) \quad (2.14)$$

$$\int_0^t \varphi_n^*(\sigma) d\sigma = \int_0^t \text{sen} \frac{2n\pi\sigma}{T} d\sigma = \frac{-T}{2n\pi} \int_0^t d \left( \cos \frac{2n\pi\sigma}{T} \right) = \frac{T}{2n\pi} \varphi_0(t) - \frac{T}{2n\pi} \varphi_n(t) \quad (2.15)$$

Aproximando-se a Eq. (2.13) por uma série truncada de Fourier, tem-se:

$$\int_0^t \varphi_0(\sigma) d\sigma = \int_0^t d\sigma = t \cong c_0 \varphi_0(t) + \sum_{n=1}^s \{c_n \varphi_n(t) + d_n \varphi_n^*(t)\} \quad (2.16)$$

Os coeficientes  $c_n$  e  $d_n$  são calculados através das Eqs. (2.17), obtendo-se:

$$\begin{aligned} c_0 &= T/2 \\ c_n &= 0 & n &= 1, 2, \dots, s \\ d_n &= -T/n\pi & n &= 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (2.17)$$

Considerando as Eqs. (2.13) a (2.17), tem-se:

$$\int_0^t \{\varphi(\tau)\} d\tau \cong [P] \{\varphi(t)\} \quad (2.18)$$

sendo:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{T}{\pi} & -\frac{T}{2\pi} & \dots & -\frac{T}{s\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{T}{2\pi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{T}{4\pi} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{T}{2s\pi} \\ \frac{T}{2\pi} & -\frac{T}{2\pi} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{T}{4\pi} & 0 & -\frac{T}{4\pi} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{T}{2s\pi} & 0 & 0 & \dots & \frac{T}{2s\pi} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

De uma forma mais compacta:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} & \{0\}_{1xs} & -\frac{T}{\pi} \{\tilde{e}\}_s^T \\ \{0\}_{sxl} & [0]_{sxs} & \frac{T}{2\pi} [I]_{sxs} \\ \frac{T}{2\pi} \{\tilde{e}\}_s & -\frac{T}{2\pi} [\tilde{I}]_{sxs} & [0]_{sxs} \end{bmatrix}_{rxr} \quad (2.20)$$

sendo:

$$\{\tilde{e}\}_s = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/s \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[\tilde{I}]_{sxs} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & 0 \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & 1/s \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

### 2.2.2 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre  $p_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , são obtidos a partir da equação diferencial de Legendre e são ortogonais no intervalo  $z \in [-1, 1]$ . Eles são gerados pela fórmula recursiva (Hwang e Chen, 1985 e Shih e Kung, 1985):

$$(n+1)p_{n+1}(z) = (2n+1)zp_n(z) - np_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

sendo  $p_0(z) = 1$  e  $p_1(z) = z$ .

Para o uso prático dos polinômios de Legendre no intervalo de tempo de interesse,  $t \in [0, t_f]$ , é necessário fazer uma mudança no domínio de definição, através da seguinte transformação de variáveis (Chang e Wang, 1985):

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1 \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (2.24)$$

Os polinômios transformados de Legendre  $p\left(\frac{2t}{t_f} - 1\right)$ , de agora em diante denominados  $L_n(t)$ , são obtidos a partir da seguinte fórmula recursiva:

$$L_{n+1}(t) = \frac{(2n+1)}{(n+1)} \left( \frac{2t}{t_f} - 1 \right) L_n(t) - \frac{n}{(n+1)} L_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \quad (2.25)$$

Com  $L_0(t) = 1$  e  $L_1(t) = \frac{2t}{t_f} - 1$ .

Utilizando as equações anteriores, pode-se obter as primeiras funções dos polinômios de Legendre, como pode ser visto na Fig. 2.2.

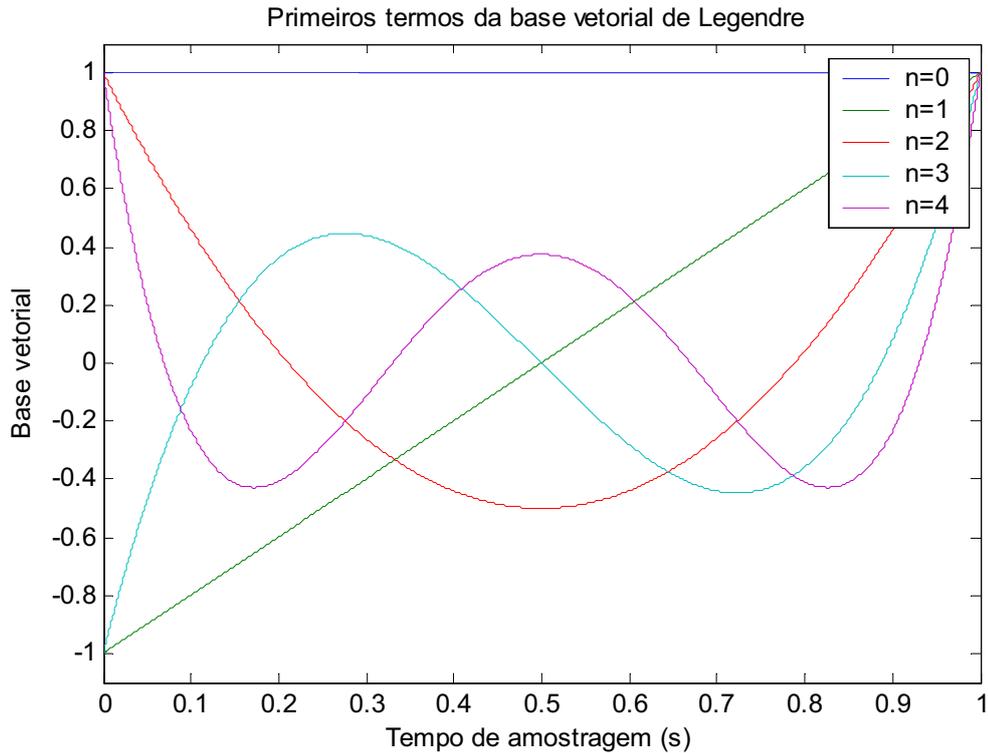


Figura 2.2 – Primeiros termos dos polinômios de Legendre.

Os polinômios transformados de Legendre satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade no intervalo  $[0, t_f]$  (Chang e Wang, 1985):

$$\int_0^{t_f} L_n(t)L_m(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ \frac{t_f}{(2n+1)} & \text{para } m = n \end{cases} \quad (2.26)$$

Uma função  $f(t)$  pode ser aproximada por um número finito de termos de polinômios transformados de Legendre:

$$f(t) \cong \sum_{n=0}^{r-1} f_n L_n(t) \quad (2.27)$$

Na qual  $f_n = \frac{2n+1}{t_f} \int_0^{t_f} f(t)L_n dt$  são os coeficientes das séries de Legendre.

A fórmula derivativa recursiva dos polinômios transformados de Legendre é dada por:

$$L_n = \frac{t_f}{2(2n+1)} \left( \frac{d}{dt} L_{n+1}(t) - \frac{d}{dt} L_{n-1}(t) \right) \quad (2.28)$$

Considerando-se a base vetorial  $\{L(t)\} = \{L_0(t) \ L_1(t) \ \dots \ L_{r-1}(t)\}$  e integrando-se a Eq. (2.28) no intervalo de  $[0, t]$ , obtém-se a matriz operacional de integração dos polinômios transformados de Legendre:

$$\int_0^t \{L(\tau)\} d\tau = [P]\{L(t)\} \quad (2.29)$$

sendo:

$$[P] = \frac{t_f}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2r-3} & 0 & \frac{1}{2r-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2r-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.2.3 Polinômios de Chebyshev

O polinômio de Chebyshev de primeira ordem, denominado de  $P_i(z)$ , é a solução da equação de Chebyshev definida da seguinte forma (Mohan e Datta, 1988):

$$(1 - z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} - z \frac{dy}{dz} + i^2 z = 0 \quad (2.31)$$

Os polinômios de Chebyshev são ortogonais no intervalo  $z \in [-1, 1]$  e são definidos como:

$$P_i(z) = \cos(i \cos^{-1} z) \quad (2.32)$$

ou

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} (-1)^j \frac{j!}{(2j)!(i-2j)!} (1-z^2)^j z^{i-2j} \quad (2.33)$$

na qual a notação  $\lfloor i/2 \rfloor$  significa o valor maior inteiro (*floor function*) e o índice  $i$  representa o  $i$ -ésimo polinômio de Chebyshev. Utilizando a Eq. (2.33), os primeiros polinômios de Chebyshev são dados por:

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 & P_3(z) &= 4z^3 - 3z \\ P_1(z) &= z & P_4(z) &= 8z^4 - 8z^2 + 1 \\ P_2(z) &= 2z^2 - 1 & P_5(z) &= 16z^5 - 20z^3 + 5z \end{aligned} \quad (2.34)$$

A fim de resolver problemas práticos, o domínio deve ser transformado para  $t \in [0, t_f]$  através da seguinte transformação de coordenadas (Chou e Horng, 1985):

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1 \quad (2.35)$$

Os polinômios transformados de Chebyshev,  $P_i(2t/t_f - 1) = T_i(t)$ , são obtidos pela fórmula de recorrência:

$$T_{i+1}(t) = 2 \left( \frac{2t}{t_f} - 1 \right) T_i(t) - T_{i-1}(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

sendo:

$$T_0(t) = 1 \text{ e } T_1(t) = \frac{2t}{t_f} - 1$$

Utilizando as equações anteriores, podem-se obter as primeiras funções dos polinômios de Chebyshev, como pode ser visto na Fig. 2.3.

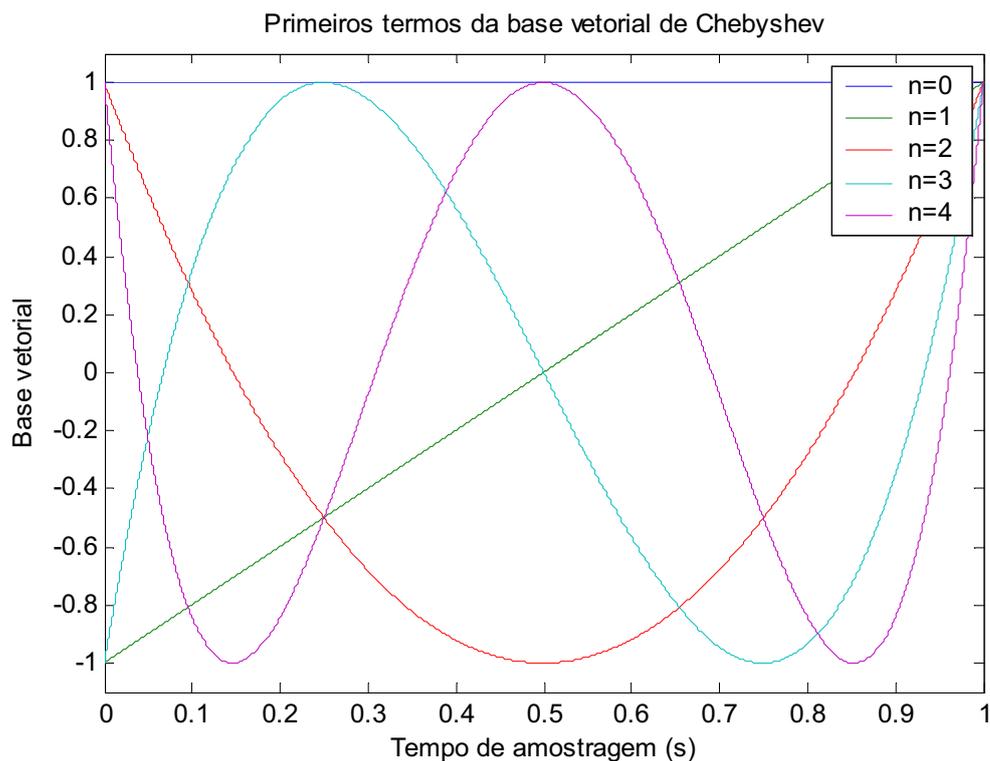


Figura 2.3 – Primeiros termos dos polinômios de Chebyshev.

A condição de ortogonalidade dos polinômios transformados de Chebyshev é dada por:

$$\int_0^{t_f} \frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{t(t_f-t)}} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \pi/2 & \text{se } i = j \neq 0 \\ \pi & \text{se } i = j = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Uma função arbitrária do tempo,  $f(t)$ , pode ser aproximada por polinômios de Chebyshev, da seguinte forma:

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{r-1} f_i T_i(t) \quad (2.38)$$

na qual  $f_i$  são os coeficientes da expansão em série de polinômios transformados de Chebyshev e são dados por:

$$f_i = k \int_0^{t_f} \frac{f(t)T_i(t)}{\sqrt{t(t_f-t)}} dt \quad (2.39)$$

$$\text{onde: } k = \begin{cases} 1/\pi & \text{se } i = 0 \\ 2/\pi & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

A fórmula derivativa recursiva dos polinômios transformados de Chebyshev é dada por:

$$2t(t_f-t) \frac{dT_i(t)}{dt} = it_f [T_{i-1}(t) - T_1(t)T_i(t)] \quad (2.40)$$

Ao integrar a Eq. (2.36) em  $[0, t]$ , obtém-se a matriz operacional de integração dos polinômios transformados de Chebyshev:

$$\int_0^t \{T(\tau)\} d\tau = [P]\{T(t)\} \quad (2.41)$$

sendo:

$$[P] = \frac{t_f}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)(r-3)} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2(r-3)} & 0 & \frac{1}{2(r-1)} \\ \frac{(-1)^r}{r(r-2)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2(r-2)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Assim, foram apresentadas algumas bases vetoriais com suas respectivas matrizes operacionais de integração. Estas serão usadas na identificação dos parâmetros variantes no tempo, conforme se verá na próxima seção.

### 2.3 Metodologia de Identificação de Parâmetros Variantes Usando Funções Ortogonais

A determinação de parâmetros variantes no tempo, aplicada para a identificação de trincas em eixos de máquinas rotativas, será aqui apresentada considerando que somente os parâmetros de rigidez variam com o tempo. Essa hipótese é bastante razoável, dado que os parâmetros de massa e amortecimento sofrem variações de efeitos secundários quando comparadas com as modificações na dinâmica do sistema que uma trinca causa devido às alterações nos parâmetros da rigidez da estrutura. Assim, uma equação diferencial que governa o comportamento do sistema com essas características pode ser dada por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K(t)]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.43)$$

Observa-se na equação matricial acima que o único parâmetro físico do sistema, variante no tempo, é a rigidez. Desta maneira, ao integrá-la duas vezes, obtém-se:

$$\begin{aligned} [M]\left(\{x(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t\right) + [C]\left(\int_0^t \{x(\tau)\}d\tau - \{x(0)\}t\right) + \int_0^t \int_0^t [K(\tau)]\{x(\tau)\}d\tau^2 = \\ = \int_0^t \int_0^t \{f(\tau)\}d\tau^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nesse momento, verifica-se que o termo  $K(\tau)$  é função do diferencial  $d\tau$ , não sendo possível fazer o mesmo com a massa e o amortecimento. Assim, a medida adotada foi a expansão do termo de rigidez em uma série qualquer, como indicado pela Eq. (2.45).

$$[K(t)] = \hat{K}\Theta(t) \quad (2.45)$$

sendo  $\hat{K}$  o coeficiente de expansão da matriz rigidez e  $\Theta(t)$  uma base vetorial qualquer com “ $rp$ ” termos usados para a expansão desta matriz.

Os sinais  $\{x(t)\}$  e  $\{f(t)\}$  foram também expandidos em séries de funções ortogonais truncados em “ $r$ ” termos:

$$\{x(t)\} = [X]\{\phi(t)\} \quad (2.46)$$

$$\{f(t)\} = [F]\{\phi(t)\} \quad (2.47)$$

Sendo:  $[X]$  a matriz dos coeficientes de expansão de  $\{x(t)\}$

$[F]$  a matriz dos coeficientes de expansão de  $\{f(t)\}$

Assim, ao substituir (2.45), (2.46), (2.47) em (2.44) é possível obter:

$$\begin{aligned} & [M]\left([X]\{\phi(t)\} - \{x(0)\}\{e\}^T\{\phi(t)\} - \{\dot{x}(0)\}\{e\}^T[P]\{\phi(t)\}\right) + \\ & + [C]\left(\int_0^t [X]\{\phi(\tau)\}d\tau - \{x(0)\}\{e\}^T[P]\{\phi(t)\}\right) + \int_0^t \int_0^t \hat{K}\Theta(\tau)\{x(\tau)\}d\tau^2 = \\ & = \int_0^t \int_0^t [F]\{\phi(\tau)\}d\tau^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Na equação acima observa-se o aparecimento do termo  $\{e\}^T$ ; este termo é dado por  $\{e\}^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times r}$ . A introdução deste vetor deve-se ao fato de todas as bases ortogonais adotadas neste trabalho apresentarem a unidade (1), quando o número de termos de expansão é igual a zero, como pode ser observado nas Figs. 2.1, 2.2 e 2.3. Desta maneira, pode-se fazer  $1 = \{e\}^T \phi(t)$  e, integrando-se no tempo esta equação, tem-se  $\int_0^t 1d\tau = \int_0^t \{e\}^T \phi(t)d\tau$  e, por meio da propriedade dada pela Eq. (2.7), obtém-se  $t = \{e\}^T [P]\phi(t)$ . Este é um artifício matemático adotado que possibilita introduzir a base vetorial  $\phi(t)$  em todos os termos da Eq. (2.48), pois como se pode observar os termos das condições iniciais naquela equação são multiplicados por  $t$  ou por 1. Com esta substituição foi possível cancelar a base vetorial na Eq. (2.52).

Tomando-se agora a seguinte definição:

$$g(t) = \Theta(t)\{x(t)\} = G\phi(t) \quad (2.49)$$

na qual  $g(t)$  é uma função dada pelo produto entre a base vetorial (usada para a expansão do parâmetro variante no tempo) e o sinal de resposta do sistema. Observa-se na Eq. (2.49) que  $G$  é o coeficiente de expansão de  $g(t)$ .

Desta maneira, tem-se:

$$\begin{aligned} & [M] \left( [X] \{ \phi(t) \} - \{ x(0) \} \{ e \}^T \{ \phi(t) \} - \{ \dot{x}(0) \} \{ e \}^T [P] \{ \phi(t) \} \right) + \\ & + [C] \left( [X] \int_0^t \{ \phi(\tau) \} d\tau - \{ x(0) \} \{ e \}^T [P] \{ \phi(t) \} \right) + \\ & + \hat{K} G \int_0^t \int_0^t \{ \phi(\tau) \} d\tau^2 = [F] \int_0^t \int_0^t \{ \phi(\tau) \} d\tau^2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Aplicando a propriedade de integração dada pela Eq. (2.7) na Eq. (2.50), tem-se um sistema de equações algébricas dado pela equação abaixo:

$$\begin{aligned} & [M] \left( [X] \{ \phi(t) \} - \{ x(0) \} \{ e \}^T \{ \phi(t) \} - \{ \dot{x}(0) \} \{ e \}^T [P] \{ \phi(t) \} \right) + \\ & + [C] \left( [X] [P] \{ \phi(t) \} - \{ x(0) \} \{ e \}^T [P] \{ \phi(t) \} \right) + \\ & + \hat{K} G [P]^2 \{ \phi(t) \} = [F] [P]^2 \{ \phi(t) \} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dividindo todos os termos da equação acima pela base vetorial  $\{ \phi(t) \}$ , obtém-se:

$$[M] \left( [X] - \{ x(0) \} \{ e \}^T - \{ \dot{x}(0) \} \{ e \}^T [P] \right) + [C] \left( [X] [P] - \{ x(0) \} \{ e \}^T [P] \right) + \hat{K} G [P]^2 = [F] [P]^2 \quad (2.52)$$

Conseqüentemente, tem-se:

$$\begin{aligned} \left[ [M] \quad : \quad -[M] \{ x(0) \} \quad : \quad -([M] \{ \dot{x}(0) \} + [C] \{ x(0) \}) \quad : \quad [C] \quad : \quad \hat{K} \right] & \begin{bmatrix} [X] \\ \{ e \}^T \\ \{ e \}^T [P] \\ [X] [P] \\ [G] [P]^2 \end{bmatrix} = \\ & = [F] [P]^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Observe que a Eq. (2.53) é uma maneira de reagrupar a Eq. (2.52) de maneira que possamos separar os termos conhecidos e os termos procurados. Se a Eq. (2.53) for multiplicada termo a termo, obtém-se a Eq. (2.52).

A equação acima pode ser reescrita de uma forma compacta, como apresentado pela Eq. (2.54):

$$[H][J]=[E] \quad (2.54)$$

Pela determinação de  $H$  é possível obter os parâmetros de massa, amortecimento e  $\hat{K}$  (coeficientes de expansão da matriz de rigidez). Como  $\Theta(t)$  é conhecido, é possível escrever:

$$[K(t)] = \hat{K}\Theta(t) \quad (2.55)$$

Foi verificado durante as simulações computacionais que a metodologia desenvolvida acima somente fornece bons resultados quando todos os graus de liberdade são externamente excitados, o que não é aplicável na maior parte dos sistemas mecânicos. O mesmo procedimento acima foi aplicado usando a formulação em espaço de estado. Isto é bastante importante, dado que esta formulação conduz à determinação dos parâmetros desconhecidos, sem a necessidade de que todos os graus de liberdade sejam excitados. O inconveniente desta formulação é a necessidade prévia do conhecimento da matriz de massa. Evidentemente, do ponto de vista da aplicação prática da técnica, esta não é uma limitação importante. Assim, feitas manipulações algébricas, é possível escrever:

$$\left[ M^{-1}\hat{K} \quad M^{-1}C \begin{bmatrix} G[P]^2 \\ XP - x(0)\{e\}^T [P] \end{bmatrix} \right] = \left[ M^{-1}F[P]^2 - \left[ X - (x(0)\{e\}^T + \dot{x}(0)\{e\}^T [P]) \right] \right] \quad (2.56)$$

No próximo capítulo serão apresentados alguns modelos de trinca e, no item 3.5, será apresentado o modelo de trinca adotado.

# CAPÍTULO III

## MODELOS DE TRINCA

### 3.1 Introdução aos Modelos de Trinca Existentes

O aparecimento de trincas em eixos rotativos é muito perigoso e pode causar falhas catastróficas quando elas não são detectadas a tempo. A comparação do comportamento experimental com o simulado pode ajudar significativamente na detecção da trinca. Portanto, uma importante bibliografia sobre rotores trincados vem sendo produzida nos últimos 20 anos e diferentes modelagens têm sido adotadas para análise da variação da rigidez do rotor durante sua rotação. Métodos eficientes foram desenvolvidos para a simulação do comportamento dinâmico de rotores trincados. De uma maneira geral, sabe-se que, durante a rotação do eixo, uma trinca transversal aberta afeta somente sua rigidez e o torna assimétrico. Por outro lado, uma trinca transversal fechada nada altera.

Alguns modelos de trinca, os mais conhecidos na literatura, serão apresentados neste capítulo. O modelo aqui desenvolvido é o modelo proposto por Bachschmid e será descrito na subseção 3.5. Este modelo, denominado *Flex Model*, apresenta validação experimental e, quando comparado com modelos mais complexos, como o modelo de trinca 3D, que utiliza uma formulação não-linear em elementos finitos e que demanda tempo computacional muito elevado para sua execução, apresenta resultados semelhantes (Bachschmid, 2003).

### 3.2 O Modelo Gasch

Este modelo de trinca é um dos primeiros modelos desenvolvidos que leva em consideração o fenômeno do *breathing*, sendo, entretanto, um modelo bastante simples, em que a trinca é considerada totalmente aberta ou fechada. A abertura total evolui para o fechamento total de forma abrupta. De maneira geral, a formulação desenvolvida por Gasch (1993), baseia-se no fato de que o deslocamento é igual à flexibilidade vezes a força. Considerando-se um eixo com trinca (Fig. 3.1), esta vai produzir uma flexibilidade adicional ao eixo. Em coordenadas rotativas, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 + \Delta h_\eta & 0 \\ 0 & h_0 + \Delta h_\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_\eta \\ f_\xi \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

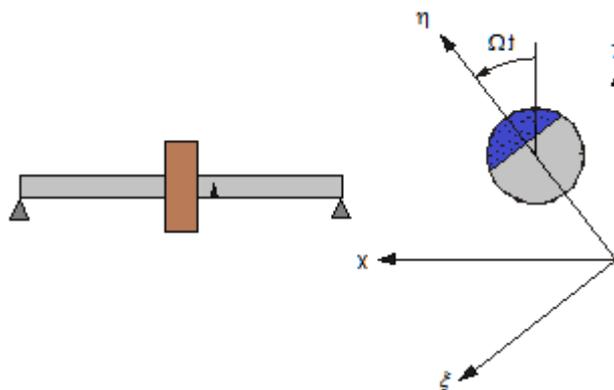


Figura 3.1 – Referencial apresentando o sistema de referência rotativo

Como o modelo de Gasch é formulado considerando trincas pouco profundas, nelas a influência da flexibilidade na direção cruzada,  $\Delta h_\xi$ , pode ser considerada desprezível. Por isso, este modelo leva em conta a flexibilidade adicional somente na direção do eixo da trinca ( $\Delta h_\eta$ ).

Como dito anteriormente, a idéia aqui apresentada parte do princípio de que a trinca encontra-se totalmente fechada, ou completamente aberta. Estes dois estados são determinados pelo valor da coordenada rotativa  $\eta$ . Desta maneira, a formulação do modelo em coordenadas rotativas será:

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} h_0 & 0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix}}_{\text{flexibilidade do eixo sem trinca}} + f(\eta) \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta h_{\eta, \max} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{flexibilidade adicional com trinca aberta}} \right) \begin{Bmatrix} f_{\eta} \\ f_{\xi} \end{Bmatrix} \quad f(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \eta \leq 0 \\ 1 & \text{para } \eta > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

No caso em que  $f(\eta) = 0$ , não se tem flexibilidade adicional e a matriz de flexibilidade é igual à de um eixo sem trinca, indicando que a trinca encontra-se fechada. No caso em que  $f(\eta) = 1$ , a trinca encontra-se totalmente aberta. Como visto, os termos da matriz de flexibilidade são dependentes da resposta do rotor, resultando em equações diferenciais não-lineares para representar o movimento. No caso em que o comportamento do rotor é dominado pelo seu peso, o valor da deflexão estática determinará o sinal do deslocamento na coordenada rotativa  $\eta$ .

A matriz de transformação que relaciona as coordenadas rotativas com o sistema inercial é dada por:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}}_{u_{ROT}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix}}_{u_{INER}} \quad (3.3)$$

Obtém-se a matriz de rigidez nas coordenadas inerciais pela inversão da Eq. (3.2):

$$\begin{Bmatrix} f_{\eta} \\ f_{\xi} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left( \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} - f(\eta) \begin{bmatrix} \Delta S_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)}_{K_{ROT}} \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Substituindo-se a Eq. (3.3) em (3.4), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_{\eta} \\ f_{\xi} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} - f(\eta) \begin{bmatrix} \Delta S_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) [T] \begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

onde:

$S_0$  é a rigidez do eixo sem trinca,

$\Delta S_\eta$  e  $\Delta S_\xi$  são as variações da rigidez devido à trinca em cada uma das direções,  $\eta$  e  $\xi$ , respectivamente.

Sabendo-se que as forças nas coordenadas inerciais são obtidas por:

$$\{f\}_{INER} = [T]^T \{f\}_{ROT} \quad (3.6)$$

e que  $\{f\}_{INER} = [K]_{INER} \{u\}_{INER}$ ,

Então, a matriz de rigidez nas coordenadas inerciais é dada pela expressão:

$$K_{INER} = [T]^T [K]_{ROT} [T] \quad (3.7)$$

Fazendo as operações indicadas na Eq. (3.7), obtém-se:

$$K_{INER} = \begin{bmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix} - f(t) \begin{bmatrix} c_1^2 \Delta S_\eta & s_1 c_1 \Delta S_\eta \\ s_1 c_1 \Delta S_\eta & s_1^2 \Delta S_\eta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde  $c_1 = \cos(\theta)$  e  $s_1 = \sin(\theta)$

Nos gráficos apresentados nas Fig. 3.2 e 3.3 verifica-se o comportamento da rigidez, em coordenadas inerciais, em função da posição angular do rotor, para o modelo proposto por Gasch.

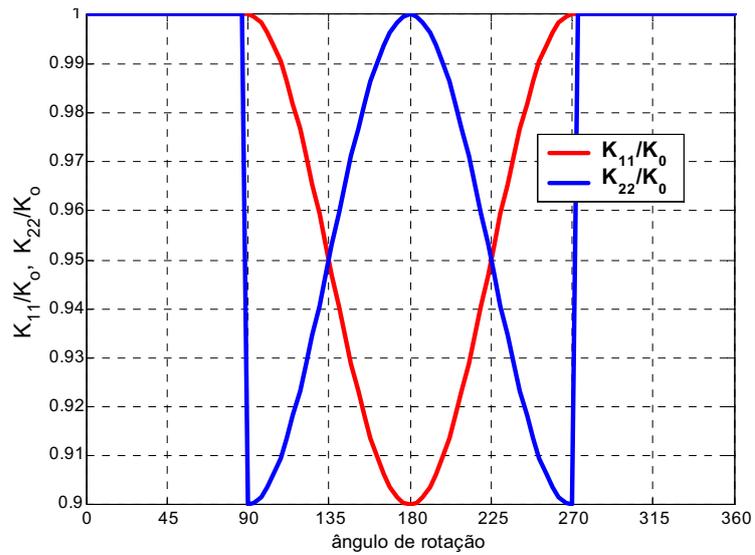


Figura 3.2 – Variação da rigidez (na posição da trinca) em coordenadas inerciais

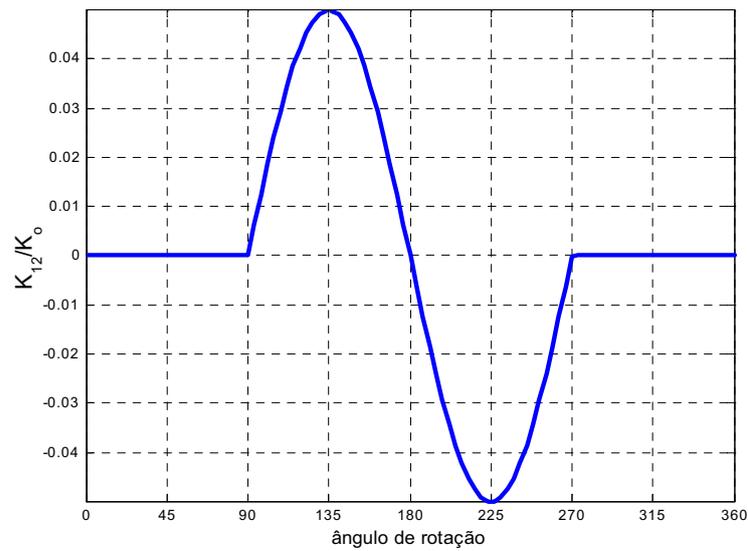
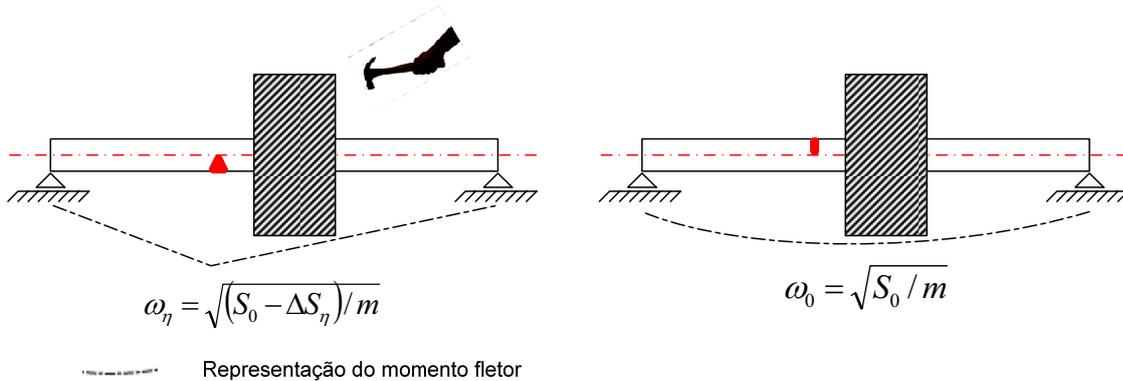


Figura 3.3 – Variação da rigidez cruzada (na posição da trinca) em coordenadas inerciais

Uma maneira de se determinar a variação da rigidez da trinca é apresentada no quadro abaixo.

Como este modelo é bastante simplificado, é possível fazer a hipótese de que o sistema rotativo é um sistema massa-mola de 1 gdl. Se for determinada a frequência natural deste sistema segundo as figuras abaixo, é possível determinar a variação na rigidez do sistema devido à trinca.



onde  $\omega_\eta$  e  $\omega_0$  são as frequências naturais do rotor na condição acima.

### 3.3 O Modelo “Switching”

O modelo “switching” é semelhante ao modelo de Gasch, no qual são considerados também dois estados da trinca, a saber, totalmente aberta ou totalmente fechada. Acrescenta-se, entretanto, uma melhoria ao serem consideradas as mudanças na rigidez ao longo das duas direções,  $\eta$  e  $\xi$ . Assim, fazendo-se referência ao trabalho de Jun et al. (1992), tem-se as seguintes equações do movimento de rotores em coordenadas rotativas:

$$m(\ddot{\eta} - 2\Omega\dot{\xi} - \Omega^2\eta) + c(\dot{\eta} - \Omega\xi) + \left[ K_0 - \frac{K_0 - K_\eta}{2} \{1 + \text{sgn}(\eta)\} \right] \eta =$$

$$= m\varepsilon\Omega^2 \cos(\beta) - mg \cos(\Omega t)$$
(3.9)

$$m(\ddot{\xi} + 2\Omega\dot{\eta} - \Omega^2\xi) + c(\dot{\xi} + \Omega\eta) + \left[ K_0 - \frac{K_0 - K_\xi}{2} \{1 + \text{sgn}(\eta)\} \right] \xi =$$

$$m\varepsilon\Omega^2 \sin(\beta) + mg \sin(\Omega t)$$
(3.10)

Nas figuras que seguem, apresenta-se o comportamento da rigidez da trinca para o modelo “switching”, considerando a rigidez em coordenadas rotativas (Fig. 3.4) e em coordenadas inerciais (Figs. 3.5 e 3.6)

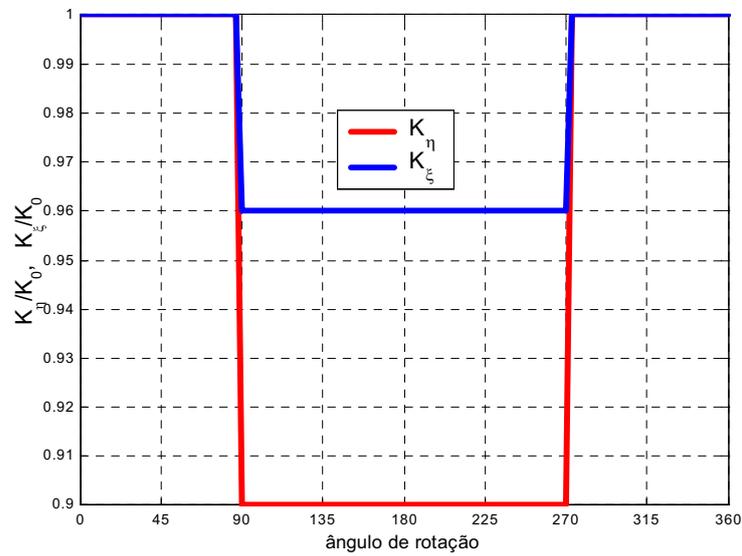


Figura 3.4 – Variação da rigidez (na posição da trinca) em coordenadas rotativas.

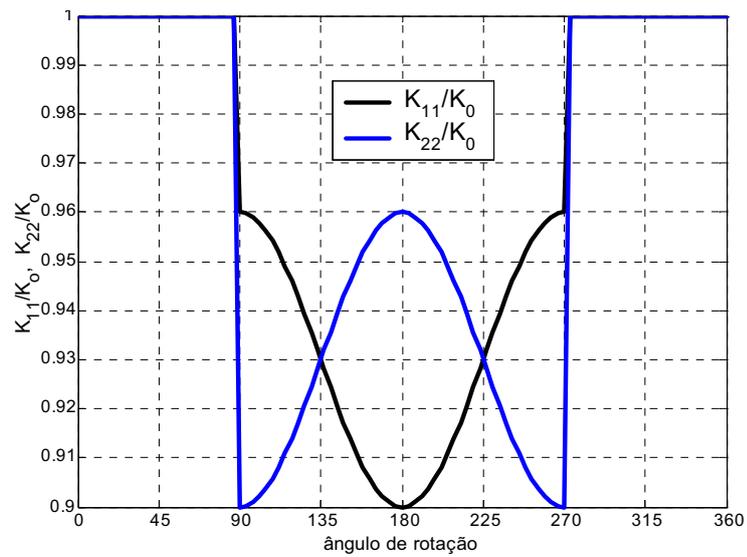


Figura 3.5 – Variação da rigidez (na posição da trinca) em coordenadas inerciais

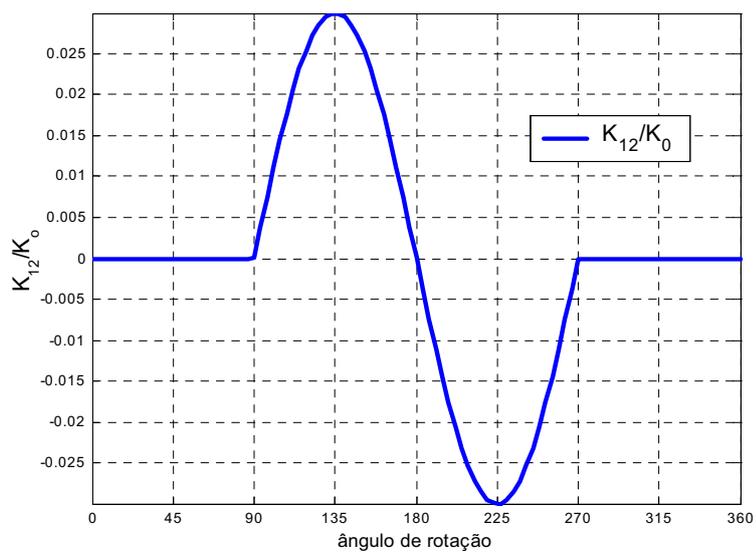


Figura 3.6 – Variação da rigidez cruzada (na posição da trinca) em coordenadas inerciais

### 3.4 Modelo de Mayes Modificado

Este modelo de trinca considera que a passagem da abertura total para seu fechamento não é mais abrupta e sim dada por uma função harmônica representativa. Assim, sua proposta para o comportamento da rigidez em cada uma das coordenadas rotativas, é definida por:

$$K_{\eta}(\theta) = K_{M_{\eta}} + K_{D_{\eta}} \cos(\theta) \quad (3.11)$$

$$K_{\xi}(\theta) = K_{M_{\xi}} + K_{D_{\xi}} \cos(\theta) \quad (3.12)$$

sendo:

$$K_{M_{\xi}} = \frac{1}{2}(K_0 + K_{\xi}) \quad (3.13)$$

$$K_{D_{\xi}} = \frac{1}{2}(K_0 - K_{\xi}) \quad (3.14)$$

$$K_{M_{\eta}} = \frac{1}{2}(K_0 + K_{\eta}) \quad (3.15)$$

$$K_{D_{\eta}} = \frac{1}{2}(K_0 - K_{\eta}) \quad (3.16)$$

Substituindo as Eqs. (3.13) a (3.16) nas Eqs. (3.11) e (3.12), tem-se:

$$K_{\eta}(\theta) = \frac{1}{2}(K_0 + K_{\eta}) + \frac{1}{2}(K_0 - K_{\eta})\cos(\theta) \quad (3.17)$$

$$K_{\xi}(\theta) = \frac{1}{2}(K_0 + K_{\xi}) + \frac{1}{2}(K_0 - K_{\xi})\cos(\theta) \quad (3.18)$$

Observa-se que modelo de Mayes modificado faz uso da hipótese de rotor pesado, assim, a rigidez é dependente somente da posição angular do rotor, podendo ser identificado o seu comportamento durante uma rotação completa e introduzido no sistema de equações diferenciais, tornando-o um sistema linear de parâmetros variáveis.

Quando  $\cos(\theta) = 1$ , isto é, quando  $\theta = \omega t$  é igual a  $0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$ , sendo  $n$  um número natural, as Eqs. (3.17) e (3.18) tornam-se:

$$K_{\eta}(\theta) = \frac{1}{2}K_0 + \frac{1}{2}K_{\eta} + \frac{1}{2}K_0 - \frac{1}{2}K_{\eta} = K_0 \quad (3.19)$$

$$K_{\xi}(\theta) = \frac{1}{2}K_0 + \frac{1}{2}K_{\xi} + \frac{1}{2}K_0 - \frac{1}{2}K_{\xi} = K_0 \quad (3.20)$$

ou seja, a rigidez em cada uma das coordenadas rotativas é igual à rigidez do eixo sem trinca, indicando que a trinca encontra-se completamente fechada.

Quando  $\cos(\theta) = -1$ , as Eqs. (3.17) e (3.18) ficam:

$$K_{\eta}(\theta) = \frac{1}{2}K_0 + \frac{1}{2}K_{\eta} - \frac{1}{2}K_0 + \frac{1}{2}K_{\eta} = K_{\eta} \quad (3.21)$$

$$K_{\xi}(\theta) = \frac{1}{2}K_0 + \frac{1}{2}K_{\xi} - \frac{1}{2}K_0 + \frac{1}{2}K_{\xi} = K_{\xi} \quad (3.22)$$

Em outras palavras, as expressões acima indicam que, neste caso, a trinca encontra-se completamente aberta e a rigidez, em cada uma das coordenadas rotativas, será igual à rigidez nas coordenadas  $\eta$  e  $\xi$  da seção do eixo com trinca totalmente aberta.

A matriz de rigidez, em coordenadas rotativas é dada por:

$$K_R = \begin{bmatrix} K_{\eta}(\theta) & 0 \\ 0 & K_{\xi}(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Determina-se a rigidez expressa em coordenadas inerciais da mesma forma que no modelo de Gasch. Após realizar as devidas operações, a matriz de rigidez expressa em coordenadas inerciais é dada por:

$$K_F = \begin{bmatrix} c_1^2 K_{\eta} + s_1^2 K_{\xi} & s_1 c_1 (K_{\xi} - K_{\eta}) \\ s_1 c_1 (K_{\xi} - K_{\eta}) & s_1^2 K_{\eta} + c_1^2 K_{\xi} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde:  $c_1 = \cos(\theta)$  e  $s_1 = \sin(\theta)$

Após simplificações, tem-se que os termos da matriz  $K_F$  ficam:

$$K_{F11} = \frac{1}{2} (K_0 + c_1 K_0 + (1 - c_1)(c_1^2 K_\eta + s_1^2 K_\xi)) \quad (3.25)$$

$$K_{F22} = \frac{1}{2} (K_0 + c_1 K_0 + (1 - c_1)(s_1^2 K_\eta + c_1^2 K_\xi)) \quad (3.26)$$

$$K_{F12} = K_{F21} = \frac{1}{2} s_1 c_1 [K_\xi (1 - c_1) + K_\eta (c_1 - 1)] \quad (3.27)$$

As Figs.3.7 e 3.8 apresentam a variação da rigidez em coordenadas inerciais para um eixo com trinca.

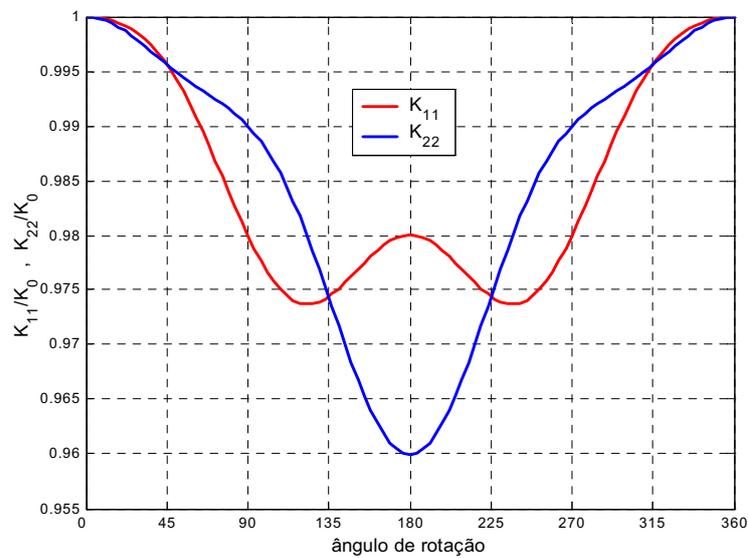


Figura 3.7 – Variação da rigidez (na posição da trinca) em coordenadas inerciais

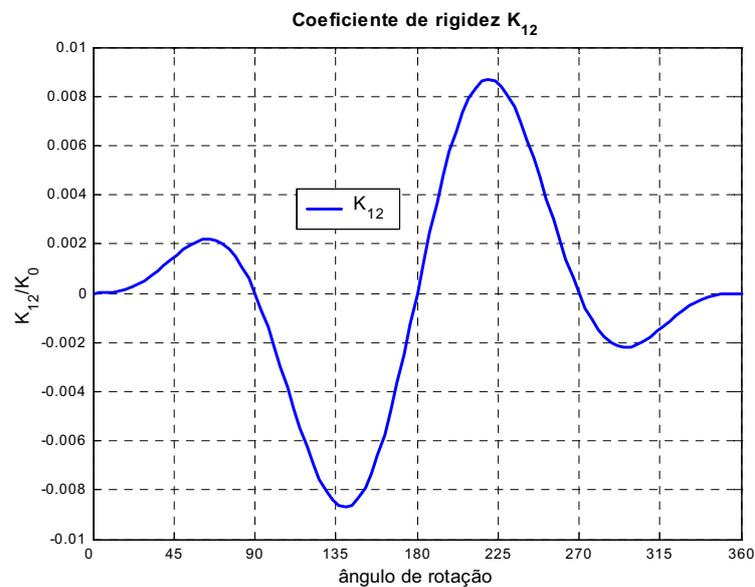


Figura 3.8 – Variação da rigidez cruzada (na posição da trinca) em coordenadas inerciais.

Este modelo, o de *Mayes*, foi testado através de simulações e validado experimentalmente por *Burbano* (2005), em sua dissertação de mestrado. Na próxima seção será apresentado um modelo bastante usado na literatura para a simulação da perda de rigidez em estruturas.

### 3.5 Modelos Baseados na Mecânica da Fratura

Os modelos de trinca do tipo *Serr* (*strain energy release rate*), o modelo *Flex* e o *3D* são os modelos considerados pela literatura como os mais representativos do comportamento da trinca. Como salientado anteriormente, empregou-se o modelo *Flex* na realização deste trabalho<sup>3</sup>. Ele leva em consideração o fenômeno do “*breathing*” descrito nas seções anteriores de uma maneira mais realística, e usa, para determinar se a trinca encontra-se aberta ou fechada, o campo de tensão atuante em sua seção transversal. Este campo de tensão é gerado pelos momentos causados pelos esforços dinâmicos e pelo peso da estrutura. Assim, esta modelagem da trinca pode ser linear, caso os parâmetros da trinca sejam pré-estabelecidos devido aos esforços dinâmicos serem insignificantes quando comparados aos estáticos. Isso ocorre no caso de rotores pesados onde a trinca se comporta em função do peso do rotor, realizando um ciclo de abertura e fechamento durante uma volta completa. Caso isso não ocorra, o modelo será não-linear.

Em rotores que operam em velocidades acima das primeiras críticas, o campo de tensão na seção transversal do eixo, na posição da trinca, altera várias vezes durante uma volta completa do rotor, devido à forma modal que o sistema apresenta, fazendo com que a trinca se comporte da mesma maneira. Assim, os parâmetros da trinca deverão ser identificados para cada passo de tempo no decorrer da simulação.

---

<sup>3</sup> As simulações computacionais deste modelo foram desenvolvidas durante um estudo dirigido, realizado na FEMEC, com participação do professor Nicolò Bachschmid, um dos desenvolvedores desta técnica, durante permanência do mesmo como pesquisador visitante da UFU, com financiamento da CAPES, em 2007. Posteriormente, com apoio da FAPEMIG em 2010, com o retorno do Prof. Bachschmid, novas idéias sobre rotores com trincas foram consideradas.

### 3.5.1 Modelagem da “flexibilidade local” da secção trincada

Os efeitos causados pela flexibilidade adicionada ao eixo devido à presença de uma trinca podem ser considerados como um modelo do tipo nodal. Com esta abordagem, a matriz de rigidez do elemento da trinca é incluída no modelo de elementos finitos do rotor. Esta matriz de rigidez é obtida invertendo-se a matriz de flexibilidade. Assim, para a determinação da matriz de flexibilidade local são avaliados três importantes conceitos da mecânica da fratura: a taxa de liberação da energia elástica, os fatores intensificadores de tensão e as integrais de contorno. Este método considera o balanço energético envolvido no processo de crescimento da trinca. Griffith (1921) foi o primeiro a propor o critério de energia para propagação de fraturas, mas Irwin (1957) é o responsável pelo desenvolvimento inicial da taxa de alívio de energia potencial  $G$ . Esta é definida como sendo a taxa de variação na energia potencial por unidade de área da trinca para um material elástico, podendo ser expressa como:

$$G = \frac{\partial U}{\partial A}(P_i, A) \quad (3.28)$$

onde  $U$  é a energia total de deformação do elemento trincado, com uma área  $A$  e submetida a um carregamento  $P_i$ . Uma trinca em um sólido pode estar sob a ação de forças em três diferentes modos, como pode ser observado na Fig. 3.9. Esta sistematização, relacionando os “Modos de carregamento”, foi introduzida por Irwin, (1957), e permite estudar a concentração de tensões na ponta da trinca e os modos da propagação desta.

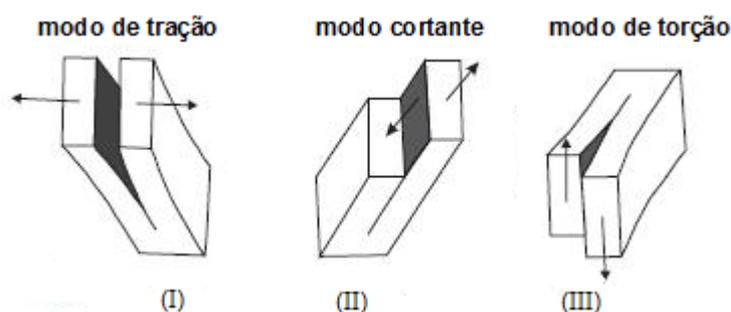


Figura 3.9 – Modos possíveis em que uma estrutura pode falhar (adaptado de Lawn e Wilshaw, 1975)

Como dito, existem três modos básicos de carregamento que descrevem três movimentos cinematicamente independentes:

*Modo I (modo de tração):* As faces da trinca separam-se quase paralelamente entre si. Supõe-se que neste modo somente estão presentes tensões de tração.

*Modo II (modo cortante):* As faces da trinca deslizam-se uma sobre a outra. Supõe-se que neste modo somente estão presentes tensões tangenciais.

*Modo III (modo de torção):* As faces da trinca deslizam lateralmente uma em relação à outra. Supõe-se que, também neste modo, somente estão presentes tensões tangenciais.

Os fatores de intensificação de tensão  $K$  são proporcionais à descontinuidade no deslocamento devido à trinca. Cada modo de abertura da trinca é caracterizado por um desses fatores ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ). Eles podem ser definidos em termos dos componentes de tensão. Assim, considerando coordenadas polares, os fatores  $K_k$  podem ser definidos como:

$$K_k = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) \quad (3.29)$$

onde os termos  $\sigma_{ij}$  são as tensões envolvidas no modo de abertura  $k$  e  $r$  é a coordenada radial no plano perpendicular à face da trinca, como mostrado na Fig. 3.10.

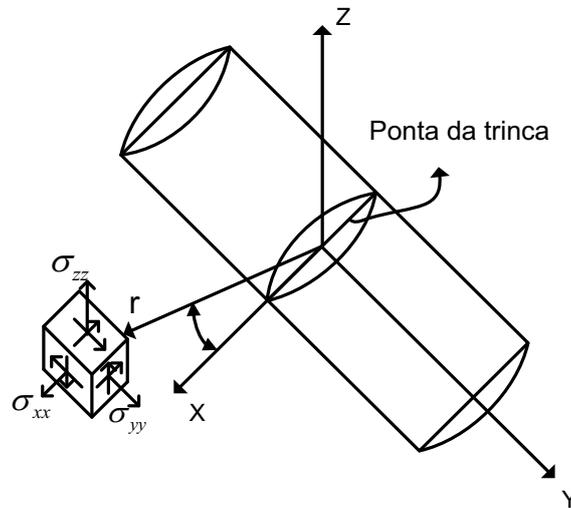


Figura 3.10 – Sistema tridimensional e tensões da ponta de uma trinca em coordenadas polares

No caso de um rotor que apresenta trinca, cuja profundidade local para um dado passo de integração é denotada por  $\eta$ , os fatores  $K_k$  podem ser expressos como:

$$K_k = \sqrt{\pi\eta} F_k D_k(\sigma_{ij}) \quad (3.30)$$

As funções  $D_k$  dependem do modo  $k$  de abertura da trinca e das tensões  $\sigma_{ij}$ , enquanto as funções  $F_k$  são definidas pela razão  $a/h$  entre a profundidade da trinca  $a$  e o comprimento  $h$  da seção transversal retangular da viga (Fig. 3.11).

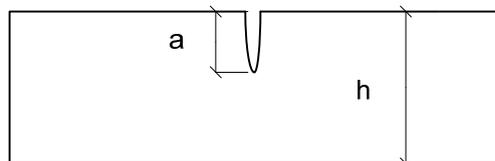


Figura 3.11 – Viga de seção retangular trincada

Assim, a taxa de liberação total de energia  $G$  pode ser expressa em termos dos fatores de intensificação de tensão, como:

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} [(\sum_{i=1}^6 K_{Ii})^2 + (\sum_{i=1}^6 K_{IIi})^2] + \frac{1+\nu}{E} (\sum_{i=1}^6 K_{IIIi})^2 \quad (3.31)$$

onde  $K_k$  é a contribuição do carregamento  $P_i$  ou do momento  $M_i$  para o modo de abertura  $k$ . O deslocamento adicional na direção  $i$ , devido à trinca com profundidade constante e comprimento unitário, pode ser expresso em relação à energia total de deformação e à carga na mesma direção como:

$$u_{ia} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left( \int_0^a G(\eta) d\eta \right) \quad (3.32)$$

Assim, os termos da matriz de flexibilidade podem ser obtidos através de dupla derivação da Eq. (3.32). No caso de uma trinca com profundidade variável e comprimento não-unitário, esses termos são expressos como:

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left( \int_0^a \int_{-b}^b G(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) \quad (3.33)$$

Uma vez que as funções  $F_k$  e os fatores de intensificação de tensão são apenas determinados para vigas com seções transversais retangulares, a sua aplicação no caso de rotores comuns requer subdivisão em um grande número de seções retangulares inter-paralelas (Fig. 3.12). Assim, a matriz de rigidez do elemento com trinca pode ser obtida pela inversão da matriz gerada pela Eq. (3.33).

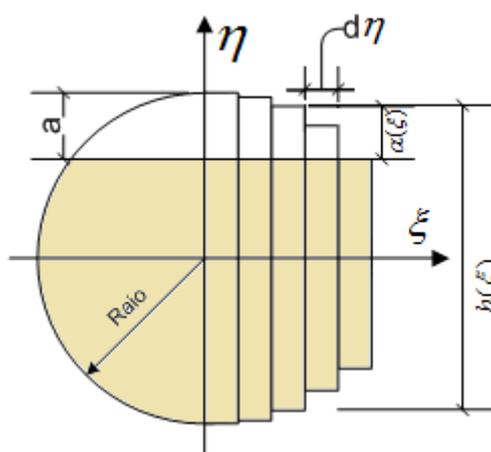


Figura 3.12 – Discretização da seção circular do eixo em seções retangulares para a determinação das funções  $F_k$ .

É importante enfatizar que, no modelo do tipo nodal, o estado de tensão das várias seções retangulares inter-paralelas, nas quais a área da trinca pode ser

subdividida, é considerado plano. Os resultados obtidos com o modelo 3D permitem a comprovação dessa hipótese.

### 3.5.2 O Modelo SERR

A abordagem do modelo *strain energy release rate* (SERR) combinada com os fatores de intensidade de tensão (SIF) foi usada principalmente por Dimarogonas (1996). Para os cálculos do comportamento de flexão de uma viga trincada, vários cálculos foram feitos de acordo com esta abordagem para diferentes profundidades de trinca. Este procedimento permite o cálculo da flexibilidade adicional introduzida pela trinca quando esta se encontra aberta. Nada pode ser dito quando a trinca está meio aberta ou meio fechada, devido ao mecanismo de *breathing*. Trincas muito profundas (mais de 50% de profundidade) assim como múltiplas trincas na mesma secção transversal não podem ser tratadas com esta abordagem.

Se a secção transversal trincada não é mais plana, mas encontra-se distorcida, configura-se uma situação não coberta pela abordagem acima descrita dentro da mecânica da fratura. A abordagem da mecânica da fratura não considera nenhum atrito na área trincada e isso também parece irreal ao se pensar em situações concretas. Se há torção, a contribuição das forças de atrito na área trincada é levada em consideração somente pelo modelo 3D não-linear e por uma modificação no modelo Flex. No entanto, os resultados obtidos com esta abordagem são suficientemente precisos no que diz respeito à flexibilidade adicional introduzida pela trinca, para esta completamente aberta. Assim, o modelo é muito empregado para fornecer o fator de intensidade de tensão na extremidade da trinca, principalmente relacionado com a sua extremidade, região que apresenta estado plano de deformações. Este aspecto é importante para avaliar o mecanismo de propagação. A flexibilidade adicional pode facilmente ser transformada em rigidez local da trinca.

### 3.5.3 O Modelo Flex

#### 3.5.3.1 Modelagem da trinca passo a passo pelo modelo Flex

Adotou-se o caso não-linear para a descrição do modelo abordado neste trabalho. Na seqüência serão descritos alguns passos realizados durante esta modelagem. O passo 1, como é de se esperar, é o passo que inicializa o método, elaborando a malha da secção transversal da área trincada, posicionando a trinca sobre esta área malhada e determinando para o passo inicial qual é a condição da trinca, assim:

1) Para a simulação do sistema rotativo com a presença da trinca, o primeiro passo a ser adotado é a discretização da estrutura pelo método dos Elementos Finitos e a introdução da matriz de rigidez do elemento trincado, dada pela Eq. (3.34), para o modelo do tipo nodal, descrito anteriormente. Após isso, considera-se que a trinca encontra-se fechada e calculam-se os momentos dinâmicos na sua secção transversal devido à resposta do sistema. Para isso, o procedimento adotado é:

$$1.1) \text{ Os momentos dinâmicos podem ser calculados por: } \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{M_x}{EI} \text{ e } \frac{\partial \theta_z}{\partial y} = \frac{M_z}{EI},$$

onde  $\theta_x$  e  $\theta_z$  são os deslocamentos angulares em torno dos eixos  $x$  e  $z$ , dados pela resposta do sistema, calculados a partir da resolução da Equação Diferencial. O fluxograma apresentado na Fig. 3.18 ajuda na compreensão dos passos adotados e apresenta a equação diferencial para o modelo.

Na prática, considera-se  $\partial \theta_x = \theta_x^{i+1} - \theta_x^i$ , onde  $i$  é o nó da extremidade do elemento com a trinca e  $\partial y = L_c$ , onde  $L_c$  é o comprimento equivalente deste elemento que deve ser pré-determinado em função de um ajuste entre o modelo aqui apresentado e o modelo de trinca 3D, apresentado na próxima seção.

Verifica-se que na resposta dinâmica do sistema pode estar contida a influência do peso da estrutura, excitações externas, forças dinâmicas devido ao desbalanceamento, desalinhamento, entre outras.

Apresenta-se na Fig. 3.13 o elemento de viga equivalente de comprimento  $L_c$ . Vale observar que este elemento altera somente a matriz de rigidez do eixo na posição da trinca. Normalmente, este comprimento  $L_c$  é pequeno e a área da região pertencente à trinca, a qual se encontra com falta de material, como mostrado na figura abaixo, é representado no modelo como um conjunto de forças e momentos que atuam nos nós de sua extremidade. Na Fig. 3.14, apresenta-se uma relação entre o comprimento do elemento trincado e o diâmetro do eixo em função da profundidade relativa da trinca. Esta curva é obtida através de um ajuste entre o modelo de trinca 3D e o modelo Flex, apresentado por Bachschmid e Tanzi (2006), mediante o qual se pode determinar um comprimento ótimo para o elemento trincado, de tal forma que o modelo Flex se aproxime do modelo 3D.

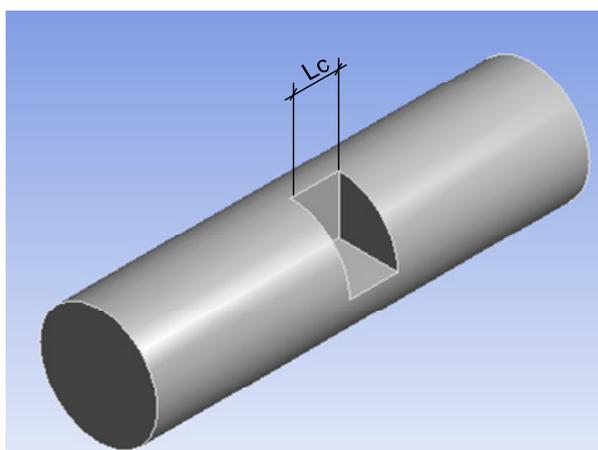


Figura 3.13 – Elemento de eixo trincado de comprimento equivalente  $L_c$

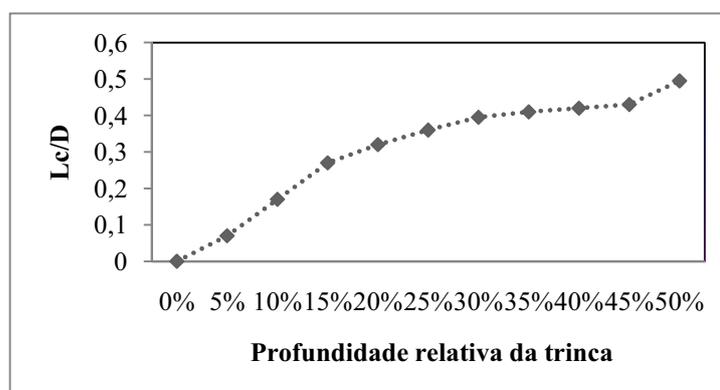


Figura 3.14 – Gráfico para a determinação do comprimento equivalente,  $L_c$ , do elemento com trinca (Bachschmid et al. (2003))

Durante cada passo de tempo deve-se determinar a região aberta e a fechada da trinca, para cada posição angular do rotor. Para isso, a secção transversal da trinca foi dividida como apresentado na Fig. 3.16. Cada ponto de intersecção entre as retas horizontais e verticais foi considerado como sendo um número complexo, facilitando a discretização. Durante a rotação, os números complexos são mais facilmente manipulados, dado que, em um número complexo do tipo  $r_a = x_a + z_a i$ , para uma rotação de  $s$  rad, tem-se simplesmente que somar o valor do deslocamento angular da seguinte forma:  $r_a^* = |r_a| e^{i(\theta_a + s)}$ , no qual  $\theta_a$  é o ângulo inicial dado pelo número complexo de amplitude  $r_a$ . A figura a seguir ilustra o que foi descrito acima.

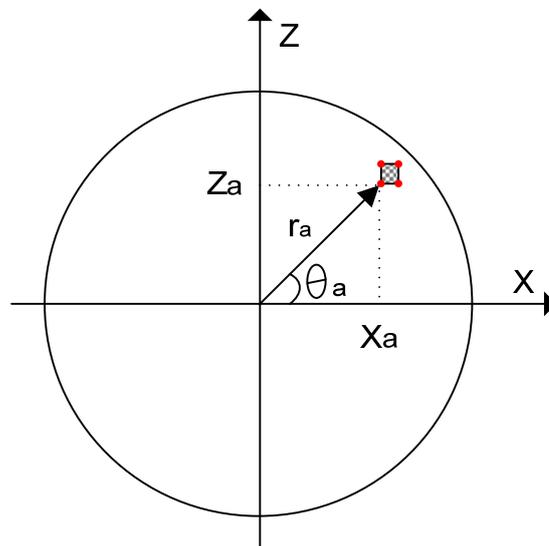


Figura 3.15 – Posição de cada ponto usado na discretização da secção da trinca

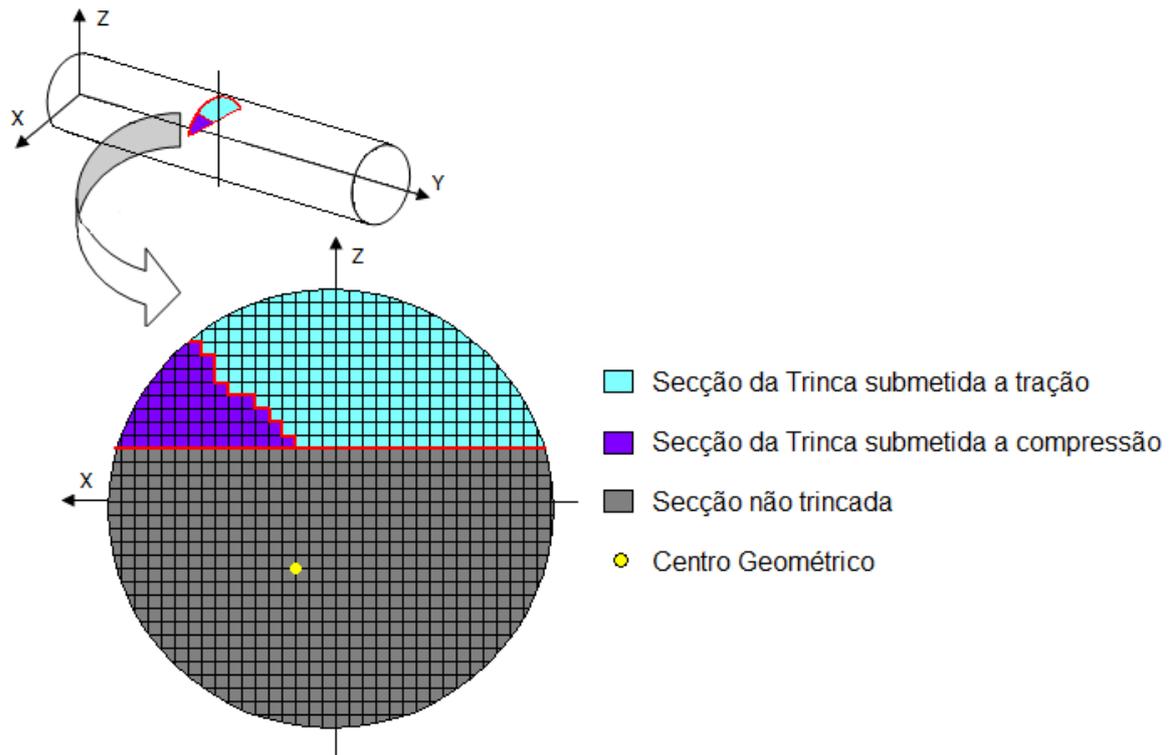


Figura 3.16 – Seção transversal do eixo na posição da trinca

Assim, para definir a abertura e o fechamento da área da trinca, determinam-se: a posição do centro geométrico  $C_g$  para a trinca fechada; a posição dos eixos principais de inércia com origem em  $C_g$ ; calculam-se os segundos momentos de inércia com relação aos eixos principais e, se for de interesse, os momentos causados pela distribuição das tensões térmicas, o que não foi considerado no presente trabalho (Bachschnid et al., 2003).

$$\text{Tem-se } C_g = x_{Cg} + i z_{Cg}, \text{ com } C_g = \frac{\int x dA}{A} + i \frac{\int z dA}{A}$$

2) Inicialmente os eixos principais são considerados coincidentes ao eixo de rotação da trinca. A tensão com relação aos eixos principais, devido ao momento dinâmico determinado em 1, é calculada para cada divisão da seção da trinca.

2.1) Devido à assimetria causada pela trinca, a tensão que resulta dos momentos é dada por:  $\sigma = \frac{M_z I_{xx} + M_x I_{xz}}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} x - \frac{M_x I_{zz} + M_z I_{xz}}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2} z$ . Sendo:  $I_{xx} = \int_A z^2 dA$

$$I_{zz} = \int_A x^2 dA \text{ e } I_{xz} = \int_A xz dA.$$

2.2) Em cada divisão da área da trinca deve-se verificar se a tensão é de compressão ou tração, conforme o sinal da tensão. Um sinal positivo significa que a tensão atuante na divisão considerada é de tração, indicando que a fissura encontra-se aberta naquela referida posição, não contribuindo para a área resistente. Já um sinal negativo indica que as forças são compressivas e que a divisão considerada está fechada, contribuindo, portanto, para a área resistente. Assim, um sinal positivo denota que não existem forças de contato e um sinal negativo evidencia a presença destas forças.

2.3) De posse da área total da trinca, pode-se determinar o novo centro geométrico  $Cg$  da secção.

2.4) Os segundos momentos de área e seu ângulo principal são determinados com origem em  $Cg$ .

2.5) Verifica-se, neste momento, que o campo de tensão calculado em 2.1 gera uma distribuição da área resistente da trinca que, por sua vez, pode determinar  $Cg$ , os momentos de inércia suas direções principais. Esse processo (2.1 a 2.4) deve ser refeito até que ocorra convergência, pois o campo de tensão inicial é determinado considerando, não a secção transversal atual da trinca, e sim a determinada no passo anterior. Um critério de convergência estabelecido é uma variação razoavelmente pequena para as direções principais de inércia.

3) Determinam-se os segundos momentos de área  $I_{xx}$ ,  $I_{zz}$  e  $I_{xz}$  com relação ao sistema de coordenada móvel, para cada passo de tempo considerado durante a simulação, ou seja, para cada posição angular do eixo.

4) Os segundos momentos de área são usados para determinar a nova matriz de rigidez do elemento com trinca, Eq. (3.34), que será aplicada dentro do modelo em E.F. que, por sua vez, deverá ser usada para a determinação da resposta do sistema para o próximo passo de tempo considerado na simulação. Fica assim evidenciada a não-linearidade presente na estrutura devido à dependência da resposta do sistema para a determinação da matriz de rigidez do elemento com trinca e a influência desta na determinação da resposta da estrutura.

Os passos acima descritos são para o caso não-linear. Se houver a possibilidade de descrever a trinca como linear, no caso de rotores pesados, os momentos na fissura podem ser determinados pelas reações nos apoios. A modelagem da trinca é realizada sem o conhecimento da resposta do sistema e a matriz de rigidez do elemento de trinca é determinada somente para uma volta completa do eixo, sendo replicada e introduzida nas equações diferenciais que irão descrever o comportamento dinâmico da estrutura.

Na Fig. 3.17 apresenta-se o campo de tensão atuante na secção transversal do eixo na posição da trinca e a área da secção transversal, ambos para a posição angular da trinca correspondendo a  $250^{\circ}$ . Verifica-se que para valores positivos da tensão, na posição trincada do eixo, a região pertencente à trinca se encontra aberta.

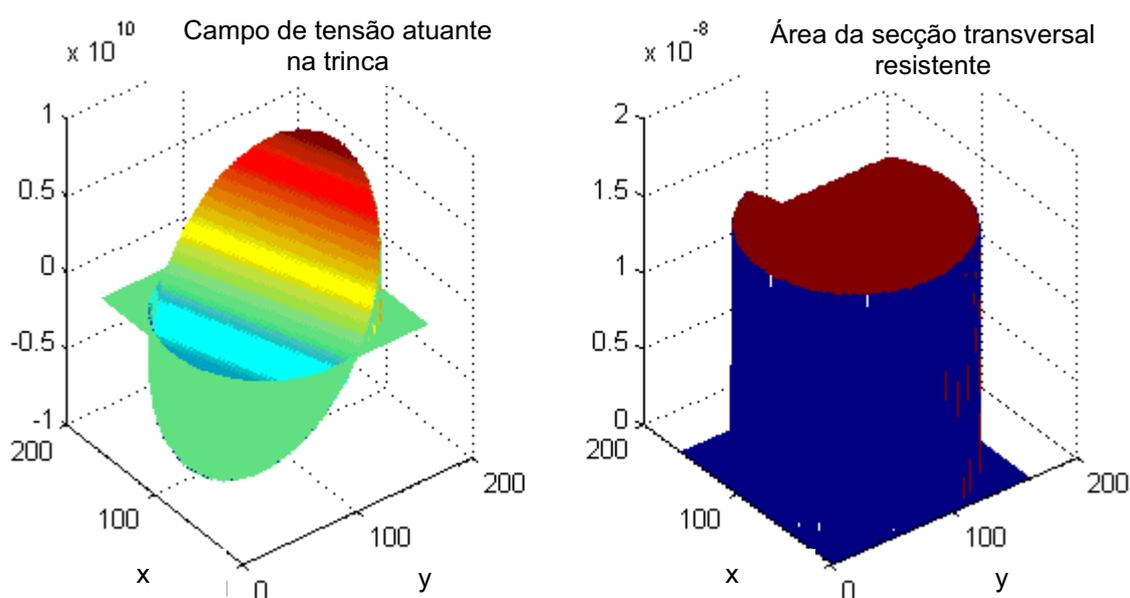


Figura 3.17 – Comportamento do campo de tensão e da secção transversal do eixo na posição da trinca para a posição angular do rotor de  $250^{\circ}$ . X e y representam os elementos usados para a discretização do eixo.

### 3.5.3.2 Matriz de rigidez equivalente do elemento trincado

Definido o mecanismo do “*breathing*” e determinados os segundos momentos de área, como descrito anteriormente, a matriz de rigidez de um elemento equivalente da viga, de comprimento  $L_c$ , pode ser calculado assumindo uma viga de Timoshenko com área e segundos momentos de área constantes ao longo do

comprimento  $L_c$ , como mostrado pela Fig. 3.13. Os elementos da vizinhança do elemento trincado apresentam secção circular uniforme.

A matriz de rigidez do elemento com trinca (simétrica de  $8 \times 8$  elementos) é representada pela Eq. (3.34). Mais detalhes podem ser encontrados em Bachschmid et al. (2003).

$$K_c(t) = \begin{bmatrix} b & p & -q & -d & -b & -p & -q & -d \\ p & a & c & q & -p & -a & c & q \\ -q & c & e & r & q & -c & f & s \\ -d & q & r & h & d & -q & s & g \\ -b & -p & q & d & b & p & q & d \\ -p & -a & -c & -q & p & a & -c & -q \\ -q & c & f & s & q & -c & e & r \\ -d & q & s & g & d & -q & r & h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ z_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{z_i} \\ x_{i+1} \\ z_{i+1} \\ \theta_{x_{i+1}} \\ \theta_{z_{i+1}} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

onde os coeficientes acima são definidos como:

$$a = \frac{12 I_{yy} E}{(1 + \phi) L_c^3}, b = \frac{12 I_{xx} E}{(1 + \phi) L_c^3}, c = \frac{6 I_{yy} E}{(1 + \phi) L_c^2}, d = \frac{(4 + \phi) I_{yy} E}{(1 + \phi) L_c}, f = \frac{(2 - \phi) I_{yy} E}{(1 + \phi) L_c},$$

$$g = \frac{(2 - \phi) I_{xx} E}{(1 + \phi) L_c}, h = \frac{(4 + \phi) I_{xx} E}{(1 + \phi) L_c}, p = \frac{12 I_{xy} E}{(1 + \phi) L_c^3}, q = \frac{6 I_{xy} E}{(1 + \phi) L_c^2},$$

$$r = \frac{(4 + \phi) I_{xy} E}{(1 + \phi) L_c}, s = \frac{(2 - \phi) I_{xy} E}{(1 + \phi) L_c} \text{ e } \phi = \frac{12 EI}{GSL_c^2}$$

O parâmetro  $\phi$  leva em consideração o efeito de cisalhamento.  $E$  e  $G$  são, respectivamente, o módulo de Young e o módulo de cisalhamento,  $S$  é a área da secção transversal e  $I$  representa os segundos momentos de área.

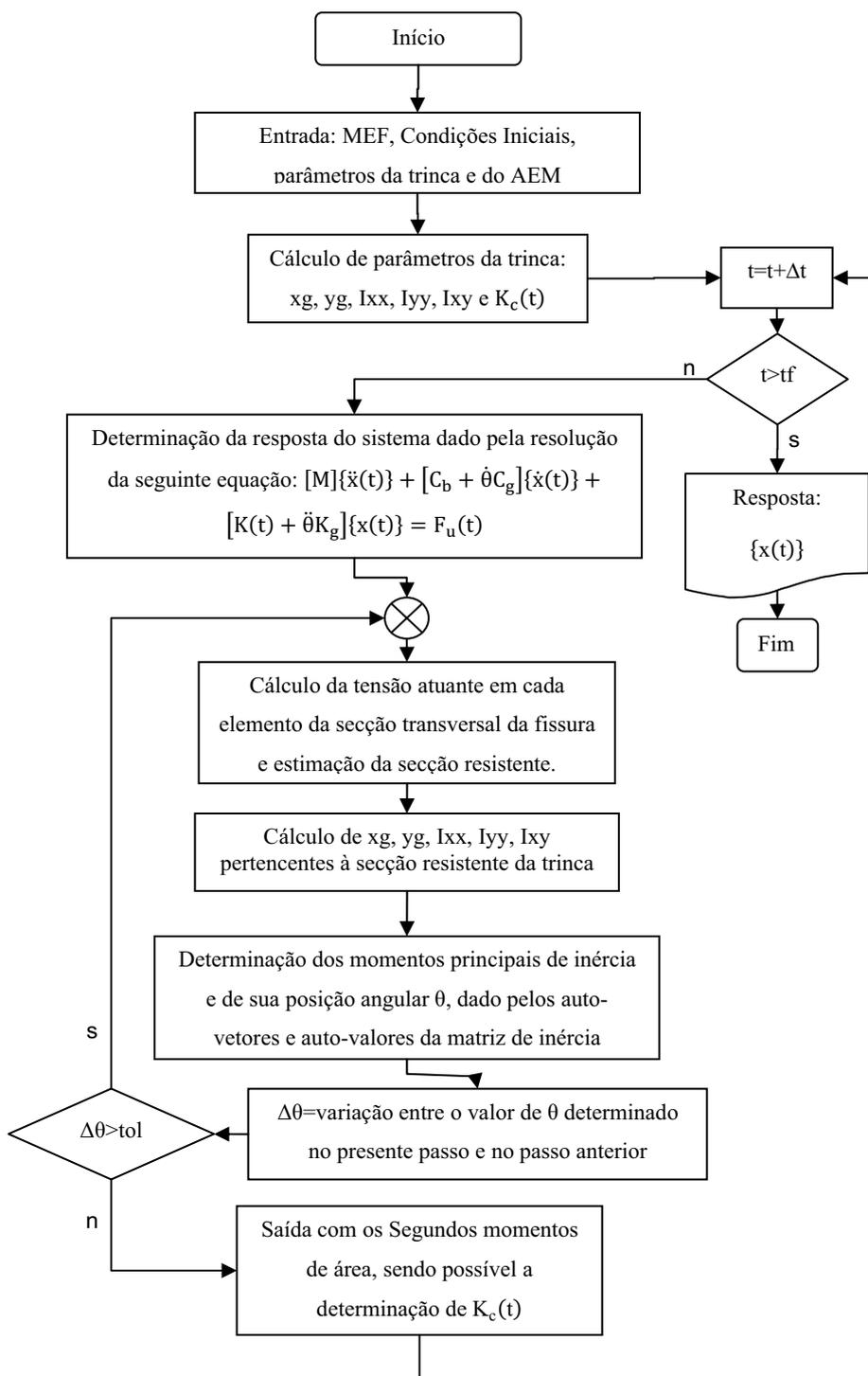


Figura 3.18 – Fluxograma para o cálculo iterativo do mecanismo do *breathing* para o modelo Flex

### 3.5.4 O Modelo de trinca 3D

O modelo de trinca não-linear 3D está em desenvolvimento pelo EDF (*Electricité de France*), sendo que já foi elaborado um modelo 3D para o cálculo da matriz de flexibilidade local de uma trinca em um eixo, levando em consideração as energias envolvidas. De acordo com Bachschmid et.al. (2006), este modelo é restrito aos graus de liberdade de rotação. Mais detalhes podem ser encontrados em Andrieux e Varé (2002). Na Fig. 3.19 é apresentada pelos autores uma malhagem de uma viga trincada. Aproximadamente 11.000 elementos foram usados para a análise desta viga. A malha foi escolhida um pouco densa, os fatores de concentração de tensão foram calculados e comparados com aqueles determinados por meio da abordagem clássica da mecânica da fratura. Esta comparação permitiu avaliar a precisão do modelo no que diz respeito à sua capacidade de representar o comportamento real da trinca na região tridimensional próxima a ela. O limite elástico nunca foi ultrapassado nas simulações. O modelo do contato na região trincada é obviamente não-linear. Um coeficiente de atrito de  $\mu = 0.2$  foi introduzido devido às forças de cisalhamento e torção que causam o deslizamento da secção.

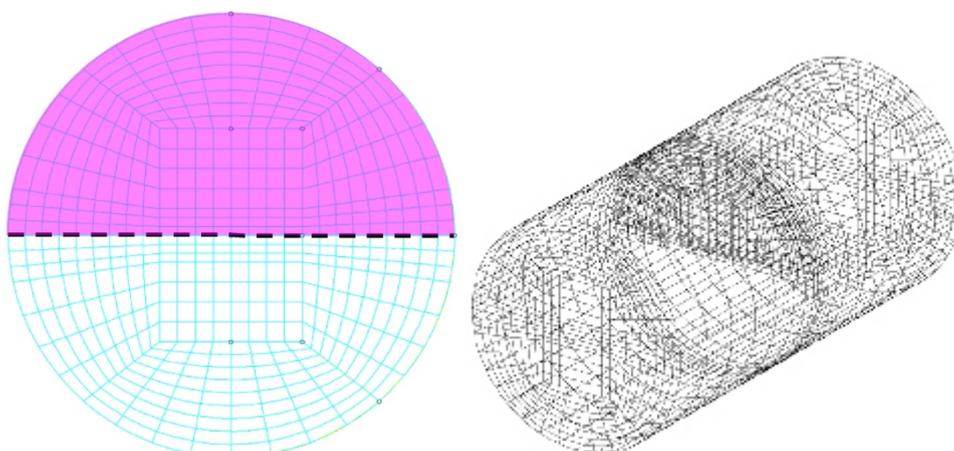


Figura 3.19 - Malha da secção transversal e vista isométrica de um modelo 3D com trinca de 50% de profundidade (Bachschmid et.al., 2006)

### 3.5.5 Comparação dos três modelos apresentados

Os três diferentes modelos (Flex, Serr e 3D) foram comparados pelo cálculo da deflexão de uma viga de teste e estes resultados foram apresentados por Bachschmid (2006). A viga teste é cilíndrica, com diâmetro de 25 mm e comprimento de 50 mm, engastada em uma extremidade e com carregamentos rotativos

aplicados na outra ponta. A trinca representa 50% do diâmetro do eixo. As Figs. 3.20 e 3.21 mostram alguns resultados obtidos.

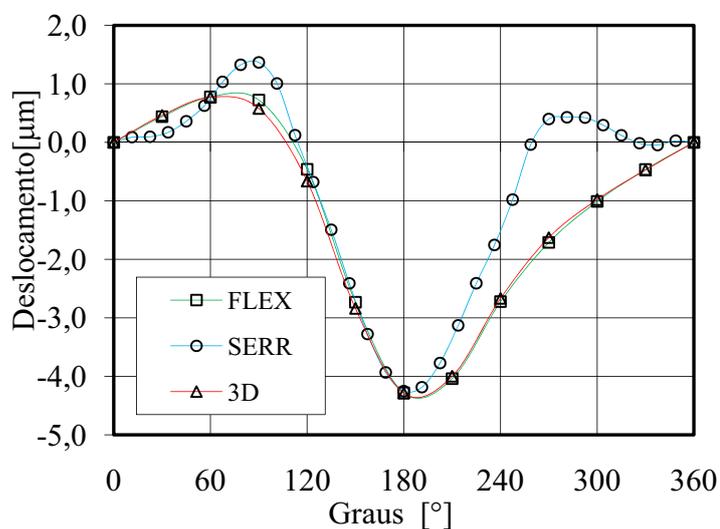


Figura 3.20 – Deslocamento na direção z devido ao carregamento rotativo

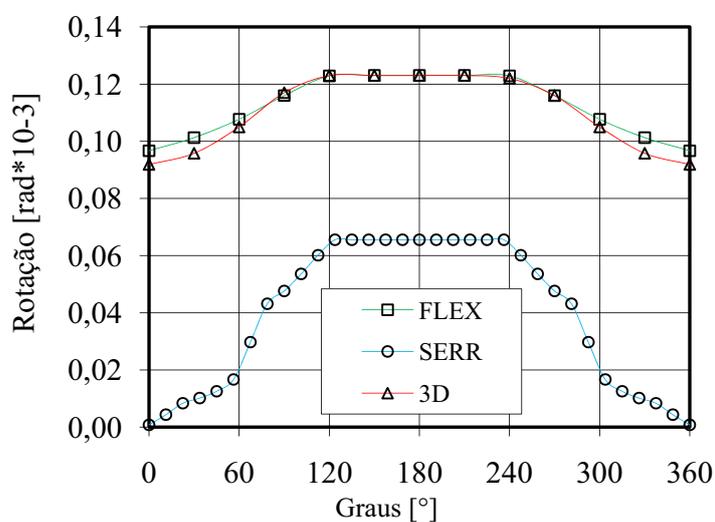


Figura 3.21 – Rotação  $\theta_z$  devido ao carregamento rotativo

Observa-se pelos resultados apresentados anteriormente que o modelo Serr é o que apresenta maior distanciamento do modelo 3D, já que os resultados apresentados para o modelo Flex são bem próximos do modelo considerado ideal, o 3D. Assim, fica justificada a escolha do modelo Flex neste trabalho, pois é um

modelo que tem um custo computacional pequeno, se comparado ao modelo 3D, e mais preciso se comparado ao modelo Serr.

# CAPÍTULO IV

## NOÇÃO DE CIRCUITO ELETROMAGNÉTICO

### 4.1 Teorema de Ampère Aplicado a Circuitos Magnéticos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos fundamentais do atuador eletromagnético, com o objetivo de determinar as forças eletromagnéticas que serão introduzidas no rotor. Mais detalhes podem ser encontrados em (Der Hagopian e Mahfoud, 2010 e Damien, 2003).

Na Fig. 4.1 apresenta-se um toróide que será usado na dedução das forças eletromagnéticas das bobinas. A figura apresenta um núcleo magnético sobre o qual se observa um enrolamento. O raio interno é dado por  $R_i$  e o raio externo por  $R_e$ . Três contornos foram adotados e nomeados por  $\Gamma$ . Por razão de simetria sobre os contornos de integração escolhidos o campo de indução  $\vec{B}$ , induzido por uma corrente  $I$ , circulante na bobina, é em todo ponto tangente ao contorno, com amplitude constante.

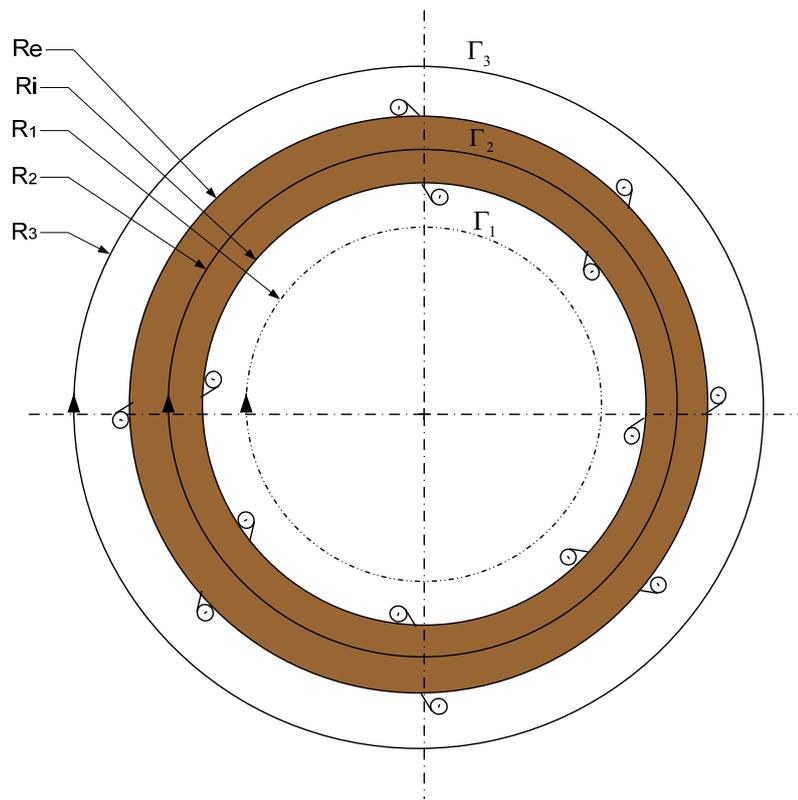


Figura 4.1 – Toróide seccionado

Pode-se descrever 3 situações distintas como mostrado pelas linhas tracejadas na Fig. 4.1. Por meio da lei de Ampère aplicada ao magnetismo tem-se:

- 1) Se o contorno situa-se em um raio  $R_1$  inferior a  $R_i$ , raio interior do núcleo do toróide (contorno  $\Gamma_1$  da Fig. 4.1):

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{R \cdot B}{\mu_0} = 0 \quad (4.1)$$

- 2) Se o contorno situa-se em um raio  $R_2$  superior a  $R_i$  e inferior a  $R_e$ , (contorno  $\Gamma_2$  da Fig. 4.1):

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{R \cdot B}{\mu} = N \cdot I \quad (4.2)$$

- 3) Enfim, se o contorno situa-se em um raio  $R_3$  superior a  $R_e$  (contorno  $\Gamma_3$  da Fig. 4.1):

$$\oint_{\Gamma_3} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{R \cdot B}{\mu_0} = N \cdot I - N \cdot I = 0 \quad (4.3)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo e  $\mu$  é a permeabilidade magnética do material constitutivo do toróide.

Se o raio  $R_i$  e o raio  $R_e$  do toróide têm valores próximos (significa que, se as dimensões das espirais são pequenas diante do raio médio ( $R_m = (R_i + R_e)/2$ )), pode-se admitir, sem cometer erros importantes, que todos os contornos de integração, situados no interior do toróide, têm, aproximadamente, seu comprimento igual a  $R_m$ .

Essa hipótese admite que a indução magnética é constante em qualquer ponto de uma secção do toróide. A indução  $\vec{B}$  é em qualquer ponto perpendicular à secção transversal (pois é tangente ao contorno de integração). O fluxo através de uma secção transversal reta vale:

$$\psi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S \quad (4.4)$$

sendo  $S$  a área desta secção.

Combinando as Eq. (4.2) e a Eq (4.4), obtém-se:

$$\psi = \frac{\mu \cdot S}{l} \cdot N \cdot I \quad (4.5)$$

Sendo  $l = 2 \cdot \pi \cdot R_m$ .

Chamando-se:

$F = NI$  a força magneto motriz.  $F$  se exprime em Ampère-rotações;

$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \cdot S}$ , a relutância do circuito magnético.

pode-se escrever a equação conhecida sob o nome de Lei de HopKinson

$$F = \mathcal{R} \psi = NI \quad (4.6)$$

## 4.2 Modelagem de uma Bobina Eletromagnética

O esquema mostrado na Fig. (4.2) representa uma bobina enrolada em um material ferromagnético que tem a mesma configuração do atuador eletroímã usado neste trabalho. O núcleo ferromagnético em que a bobina está enrolada é do tipo ferro doce, que proporciona o direcionamento do fluxo de campo magnético, reduzindo as perdas devido à sua dispersão. Este núcleo é composto de várias lâminas, reduzindo outro tipo de perda que tem a ver com as correntes parasitas (Foucault).

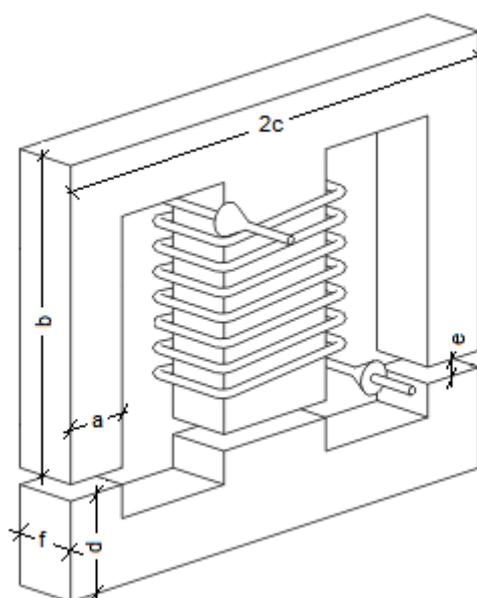


Figura 4.2 – Eletroímã do atuador eletromagnético

Entre dois fluxos eletromagnéticos iguais consecutivos, representados na Fig. 4.3, circula sempre a mesma quantidade de fluxo magnético. Esta hipótese vem, de fato, desprezar os fluxos de fuga (aqueles que não passam pelos entreferros).

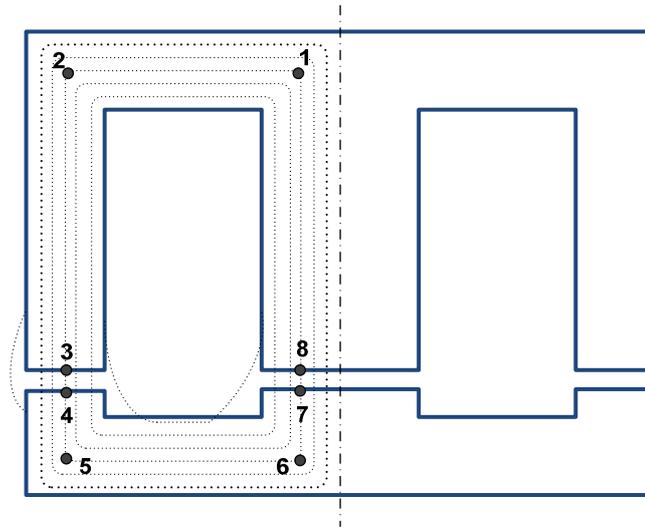


Figura 4.3 – Fluxos de campo magnético com fugas e ramos considerados para a determinação da relutância

Levando em conta a simetria do dispositivo, é possível estudar uma metade do circuito magnético, Fig. 4.3. Os fluxos que circulam em cada um dos ramos laterais são iguais e valem a metade do fluxo que circula no ramo central. Conhecendo o comprimento médio  $l$  e a secção transversal  $S$  de diferentes elementos do circuito magnético, assim como a permeabilidade  $\mu$  do material que os constituem, pode-se calcular as novas relutâncias desse circuito, a partir da fórmula geral:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \cdot S} \quad (4.7)$$

sendo  $\mu_r$  a permeabilidade relativa do material ferromagnético do núcleo ( $\mu = \mu_r \mu_0$ ), permeabilidade esta considerada constante. Qualquer que seja a corrente (ausência de saturação), calcula-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{8-1} = \mathcal{R}_{2-3} &= \frac{b - \frac{a}{2}}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f} \\ \mathcal{R}_{1-2} = \mathcal{R}_{5-6} &= \frac{c - a}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f} \\ \mathcal{R}_{3-4} = \mathcal{R}_{7-8} &= \frac{e}{\mu_0 \cdot a \cdot f} \\ \mathcal{R}_{4-5} = \mathcal{R}_{6-7} &= \frac{d - \frac{a}{2}}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para fluxos circulando em cada um dos ramos do circuito (iguais cada um à metade do fluxo total) como visto na Eq. (4.5), tem-se:

$$\frac{\psi}{2} = \frac{N \cdot I}{\sum_{i=1}^8 R_i} = \frac{N \cdot I \cdot \mu_0 \cdot \alpha \cdot f}{2e + \frac{2b + 2c + 2d - 4a}{\mu_r}} \quad 4.9$$

Observa-se que se o comprimento total do circuito magnético é insignificante diante de  $\mu_r$  vezes o comprimento dos entreferros, não se comete um erro importante no estabelecimento da relação fluxo-corrente ao se considerar a relutância total do circuito magnético igual àquela dos entreferros. Para um valor de  $\mu_r$  superior a 500 e entreferros inferiores a 2 mm, essa aproximação resta válida enquanto o comprimento total do circuito for inferior a 1 m.

O fluxo total induzido nas  $N$  espirais da bobina se escreve:

$$\Psi = N \cdot \psi = L \cdot I \quad (4.10)$$

Assim, por meio da Eq. (4.9), tem-se:

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \alpha \cdot f}{e + \frac{b + c + d - 2a}{\mu_r}} \quad (4.11)$$

Sabe-se que a força de atração eletromagnética entre dois núcleos ferromagnéticos é dada por:

$$F_{em} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial x_m} \quad (4.12)$$

onde  $W_{cmag}$  é a energia magnética que pode ser determinada por:

$$W_{cmag} = \int_{0,0,0,\dots,0}^{i_1, i_2, \dots, i_n} \sum_{k=1}^n \psi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, x_m) di_k \quad (4.13)$$

A energia magnética vista acima é, então, igual à:

$$W_{cmag} = \int_0^I \Psi di_k = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \quad (4.14)$$

Por fim, a força de atração entre os dois elementos do núcleo ferromagnético escreve-se como:

$$F_{em} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial x} = F_{em} = \frac{N^2 \cdot I^2 \cdot \mu_0 \cdot \alpha \cdot f}{2 \left( e \pm \delta + \frac{b + c + d - 2\alpha}{\mu_r} \right)^2} \quad (4.15)$$

sendo  $\delta$  uma variável que se acrescenta ao entreferro para representar a vibração do rotor na posição do AEM.

O próximo capítulo apresenta aplicações que se servem das metodologias aqui apresentadas. Nos itens 5.2 e 5.3 encontra-se a parte relacionada aos atuadores eletromagnéticos.

# CAPÍTULO V

## ESTUDOS DE CASOS

### 5.1 Identificação de Parâmetros Variáveis no Tempo

Após o desenvolvimento da parte teórica como descrito nos capítulos anteriores, este capítulo é dedicado à apresentação de estudos de casos referentes às metodologias desenvolvidas. Apresenta-se inicialmente a identificação de parâmetros variantes no tempo, onde é mostrado um sistema não-linear, no qual a rigidez varia em função da resposta temporal do sistema e uma aplicação da identificação de trincas em rotores. Em seguida apresentam-se duas aplicações da utilização de atuadores eletromagnéticos para manter fechadas as trincas presentes em eixos rotativos. E, por fim, é apresentada uma metodologia, com sua validação experimental, da identificação de desbalanceamentos, em máquinas rotativas lineares e não-lineares, por meio de otimização, além da correção do desbalanceamento.

#### 5.1.1 Estudo de Caso 1 – Identificação de rigidez do tipo *hardening*

A metodologia desenvolvida para a determinação de parâmetros variáveis no tempo (Capítulo II) será inicialmente aplicada em um sistema massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade, como apresentado na Fig. 5.1, para fins de ilustração. Uma das molas presentes na estrutura comporta-se de maneira não-linear, com valor de sua rigidez proporcional ao cubo da deformação sofrida por esta mola, caracterizando uma alta não-linearidade presente no sistema. Na literatura encontram-se vários trabalhos que tratam deste tipo de não-linearidade e suas implicações na dinâmica do sistema, como pode ser visto no trabalho de Borges (2008).

O comportamento da mola não-linear é dado pela Eq. (5.1). Como visto, sua rigidez aumenta com o aumento da deformação; assim, a mola é considerada como do tipo “*hardening*”. Se a rigidez diminui com o aumento da deformação, a não-linearidade é do tipo “*softening*”. Apenas o primeiro caso será focado nesta tese.

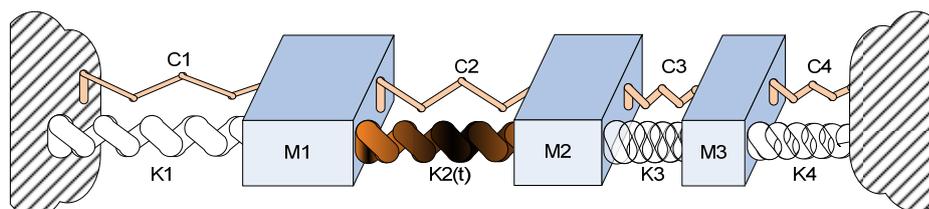


Figura 5.1 – Sistema de três graus de Liberdade

De uma maneira geral, o processo de identificação inicia-se com a escolha do número de termos a serem considerados para a expansão dos parâmetros do sistema (valor de “ $rp$ ” na Eq. (2.45)). Sabe-se que os parâmetros do sistema podem ser, neste caso, constantes ou variáveis. Como o número de termos para a determinação dos parâmetros constantes é muito pequeno, quando comparado com o número de termos necessários para a determinação dos parâmetros variantes, deve-se adotar o valor de  $rp$  o menor possível, mas sendo o suficiente para a determinação satisfatória dos parâmetros variáveis. Verificou-se durante as simulações que um baixo número de termos de expansão pode não ser o bastante para uma boa determinação dos parâmetros variantes e um número muito acima do necessário pode ser responsável por um acúmulo de erros computacionais devido à inversão da matriz  $J$ , como pode ser visto na Eq. (2.54). Este erro ocorre porque, com o aumento do número de termos de expansão acima do necessário, a matriz  $J$  começa a apresentar valores singulares próximos de zero, dificultando a determinação de sua inversa.

No caso aqui estudado, consideram-se 45 termos e são usadas as séries ortogonais de Fourier para a expansão dos parâmetros do sistema. A resposta foi obtida durante 10 segundos, com passo de  $5 \times 10^{-4}$  segundos. Para a expansão dos sinais de resposta e de entrada, foram utilizados 300 termos dos polinômios de Legendre. Deve-se observar que as séries de Fourier foram usadas para a expansão dos parâmetros do sistema e os polinômios de Legendre para a expansão

dos sinais de entrada e de saída. Como mencionado no capítulo II, a utilização de funções diferentes permite que o sistema de equações lineares a ser resolvido seja linearmente independente, possibilitando sua resolução (ver Eqs. (2.53) e (2.56)). Como o objetivo aqui é o uso desta metodologia aplicada à identificação de trincas em máquinas rotativas, somente a matriz de rigidez foi considerada como variante no tempo e, como não se sabe as posições dos parâmetros variantes no tempo, realiza-se a expansão de toda a matriz de rigidez do sistema. Assim, espera-se encontrar na identificação desta matriz uma região de termos constantes e outra região na qual os termos variam no tempo, caracterizando a rigidez da mola não-linear considerada neste caso, ou da trinca, em máquinas rotativas. Os parâmetros considerados para a simulação do sistema de 3gdl são:  $M_1 = 1kg$ ;  $M_2 = 1.5kg$ ;  $M_3 = 2kg$ ;  $K_1 = 100N/m$ ;  $K_3 = 950N/m$ ;  $K_4 = 800N/m$ ;  $C_1 = 10Ns/m$ ;  $C_2 = 15Ns/m$ ;  $C_3 = 20Ns/m$ ;  $C_4 = 25Ns/m$ . A rigidez da mola não-linear é dada pela Eq. (5.1).

$$K_2(t) = 500 + 1E11 * (x_2(t) - x_1(t))^3 \quad (5.1)$$

Assim, uma equação diferencial que representa o comportamento deste sistema pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 + C_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2(t) & 0 \\ -K_2(t) & K_2(t) + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Utilizou-se a resposta de deslocamento e uma entrada harmônica inserida na posição da primeira massa  $M_1$ , igual a  $F_1(t) = 3 * \sin(2\pi i * t)$  para determinação dos parâmetros do sistema. Utilizou-se para a geração da resposta o método de Newmark modificado. A modificação inserida no método é devida a dependência da rigidez  $K_2(t)$ , que depende da resposta dinâmica do sistema. Esta resposta, por sua vez, é função do parâmetro  $K_2(t)$ . Sendo assim, a modificação adotada no método foi a seguinte: para cada incremento de tempo o método calcula a resposta do sistema e utiliza esta resposta para determinar a matriz de rigidez; após isso, considerando o mesmo instante de tempo, o método recalcula a resposta para a nova rigidez e verifica se houve variações maiores que um erro estimado nesta

resposta. Se isso tenha ocorrido, o método recalcula a nova matriz de rigidez e refaz o processo até que haja convergência. Se houve convergência, o método realiza um incremento no tempo e refaz o mesmo processo para o próximo instante de tempo. Feito isso, é calculada a resposta temporal de deslocamento. Um ruído branco de 3% da energia do sinal foi introduzido nesta resposta, como mostra a Fig. 5.2.

Tendo determinado as respostas do sistema e conhecendo-se as forças, inicia-se a identificação dos parâmetros com base na Eq. (2.56). Nas figuras 5.3 a 5.8 encontra-se a identificação da matriz de rigidez comparada com a matriz real (utilizada na simulação – corresponde à matriz de rigidez experimental nos casos reais). Como a identificação foi feita para os nove elementos desta matriz, dada pela Eq. (5.2), são apresentadas somente alguns dos resultados mais representativos. Nas figuras 5.3 a 5.5 apresentam-se os resultados da identificação dos parâmetros variantes e, nas figuras 5.6 a 5.8, verifica-se a identificação dos parâmetros constantes. Em todos os casos a identificação pode ser considerada satisfatória, à vista da pequena diferença encontrada entre os resultados encontrados e aqueles do sistema original. Vale lembrar que os parâmetros de amortecimento, bem como os de massa não apresentam peculiaridades na identificação, não sendo aqui apresentados.

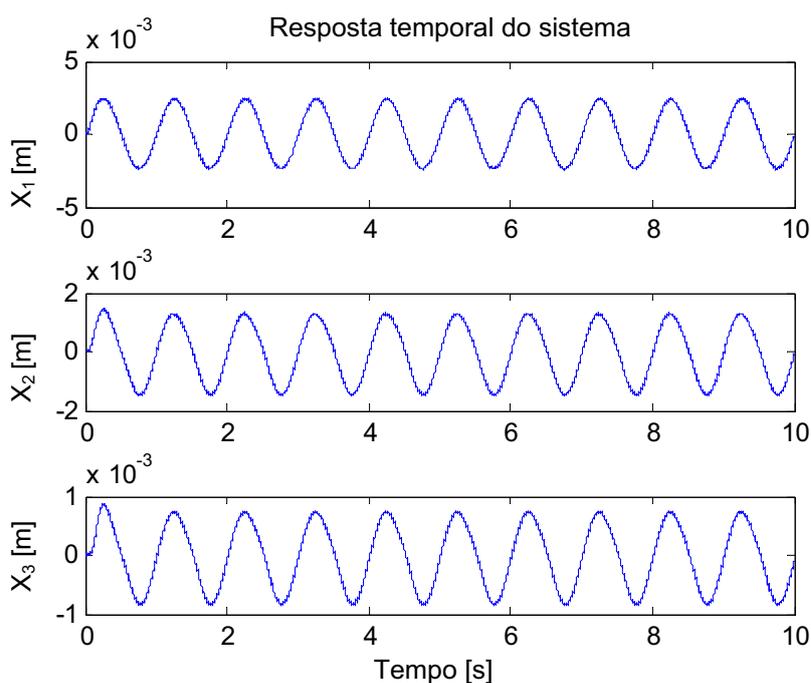


Figura 5.2 – Resposta do sistema com presença de ruído

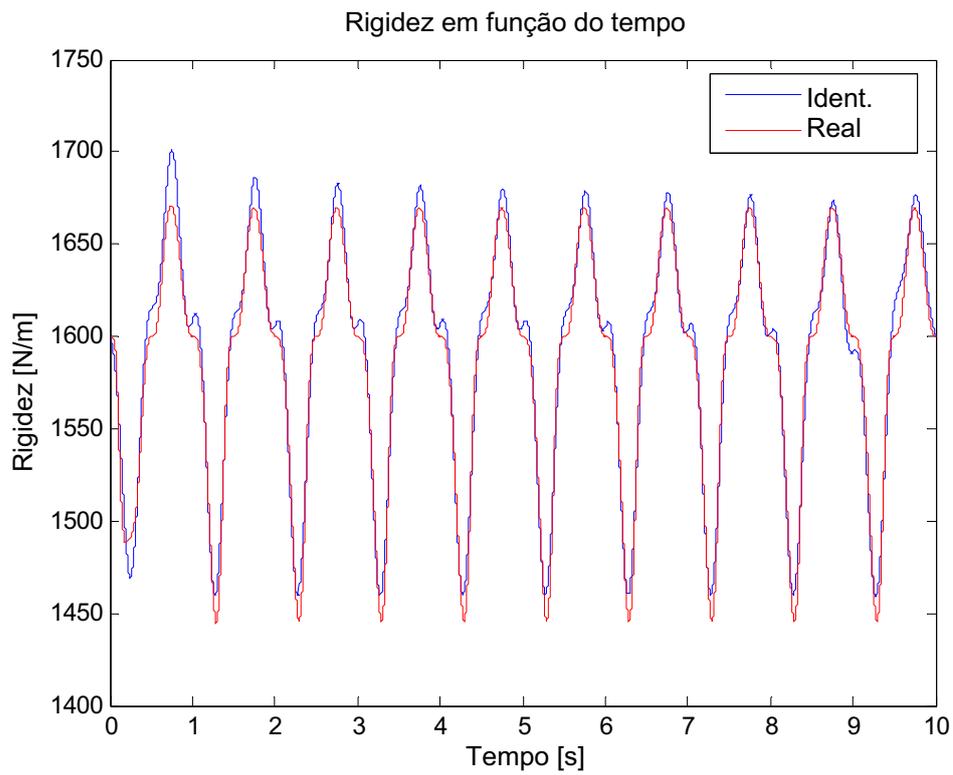


Figura 5.3 – Rigidez variante encontrada na posição (1,1) da matriz de rigidez

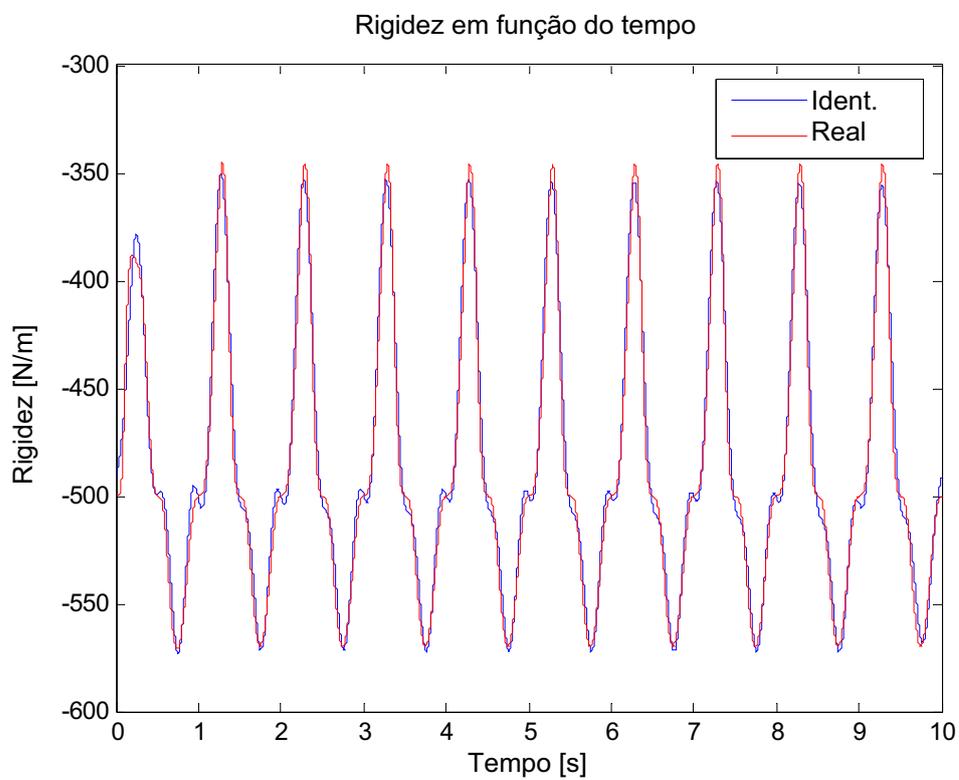


Figura 5.4 – Rigidez variante encontrada na posição (2,1) da matriz de rigidez

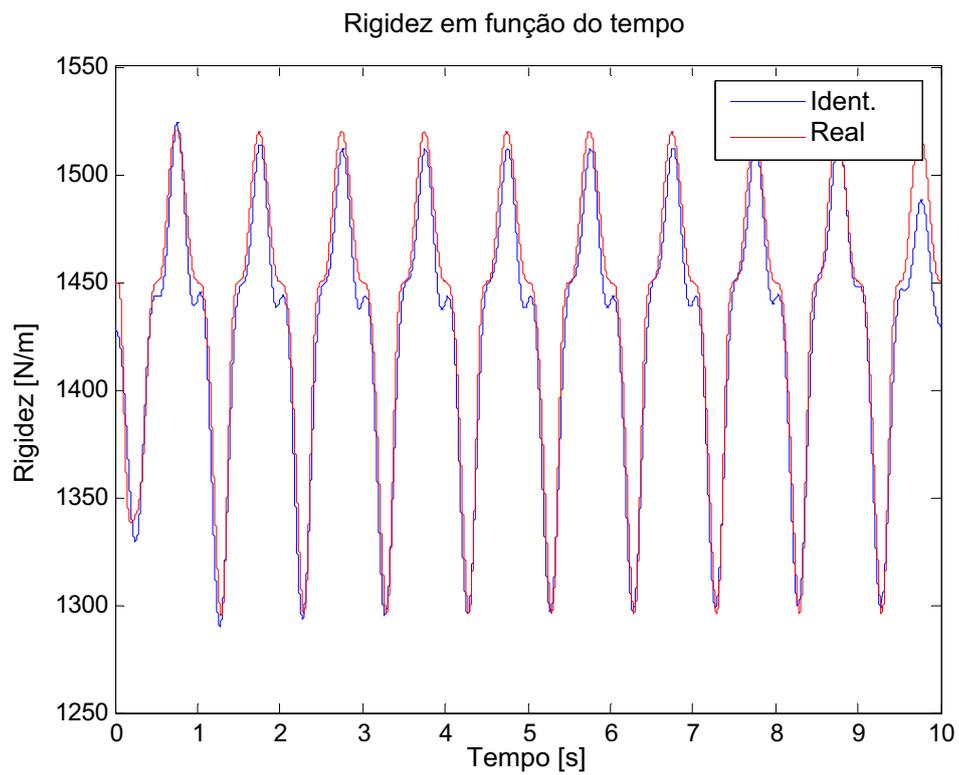


Figura 5.5 – Rigidez variante encontrada na posição (2,2) da matriz de rigidez

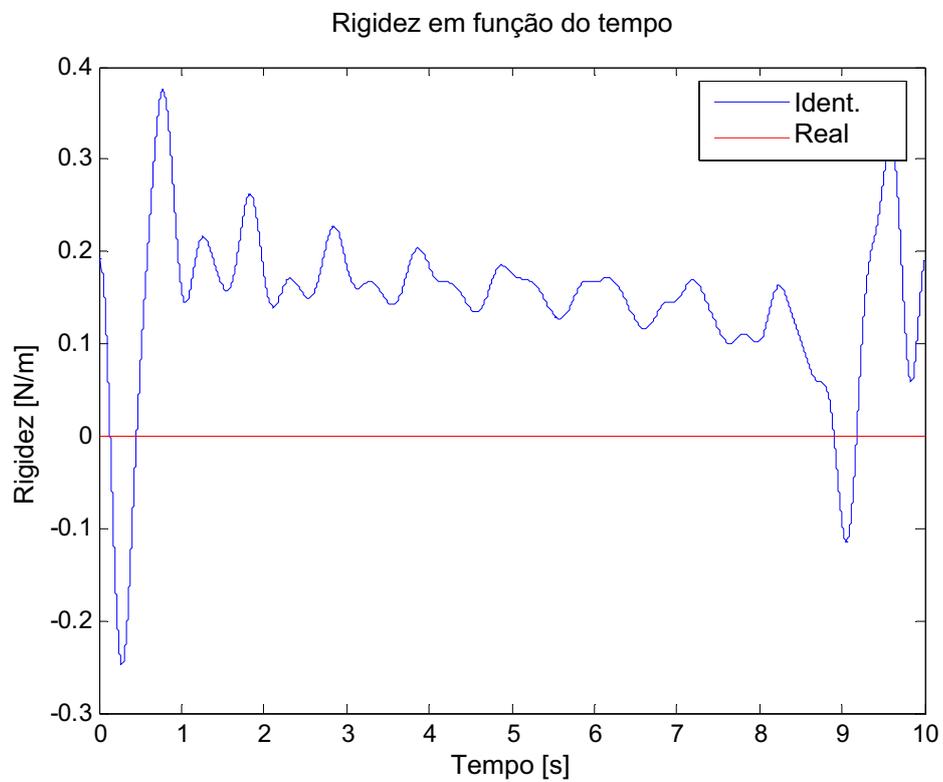


Figura 5.6 – Rigidez variante encontrada na posição (3,1) da matriz de rigidez

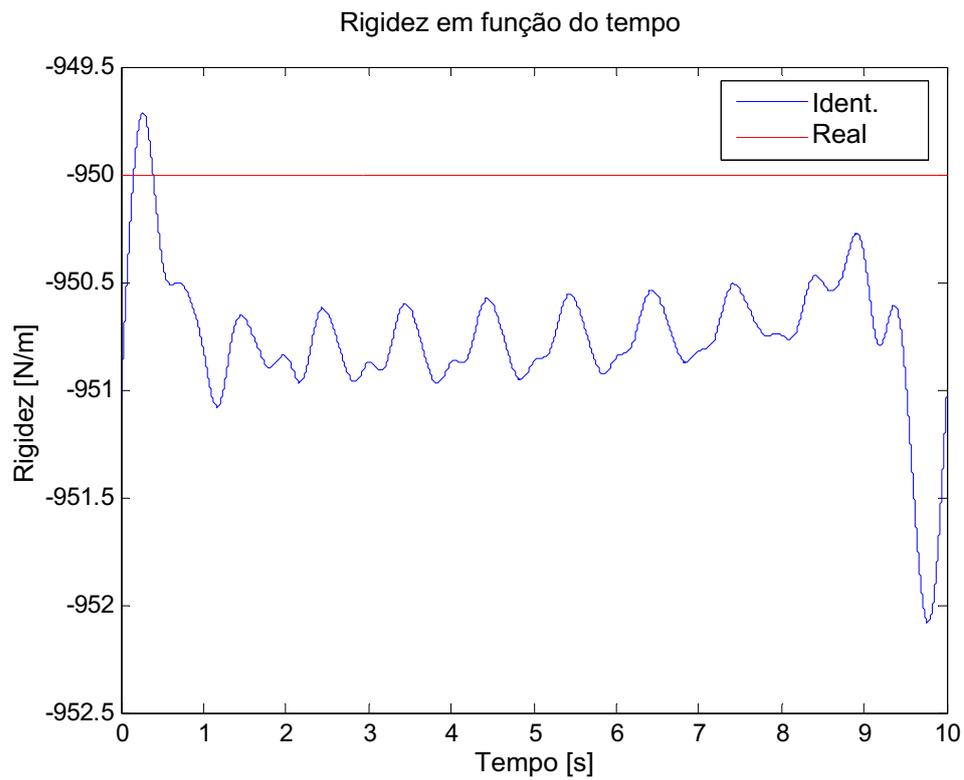


Figura 5.7 – Rigidez constante encontrada na posição (3,2) da matriz de rigidez

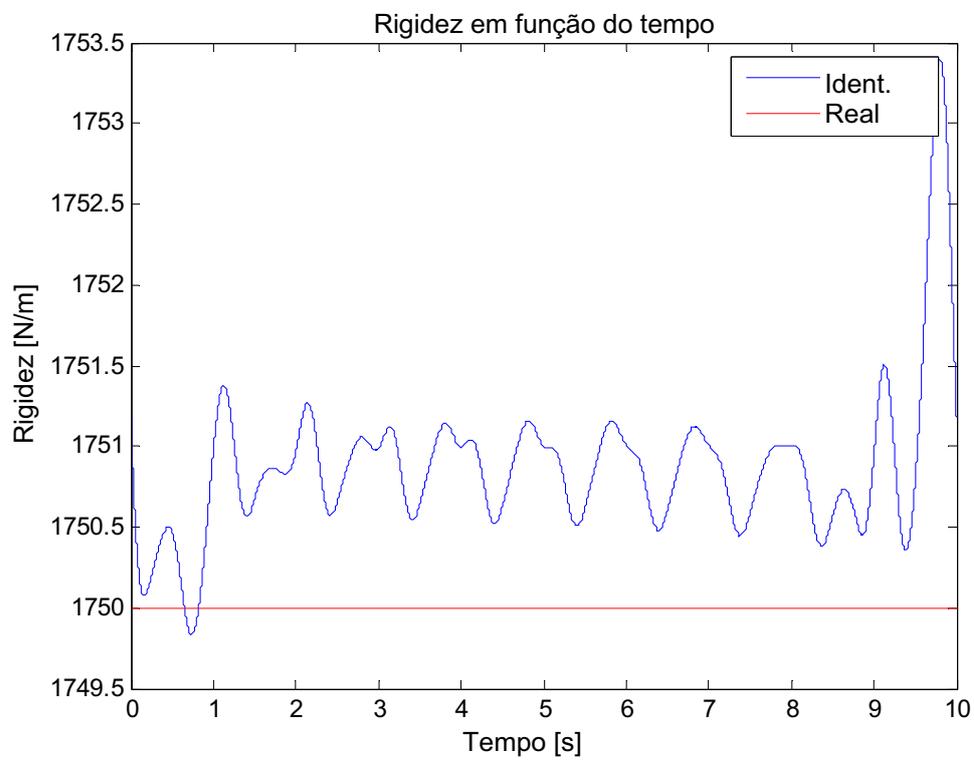


Figura 5.8 – Rigidez constante encontrada na posição (3,3) da matriz de rigidez

### 5.1.2 Estudo de Caso 2 – Identificação de trincas em eixos de máquinas rotativas

A modelagem do elemento do eixo, considerando a existência da trinca, foi apresentada na seção 3.5. Como mencionado, durante uma rotação completa do rotor, a trinca abre e fecha devido ao peso próprio e devido às forças dinâmicas envolvidas. Neste exemplo, foi usado um rotor considerado pesado, na qual os momentos causados no elemento de trinca são influenciados principalmente pelo peso do rotor. Para validar a metodologia desenvolvida, um eixo rotativo em balanço com um disco e um mancal foi simulado, como pode ser visto na Fig. 5.10. O diâmetro do eixo considerado nas simulações é de 0,02m e a profundidade da trinca é de 0,004m.

O elemento com a trinca foi colocado no centro do eixo e seu comprimento foi determinado por um ajuste dado pela Fig. 3.14. No caso em questão, o valor encontrado para o comprimento do elemento trincado foi de 0,0064m. As propriedades do material do rotor e do mancal são apresentadas na Tab. 5.1. Na Fig 5.9, observam-se os segundos momentos de área calculados segundo o fluxograma apresentado pela Fig. 3.18, durante uma rotação completa do eixo. Estes resultados foram usados para calcular a matriz de rigidez do elemento com trinca, que foi então introduzida no modelo de elementos finitos (Fig. 5.10b).

A metodologia desenvolvida para a determinação dos parâmetros variáveis apresentada no Capítulo II foi usada para determinar a matriz de amortecimento, bem como a matriz de rigidez global, como uma função do tempo. Como somente o elemento central do rotor modifica seus parâmetros durante o tempo, espera-se encontrar na identificação da matriz de rigidez uma região com termos constantes e outra com termos variáveis (como pode ser visto na Fig. 5.11), identificando-se, desta maneira, os parâmetros da trinca.

Para uma volta completa do eixo, foram usados 720 pontos de discretização do tempo e um total de 20 voltas para a simulação do sistema e a identificação dos parâmetros. A velocidade de rotação usada foi de 30rad/s. Utilizaram-se 91 termos de Fourier para a expansão da matriz de rigidez e a base vetorial usada para a expansão dos sinais de entrada e saída foi de 650 termos dos polinômios de Chebyshev.

Nas Figs. 5.12 a 5.19 podem ser observados os elementos correspondentes a algumas posições da matriz de rigidez global identificada e a que foi usada nas simulações. Pode ser visto que a metodologia desenvolvida é pertinente e tem potencial de aplicação para determinar parâmetros que variam no tempo, como é o caso da identificação de trincas em máquinas rotativas.

Tabela 5.1 – Parâmetros usados durante a simulação do rotor

$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	2.00 E11
Densidade [Kg/m <sup>3</sup> ]	7800
Comprimento do elemento com trinca [m]	0.0064
$\nu$	0.3
<b>Propriedades dos mancais</b>	
$K_{xx}$ [N/m]	5.00 E7
$K_{zz}$ [N/m]	7.00 E7
$K_{xz} = K_{zx}$ [N/m]	0
$C_{xx}$ [N s/m]	500.00
$C_{zz}$ [N s/m]	700.00
$C_{xz} = C_{zx}$ [N s/m]	0

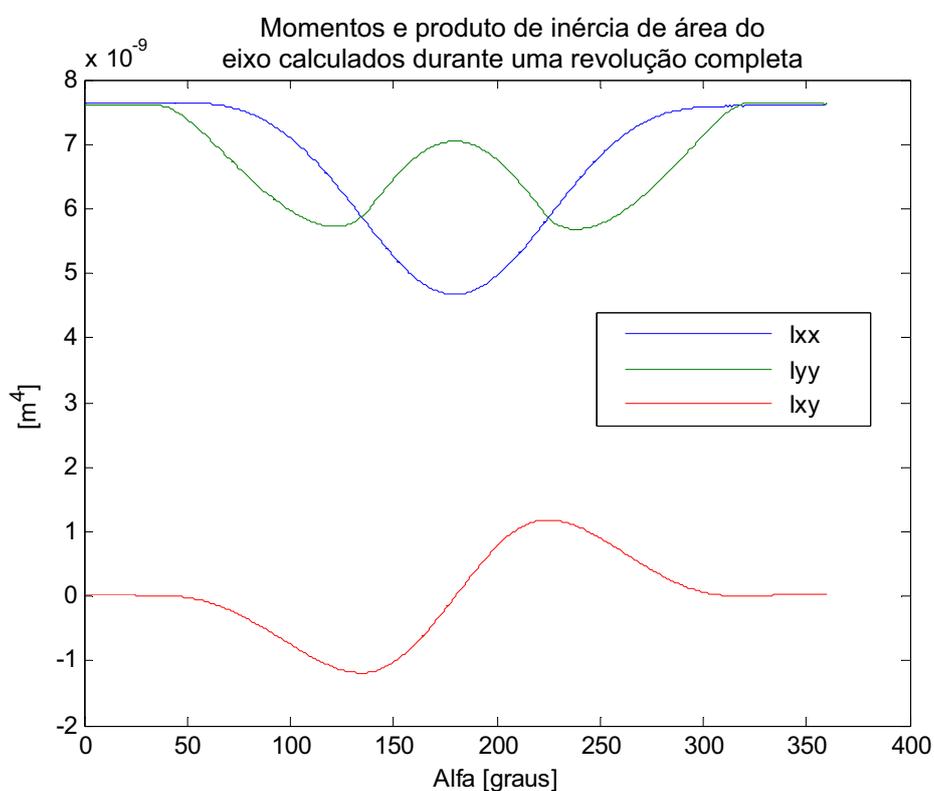
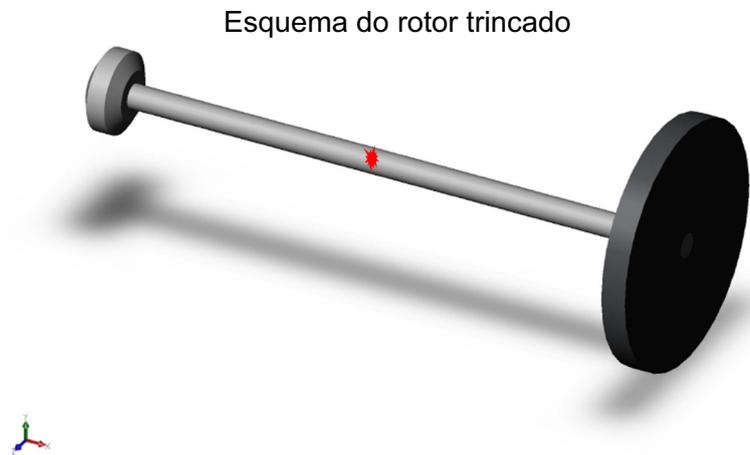
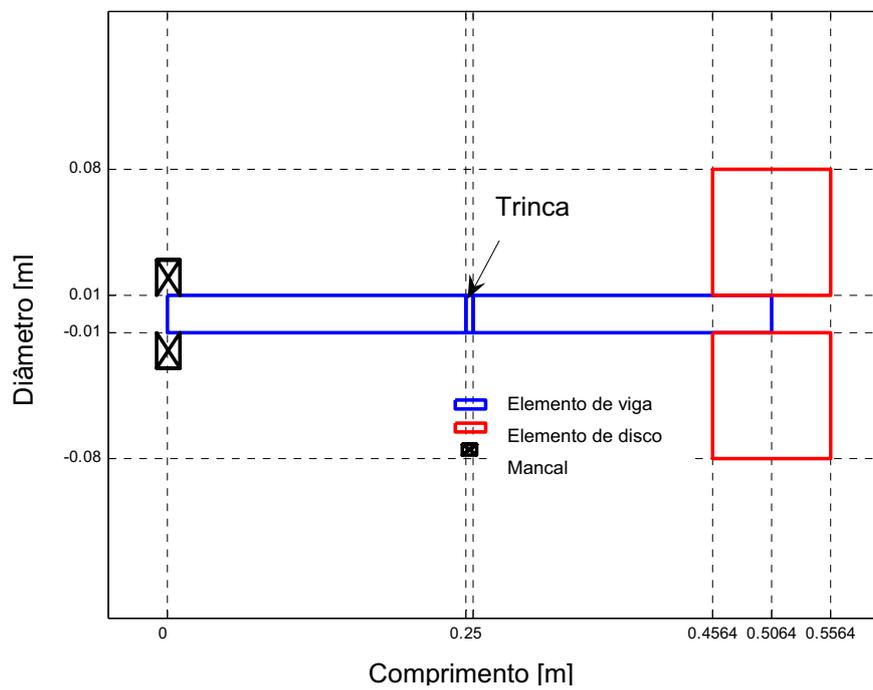


Figura 5.9 – Momentos de inércia de área usados no cálculo da matriz de rigidez do elemento trincado



(a)



(b)

Figura 5.10 – Rotor trincado usado nas simulações. (a) Representação esquemática; (b) Representação em elementos finitos.

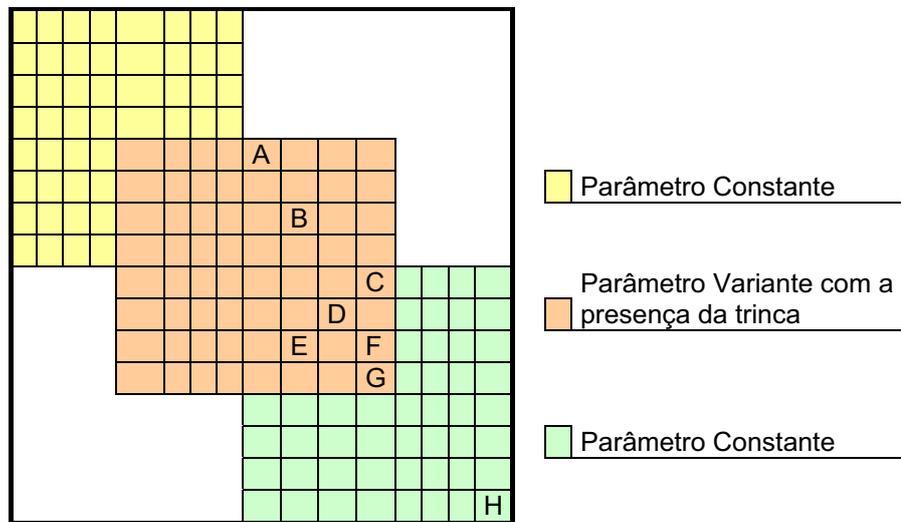


Figura 5.11 – Representação da matriz de rigidez global do sistema, evidenciando os parâmetros constantes e variáveis

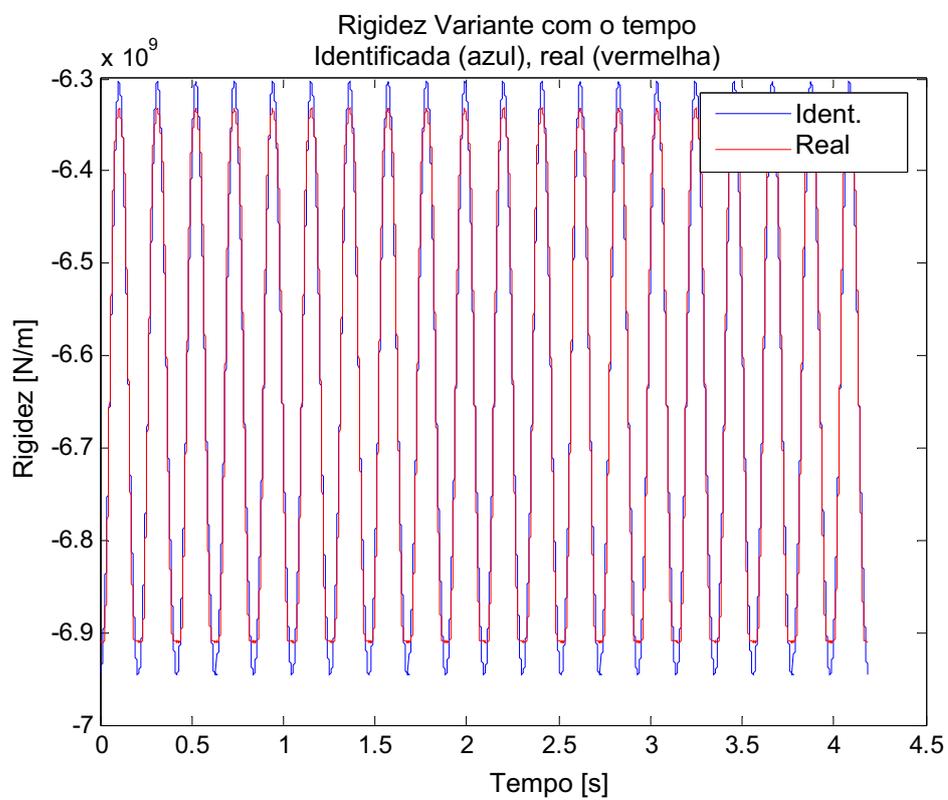


Figura 5.12 – Rigidez variante identificada na posição (A) da Fig. 5.11.

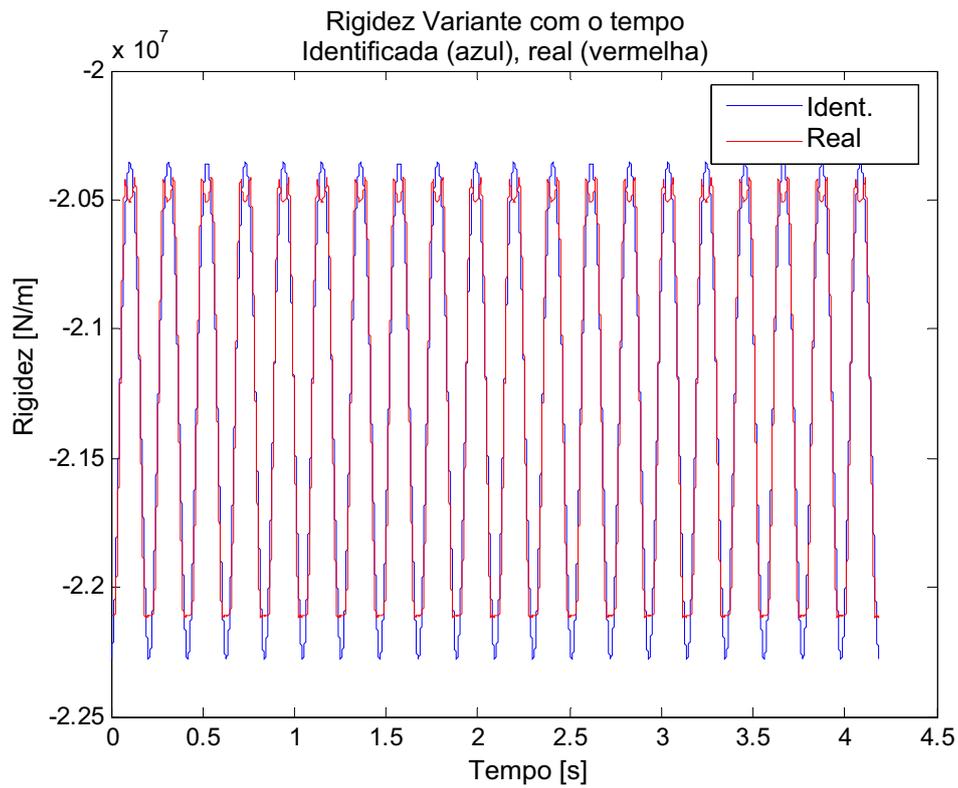


Figura 5.13 – Rigidez variante identificada na posição (B) da Fig. 5.11.

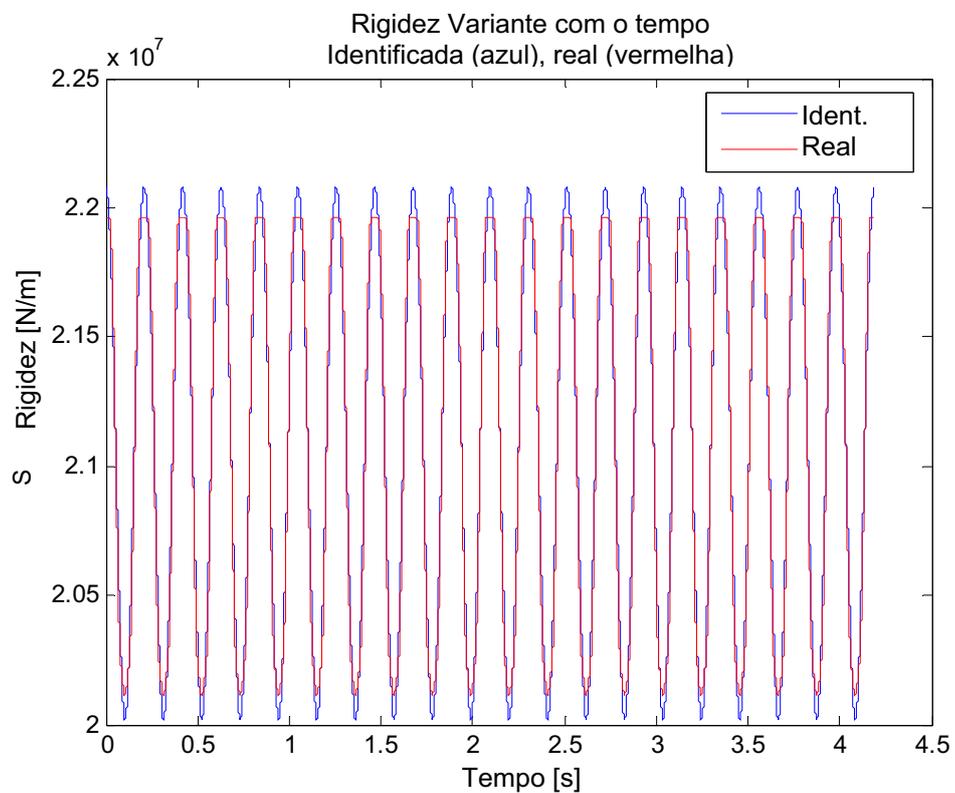


Figura 5.14 – Rigidez variante identificada na posição (C) da Fig. 5.11.

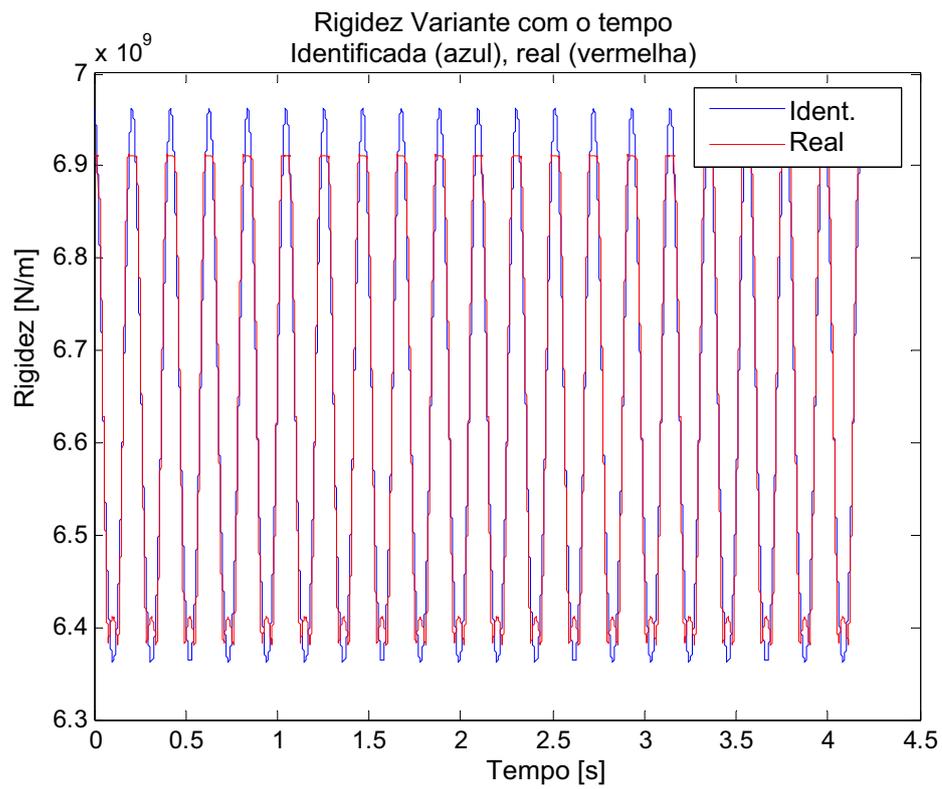


Figura 5.15 – Rigidez variante identificada na posição (D) da Fig. 5.11.

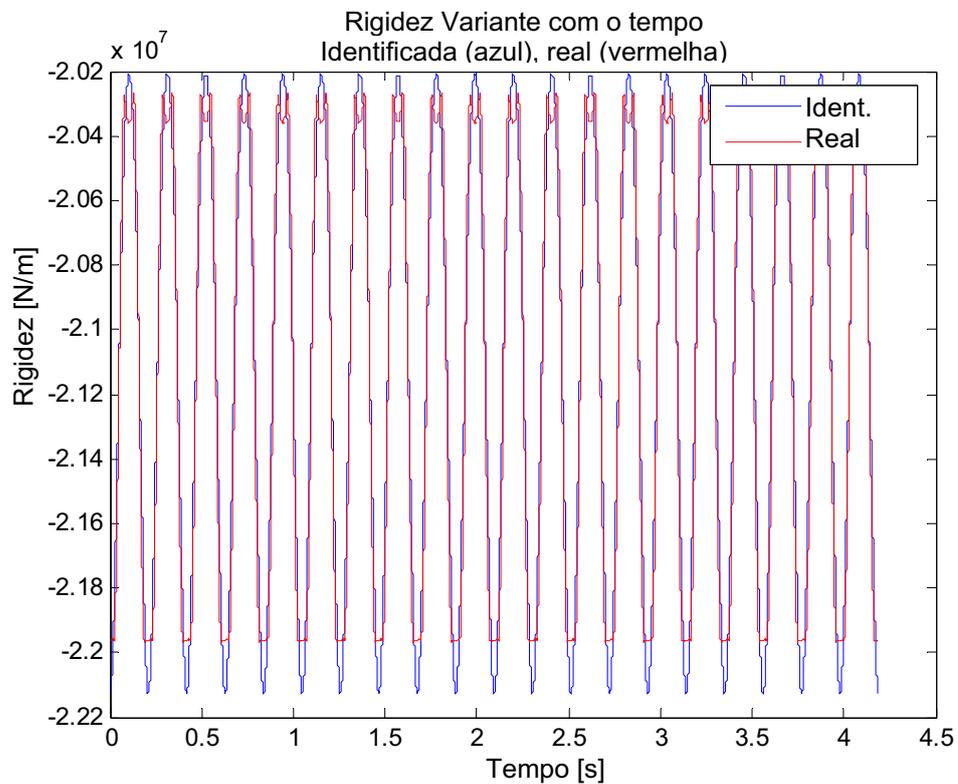


Figura 5.16 – Rigidez variante identificada na posição (E) da Fig. 5.11.

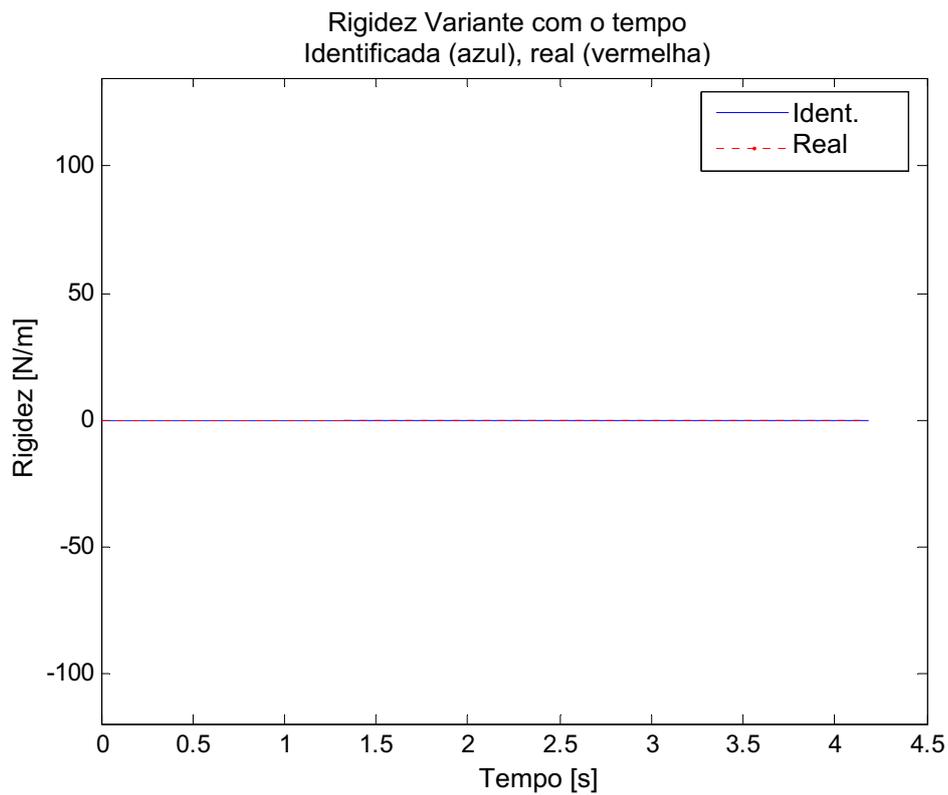


Figura 5.17 – Rigidez constante identificada na posição (F) da Fig. 5.11.

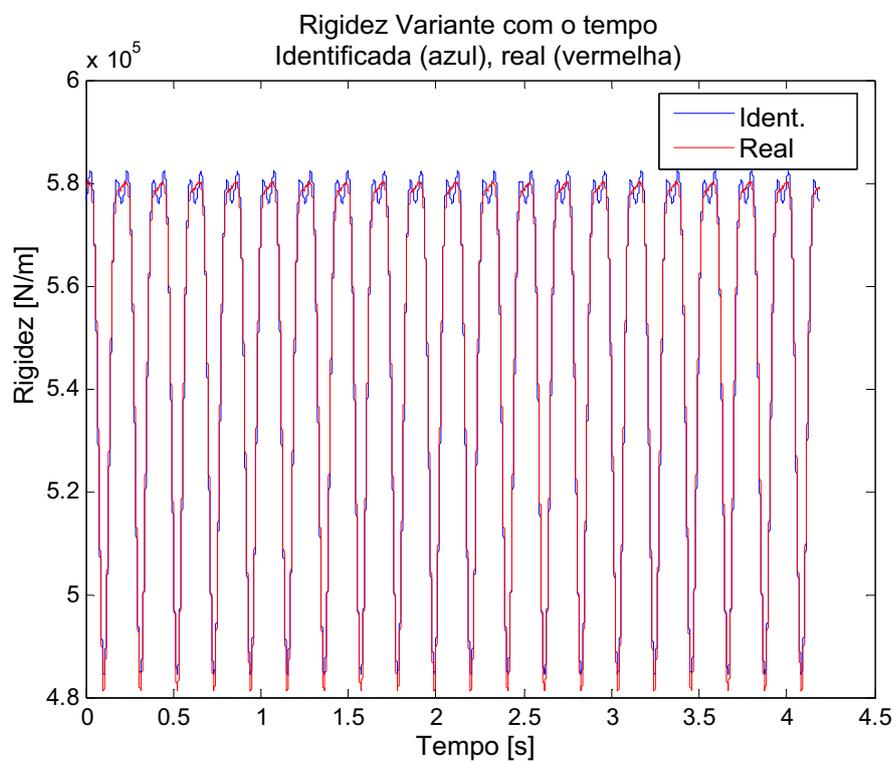


Figura 5.18 – Rigidez variante identificada na posição (G) da Fig. 5.11.

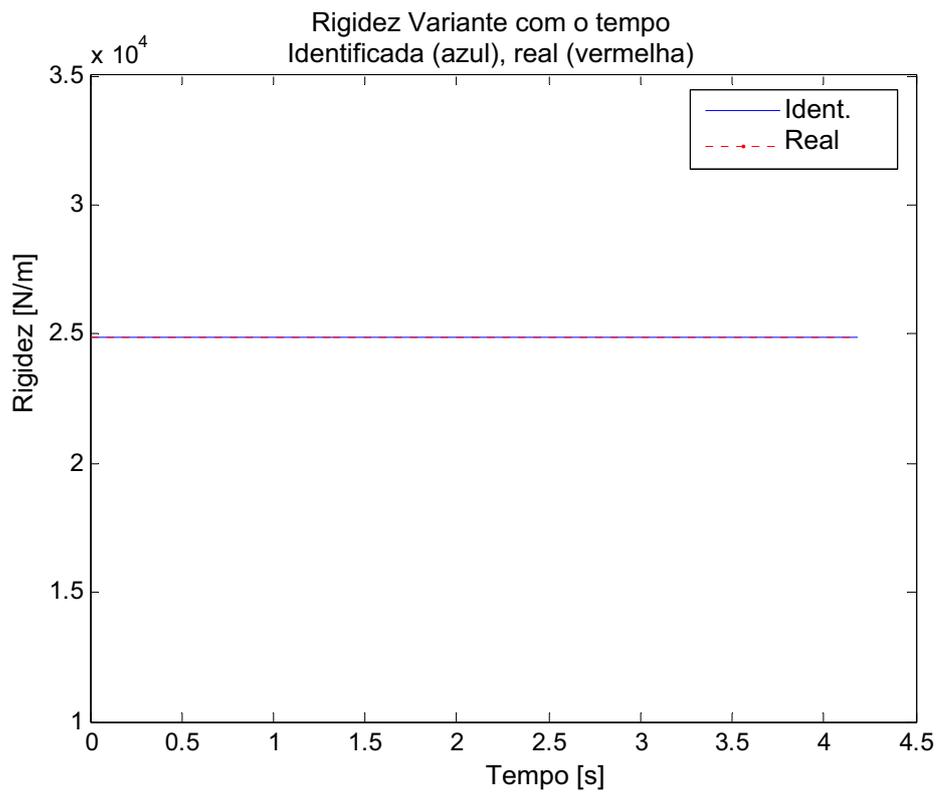


Figura 5.19 – Rigidez constante identificada na posição (H) da Fig.5.11.

### 5.1.3 Considerações parciais

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de identificar trincas em máquinas rotativas. Apesar da simplicidade do sistema considerado, a metodologia desenvolvida foi capaz de localizar e quantificar a rigidez não-linear do primeiro estudo de caso (sistema de 3gdl) e a presença da trinca, no segundo caso (rotor em balanço).

O desenvolvimento matemático apresentado possibilita um novo campo de aplicação da metodologia de identificação de parâmetros, utilizando funções ortogonais. Tal metodologia não se aplica somente a sistemas rotativos, mas a outros sistemas nos quais os parâmetros são variantes no tempo. Deve-se salientar que é possível considerar não-linearidades sem dificuldades adicionais.

Pretende-se, em trabalhos futuros, realizar um estudo do número de termos necessários para a expansão bem sucedida dos sinais considerados, tornando o processo automático, sem a necessidade do uso do método de tentativa e erro para a determinação da quantidade de termos.

## **5.2 Estudo de Caso 3 - Controle de Abertura de Trincas em Rotores por meio de Atuadores Eletromagnéticos**

A idéia deste estudo surgiu da possível aplicação de atuadores eletromagnéticos para interromper e/ou suavizar o processo de fadiga em eixos rotativos trincados. Deve-se salientar que falhas catastróficas que ocorrem comumente nestes eixos são devidas à propagação de trincas causadas por fadiga. Conforme comentado anteriormente, existe um esforço de pesquisa importante para a detecção de trincas e, mais recentemente, no contexto do monitoramento e manutenção da integridade estrutural, o interesse pelo tema tornou-se ainda maior. Uma operação segura de eixos trincados é necessária para que estes possam ser utilizados o maior tempo possível antes de sua substituição. Em aplicações industriais, sabe-se que eixos trincados podem ser mantidos em funcionamento por um tempo prolongado, desde que devidamente monitorados. Como o processo de fadiga é caracterizado pela abertura e o fechamento da trinca durante a rotação, propõe-se um procedimento usando atuadores eletromagnéticos que evitem a abertura total da trinca. Para tanto, modifica-se a dinâmica do rotor, promovendo então a interrupção ou diminuição do processo de fadiga, aumentando o tempo de vida útil do eixo.

### 5.2.1 Descrição da Metodologia

Para a descrição da metodologia empregada é necessário inicialmente fazer uma simulação temporal do sistema. Assim, um modelo do rotor em elementos finitos foi utilizado. Com este propósito, o modelo apresenta os seguintes elementos: discos rígidos, contribuindo somente com energia cinética, e eixo flexível com energia cinética e de deformação, modelado pela teoria de Timoshenko, considerando como sendo um elemento de viga, contendo dois nós por elemento, com 4 graus de liberdade por nó.

A equação diferencial que representa o comportamento dinâmico de um rotor trincado com a presença de um AEM pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C_b + \dot{\varnothing}C_g]\{\dot{x}(t)\} + [K(t) + \ddot{\varnothing}K_g]\{x(t)\} = F_u(t) + F_{AEM}(t) \quad (5.3)$$

sendo  $\{x(t)\}$  o vetor de deslocamento generalizado;  $[M]$ ,  $[C_b]$ ,  $[C_g]$  e  $[K_g]$  as bem conhecidas matrizes de inércia, amortecimento viscoso dos mancais e proporcional do sistema, efeito giroscópico com respeito à velocidade de rotação e o efeito da variação da velocidade de rotação, respectivamente (Lalanne, 1998);  $\dot{\varnothing}$  é a velocidade angular;  $[K(t)]$  é a matriz rigidez variante no tempo que contém o elemento trincado e,  $F_u(t)$  e  $F_{AEM}(t)$  são as forças devidas ao desbalanceamento e ao atuador eletromagnético, respectivamente.

O sistema estudado é apresentado na Fig. 5.20. O eixo horizontal flexível tem diâmetro de 0,0402m e contém dois discos representados por D1 e D2. O eixo é suportado por mancais simétricos em suas extremidades: um mancal com dois rolamentos na extremidade esquerda (rigidez de 2e8N/m e amortecimento de 800 N.s/m), representado por B<sub>1</sub>; e um mancal com um rolamento do lado direito (1e6 N/m e 800N.s/m), representado por B<sub>2</sub>. O AEM é representado por B<sub>3</sub>. As posições da trinca e do AEM podem ser conferidas nas Figs. 5.20 e 5.21.

Somente a resposta, devido ao deslocamento, na posição do AEM foi gerada (nas direções x e z). Para isso, realizou-se uma redução modal e foram usados os oito primeiros modos do sistema não giroscópico associado. Esta resposta foi considerada para todas as análises realizadas neste trabalho. A representação do

modelo de elementos finitos foi realizada através de um código em MATLAB© especialmente adaptado ao longo da tese e a simulação da estrutura foi realizada usando o pacote MATLAB/SIMULINK©. O toolbox SIMPLE Optimization (Viana e Steffen, 2007) foi usado para identificação da corrente elétrica de alimentação das bobinas do AEM, como será descrito nas próximas secções.

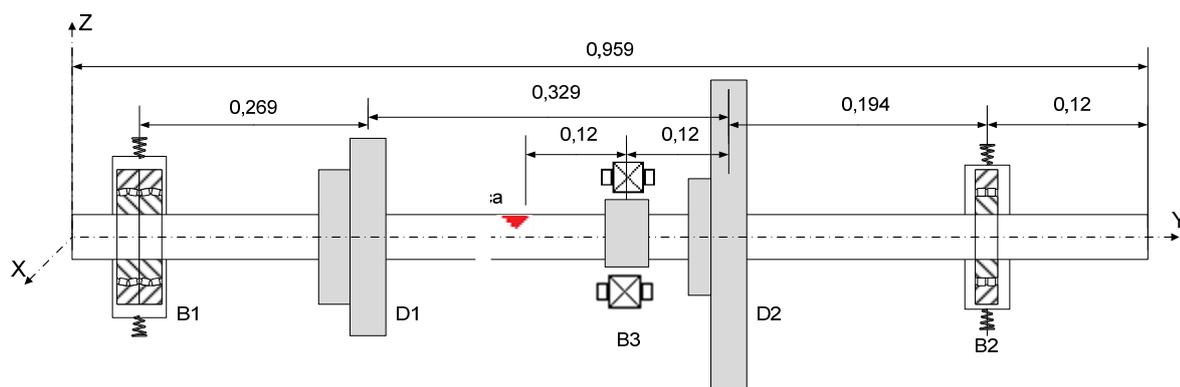


Figura 5.20 – Sistema considerado no estudo

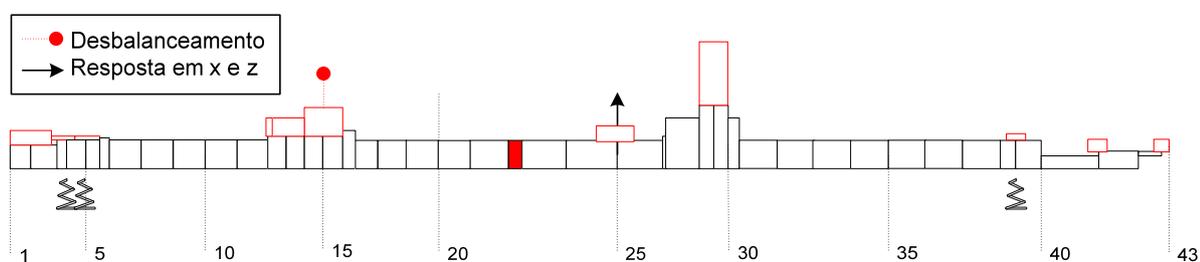


Figura 5.21 – Modelo de Elemento finitos do rotor

O modelo de trinca utilizado encontra-se descrito na seção 3.5. No fluxograma abaixo se apresenta a força do atuador eletromagnético dentro do modelo da trinca.

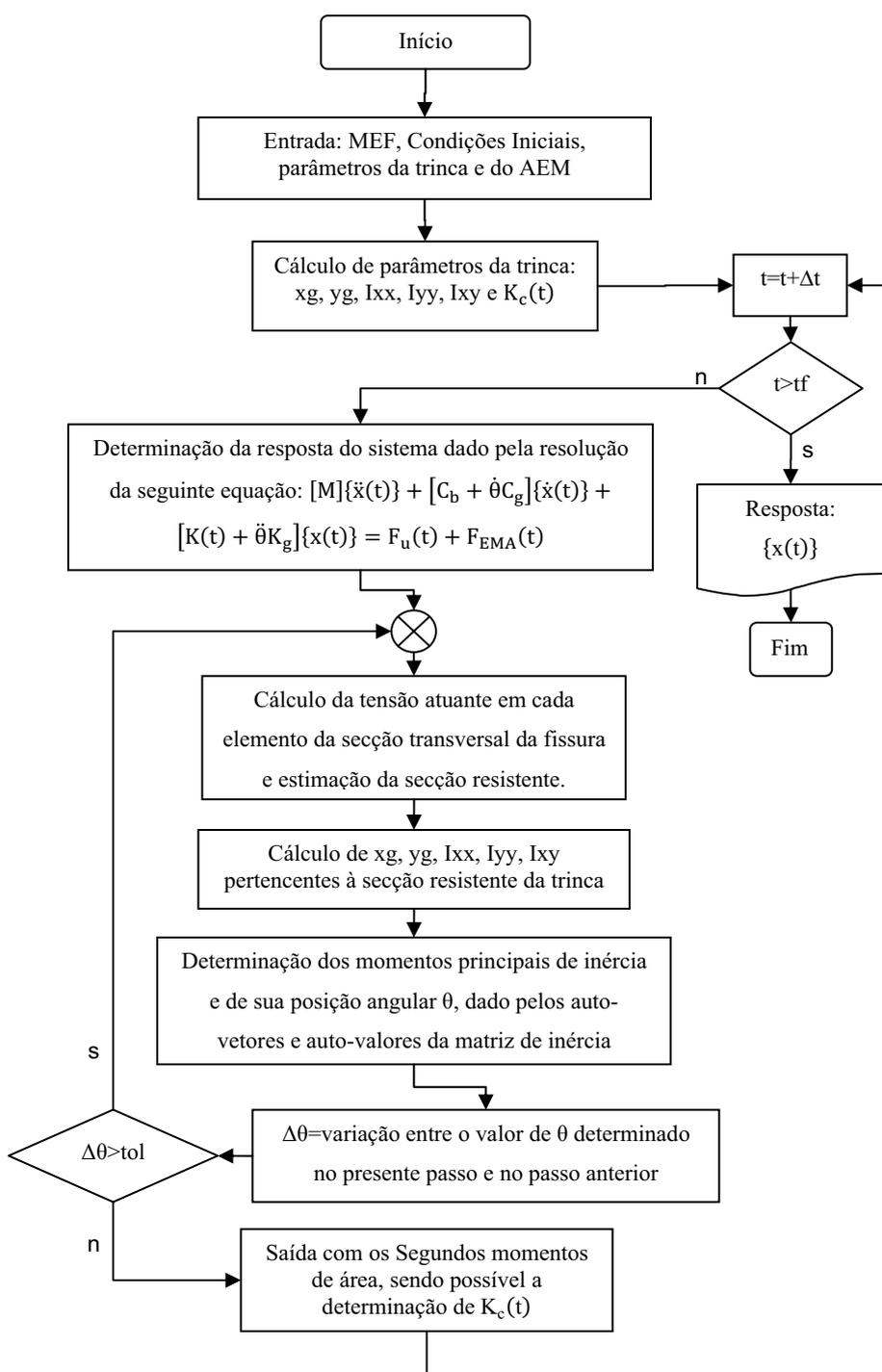


Figura 5.22 – Fluxograma para o cálculo iterativo do mecanismo de *breathing* com o atuador eletromagnético

O atuador eletromagnético considerado consiste de 4 bobinas eletromagnéticas, sendo que cada uma aplica forças de atração dadas pela Eq. (4.15). Na Fig. 5.23 pode-se verificar a configuração das bobinas do sistema. O

mesmo sistema, com pequenas modificações, é utilizado experimentalmente e, para isso, apresentado de forma mais detalhada no sub-capítulo 5.3, à frente.

Os valores dos parâmetros adotados para as bobinas são apresentados pela Tab. 5.2. Trata-se de valores plenamente compatíveis com a realidade, conforme observado acima.

Tabela 5.2 – Parâmetros considerados da bobina

$\mu_0$ [H/m]	Permeabilidade magnética no vácuo	1,2566E-06
$\mu_r$ [H/m]	Permeabilidade relativa	700
$N$ (espiras)	Número de espiras	78
$a$ [mm]	Dimensões da bobina	21
$b$ [mm]		84
$c$ [mm]		63
$d$ [mm]		21
$f$ [mm]		42
$e^*$ [mm]		Entreferro

As forças aplicadas pelo atuador eletromagnético são escritas como uma função inversa do quadrado do entreferro, Eq. (5.15). O entreferro é a distância da folga entre os materiais ferromagnéticos das bobinas, variando com a vibração do eixo e tornando o atuador eletromagnético um sistema não-linear.

A corrente usada para a alimentação de cada bobina foi projetada para exibir dois termos: uma corrente constante e uma corrente variável, sendo esta última dependente da posição angular da trinca. Essas correntes deverão produzir forças de atração suficientemente grandes para evitar a abertura total da trinca e não produzir um aumento significativo da vibração da estrutura, o que poderia agravar ainda mais a situação do rotor trincado. As correntes variáveis seguem uma lei senoidal e foram projetadas para apresentar o seguinte comportamento: sua inicialização se dá no momento em que o ponto  $P$  (ponto de localização da trinca)

passa para o lado oposto da bobina. As correntes variáveis atingem o máximo valor no momento em que o ponto  $P$  (trinca) está localizado totalmente oposto à bobina, ou seja, as correntes têm valor máximo quando a trinca está o mais distante possível da bobina. Esta corrente variável será zero quando o ponto  $P$  passar para o mesmo lado da bobina. Tal condição é apresentada na Fig. 5.23, onde uma corrente constante de 0,3 A foi usada em cada bobina. A configuração com correntes constantes e variáveis não é única e nem foi otimizada, mas foi adotada neste trabalho e algumas justificativas serão discutidas no momento oportuno.

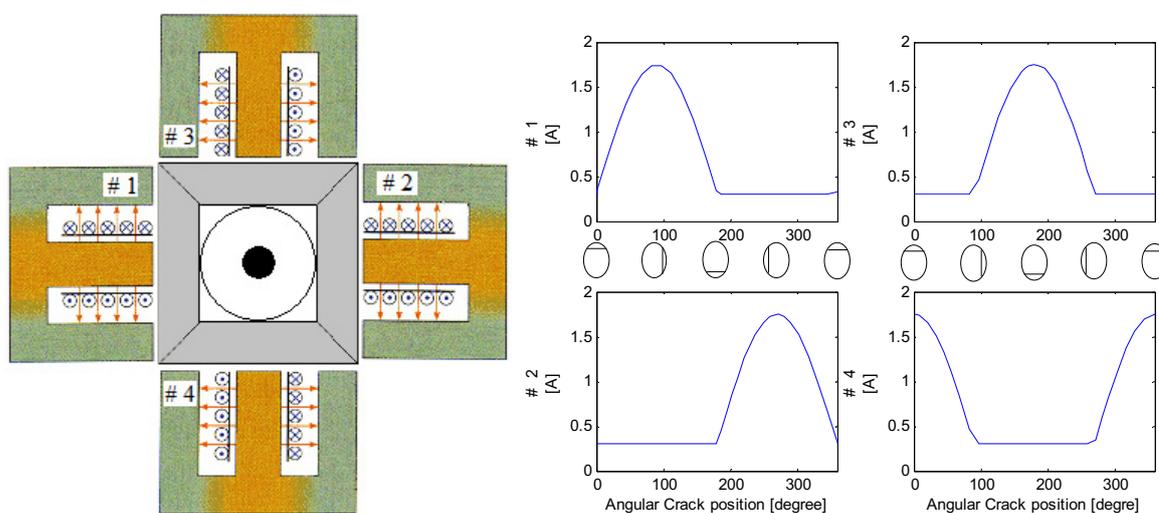


Figura 5.23 – Corrente elétrica em cada bobina em função da posição angular

### 5.2.2 Identificação das correntes de alimentação das bobinas

O objetivo neste ponto é criar uma técnica para determinar uma combinação das intensidades de correntes, dispostas conforme a configuração descrita no item anterior, que seja capaz de minimizar a abertura da trinca e, ao mesmo tempo, não aumentar o nível de vibração do sistema que possa induzir outros fatores indesejados. Para este propósito, foi utilizado o método de otimização conhecido como otimização por enxame de pontos (*particle swarm optimization* - PSO), método heurístico, pseudo aleatório. Mais detalhes encontram-se na seção 5.3. Para isso, foram considerados 120 indivíduos e 80 iterações. A função multi-objetivo leva em conta: i) a redução da abertura da área da trinca, Eq. (5.4), e ii) a minimização da vibração do sistema Eqs. (5.5) e (5.6). Utilizou-se a resposta nas direções X e Z na posição do atuador eletromagnético.

As variáveis consideradas no projeto são as seguintes: uma corrente constante adicionada a uma corrente variável em cada bobina, totalizando 8 variáveis de projeto. A faixa de variação da amplitude das correntes é de 0 a 5 A.

A secção do eixo na qual a trinca se encontra foi discretizada considerando 20 subdivisões em cada direção (x e z). Adotou-se uma quantidade baixa de divisões, pois durante o processo de otimização, para cada cálculo da função objetivo, o campo de tensão na região da trinca deve ser calculado para cada passo de tempo considerado na simulação. Este processo requer um custo computacional considerável, mesmo com esta baixa quantidade de subdivisões. Verificou-se através das simulações que, para valores acima de 16 subdivisões, os valores das correntes determinados pela otimização permaneciam constantes.

A Fig. 5.24 mostra o comportamento da resposta ao desbalanceamento para diferentes valores de corrente constante usada para a alimentação das bobinas. Observa-se que o nível de vibração, para uma velocidade de rotação constante, torna-se maior com o aumento da corrente, para uma velocidade de rotação baixa, e diminui com o aumento da corrente, para uma velocidade de rotação mais elevada. Isso se deve ao fato de que a velocidade crítica diminui em função do aumento da corrente aplicada. Assim, a utilização da parcela de corrente contínua se justifica,

pois, para determinadas velocidades de rotação, esse tipo de corrente contribui para diminuir a vibração do rotor.

Outro importante ponto para o uso da CC tem a ver com o rotor na posição horizontal, configuração em que o peso influencia significativamente a dinâmica da trinca. Finalmente, espera-se que o método de otimização utilizado seja capaz de encontrar valor nulo para a CC, dependendo da velocidade de rotação. Diferentes intensidades de correntes também são esperadas, dependendo da disposição (vertical ou horizontal) do rotor.

$$F_1 = \frac{\sum_{j=1}^{np} (S_j - Ar_j)^2}{\sum_{j=1}^{np} (S_j)^2} \quad (5.4)$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^{np} (x_j)^2 \quad (5.5)$$

$$F_3 = \sum_{j=1}^{np} (z_j)^2 \quad (5.6)$$

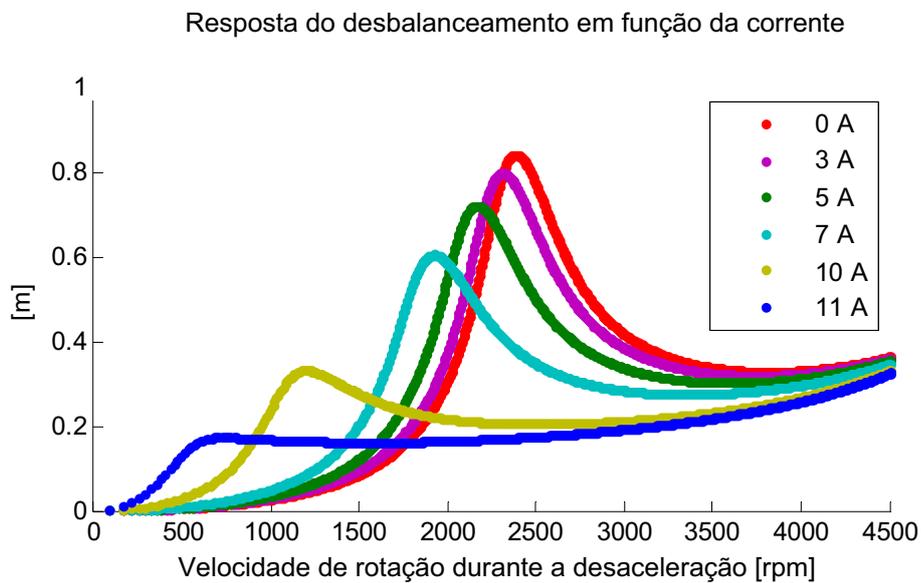


Figura 5.24 – Resposta ao desbalanceamento para um rotor sem trinca em função da corrente de alimentação do atuador eletromagnético.

### 5.2.3 Resultados e discussões

Dois estudos de casos serão apresentados, usando a configuração do sistema acima descrita. Primeiramente, o rotor flexível será simulado sem considerar a influência do seu peso, ou seja, é como se ele estivesse montado verticalmente, de forma que o peso não influencia a dinâmica da trinca. Depois, o peso do rotor será considerado (rotor horizontal) e a dinâmica da trinca terá grande influência no comportamento do sistema. Para ambas as simulações apresentadas, a profundidade da trinca será igual ao raio do eixo. Adotou-se este valor como referência, pois se espera que, caso seja possível controlar o processo de abertura e fechamento da trinca usando o atuador eletromagnético, profundidades de trincas menores serão mais facilmente controladas. O comprimento do elemento trincado foi determinado de acordo com a Fig. 3.14.

#### 5.2.3.1 Rotor Vertical

O sistema foi simulado considerando a força devido à aceleração da gravidade nula, assim, o comportamento do “*breathing*” da trinca é governado em função apenas dos esforços dinâmicos da estrutura. Um desbalanceamento de 80 g.cm e fase  $0^{\circ}$  foi aplicado no disco  $D_1$ , a uma velocidade de rotação de 1500 RPM.

Os resultados encontrados pelo método de otimização para as correntes constantes foi de zero para todas as bobinas. Assim, para a manutenção da trinca fechada, nesta configuração da estrutura, somente as correntes variáveis foram necessárias e os valores encontrados para a amplitude são: 1,801 A para a bobina #1, 1,799 A para a bobina #2 e 0,333 A para as bobinas #3 e #4. Como pode ser visto na Fig. 5.24, a corrente contínua nas bobinas faz o nível de vibração aumentar para a velocidade de rotação de 1500 RPM, considerada na simulação. Este comportamento, dado pela Fig. 5.24, justifica os valores nulos encontrados pelo método de otimização, para as correntes contínuas. Estes resultados foram considerados, utilizando as correntes encontradas pela otimização, para um tempo de amostragem de 1 segundo e com a região da trinca remalhada considerando 100 subdivisões. Com o objetivo de mostrar a diferença no comportamento da trinca,

com e sem a participação do AEM, desligou-se o atuador eletromagnético quando a simulação completou 0,7 segundo.

Na Fig. 5.25, apresenta-se a resposta medida na posição do atuador eletromagnético nas direções  $X$  e  $Z$ , respectivamente. As Figuras 5.26 e 5.27 apresentam o comportamento, em função do tempo, da secção transversal do eixo na posição da trinca. A Fig. 5.26 mostra o comportamento da área da trinca e a Fig. 5.27, os momentos de inércia de área. A trinca é mantida praticamente fechada durante o tempo em que o atuador eletromagnético está ligado. Na Fig. 5.28 apresentam-se as correntes determinadas pela otimização e que foram aplicadas nas bobinas e, na Fig. 5.29, ilustra-se as forças aplicadas pelo atuador. Observa-se que, para a configuração apresentada pelas correntes, dada pela Fig. 5.28, a força eletromagnética atuante na direção de  $X$  é consideravelmente maior que a aplicada na direção de  $Z$ , sendo possível o controle a partir de um atuador com somente um par de bobinas. De qualquer forma, vale a pena salientar que as forças envolvidas são plenamente factíveis do ponto de vista experimental.

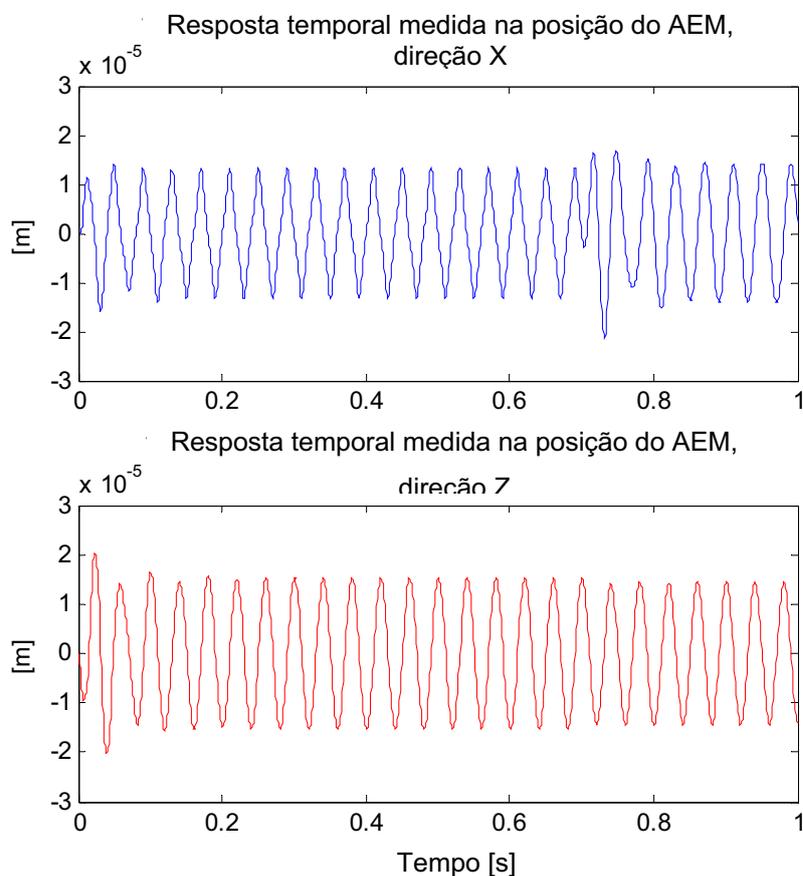


Figura 5.25 – Resposta do sistema na posição do atuador eletromagnético

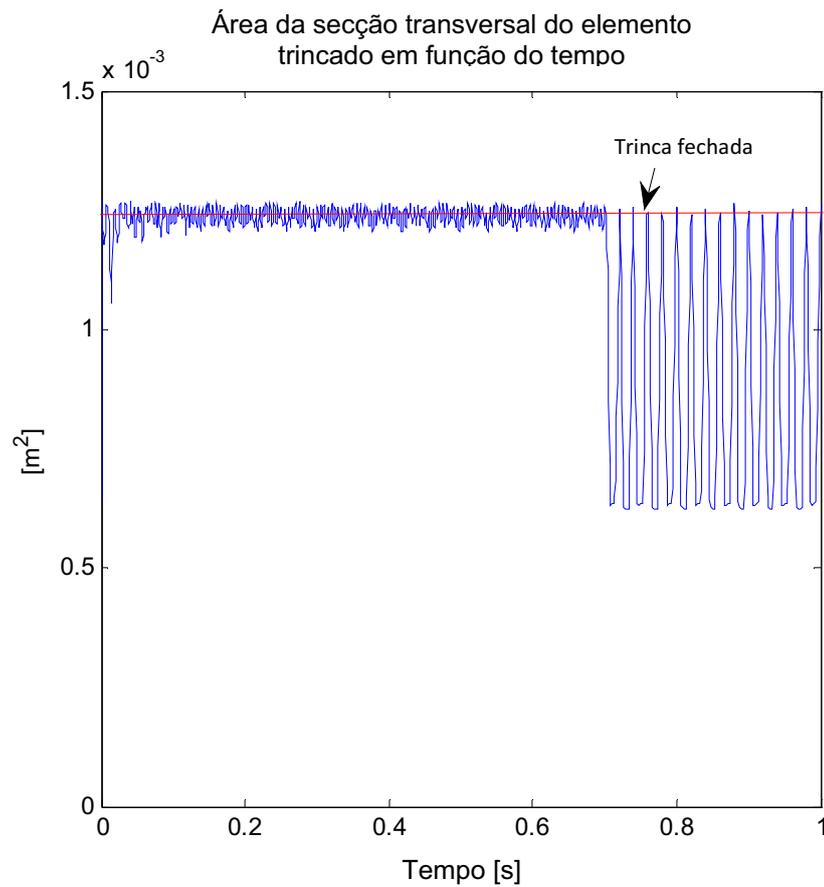


Figura 5.26 – Área da secção transversal do elemento com trinca.

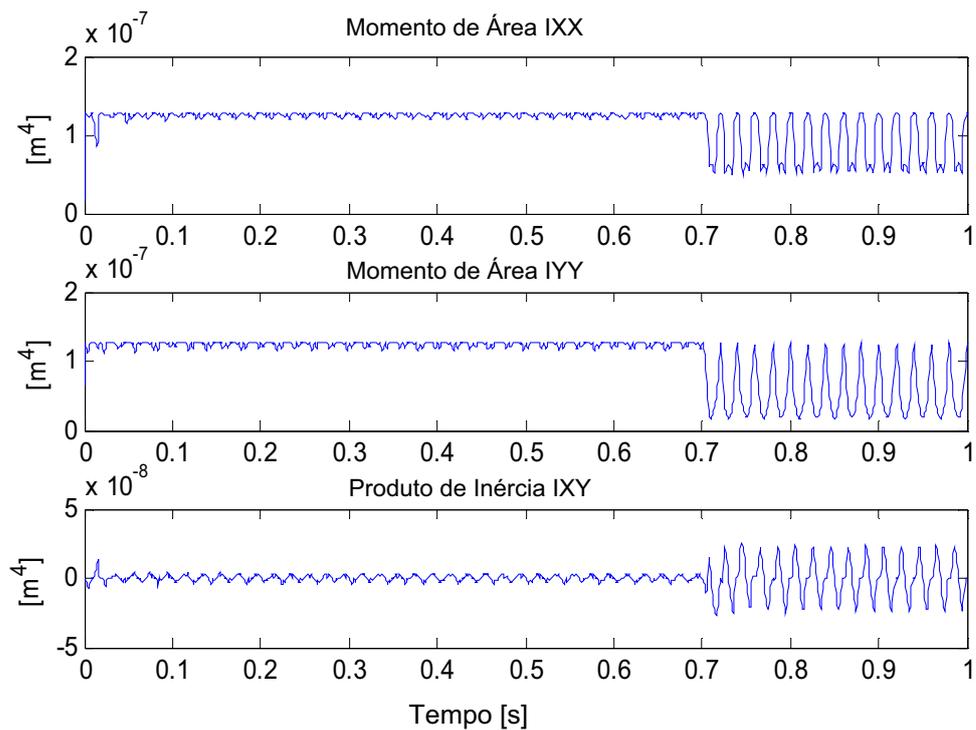


Figura 5.27 – Momentos e produto de inércia de área

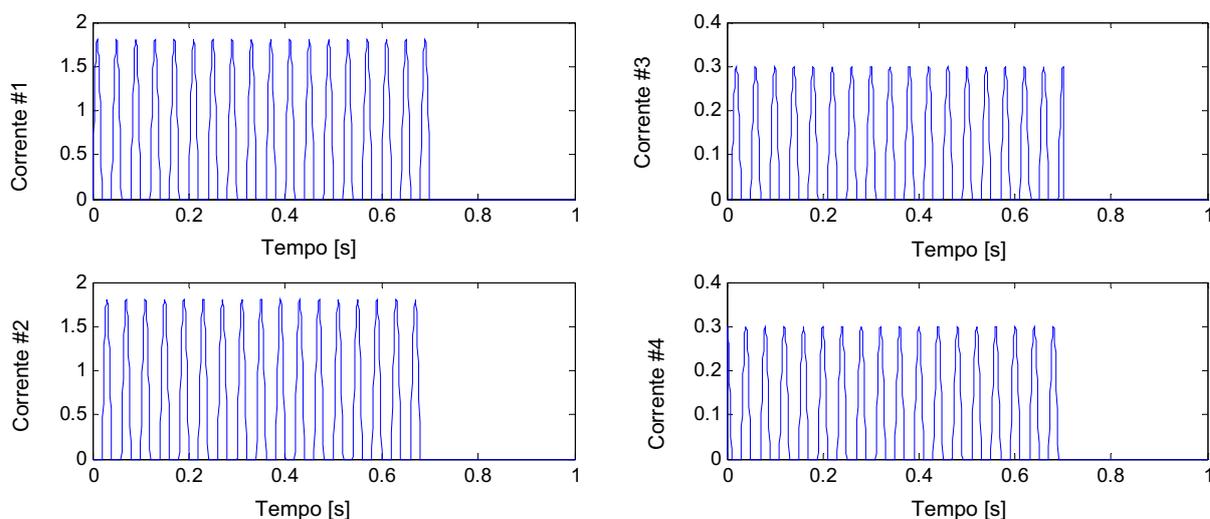


Figura 5.28 – Correntes identificadas e utilizadas no atuador

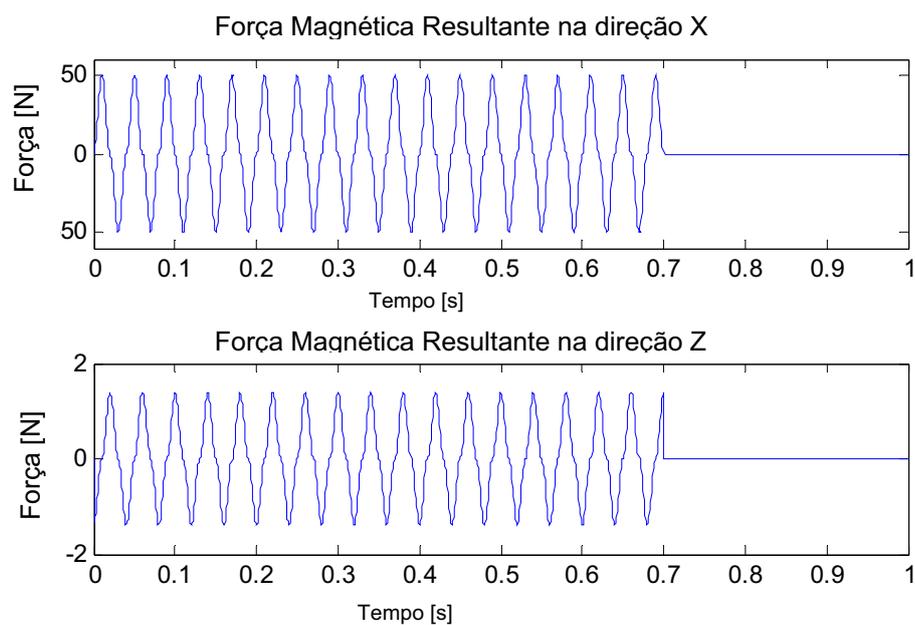


Figura 5.29 – Forças introduzidas para o controle do mecanismo de *breathing*.

Na Fig. 5.30 observa-se, para o rotor na posição vertical, que a aplicação da força eletromagnética provoca uma alteração no sentido da órbita do rotor.

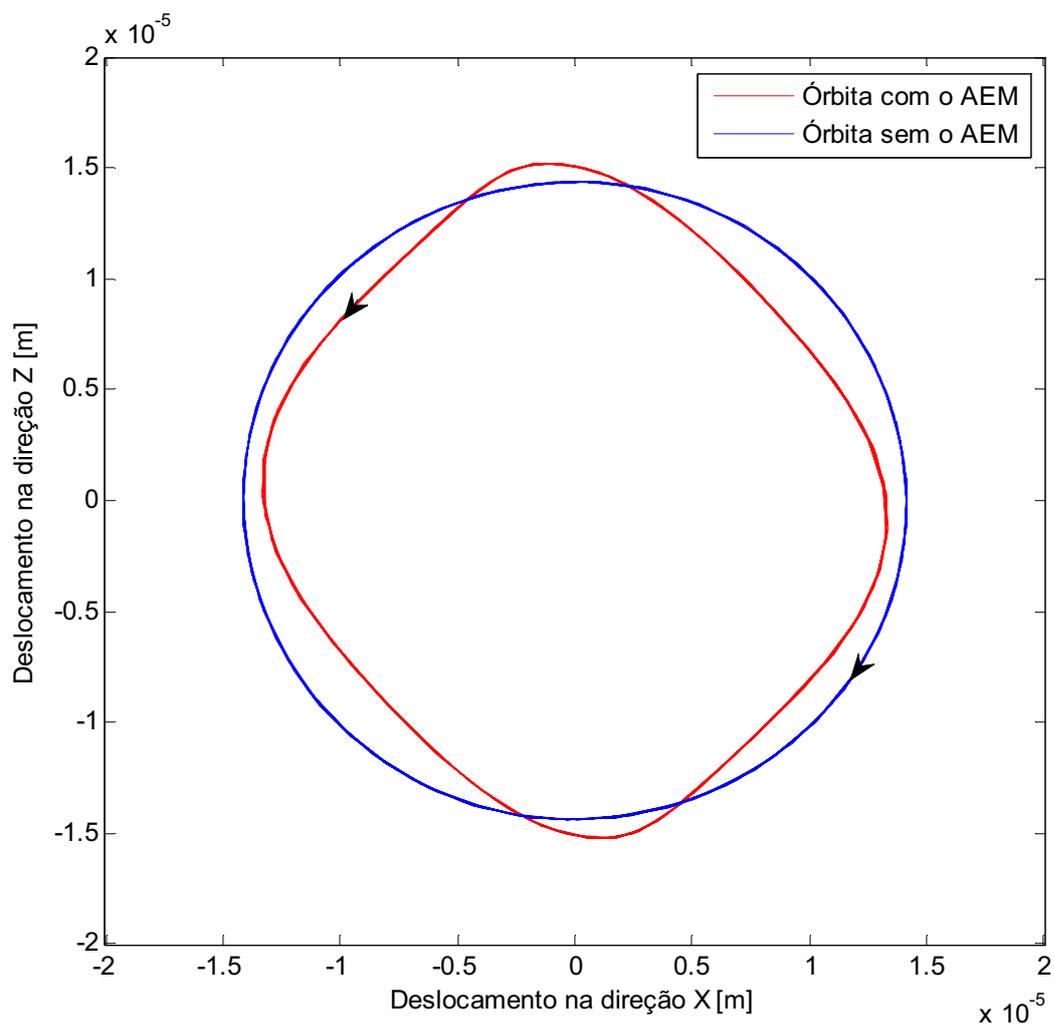


Figura 5.30 – Mudanças da Órbita do rotor devido à introdução das forças eletromagnéticas

### 5.2.3.2 Rotor Horizontal

Neste caso, o comportamento da trinca é função dos esforços dinâmicos e do peso da estrutura. Sabe-se que o peso provoca uma deflexão do eixo que assume a forma de uma meia-senóide, devido a sua deformação, fazendo com que a trinca fique mais evidente. O mesmo desbalanceamento e velocidade de rotação adotados no caso anterior foram aqui mantidos.

Os resultados encontrados pelo método de otimização, para as correntes contínuas, foi zero para todas as bobinas, exceto para a bobina #3, para a qual foi encontrado o valor de 3,105 A. Para as correntes variáveis, as amplitudes obtidas

foram as seguintes: 2,277 A para a bobina #1, 2,277 A para a bobina #2, 0,435 A para a bobina #3, e 0,081 A para a bobina #4.

Semelhantemente ao que foi feito no caso anterior, a resposta do sistema foi obtida durante 1 segundo e, depois de 0,7 segundo, o atuador eletromagnético foi desligado.

Na Fig. 5.31, apresenta-se a resposta temporal na posição do atuador eletromagnético, respectivamente ao longo das direções X e Z. Nas Figuras 5.32 e 5.33 apresenta-se o comportamento em função do tempo da secção transversal do eixo na posição da trinca. A Fig. 5.32 mostra o comportamento da área e a Fig. 5.33, mostra os momentos de inércia de área. A trinca é mantida praticamente fechada durante o tempo em que o atuador eletromagnético está ligado. Na Fig. 5.34 estão as correntes aplicadas nas bobinas e na Fig. 5.35 apresentam-se as forças aplicadas pelo atuador para manter a trinca fechada. Como anteriormente observado para o caso do rotor vertical, os valores das correntes e das forças indicam que o procedimento é plenamente factível do ponto de vista experimental.

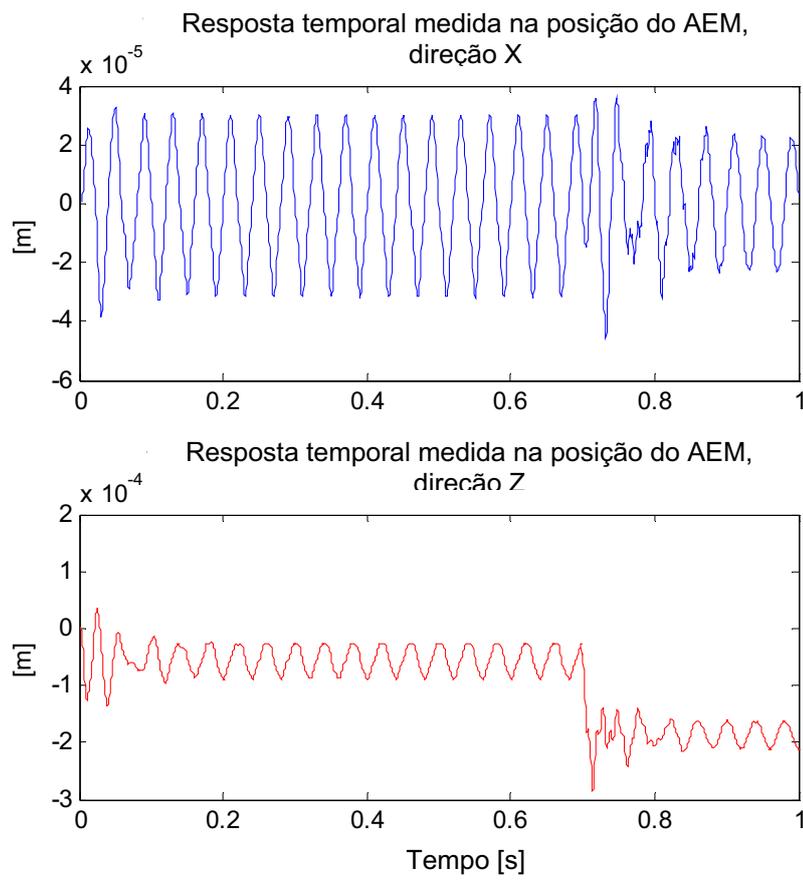


Figura 5.31 – Resposta do sistema na posição do atuador eletromagnético.

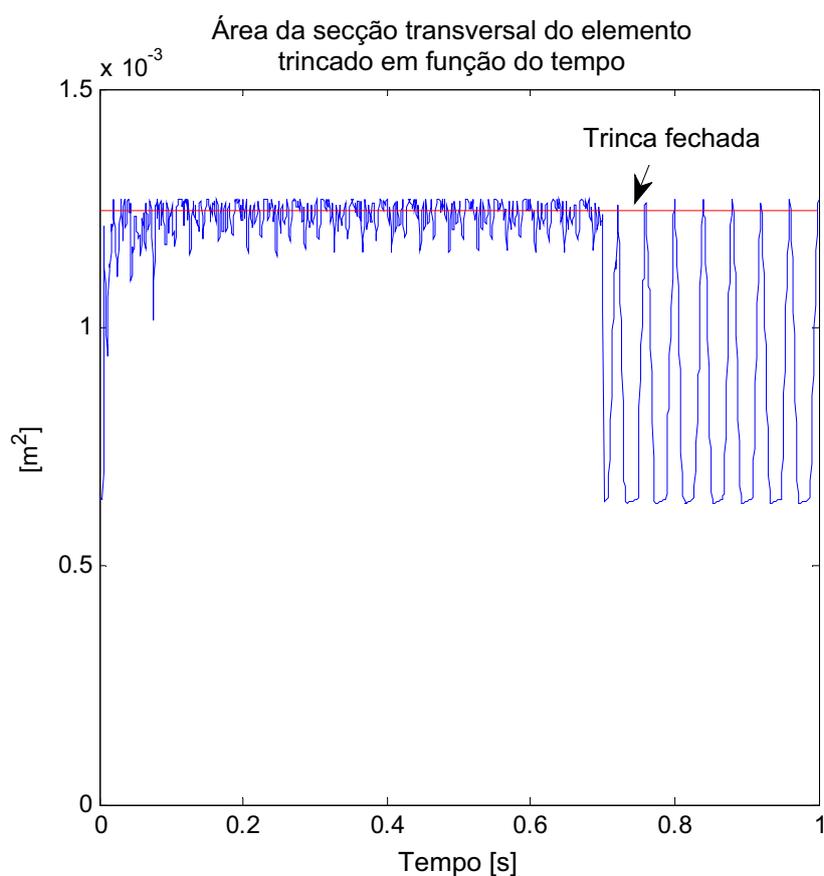


Figura 5.32 – Área da secção transversal do elemento com trinca.

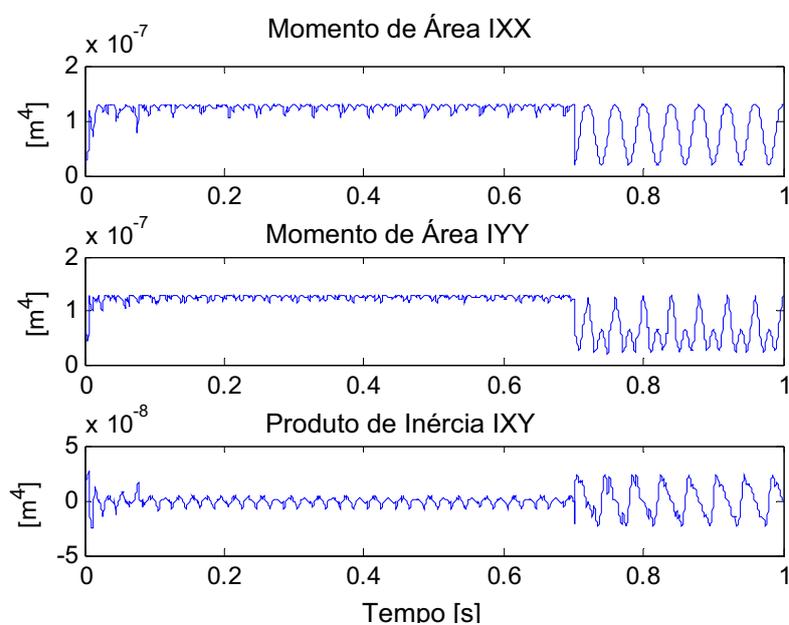


Figura 5.33 – Momentos e produto de inércia

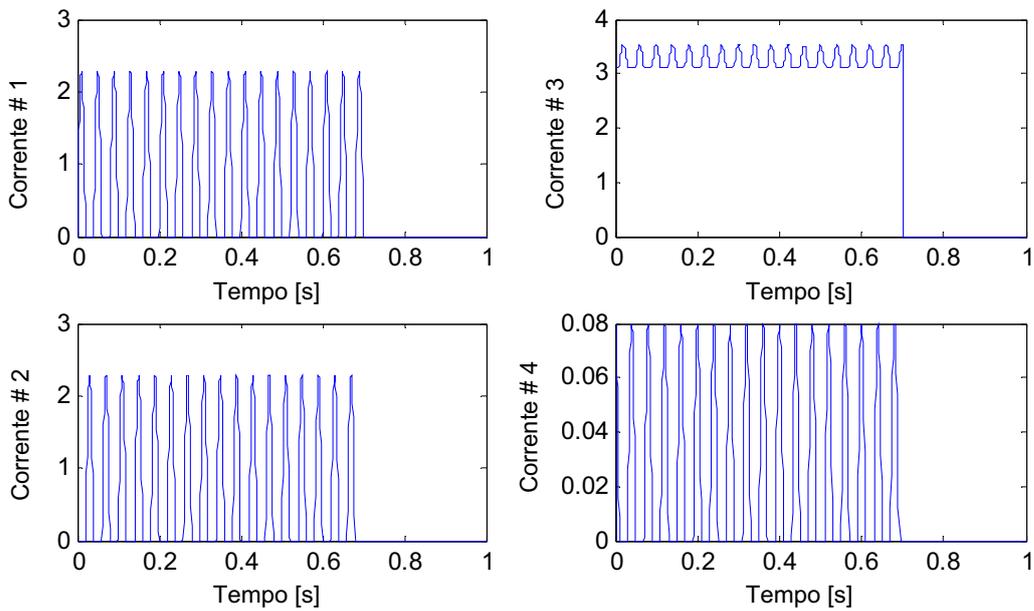


Figura 5.34 – Correntes identificadas e utilizadas no atuador

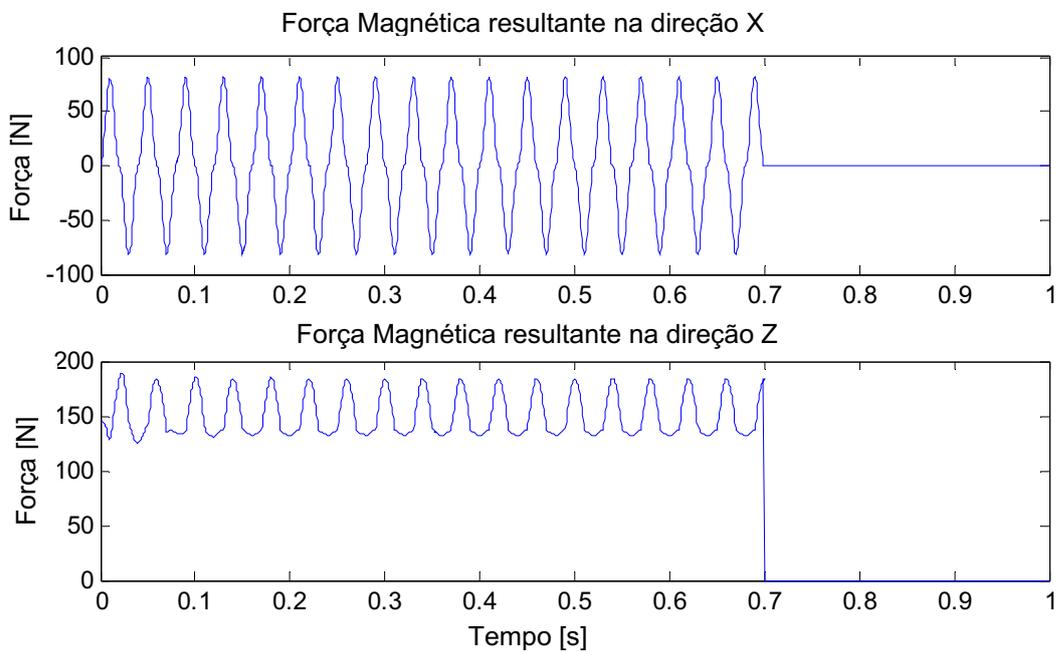


Figura 5.35 – Forças introduzidas para o controle do mecanismo de *breathing*

#### 5.2.4 Considerações parciais

Demonstrou-se a possibilidade de controle do processo de fadiga de uma máquina rotativa através de atuadores eletromagnéticos. Para a identificação da corrente de alimentação dos atuadores é necessário que o modelo seja validado: rotor flexível e atuador eletromagnético. Experimentalmente seria necessário medir a área da secção transversal resistente da trinca para diferentes instantes de tempo, carregamentos dinâmicos e correntes elétricas envolvidas. Por outro lado, os resultados de simulação indicam a viabilidade de utilização experimental das técnicas apresentadas.

Espera-se que as correntes de alimentação mantenham a trinca fechada quando aplicadas em um sistema rotativo real. O fechamento da trinca ocorre devido a uma alteração da órbita do rotor. Verificou-se que o nível de vibração da estrutura manteve-se praticamente constante, como mostrado pelas Fig. 5.25 e Fig 5.31. Conforme anteriormente mencionado, ao se considerar o valor da força eletromagnética usada, verifica-se que esta é experimentalmente plausível, como se vê nas Figs. 5.29 e 5.35. Os resultados são apresentados para uma velocidade de rotação específica. Um próximo passo seria observar o comportamento do sistema para diferentes faixas de velocidades de rotação, utilizando controladores de alta performance, tais como controladores *neuro-fuzzy*, por exemplo.

### **5.3 Estudo de Caso 4 - Identificação do Desbalanceamento em Máquinas Rotativas Não-Lineares e sua Correção**

A não-linearidade causada pelos atuadores eletromagnéticos em máquinas rotativas impossibilita o uso do método dos coeficientes de influência para o seu balanceamento. Isso se deve ao fato de que esta metodologia de balanceamento (CI) requer uma relação linear entre a excitação e a resposta do sistema. No entanto, se esta relação de linearidade entre o desbalanceamento (entrada) e a resposta do sistema rotativo não for satisfeita, a aplicação desta metodologia torna-se inadequada a determinação das massas de correção pode até mesmo levar ao aumento do nível de vibração do rotor. Aqui será apresentada uma metodologia de balanceamento, baseada no modelo, para máquinas rotativas lineares e não-lineares através de métodos de otimização pseudo-aleatórios. Esta técnica, apesar de requerer um maior custo computacional, apresenta uma boa convergência e dispensa o uso de massas de teste. Como se utiliza uma técnica heurística de otimização para a solução do problema inverso, a região do mínimo global da função objetivo no espaço de busca considerado é encontrada em algumas iterações e são evitados automaticamente os mínimos locais. Os métodos clássicos de otimização, baseados no cálculo do gradiente, levam com frequência a mínimos locais, provocando, em alguns casos, convergência prematura.

A metodologia proposta consiste em distribuir o desbalanceamento ao longo do eixo e procurar e/ou identificar massas de correção, podendo estas estar localizadas na mesma posição do desbalanceamento hipotético distribuído, ou em posições distintas, mas sempre objetivando reduzir o nível de vibração do sistema. Assim, nos exemplos simulados que serão apresentados na seção 5.4, realizou-se uma busca das massas de correção, limitando os intervalos dos nós para os locais em que se espera encontrar o desbalanceamento ou para os locais plausíveis de serem introduzidas as massas de correção. Procurou-se esta alternativa (limitação dos intervalos de busca para a introdução da massa de correção), pois a maioria das máquinas rotativas não permite a colocação de massas de correção de forma indiscriminada ao longo de toda extensão do eixo.

Assim, as variáveis de projeto consideradas durante o processo de otimização serão, para cada desbalanceamento considerado, as seguintes: a posição da massa desbalanceada ao longo do eixo, a amplitude deste desbalanceamento e a fase (posição angular). Sendo assim, três variáveis são introduzidas para cada um dos desbalanceamentos considerados.

O processo de otimização usado para resolver o problema inverso foi conduzido a partir de duas técnicas heurísticas principais, a saber, os Algoritmos Genéticos e o PSO – otimização por enxame de partículas (*Particle Swarm Optimization*). Ambas as técnicas apresentaram bons resultados, mas o segundo apresentou maior robustez na identificação e menor tempo de processamento. Este método foi desenvolvido pelo psicologista social James Kennedy e pelo engenheiro eletricitista Russel Eberhart, conforme registra o artigo Kennedy e Eberhart (1995). Esta técnica surgiu a partir do desenvolvimento de algoritmos inspirados no comportamento social de algumas espécies de pássaros.

No modelo matemático adotado para o PSO, um “enxame de partículas” é gerado aleatoriamente em um determinado espaço de busca. Dentro deste espaço, cada partícula corresponde a uma possível solução, representada por sua posição no espaço de busca, para um dado problema. As partículas têm associado um valor de velocidade e também realizam um deslocamento sob a ação de três vetores que se somam. Essas influências são chamadas pelos proponentes do método, de inércia, memória e comparação. O primeiro vetor impele a partícula em uma direção idêntica à que ela vinha seguindo. A memória atrai a partícula na direção da melhor posição até o momento ocupada pela partícula dentro da sua vida (histórico da partícula específica). O último vetor atrai a partícula na direção do melhor ponto do espaço até o momento, descoberto pelo “enxame” (histórico de todas as partículas). Assim, considera-se tanto a decisão própria de uma partícula isolada, como a que provém do grupo (enxame) como um todo. A título de ilustração, a Fig. 5.36 demonstra um exemplo de deslocamento de uma partícula, da posição  $x_{i-1}$  para a posição  $x_i$ , fazendo uso dos vetores mencionados. Mais detalhes da implementação do método PSO podem ser vistos no quadro abaixo.

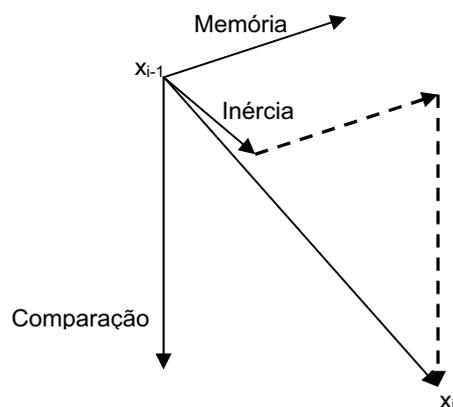
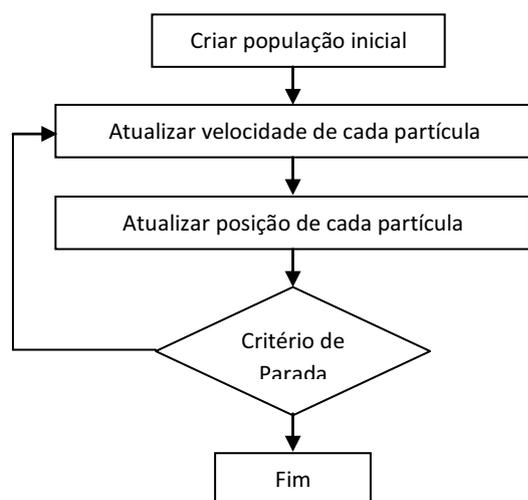


Figura 5.36 - Movimento de uma partícula do PSO e fluxograma representativo

O primeiro passo para a implementação do método é a geração das  $N$  partículas com suas respectivas posições no espaço de busca que formarão o enxame. Para cada partícula gerada, é associada a um vetor velocidade. O algoritmo atualiza os vetores de velocidade e posição até que algum critério de parada seja atingido.



O vetor velocidade de cada partícula é atualizado por  $v_{k+1}^i = \omega v_k^i + c_1 r_1 \frac{(p^i - x_k^i)}{\Delta t} + c_2 r_2 \frac{(p_k^g - x_k^i)}{\Delta t}$ . Na qual,  $v_k^i$  é a velocidade atual da partícula,  $p^i$  é a melhor posição encontrada pela partícula  $i$ ,  $p_k^g$  é a melhor posição dentre todas as partículas na iteração  $k$ ,  $w$  é um parâmetro que representa a inércia da partícula e controla a sua capacidade de exploração do espaço de soluções. Um valor alto determina uma busca global enquanto um valor baixo determina uma busca local.

Usualmente estes valores oscilam entre 0,4 e 1,4.  $c_1$  e  $c_2$  são os chamados parâmetros de confiança e definem o quanto uma partícula confia em si ( $c_1$ ) ou no bando ( $c_2$ ). Usualmente ambos assumem o valor igual a dois, e  $r_1$  e  $r_2$  são números aleatórios compreendidos entre zero e um. O cálculo da posição é dado por:  $x_{k+1}^i = x_k^i + \Delta t v_{k+1}^i$ .

Assim, PSO é uma técnica de otimização global aplicada, com bons resultados em problemas em que a melhor solução pode ser representada como um ponto ou uma superfície no espaço  $n$ -dimensional. Mais detalhes podem ser vistos em Kennedy e Eberhart (1995); Pomeroy (2003); Viana (2008).

### 5.3.1 Modelagem do sistema rotativo usada nas simulações e no experimento

Para a modelagem do sistema rotativo utilizou-se o método dos elementos finitos para a discretização da estrutura. As matrizes de massa, rigidez e giroscópica podem ser encontradas em Lalanne e Ferraris (1998). A resposta dinâmica do sistema considerado é representada pela Eq. (5.3), porém sem a inclusão de trinca no eixo, onde a matriz de rigidez é constante. Inicialmente, procurou-se validar as rotinas computacionais desenvolvidas para a geração do modelo de elementos finitos geradas em MatLab© e Simulink©, através de um programa comercial desenvolvido e aplicado a esta finalidade. Este programa, denominado Rotor-Insa©, desenvolvido originalmente por Guy Ferraris e Michel Lalanne, é um programa consolidado e validado por inúmeros trabalhos desenvolvidos pelo LamCos (*Laboratoire des Mécanique des Contacts et des Structure, Institut National de Sciences Appliquées de Lyon, França*) e pela indústria. Considerou-se, neste caso, o efeito da variação da área da secção transversal da matriz de rigidez e também na matriz giroscópica e uma correção desta área como proposto pelo trabalho Hutchinson (2001).

O sistema estudado durante as simulações e no experimento é composto de um eixo horizontal flexível com diâmetro de 0,04 m e por dois discos rígidos, ambos de aço. O eixo é suportado por mancais localizados em suas extremidades, da seguinte forma: um mancal de rolamento cilíndrico, em uma extremidade e, na outra, dois rolamentos esféricos. O rolamento cilíndrico está localizado dentro de uma caixa metálica constituída por material ferromagnético que é suportada por três vigas idênticas, como pode ser visto na Fig. 5.37.

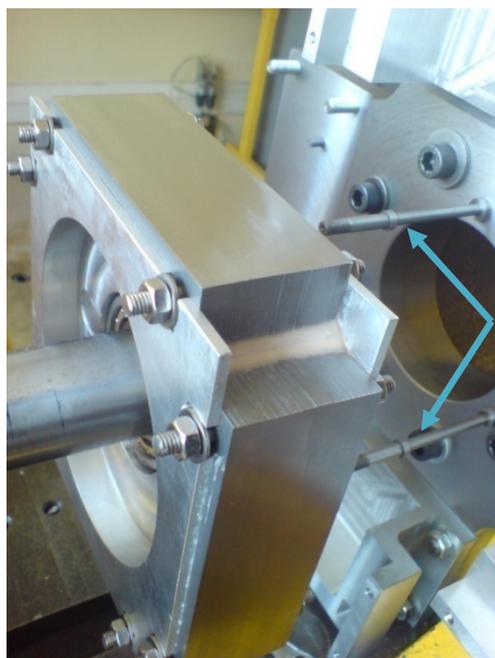


Figura 5.37 – Caixa metálica de material ferromagnético onde se encontra o rolamento. As vigas indicadas são usadas como suporte para a caixa metálica.

O atuador eletromagnético localiza-se na parte externa da caixa metálica, constituindo um sistema de mancal inteligente e acrescenta não-linearidade à dinâmica do sistema. Quatro atuadores eletromagnéticos (AEM) “idênticos”, nos quais atuam correntes constantes, foram utilizados. Estes atuadores são constituídos por quatro bobinas elétricas, como mostradas na Fig. 5.38. As bobinas constituem o circuito elétrico do atuador que possui um circuito ferromagnético associado. O circuito ferromagnético apresenta duas partes: uma parte na forma de (E), onde a bobina é inserida; e uma parte na forma de (I), que é formada pela caixa metálica apresentada nas Fig. 5.37 e 5.38. Cada AEM apresenta os parâmetros mostrados na Fig. 5.39. Um motor elétrico localizado nesta mesma extremidade do eixo pode acelerar o rotor a uma velocidade de até 10.000 RPM. O sistema completo é apresentado na Fig. 5.40.

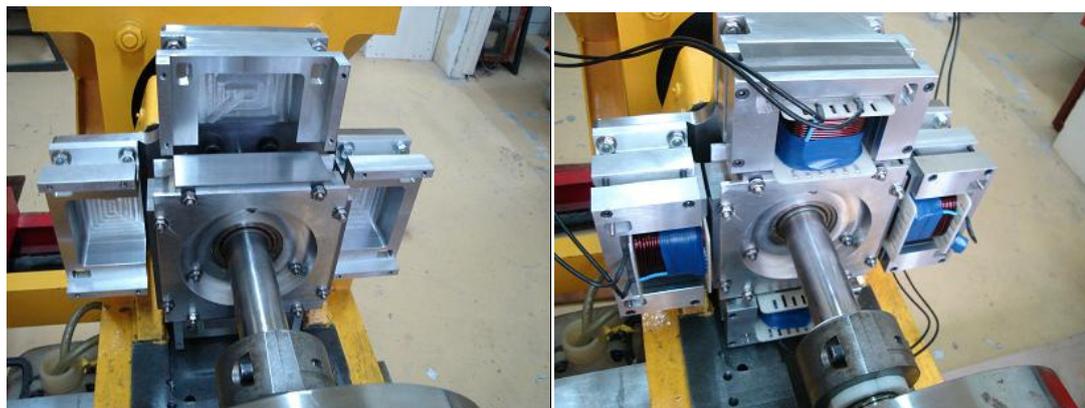


Figura 5.38 – Montagem do atuador eletromagnético

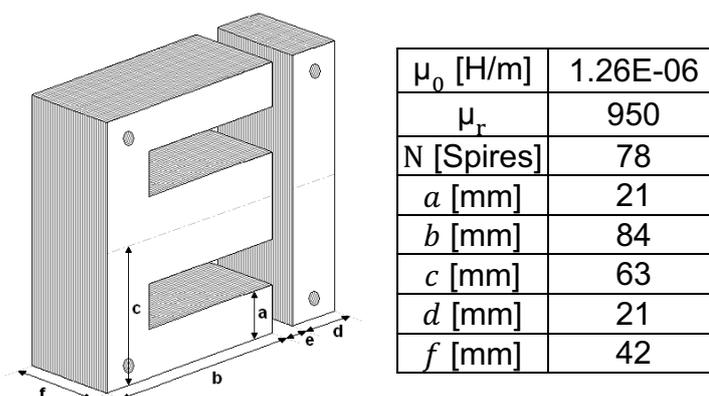


Figura 5.39 – Parâmetros do circuito Ferromagnético

Para a modelagem de elementos finitos, o rotor foi discretizado em 43 nós, como pode ser observado na Fig. 5.42. Utilizaram-se nas simulações os seguintes parâmetros para os mancais:  $2,0 \times 10^8$  N/m na direção  $x$  e  $2,2 \times 10^8$  N/m na direção  $z$ , para a rigidez, e 800 Ns/m nas duas direções, para o amortecimento do mancal da esquerda, e  $0,1 \times 10^7$  N/m na direção  $x$ , e  $0,11 \times 10^7$  na direção  $z$ , para a rigidez, e 800 Ns/m nas duas direções, para o amortecimento do mancal da direita. Estes valores dos parâmetros dos mancais usados para as simulações são somente a título de exemplo. No capítulo 6 esses valores foram determinados experimentalmente.

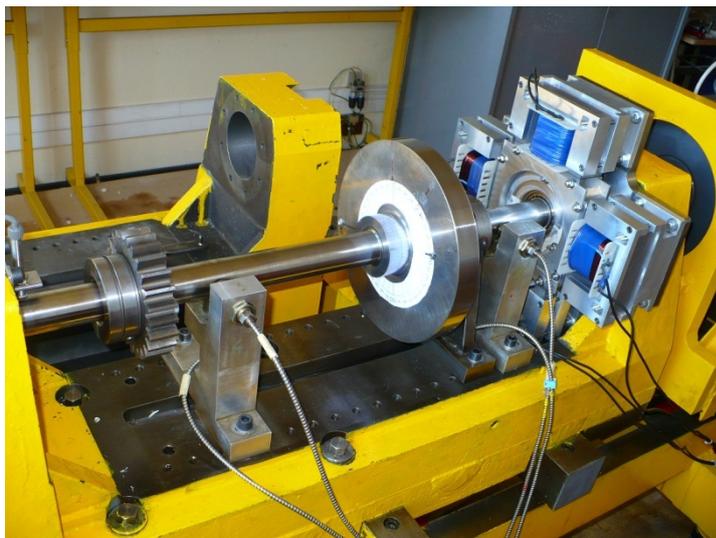


Figura 5.40 – Sistema rotativo completo com o atuador eletromagnético e os sensores de deslocamento

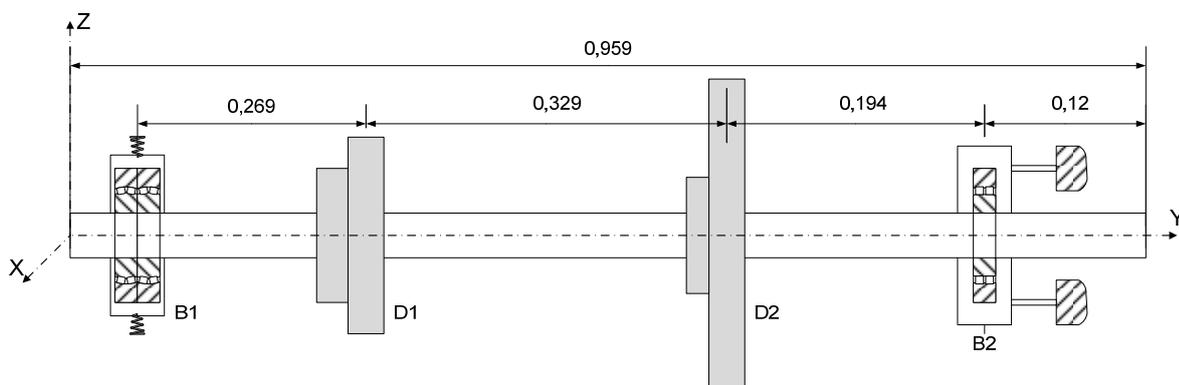


Figura 5.41 – Representação esquemática do sistema estudado

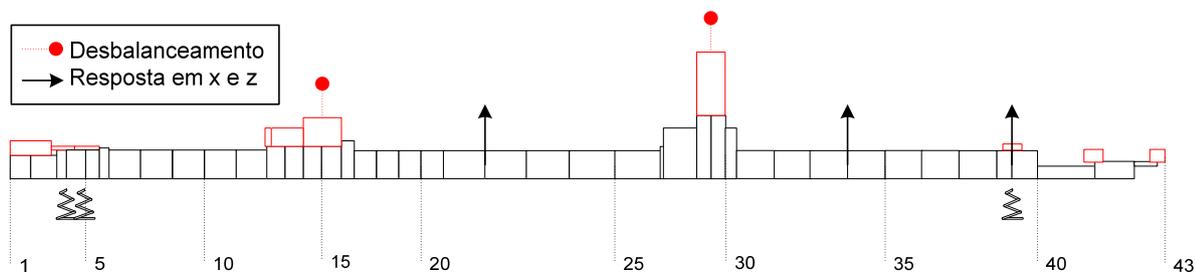


Figura 5.42 – Modelo de elementos Finitos

Primeiramente, apresenta-se a influência do atuador no comportamento dinâmico do rotor. Observa-se a influência da variação de alguns parâmetros na resposta do sistema. Na seção seguinte apresentam-se as simulações referentes ao processo de identificação do desbalanceamento, por meio da metodologia proposta, tanto para o sistema linear como para, posteriormente, o sistema não-linear. Por fim, os resultados experimentais são apresentados, validando esta metodologia.

### 5.3.2 Comportamento dinâmico do sistema para diferentes parâmetros do atuador eletromagnético

Como se sabe, o atuador eletromagnético aplica forças inversamente proporcionais ao quadrado do entreferro (Eq. (4.15)). Assim, a variação do entreferro devido à vibração causa alterações nas forças eletromagnéticas que, por sua vez, atuam sobre o rotor provocando variações na resposta do sistema, evidenciando a não-linearidade do sistema. Serão analisadas algumas variações resultantes do aumento da não-linearidade, como consequência de um aumento da força eletromagnética introduzida pelo atuador. O aumento da corrente de alimentação do atuador e/ou a redução da distância do entreferro fazem aumentar a não-linearidade. Como o aumento do nível de vibração reduz a distância do entreferro, o desbalanceamento e a proximidade de velocidades críticas provocam também um aumento da não-linearidade.

Inicialmente o sistema em estudo foi considerado em repouso (rotação nula). Aplicaram-se duas forças de excitação harmônica na posição do primeiro disco,  $D_1$ , nas direções  $x$  e  $z$ , defasadas de  $90^\circ$ . A excitação harmônica defasada, aplicada nas duas direções, faz com que o rotor parado apresente uma órbita parecida com a que resulta de uma excitação devido ao desbalanceamento, porém sem considerar as influências giroscópicas. Inicialmente, considerou-se a amplitude da força constante como sendo de 400 N e o entreferro de 1 mm. Depois, reduziu-se a amplitude da força para 80 N e o entreferro para 0,5 mm; considerou-se a frequência de ambos variando entre 10,47 rad/s e 523,59 rad/s (equivalentes a 100 e 5.000 RPM, respectivamente), em 30 segundos (*runup*). Na Fig. 5.43, observa-se a resposta do

sistema na posição do AEM para o primeiro caso (força de 400 N e entreferro de 1 mm) na qual cada curva representa a resposta do sistema para uma determinada corrente contínua aplicada no AEM (escolheu-se apresentar os resultados com a frequência em RPM para facilitar a compreensão quando da comparação com o rotor girando). Na Fig. 5.44 tem-se a resposta na mesma posição, considerando o segundo caso (força de 80 N e entreferro de 0,5 mm). Verifica-se que o aumento da não-linearidade, associado ao aumento da corrente, desloca as “velocidades críticas” para a esquerda. Outra constatação que pode ser feita é que a máxima corrente aplicada, antes de ocorrer contato entre a caixa metálica e a bobina foi de 5,6 A no primeiro caso e de 4,57 A para o segundo caso. Com essas correntes, o deslocamento da frequência natural do sistema foi relativamente maior para o segundo caso que para o primeiro, mesmo sendo a corrente do primeiro caso maior que a usada no segundo. Isso se deve ao fato de que a relação entre a força não-linear aplicada pelo AEM e a força harmônica de excitação externa é bem maior para o segundo caso do que para o primeiro, fazendo com que o sistema no segundo caso apresente maior não-linearidade que o primeiro. Mais detalhes sobre o método para a resolução da equação diferencial que governa a dinâmica do sistema serão dados na seção 5.4.

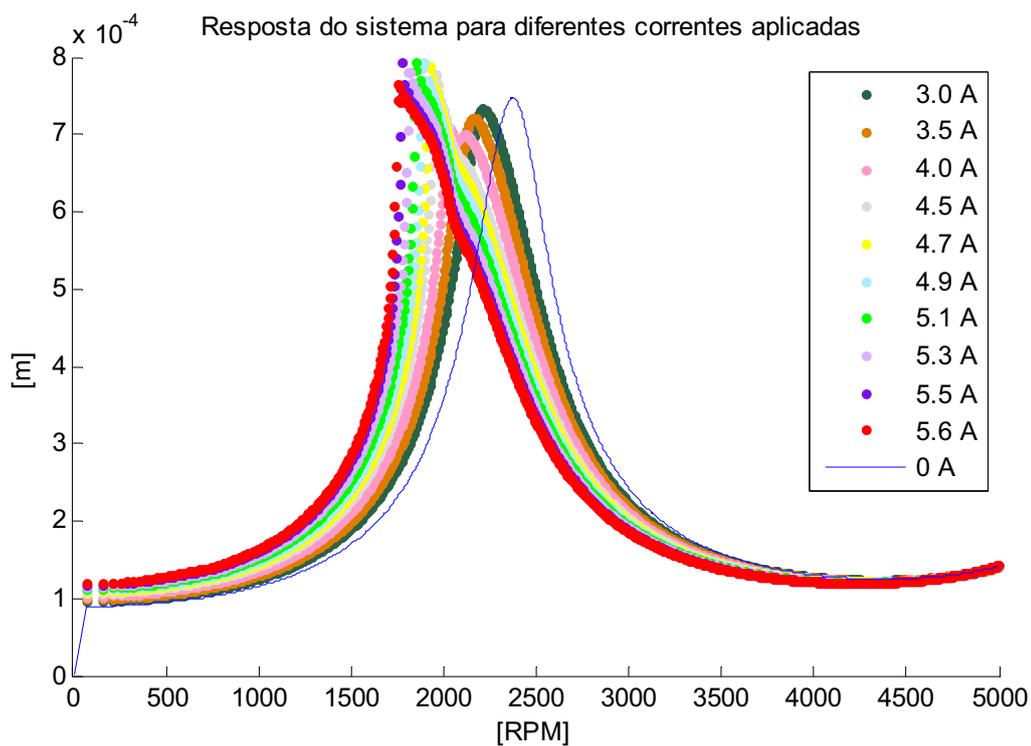


Figura 5.43 – Resposta devida à excitação harmônica aplicada nas duas direções ( $x$  e  $z$ ), defasadas  $90^\circ$ , na posição do primeiro disco, variando a amplitude da corrente contínua.

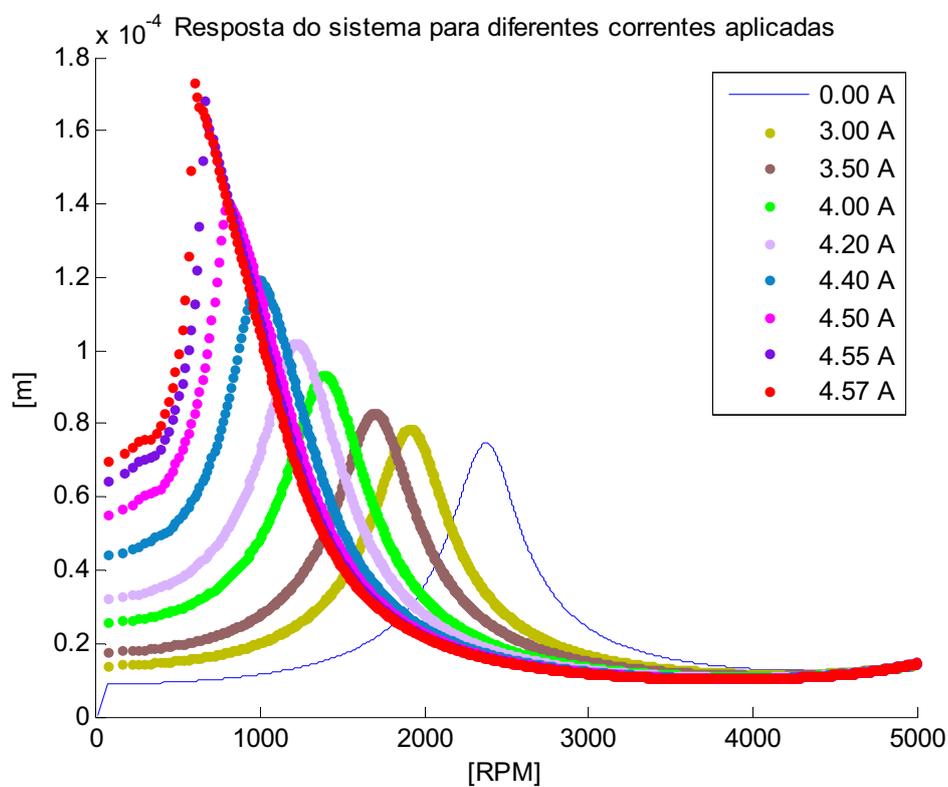


Figura 5.44 – Resposta devida à excitação harmônica aplicada nas duas direções ( $x$  e  $z$ ), defasadas  $90^\circ$ , na posição do primeiro disco, variando a amplitude da corrente contínua.

Nas Figs. 5.45 e 5.46 apresentam-se as simulações com os mesmos parâmetros utilizados para as Figs. 5.43 e 5.44, mas com a frequência de excitação decrescente no tempo, iniciando em 5.000 RPM e finalizando em 100 RPM (*rundown*).

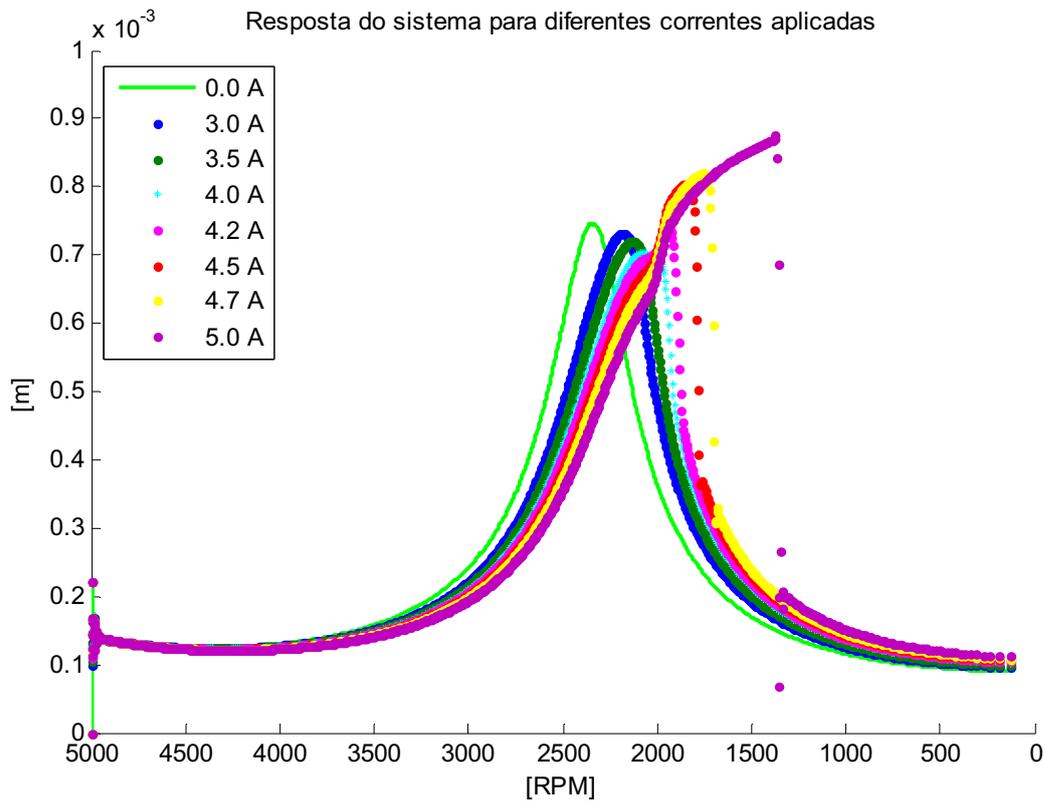


Figura 5.45 – Resposta devida à excitação harmônica aplicada nas duas direções ( $x$  e  $z$ ), defasadas  $90^\circ$ , na posição do primeiro disco, variando a amplitude da corrente contínua.

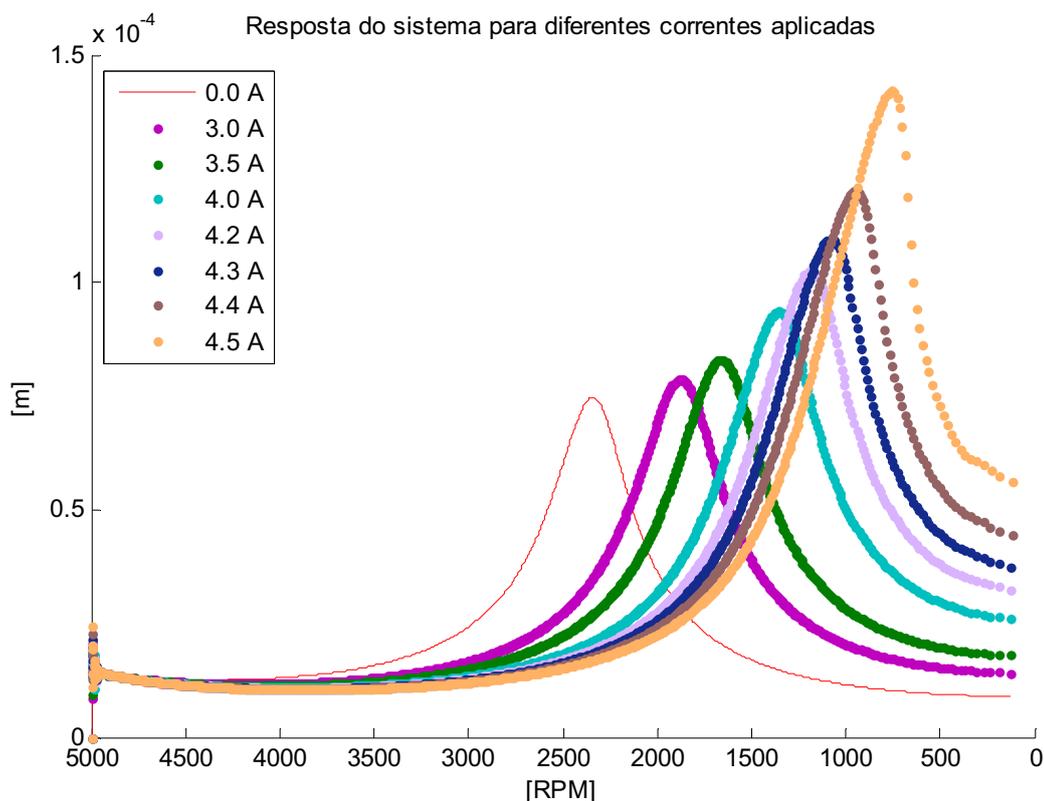


Figura 5.46 – Resposta devida à excitação harmônica aplicada nas duas direções (x e z), defasadas  $90^\circ$ , na posição do primeiro disco, variando a amplitude da corrente contínua.

Outros fatores não menos importantes são os valores do entreferro e da amplitude da entrada. Nas figuras que seguem é apresentado o comportamento da resposta em função de modificações provocadas no entreferro (Fig. 5.47). Manteve-se a corrente contínua constante no valor de 3 A, a entrada em 400 N e o tempo total para a variação da frequência de excitação de 30 s. O entreferro foi modificado, porém mantendo-se em torno de 1 mm. Nesta figura, apresenta-se também a resposta com corrente nula. Constata-se que a redução no valor do entreferro reduz as frequências naturais do rotor.

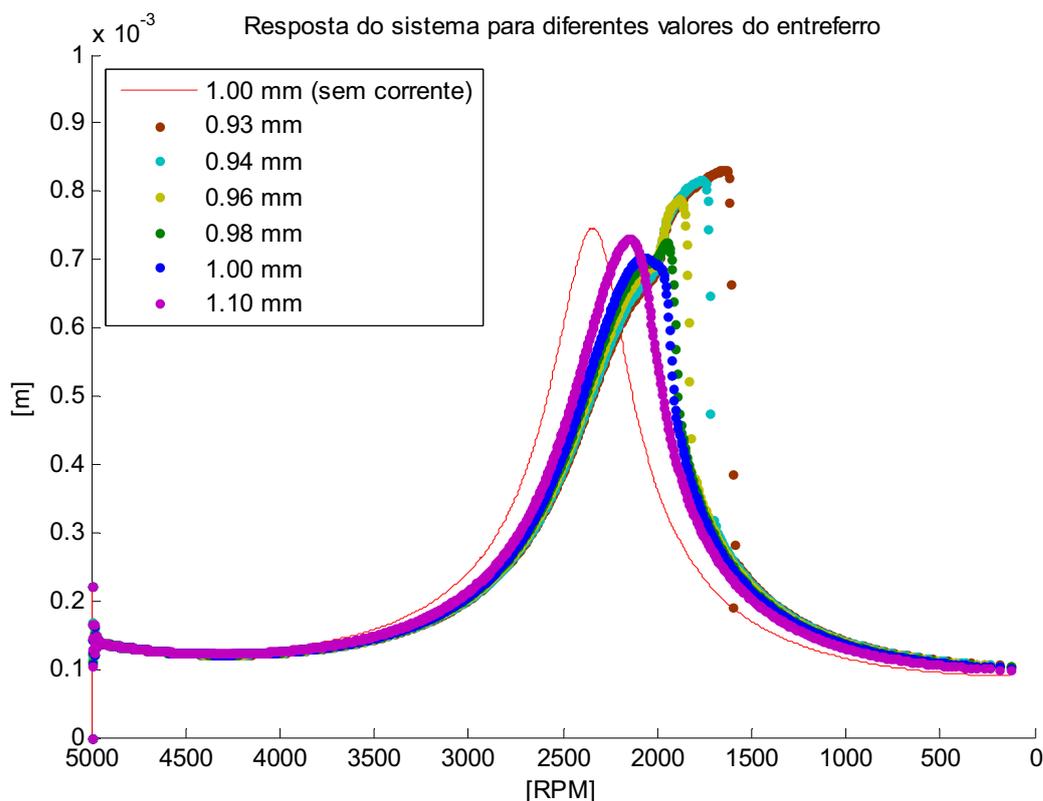


Figura 5.47 – Resposta devida à excitação harmônica aplicada na posição do primeiro disco, variando o entreferro.

No caso da Fig 5.48 manteve-se a corrente constante no valor de 8 A, o tempo total para a variação da frequência de excitação de 30 s e entreferro de 1 mm, porém variou-se a amplitude da excitação (entrada). Vale ressaltar que foi usada uma elevada aceleração durante a aceleração e a desaceleração do rotor usada usada e que a queda brusca na amplitude de vibração logo após a passagem pela crítica é devido ao efeito não linear do atuador.

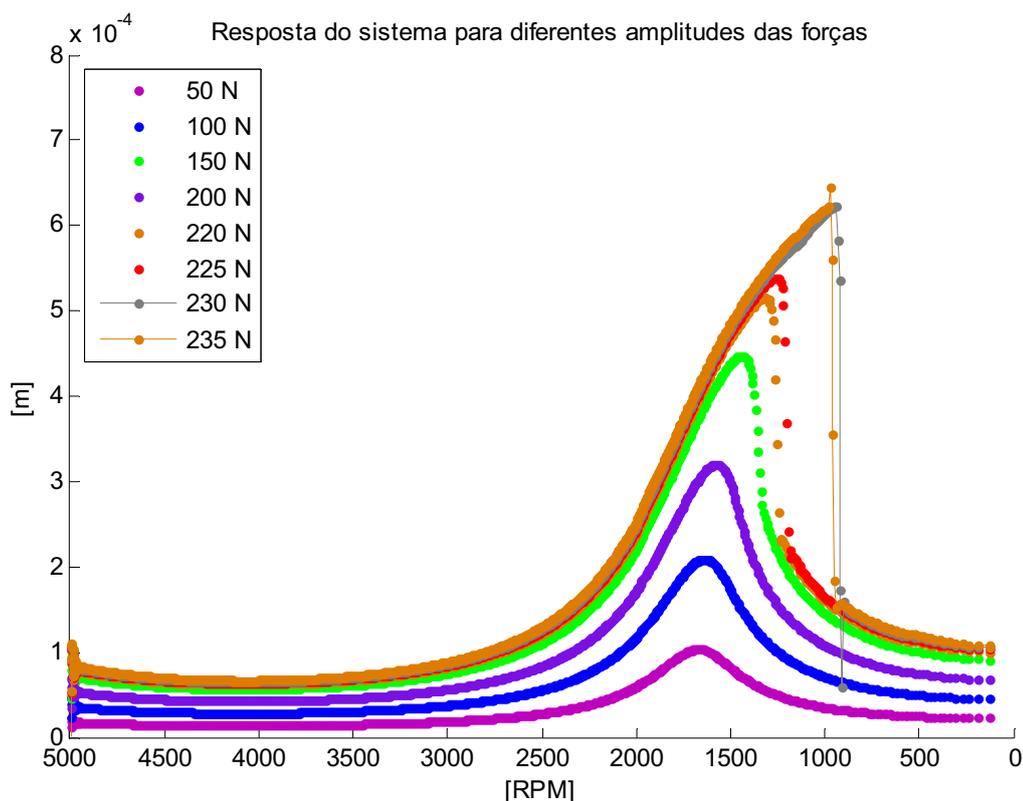


Figura 5.48 – Resposta devida à excitação harmônica aplicada na posição do primeiro disco, variando a amplitude da força de excitação

Após ter-se conhecido o comportamento do rotor em repouso, como foi observado nas figuras acima, espera-se encontrar um comportamento similar para o rotor girando. Na Fig. 5.49 encontra-se a resposta devida ao desbalanceamento para a velocidade de rotação variando entre 100 e 10.000 RPM e desbalanceamentos de 30 e 20 g.cm aplicados, respectivamente, no primeiro e segundo discos, ambos com fase nula. O entreferro adotado foi de 1 mm.

Observa-se que o aumento na corrente desloca a velocidade crítica do sistema para a esquerda, como observado na Fig. 5.49. Verifica-se que o deslocamento para a esquerda é acompanhado de uma redução na amplitude da resposta, o que não ocorre no caso do rotor parado, dado que a amplitude da resposta aumenta (Figs. 5.43 e 5.44). Esta diferença entre as respostas para o rotor parado e em rotação é justificada pelo fato de que a força de excitação, no caso do rotor em repouso, apresenta amplitude constante e, no caso do rotor girando, a força devida ao desbalanceamento é função do quadrado da velocidade de rotação. Como com o aumento da corrente a velocidade crítica surge para uma velocidade de rotação

mais baixa, a força devido ao desbalanceamento é menor. Este mesmo fato se observa na Fig. 5.50, na qual a velocidade de rotação diminui com o tempo.

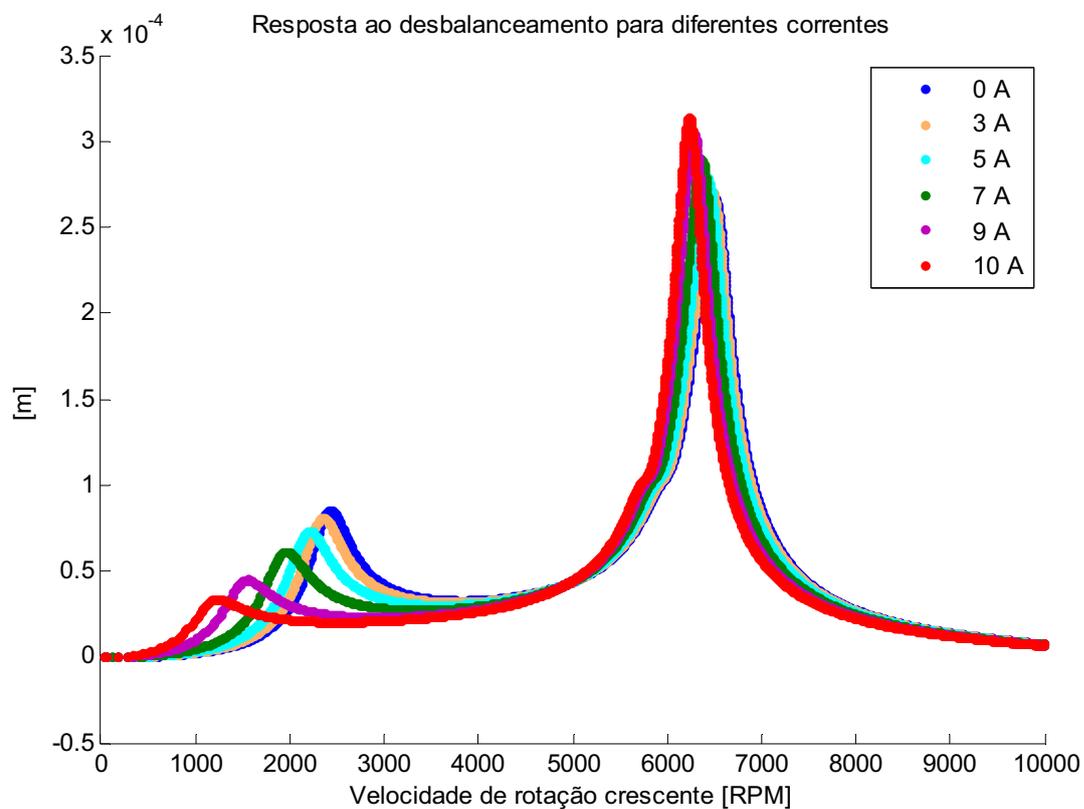


Figura 5.49 – Respostas aos desbalanceamentos aplicados nos dois discos com a mesma fase, variando a corrente.

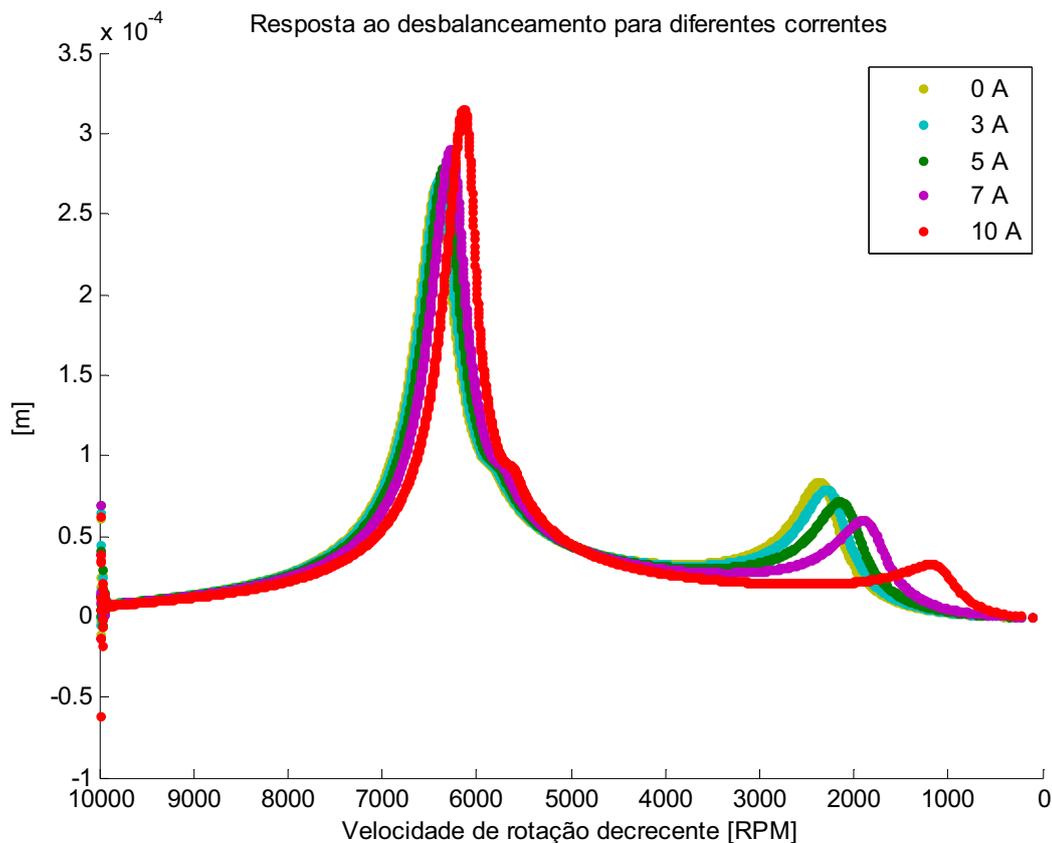


Figura 5.50 – Respostas aos desbalanceamentos aplicados nos dois discos com a mesma fase, variando a corrente.

Como observado nas figuras apresentadas, a corrente no mancal eletromagnético altera as velocidades críticas do rotor, principalmente a primeira. Assim, este tipo de atuador poderia ser usado para o controle da amplitude de vibração na passagem por essas velocidades (Mahfoud et al., 2009). Nas Figuras 5.51 e 5.52 encontram-se a resposta ao desbalanceamento para o atuador ligado, somente durante a passagem pelas velocidades críticas, com corrente de 10 A, aplicadas no atuador. Os parâmetros são os mesmos descritos para as Figs. 5.49 e 5.50, respectivamente. Observa-se que somente a introdução das forças eletromagnéticas, no momento da passagem pela velocidade crítica, provoca uma grande atenuação na amplitude da vibração e um aumento na passagem pela segunda crítica. Este aumento deveu-se também ao fato de que a introdução da força eletromagnética foi brusca, não havendo neste caso nenhuma estratégia de controle. Outro fator que justifica este aumento somente durante a passagem pela segunda velocidade crítica é o fato de que as forças eletromagnéticas não deslocam significativamente as segundas velocidades críticas tanto quanto as primeiras. Isto

pode ser justificado pelo fato de que a relação entre as forças eletromagnéticas não-lineares, e as forças devido ao desbalanceamento é muito maior durante a passagem pela primeira crítica do que durante a passagem pela segunda, dado que as forças aplicadas pelo desbalanceamento aumentam com o quadrado da velocidade de rotação.

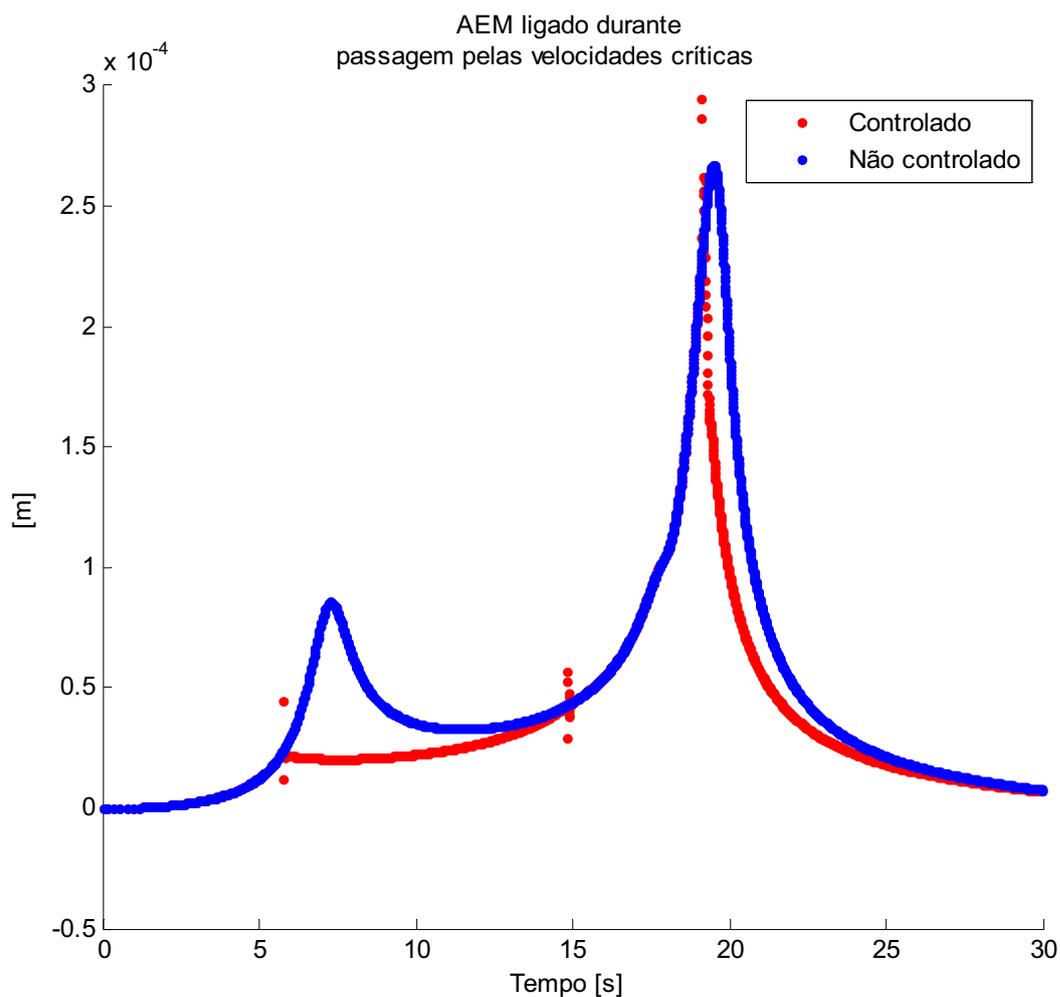


Figura 5.51 – Resposta ao desbalanceamento considerando o AEM ligado somente durante a passagem pela velocidade crítica (velocidade de rotação aumentando).

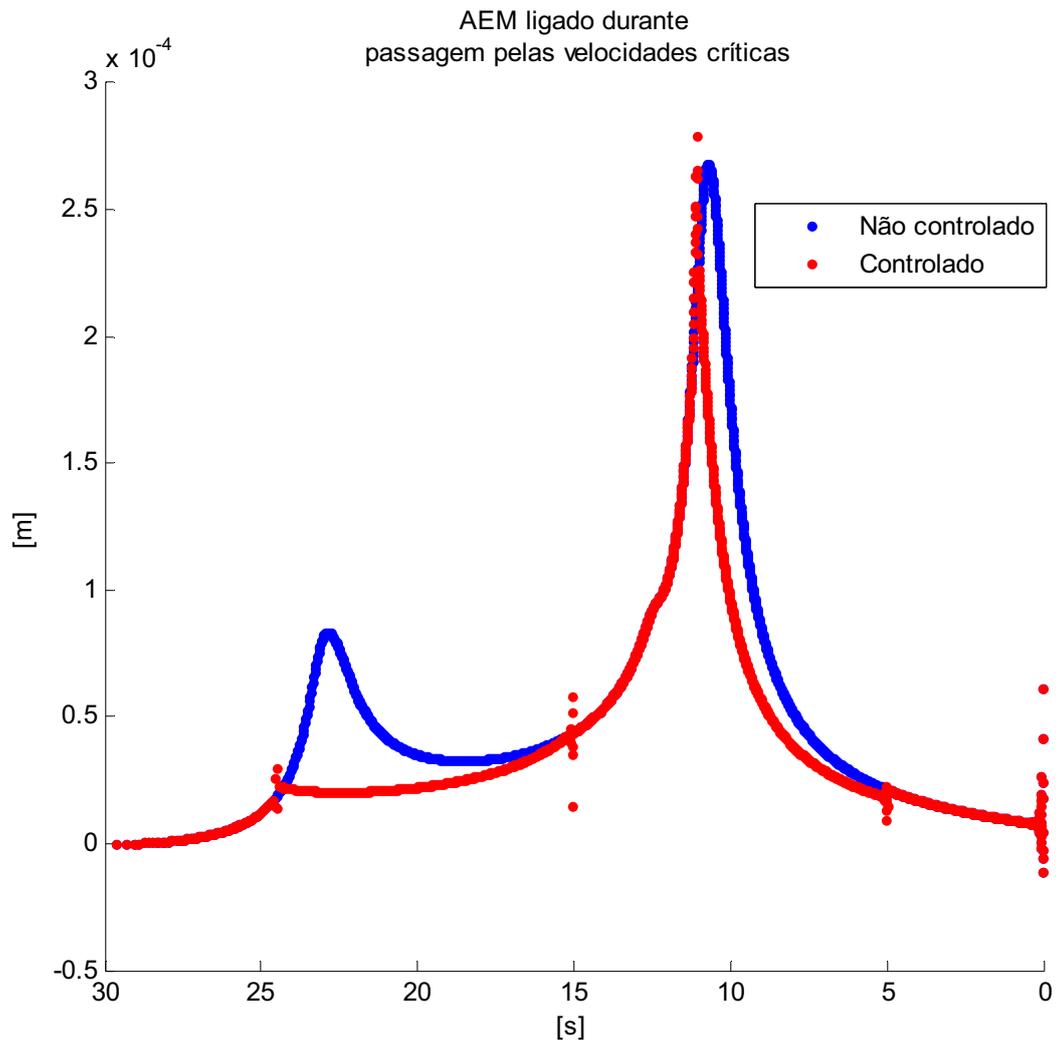


Figura 5.52 – Resposta ao desbalanceamento considerando o AEM ligado somente durante a passagem pela velocidade crítica (velocidade de rotação diminuindo).

## 5.4 Estudo de Caso 5 – Balanceamento sem Massa de Teste do Rotor Linear e Não-linear usando Técnicas de Otimização e Técnicas de Problemas Inversos

### 5.4.1 Rotor de comportamento linear

Inicialmente, não foi considerada a ação do atuador eletromagnético sobre o rotor. Considera-se que uma boa avaliação da metodologia de identificação do desbalanceamento para o rotor linear é necessária antes da introdução da não-linearidade no sistema. Assim, o rotor como mostrado nas Figs. 5.39 e 5.40 foi simulado e, a partir de respostas geradas para as posições indicadas pelas setas (nós #22, #34 e #39) na Fig.5.54, procurou-se identificar um conjunto de massas de balanceamento capaz de reduzir o nível de vibração da estrutura. Como dito anteriormente, dois métodos de otimização (PSO e GA) foram testados e o PSO foi o escolhido. Utilizou-se o *Simple optimization Toolbox* como otimizador e as funções objetivo foram geradas em MatLab© (a simulação do sistema mecânico foi realizada, parte em Simulink©, parte em MatLab©). Para isso, alguns integradores foram testados, tais como Newmark de aceleração média (Craig, 1981), ode45, ode113 e ode23, sendo os 3 últimos disponíveis no software MatLab©. O que apresentou maior robustez e eficiência para o caso aqui estudado foi o ode113. Este método para a resolução de Equações Diferenciais, proposto por Adams-Bashforth-Moulton, é um método do tipo multi-passo, ou seja, possui um passo variável e computa sua solução final através de um refinamento do passo, sempre que a variação da resposta for maior que uma dada tolerância. Esta é a principal diferença e/ou vantagem deste método com relação ao de Runge Kutta de quarta ordem clássico. O refinamento da solução é realizado através de uma interpolação polinomial. Outra vantagem apresentada por este método é o fato de que cada ponto futuro determinado na resposta é calculado levando a informação de uma grande quantidade de pontos do passado. Já o método RK leva em consideração somente alguns pontos do passado. A inicialização do método proposto por Adams-Bashforth-Moulton requer, além das condições do problema de valor inicial, mais 3 pontos futuros, usados para interpolação, sendo estes pontos determinados inicialmente pelo método RK (Shampine e Gordon, 1975).

A função objetivo foi definida durante as simulações como sendo a norma da diferença entre a resposta “medida” e a resposta gerada pelo processo de otimização, sendo normalizada para que todas as respostas usadas tenham o mesmo peso durante a minimização.

$$FO = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\sum_{j=1}^{np} (x_{i,j} - y_{i,j})^2}{\sum_{j=1}^{np} (x_{i,j})^2} \right] \quad 5.7$$

onde:  $n$  é o número de respostas consideradas,  $np$  é o número de pontos dos sinais simulados,  $x$  é a resposta dada pela simulação (medida) e  $y$  é a resposta gerada pela otimização.

Na prática, existem diversas maneiras possíveis de se realizar o balanceamento de sistemas rotativos. Algumas máquinas somente podem ser balanceadas em regiões específicas que podem ou não conter a fonte do desbalanceamento; outras permitem adicionar massas de correção em várias posições ou planos ao longo do eixo e algumas, ainda, apresentam um alto desbalanceamento residualmente distribuído ao longo do eixo e que devem ser balanceadas em posições específicas.

Com o objetivo de demonstrar a validade da metodologia aplicada a diferentes configurações de rotores, foram considerados vários casos para a identificação das massas de correção e, em todos os exemplos, foram utilizadas as respostas geradas nos nós #22, #34 e #39. Como anteriormente dito, 3 variáveis de projeto devem ser determinadas para cada desbalanceamento que se deseja encontrar. Essas variáveis são a amplitude, a fase e a posição ao longo do eixo. A amplitude é considerada variando entre 0 Kg.m até  $1 \times 10^{-5}$  Kg.m e a fase de  $-180^\circ$  até  $180^\circ$ . As posições para a aplicação da massa de correção ao longo do eixo serão descritas nos casos considerados abaixo.

#### *A) Plano de busca na mesma posição do desbalanceamento introduzido*

Neste primeiro caso, considerou-se o plano de busca para o método de otimização como sendo o mesmo em que foi introduzido o desbalanceamento.

Assim, o plano a receber a massa de correção não é uma variável de projeto para o método de otimização. Os planos em que foram introduzidos os desbalanceamentos foram os planos correspondentes aos nós #15 e #30 (posição dos discos), como mostrado pela Fig. 5.53. Foram considerados 400 agentes, número máximo de iterações igual a 100, com a velocidade de rotação variando de 3.500 a 100 RPM, durante a simulação. Numa primeira situação, ambos os desbalanceamentos foram considerados com a mesma fase (A1), e depois, com oposição de fase (A2).

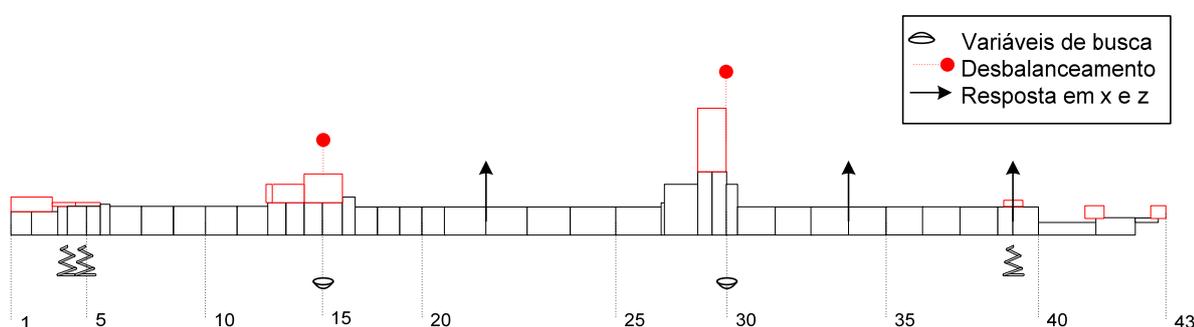


Figura 5.53 – Modelo de EF mostrando os desbalanceamentos

A1) Os desbalanceamentos considerados durante a simulação apresentam os valores de  $150 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0^\circ$  e  $120 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0^\circ$ . Durante o processo, a função objetivo foi calculada 14.550 vezes e o valor obtido foi de  $7,2 \times 10^{-5}$ . Os valores encontrados foram:  $149,9991 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,0009^\circ$  para o nó #15 e  $120,0007 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,002^\circ$  para o nó #30.

A2) Desbalanceamentos introduzidos com valores de  $150 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0^\circ$  e  $120 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 180^\circ$ . A função objetivo foi calculada 9.330 vezes e o valor obtido foi de  $3,90 \times 10^{-5}$ . Os valores encontrados foram:  $150,0091 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,0067^\circ$  para o nó #15 e  $120,0018 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / -179,98^\circ$ , para o nó #30.

Observa-se que os valores do desbalanceamento introduzido na simulação foram encontrados pela otimização em ambos os casos (A1). Assim, se estes valores forem introduzidos em oposição de fase em relação aos valores da fase encontrada, espera-se que a vibração resultante seja fortemente atenuada.

*B) Plano de busca em uma região contendo o desbalanceamento introduzido*

Neste caso, foram colocados dois desbalanceamentos com os mesmos valores e posições do caso A1 (nó #15, com  $150 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0^\circ$  e nó # 30, com  $120 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0^\circ$ ). Os planos de balanceamento foram considerados como sendo uma nova variável de projeto e as posições que ele pode assumir encontram-se em uma faixa que contém os desbalanceamentos introduzidos, como pode ser verificado nas Fig. 5.54 e Fig. 5.55. A primeira figura corresponde a uma busca dos planos para o balanceamento em uma pequena faixa em torno dos discos e a segunda para uma faixa maior. Foram considerados 400 indivíduos (partículas), número máximo de iterações de 100 e a velocidade de rotação do sistema variando de 3.500 a 100 RPM.

B1) Os planos considerados para o balanceamento foram divididos em dois intervalos pequenos. Considerou-se, na otimização, a existência de apenas um desbalanceamento para cada intervalo: o primeiro intervalo, entre os nós #13 e #16 e, o segundo, entre os nós #29 e #31. O número de avaliações da função objetivo foi de 26.400 e o valor mínimo obtido para a função objetivo foi de  $2,34 \times 10^{-4}$ . Os nós em que se foram encontrados os desbalanceamentos foram os mesmos em que estes haviam sido colocados, ou seja, os nós #15 e #30, com valores de  $149,995 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0,00003^\circ$  e  $120,001 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0,00007^\circ$ , respectivamente.

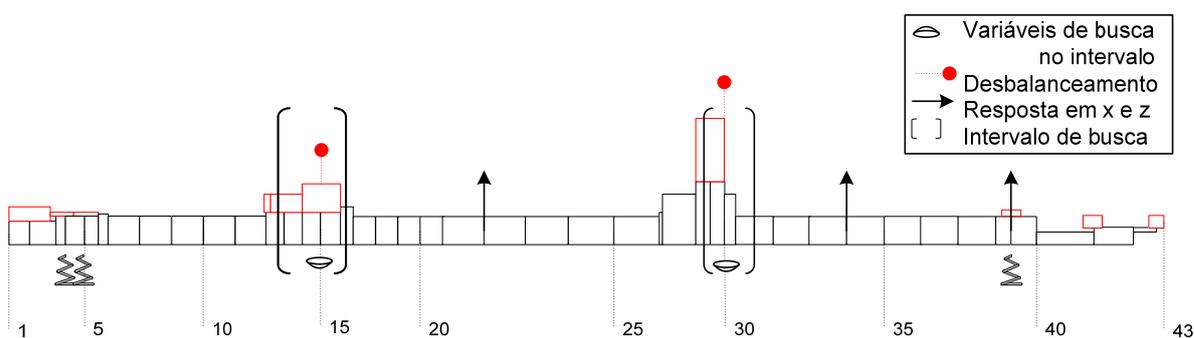
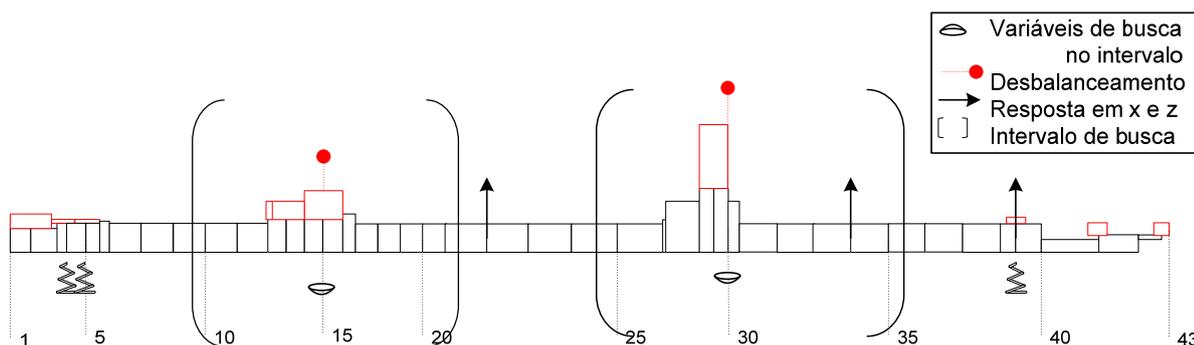


Figura 5.54 – Modelo em EF mostrando os desbalanceamentos introduzidos e os intervalos de busca

B2) Aqui, os planos considerados para o balanceamento foram divididos em dois intervalos maiores que os utilizados em B1. Considerou-se, novamente,

somente um desbalanceamento para cada intervalo. Para o primeiro, entre os nós #10 e #20 e, para o segundo, entre os nós #25 e #35. O número de avaliações da função objetivo foi de 18.000 e o valor mínimo obtido para a função objetivo foi de 0,0067. Os nós em que se encontraram os desbalanceamentos foram os nós #15 e o #29, com valores de  $133,72 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 0^\circ$ ,  $129,66 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 0^\circ$ .



Como os valores obtidos para o caso acima não foram os mesmos introduzidos na simulação, eles foram inseridos nas posições encontradas, porém com fases opostas às identificadas, com a finalidade de verificar se, com os valores encontrados pela otimização, seria possível balancear o rotor. Nas figuras 5.56 e 5.57 apresentam-se as respostas dos nós # 22 e #39, nas direções  $x$  e  $z$ , antes e após o balanceamento, para uma velocidade de rotação variando de 100 a 3.500 RPM durante 10 s.

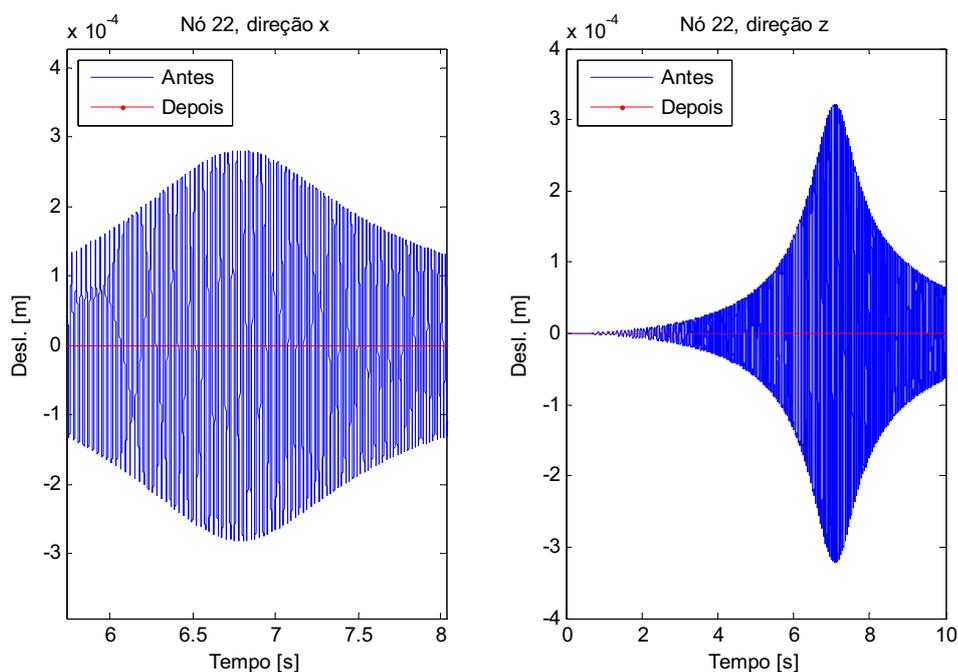


Figura 5.56 – Resposta do nó #22, antes e após o balanceamento, para uma velocidade de rotação variando de 100 – 3.500 RPM.

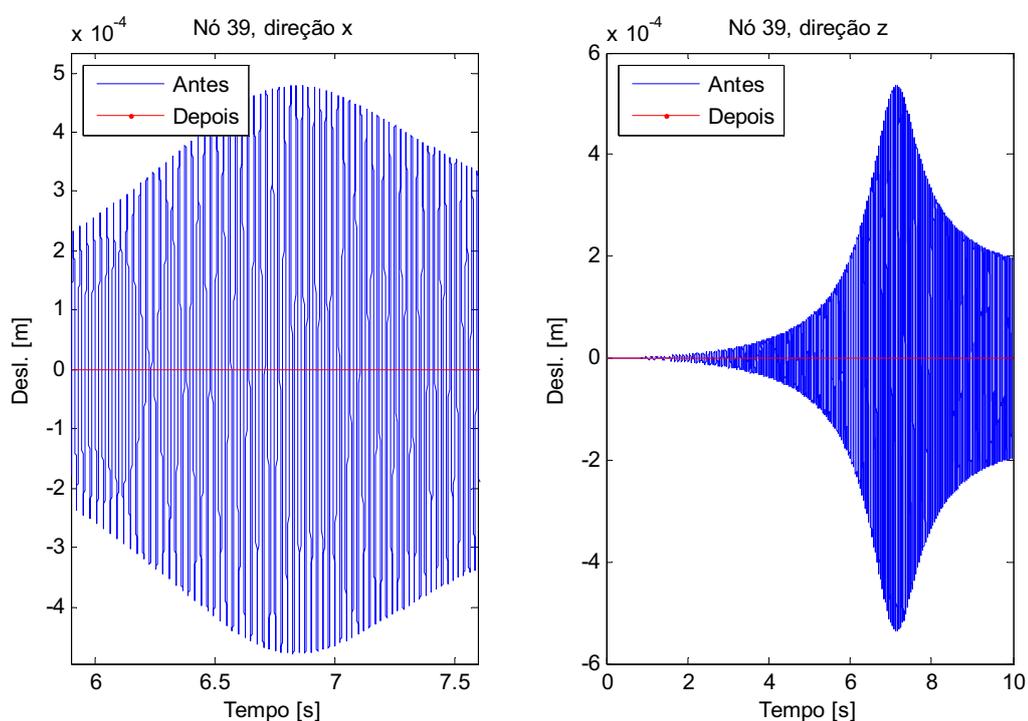


Figura 5.57 – Resposta do nó #39, antes e após o balanceamento, para uma velocidade de rotação variando de 100 – 3.500 RPM.

B2.1) O mesmo caso apresentado no exemplo B2 foi simulado considerando a velocidade de rotação constante e igual a 2.000 RPM. O número de avaliações da função objetivo foi de 22.200 e o valor mínimo obtido para a função objetivo foi de

0,00074. Os nós em que se encontraram os desbalanceamentos foram os nós #17 e #31 com valores de  $148,187 \times 10^{-5} \text{ Kg.m}$  /  $0,164^\circ$   $112,576 \times 10^{-5} \text{ Kg.m}$  /  $-0,106^\circ$ . Na Fig. 5.58 encontram-se as órbitas, antes e após o balanceamento, medidas nos nós #22 e #39, na velocidade de rotação considerada para a determinação das massas de balanceamento.

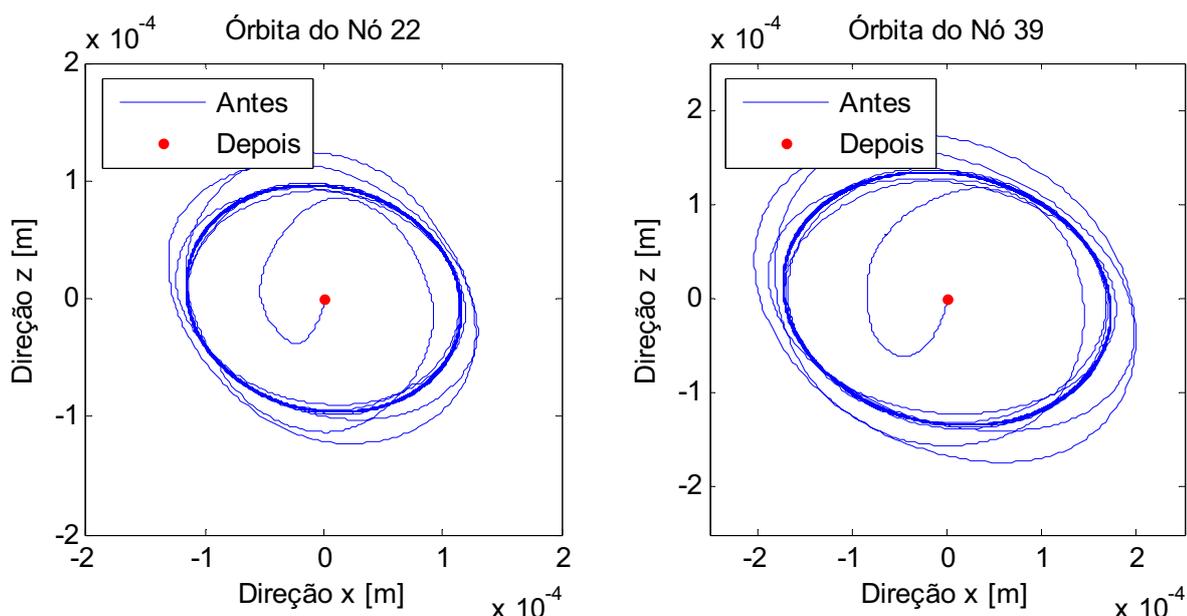


Figura 5.58 – Órbita do sistema nos nós #22 e #39, antes do balanceamento, para uma velocidade de rotação constante de 2.000 RPM.

Como o sistema foi balanceado usando a resposta com velocidade de rotação constante e, sabendo-se que o método dos coeficientes de influência (mais comumente empregado para balanceamento) deve ser usado para balancear o rotor a cada velocidade de trabalho, deseja-se verificar aqui se somente com as massas identificadas pela otimização, a partir da resposta ao desbalanceamento com velocidade de rotação constante, é possível balancear o sistema em outras velocidades de rotação. Na Fig. 5.59 apresenta-se a órbita do nó #22 para a velocidade de rotação variando linearmente de 0 a 20.000 RPM em 30 s, antes e após o balanceamento. Pode-se verificar uma boa redução da vibração do sistema balanceado em toda faixa de velocidade de rotação.

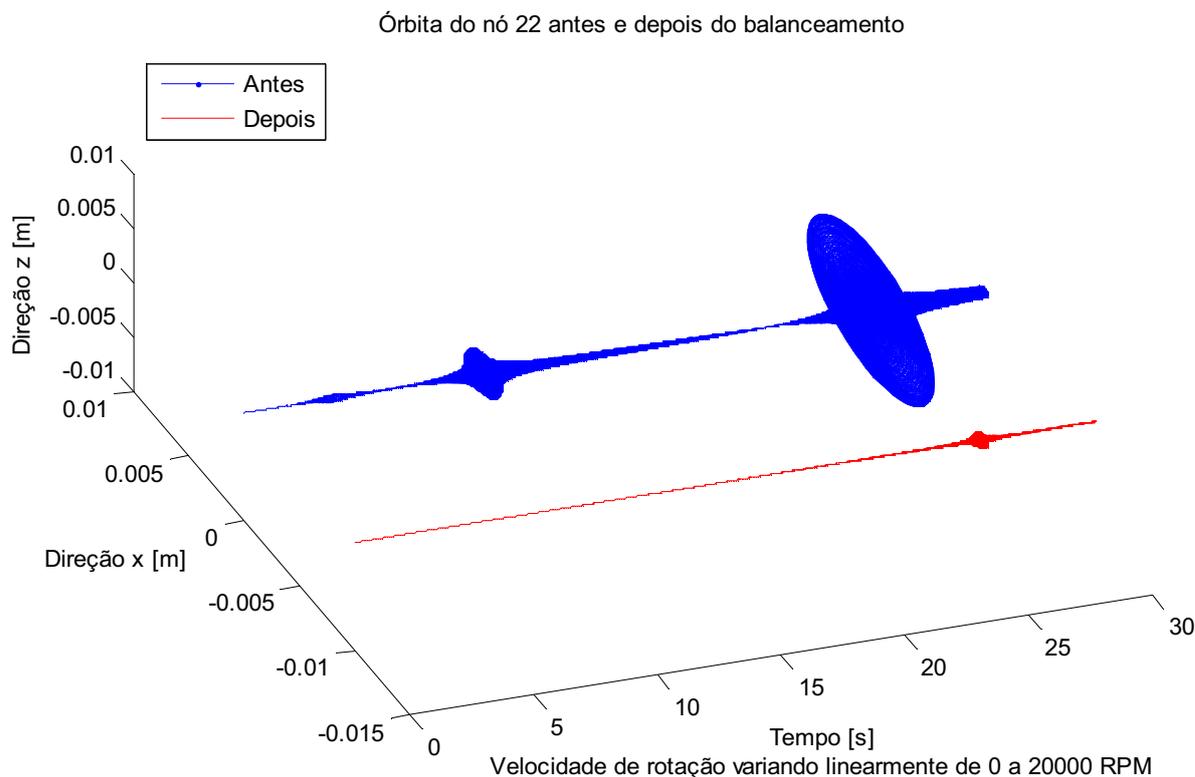


Figura 5.59 – Órbitas do nó #22 para o sistema antes e após o balanceamento, nas quais a velocidade de rotação varia linearmente de 0 a 20.000 RPM no intervalo de tempo considerado.

B3) A mesma simulação realizada em B1 (pequenos intervalos de busca ao redor do disco) foi feita, mas levando em conta somente o desbalanceamento aplicado no nó #15. São considerados os mesmos intervalos de busca que foram utilizados em B1, como pode ser visto na Fig. 5.54. O número de avaliações da função objetivo foi de 18.898 e o valor mínimo obtido foi de 0,003. Os nós em que se encontraram os desbalanceamentos foram os #14 e #30, com valores de  $157,014 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,00^\circ$  e  $1,71 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,00^\circ$ , respectivamente. Na Fig. 5.60, encontram-se as respostas ao desbalanceamento, antes e após a correção, com os valores encontrados pela otimização, defasados de  $180^\circ$ .

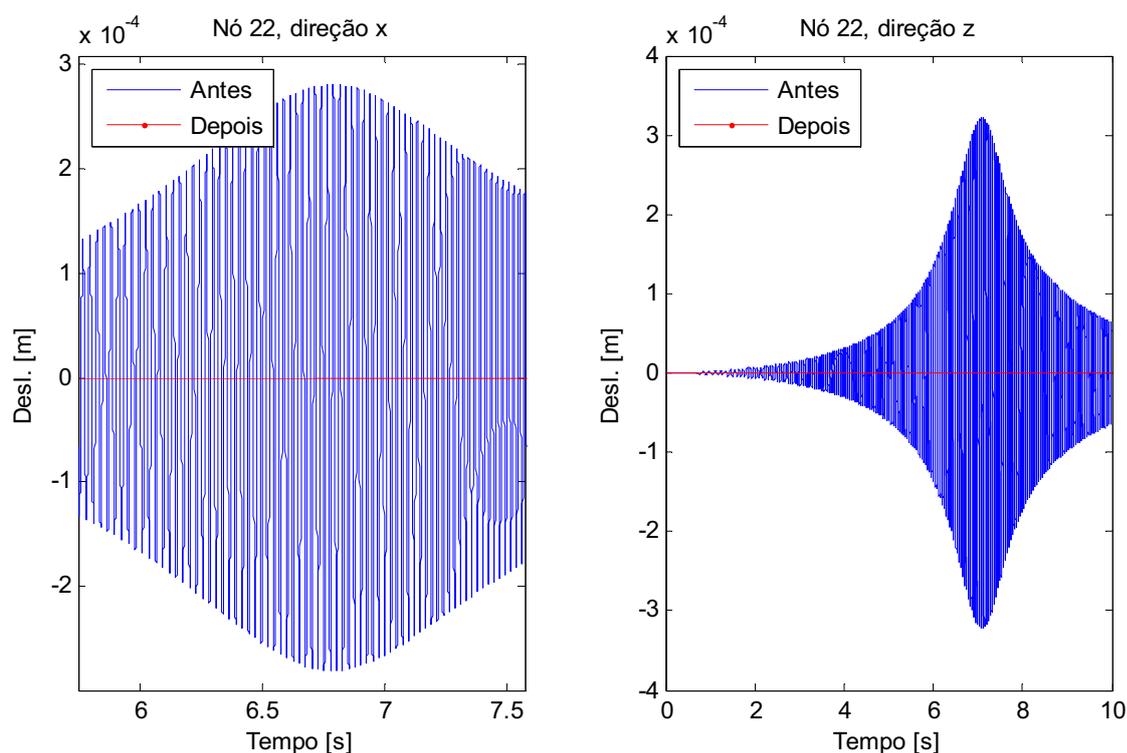


Figura 5.60 – Resposta do sistema no nó #22, antes e após o balanceamento, para uma velocidade de rotação variando de 100 – 3.500 RPM.

C) *Plano de busca em uma região que não contém o desbalanceamento introduzido*

Uma situação que se mostrou interessante foi posicionar o desbalanceamento em um nó não contemplado pelos intervalos de busca considerados. Assim, o desbalanceamento foi posicionado no nó #23 com amplitude e fase de  $150 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0^\circ$ . Foram considerados 400 indivíduos, número máximo de iterações de 100 e velocidade de rotação variando de 3.500 a 100 RPM para um primeiro caso e velocidade de rotação constante para um segundo caso.

C1) Foram considerados intervalos de busca, como os apresentados no exemplo B2 e observados na Fig. 5.61. O número de avaliações da função objetivo foi de 9.600 e o valor mínimo obtido para a função objetivo foi de 0,065. Os nós encontrados como sendo os que abrigam os desbalanceamentos foram os nós #14 e #30, com amplitudes e fases, respectivamente, de  $176,05 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $-0,11^\circ$ ,  $40,445 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0,406^\circ$ . Na Fig. 5.62, encontra-se a resposta ao desbalanceamento antes e após a introdução da massa de correção, com os valores encontrados pela otimização, defasados de  $180^\circ$

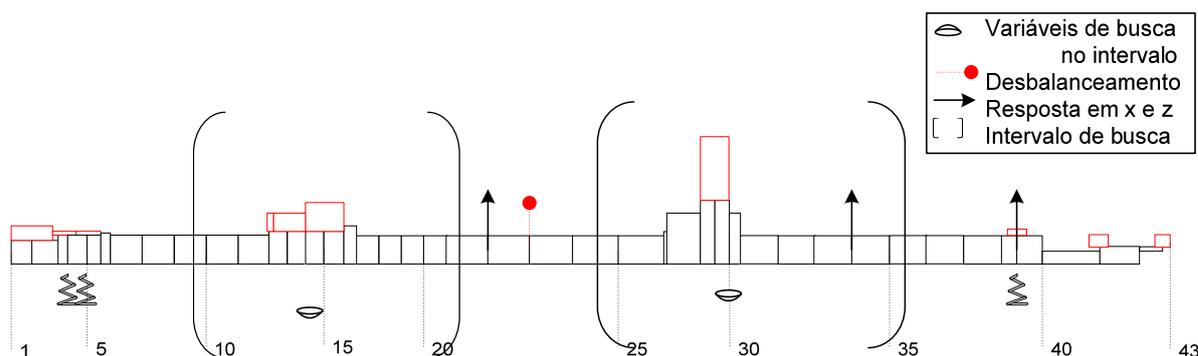


Figura 5.61 – Modelo em EF mostrando os desbalanceamentos introduzidos e os intervalos de busca.

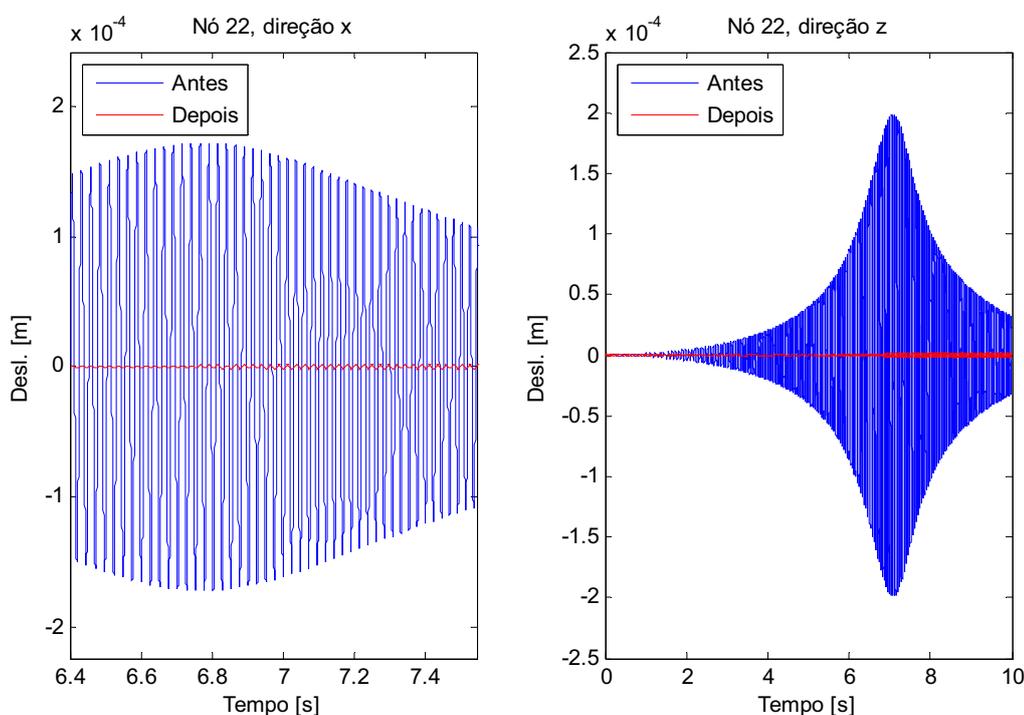


Figura 5.62 – Respostas do nó #22 antes e após a correção do desbalanceamento, para uma velocidade de rotação variando de 100 – 3.500RPM.

C2) O mesmo caso apresentado no exemplo C1 foi simulado com uma única modificação, que foi a consideração da velocidade de rotação constante e igual a 2.000 RPM. O número de avaliações da função objetivo foi de 29.994 e o valor mínimo obtido para a função objetivo foi de  $7,44 \times 10^{-4}$ . Os nós em que os desbalanceamentos foram encontrados são os nós #16 e o #29, com valores de

$143,878 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / -0,097^\circ$  e  $46,472 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,278^\circ$ , respectivamente. Nas figuras que seguem (Fig. 5.63), apresentam-se as respostas do sistema antes e após o balanceamento, nas quais encontram-se as órbitas dos nós #22 e #39 na velocidade de rotação considerada.

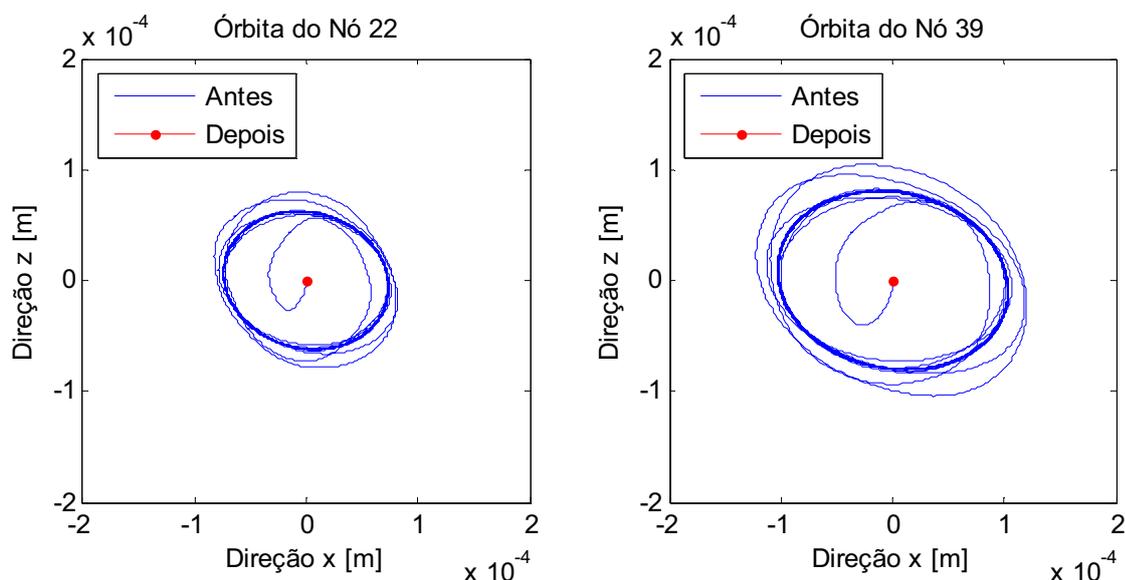


Figura 5.63 – Órbita do sistema nos nós #22 e #39, antes e depois do balanceamento, para uma velocidade de rotação constante de 2.000RPM.

Neste caso, da mesma maneira como realizado no exemplo B2.1., o sistema foi balanceado através da resposta medida para uma velocidade constante. Na Fig. 5.64 apresenta-se a resposta do sistema para a velocidade de rotação variando linearmente entre 0 a 20.000 RPM, durante 30s.

Órbita do nó 22 antes e depois do balanceamento

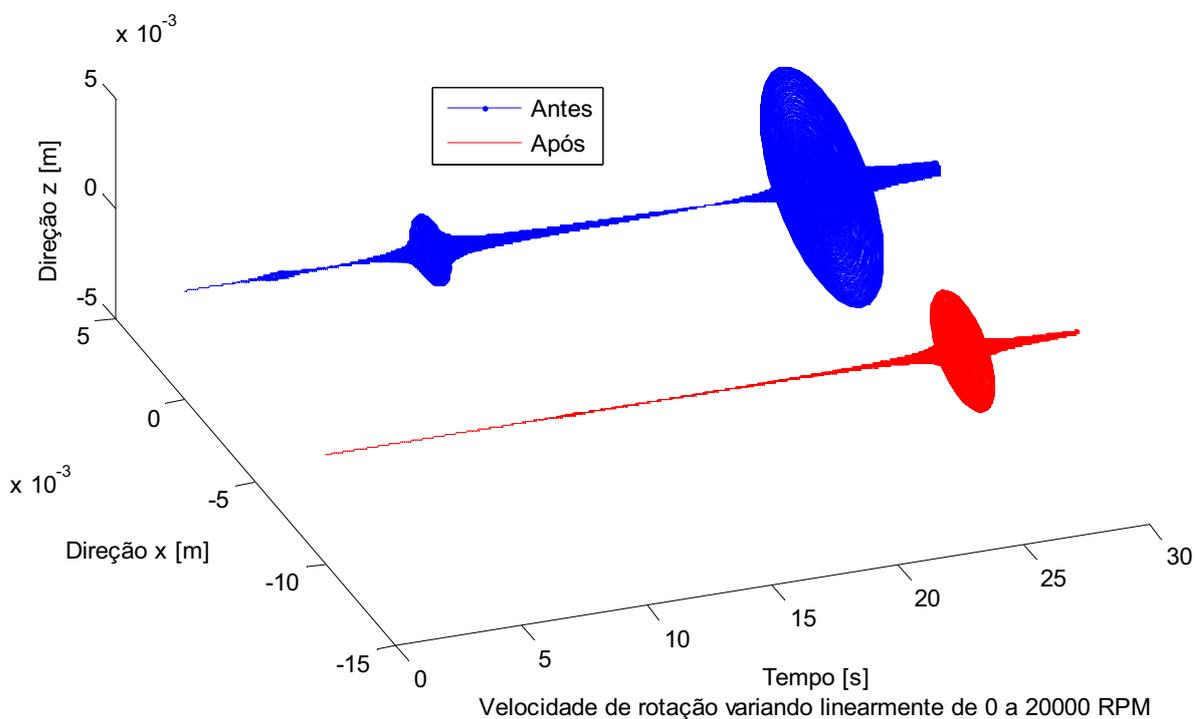


Figura 5.64 – Órbitas do nó #22 para o sistema antes e após o balanceamento, nas quais a velocidade de rotação varia linearmente de 0 a 20.000 RPM no intervalo de tempo considerado.

#### D) Consideração de vários planos de balanceamento por intervalo analisado

Outra forma estudada para determinação do desbalanceamento foi a consideração de mais de um desbalanceamento por intervalo analisado. Assim, o número de variáveis de projeto aumenta em função do aumento do número de desbalanceamentos considerados para cada intervalo.

D1) Para a simulação foram acrescentados dois desbalanceamentos ao sistema: o primeiro, no nó #15, com valor de  $150 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 0^\circ$  e, outro, no nó #30, de  $120 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 0^\circ$ . A velocidade de rotação varia entre 3.500 a 100 RPM, o número máximo de iterações é de 100 e o de indivíduos é de 400. Foram considerados dois intervalos de busca, com dois desbalanceamentos em cada um. O primeiro, entre os nós #12 e #23 e, o segundo, entre os nós #24 ao #31, como pode ser observado pela Fig. 5.65. Os nós em que foram encontrados os desbalanceamentos foram os nós #15 e #18, para o primeiro intervalo, com valores respectivos de  $150,004 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 0,0031^\circ$ ,  $0,0945 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 40,6^\circ$  e, para o

segundo intervalo, os nós #27 e #30, com valores de  $0,0421 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } -0,0012^\circ$ ,  $119,89 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 0,016^\circ$ . O número de avaliações da função objetivo foi de 10.900 e o valor mínimo obtido foi de  $2 \times 10^{-4}$ .

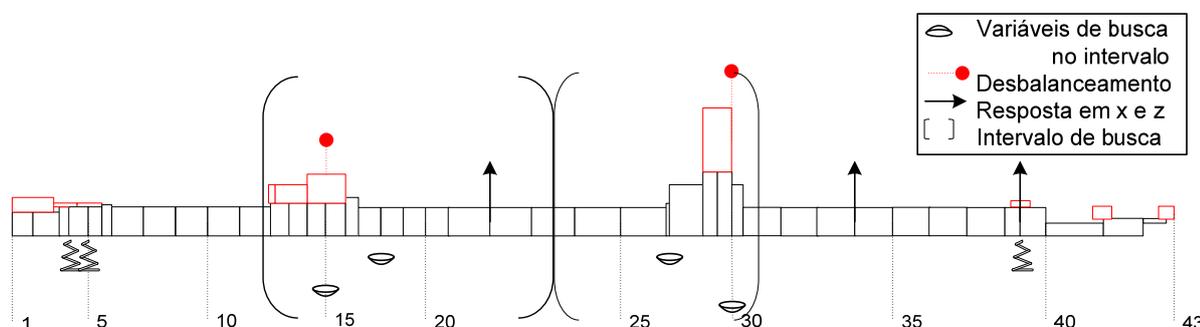


Figura 5.65 – Modelo de EF mostrando os desbalanceamentos introduzidos e os intervalos de busca

D2) Outro caso analisado é o que contém somente um intervalo de busca, com quatro possíveis desbalanceamentos a serem identificados. Assim, para a simulação, introduziu-se um único desbalanceamento no nó #15 com valor de  $150 \times 10^{-5} \text{ Kg.m/ } 0^\circ$ , velocidade de rotação variando entre 3.500 e 100 RPM, número máximo de iterações igual a 100 e o de indivíduos igual a 400. Como anteriormente dito, considerou-se para a busca um intervalo com quatro desbalanceamentos entre os nós #12 e #31 (Fig. 5.66). Os nós em que foram encontrados os desbalanceamentos foram os nós #15, #15, #25 e #25, com valores respectivamente de  $133,210 \times 10^{-5} / 0,0009^\circ$ ,  $16,78 \times 10^{-5} / 0^\circ$ ,  $219,09 \times 10^{-5} / 43,780^\circ$  e  $219,08 \times 10^{-5} / 223,768^\circ$ . O número de avaliações da função objetivo foi de 13.600 e o valor mínimo encontrado foi de  $4,3 \times 10^{-5}$ . Verifica-se que a soma dos dois desbalanceamentos encontrados no nó #15 é muito próximo do valor introduzido na simulação e que a soma dos desbalanceamentos encontrados no nó #25 é praticamente zero.

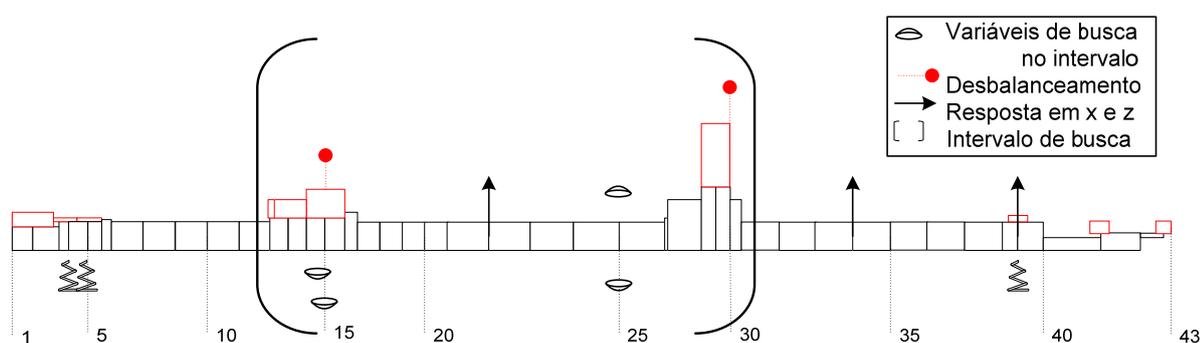


Figura 5.66 – Modelo de EF mostrando o desbalanceamento e o intervalo de busca.

### E) Desbalanceamento distribuído ao longo do eixo

Um último caso analisado para o sistema linear, que se julgou interessante para a validação da metodologia, foi a consideração de um desbalanceamento distribuído de forma senoidal com amplitude de  $y(\text{nó}) = 30 \times 10^{-5} \sin(2\pi \cdot \text{nó} / 43)$  e com fase dada por  $\text{fase}(\text{nó}) = 2\pi \cdot \text{nó} / 43$ , sendo 43 o número total de nós. Além disso, um ruído foi adicionado na resposta, correspondendo a 4% da sua amplitude. Dois intervalos de busca foram propostos, com um desbalanceamento em cada um. O primeiro, entre os nós #14 e #16 e, o segundo, entre os nós #29 e #31 (Fig. 5.67). Como resultado, os desbalanceamentos foram encontrados nos nós #15 e #29, com valores respectivos de  $196,843 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 77,347^\circ$  e  $187,893 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 101,515^\circ$ . O número de avaliações da função objetivo foi de 22.487 e o valor obtido foi de  $3,66 \times 10^{-3}$ . A velocidade de rotação usada na simulação foi de 3.500 a 100 RPM.

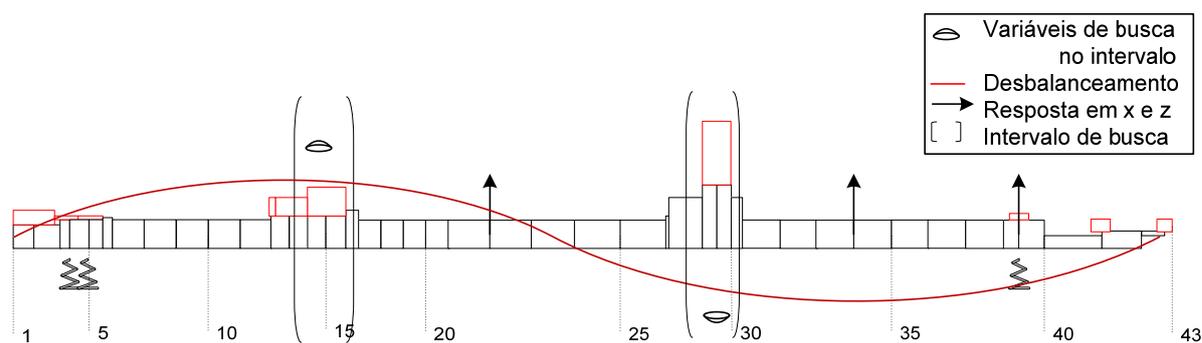


Figura 5.67 – Modelo de EF mostrando o desbalanceamento distribuído.

Na Fig. 5.68, encontra-se a resposta ao desbalanceamento antes e após a introdução das massas de correção, com os valores de fase encontrados pela otimização colocados em oposição de fase para fins de correção.

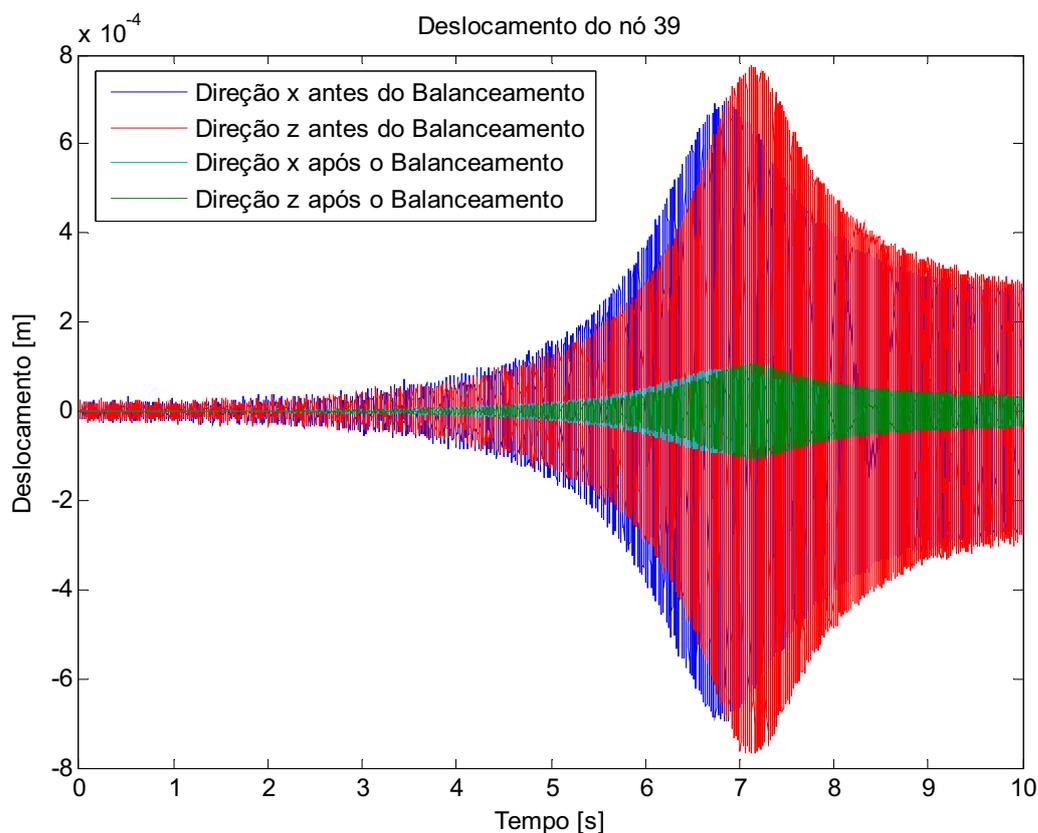


Figura 5.68 – Resposta do sistema para o nó #39, antes do balanceamento, para uma velocidade de rotação variando de 100 a 3.500 RPM.

#### 5.4.2 Rotor de comportamento não-linear

Após o estudo realizado considerando o rotor linear (corrente nula no atuador), aplicou-se o mesmo procedimento para a determinação do desbalanceamento considerando uma corrente contínua constante e igual a 3,5 A, aplicada em cada bobina, como pode ser visto nas Figs. 5.38 e 5.40. As respostas usadas para a otimização estão nas mesmas posições dos exemplos que se referem aos casos lineares (nós #22, #34 e #39). A velocidade de rotação foi mantida a mesma, variando entre 3.500 e 100 RPM. Os parâmetros que descrevem o atuador estão apresentados na Tab. 5.2. O número de indivíduos é de 400 e o número máximo de iterações é de 100.

Inicialmente, dois casos foram estudados considerando um desbalanceamento de  $150 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0^\circ$  no nó #15 e outro de  $120 \times 10^{-5}$  Kg.m /  $0^\circ$  no nó #30.

Nas figuras 5.69 e 5.70 pode-se verificar as variações provocadas nas órbitas das respostas do sistema considerado, sem e com a corrente de 3,5 A aplicada no AEM. Apresentam-se também as respostas dos nós #22 e #39 (posição do atuador). Verifica-se, como observado na seção 5.3.2, a antecipação da velocidade crítica com a presença da corrente no AEM.

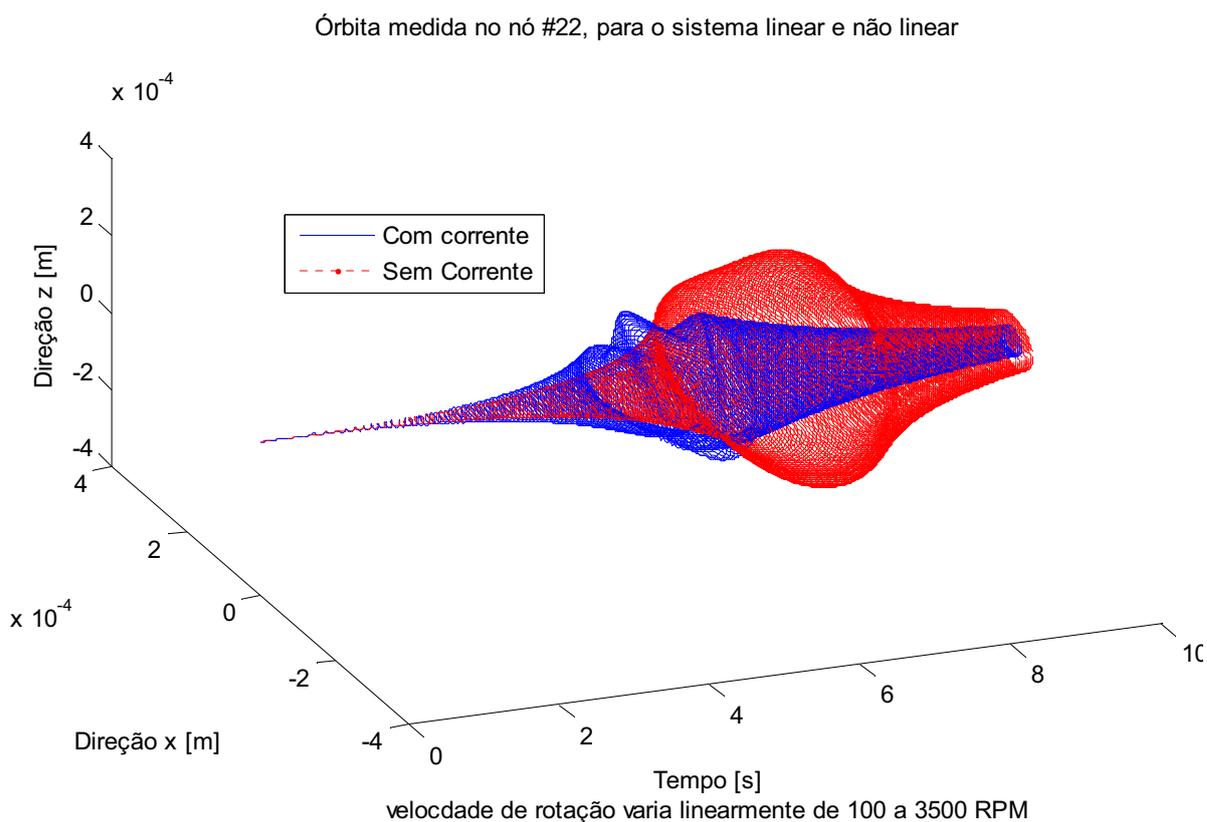


Figura 5.69 – Órbita do nó #22 com e sem a corrente aplicada no atuador.

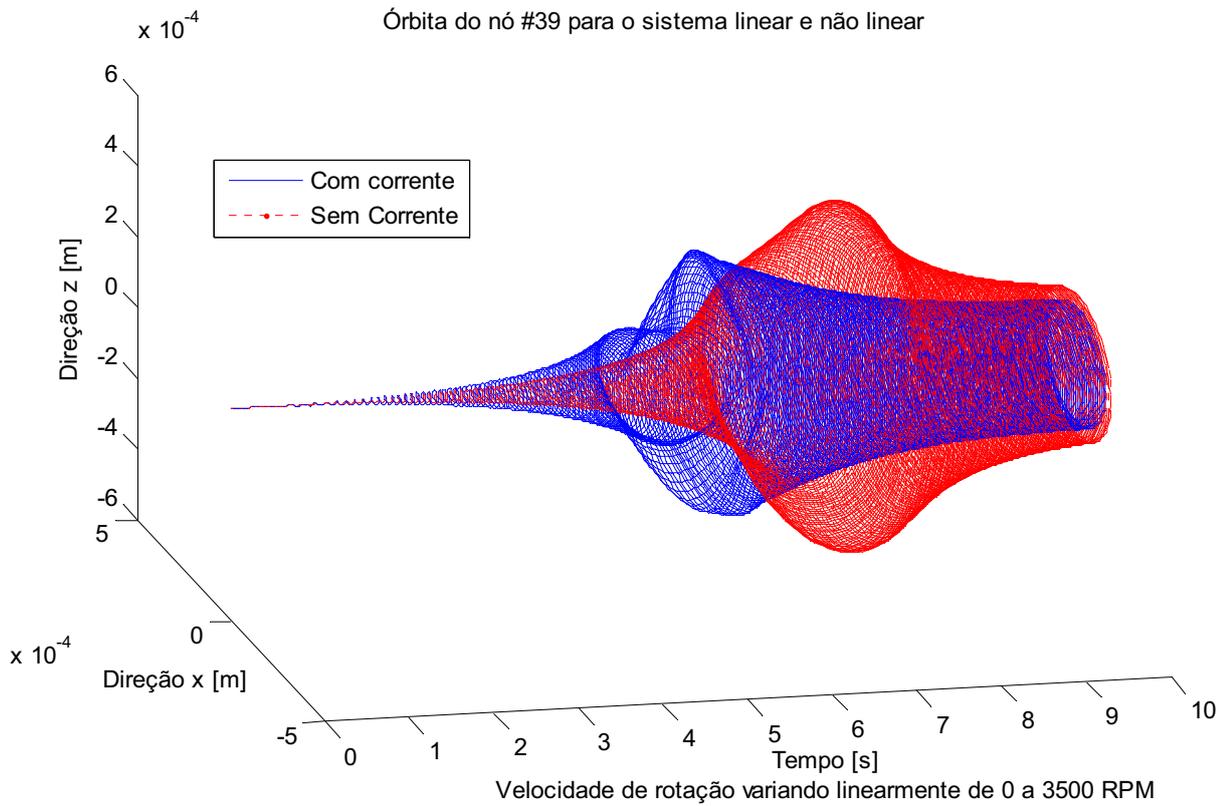


Figura 5.70 – Órbita do nó #39 com e sem a corrente aplicada no atuador.

Na Fig. 5.71 apresenta-se o comportamento da força eletromagnética resultante nas direções  $x$  e  $z$ , em função do tempo, em que a velocidade de rotação do sistema varia linearmente de 100 a 3.500 RPM. Esta é a força inserida no rotor na posição do nó # 39 que torna o sistema não-linear.

## Força eletromagnética inserida pelo AEM

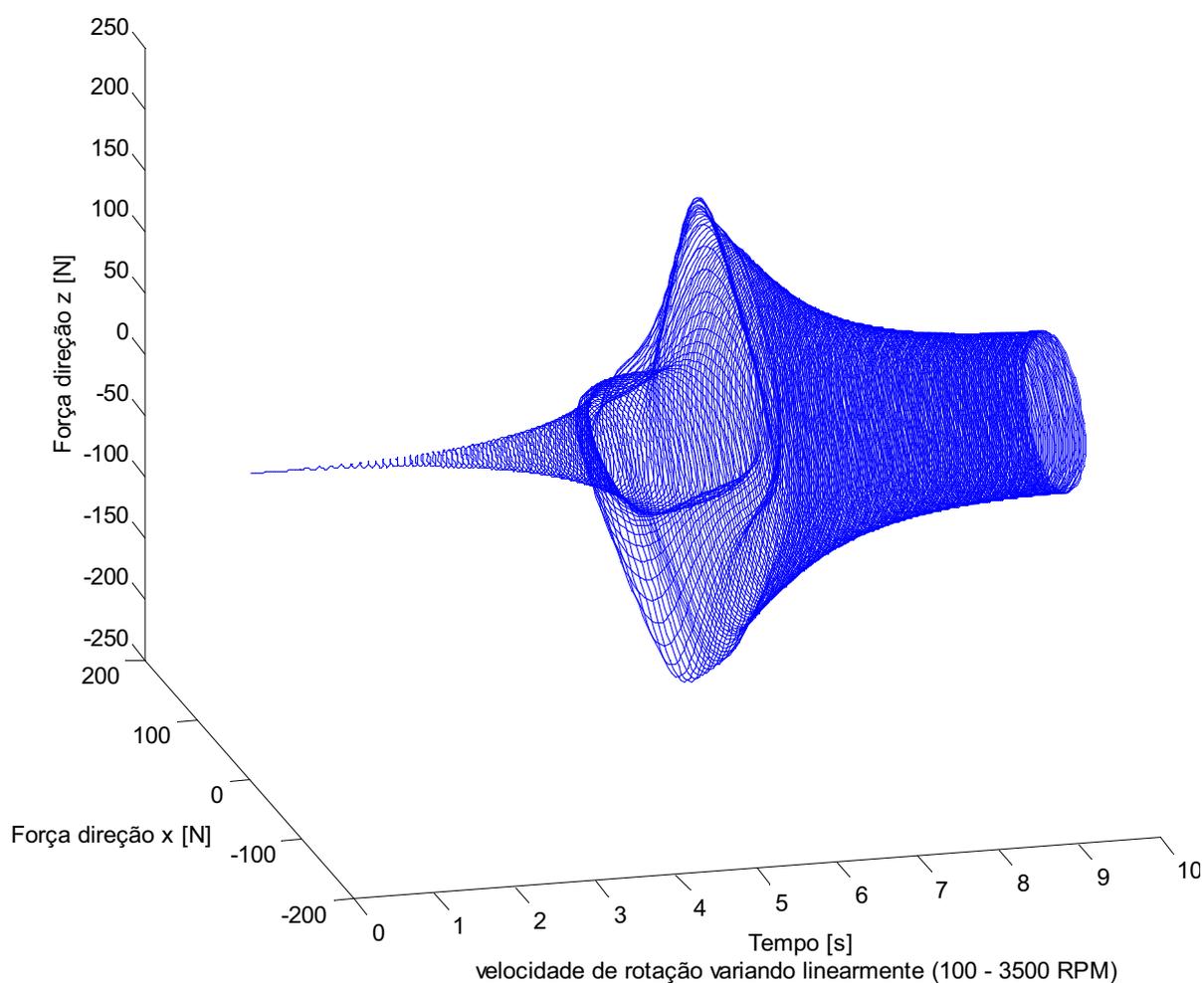


Figura 5.71 – Órbita da força não-linear introduzida pelo AEM na posição do nó #39.

Durante a identificação foram considerados dois intervalos para a busca (Fig.5.72), com um desbalanceamento em cada um. O primeiro, entre os nós #14 e #16 e, o segundo, entre os nós #29 e #31. O número de avaliações da função objetivo foi de 9.991 e o valor obtido foi de  $3,09 \times 10^{-9}$ . Os valores encontrados foram  $150,00 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,00^\circ$ , para o nó #15, e  $120,00 \times 10^{-5} \text{ Kg.m} / 0,00^\circ$ , para o nó #30. Estes valores foram exatamente os usados na simulação, não sendo necessário, portanto, apresentar a resposta do sistema com a massa de correção.

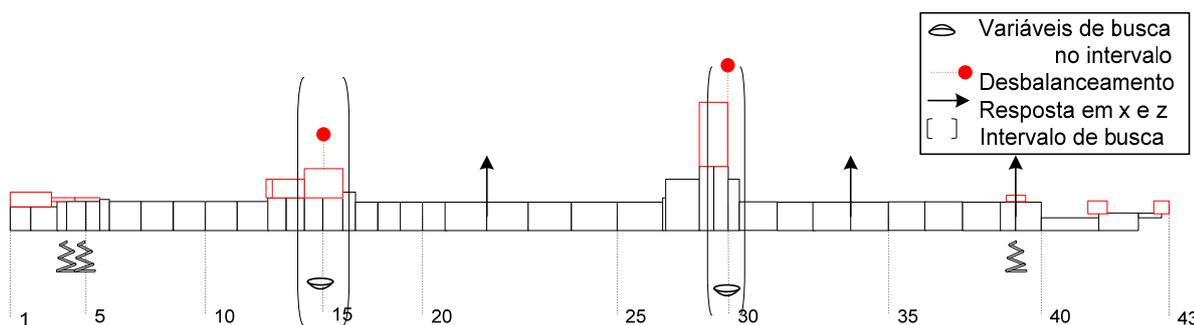


Figura 5.72 – Modelo de EF mostrando o desbalanceamento.

Outra simulação realizada para o caso não-linear foi a consideração de dois intervalos de busca no eixo, com dois desbalanceamentos em cada um. Para o primeiro, entre os nós #12 e #23 e, para o segundo, entre os nós #24 e #31 (Fig. 5.73). O número de avaliações da função objetivo foi de 14.400 e o valor obtido foi de  $9,43 \times 10^{-7}$ . Os valores encontrados para os dois desbalanceamentos, colocados no primeiro intervalo, foram de  $149,914 \times 10^{-5} / 0,000^\circ$ , para o nó #15,  $0,0320 \times 10^{-5} / 134,6^\circ$ , para o nó # 19. Para o segundo intervalo foram encontrados os seguintes valores:  $173,856 \times 10^{-5} / -0,0022^\circ$  para o nó #30 e  $53,89 \times 10^{-5} / -179,9^\circ$  para o nó # 30, novamente. Verifica-se que os valores determinados correspondem aos usados na simulação, sendo identificados pela metodologia proposta.

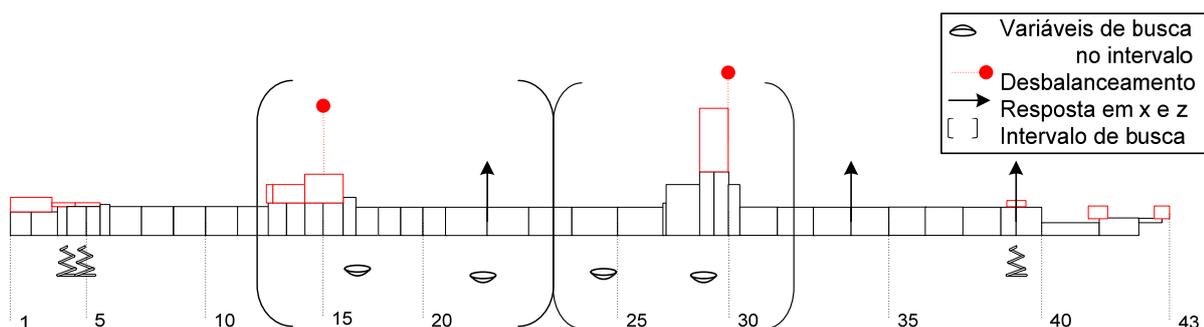


Figura 5.73 – Modelo de EF mostrando os desbalanceamentos.

Por fim, foram considerados intervalos de busca que não contêm o desbalanceamento introduzido, como no exemplo C1, do caso linear. Os intervalos podem ser observados na Fig. 5.74. O número avaliações da função objetivo foi de 12.000 e o valor obtido mínimo obtido para a função objetivo foi de  $5,44 \times 10^{-2}$ . Os nós em que os desbalanceamentos foram encontrados são os nós #18 e #32, com

valores de  $158,67 \times 10^{-5} \text{ Kg.m}$  /  $-0,0652^\circ$ ,  $28,7305 \times 10^{-5} \text{ Kg.m}$  /  $0,3995^\circ$ , respectivamente. Na Fig. 5.75, encontra-se a resposta do sistema com os valores corrigidos, a partir dos valores encontrados pela otimização, porém defasados de  $180^\circ$ .

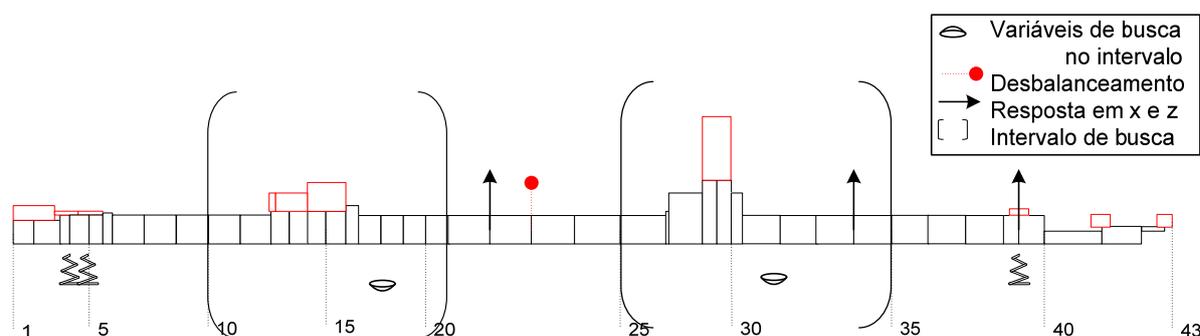


Figura 5.74 – Modelo de EF mostrando o desbalanceamento.

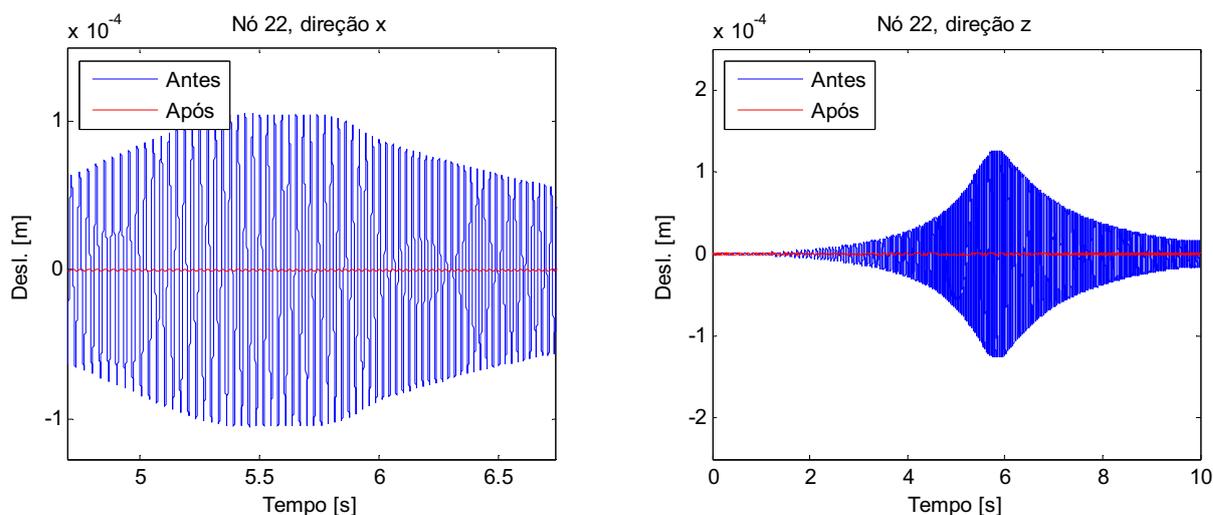


Figura 5.75 – Respostas do nó #22 antes e após a correção do desbalanceamento, para uma velocidade de rotação variando de 100 a 3.500 RPM.

Visto que houve uma boa identificação para os casos não-lineares, não se apresentará, neste trabalho, a mesma quantidade de resultados como foi mostrado para o caso linear, apesar de terem sido realizadas inúmeras simulações. Assim, pode-se concluir com segurança que a metodologia desenvolvida pode ser usada para a identificação de desbalanceamentos em máquinas rotativas não-lineares. A validação experimental desta metodologia é apresentada no próximo capítulo.

## CAPÍTULO VI

### RESULTADOS EXPERIMENTAIS DO BALANCEAMENTO DE ROTOR LINEAR E NÃO-LINEAR SEM MASSA DE TESTE

As Fig. 6.1 e 6.2 apresentam a bancada de teste utilizada para validar a metodologia de identificação do desbalanceamento. Estas figuras são as mesmas apresentadas nas simulações, salvo algumas alterações com relação à posição dos sensores de medida. Para validação experimental<sup>4</sup>, três etapas foram realizadas:

- 1) Caracterização dos atuadores eletromagnéticos;
- 2) Ajuste dos parâmetros entre o modelo gerado em elementos finitos e o modelo experimental;
- 3) Determinação do desbalanceamento considerando o sistema linear e não-linear.

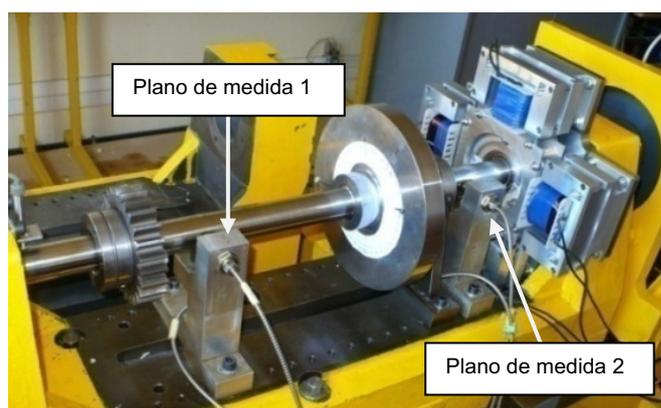


Figura 6.1 – Bancada usada experimentalmente.

---

<sup>4</sup> O trabalho experimental foi desenvolvido por meio de um estágio de doutorado sanduíche, financiado pelo CNPq, realizado no LaMCoS (Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, Institut National de Sciences Appliquées de Lyon, France) supervisionado por Johan Der Hagopian e Jarir Mahfoud

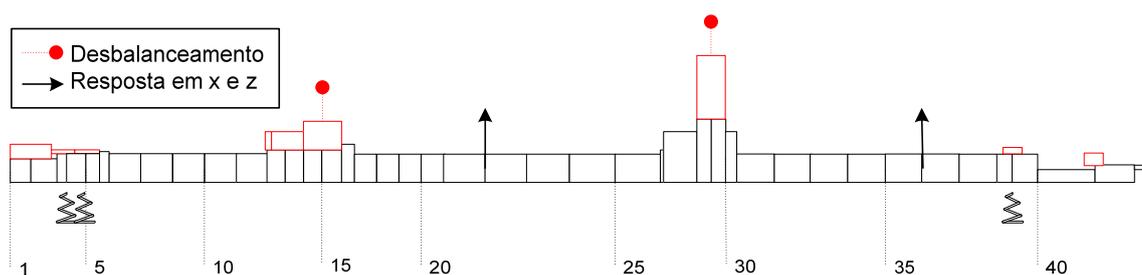


Figura 6.2 – Modelo de EF com a posição dos sensores de deslocamento utilizados.

## 6.1 Caracterização dos Atuadores eletromagnéticos

Como descrito anteriormente, os atuadores são constituídos por um circuito elétrico e outro magnético. Observando-se a Eq. (4.15), verifica-se que todos os parâmetros, responsáveis pela força gerada pelo atuador, são facilmente medidos, com exceção da permeabilidade relativa do material do circuito ferromagnético. Sabe-se que a permeabilidade magnética do núcleo é dada por uma relação entre a intensidade do campo magnético  $H$  [Ampère/metro] e a indução ou campo magnético  $B$  [Tesla], ou seja:  $B = \mu_m H$ . A permeabilidade magnética relativa  $\mu_r$  é uma relação entre a permeabilidade do material e a do vácuo. Sabe-se ainda que a permeabilidade relativa do material magnético considerado varia entre 700 e 1.200. Através da Eq. (4.15), verifica-se que força aplicada pelo atuador varia em função do quadrado da corrente aplicada na bobina. Assim, para o entreferro constante, espera-se encontrar experimentalmente um polinômio do segundo grau ao se construir o gráfico da força em função da corrente. Obviamente, se o gráfico for traçado entre a força e a corrente ao quadrado, espera-se obter um polinômio do primeiro grau. Daí, a partir do coeficiente angular da reta obtida, determina-se, através da Eq. (6.1), a permeabilidade relativa ( $\mu_r$ ) do material que constitui o núcleo ferromagnético do atuador.

$$\mu_r = \frac{\sqrt{M}(b + c + d - 2a)}{1 - e\sqrt{M}} \quad (6.1)$$

na qual:  $M = \frac{A}{B}$ ,  $A = \frac{F_{em}}{I^2}$  e  $B = \frac{N^2 \mu_0 a f}{2}$

Para a determinação de  $\mu_r$ , o eletro-ímã foi colocado em um suporte robusto, que possibilita regular a distância do entreferro, como mostrado na Fig. 6.3. Observa-se nesta figura que a força foi medida por meio de uma célula de carga fixada na base do suporte (célula de carga do tipo CF1 com capacidade 1.000N). Esta célula apresenta, em sua parte superior, um material ferromagnético igual ao material da caixa metálica, apresentada na Fig. 5.37, de tal forma que, quando se aplica uma corrente na bobina, a célula de carga é capaz de medir a força em função desta corrente aplicada, considerando-se que o entreferro se mantém constante. Uma ponte de extensometria do tipo P3500, em modo de ponte de Wheatstone completa, foi utilizada para medir a saída da célula de carga, sendo a força aplicada pelo eletroímã. A corrente de alimentação da bobina foi aplicada por meio de um gerador de correntes do tipo Meteix AX502, Fig. 6.4, com as duas saídas usadas para alimentar a bobina. A corrente máxima produzida em cada saída do gerador é de 2,5 A. Porém, como a corrente máxima desejada durante a calibragem é de 4,5 A, foram utilizadas as duas saídas colocadas em série em um circuito com diodos para evitar curto circuito. As dimensões do atuador, bem como o número de espiras utilizadas, são as mesmas das simulações, que são reapresentadas na Fig. 6.5.

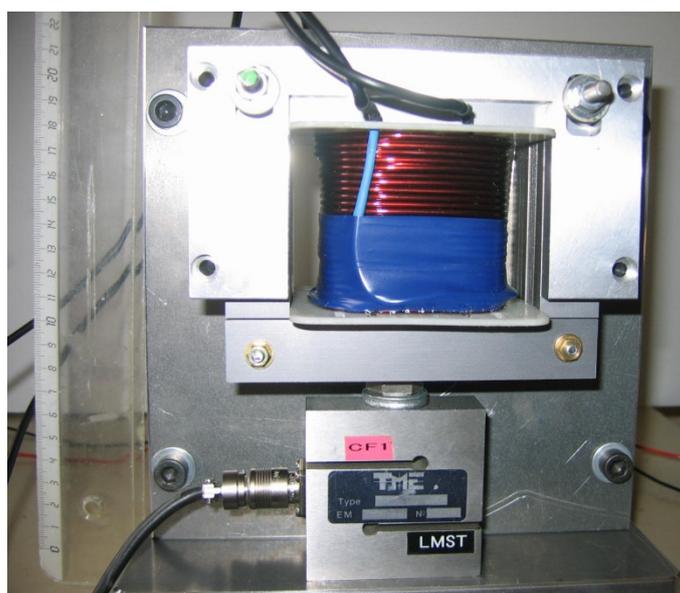


Figura 6.3 – Aparato experimental usado para fixar as bobinas do atuador e determinar a força aplicada para diferentes correntes e distância do entreferro.

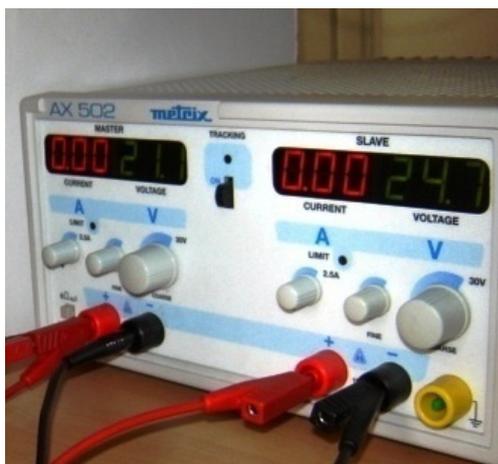


Figura 6.4 – Gerador de corrente adaptado para gerar correntes de até 5 A.

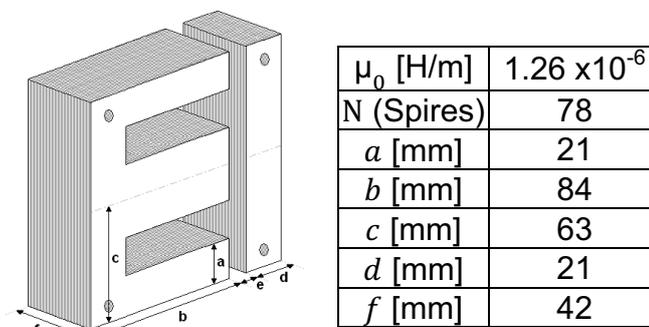


Figura 6.5 – Circuito Ferromagnético e sua configuração.

Nas figuras que seguem, verifica-se a relação esperada entre a força medida na célula de carga e a corrente aplicada na bobina. As Figs. 6.6 e 6.7 apresentam, para o entreferro de 0,4 mm, a força em função da corrente e em função da corrente ao quadrado. Nas Figs. 6.8 e 6.9 são apresentadas as mesmas relações, porém para o entreferro igual a 0,9 mm. Outras medidas foram realizadas diferentes valores de entreferro (não apresentadas aqui). Durante o processo, a corrente foi aplicada aumentando sua intensidade e depois reduzindo-a, como pode ser observado nas figuras abaixo.

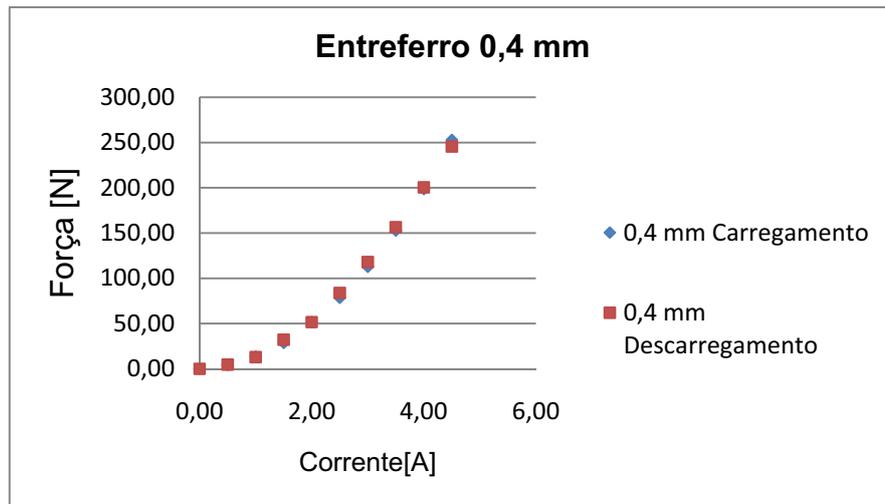


Figura 6.6 – Força medida pela célula de carga em função da corrente aplicada para um entreferro de 0,4 mm.

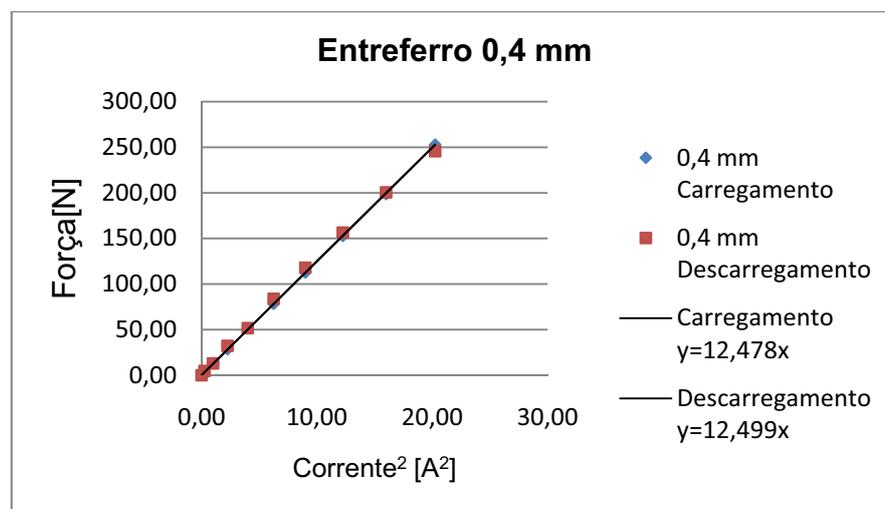


Figura 6.7 – Força medida pela célula de carga em função da corrente ao quadrado para um entreferro de 0,4 mm.

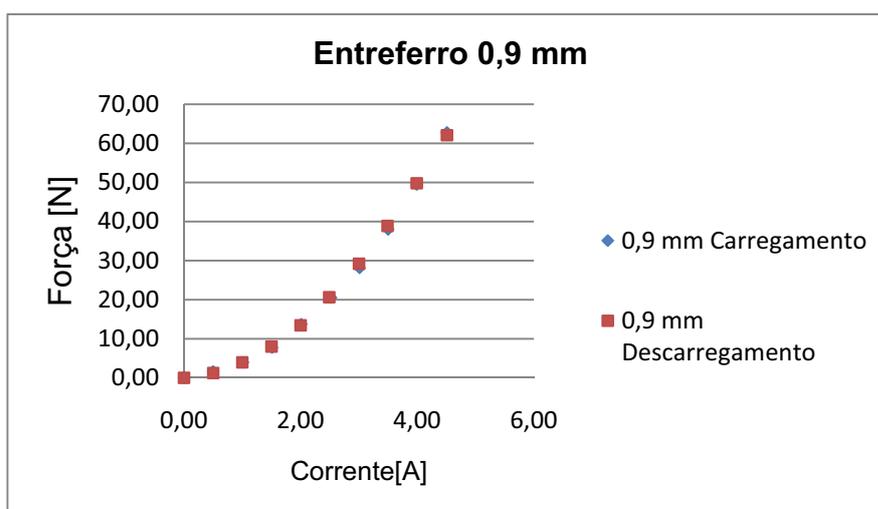


Figura 6.8 – Força medida pela célula de carga em função da corrente aplicada para um entreferro de 0,9 mm.

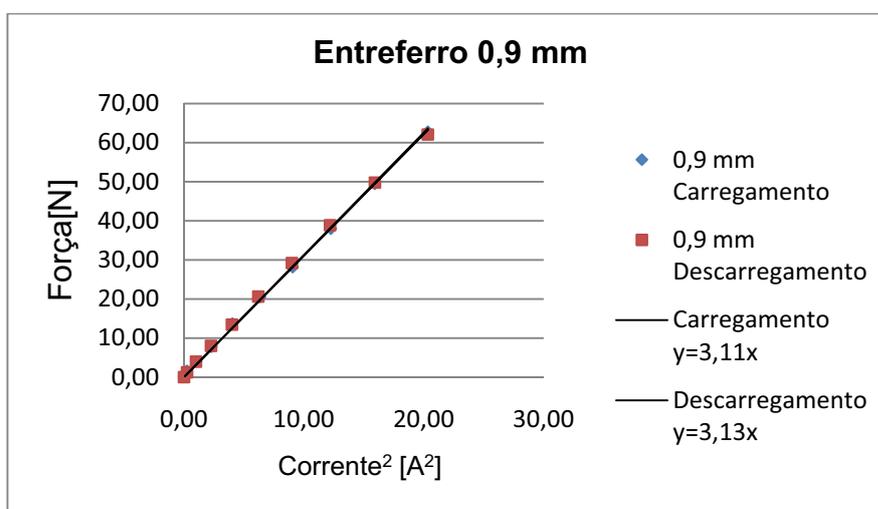


Figura 6.9 – Força medida pela célula de carga em função da corrente ao quadrado para um entreferro de 0,9 mm.

O valor de  $\mu_r$  encontrado durante o experimento foi de 948, obtido a partir de uma média para os vários valores de entreferro adotados. Na Fig. 6.10, encontra-se um gráfico representativo, no qual se mostra a convergência para o valor adotado. Verifica-se que, para baixos valores da corrente, ocorre uma alta dispersão nos valores de  $\mu_r$ . Isso se deve ao fato de que a célula de carga não é apropriada para as medidas de cargas com valores menores.

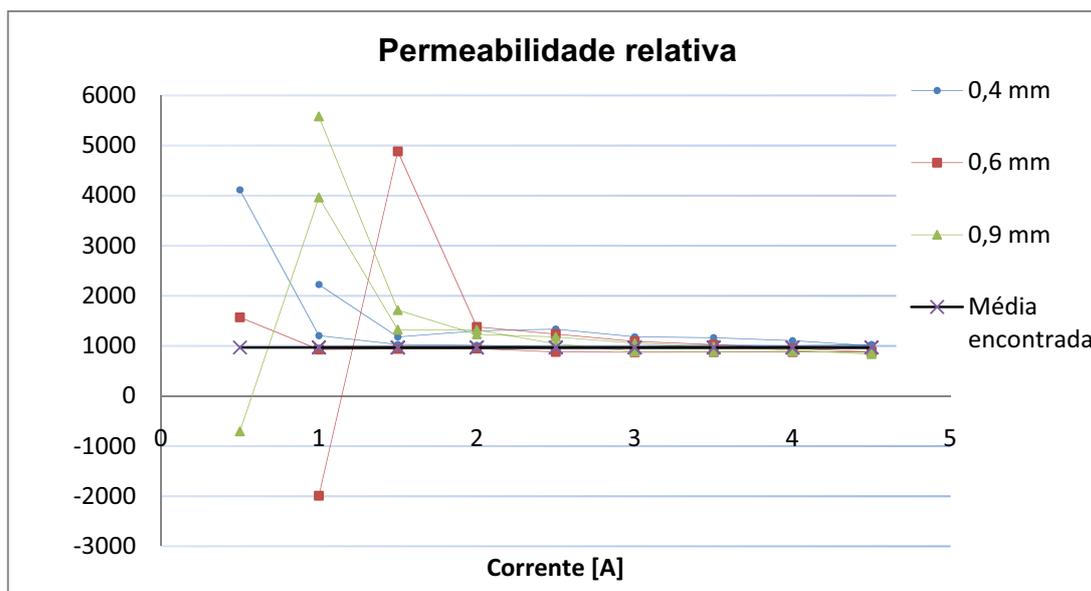


Figura 6.10 – Determinação da Permeabilidade relativa do material ferromagnético do AEM.

## 6.2 Ajuste dos Parâmetros do Modelo Gerado em Elementos Finitos em Relação ao Modelo Experimental

A metodologia proposta para a identificação do desbalanceamento e sua correção, tanto em máquina rotativa linear quanto não-linear, requer um modelo matemático confiável para o rotor (método de balanceamento baseado no modelo). Como dito anteriormente, durante as simulações computacionais, o sistema rotativo (Fig. 6.1) foi modelado através do método dos elementos finitos, sendo este discretizado em 43 nós, como mostrado na Fig. 6.2. A geometria da estrutura, bem como os materiais que a constituem, são bem conhecidos. Assim, para que o modelo de elementos finitos represente satisfatoriamente o comportamento dinâmico do sistema, os parâmetros que não podem ser determinados ou são de difícil determinação, devem ser ajustados no modelo de EF. Os parâmetros dos mancais e o amortecimento do sistema são conhecidos como sendo as maiores fontes de incertezas (Assis e Steffen, 2003). Assim, antes de iniciar a identificação do desbalanceamento, estes parâmetros do modelo foram ajustados em relação aos dados experimentais. Para tanto, foi utilizado o método de otimização PSO, técnica que foi também usada para identificação do desbalanceamento.

Assim, no presente caso, a rigidez dos mancais ( $K_{xx}$  e  $K_{zz}$ ) e seus amortecimentos ( $C_{xx}$  e  $C_{zz}$ ) foram considerados desconhecidos, bem como os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  relacionados ao amortecimento proporcional do sistema. Para a identificação dos parâmetros, com o rotor em repouso, introduziu-se um ruído branco no plano onde o disco  $D_1$  está localizado. Inicialmente a entrada ruidosa foi inserida na direção  $x$  e, depois, na direção  $z$ . Desta forma, os parâmetros foram identificados separadamente, para cada direção. Os parâmetros de rigidez e amortecimento cruzados não foram levados em consideração durante o ajuste. Como o mancal  $B_1$  é composto por dois rolamentos iguais, a rigidez e amortecimento correspondentes foram considerados os mesmos para ambos os rolamentos. Na tabela 6.1 são apresentadas restrições laterais adotadas durante o processo de otimização para os mancais e para os parâmetros do amortecimento proporcional. Estes intervalos são os mesmos para ambas as direções  $x$  e  $z$ . Para cada uma dessas direções foram consideradas 6 variáveis de projeto: o amortecimento e a rigidez para cada mancal (2 mancais), além dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Tabela 6.1 - Restrições laterais			Espaço de busca
Parâmetros dos Mancais *	$B_1$	Rigidez [N/m]	1E7 até 7E8
		Amortecimento [Ns/m]	50 até 1000
	$B_2$	Rigidez [N/m]	5E5 até 7E7
		Amortecimento [Ns/m]	50 até 1000
Amortecimento proporcional	$C = \alpha M + \beta K$	$\alpha$	0 até 100
		$\beta$	0 até 1E-4

\* O espaço de busca é o mesmo para ambas as direções ( $x$  e  $z$ )

A função objetivo adotada é dada pela Eq. (6.2). Ela leva em consideração a norma da diferença entre os valores medidos e os que resultam de simulação na

vizinhança dos dois primeiros modos de vibração. Para isso, são envolvidas as FRFs experimentais e aquelas geradas pela simulação, nas duas direções perpendiculares. Para que todas as respostas tenham o mesmo peso na composição da função objetivo, esta foi normalizada dividindo-a pela norma da FRF medida (experimental).

$$OF = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\text{norm}(FRF_i^{meas}[\omega_a \cdots \omega_b]) - FRF_i^{sim}[\omega_a \cdots \omega_b]}{\text{norm}(FRF_i^{meas}[\omega_a \cdots \omega_b])} \right)_j \quad (6.2)$$

onde  $j$  representa os dois sensores de proximidade ferromagnéticos aplicados em cada direção, como podem ser observados na Fig. 6.1, planos 1 e 2, na posição dos nós # 22 e # 36;  $i$  corresponde aos modos usados na aproximação;  $\omega_a$  e  $\omega_b$  indicam a faixa de frequência considerada no ajuste.

Foram considerados 300 indivíduos, sendo 100 o número máximo de iterações. Os valores encontrados pela otimização são apresentados na Tab. 6.2.

Tabela 6.2 - Variáveis de projeto			Valores otimizados
Parâmetros dos mancais	$B_1$	$K_{xxB1}$ [N/m]	1,167E8
		$K_{zzB1}$ [N/m]	1,651E8
		$C_{xxB1}$ [Ns/m]	280
		$C_{zzB1}$ [Ns/m]	300
	$B_2$	$K_{xxB2}$ [N/m]	1,41E6
		$K_{zzB2}$ [N/m]	1,43E6
		$C_{xxB2}$ [Ns/m]	120
		$C_{zzB2}$ [Ns/m]	120
Amortecimento proporcional	$C = \alpha M + \beta K$	$\alpha$	1.89
		$\beta$	8,88E-6

Nas figuras que seguem são apresentadas as respostas em frequência medidas e as geradas pela simulação, considerando os parâmetros otimizados. A excitação medida (ruído branco em  $D_1$ ) foi usada no modelo analítico para gerar as FRFs simuladas. Nas Figs 6.11 são apresentadas as respostas medidas e as simuladas na direção  $x$ , e nas Figs 6.12, são mostradas as respostas medidas e as simuladas na direção  $z$ . Observa-se que o modelo analítico representa satisfatoriamente a estrutura real e que, mesmo que a otimização dos parâmetros tenha sido feita para uma banda estreita de frequência ao redor dos modos, os parâmetros identificados representam adequadamente o sistema para toda faixa de frequência analisada.

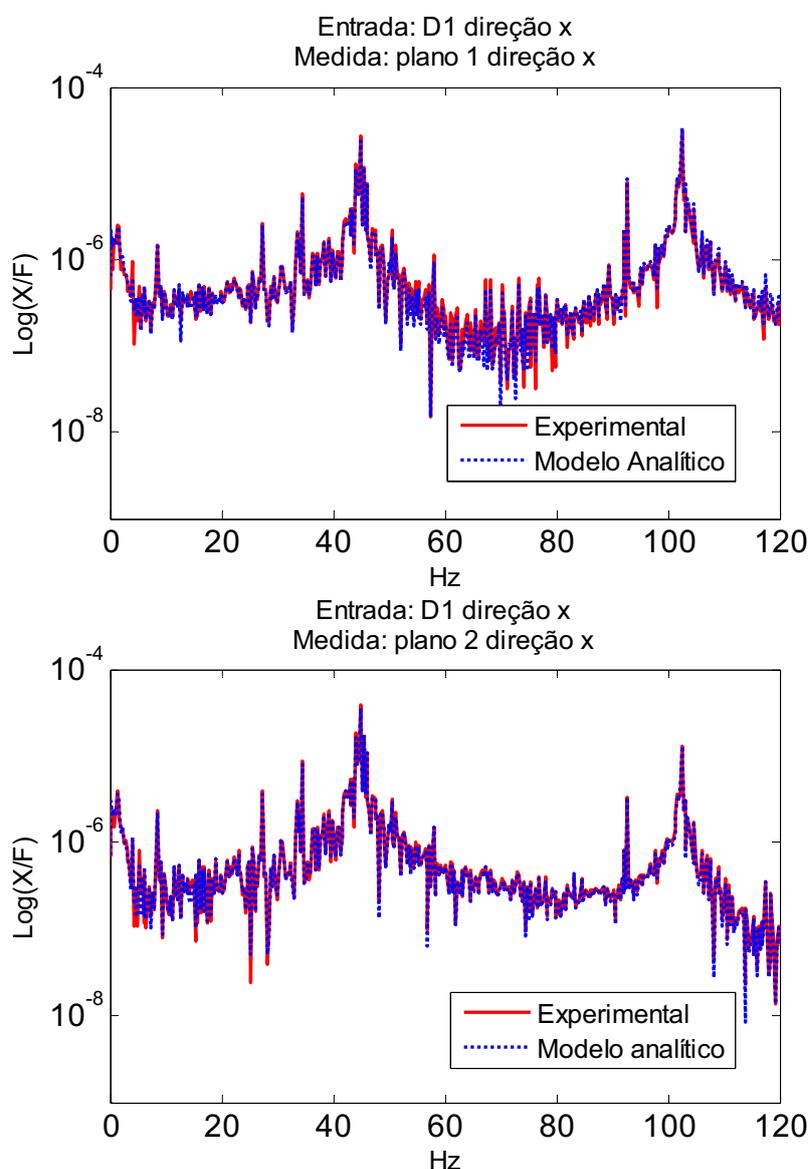


Figura 6.11 – Comparação entre a FRF gerada pelo modelo analítico ajustado após a otimização e a que foi medida na bancada de teste (direção  $x$ ).

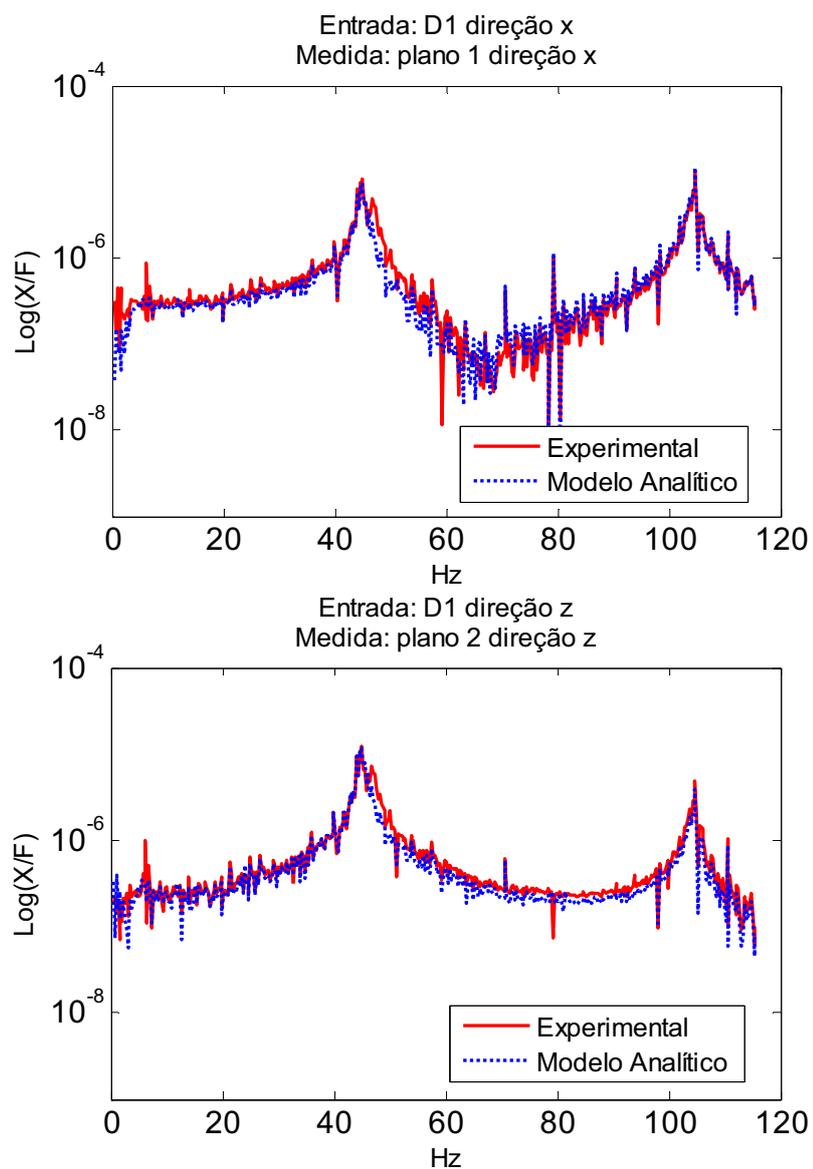


Figura 6.12 – Comparação entre a FRF gerada pelo modelo analítico ajustado após a otimização e a medida na bancada de teste (direção z).

### 6.3 Validação do Modelo Analítico para o Sistema em Rotação

Como visto anteriormente, para o rotor em repouso, as respostas medida e a simulada aproximam-se satisfatoriamente. Resta saber se o modelo analítico identificado tem o mesmo comportamento do sistema real, quando este se encontra em rotação, ou seja, quando os efeitos giroscópicos estão presentes e são importantes. Este efeito não foi levado em consideração durante o ajuste dos parâmetros e será introduzido diretamente no modelo analítico por meio de suas matrizes em elementos finitos.

Para a validação, inicialmente o rotor foi balanceado através do método dos coeficientes de influência para sua configuração linear. Após isso, introduziu-se um desbalanceamento conhecido de  $(795 \pm 45)$  g.mm na posição angular de  $(0 \pm 3)^\circ$  no plano do disco  $D_2$ . A velocidade de rotação foi então fixada em 2.100 RPM. Estes mesmos valores de desbalanceamento e velocidade de rotação foram introduzidos no modelo analítico. A Fig. 6.13 apresenta a resposta medida experimentalmente juntamente à resposta gerada pelo modelo analítico. Observa-se que a resposta do modelo analítico aproximou-se bastante da resposta medida experimentalmente, validando, desta maneira, a introdução das matrizes giroscópicas no modelo analítico. Sabe-se que se o sistema rotativo apresentar mancais hidrodinâmicos, este procedimento de ajuste pode não ser suficiente, exigindo que os parâmetros sejam atualizados para cada velocidade de rotação (Riul et al., 1992). Deve-se ainda lembrar que os efeitos cruzados são importantes no caso dos mancais hidrodinâmicos, mas poderiam ser incluídos dentre os parâmetros desconhecidos e incorporados na solução do problema inverso.

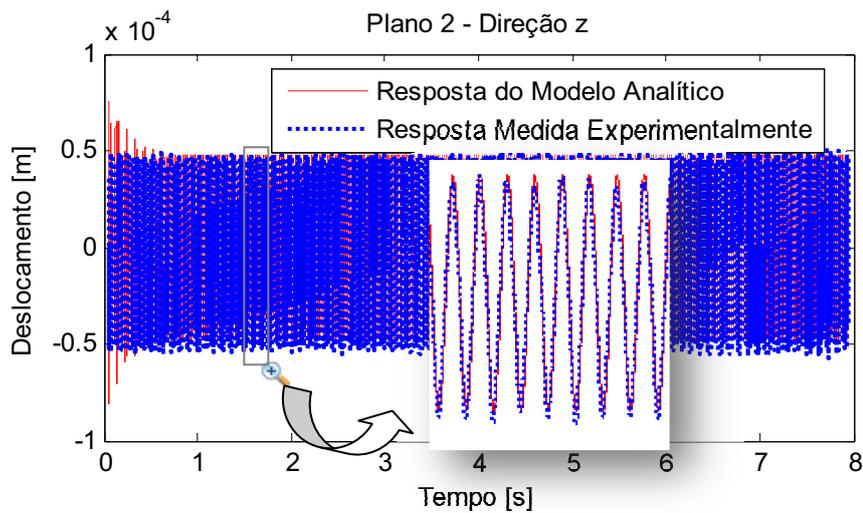


Figura 6.13 – Comparação entre a resposta medida e a resposta gerada pelo modelo identificado.

A Fig. 6.14 apresenta o diagrama de Campbell obtido por meio do modelo analítico do rotor após os parâmetros do sistema terem sido ajustados.

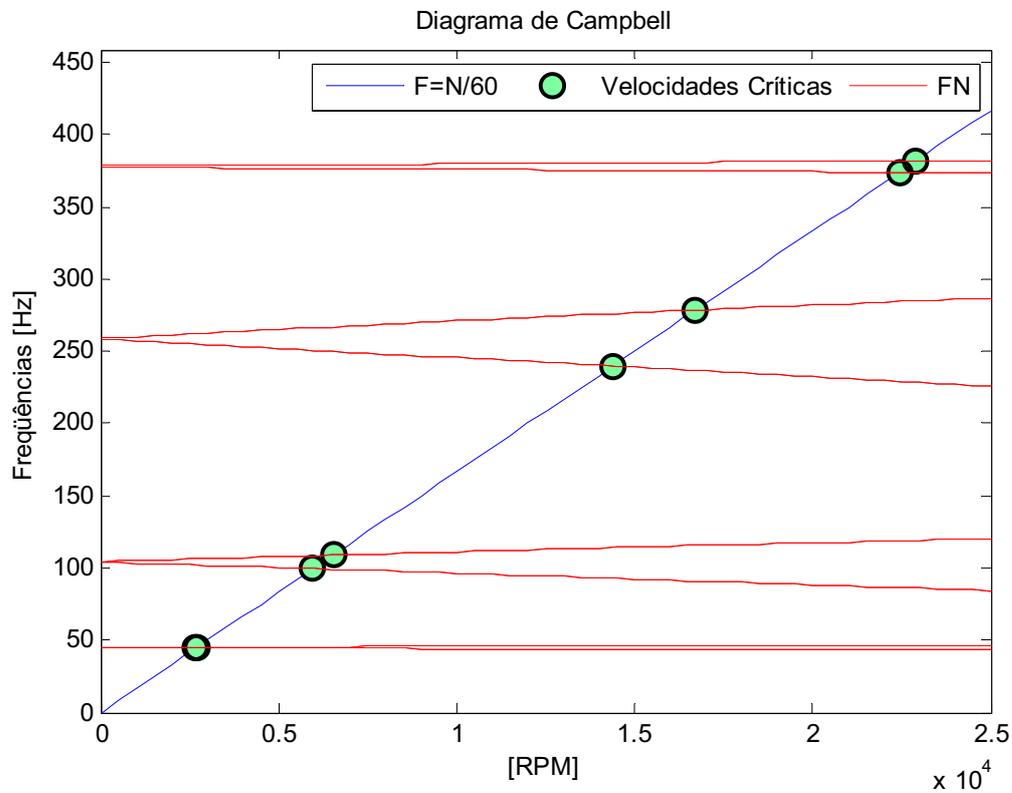


Figura 6.14 – Diagrama de Campbell da máquina rotativa em estudo.

#### 6.4 Determinação do Desbalanceamento Considerando o Sistema Linear e Não-Linear.

Para a identificação do desbalanceamento, as respostas temporais medidas nos planos 1 e 2 foram consideradas (Fig. 6.1). Estas repostas foram medidas por meio de sensores de proximidade ferromagnéticos, posicionados sobre o eixo, da forma descrita anteriormente para o caso de ajuste dos parâmetros. Nos casos simulados para identificação do desbalanceamento foi utilizado o método de otimização PSO para resolver o problema inverso. A função objetivo adotada no caso simulado (Eq. (5.7)) foi levemente modificada no caso experimental (Eq. (6.3)), pois aqui, durante o experimento, não se conheciam as condições iniciais. O sistema rotativo foi considerado em regime estacionário, com velocidade de rotação constante. Assim, a diferença entre os sinais medidos e os sinais gerados pelo método de otimização somente podem ser comparados a partir do instante em que a simulação entra também em regime estacionário. A velocidade de rotação foi monitorada por meio de um tacômetro posicionado próximo ao mancal B<sub>1</sub>. Este sensor foi usado para gerar a referência para o ângulo da fase dos deslocamentos medidos. A função objetivo é apresentada pela equação abaixo:

$$OF = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\text{norm}(x_i^{\text{measured}}[t_a \dots t_f] - x_i^{\text{simulated}}[t_a \dots t_f])}{\text{norm}(x_i^{\text{measured}}[t_a \dots t_f])} \right) \quad (6.3)$$

onde  $i$  representa os sensores e  $t_a$  é o tempo adotado para iniciar a avaliação da função objetivo (como comentado anteriormente, este instante de tempo é considerado depois que a resposta simulada entra em regime permanente e leva em consideração o sinal do tacômetro como referência).

Assim, para cada desbalanceamento considerado pelo método de otimização, três variáveis de projeto são adicionadas: a posição do nó ao longo do eixo, a amplitude do desbalanceamento e a sua posição angular. Considerou-se que as massas de correção, determinadas pela otimização, encontram-se em um intervalo de planos para o balanceamento próximo aos discos, pois experimentalmente a posição dos discos é a mais favorável para a aplicação das massas de correção. As

restrições laterais consideradas para o desbalanceamento foram as seguintes: entre 0 e 1.000 g.mm para a amplitude e entre  $-180^\circ$  a  $180^\circ$  para a fase.

Para a validação experimental da metodologia de identificação do desbalanceamento apresentada, dois desbalanceamentos foram introduzidos ao rotor que fora inicialmente balanceado por meio do método dos coeficientes de influência. O primeiro foi colocado na posição do disco  $D_1$ , com amplitude de  $(352 \pm 24)$  g.mm e fase de  $(0 \pm 3)^\circ$ ; o segundo foi introduzido na posição do disco  $D_2$ , com amplitude de  $(549 \pm 63)$  g.mm e fase de  $(-20 \pm 3)^\circ$ . O rotor foi mantido a uma velocidade de 1.837 RPM e sua resposta temporal, em regime permanente, foi medida. Para a solução do problema inverso, foram considerados 100 indivíduos pelo método de otimização PSO, sendo 100 o número máximo de iterações fixado. O intervalo dos planos de busca para o desbalanceamento foram aqueles que contêm os discos  $D_1$  e  $D_2$ .

Para o sistema linear (sem aplicar as correntes nas bobinas), os valores encontrados para o desbalanceamento foram os seguintes: 401 g.mm para o disco  $D_1$  e 615 g.mm para o disco  $D_2$ , respectivamente nas posições angulares de  $1,2^\circ$  e  $-19,1^\circ$ . Nas Figs. 6.15 apresentam-se as respostas no domínio do tempo, nas direções  $x$  e  $z$ , medidas experimentalmente no plano 1, antes e após o sistema ter sido balanceado. Nas mesmas figuras são apresentadas as respostas geradas pela simulação considerando o desbalanceamento introduzido no sistema real e, também, após a consideração dos valores identificados pela otimização.

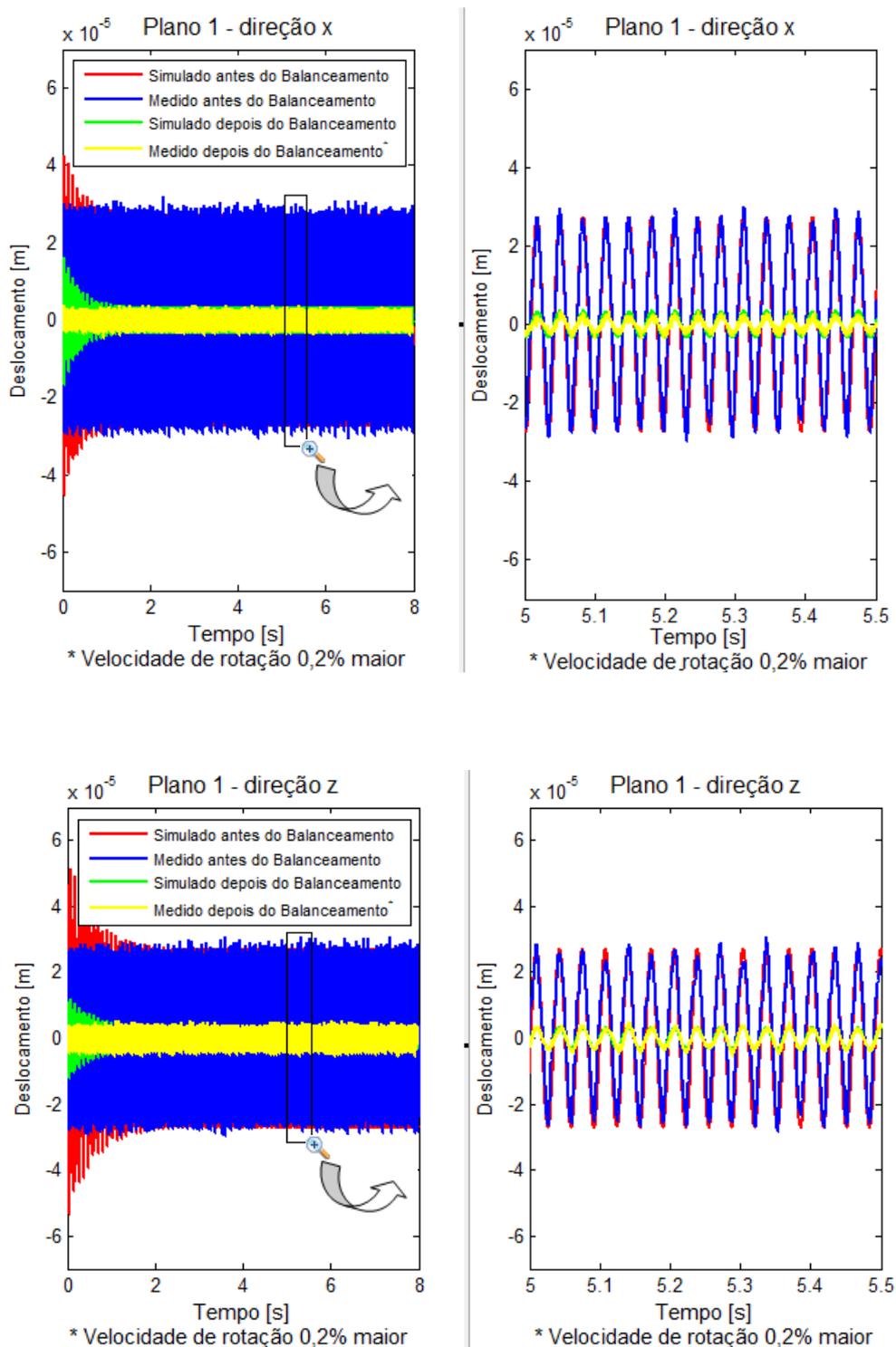


Figura 6.15 – Comparação entre a resposta no domínio do tempo medida experimentalmente e a simulada antes e depois do balanceamento para o sistema linear.

Para o caso não-linear, verificou-se através das simulações numéricas que uma pequena variação nos valores dos entreferros leva a uma modificação significativa

nas velocidades críticas do rotor, como pode ser visto na Fig. 5.47. Inicialmente tentou-se fixar os valores dos entreferros em 0,6 mm, mas, depois de montadas as bobinas, verificou-se que os valores dos entreferros não eram exatamente os desejados. Assim, como observado nas simulações, as alterações que pequenas variações no entreferro acarretam não possibilitam a utilização do valor padrão de 0,6 mm para os entreferros, sendo estes valores identificados experimentalmente. A corrente elétrica usada para alimentar as bobinas foi mantida em 4,0 A. Os desbalanceamentos introduzidos são os mesmos do caso linear e os valores encontrados pela técnica de otimização, através da solução do problema inverso, foram os seguintes: 416 g.mm em  $D_1$  e 629 g.mm em  $D_2$ , respectivamente, nas posições angulares de  $-0,9^\circ$  e  $-19,2^\circ$ . As Figs 6.16 mostram as respostas temporais nas direções  $x$  e  $z$ , medidas e simuladas no plano 1, para o sistema antes e após a introdução das massas de correção.

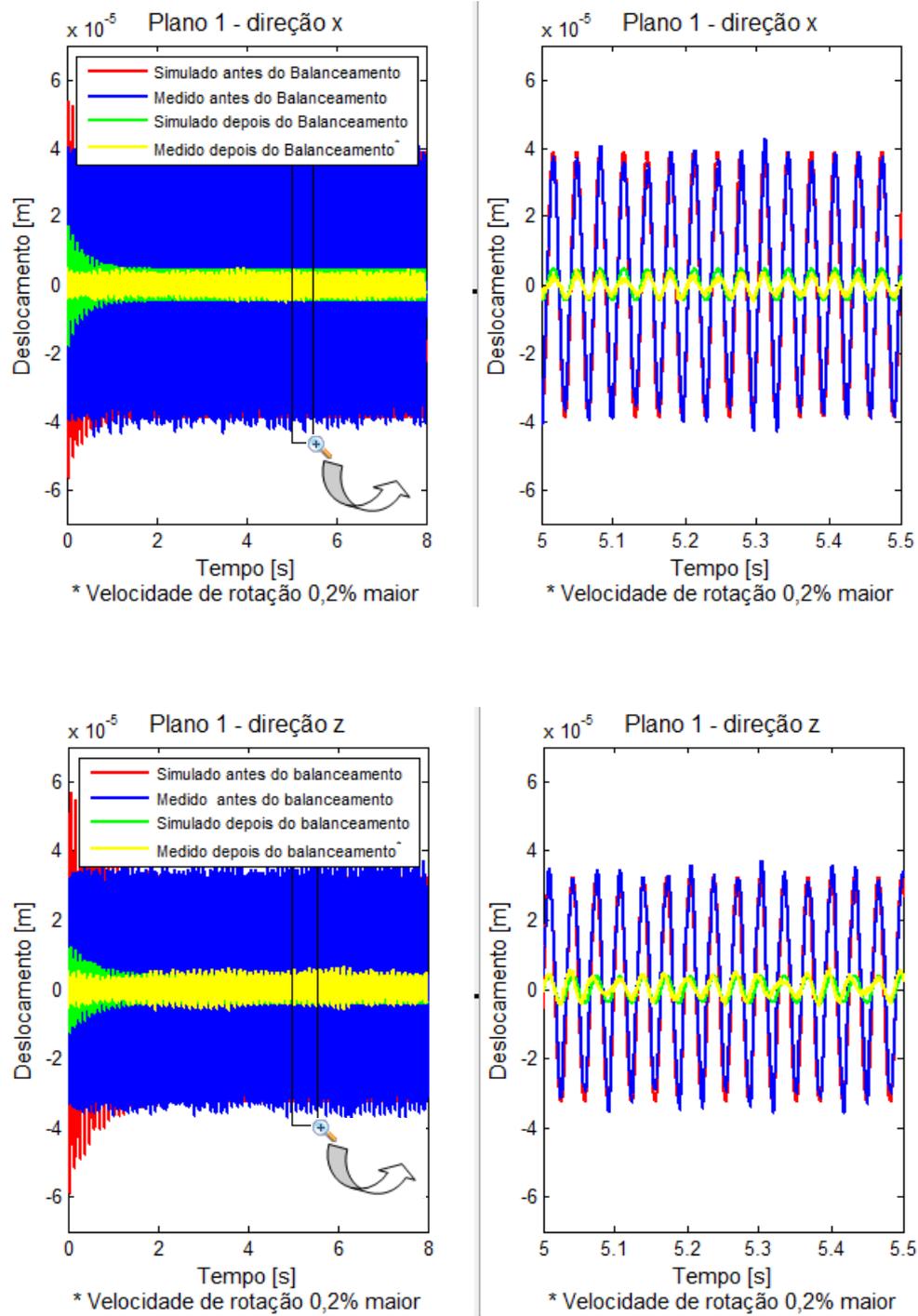


Figura 6.16 – Comparação entre a resposta no domínio do tempo medida experimentalmente e a simulada antes e depois do balanceamento para o sistema não-linear.

## **6.5 Considerações sobre os Resultados da Identificação do Desbalanceamento**

Avaliou-se o comportamento dinâmico do sistema rotativo com a presença do AEM para várias configurações do sistema rotativo. Foi proposta uma metodologia de identificação do desbalanceamento por meio de sinais temporais, tanto para o sistema com características lineares como não-lineares. Um estudo da identificação do desbalanceamento de rotores para diversas situações foi apresentado. Em todos os casos o sistema rotativo apresentou alta redução do nível de vibração após a introdução da massa de correção identificada pela metodologia proposta. Após bom conhecimento do sistema rotativo em estudo, adquirido através das simulações computacionais, a validação da metodologia foi realizada experimentalmente, com pleno sucesso, tanto para o caso linear quanto não-linear. Isso foi possível pela boa caracterização dos componentes da máquina rotativa, bem como do atuador magnético usado, uma vez que a metodologia é baseada no modelo do sistema em estudo. Deve-se lembrar que, em aplicações reais na indústria, o balanceamento residual deve ser cotejado com aquele recomendado por norma técnica. Caso o valor residual seja superior ao indicado pela norma nova campanha de balanceamento deve ser conduzida.

# CAPÍTULO VII

## CONCLUSÃO

Este trabalho foi desenvolvido no contexto que envolve as máquinas rotativas inteligentes. Neste sentido, a identificação de trincas e o retardamento do processo de fadiga pelo uso de forças eletromagnéticas capazes de mantê-las fechadas ao longo do movimento de rotação e a determinação do desbalanceamento e sua correção automática, são aspectos que tornam a máquina mais “inteligente”. O estudo em tela tem seu interesse ampliado ao se considerar que, tanto as trincas como a participação dos atuadores eletromagnéticos na dinâmica das máquinas rotativas, introduzem não-linearidades que tornam a abordagem dos problemas mais complexa.

No capítulo II apresentou-se a metodologia de identificação de parâmetros do rotor que variam com o tempo. Os resultados do processo de identificação são apresentados no capítulo V. Verificou-se que a metodologia desenvolvida para identificação de parâmetros variantes foi capaz de identificar não apenas estes, mas também os parâmetros constantes. Isto foi possível através de uma técnica que envolve a expansão dos parâmetros variantes em termos de séries ortogonais. Assim, durante a identificação, determinam-se os coeficientes de expansão do parâmetro variante e, como se conhece a base vetorial usada na expansão, pode-se resolver o problema inverso e identificar tanto os parâmetros variantes no tempo bem como os parâmetros constantes. Verificou-se uma forte dependência do número de termos usados para a expansão dos parâmetros, pois se este número for maior que o necessário para uma boa aproximação, há prejuízo na convergência no processo de identificação. Dois casos simulados de identificação foram apresentados. O primeiro estuda um sistema de 3 gdl, no qual a rigidez de uma das

molhas é proporcional ao cubo do seu deslocamento. O segundo é um sistema rotativo em balanço com uma trinca no meio do eixo para o qual se adotou o modelo Flex para a trinca. Tal modelo foi analisado no Capítulo III, juntamente com outros modelos de trinca comumente utilizados para eixos rotativos. O sucesso da metodologia foi observado nos dois casos apresentados, uma vez que os parâmetros desconhecidos foram identificados.

Foi também estudado o balanceamento de sistemas rotativos com características não-lineares. A não-linearidade foi introduzida por meio de atuadores eletromagnéticos cujo desenvolvimento matemático foi apresentado no Capítulo IV. Na seção 5.3 foi apresentado o comportamento do sistema mecânico sob diferentes configurações para o atuador eletromagnético para diferentes condições de desbalanceamento. Observou-se que ocorre uma redução na velocidade crítica do rotor em função do aumento da corrente que circula nos atuadores eletromagnéticos e do desbalanceamento, bem como da diminuição do entreferro. Assim, constata-se que a velocidade crítica diminui em função do aumento da força não-linear introduzida pelo AEM. Na seção 5.4 realizou-se um elevado número de simulações, considerando o sistema linear, para verificar se o método de otimização seria capaz de identificar o desbalanceamento, considerando diferentes posições para os desbalanceamentos e para os planos de correção. A intenção foi a de reproduzir, tanto quanto possível, situações possíveis de serem encontradas na indústria. Foi possível constatar que a introdução das massas de balanceamento em suas respectivas posições angulares (conforme identificadas pelo processo de otimização) no sistema rotativo promoveu uma boa redução no nível de vibração para todos os casos estudados. Finalmente, a metodologia foi aplicada experimentalmente com bons resultados, como pode ser observado no capítulo VI. Para isso, os parâmetros dos mancais, do AEM e amortecimento do sistema foram devidamente ajustados preliminarmente. O rotor foi balanceado tanto para sua configuração linear como não-linear, validando assim a metodologia proposta.

Na seção 5.2 apresentou-se o controle do mecanismo de fadiga por meio de AEM com resultados bastante satisfatórios. Desta forma, foram utilizadas forças eletromagnéticas para manutenção da trinca fechada. O mecanismo permitiu, por meio de simulações, que a trinca ficasse praticamente fechada durante o tempo em

que o atuador ficou ligado. Como dito anteriormente, o fechamento da trinca causou, no presente caso, alteração da órbita do sistema e mudança de sentido de precessão. Deve-se salientar que para a identificação da corrente de alimentação dos atuadores é necessário que o modelo seja validado: rotor flexível trincado e atuador eletromagnético. Experimentalmente, seria necessário medir a área da secção transversal resistente da trinca para diferentes instantes de tempo, carregamentos dinâmicos e correntes elétricas envolvidas, tornando o procedimento de difícil utilização prática. Por outro lado, os resultados de simulação indicam a viabilidade de utilização experimental da técnica proposta, uma vez que as forças introduzidas para controle da abertura da trinca pelo AEM são plenamente viáveis.

De uma maneira geral, as contribuições mais importantes apresentadas neste trabalho, foram:

- 1) Identificação de parâmetros variantes no tempo, com a finalidade de identificação de trincas em eixos de máquinas rotativas, através de sinais temporais expandidos por meio de séries de funções ortogonais;
- 2) Utilização de atuadores eletromagnéticos com o objetivo de manter a trinca fechada ao longo da rotação do eixo, abrindo espaço para aplicação de conceitos de auto-correção da trinca (*self-healing*);
- 3) Identificação do desbalanceamento em rotores não-lineares devida a presença de AEM. Este aspecto demonstra a eficiência da metodologia de balanceamento proposta para tratar de rotores contendo não-linearidades, lembrando que, nestes casos, as técnicas clássicas não podem ser utilizadas.

Finalmente são apresentadas perspectivas para trabalhos futuros:

- 1) Com relação à identificação de parâmetros variantes no tempo por meio de funções ortogonais, é importante realizar um estudo do número de termos necessários para a expansão em função da frequência com que os parâmetros variam. Isso tornaria o processo mais automatizado, dispensando o uso do método de tentativa e erro para escolher o número de termos da expansão que melhor se adapte ao caso em estudo. A validação experimental desta metodologia,

inicialmente a sistemas simples e depois a trincas em sistemas rotativos reais reveste-se de grande interesse.

2) Utilização dos AEM acoplados a mancais hidrodinâmicos tornando-os inteligentes pela possibilidade de se modificar os parâmetros de rigidez e de amortecimento. Além disso, seriam abertas novas perspectivas para viabilizar a introdução de AEM na manutenção de trincas fechadas.

3) A aplicação da metodologia de balanceamento de máquinas rotativas com eixos trincados tem grande interesse e está sendo avaliada.

Apresenta-se abaixo uma listagem da produção científica decorrente desta tese:

a) Trabalhos publicados em anais de congressos

1 MORAIS, T. S.; STEFFEN Jr, V.; MAHFOUD, J.; DER HAGOPIAN, J., "Monitoring Cracked Shaft by using Active Electro-Magnetic Actuator – Numerical Simulation"; Proc. of the 20th International Congress of Mechanical Engineering, Gramado, Brazil, November 15-20, 2009.

2 MORAIS, T. S.; STEFFEN Jr, V.; MAHFOUD, J.; DER HAGOPIAN, J., "Optimization method for the identification of unbalance distribution in non-linear rotating machinery"; Proc. of the 17<sup>th</sup> Symposium Vibrations, Chocs & Bruit, June 15-17, 2010.

b) Trabalhos aceitos ou submetidos para congressos

1 Unbalance Identification in non-Linear Rotors, IFToMM (2010).

2 Characterization of Electromagnetic Actuator for the Control of Rotating Machinery; Diname (2011).

3 Vibration attenuation in rotating machines using smart spring mechanism; Dincon (2010).

4 Crack Detection in Rotating Machines using a Modal State Observer Approach; Diname (2011).

c) Trabalho publicado em periódicos

1 MORAIS, T. S.; STEFFEN Jr, V.; BACHSCHMID, N., "Time-varying parameter identification using orthogonal functions"; Journal of Physics, Vol 35, pp. 0120072-82, 2008 (ISSN: 1742-5696)

d) Trabalhos submetidos ou em submissão para publicação em periódicos.

- 1 Simulation of the fatigue process control in a cracked rotor system by using an active electro-magnetic actuator.
- 2 Optimization of unbalance distribution in non linear rotating machinery.

## CAPÍTULO VIII

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSIS, E. G. ; STEFFEN Jr, V. . Inverse Problem Techniques for the Identification of Rotor-Bearing Systems. *Inverse Problems in Engineering*, Londres, v. 11, n. 1, p. 39-53, 2003.

BACHSCHMID, N, TANZI, E., 2003, Deflections and Strains in Cracked Shafts Due to Rotating Loads: A Numerical and Experimental Analysis,(*Int. Jo. of Rotating Machinery*, 9: 303–311)

BACHSCHMID, N, TANZI, E, 2006, Coupling of the Lateral and Torcional Vibration in a Cracked Shaft, *Advances in Vibration Control and Diagnostics*, p 13-26

BACHSCHMID, N., PENNACCHI, P., TANZI, E. AND AUDEBERT, S. “Transverse Crack Modeling and Validation in Rotor Systems, Including Thermal Effects” *International Journal of Rotating Machinery*: 113–126, 2003.

BERTHIER, P., FERRARIS G. LALANNE; 1983, “Prediction of Critical Speeds, Unbalance and Nonsynchronous Forced Response of Rotors”, *Shock and Vibration*, part 4, 103-111, May.

BORGES, R. “Contribuição ao Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Não-Lineares.”. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

BURBANO, C., E.,R. “Diagnóstico de Falhas em Máquinas Rotativas”. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia, 2005.

CHANGSHENG, ZHU, ROBB, D. A. AND EWINS, D. J. “The Dynamic of a Cracked Rotor with an active magnetic bearing” *Journal of Sound and Vibration*, 469–487, 2003.

CRAIG, JR., ROY, R., “Structural Dynamics. An introduction to computer Methods”, John Wiley & Sons, New York, N. Y., 1981

CHOU, J.H., HORNG, I.R. Shifted Chebyshev series analysis of linear optimal control systems incorporating observers. *International Journal of Control*, London, v.41, n.1, p.129-134, 1985.

CHANG, R. Y.; WANG, M. L. The application of shifted Legendre polynomials to time-delay systems and parameter identification. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, New York, v. 107, p. 79-85, 1985.

DAMIEN, G. "Circuit Magnétique – Électroaimant" e-LEE, e-learning for Electrical Engineering, 2003, <http://www.lei.ucl.be/multimedia/eLEE/FR/realisations/CircuitsElectriques/index.htm>

DER HAGOPIAN J. AND MAHFOUD, J. "Electromagnetic actuator design for the control" of light structures. *Smart Structures and Systems*, Vol. 6, No. 1 (2010) 29-38.

DIMAROGONAS, A D 1996. Vibration of cracked structures. A state-of-the-art review. *Engineering Fracture Mechanics* 55:831–857.

ENGELS, R., C.; "Finite Element Modeling of Dynamic Behavior of some basic Structural Members", *Journal of Vibration and Acoustics*, pp 236-241, Vol. 114, Jan. 1991.

GASCH, R., "A survey of the Dynamic Behaviour of a simple Rotating Shaft with a Transverse Crack" *Journal of Sound and Vibration*, 313-332, 1993.

GRIFFITH, A. A. (1921). "The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids." *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 221: 163-197.

HWANG, C. E CHEN, M. Y. Suboptimal control of linear time-varying multi-delay systems via shifted Legendre polynomials. *International Journal of Systems Science*, Hants, v.16, n.12, p.1517-1537, 1985.

HUTCHINSON, J. R.; "Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory"; *Journal of Applied Mechanics*; January, 2001.

IRWIN, G. R. (1957). "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate." *Journal of Applied Mechanics* 24: 361-364.

JUN, O. S., EUN, H. J. EARMME, Y. Y. AND LEE, C. W. Modelling and vibration analysis of a simple rotor with a breathing crack, "*Journal of Sound and Vibration*", 155/2, 1992, pp. 273-290.

KENNEDY J. AND EBERHART R. C, Particle Swarm Optimization. In *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, Australia, pages 1942–1948, 1995.

LAWN, B. R. AND WILSHAW, S. M., 1975, *J. mater. Sci.*, 10, 1049.

LALANNE, M. AND FERRARIS, G. "Rotordynamics Prediction in Engineering", John Wiley and Sons, Second Edition, 1998.

LALLEMENT, LECOANET E STEFFEN; "Vibration de Rotor sur pallier à Matrice de Raideur non Symétrique", *Mech Mach Theory*, vol 17(1), page 4755, 1982.

MAHFOUD, J. ; HAGOPIAN, J. DER. ; LEVECQUE, N. ; STEFFEN JR, V. . Experimental model to control and monitor rotating machines. *Mechanism and Machine Theory*, v. 44, p. 761-771, 2009.

MELO, G. P. E STEFFEN, V. JR., 1993, "Mechanical Systems Identification through Fourier Series Time-Domain Technique". Journal of Brazilian Society of Mechanical Science, 14 (2), 124-135.

MOHAN, B. M.; DATTA, K. B. Analysis of time-delay systems via shifted Chebyshev polynomials of the first and second kinds. International Journal Of Systems Science, Hants, v.19, n.9, p.1843-1851, 1988.

OLIVEIRA, A., G.. "Identificação de falhas e de excitações em estruturas dinâmicas usando redes neuronais". 1999. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Uberlândia, 1999.

PACHECO, R. P. E STEFFEN, V. JR., 2002, "Using Orthogonal Functions for Identification and Sensitivity Analysis of Mechanical Systems". Journal of Vibration and Control, 8, 993-1021.

PACHECO R P AND STEFFEN JR V 2003 Orthogonal Function Techniques for the Identification of Nonlinear Mechanical Systems. (Materials Science Forum, Trans Tech Publ. Ltd).

PACHECO, R. P. E STEFFEN, V. JR., 2004, "On the Identification of non-linear mechanical systems using orthogonal functions". International Journal of Non-Linear Mechanics, 39, 1147-1159.

PARASKEVOPOULOS, P. N., KEKKRIS, G. T., G. T. Output sensitivity analysis using orthogonal functions. International Journal of Control , London, v.40, n. 4, p.763-772. 1984.

PENNACCHI, P., BACHSCHMID, N., AND VANIA, A., "A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines", Mechanical Systems and Signal Processing, 2112-2147, 2006.

POMEROY, P. An Introduction to Particle Swarm Optimization, 2003. [Online; accessed 25-September-2003].

QUINN, D.D., MANI, G., KASARDA, M. "Active health monitoring in a rotating cracked shaft using active magnetic bearings as force actuators" Journal of Sound and Vibration, 454-465, 2006.

RÉMOND D, NEYRAND J, ARIDON G AND DUFOUR R 2007 On the improved use of Chebyshev expansion for mechanical system identification. (Mechanical Systems and Signal Processing, Science Direct).

RIUL, J. A. ; STEFFEN Jr, V. ; RIBEIRO, C. R. ESTUDO TEÓRICO DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS CILÍNDRICOS. REVISTA BRASILEIRA DE CIENCIAS MECANICAS, v. XIV, p. 17-40, 1992.

SHIH, D-H., KUNG, F.C. The shifted Legendre approach to non-linear system analysis and identification. International Journal of Control, London, v.42, n.6, p.1399-1410, 1985.

SALDARRIAGA, M. R. V. ; MAHFOUD, J. ; STEFFEN Jr, V. ; DER HAGOPIAN, J. . Adaptive Balancing of highly Flexible Rotors by using artificial neural networks. Smart Structures and Systems (Print), v. 5, p. 507-515, 2009.

SPIEGEL, M. R. (1976), *Análise de Fourier*. São Paulo: McGraw-Hill. (Coleção Schaum)

SHAMPINE, L. F. E GORDON, M. K. "*Computer Solution of Ordinary Differential Equations: the Initial Value Problem*", W. H. Freeman, San Francisco, 1975.

STEFFEN JR., V.; "Estudo Analítico e Experimental de Dinâmica de Rotores". *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*. Setembro, 1981.

VIANA, F. C. E STEFFEN, V. JR.; 2007. *Simplex optimization toolbox*, versão 4.1.

VIANA, F. A. C., 2008. *Surrogate Modeling Techniques and Heuristic Optimization Methods Applied to Design and Identification Problems*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia.

WAUER J, 1990. On the dynamics of cracked rotors: a literature survey. *Applied Mechanics Reviews* 43:13–17.