



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CONTROLE ATIVO DE RUÍDO EMPREGANDO PLACAS  
RETANGULARES COM ATUADORES PIEZOELÉTRICOS  
DISTRIBUÍDOS**

Danuza Cristina Santana

Uberlândia, agosto de 2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CONTROLE ATIVO DE RUÍDO EMPREGANDO PLACAS  
RETANGULARES COM ATUADORES PIEZELÉTRICOS DISTRIBUÍDOS**

Dissertação apresentada  
à Universidade Federal de Uberlândia por:

**DANUZA CRISTINA SANTANA**

Como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em  
Engenharia Mecânica

Aprovada por:

Prof. Dr. Marcus Antônio Viana Duarte – (UFU) - Orientador  
Prof. Dr. Domingos Alves Rade – (UFU) - Co-orientador  
Prof. Dr. Valder Steffen Jr – (UFU)  
Prof. Dr. Eduardo Bauzer Medeiros – (UFMG)  
Eng. Anatólio Assis – (ISOBRASIL)

Uberlândia, 26 de agosto de 2002.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

- S232c Santana, Danuza Cristina, 1976-  
Controle ativo de ruído empregando placas retangulares com atuadores piezoelétricos distribuídos / Danuza Cristina Santana. - 2002.  
197 f. : il.
- Orientador: Marcus Antônio Viana Duarte.  
Co-orientador: Domingos Alves Rade.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.
1. Vibração - Teses. 2. Placas (Engenharia) - Teses. I. Duarte, Marcus Antônio Viana. II. Rade, Domingos Alves. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

---

CDU: 621:534

*A Deus, por me iluminar em todos os instantes de minha vida, aos meus pais, Benedito e Josefa Santana, por tudo que fizeram e fazem por mim, aos meus irmãos Débora e Alexandre e aos meus sobrinhos Bruno e Rafaela.*

## **Agradecimentos**

A Deus, por estar sempre presente em minha vida, me iluminando, fortalecendo e dando a paz que necessito.

À minha Família, por todo apoio e carinho a mim dedicado.

Aos amigos laboratório, pelas contribuições dadas ao trabalho, pela amizade e pelo bom ambiente de trabalho.

Aos demais amigos da pós-graduação, pela amizade e apoio.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, por me proporcionar esta oportunidade de desenvolvimento pessoal e profissional.

Ao Professor Marcus Antônio Viana Duarte, pela orientação, que tem sido realizada desde minha iniciação científica, pela capacidade, pelo apoio dado para a realização deste trabalho e pela amizade.

Ao Professor Domingos Alves Rade, pela orientação, pelo exemplo de profissional, por todo o apoio dado para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições dadas ao trabalho.

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – pelo apoio financeiro.

Santana, D.C.,2002, “Controle Ativo de Ruído Empregando Placas Retangulares com Atuadores Piezoelétricos Distribuídos”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia - MG.

### Resumo

O presente trabalho tem por objetivo a realização de um estudo abrangente sobre a utilização de placas finas retangulares instrumentadas com pastilhas piezoelétricas, como fontes de controle ativo de ruído. Para tanto é desenvolvida a modelagem analítica do comportamento vibratório de placas finas, retangulares e uniformes, com base na teoria de Kirchhoff. É desenvolvida a formulação analítica que descreve a interação placa-atuadores piezoelétricos. Considerando como fonte primária uma onda plana harmônica oblíqua incidente sobre a placa, é desenvolvida a modelagem do comportamento vibratório de placas excitadas por fontes sonoras. Após estes desenvolvimentos, realiza-se o estudo da radiação sonora emitida por placas retangulares em campo distante baseada na integral de Rayleigh. Utiliza-se então um sistema de controle ótimo não adaptativo do tipo *feedforward* a fim de otimizar a tensão elétrica de ativação dos atuadores piezoelétricos de maneira que a potência sonora radiada em campo distante seja minimizada. É ainda proposto um procedimento de otimização do posicionamento dos atuadores piezoelétricos utilizando Algoritmos Genéticos.

Com base nos desenvolvimentos teóricos, são realizadas numerosas simulações computacionais tendo em vista a avaliação da teoria desenvolvida. Nestas simulações é avaliada a influência de diferentes parâmetros, tais como o número, tamanho e posicionamento dos atuadores na eficiência do sistema de controle .

Palavras-chave: *Acústica, Placas,, Atuadores Piezoelétricos, Otimização, Vibroacústica.*

Santana, D.C., 2002, "Active Noise Control using Rectangular Plates with Distributed Piezoelectric Actuators", M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia , MG.

### **Abstract**

The present work proposes a comprehensive study regarding the use of rectangular thin plates with bonded piezoelectric patches as active noise control sources. With this aim, it is developed an analytical model for the vibratory behavior of thin, uniform rectangular plates based on Kirchhoff theory. Also, the formulation accounting for the interaction between plates and piezoelectric actuators attached to their surface is developed. Considering as the primary source a harmonic plane oblique incident wave, it is developed a model for the vibration motion of simply supported plates excited by sound sources. Then, a study is carried out, based on Rayleigh's integral, which provides a model for the sound radiated in the far field from vibrating rectangular plates. A non adaptive optimal control system of *feedforward* type is used to obtain the optimal input voltage for the activation of piezoelectric actuators so that the acoustic power radiated in far field is minimized. It is still proposed an optimization procedure for to choice of the best position of the piezoelectric actuators using Genetic Algorithms. Based on the theoretical developments, a number of computer simulations are carried out aiming at evaluating the main features of the theory studied. In these simulations, it is evaluated the influence of different parameters, such as the number, size and position of the actuators on the effectiveness of the control system.

**Keywords:** *Acoustics, Plates, Piezoelectric Actuator, Optimization, Vibroacoustics.*

## LISTA DE TABELAS E FIGURAS

### Tabelas

Tabela 6.1- Especificações da placa	103
Tabela 6.2- Frequências naturais da placa [Hz]	103
Tabela 6.3 - Propriedades da cerâmica piezoelétrica G-1195	104
Tabela 6.4 - Configuração I, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=87,5\text{Hz}$ .	105
Tabela 6.5 - Configuração I, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=187,8\text{ Hz}$ .	107
Tabela 6.6 - Configuração I, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=139,7\text{Hz}$ .	108
Tabela 6.7 - Configuração II, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=87,5\text{Hz}$ .	110
Tabela 6.8 - Configuração II, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=187,8\text{ Hz}$ .	111
Tabela 6.9 - Configuração II, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=139,7\text{Hz}$ .	112
Tabela 6.10 - Configuração III, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=87,5\text{Hz}$ .	114
Tabela 6.11 - Configuração III, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=187,8\text{ Hz}$ .	116
Tabela 6.12 - Configuração III, amplitudes modais da placa (dB), $\omega=139,7\text{Hz}$ .	117
Tabela 6.13 - Amplitudes modais da placa sem controle [dB], $\omega=85\text{Hz}$ .	119
Tabela 6.14 - Amplitudes modais da placa sem controle [dB], $\omega=190\text{Hz}$ .	120
Tabela 6.15 - Amplitudes modais da placa sem controle [dB], $\omega=140\text{Hz}$ .	121
Tabela 6.16 - Eficiência modal de radiação da placa excitada em $\omega=85\text{Hz}$ .	122
Tabela 6.17 - Eficiência modal de radiação da placa excitada em $\omega=190\text{Hz}$ .	123
Tabela 6.18 - Influência do tamanho dos atuadores, $\omega=85\text{Hz}$ .	124
Tabela 6.19 - Influência do tamanho dos atuadores, $\omega=190\text{Hz}$ .	125
Tabela 6.20 - Efeito do tamanho dos atuadores, $\omega=85\text{Hz}$ .	126
Tabela 6.21 - Amplitudes modais, [dB], da placa controlada por um par de atuadores $\omega=85\text{Hz}$ .	128



Tabela 6.22 - Amplitudes modais, [dB], da placa controlada por um par de atuadores $\omega = 140\text{Hz}$ .	134
Tabela 6.23 - Amplitudes modais [dB], da placa controlada por um par de atuadores $\omega = 190\text{Hz}$ .	136
Tabela 6.24 - Amplitudes modais, [dB], da placa controlada por dois pares de atuadores $\omega = 85\text{Hz}$ .	139
Tabela 6.25 - Amplitudes modais, [dB], da placa controlada por dois pares de atuadores $\omega = 140\text{Hz}$ .	141
Tabela 6.26 - Amplitudes modais [dB], da placa controlada por dois pares de atuadores $\omega = 190\text{Hz}$ .	143
Tabela 6.27 - Amplitudes modais, [dB], da placa controlada por três pares de atuadores $\omega = 85\text{Hz}$ .	145
Tabela 6.28 - Amplitudes modais da placa, [dB] controlada por três pares de atuadores $\omega = 140\text{Hz}$ .	147
Tabela 6.29 - Amplitudes modais da placa,[dB] controlada por três pares de atuadores $\omega = 190\text{Hz}$ .	149
Tabela 6.30 - Amplitudes modais da placa, [dB] controlada quatro pares de atuadores $\omega = 85\text{Hz}$ .	153
Tabela 6.31 - Amplitudes modais da placa, [dB] controlada quatro pares de atuadores $\omega = 140\text{Hz}$ .	154
Tabela 6.32 - Amplitudes modais da placa, [dB] controlada quatro pares de atuadores $\omega = 190\text{Hz}$ .	156
Tabela 6.33 - Amplitudes modais da placa, [dB] controlada quatro pares de atuadores $\omega = 85\text{Hz}$ .	154
Tabela 6.34 - Amplitudes modais da placa, [dB] controlada quatro pares de atuadores $\omega = 140\text{Hz}$ .	158
Tabela 6.35 - Amplitudes modais da placa , [dB] controlada por quatro pares de atuadores $\omega = 190\text{Hz}$ .	160
Tabela 6.36 - Análise comparativa dos resultados obtidos utilizando-se as diferentes configurações já estudadas.	161
Tabela 6.37 - Análise comparativa dos resultados obtidos utilizando-se as diferentes configurações já estudadas.	164
Tabela 6.38 - Análise comparativa dos resultados obtidos utilizando-se as diferentes configurações já estudadas.	166
Tabela 6.39 -Amplitudes modais da placa, [dB] controlada por dois pares de atuadores	168

que obedecem ao mesmo sinal de controle.  $\omega = 85\text{Hz}$ .

Tabela 6.40- Amplitudes modais da placa, [dB] controlada por dois pares de atuadores que obedecem ao mesmo sinal de controle. $\omega = 140\text{Hz}$ .	169
Tabela 6.41- Amplitudes modais da placa, [dB] controlada por dois pares de atuadores que obedecem ao mesmo sinal de controle. $\omega = 190\text{Hz}$ .	170
Tabela 7.1 - Análise comparativa dos resultados obtidos para o sistema controlado por um par de atuadores, posicionado de forma arbitrária e ótima.	188
Tabela 7.2 - Análise comparativa dos resultados obtidos para o sistema controlado por dois pares de atuadores, posicionados de forma arbitrária e ótima.	188
Tabela 7.3 - Análise comparativa dos resultados obtidos para o sistema controlado por três pares de atuadores, posicionados de forma arbitrária e ótima.	188

## Figuras

Figura 2.1- Dimensões da placa e posicionamento do sistema de referência.	5
Figura 2.2- Representação das componentes de tensão em um elemento da placa.	6
Figura 2.3- Representação dos deslocamentos da placa.	7
Figura 2.4- Momentos que atuam na placa.	11
Figura 2.5- Momentos no contorno da placa.	13
Figura 2.6- Coordenadas curvilíneas ao longo do contorno $\Gamma$ .	21
Figura 2.7- Esforços atuantes sobre um elemento de placa.	25
Figura 2.8- Modo (1,1) de vibração da placa.	29
Figura 2.9- Modo (1,2) de vibração da placa.	29
Figura 2.10- Modo (2,1) de vibração da placa.	30
Figura 2.11- Modo (2,2) de vibração da placa.	30
Figura 3.1- Tensões atuantes em um elemento piezoeletrico.	32
Figura 3.2- Ilustração dos eixos de polarização do elemento piezoeletrico acoplado à placa.	35

Figura 3.3- Acoplamento placa–piezoelétricos.	36
Figura 3.4- Distribuição de tensão nos planos x-y e y-z, devidas a ativação do piezoelétrico.	37
Figura 3.5- Distribuição de tensão em um elemento de placa.	41
Figura 3.6- Ilustração do sistema placa-elementos piezoelétricos.	44
Figura 3.7 – Sistema placa piezoelétrico, representação da simetria do elemento piezoelétrico em relação a $\bar{x}$ .	50
Figura 3.8 – Sistema placa piezoelétrico, representação da simetria do elemento piezoelétrico em relação a $\bar{y}$ .	51
Figura 3.9 – Sistema placa piezoelétrico, representação da simetria do elemento piezoelétrico em relação a $\bar{x}$ e $\bar{y}$ .	52
Figura 4.1- Deformação de onda longitudinal e tensão normal.	56
Figura 4.2- Elemento de placa, deformação decorrente da propagação de uma onda transversal pura.	56
Figura 4.3 – Forma cinemática da onda transversal pura. (Figura extraída do livro Foundations of Engineering Acoustics, Fahy 2001).	57
Figura 4.4- Forma cinemática da onda quase longitudinal. (Figura extraída do livro Foundations of Engineering Acoustics, Fahy 2001).	57
Figura 4.5- Forma cinemática da onda de flexão. (Figura extraída do livro Foundations of Engineering Acoustics, Fahy 2001).	58
Figura 4.6 – Propagação de onda em uma interface plana.	63
Figura 4.7 - Radiação de uma placa finita.	66
Figura 4.8 – Fenômeno de cancelamento em placas radiando em frequências subcríticas. Modo simétrico.	67
Figura 4.9 – Fenômeno de Cancelamento em placas radiando em frequências subcríticas. Modo anti-simétrico.	67
Figura 4.10 – Fenômeno de cancelamento em placas sem contorno radiando em frequências subcríticas.	68
Figura 4.11- Sistema onda incidente–placa e sistema de coordenadas.	68
Figura 4.12 – Sistema de Coordenadas de uma placa radiando pressão sonora.	77
Figura 4.13 – Fenômeno de cancelamento em placas radiando em frequências subcríticas - Modo de Canto.	88
Figura 4.14 – Fenômeno de Cancelamento em placas radiando em frequências	88

subcríticas- Modo de Borda.

Figura 5.1- Patente de Lueg.	93
Figura 5.2- Absorvedor eletrônico de Olson.	94
Figura 5.3 - Controle Ativo de Ruído Básico, Sistema Feedback.	96
Figura 5.4- Controle Ativo de Ruído Básico, Sistema Feedforward.	97
Figura 6.1- Sistema placa-PZTs, Configuração I.	105
Figura 6.2 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 87,5Hz, Configuração I.	106
Figura 6.3 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 187,8Hz, Configuração I.	107
Figura 6.4 – Deslocamentos Forçados da placa excitada em 139,7Hz, configuração I.	109
Figura 6.5- Sistema placa-PZTs, Configuração II.	109
Figura 6.6 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 87,5Hz, Configuração II.	111
Figura 6.7 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 187,8Hz, Configuração II.	112
Figura 6.8 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 139,7Hz. Configuração II.	113
Figura 6.9- Sistema placa-PZTs, Configuração III.	114
Figura 6.10– Deslocamentos forçados da placa excitada em 87,5Hz, Configuração III.	115
Figura 6.11– Deslocamentos forçados da placa excitada em 187,8Hz, Configuração III.	117
Figura 6.12 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 139,7Hz, Configuração III.	118
Figura 6.13 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente com frequência de 85 Hz.	120
Figura 6.14 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente com frequência de 190 Hz.	121
Figura 6.15 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente com frequência de 140 Hz.	122
Figura 6.16 – Esquema ilustrativo da posição do par de atuadores no centro da placa.	124
Figura 6.17 – Esquema ilustrativo da posição do par de atuadores na placa.	125
Figura 6.18 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85 Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	128

Figura 6.19- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( __ ) : sem controle; ( _._ ): com controle.	129
Figura 6.20 - Modo(1,1)	129
Figura 6.21 - Modo(1,2)	129
Figura 6.22 - Modo(1,3)	129
Figura 6.23 - Modo(1,4)	129
Figura 6.24 - Modo(1,5)	129
Figura 6.25 - Modo(1,6)	129
Figura 6.26 - Modo (2,1)	130
Figura 6.27 - Modo (2,2)	130
Figura 6.28 - Modo (2,3)	130
Figura 6.29 - Modo (2,4)	130
Figura 6.30 - Modo (2,5)	130
Figura 6.31 - Modo (2,6)	130
Figura 6.32 - Modo (3,1)	130
Figura 6.33- Modo (3,2)	130
Figura 6.34- Modo (3,3)	130
Figura 6.35 - Modo (3,4)	131
Figura 6.36 - Modo (3,5)	131
Figura 6.37 - Modo (3,6)	131
Figura 6.38 - Modo (4,1)	131
Figura 6.39 - Modo (4,2)	131
Figura 6.40 - Modo (4,3)	131
Figura 6.41 - Modo (4,4)	131
Figura 6.42 - Modo (4,5)	131
Figura 6.43 - Modo (4,6)	131
Figura 6.44 -Modo (5,1)	132
Figura 6.45 - Modo (5,2)	132

Figura 6.46 - Modo (5,3)	132
Figura 6.47 - Modo (5,4)	132
Figura 6.48 - Modo (5,5)	132
Figura 6.49 - Modo (5,6)	132
Figura 6.50- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e com controle.	133
Figura 6.51 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140 Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	134
Figura 6.52- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ) : com controle.	135
Figura 6.53- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e com controle.	135
Figura 6.54 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190 Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	136
Figura 6.55- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ) : com controle.	137
Figura 6.56- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 190Hz, sem controle e com controle.	137
Figura 6.57- Segunda configuração do sistema placa e atuadores piezoelétricos.	138
Figura 6.58 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	139
Figura 6.59- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ) : com controle.	140
Figura 6.60 - Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e com controle.	140
Figura 6.61 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	141
Figura 6.62- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( __ ) :sem controle; ( _._ ) : com controle.	142

Figura 6.63- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e com controle.	142
Figura 6.64 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	143
Figura 6.65- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ): com controle.	144
Figura 6.66- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 190Hz, sem controle e com controle.	144
Figura 6.67 - Terceira configuração do sistema placa e atuadores piezoelétricos.	145
Figura 6.68 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	146
Figura 6.69- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ): com controle.	146
Figura 6.70- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e com controle.	147
Figura 6.71 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	148
Figura 6.72- Diretividade de radiação da placa excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz.( __ ):sem controle; ( _._ ): com controle.	148
Figura 6.73- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e com controle.	149
Figura 6.74 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	150
Figura 6.75- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ): com controle.	151
Figura 6.76 - Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 190Hz, sem controle e com controle.	151
Figura 6.77- Quarta configuração do sistema placa e atuadores piezoelétricos.	152
Figura 6.78 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlada por de atuadores piezoelétricos.	153

Figura 6.79 - Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ):com controle.	154
Figura 6.80 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	155
Figura 6.81 - Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ): controlada.	155
Figura 6.82 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.	156
Figura 6.83- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ): com controle.	157
Figura 6.84 - Configuração V, placa com quatro pares de atuadores.	158
Figura 6.85 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlados por atuadores piezoelétricos.	159
Figura 6.86- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ):com controle.	159
Figura 6.87 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada por quatro pares de atuadores piezoelétricos.	160
Figura 6.88- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ):com controle.	161
Figura 6.89 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlados por atuadores piezoelétricos.	162
Figura 6.90- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( __ ):sem controle; ( _._ ):com controle.	162
Figura 6.91 – Comparação dos padrões de deslocamentos obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 85Hz.	163
Figura 6.92 – Comparação dos padrões de diretividade de radiação obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 85Hz.	163
Figura 6.93 – Comparação dos padrões de deslocamento obtidos utilizando diferentes configurações de controle, para frequência de excitação 140Hz.	165
Figura 6.94 – Comparação dos padrões de diretividade de radiação da placa obtidos	165



utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 140Hz.	
Figura 6.95 – Comparação dos padrões de deslocamento obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 190Hz.	167
Figura 6.96 – Comparação dos padrões de diretividade de radiação da placa obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 190Hz.	167
Figura 6.97- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e controlada por dois piezoelétricos guiados pelo mesmo sinal.	169
Figura 6.98- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e controlada por dois pares de atuadores piezoelétricos guiados pelo mesmo sinal.	171
Figura 6.99- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 190Hz, sem controle e controlada por dois pares de atuadores piezoelétricos guiados pelo mesmo sinal.	172
Figura 7.1 – Esquema representativo do posicionamento ótimo do atuador, com a placa excitada em 85Hz.	175
Figura 7.2 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85 Hz.	176
Figura 7.3 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 140Hz.	177
Figura 7.4 – Esquema representativo do posicionamento ótimo do atuador, com a placa excitada em 190Hz.	178
Figura 7.5 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 190Hz.	178
Figura 7.6 – Aptidão da média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85Hz.	179
Figura 7.7– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 85Hz.	180
Figura 7.8– Aptidão da média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 140Hz.	181
Figura 7.9– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 140Hz.	181
Figura 7.10 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 190Hz.	182

Figura 7.11 – Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 190Hz.	182
Figura 7.12 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85Hz.	183
Figura 7.13– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 85Hz.	184
Figura 7.14 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 140Hz.	185
Figura 7.15– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 140Hz.	185
Figura 7.16 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85Hz.	186
Figura 7.17– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 190Hz.	187

## Lista de Símbolos e Abreviaturas

### Letras Latinas

$A_l$	: Função de distribuição de pressão sonora resultante da excitação da placa pelos elementos piezoelétricos.
$B_j$	: Função de distribuição de pressão sonora resultante da excitação da placa pela onda plana incidente.
$[\tilde{A}], [\tilde{B}], [\tilde{B}A]$	: Matrizes de controle.
$\{\bar{p}\}$	: Vetor de tensões ótimas.
$\tilde{A}, \tilde{B}$	: Amplitudes complexas de pressão sonora.
$\{\bar{A}\}, \{\bar{B}\}$	: Vetores de controle.
$a, b$	: Dimensões da placa nas direções $x$ e $y$ , respectivamente.
$c'_l$	: Velocidade de propagação da onda quase longitudinal.
$C_0$	: Constante do material piezoelétrico.
$c_f$	: Velocidade de propagação de onda de flexão livre.
$c_l$	: Velocidade de propagação da onda longitudinal.
$c_s$	: Velocidade de propagação da onda transversal.
$D$	: Módulo de rigidez da placa.
$D_\theta$	: Fator de Diretividade.
$DI(\theta)$	: Índice de Diretividade.
$d_{ijk}$	: Componentes do tensor das constantes dielétricas do material piezoelétrico.
$dS$	: Diferencial de superfície.
$dV$	: Diferencial de volume.
$E$	: Módulo de elasticidade
$E_i$	: Componentes do vetor campo elétrico.
$E_p$	: Módulo de elasticidade da placa.
$E_{pe}$	: Módulo de elasticidade do elemento piezoelétrico.
$f$	: Frequência de excitação (Hz).
$f_c$	: Frequência crítica (Hz).

$G$	: Módulo de cisalhamento.
$h(\cdot)$	: Função degrau unitário.
$h$	: Espessura da placa.
$[H]$	: Matriz de coeficientes elásticos.
$I(r, \theta, \phi)$	: Intensidade acústica no campo distante.
$I_m, I_n$	: Funções derivadas da Integral de Rayleigh.
$\bar{I}'_m, \bar{I}'_n$	: Funções da força modal para onda plana incidente.
$I_{ref}$	: Intensidade sonora de preferência.
$K_n$	: Força de cisalhamento de Kirchhoff de contorno.
$K$	: Parâmetro adimensional.
$k$	: Número de onda acústica.
$K$	: Função derivada da Integral de Rayleigh.
$k_f$	: Número de onda de flexão livre.
$k_p$	: Número de onda da placa.
$k_x$	: Número de onda acústica na direção $x$ .
$k_z$	: Número de onda acústica na direção $z$ .
$l, m, 0$	: Coordenadas de um ponto arbitrário do contorno da placa.
$L_x$	: Dimensão da placa na direção $x$ .
$L_y$	: Dimensão da placa na direção $y$ .
$\{M\}$	: Vetor de momentos.
$m, n$	: Índices modais.
$M_n$	: Momento fletor atuante no plano $Oxz$ .
$M_{ns}$	: Momento torçor atuante em torno da direção normal.
$M_s$	: Momento fletor atuante na direção perpendicular ao contorno.
$m_s$	: Massa por unidade de superfície.
$M_x$	: Momento fletor em relação ao eixo $x$
$M_{xy}$	: Momento torçor
$M_y$	: Momento fletor em relação ao eixo $y$
$N_s$	: Número de fontes sonoras.
$N_c$	: Número de atuadores piezoelétricos.
$n$	: Direção normal ao contorno.

$\{P_i\}$	: Componentes do vetor de polarização elétrica.
$\tilde{p}$	: Pressão sonora.
$p(x,y,t)$	: Carregamento externo distribuído.
$P_i$	: Amplitude da pressão sonora.
$p_n(r,\theta,\phi)$	: Pressão sonora radiada pela fonte primária.
$p_c(r,\theta,\phi)$	: Pressão sonora radiada por excitação controlada.
$p_t(r,\theta,\phi)$	: Pressão sonora radiada total.
$p_{ref}$	: Pressão sonora de referência.
$P_o$	: Ponto sobre o plano médio da placa
PZT	: Zirconato Titanato de Chumbo.
$Q_x$	: Esforço cortante na direção $x$ .
$Q_y$	: Esforço cortante na direção $y$ .
$R$	: Distância do ponto de observação à fonte elementar.
$R$	: Raio de giração da seção.
$S$	: Superfície.
$T$	: Energia Cinética.
$t$	: Espessura do elemento piezoelétrico.
TL	: <i>Perda de Transmissão</i> .
$u$	: Campo de deslocamentos na direção $x$ .
$\dot{u}$	: Componente de velocidade de um ponto genérico da placa na direção $x$ .
$u_o$	: Deslocamento inicial da placa na direção $x$ .
$v$	: Campo de deslocamentos na direção $y$ .
$\dot{v}$	: Componente de velocidade de um ponto genérico da placa na direção $y$ .
$V$	: Tensão elétrica aplicada.
$V_{ext}$	: Energia de deformação externa da placa.
$V_{int}$	: Energia de deformação interna da placa.
$v_o$	: Deslocamento inicial da placa na direção $y$ .
$w$	: Campo de deslocamentos na direção $z$ .
$\dot{w}$	: Componente de velocidade de um ponto genérico da placa na direção $z$ .
$\dot{w}(r_s)$	: Componente da velocidade normal à superfície $S$ .
$W(x,y)$	: Deslocamentos da placa.
$W_{mn}$	: Amplitudes modais de vibração da placa.

$W_{mn}^{pi}$	: Amplitudes modais de vibração da placa causada pela incidência de uma onda plana.
$W_{mn}^c$	: Amplitudes modais de vibração da placa causada pela atuação dos atuadores piezoelétricos.
$x_1, x_2, y_1, y_2$	: Coordenadas do elemento piezoelétrico.
$x_p, y_p, z_p$	: Coordenadas retangulares do ponto de observação da pressão radiada.
$x_s, y_s$	: Coordenadas retangulares da fonte elementar na placa.
$z(k)$	: Impedância acústica específica.

## Lista de Símbolos e Abreviaturas

### Letras Gregas

$\{\mathcal{U}\}$	: Vetor de curvaturas.
$\delta$	: Operador Variacional.
$\delta(.)$	: Função Delta de Dirac.
$\Delta$	: Operador Laplaciano.
$\varepsilon_{ijk}$	: Componentes do tensor de deformações.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: Deformações normais nas direções $x, y, z$ respectivamente.
$\varepsilon_{x_i}, \varepsilon_{y_i}$	: Deformações normais na interface nas direções $x$ e $y$ , respectivamente.
$\phi_{mn}(x,y)$	: Auto funções.
$\Phi$	: Função Objetivo.
$\gamma$	: Razão do número de onda.
$\gamma_m, \gamma_n$	: Números modais da placa.
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	: Deformações cisalhantes nos planos $xy, xz, yz$ respectivamente.
$\Gamma(x,y)$	: Contorno da placa.
$\eta$	: Deslocamento transversal na direção $y$ .
$\lambda$	: Comprimento da onda acústica.
$\nu$	: Coeficiente de Poisson.
$\Pi$	: Potência Acústica.
$\Pi_i$	: Potência acústica incidente.
$\Pi_t$	: Potência acústica radiada.
$\theta_i, \phi_i$	: Ângulos de incidência da fonte acústica primária.
$\rho$	: Densidade do material da placa.
$\rho_0$	: Densidade do meio acústico.
$\sigma_{ijk}$	: Componentes do tensor de tensões.
$\sigma_{mn}$	: Eficiência de radiação.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: Tensões normais nas direções $x, y, z$ respectivamente.
$\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i}$	: Tensões normais na interface nas direções $x$ e $y$ respectivamente.

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	: Tensões cisalhantes nos planos $xy, xz, yz$ respectivamente.
$\omega$	: Freqüência de excitação (rad/s).
$\omega_{mn}$	: Freqüência natural.
$r, \theta, \phi$	: Coordenadas esféricas da onda sonora radiada.



# SUMÁRIO

<b>Lista de Símbolos.....</b>	<b>VII</b>
<b>Lista de Tabelas.....</b>	<b>XIII</b>
<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>XV</b>
<b>Resumo.....</b>	<b>XXIV</b>
<b>Capítulo I – Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo II – Teoria de Kirchhoff para Vibrações de Placas Finas.....</b>	<b>5</b>
2.1 – Relações Cinemáticas.....	5
2.2 – Relações Deslocamentos – Deformações.....	8
2.3 – Relações de Tensão – Deformação.....	10
2.4 – Relações Momentos – Curvaturas.....	11
2.5 – Energia de Deformação.....	14
2.6 – Energia Cinética.....	16
2.7 – Trabalho do Carregamento Transversal Externo.....	18
2.8 – Obtenção da Equação do Movimento à Partir do Princípio de Hamilton.....	18
2.9 – Vibrações Livres de Placas Retangulares.....	26
2.10 – Modos Naturais de Vibração de Placas Retangulares.....	29
<b>Capítulo III– Atuadores Piezoelétricos e sua Interação com Placas de Kirchhoff.....</b>	<b>31</b>
3.1- Fundamentos da Piezoeletricidade.....	31
3.1.1- Efeito Piezoelétrico Direto.....	31
3.1.2- Efeito Piezoelétrico Inverso.....	33
3.2- Modelagem da Interação Mecânica decorrente do Acoplamento Placa-Elementos Piezoelétricos.....	34
3.3 - Excitação por Atuadores Piezoelétricos de uma Placa Retangular Simplesmente .....	44

<b>Capítulo IV – Propagação de Ondas Sonoras e Radiação em Placas de Kirchhoff.</b>	<b>55</b>
4.1- Conceitos Básicos de Propagação Sonora em Estruturas.....	55
4.1.1- Ondas Longitudinais, Transversais e de Flexão.....	55
4.1.2- Ondas Quase-Longitudinais em Placas Uniformes.....	58
4.1.3- Ondas de Flexão em Placas de Kirchhoff.....	59
4.1.4- Ondas Planas Transversais em Placas de Kirchhoff.....	61
4.1.5- Frequência Crítica.....	62
4.1.6-Impedância de Onda em Fluidos.....	63
4.2 - Radiação de Ruído de uma Placa Finita.....	66
4.3 - Excitação de uma Placa Retangular Simplesmente Apoiada por Ação de uma	68
Fonte Monopolo.....	
4.4 - Radiação Sonora de Placas Vibrantes.....	76
4.5 - Eficiência de Radiação Sonora em Placas Vibrantes.....	83
4.6 - Diretividade de Fonte.....	89
4.7 - Perda de Transmissão em Placas.....	90
<b>Capítulo V – Controle Ativo de Ruído.....</b>	<b>92</b>
5.1 - Revisão Histórica.....	92
5.2 - Mecanismos Físicos.....	94
5.3 - Técnicas de Controle.....	96
5.3.1 - Controle Feedback.....	96
5.3.2 - Controle Feedforward.....	97
5.4- Controle Ótimo.....	98
<b>Capítulo VI – Simulações Numéricas e Resultados.....</b>	<b>103</b>
6.1 – Características da Placa Adotada.....	103
6.2 - Excitação de uma Placa Utilizando Atuadores Piezoelétricos.....	104
6.2.1 –Configuração II.....	104

6.2.2 –Configuração II.....	109
6.2.3 –Configuração III.....	113
6.3 -Excitação de uma Placa por uma Onda Sonora Plana Oblíqua Incidente.....	118
6.4 - Controle Ativo de Ruído Empregando uma Placa Instrumentada com Atuadores piezoelétricos.....	123
6.4.1- <i>Influência do Tamanho dos Atuadores no Controle</i> .....	123
6.4.2- <i>Influência do Número e Posicionamento de Atuadores no Controle</i>	126
6.4.2.1- Controle Ativo Utilizando a Primeira Configuração.....	127
6.4.2.2- Controle Ativo Utilizando a Segunda Configuração.....	138
6.4.2.3- Controle Ativo Utilizando a Terceira Configuração.....	144
6.4.2.4- Controle Ativo Utilizando a Quarta Configuração.....	151
6.4.2.5- Controle Ativo Utilizando a Quinta Configuração.....	157
6.4.3- <i>Análise Comparativa dos Resultados Obtidos para as Diferentes Configurações</i> .....	163
6.4.4 - Utilização de dois atuadores controlados pela mesma tensão elétrica.....	168
<b>Capítulo VII– Otimização do Posicionamento dos Atuadores Piezoelétricos.....</b>	<b>173</b>
7.1 – Algoritmos Genéticos.....	173
7.2 – Posicionamento Ótimo dos Atuadores Piezoelétricos.....	174
7.2.1 – <i>Otimização do Controle Utilizando Um Par de Atuadores Piezoelétricos</i> .....	175
7.2.2 – <i>Otimização do Controle Utilizando Dois Pares de Atuadores Piezoelétricos</i> .....	178
7.2.3 – <i>Otimização do Controle Utilizando Três Pares de Atuadores Piezoelétricos na Placa</i> .....	183
7.3 – Análise Comparativa dos Resultados Obtidos com o Posicionamento Arbitrário e com o Posicionamento Ótimo dos Atuadores Piezoelétricos.....	187
<b>Capítulo VIII– Conclusões Gerais e Perspectivas de Trabalhos Futuros.....</b>	<b>190</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>195</b>

# Capítulo I

## Introdução

É fato conhecido que o ruído acústico é uma fonte de poluição sonora responsável por muitos problemas da vida cotidiana, uma vez que interfere de várias formas no dia a dia das pessoas, podendo até mesmo causar danos irreversíveis à sua saúde física e psíquica.

Conseqüentemente, vários países já possuem legislações que regulamentam os níveis admissíveis de ruído. Paralelamente, numerosos trabalhos de pesquisa foram e continuam sendo realizados, buscando formas eficientes e econômicas de controle de ruído.

As técnicas de controle de ruído podem ser classificadas em dois grandes grupos:

- i) *técnicas de controle passivo*, que constituem, essencialmente, o emprego de materiais absorvedores colocados próximos e na fonte de ruído. Estas técnicas revelam-se eficientes no domínio de altas frequências (acima de 500 Hz). Contudo, para baixas frequências, há necessidade de grande volume de material absorvedor, o que conduz a uma elevação significativa de custos;
- ii) *técnicas de controle ativo*, que são baseadas no uso de fontes de ruído secundárias. Estas são comandadas por sinais elétricos calculados a partir do sinal de ruído primário que se deseja atenuar, captado através de sensores e transferidos através de um controlador eletrônico, geralmente em malha fechada. Embora não seja uma técnica recente, uma vez que o princípio utilizado é baseado na teoria de Huygens, desenvolvida em 1690 e patenteada em 1938 por Paul Lueg (1938), só recentemente o controle ativo de ruído tem sido intensamente estudado, tornando-se uma importante área de pesquisa. Isto só foi possível devido ao desenvolvimento do controle digital de rápido processamento a baixo custo, fato que tornou possível a aplicação do controle ativo em problemas práticos.

É apresentado, a seguir, um breve levantamento de algumas contribuições recentes dedicadas ao controle ativo de ruído.

Em 1987, Fuller e Jones (1987) estudaram a redução de transmissão de ruído no interior de uma cavidade, utilizando um atuador eletrodinâmico para reduzir o nível de ruído dentro de um enclausuramento cilíndrico excitado por uma fonte monopolo. Com este procedimento, obteve-se uma redução no nível de pressão sonora da ordem de 10-20dB.

Fuller *et al.* (1989), estudaram a redução da transmissão sonora através de uma placa circular elástica utilizando atuadores eletrodinâmicos associados com um controlador *feedforward* adaptativo. Utilizaram acelerômetros e microfones como sensores de erro. Com esta técnica obtiveram reduções de até 28dB.

Pan e Hansen (1991) e Snyder e Hansen (1991) estudaram mecanismos físicos para redução de transmissão sonora através de uma placa retangular em uma câmara reverberante. Este estudo revelou que quando a resposta do sistema é dominada pelos modos da placa, o ruído é reduzido através do controle destes modos. Porém, quando a resposta do sistema é dominada pelos modos acústicos da câmara, a redução do nível de ruído é conseguida alterando-se a distribuição de velocidades da placa.

Fuller *et al.* (1991a) mostraram analítica e experimentalmente que a aplicação de forças externas à estrutura através de atuadores eletromagnéticos apresentam bons resultados na atenuação global do ruído. Porém, em estruturas leves, esta técnica não é adequada, uma vez que tais atuadores são geralmente volumosos e pesados, o que dificulta sua montagem na estrutura e interferem significativamente em seu comportamento dinâmico. Diante desta dificuldade, tem sido largamente explorada a idéia de utilizar outros tipos de atuadores de baixo peso e pouca interferência na estrutura, capazes de assegurar controle de ruído eficiente.

A utilização de materiais piezoelétricos foi então introduzida como uma alternativa aos atuadores eletrodinâmicos. Diversos estudos têm demonstrado que tais materiais mostram-se bastante adequados e eficientes, oferecendo a possibilidade de ser utilizados em sistemas com geometrias complexas, uma vez que podem ser colados diretamente à superfície da estrutura, ou então inseridos no volume do material que constitui a estrutura, tornando-se parte do sistema. Apresentam também diversidade de atuação, podendo ser utilizados tanto como sensores quanto como atuadores. Outra característica interessante destes materiais é sua relativa insensibilidade à temperatura, o que os habilita a trabalhar mesmo em condições ambientais mais severas.

Dentre os materiais piezoelétricos, os mais empregados são as cerâmicas piezoelétricas PZT (zirconato titanato de chumbo) e o polímero PVDF (fluorido de polivinilideno).

Os pioneiros na utilização de PZTs para controle ativo em sistemas dinâmicos contínuos foram Bailey e Hubbard (1985). Após este estudo, Crawley e De Luis (1987) desenvolveram um modelo detalhado que caracteriza a interação entre pastilhas de PZT e uma viga elástica.

Dimitriadis *et al.* (1989) expandiram este modelo para o caso de atuadores PZT com a função de reduzir a pressão sonora radiada por placas finas. Estes trabalhos mostraram a grande eficiência dos materiais piezoelétricos no controle de vibração e da radiação sonora.

Fuller *et al.* (1991b) realizaram um experimento utilizando uma pastilha de PZT como atuador colada a uma placa retangular excitada por um excitador eletrodinâmico em frequências próximas às frequências naturais da placa. O resultado obtido foi uma redução global de 45 dB nas duas primeiras frequências naturais.

Clark e Fuller (1992a) utilizaram atuadores piezoelétricos e desenvolveram um controlador *feedforward* adaptativo para o controle de ruído radiado por uma placa retangular excitada por um excitador eletrodinâmico. Eles concluíram que quando a frequência de excitação é próxima a uma das frequências naturais da placa, o aumento do número de atuadores não contribuiu significativamente para a redução de ruído. Porém, no caso não ressonante, o aumento do número de atuadores pôde proporcionar redução adicional de ruído. Neste mesmo experimento utilizaram sensores de deformação de PVDF no lugar dos microfones. Os resultados mostraram que em alguns casos, a redução de ruído obtida com microfones como sensores é similar à obtida quando se utilizam sensores PVDF; em outros casos, obteve-se uma redução maior utilizando microfones.

Wang *et al.* (1991) desenvolveram um modelo analítico de transmissão sonora através de uma placa retangular utilizando múltiplos PZTs e atuadores eletrodinâmicos. Verificou-se que os atuadores eletrodinâmicos são mais eficientes no controle de ruído.

Os mesmos autores relatam aplicações do controle ativo de ruído utilizando materiais piezoelétricos em diversas situações industriais práticas, tais como na redução de ruído no interior de aviões, barreiras ativas, entre outros.

No contexto das técnicas de controle ativo de ruído, o presente trabalho enfoca diversos aspectos referentes ao uso de placas retangulares planas às quais são fixados atuadores piezoelétricos, como fontes de controle de ruído. Tem, por objetivos, o desenvolvimento, a implementação computacional e a avaliação numérica de um procedimento completo de controle ativo de ruído.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é feita uma revisão da teoria de vibrações em placas de Kirchhoff, sendo apresentadas as hipóteses básicas e o desenvolvimento analítico da teoria conduzindo à equação do movimento de placas finas homogêneas e uniformes e às condições de contorno.

No Capítulo 3 são apresentados os conceitos básicos pertinentes ao funcionamento dos materiais piezoelétricos como sensores e atuadores (efeito piezoelétrico direto e inverso, respectivamente), sendo desenvolvidas as relações que descrevem o acoplamento placa–piezoelétrico em regime estático e dinâmico.

No Capítulo 4 é realizada uma revisão de conceitos básicos sobre vibro-acústica, sendo definidos parâmetros importantes na análise do fenômeno de radiação sonora por estruturas vibrantes, tais como impedância e frequência crítica. Também são descritos o comportamento vibratório da placa devido à ação de uma fonte monopolo, o fenômeno da radiação em placas vibrantes e a eficiência de radiação de cada modo de vibração da placa.

No Capítulo 5 apresenta-se uma revisão histórica das técnicas de controle ativo de ruído e seus mecanismos físicos. Também é realizada uma investigação das técnicas de controle mais usuais como controle *feedback* e *feedforward*. Finalmente, é desenvolvida a teoria de controle ótimo utilizado.

No Capítulo 6 são apresentadas numerosas simulações numéricas e os resultados obtidos para diferentes configurações, em termos do número e posição de atuadores piezoelétricos.

No Capítulo 7 propõe-se um procedimento de posicionamento ótimo dos elementos piezoelétricos baseado no uso de Algoritmos Genéticos. São apresentados os resultados de diversos testes numéricos de otimização.

Finalmente, o Capítulo 8 contém as conclusões gerais do trabalho e sugestões para desenvolvimentos futuros.

## Capítulo II

### Teoria de Kirchhoff para Vibrações de Placas Finas

Neste capítulo é desenvolvido um procedimento de modelagem do comportamento dinâmico de placas finas utilizando a teoria de Kirchhoff. Após a apresentação das relações cinemáticas que caracterizam as deformações sofridas pela placa, são desenvolvidas as relações de tensão–deformação e momento–curvatura. Em seguida, empregando o Princípio Variacional de Hamilton são obtidas a equação diferencial do movimento e as condições de contorno. O estudo aqui apresentado é baseado no trabalho de Géradin & Rixen (1997).

#### 2.1- Relações Cinemáticas

Considere-se uma placa retangular ilustrada na Figura 2, para a qual adota-se o sistema de eixos  $Oxyz$  de tal forma que  $Ox$  e  $Oy$  sejam eixos principais de inércia. Designam-se por  $L_x$  e  $L_y$  as dimensões ao longo das dire es  $x$  e  $y$ , respectivamente, e por  $h$  a espessura da placa.

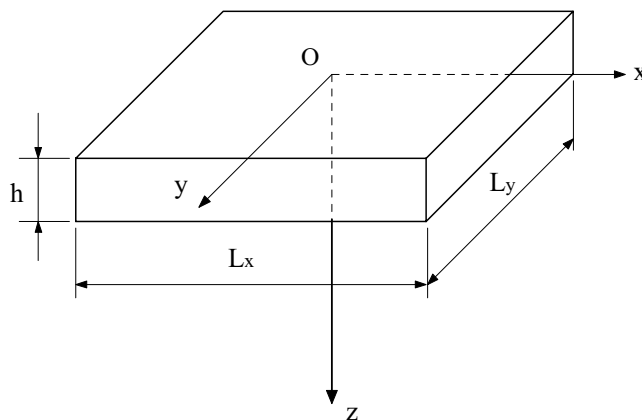


Figura 2.1- Dimensões da placa e posicionamento do sistema de referência.

Levando em conta o sistema de referência adotado e objetivando facilitar o entendimento das hipóteses que são adotadas, apresenta-se, na Figura 2.2, o elemento de



volume da placa sobre cujas faces são representadas as tensões normais e cisalhantes. Como será visto mais adiante, em conformidade com as hipóteses a serem adotadas, algumas destas componentes de tensão resultarão nulas.

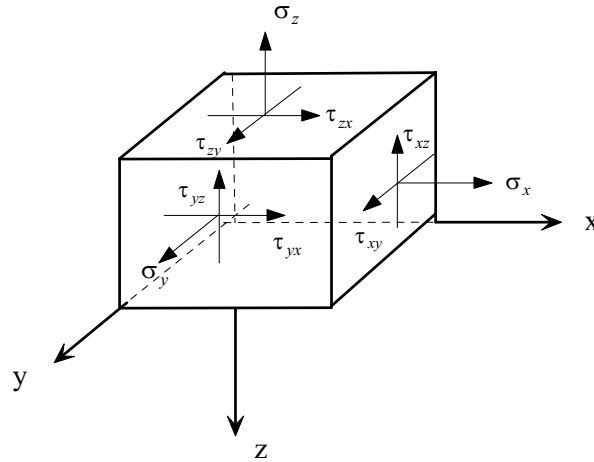


Figura 2.2- Representação das componentes de tensão em um elemento da placa.

Designando por  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  e  $w(x,y,z)$  os campos de deslocamentos dos pontos da placa nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, as deformações normais e cisalhantes, componentes do tensor de deformação de Green para grandes deslocamentos, são dadas pelas expressões:

- **Deformações Normais**

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.2)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.3)$$

- **Deformações Cisalhantes**

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xz} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{yz} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.6)$$

Os deslocamentos dos pontos da placa e as rotações das seções transversais no plano  $x$ - $z$  são ilustradas na Figura 2.3, onde  $P_o$  indica um ponto sobre o plano médio da placa e  $P$  designa um ponto genérico posicionado sobre a mesma seção transversal, a uma distância  $z$  do plano médio. Nesta mesma figura,  $w(x,y)$  representa o campo de deslocamentos transversais (na direção  $z$ ) do ponto  $P$  e  $u(x,y)$  representa o campo de deslocamentos no plano da placa, segundo a direção  $x$ . Da forma análoga, designar-se-á por  $v(x,y)$  o deslocamento de  $P$ , no plano da placa, segundo a direção  $y$ , deslocamento este que não está representado na figura.

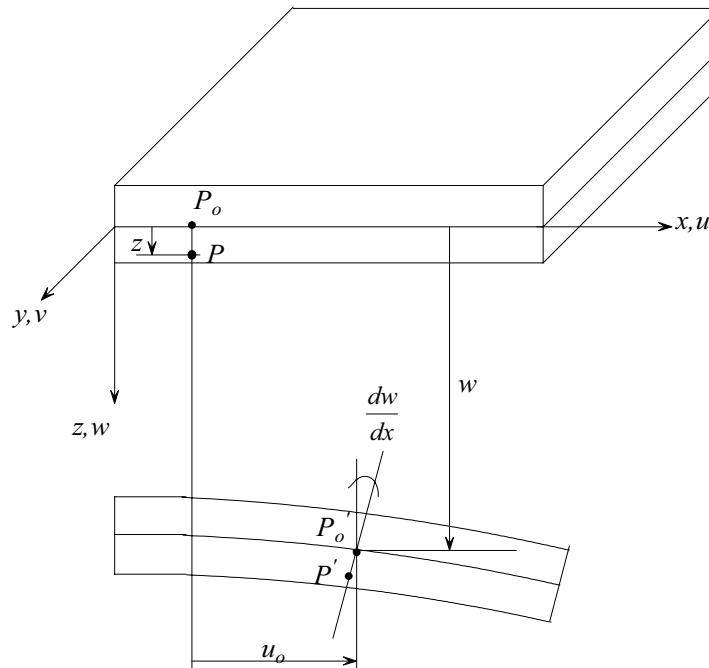


Figura 2.3- Representação dos deslocamentos da placa.

De acordo com a teoria de Kirchhoff, adotam-se as seguintes hipóteses:

- 1- A placa é fina e seu plano médio é o plano neutro.
- 2- São negligenciadas as tensões e deformações na direção transversal da placa:  

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$
- 3- Após a deformação, as seções transversais permanecem planas e normais à linha neutra.
- 4- Os deslocamentos  $u$  e  $v$  no plano  $Oxy$  são resultantes de dois efeitos:
  - Um campo de deslocamentos iniciais, uniforme ao longo da espessura da placa, resultante de um carregamento no plano da placa.
  - Um campo de deslocamentos devidos à rotação das seções transversais.

Considerando a Figura 2.3, estas hipóteses conduzem às seguintes relações cinemáticas:

$$u(x, y) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$v(x, y) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$w = w(x, y) \quad (2.9)$$

onde:  $u_0(x, y)$  e  $v_0(x, y)$  são deslocamentos iniciais resultantes de uma pré-carga no plano neutro da placa.

## 2.2- Relações Deslocamentos-Deformações.

Introduzindo as equações (2.7) a (2.9) em (2.1) a (2.6), considerando-se as hipóteses adotadas, obtêm-se as seguintes relações entre as componentes de deslocamento e as deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (2.14)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (2.15)$$

Define-se então o seguinte vetor contendo as deformações não nulas:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Com base nas relações (2.10), (2.11) e (2.13), o vetor de deformações pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^{(0)}\} + \{\epsilon^{(1)}\} + \{\epsilon^{(2)}\} \quad (2.17)$$

onde  $\{\epsilon^{(0)}\}$ ,  $\{\epsilon^{(1)}\}$  e  $\{\epsilon^{(2)}\}$  representam, respectivamente, os termos de grau 0, 1, e 2 nas derivadas de  $w$  em relação as coordenadas  $x$  e  $y$ , sendo dados por:

$$\{\epsilon^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \{\epsilon^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \{\epsilon^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

### 2.3- Relações de Tensão-Deformação.

Admitindo que a placa seja constituída de material isotrópico de comportamento linear, as componentes de tensão e deformação relacionam-se através das seguintes expressões:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y}{1-2\nu} \right] \quad (2.19)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{\epsilon_y(1-\nu) + \nu\epsilon_x}{1-2\nu} \right] \quad (2.20)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.21)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $G$  é o módulo de cisalhamento. Estes três coeficientes guardam entre si a seguinte relação de dependência:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.22)$$

O conjunto de equações (2.19) –(2.21) pode ser agrupado na seguinte relação tensão-deformação na forma matricial:

$$\{\sigma\} = [H]\{\epsilon\} \quad (2.23)$$

onde o vetor das tensões não nulas é dado por:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

e

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

é a matriz de coeficientes elásticos.

## 2.4- Relações Momentos-Curvaturas.

O vetor das curvaturas é definido por:

$$\{\chi\} = \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (2.26)$$

cujos dois primeiros componentes representam a curvatura principal da placa nas direções  $x$  e  $y$  e o terceiro componente representa a curvatura do plano neutro decorrente da torção na placa.

Levando em conta as definições estabelecidas em (2.18), observa-se que o termos de primeira ordem das deformações são associados às curvaturas mediante a relação:

$$\{\epsilon^{(1)}\} = z\{\chi\} \quad (2.27)$$

Conforme ilustra a Figura 2.4, as tensões atuantes na placa geram momentos em relação aos eixos coordenados.

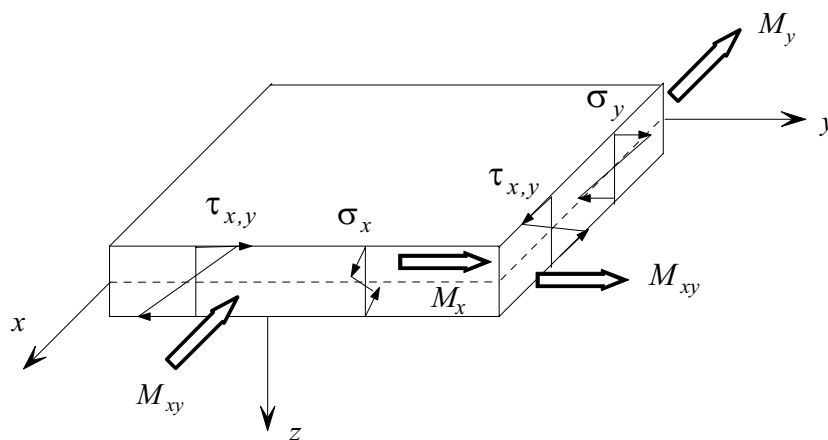


Figura 2.4- Momentos que atuam em um elemento da placa.

Os momentos são agrupados no seguinte vetor:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

cujas componentes são obtidas mediante integração dos momentos elementares ao longo da espessura da placa; de acordo com:

$$\{M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \{\sigma\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [H] \{\varepsilon\} dz \quad (2.29)$$

Devido à anti-simetria em relação a  $z$  dos termos  $\{\varepsilon^{(0)}\}$  e  $\{\varepsilon^{(2)}\}$ , definidos em (2.18), apenas os termos de primeira ordem,  $\{\varepsilon^{(1)}\}$ , contribuem na geração de momentos. Assim, a equação (2.29) pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\{M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \{\sigma^{(1)}\} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 [H] \{\chi\} dz \quad (2.30)$$

Substituindo as equações (2.25) e (2.26) em (2.30) tem-se:

$$\{M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dz \quad (2.31)$$

Desenvolvendo a equação (2.31) obtém-se:

$$\{M\} = [H^*] \{\chi\} \quad (2.32)$$

com:

$$[H^*] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

onde  $D$  é o módulo de rigidez da placa, definido segundo:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.34)$$

Desenvolvendo (2.31) expressam-se explicitamente os momentos da seguinte forma:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.35)$$

$$M_y = -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.36)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.37)$$

Considere-se um contorno arbitrário da placa, representado por uma curva  $\Gamma(x,y)$ , conforme ilustrado na Figura 2.5. Para um ponto arbitrário do contorno, designam-se por  $(l,m,0)$  os cossenos diretores da normal exterior  $\vec{n}$ . Os momentos no contorno da placa são:

- $M_n$  : momento fletor atuante no plano  $Oxz$ , orientado ao longo da tangente ao contorno.
- $M_s$  : momento fletor atuante na direção perpendicular ao contorno.
- $M_{ns}$  : momento torçor atuante em torno da direção normal.



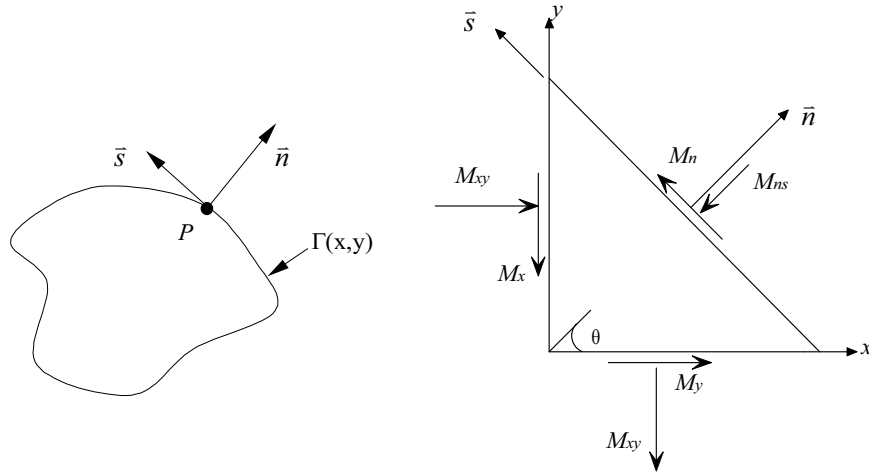


Figura 2.5- Momentos no contorno da placa.

As componentes  $M_x$ ,  $M_{xy}$  e  $M_y$  relacionam-se com as componentes  $M_s$ ,  $M_{ns}$  e  $M_n$  através das seguintes equações:

$$M_x = l^2 M_n - 2lm M_{ns} + m^2 M_s \quad (2.38)$$

$$M_y = l^2 M_s - 2lm M_{ns} + m^2 M_n \quad (2.39)$$

$$M_{xy} = lm(M_n - M_s) + M_{ns}(l^2 - m^2) \quad (2.40)$$

## 2.5- Energia de Deformação.

A energia de deformação da placa, que pode ser associada ao trabalho das forças internas, é calculada através da integral da densidade de energia sobre o volume:

$$V_{int} = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\} dV \quad (2.41)$$

Levando em conta as três componentes de deformação, definidas em (2.17) e (2.18), a energia de deformação, dada em (2.41), pode ser decomposta em termos de diferentes graus em  $w$  e suas derivadas:

$$V_{int} = V_{int}^{(0)} + V_{int}^{(1)} + V_{int}^{(2)} + 0(w^3) \quad (2.42)$$

onde:

$$V_{int}^{(0)} = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon^{(0)}\}^T [H] \{\epsilon^{(0)}\} dV \quad (2.43)$$

$$V_{int}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon^{(1)}\}^T [H] \{\epsilon^{(0)}\} dV \quad (2.44)$$

$$V_{int}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon^{(1)}\}^T [H] \{\epsilon^{(1)}\} dV + \int_V \{\epsilon^{(2)}\}^T [H] \{\epsilon^{(0)}\} dV \quad (2.45)$$

O último termo de (2.42) representa os termos de ordem superior, que não são considerados na teoria aqui desenvolvida.

A energia de deformação resultante de uma extensão inicial da placa é dada pela equação (2.43). Quando o campo de deslocamentos inicial é imposto como sendo  $(u_0, v_0)$ , esta equação torna-se:

$$V_{int}^{(0)} = cte \quad (2.46)$$

Neste caso, esta componente não contribui para a equação do movimento.

O desenvolvimento do termo de primeira ordem da energia de deformação, (2.44) conduz a:

$$V_{int}^{(1)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \int_S \{\chi\}^T [H] \{\epsilon^{(0)}\} dS = 0 \quad (2.47)$$

A integração do termo quadrático da energia de deformação (2.45) ao longo da espessura conduz à expressão:

$$V_{int}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_S \{\chi\}^T [H^*] \{\chi\} dS + \int_S \{N_0\}^T \{\epsilon^{(2)}\} dS \quad (2.48)$$

Na equação (2.48) o primeiro termo representa a energia associada à flexão e o segundo termo representa o efeito de pré-tensão, ou seja, das tensões iniciais de membrana, que são dadas por:

$$\{N_0\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [H] \{\epsilon^{(0)}\} dz \quad (2.49)$$

## 2.6- Energia Cinética.

A energia cinética é calculada através da seguinte integração:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (2.50)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica (massa por unidade de volume) e  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ,  $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ ,

$\dot{w} = \frac{dw}{dt}$  são as componentes do vetor velocidade de um ponto genérico da placa nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

Derivando as relações (2.7) e (2.8) em relação ao tempo tem-se:

$$\dot{u} = -z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \quad (2.51)$$

$$\dot{v} = -z \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \quad (2.52)$$

Substituindo as equações (2.51) e (2.52) em (2.50), escreve-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[ \left( -z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( -z \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 + \dot{w}^2 \right] dV \quad (2.53)$$

ou:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_S \rho \dot{w} dS dz + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_S \rho \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dS dz \quad (2.54)$$

Define-se a densidade de massa por unidade de superfície como:

$$m_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \quad (2.55)$$

Com esta definição, o momento de inércia de massa em relação ao eixo médio, por unidade de área, é expresso da seguinte forma em termos do raio de giração da seção, designado por  $r$ :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = m_s r^2 \quad (2.56)$$

Substituindo a eq. (2.56) em (2.54), a energia cinética pode ser expressa da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2} \int_S m_s \dot{w}^2 dS + \frac{1}{2} \int_S r^2 \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] dS \quad (2.57)$$

O primeiro termo da equação (2.57) representa a parcela da energia cinética devida ao movimento transversal da placa na direção transversal  $z$ , enquanto os outros dois termos representam o efeito de rotação da seção transversal em torno dos eixos  $x$  e  $y$ . A teoria de Kirchhoff utiliza a expressão aproximada da energia cinética negligenciando o efeito de rotação das seções. Desta forma, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_S m_s \dot{w}^2 dS \quad (2.58)$$

## 2.7- Trabalho do Carregamento Transversal Externo.

Admitindo que a placa não seja solicitada por momentos distribuídos ou por forças de contorno, energia potencial associada ao carregamento externo distribuído  $p(x,y,t)$ , suposto conservativo, é dada por:

$$V_{ext} = - \int_S w p dS \quad (2.59)$$

## 2.8-Obtenção da Equação do Movimento a Partir do Princípio de Hamilton.

A sistemas sobre os quais atuam apenas forças conservativas aplica-se o Princípio Variacional de Hamilton, expresso por (Géradin & Rixen,1997).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2.60)$$

onde  $T$  é a energia cinética e  $V$  é a energia potencial total do sistema e  $t_1$  e  $t_2$  são dois valores arbitrários do tempo.

Considerando as duas formas de energia potencial, interna e externa, a equação (2.60) pode ser escrita como:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V_{int} - \delta V_{ext}) dt = 0 \quad (2.61)$$

Admitindo que a placa não seja submetida a tensões iniciais de membrana ( $N_0=0$ ), com base nos desenvolvimentos apresentados na seção 2.1, temos:

$$V_{int} = V_{int}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_S \{\chi\}^T [H^*] \{\chi\} dS \quad (2.62)$$

Substituindo (2.26) e (2.33) em (2.62) , escreve-se:

$$V_{int} = \frac{1}{2} \int_S D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dS \quad (2.63)$$

A primeira variação de  $V_{int}$  pode ser expressa, após algumas manipulações, sob a forma:

$$\begin{aligned} \delta V_{int} = \int_S D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dS \end{aligned} \quad (2.64)$$

Na sequência, procede-se à dupla integração por partes de cada termo da equação (2.64), utilizando o Teorema de Green. Tal procedimento conduz às seguintes transformações:

- **Primeiro termo:**

$$\begin{aligned} \int_S D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dS = \\ \int_{\Gamma} D l \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} D l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w d\Gamma \\ + \int_S D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w dS \end{aligned} \quad (2.65)$$

- **Segundo termo:**

$$\begin{aligned} \int_S D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dS = \\ \int_{\Gamma} D m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} D m \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w d\Gamma \end{aligned}$$

$$+ \int_S D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta w dS \quad (2.66)$$

onde  $\Gamma(x,y)$  indica a curva representando o contorno que delimita o domínio das integrações e  $l$  e  $m$  são os cossenos diretores da normal exterior a este contorno. (ver Figura 2.5).

• **Terceiro termo:**

$$\begin{aligned} & \int_S D 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dS = \\ & \int_\Gamma D l (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_\Gamma m D \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta w d\Gamma \\ & + \int_\Gamma D m (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_\Gamma l D \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta w d\Gamma \\ & + \int_S D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta w dS + \int_S D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \delta w dS \end{aligned} \quad (2.67)$$

Para facilitar o desenvolvimento que segue, os termos figurando em (2.67) serão agrupados segundo a integração esteja sendo efetuada em  $S$  ou em  $\Gamma$ , de modo que:

$$\delta V_{int} = \delta I_S + \delta I_\Gamma \quad (2.68)$$

Agrupando os integrandos em  $S$ :

$$\begin{aligned} \delta I_S &= \int_S D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \delta w dS = \\ &= \int_S D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \delta w dS \end{aligned} \quad (2.69)$$

Agrupando os integrandos em  $\Gamma$ :

$$\delta I_\Gamma = \int_\Gamma D l \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_\Gamma D l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w d\Gamma +$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} Dm \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} Dm \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} Dl(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} Dm(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\Gamma - \\
& \int_{\Gamma} Dm(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w d\Gamma - \int_{\Gamma} Dl(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta w d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Substituindo as equações (2.35), (2.36) e (2.37) em (2.70) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\delta I_{\Gamma} = & \int_{\Gamma} \left[ - (lM_x + mM_{xy}) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - (mM_y + lM_{xy}) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} \left[ l \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + m \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right] \delta w d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Deve-se agora expressar a integração sobre o contorno em termos das coordenadas  $n$  e  $s$ , nas direções normal e tangencial, respectivamente, ilustradas na Figura 2.6. Para tanto, utilizam-se as relações:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = l \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} - m \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \tag{2.72}$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = m \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} + l \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \tag{2.73}$$

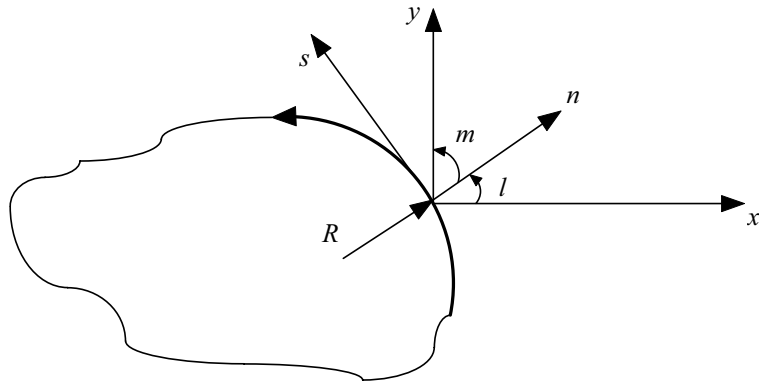


Figura 2.6- Coordenadas curvilíneas ao longo do contorno  $\Gamma$ .



Substituindo as equações (2.72) e (2.73) em (2.71) escreve-se:

$$\begin{aligned}
 \delta I_{\Gamma} = & \int_{\Gamma} \left\{ - \left( l^2 M_x + 2lmM_{xy} + m^2 M_y \right) \left( \delta \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma + \\
 & \int_{\Gamma} \left\{ - \left[ ml(M_y - M_x) + (l^2 - m^2) M_{xy} \right] \left( \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right\} d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma} \left[ l \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + m \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w \right] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Para o desenvolvimento subsequente de (2.74) faz-se uso das equações (2.38) a (2.40), (2.72) e (2.73) e das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l}{\partial n} &= 0 & \frac{\partial l}{\partial s} &= -\frac{m}{R} \\
 \frac{\partial m}{\partial n} &= 0 & \frac{\partial m}{\partial s} &= \frac{l}{R}
 \end{aligned}$$

onde  $R$  é o raio de curvatura do contorno.

Após manipulação algébrica relativamente extensa, chega-se à expressão:

$$\delta I_{\Gamma} = - \int_{\Gamma} \left[ M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) + M_{ns} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R} (M_n - M_s) \right) \delta w d\Gamma \tag{2.75}$$

Efetuada uma nova integração por partes na primeira parcela do lado direito de (2.75) chega-se a:

$$\begin{aligned}
 \delta I_{\Gamma} = & - \int_{\Gamma} \left[ M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w \right] d\Gamma + \\
 & \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R} (M_n - M_s) \right) \delta w d\Gamma - [M_{ns} \delta w]_{\Gamma}
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Substituindo (2.69) e (2.76) em (2.68), obtém-se a expressão para a primeira variação da energia de deformação:

$$\begin{aligned}
\delta V_{int} = & \int_S D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \delta w dS \\
& + \int_{\Gamma} \left( -M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) + \frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R} (M_n - M_s) \right) \delta w d\Gamma - [M_{ns} \delta w]_{\Gamma}
\end{aligned} \quad (2.77)$$

A primeira variação da energia cinética, dada por (2.61) é expressa segundo:

$$\delta T = \delta \left( \int_S \frac{1}{2} m_s \dot{w}^2 dS \right) = \int_S m_s \dot{w} \delta \dot{w} dS \quad (2.78)$$

A variação da energia potencial associada à força externa é computada a partir de (2.59):

$$\delta V_{ext} = -\delta \int_S w p dS = -\int_S p \delta w dS \quad (2.79)$$

Introduzindo as equações (2.77), (2.78) e (2.79) em (2.61), obtém-se a seguinte expressão variacional:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V_{int} - \delta V_{ext}) dt = \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\int_S m_s \dot{w} \delta \dot{w} dS - \int_{\Gamma} \left[ -M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) + \left[ \frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R} (M_n - M_s) \right] \delta w \right] d\Gamma \right. \\
& \quad \left. + [M_{ns} \delta w]_{\Gamma} + \int_S D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \delta w dS + \int_S p \delta w dS \right\} dt \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Na equação (2.80) o termo  $K_n$ , presente no termo de contorno, chamado de força de cisalhamento de Kirchhoff de contorno, representa a o esforço cortante no contorno da placa, e é dado por:

$$K_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R} (M_n - M_s) \quad (2.81)$$

Torna-se necessário realizar mais uma integração por partes no primeiro integrando do lado direito de (2.80), em relação ao tempo:

$$\int_{t_1}^{t_2} m_s \dot{w} \delta \dot{w} dt = [m_s \dot{w} \delta w]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_s \ddot{w} \delta w dt \quad (2.82)$$

Levando em conta que a variação  $\delta w$  deve satisfazer  $\delta w(t_1) = \delta w(t_2) = 0$ , a equação acima conduz a:

$$\int_{t_1}^{t_2} m_s \dot{w} \delta \dot{w} dt = - \int_{t_1}^{t_2} m_s \ddot{w} \delta w dt \quad (2.83)$$

Introduzindo então (2.83) em (2.80), escreve-se:

$$\int_1^{t_2} \left\{ [M_{ns} \delta w]_{\Gamma} + \int_{\Gamma} \left[ M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) - K_n \delta w \right] d\Gamma + \int_S \left[ D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + m_s \ddot{w} - p \right] \delta w dS \right\} dt = 0 \quad (2.84)$$

Como (2.84) deve ser satisfeita para toda e qualquer variação  $\delta w$ , deve-se ter:

- para um ponto qualquer na superfície da placa:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + m_s \ddot{w} - p = 0 \quad (\text{em } S) \quad (2.85)$$

- para um ponto na parte regular do contorno :

Contorno Livre: condição em que ou a força de cisalhamento ou o deslocamento vertical são nulos.

$$K_n = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0 \quad (\text{em } \Gamma) \quad (2.86)$$

Contorno Engastado: condição em que o momento fletor em relação à normal, ou a inclinação em relação à normal são nulos.

$$M_n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{em } \Gamma) \quad (2.87)$$

- Para um ponto angular do contorno, quando o cisalhamento de Kirchhoff, gerado pela descontinuidade do momento de curvatura ou o deslocamento vertical forem nulos:

$$z_n = M_{ns}^+ - M_{ns}^- = 0 \quad \text{ou} \quad w=0 \quad (2.88)$$

Fazendo uma analogia com a teoria de vigas, pode-se definir os esforços cortantes por unidade de comprimento da seguinte forma:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.89)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.90)$$

Considerando um elemento de placa, os esforços atuantes sobre ele estão representados na Figura 2.7.

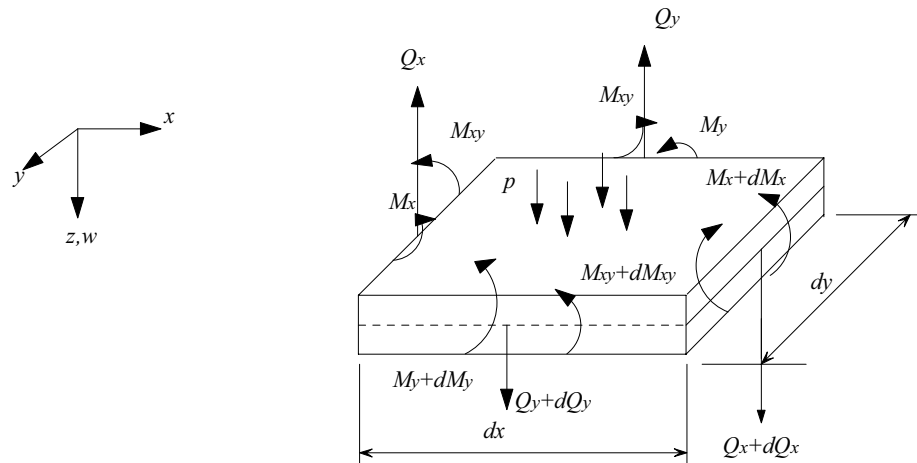


Figura 2.7- Esforços atuantes sobre um elemento de placa.

Aplicando a Segunda Lei de Newton para as componentes de força e aceleração na direção vertical, obtém-se a equação do movimento, dada por (2.85) e repetida abaixo.

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + m_s \ddot{w} - p = 0 \quad (2.91)$$

A equação (2.91) pode ser escrita em termos do operador Laplaciano:

$$D(\Delta \Delta w) - p + m_s \ddot{w} = 0 \quad (2.92)$$

onde:

$$\Delta = \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad (2.93)$$

## 2.9- Vibrações Livres de Placas Retangulares.

Para o problema de vibrações livres (sem carga externa), sem pré-tensão e com propriedades uniformes, admite-se uma solução da equação do movimento (2.92) do tipo:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (2.94)$$

Introduzindo (2.94) em (2.92), obtém-se:

$$(\Delta \Delta W) - \beta^4 W = 0 \quad (2.95)$$

com:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m_s}{D} \quad (2.96)$$

Pode-se mostrar que a solução geral de (2.96), em termos de funções hiperbólicas e trigonométricas, toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} W(x, y) = & A_1 \operatorname{sen}(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n y) + A_2 \cos(\gamma_m x) \operatorname{sen}(\gamma_n y) + A_3 \operatorname{sen}(\gamma_m x) \cos(\gamma_n y) \\ & + A_4 \cos(\gamma_m x) \cos(\gamma_n y) + A_5 \operatorname{senh}(\gamma_m x) \operatorname{senh}(\gamma_n y) + A_6 \cosh(\gamma_m x) \operatorname{senh}(\gamma_n y) \end{aligned}$$

$$+ A_7 \sinh(\gamma_m x) \cosh(\gamma_n y) + A_8 \cosh(\gamma_m x) \cosh(\gamma_n y) \quad (2.97)$$

Os valores das constantes  $A_i$  e dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  dependem das condições de contorno.

Considerar-se-á, a seguir, o caso da placa simplesmente apoiada nas quatro bordas, cujas dimensões ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  são designadas por  $L_x$  e  $L_y$ , respectivamente. A placa simplesmente apoiada constitui o único caso para o qual é possível obter uma solução exata.

As condições de contorno são:

$$W=0 \quad \text{e} \quad M_x=0 \quad \text{para } x=0 \quad \text{e} \quad x=L_x \quad (2.98)$$

$$W=0 \quad \text{e} \quad M_y=0 \quad \text{para } y=0 \quad \text{e} \quad y=L_y \quad (2.99)$$

Utilizando-se as equações (2.35) e (2.36) as condições de contorno são expressas sob as formas:

$$W=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x=0 \quad \text{e} \quad x=L_x \quad (2.100)$$

$$W=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } y=0 \quad \text{e} \quad y=L_y \quad (2.101)$$

Introduzindo estas condições de contorno na solução geral (2.95) obtém-se a solução para o caso de placa simplesmente apoiada:

$$W(x, y) = A \sin(\gamma_m x) \sin(\gamma_n y) \quad (2.102)$$

onde  $A$  é uma constante que permanece indeterminada.

Devem também ser satisfeitas as condições:

$$\sin(L_x \gamma_m) = 0 \quad \text{e} \quad \sin(L_y \gamma_n) = 0 \quad (2.103)$$

cujas soluções são:

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{L_x} \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{L_y} \quad \text{com } m, n = 1, 2, \dots \quad (2.104)$$

As frequências naturais da placa podem ser calculadas através de (2.96):

$$\omega_{mn} = \beta_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{m_s}} = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m_s}} \quad (2.105)$$

e os modos naturais correspondentes são dados por:

$$W_{mn}(x, y) = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (2.106)$$

Os valores  $(m-1)$  e  $(n-1)$  determinam o número de linhas nodais, ou o número de meias ondas dos modos naturais ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente.

## 2.10- Modos Naturais

Para uma maior compreensão do significado físico de  $m$  e  $n$ , apresentar-se-ão graficamente quatro primeiros modos naturais  $(m, n)$  de vibração de uma placa retangular.

Na Figura 2.8 é apresentado o modo  $(1, 1)$  de vibração da placa, ou seja,  $m=1$  e  $n=1$ . Não se verifica a presença de linhas nodais ou meias ondas para este modo.

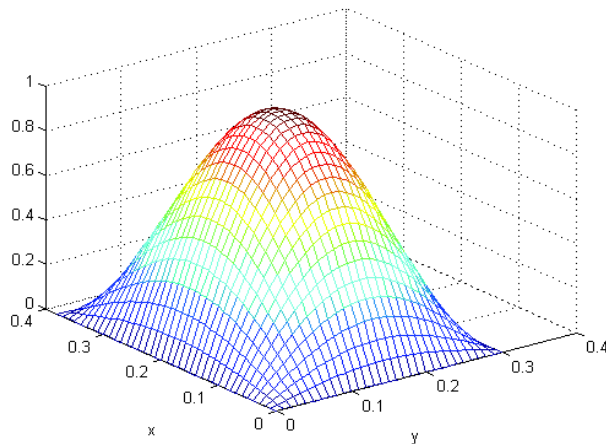


Figura 2.8- Modo (1,1) de vibração da placa.

Verifica-se na Figura 2.9 a curva característica do modo (1,2) de vibração da placa. Neste modo têm-se  $m=1$  e  $n=2$ , havendo uma linha nodal perpendicular ao eixo  $y$  ocasionando duas meia onda na direção deste eixo.

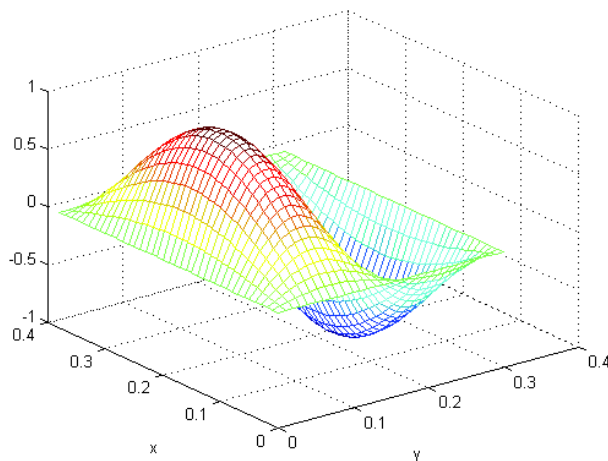


Figura 2.9- Modo (1,2) de vibração da placa.

Observa-se na Figura 2.10 a curva característica do modo (2,1) de vibração da placa. Neste modo têm-se  $m=2$  e  $n=1$ , portanto há o aparecimento de uma linha nodal perpendicular ao eixo  $x$  ocasionando duas meias ondas na direção deste eixo.

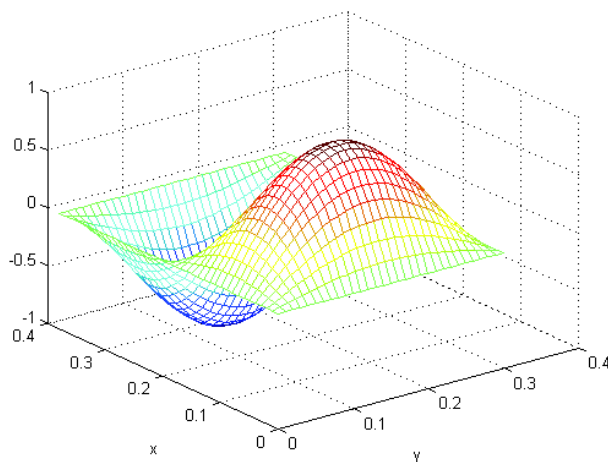


Figura 2.10- Modo (2,1) de vibração da placa.



A Figura 2.11 apresenta a curva característica do modo (2,2) de vibração da placa. Neste modo têm-se  $m=2$  e  $n=2$ , portanto há o aparecimento de uma linha nodal perpendicular ao eixo  $x$  ocasionando duas meia onda na direção deste eixo e de uma linha nodal perpendicular ao eixo  $y$  ocasionando duas meias ondas na direção deste eixo.

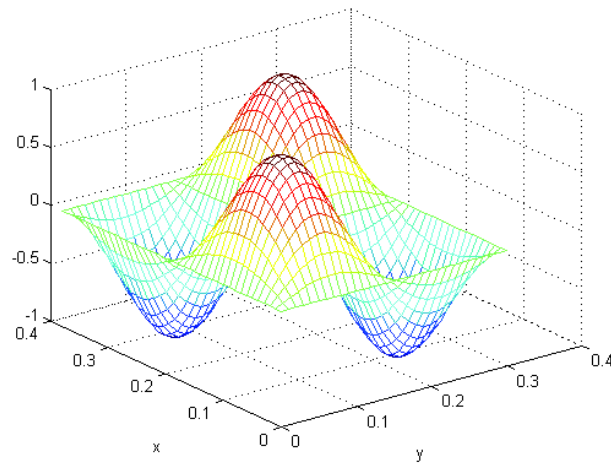


Figura 2.11- Modo (2,2) de vibração da placa.

## Capítulo III

### Atuadores Piezoelétricos e sua Interação com Placas de Kirchhoff

Neste capítulo é apresentado um estudo sobre o efeito piezoelétrico e as relações decorrentes da interação mecânica entre placas finas e elementos piezoelétricos colados à sua superfície. Inicialmente são apresentadas as relações entre a tensão elétrica aplicada e as deformações apresentadas pelos materiais piezoelétricos, sendo introduzidas as constantes que definem as propriedades piezoelétricas. Em seguida, com base na teoria apresentada no Capítulo 2 é desenvolvida a equação do movimento para placas retangulares dotadas de elementos piezoelétricos acoplados à sua superfície.

#### 3.1- Fundamentos da Piezoeletricidade

O efeito piezoelétrico foi descoberto pelos irmãos Curie em 1880, sendo uma propriedade existente em diversos materiais tanto naturais (quartzo, pele e osso humanos) quanto sintéticos (cerâmicas e polímeros). Tais materiais, quando solicitados externamente, de modo a sofrerem deformação mecânica, produzem polarização elétrica (distribuição de cargas elétricas) proporcional à deformação sofrida. Este efeito é o chamado efeito piezoelétrico direto. Inversamente, quando estes materiais são submetidos a um campo elétrico ao longo de sua direção de polarização, são produzidas deformações mecânicas em resposta. É o efeito piezoelétrico inverso. Estes dois efeitos são explorados na confecção de sensores de deformação e atuadores. Os sensores trabalham segundo o efeito piezoelétrico direto, e os atuadores trabalham segundo o efeito piezoelétrico inverso.

##### 3.1.1- Efeito Piezoelétrico Direto

Considere-se um elemento de um material piezoelétrico esteja submetido ao estado mais geral de tensões mecânicas, conforme apresenta a Figura 3.1. Visando possibilitar o uso da

notação indicial, que simplifica consideravelmente a apresentação da formulação, os eixos (x, y, z) são substituídos, no que segue, pelos eixos (1,2,3).

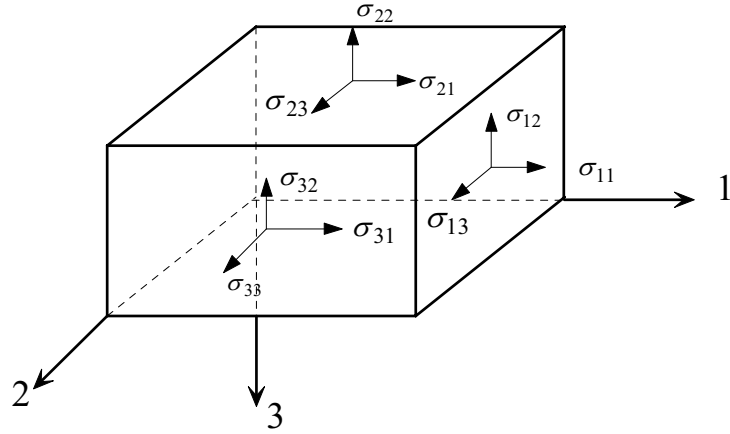


Figura 3.1- Tensões atuantes em um elemento piezelétrico.

A relação entre os componentes do vetor de polarização elétrica  $P_i$  e as componentes do tensor das tensões mecânicas  $\sigma_{jk}$  é estabelecida através da expressão (Clark *et al.*, 1998).

$$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Utilizando a usual contração de índices, conforme detalhado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{matrix} \right\} \quad (3.2)$$

a equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

As constantes  $d_{ij}$ , denominadas *módulo piezelétricos*, são características de cada material, sendo definidas pela relação:

$$d_{ij} = \frac{\text{densidade de carga na direção } i}{\text{tensão mecânica aplicada na direção } j} \frac{[C / m^2]}{[N / m^2]} \quad (3.4)$$

### 3.1.2- Efeito Piezoelétrico Inverso

Quando um campo elétrico é aplicado a um material piezoelétrico, o material apresenta alterações de forma (alongamentos e distorções) que são proporcionais ao campo elétrico aplicado. É a seguinte a relação entre as componentes do vetor campo elétrico  $E_i$  e as componentes do tensor de deformações  $\varepsilon_{jk}$ :

$$\varepsilon_{jk} = d_{ijk} E_i \quad (3.5)$$

Introduzindo a contração de índices:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

A equação (3.5) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

### 3.2- Modelagem da interação mecânica decorrente do acoplamento placa-elemento piezoelétrico.

Nos casos considerados neste trabalho, considerar-se-á que os eixos 1 e 2 estejam em um plano paralelo ao plano neutro da placa, havendo uma única componente de campo elétrico aplicada segundo a direção 3, conforme ilustrado na Figura 3.2. Desta forma o vetor campo elétrico fica:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

com:

$$E_3 = \frac{V}{t} \quad (3.9)$$

onde  $V$  é a tensão elétrica aplicada e  $t$  é a espessura do elemento piezoelétrico.

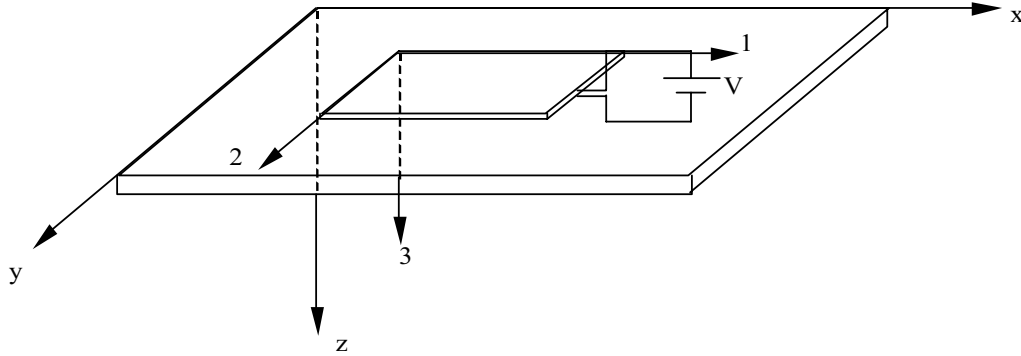


Figura 3.2- Ilustração dos eixos de polarização do elemento piezoelétrico acoplado à placa.

Além disso, considerar-se-á, como material piezoelétrico, as cerâmicas PZT (Zirconato Titanato de Chumbo), para as quais a matriz dos módulos piezoelétricos tem a forma particular (Clark *et al.*, 1998):

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Nestas condições, as componentes não nulas de deformação, que são as deformações normais no plano da placa, resultantes da ativação do elemento piezoelétrico se escrevem:

$$\varepsilon_1 = d_{31} \frac{V}{t} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_2 = d_{31} \frac{V}{t} \quad (3.12)$$

Através das relações acima verifica-se a igualdade das tensões normais nas direções  $x$  e em  $y$ . No que segue, estas deformações serão designadas da seguinte forma:

$$(\varepsilon_x)_{pe} = (\varepsilon_y)_{pe} = \varepsilon_{pe} = \frac{d_{31}}{t} V \quad (3.13)$$

onde o índice  $pe$  estará associado ao material piezoelétrico.

Nas aplicações a serem desenvolvidas, considerar-se-ão situações em que são coladas, de forma simétrica, duas pastilhas piezoelétricas sobre cada uma das faces da placa, conforme ilustra a Figura 3.3. Estas pastilhas são ativadas através da aplicação de tensões elétricas de mesma amplitude e sinais opostos em cada uma delas.

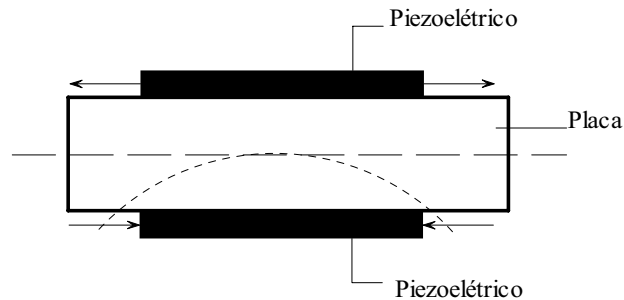


Figura 3.3- Acoplamento placa–piezoelétricos.

Através da Figura 3.3 verifica-se nas duas regiões de interface, o efeito resultante da ativação elétrica do elemento piezoelétrico será a geração de esforços de tração em uma das interfaces e de compressão na outra. Devido à simetria física e geométrica, a ativação dos elementos piezoelétricos resulta em flexão pura da placa. Conforme será demonstrado mais adiante, o efeito dos elementos piezoelétricos será representado por uma distribuição de momentos fletores ao longo das bordas destes elementos.

Considera-se que a adesão entre a placa e as pastilhas piezoelétricas é perfeita. Isto implica que na região de interface a deformação é contínua, ou seja, a placa e os elementos piezoelétricos apresentam a mesma deformação. Contudo, por serem os dois componentes do sistema constituídos de materiais diferentes (com módulos de elasticidade diferentes), verifica-se que as tensões na interface não podem ser contínuas. Porém Crawley e de Luis (1987) verificaram que no caso de o adesivo apresentar espessura significativa, esta situação na interface pode ser significativamente alterada.

A modelagem da influência mecânica dos elementos piezoelétricos sobre a placa será desenvolvida a seguir, considerando que a direção de polarização seja  $z$  e que as deformações ocorram de forma idêntica nas direções  $x$  e  $y$ . Será levando em conta o fato que a distribuição de tensões na placa deve ser simétrica em relação à linha neutra e que a flexão da placa produz uma distribuição linear de tensões normais, conforme ilustrado na Figura 3.4.

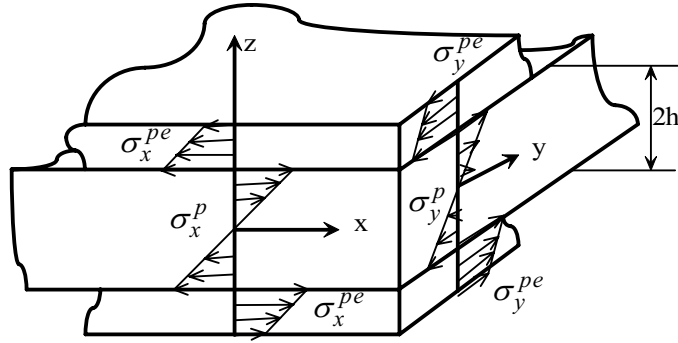


Figura 3.4- Distribuição das tensões normais nos planos  $x$ - $y$  e  $y$ - $z$ , devidas à ativação do piezoelétrico.

Os momentos por unidade de comprimento,  $m_x$  e  $m_y$ , resultantes das distribuições de tensões normais são dados pelas expressões:

$$\int_{-h}^h \sigma_x z dy dz = m_x dy \quad (3.14)$$

$$\int_{-h}^h \sigma_y z dx dz = m_y dx \quad (3.15)$$

onde  $h$  é a semi-espessura da placa.

As variações das deformações normais através da espessura são lineares, dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad \varepsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad (3.16)$$

onde  $\frac{1}{r_x}$  e  $\frac{1}{r_y}$  representam as curvaturas da superfície neutra da placa, nos planos  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$  respectivamente.

Considerando que as tensões que atuam na placa sejam apenas  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , utilizando as equações (2.19) e (2.20) escreve-se a relação tensão-deformação na seguinte forma matricial:



$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.16) em (3.17) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_x} + \frac{\nu}{r_y} \\ \frac{\nu}{r_x} + \frac{1}{r_y} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.14), efetuando a integração e levando em conta (2.34), escreve-se:

$$\begin{aligned} m_x dy &= \int_{-h}^h \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r_x} + \frac{\nu}{r_y} \right) z dy dz \\ m_x &= D \left( \frac{1}{r_x} + \frac{\nu}{r_y} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da mesma forma, da combinação de (3.18) e (3.15) resulta:

$$m_y = D \left( \frac{\nu}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) \quad (3.20)$$

Admitindo que o elemento piezoelétrico seja retangular e que as deformações nas direções  $x$  e  $y$  sejam iguais, as equações acima indicam que  $m_x$  e  $m_y$  são iguais e uniformemente distribuídos sobre o sistema placa-atuador. Esta condição pode ser verificada fazendo:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y \quad (3.21)$$

Substituindo (3.16) em (3.21) obtém-se a condição:

$$r_x = r_y \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.19) e (3.20) tem-se:

$$m_x = \frac{D}{r_x}(1 + \nu) \quad (3.23)$$

$$m_y = \frac{D}{r_x}(\nu + 1) \quad (3.24)$$

Conclui-se, portanto, que:

$$m_x = m_y = m \quad (3.26)$$

com

$$m = \frac{D}{r_x}(\nu + 1) \quad (3.27)$$

Da equação (3.27) obtém-se:

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1}{r_x} = \frac{m}{D(\nu + 1)} \quad (3.28)$$

A equação (3.28) representa a curvatura da placa decorrente da flexão. A condição de que  $r_x$  e  $r_y$  sejam iguais em todos os pontos da região coberta pela pastilha piezoelétrica define a condição de flexão pura da placa.

As relações tensões-deformações para a região da interface placa-piezoelétrico são obtidas a partir de (2.19) e (2.20):

$$(\sigma_{x_i})_p = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} (\varepsilon_{x_i} + \nu_p \varepsilon_{y_i}) \quad (3.29)$$

$$(\sigma_{y_i})_p = \frac{E_p}{1 - \nu_p^2} (\varepsilon_{y_i} + \nu_p \varepsilon_{x_i}) \quad (3.30)$$

onde o índice  $i$  indica a região de interface e o índice  $p$  designa a placa.

As tensões no atuador piezoelétrico na interface resultam da combinação da deformação transferida pela placa na interface e da deformação decorrente da ativação elétrica. Assim, escreve-se:

$$(\sigma_{x_i})_{pe} = \frac{E_{pe}}{1 - \nu_{pe}} \left[ \varepsilon_{x_i} + \nu_{pe} \varepsilon_{y_i} - (1 + \nu_{pe}) \varepsilon_{pe} \right] \quad (3.31)$$

$$(\sigma_{y_i})_{pe} = \frac{E_{pe}}{1 - \nu_{pe}} \left[ \varepsilon_{y_i} + \nu_{pe} \varepsilon_{x_i} - (1 + \nu_{pe}) \varepsilon_{pe} \right] \quad (3.32)$$

com  $\varepsilon_{pe}$  dado por (3.13).

As tensões normais de flexão na placa variam linearmente com  $z$  e podem ser escritas em termos de seus valores na interface como:

$$(\sigma_x)_p = \frac{(\sigma_{x_i})_p}{h} z \quad (3.33)$$

$$\frac{(\sigma_{x_i})_p}{h} = \frac{(\sigma_x)_p}{z} \quad (3.34)$$

Estas distribuições de tensão são mostradas na Figura 3.5.

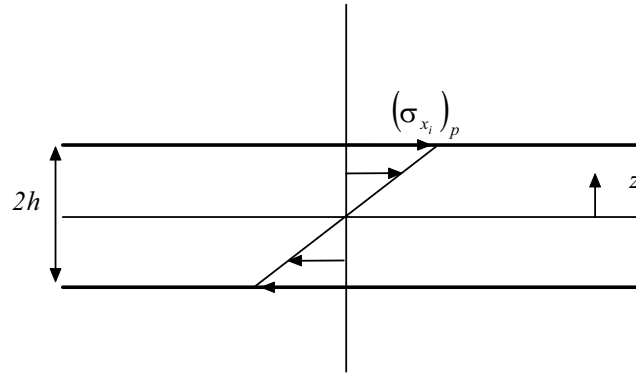


Figura 3.5- Distribuição de tensão em um elemento de placa.

Da mesma forma, considerando as distribuições de tensões no elemento piezoelétrico, escreve-se:

$$(\sigma_x)_{pe} = (\sigma_{xi})_{pe} - (\sigma_{xi})_p \left[ 1 - \frac{z}{h} \right] \quad (3.35)$$

$$(\sigma_y)_{pe} = (\sigma_{yi})_{pe} - (\sigma_{yi})_p \left[ 1 - \frac{z}{h} \right] \quad (3.36)$$

A deformação na interface e a tensão na placa podem ser expressas em termos das propriedades constitutivas do material e da deformação da pastilha piezoelétrica causada por sua ativação elétrica. Para tanto, a partir de (3.33) estabelece-se o equilíbrio de momentos na direção  $y$  em relação ao plano neutro da placa:

$$\int_0^h (\sigma_x)_p z dz + \int_h^{h+t} \left\{ (\sigma_{xi})_{pe} - (\sigma_{xi})_p \left[ 1 - \frac{z}{h} \right] \right\} z dz = 0 \quad (3.37)$$

Desenvolvendo a equação (3.37) obtém-se:

$$(\sigma_{xi})_p = - \frac{3th(2h+t)}{2(h^3 + t^3) + 3ht^2} (\sigma_{xi})_{pe} \quad (3.38)$$

A equação (3.38) pode ser escrita sob a forma:

$$(\sigma_{x_i})_p = -K(\sigma_{x_i})_{pe} \quad (3.39)$$

onde K é um parâmetro adimensional definido segundo:

$$K = \frac{3th(2h+t)}{2(h^3+t^3)+3ht^2} \quad (3.40)$$

De forma similar, estabelecendo o equilíbrio de momentos na direção  $x$  a partir de (3.36) escreve-se:

$$(\sigma_{y_i})_p = -K(\sigma_{y_i})_{pe} \quad (3.41)$$

Substituindo (3.29) em (3.39) obtém-se:

$$-K(\sigma_{x_i})_{pe} = \frac{E_p}{1-\nu_p^2} (\varepsilon_{x_i} + \nu_p \varepsilon_{y_i}) \quad (3.42)$$

Substituindo (3.31) em (3.42), tem-se:

$$-K \left\{ \frac{E_{pe}}{E_p} \frac{(1-\nu_p^2)}{(1-\nu_{pe}^2)} [\varepsilon_{x_i} + \nu_{pe} \varepsilon_{y_i} - \varepsilon_{pe} - \nu_{pe} \varepsilon_{pe}] \right\} = (\varepsilon_{x_i} + \nu_p \varepsilon_{y_i}) \quad (3.43)$$

ou:

$$\varepsilon_{x_i} (1-P) + \varepsilon_{y_i} (\nu_p - P\nu_{pe}) = -P\varepsilon_{pe} (1+\nu_{pe}) \quad (3.44)$$

onde:

$$P = -K \frac{E_{pe}}{E_p} \frac{(1-\nu_p^2)}{(1-\nu_{pe}^2)} \quad (3.45)$$

Assim, a deformação na região de interface pode ser escrita segundo:

$$\varepsilon_{x_i} = \varepsilon_{y_i} = -\frac{(1 + \nu_{pe})P}{1 + \nu_p - (1 + \nu_{pe})P} \varepsilon_{pe} \quad (3.46)$$

A equação (3.46) fornece a relação entre a deformação na região da interface e a deformação causada pela ativação do piezoelétrico, envolvendo as propriedades constitutivas.

De posse da deformação na região da interface é possível determinar a tensão  $(\sigma_{x_i})_p$  e, conseqüentemente, os momentos distribuídos utilizando a equação (2.29), conforme o desenvolvimento a seguir:

$$m_x = \int_{-h}^h z(\sigma_x)_p dz = \frac{(\sigma_{x_i})_p}{h} \int_{-h}^h z^2 dz$$

Realizando a integração indicada obtém-se:

$$m_x = m_y = \frac{2}{3} (\sigma_{x_i})_p h^2 \quad (3.47)$$

Substituindo a equação (3.29) em (3.47) obtém-se:

$$m_x = m_y = \frac{2}{3} h^2 \frac{E_p}{1 - \nu_p} (\varepsilon_{x_i} + \nu_p \varepsilon_{y_i}) \quad (3.48)$$

Substituindo (3.46) em (3.48), tem-se:

$$m_x = -E_p \frac{(1 + \nu_{pe})}{(1 - \nu_p)} \left[ \frac{P}{1 + \nu_p - (1 + \nu_{pe})P} \right] \frac{2}{3} h^2 \varepsilon_{pe} \quad (3.49)$$

Fazendo uso de (3.13), a equação (3.49) pode ser escrita sob a forma:

$$m_x = m_y = C_o \varepsilon_{pe} = C_o \frac{d_{31}}{t} V \quad (3.50)$$

onde  $C_o$  é uma constante determinada pelas propriedades físicas e espessura da placa, dada por:

$$C_o = -E_p \frac{(1 + \nu_{pe})}{(1 - \nu_p)} \left[ \frac{P}{1 + \nu_p - (1 + \nu_{pe})P} \right] \frac{2}{3} h^2 \quad (3.51)$$

De acordo com (3.50), quando a tensão elétrica de entrada no atuador é oscilante, os momentos  $m_x$  e  $m_y$  oscilam na mesma frequência de voltagem. Observa-se também que as amplitudes dos momentos fletores independem das dimensões do elemento piezoelétrico.

### 3.3-Excitação por atuadores piezoelétricos de uma placa retangular simplesmente apoiada

Considere-se a placa retangular simplesmente apoiada nas quatro bordas, à qual são colados dois elementos piezoelétricos, simetricamente, em ambas as faces da placa, de forma que as bordas do elemento piezoelétrico – cujas posições são indicadas pelas coordenadas  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  fiquem paralelas às bordas da placa, conforme ilustrado na Figura 3.6.

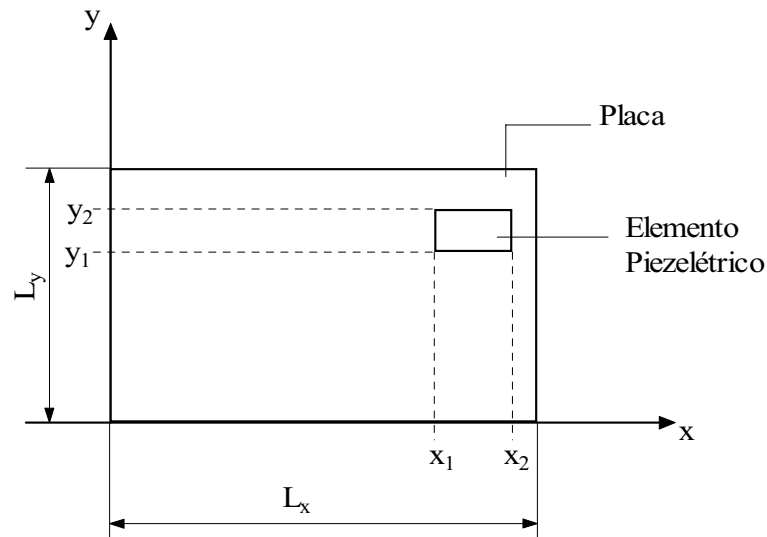


Figura 3.6- Ilustração do sistema placa-elemento piezoelétrico.

Conforme visto nas seções anteriores, a ativação do elemento piezoelétrico, com tensões elétricas de sinais opostos, induz o surgimento de distribuições de momentos fletores nas direções  $x$  e  $y$ . Tais momentos podem ser expressos da seguinte forma:

$$m_x = m_y = C_o \frac{d_{31}}{t} V [h(x - x_1) - h(x - x_2)] [h(y - y_1) - h(y - y_2)] \quad (3.52)$$

onde  $h(\cdot)$  é a função degrau unitário.

Negligenciando o acréscimo de massa e de rigidez da placa devido à colagem dos atuadores (tal hipótese tem sido empregada por diversos autores (Fuller *et al.*, 1991), é possível escrever a equação do movimento da placa utilizando a teoria desenvolvida no Capítulo 2. Para tanto, a equação do movimento (2.85) é re-escrita em termos dos momentos fletores  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  e dos momentos induzidos pelos atuadores piezoelétricos:

$$\frac{\partial^2 (M_x - m_x)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (M_y - m_y)}{\partial y^2} + m_s \ddot{w} = 0 \quad (3.53)$$

O desenvolvimento de (3.53) utilizando as relações momentos-curvaturas, conduz à seguinte equação do movimento:

$$D \nabla^4 w + m_s \ddot{w} = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \quad (3.54)$$

Pode-se notar que os momentos induzidos pela ação piezoelétrica aparecem na equação como esforços externos.

O carregamento externo da equação (3.54) pode ser calculado através da diferenciação da equação (3.52):

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = C_o \frac{d_{31}}{t} V [\delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2)] [h(y - y_1) - h(y - y_2)] \quad (3.55)$$



$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = C_o \frac{d_{31}}{t} V [h(x-x_1) - h(x-x_2)] [\delta'(y-y_1) - \delta'(y-y_2)] \quad (3.56)$$

onde  $\delta(\cdot)$  indica a função Delta de Dirac.

Substituindo as equações (3.55) e (3.56) em (3.54) obtém-se:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w + m_s \ddot{w} = & C_o \frac{d_{31}}{t} V [\delta'(x-x_1) - \delta'(x-x_2)] [h(y-y_1) - h(y-y_2)] + \\ & C_o \frac{d_{31}}{t} V [h(x-x_1) - h(x-x_2)] [\delta'(y-y_1) - \delta'(y-y_2)] \end{aligned} \quad (3.57)$$

A solução da equação (3.57) pode ser encontrada utilizando a expansão modal da resposta  $w(x, y)$ . De acordo com o desenvolvimento apresentado na Seção 2.9, para uma placa retangular simplesmente apoiada, as autofunções são dadas por:

$$\phi_{mn}(x, y) = \text{sen}(\gamma_m x) \text{sen}(\gamma_n y) \quad (3.58)$$

onde  $\gamma_m$  e  $\gamma_n$  são dados por:

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{L_x} \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{L_y} \quad \text{com } m, n = 1, 2, \dots$$

Utilizando o Teorema da Expansão (Meirovitch, 1975) a resposta da placa pode ser escrita como uma combinação linear das autofunções:

$$w(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y) \quad (3.59)$$

onde  $W_{mn}$  designam as amplitudes das respostas modais da placa.

A partir de (3.59) computam-se as derivadas em relação ao tempo  $t$  e às coordenadas espaciais  $x$  e  $y$ :

$$\ddot{w}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{W}_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\gamma_m x\right) \operatorname{sen}\left(\gamma_n y\right) \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_m^4 W_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\gamma_m x\right) \operatorname{sen}\left(\gamma_n y\right) \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^4 W_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\gamma_m x\right) \operatorname{sen}\left(\gamma_n y\right) \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_m^2 \gamma_n^2 W_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\gamma_m x\right) \operatorname{sen}\left(\gamma_n y\right) \quad (3.63)$$

Substituindo as equações (3.60), (3.61), (3.62) e (3.63) em (3.57), escreve-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{W}_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) m_s \\ & + D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \left[ \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]^2 = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para fazer uso da propriedade de ortonormalidade das autofunções, a partir de (3.64) escreve-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \ddot{W}_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi}{L_y} y\right) m_s dx dy + \\ & D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ W_{mn}(t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi}{L_y} y\right) \right. \\ & \left. \left[ \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]^2 dx dy \right\} dx dy = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi}{L_x} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi}{L_y} y\right) dx dy \end{aligned} \quad (3.65)$$

São as seguintes as relações de ortogonalidade das autofunções:

$$\int_0^{L_x} \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \text{sen}\left(\frac{m'\pi}{L_x}x\right) dx = \begin{cases} 0 & m \neq m' \\ \frac{L_x}{2} & m = m' \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\int_0^{L_y} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) \text{sen}\left(\frac{n'\pi}{L_y}y\right) dy = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ \frac{L_y}{2} & n = n' \end{cases} \quad (3.67)$$

Substituindo as equações (3.66) e (3.67) em (3.65), obtém-se:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_{mn} \frac{L_x L_y}{4} m_s + DW_{mn} \frac{L_x L_y}{4} \left[ \left( \frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] = \\ \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) dx dy \end{aligned} \quad (3.68)$$

No que segue, admitir-se-á a condição de movimento harmônico em regime permanente, com frequência  $\omega$ . Nesta situação, tem-se:

$$\begin{aligned} V(t) &= \bar{V} e^{i\omega t} \\ W_{mn}(t) &= \bar{W}_{mn} e^{i\omega t} \\ \ddot{W}_{mn}(t) &= -\omega^2 \bar{W}_{mn} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Substituindo (3.69) em (3.68), após algumas manipulações algébricas chega-se à relação:

$$\bar{W}_{mn} = \frac{\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) dx dy}{\frac{L_x L_y}{4} m_s (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (3.70)$$

onde  $\omega_{mn}$  designa as frequências naturais da placa, dadas por:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m_s}} \quad (3.71)$$

Substituindo as equações (3.55) e (3.56) em (3.71) e escrevendo  $L_x L_y = A$ , onde  $A$  é a área da placa, escreve-se:

$$\begin{aligned} \bar{W}_{mn} = \frac{4C_0 \bar{V} d_{31}}{t A m_s (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2) \right\} [h(y - y_1) - h(y - y_2)] + \\ [h(x - x_1) - h(x - x_2)] \left\{ \delta'(y - y_1) - \delta'(y - y_2) \right\} \left\{ \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.72)$$

Após desenvolvimento algébrico relativamente longo da dupla integração indicada na equação (3.76), envolvendo integrações por partes, chega-se à seguinte expressão para as amplitudes modais:

$$\bar{W}_{mn} = \frac{4C_0 \bar{V} d_{31}}{t A m_s (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \left\{ - \left( \frac{\gamma_m^2 + \gamma_n^2}{\gamma_m \gamma_n} \right) [ \cos(\gamma_m x_1) - \cos(\gamma_m x_2) ] [ \cos(\gamma_n y_1) - \cos(\gamma_n y_2) ] \right\} \quad (3.73)$$

Introduzindo as amplitudes modais fornecidas por (3.73) em (3.59), obtém-se a resposta vibratória da placa em regime harmônico permanente, no domínio do tempo.

A análise da equação (3.73) revela que existem dois fatores que determinam a maior ou menor participação de um dado modo na resposta da placa. O primeiro fator está relacionado com a proximidade da frequência de excitação com a frequência natural do modo. Com efeito, se  $\omega \rightarrow \omega_{mn}$  o termo  $(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rightarrow 0$ ,  $\bar{W}_{mn} \rightarrow \infty$ , o que implica que o modo  $(m, n)$  terá participação preponderante na resposta.

O segundo fator está relacionado com a posição do PZT, através dos argumentos das funções cosseno da equação (3.73). Considerar-se-ão nesta análise os casos em que o

elemento piezoelétrico está simetricamente posicionado em relação a cada um dos eixos médios da placa, ou em relação a estes dois eixos simultaneamente.

➤ 1º Caso: Simetria em relação ao eixo  $\bar{x}$ , (Figura 3.7).

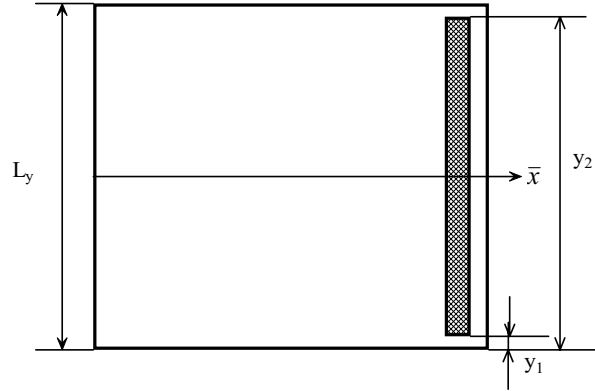


Figura 3.7 – Sistema placa-piezoelétrico. Representação da simetria do elemento piezoelétrico em relação a  $\bar{x}$ .

Neste caso, vale a relação:

$$y_2 = L_y - y_1 \quad (3.74)$$

Substituindo as equações (2.104) e (3.74) nos termos de argumento  $y$  da equação (3.73) escreve-se:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} (L_y - y_1)\right) \quad (3.75)$$

Desenvolvendo a equação (3.75) obtém-se:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) - \cos(n\pi) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \quad (3.76)$$

Desta forma, quando  $n$  é par, a expressão (3.76) assume a forma:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) = 0 \quad (3.77)$$

Por outro lado, quando  $n$  é ímpar a expressão (3.76) assume a seguinte forma:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \quad (3.78)$$

Assim, verifica-se que para o caso do elemento piezelétrico estar posicionado simetricamente em relação a  $\bar{x}$ , os modos com  $n$  par não participam da resposta da placa, que fica então exclusivamente determinada pela contribuição dos modos com  $n$  ímpar.

➤ 2º Caso: Simetria em relação ao eixo  $\bar{y}$ , (Figura 3.8).

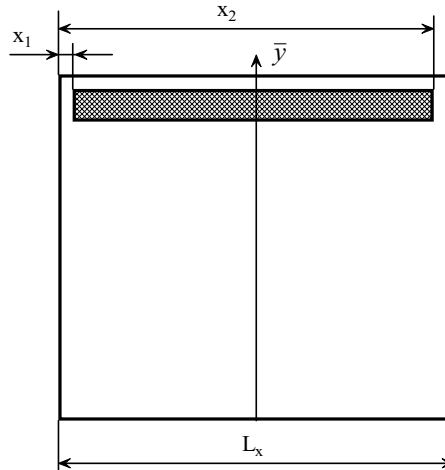


Figura 3.8 – Sistema placa-piezoelétrico. Representação da simetria do elemento piezoelétrico em relação a  $\bar{y}$ .

Quando o elemento piezoelétrico está simetricamente posicionado em relação ao eixo  $\bar{y}$ , vale a seguinte relação:

$$x_2 = L_x - x_1 \quad (3.79)$$

Substituindo as equações (2.104) e (3.79) nos termos de argumento  $x$  da equação (3.73) escreve-se:

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{L_x}(L_x - x_1)\right) \quad (3.80)$$

Desenvolvendo a equação (3.80) obtém-se:

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) - \cos(m\pi)\cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) \quad (3.81)$$

Desta forma, quando  $m$  é par, a expressão (3.81) assume a forma:

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) = 0 \quad (3.82)$$

Por outro lado, quando  $m$  é ímpar a (3.80) fica:

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) + \cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) = 2\cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x_1\right) \quad (3.83)$$

Assim, verifica-se que quando o elemento piezelétrico está posicionado simetricamente em relação  $x$ , os modos com  $m$  par não participam da resposta da placa, que fica então determinada pela contribuição dos modos com  $m$  ímpar.

- 3º Caso: Simetria em relação a  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , (Figura 3.9).

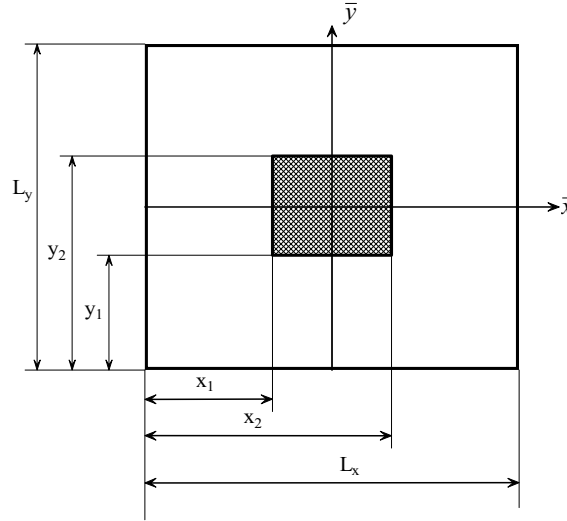


Figura 3.9 – Sistema placa-piezoelétrico. Representação da simetria do elemento pizoelétrico em relação a  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

No caso em que existe dupla simetria em relação a  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  simultaneamente, analisam-se os argumentos das funções cosseno da equação (3.73). Neste caso, valem as equações (3.74) e (3.79) que, substituídas, juntamente com a equação (2.104) nos argumentos das funções cosseno da equação (3.73) conduzem a:

$$\left[ \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} (L_x - x_1)\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} (L_y - y_1)\right) \right] \quad (3.84)$$

Desenvolvendo a expressão (3.84) escreve-se:

$$\left[ \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) - \cos(m\pi) \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) - \cos(n\pi) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \right] \quad (3.85)$$

Assim, quando  $m$  e  $n$  são pares, (3.85) pode ser escrita como:



$$\left[ \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \right] = 0 \quad (3.86)$$

Se  $m$  é ímpar e  $n$  é par, (3.85) resulta em:

$$\left[ \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) + \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \right] = 0 \quad (3.87)$$

Quando  $m$  é par e  $n$  é ímpar:

$$\left[ \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \right] = 0 \quad (3.88)$$

Quando  $m$  e  $n$  são ímpares, tem-se:

$$\left[ \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) + \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \right] = \left[ 2\cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_1\right) \right] \left[ 2\cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_1\right) \right] \quad (3.89)$$

Verifica-se, portanto, que para o caso de simetria dupla, apenas os modos com  $m$  e  $n$  ímpares contribuem na resposta da placa.

## **Capítulo IV**

### **Propagação de Ondas Sonoras e Radiação em Placas de Kirchhoff**

Em numerosas situações o ruído é gerado pela vibração de componentes estruturais. Conseqüentemente, há grande interesse no estudo da acústica estrutural, que é uma área de pesquisa que engloba duas outras: a vibro-acústica, que estuda os processos envolvendo interação acústica entre estruturas sólidas e fluidos, e uma outra linha de pesquisa que trata exclusivamente da propagação sonora em estruturas, estuda todas as formas de vibrações de estruturas sólidas ocorridas em frequências audíveis e que são inevitavelmente acompanhadas pela geração de som em fluidos contínuos.

Neste capítulo apresentar-se-ão os conceitos fundamentais relativos à propagação sonora em estruturas e os fatores que governam a radiação sonora em placas de Kirchhoff.

#### **4.1- Conceitos Básicos de Propagação Sonora em Estruturas**

##### ***4.1.1- Ondas Longitudinais, Transversais e de Flexão***

Estruturas sólidas suportam tensões normais e de cisalhamento. Devido a isso permite a propagação de dois tipos de ondas vibratórias: longitudinais e transversais.

As ondas longitudinais apresentam velocidade de deslocamento da partícula coincidente com a direção de propagação da frente de onda. A Figura 4.1 apresenta as deformações longitudinais de um elemento de placa.

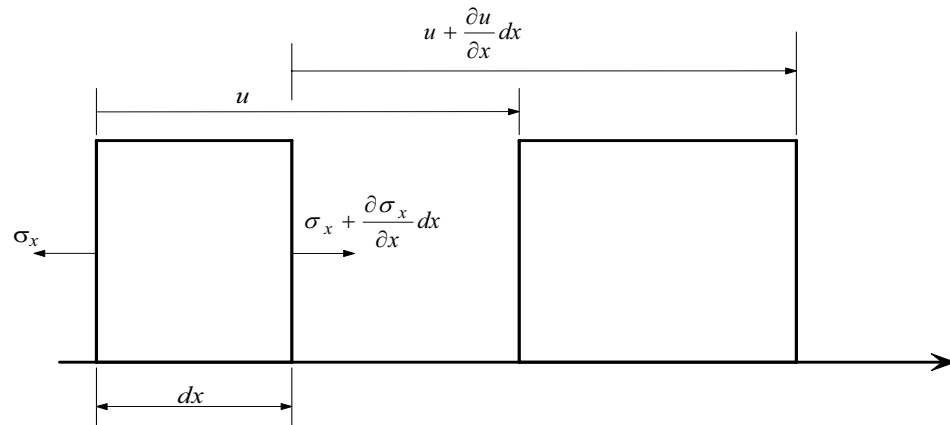


Figura 4.1- Deformação de onda longitudinal e tensão normal.

As ondas transversais apresentam deslocamento de partícula perpendicular à direção de propagação da frente de onda. A Figura 4.2 apresenta a deformação de um elemento de placa causado por uma onda transversal, enquanto a forma cinemática da onda transversal encontra-se representada na Figura 4.3.

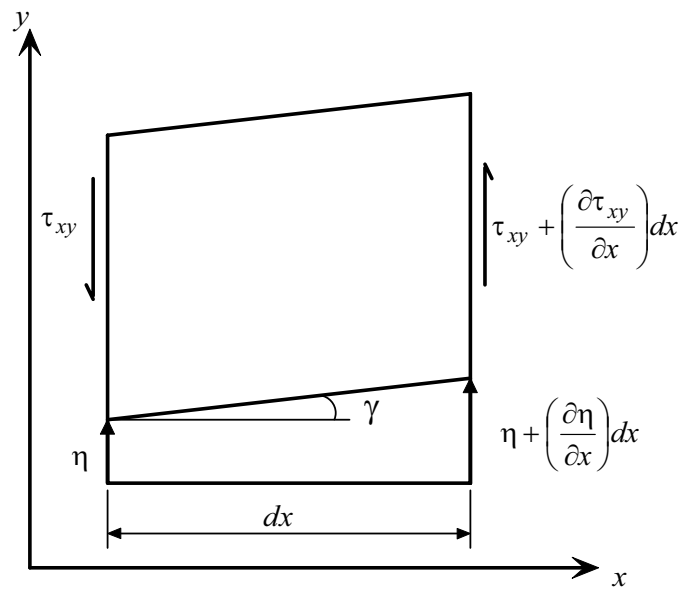


Figura 4.2-Elemento de placa, deformação decorrente da propagação de uma onda transversal pura.

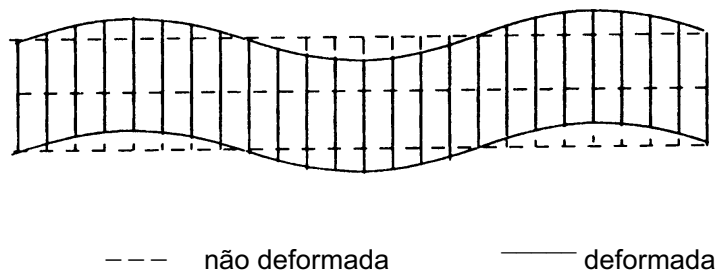


Figura 4.3 – Forma cinemática da onda transversal pura. Figura extraída de Fahy, (2001).

A presença de superfícies livres de tensão em placas imersas em gases tem um efeito significativo nas formas de onda que a placa é capaz de suportar. A necessidade de restrição no deslocamento normal às superfícies livres de tensões permite que uma deformação lateral significativa seja produzida por forças internas atuando paralelamente a estas superfícies. Isto é chamado *efeito de Poisson*. Desta forma, não existem ondas puramente longitudinais em placas, mas sim ondas quase-longitudinais, que podem ser visualizadas através da Figura 4.4.

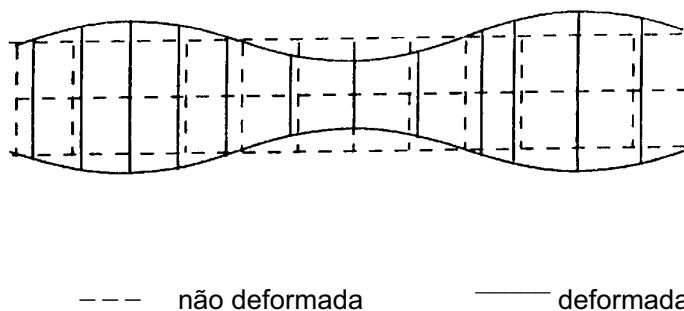


Figura 4.4- Forma cinemática da onda quase longitudinal. Figura extraída de Fahy, (2001).

Ondas transversais que atuam no plano da placa produzem deslocamentos paralelos ao plano médio da placa, não sendo assim afetadas pela condição livre de tensões nas superfícies paralelas.

Quando uma onda longitudinal incide de forma oblíqua sobre a superfície livre de tensões, esta gera na estrutura uma onda longitudinal refletida e uma onda transversal. Este processo produz na placa as ondas de flexão. Neste caso, os deslocamentos das partículas têm componentes normais e paralelas à direção de propagação da onda, conforme pode ser visto na Figura 4.5.

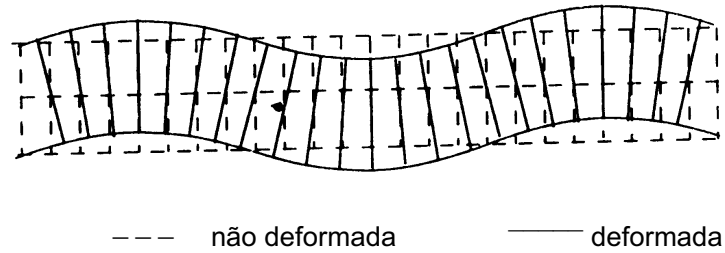


Figura 4.5- Forma cinemática da onda de flexão. Figura extraída de Fahy, (2001).

As ondas de flexão apresentam uma característica que afeta significativamente a interação acústica com os fluidos: elas são ondas dispersivas, ou seja, propagam-se com velocidade dependente da frequência, notando-se que a velocidade de propagação do som em fluidos não depende da frequência.

A interação fluido-estrutura tende a ser dominada por ondas de flexão devido a dois fatores: na região de frequências audíveis, as ondas de flexão em placas e cascas apresentam a menor impedância mecânica em relação a demais ondas que se propagam em sólidos. Ondas de flexão também impõem as maiores amplitudes de deslocamento, por unidade de densidade de energia, a fluidos contínuos.

#### 4.1.2- Ondas Quase-Longitudinais em Placas Uniformes

Em uma deformação puramente longitudinal de um sólido infinito uniforme e homogêneo, conforme apresentado na Figura 4.1, a relação tensão-deformação longitudinal é obtida através da teoria da elasticidade e pode ser escrita como:

$$\sigma_x = B \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

onde  $B$  é dado por (Fahy,2001):

$$B = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.2)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade, e

$\nu$  o coeficiente de Poisson

A velocidade de propagação da onda longitudinal é dada por:

$$c_l = \left( \frac{B}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material.

Para placas uniformes, em que apenas duas superfícies de uma faixa de seção retangular estão livres de tensão e apenas a deformação normal à superfície da placa é possível,  $B$  pode ser escrito como:

$$B = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad (4.4)$$

e a velocidade de propagação da onda quase-longitudinal é dada por:

$$c_l' = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \quad (4.5)$$

Em geral velocidades de ondas quase longitudinais excedem a velocidade do som no ar, sendo portanto, eficientes radiadores sonoros.

#### **4.1.3- Ondas de Flexão em Placas de Kirchhoff**

De acordo com o desenvolvimento apresentado na Seção 2.8, a equação diferencial do movimento de flexão em regime livre de uma placa fina, homogênea e uniforme é dada pela equação (2.85). Particularizando esta equação para o caso de propagação unidirecional em regime livre escreve-se:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.6)$$

Buscam-se as soluções de (4.6) sob a forma:

$$w(x, t) = w_0 e^{i(\omega t - k_f x)} \quad (4.7)$$

onde  $k_f$  é o número de onda de flexão livre.

Introduzindo (4.7) em (4.6) após calcular as derivadas de  $w$  em relação a  $x$  e a  $t$  obtém-se:

$$D k_f^4 = m_s \omega^2 \quad (4.8)$$

onde

$$k_f = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{m_s}{D}} \quad (4.9)$$

A velocidade de propagação de onda de flexão livre é dada por:

$$c_f = \frac{\omega}{k_f} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) em (4.10) é possível escrever:

$$c_f = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{D}{m_s}} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) pode ser escrita como:

$$c_f = \sqrt{1,8 f c_l h} \quad (4.12)$$

Assim, através da equação (4.12) constata-se que as ondas de flexão são dispersivas, pois apresentam velocidade de propagação dependente da frequência de excitação.

#### **4.1.4-Ondas Planas Transversais em Placas de Kirchhoff**

Ondas transversais propagando-se em sólidos são resultantes de tensões de cisalhamento associadas a deformações de cisalhamento. A relação tensão deformação é dada por:

$$\tau_{xy} = \tau\gamma = G \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.13)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento de um sólido elástico, definido na equação (2.22).

A equação do movimento transversal, na direção  $z$ , de um elemento de espessura unitária, é dada por:

$$\rho \delta x \delta y \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \quad (4.14)$$

onde  $\eta$  é o deslocamento transversal na direção  $y$ .

Derivando a equação (4.13) em relação a  $x$  e substituindo a equação resultante em equação (4.14) obtém-se a equação da onda transversal, que é dada por:

$$\left( \frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (4.15)$$

Quando a onda transversal é harmônica, a equação (4.15) assume a seguinte forma:

$$\left( \frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \omega^2 \tilde{\eta} = 0 \quad (4.16)$$



A velocidade de propagação da onda transversal é dada por:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.17)$$

Através da equação (4.17) verifica-se que a onda transversal é não dispersiva, uma vez que sua velocidade de propagação independe da frequência. Em sólidos elásticos e isotrópicos,  $c_s$  é aproximadamente 60% da velocidade de propagação de ondas quase-longitudinais.

#### 4.1.5-Freqüência Crítica

Em vibroacústica existe um fenômeno chamado *coincidência* entre ondas de flexão em placas e ondas acústicas em fluidos. Este fenômeno é caracterizado pela existência de uma frequência chamada de *freqüência crítica* para a qual a velocidade da onda de flexão  $c_f$  é igual a velocidade do som no fluido circundante. Assim, podemos escrever:

$$c_c = c_f \quad (4.18)$$

Substituindo (4.11) em (4.18) obtemos:

$$c_c = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{D}{m_s}} \quad (4.19)$$

Desta forma temos que a freqüência crítica é dada por:

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m_s}{D}} \quad (4.20)$$

#### 4.1.6-Impedância de Onda em Fluidos

A transmissão de energia de onda sobre interfaces entre diferentes componentes estruturais ou entre fluidos e estruturas depende crucialmente da impedância relativa de onda e da conexão com o meio sendo estes fatores funções do número de onda.

Define-se impedância de onda como sendo uma reação de um sistema distribuído a uma excitação harmônica dada por uma distribuição espacial de força, ou de velocidade, que possui apenas um número de onda. Considerar-se-á a impedância de onda apresentada por um fluido que se propaga devido a uma perturbação causada por uma superfície plana. A Figura 4.6 apresenta a propagação do fluido ao longo da superfície plana.

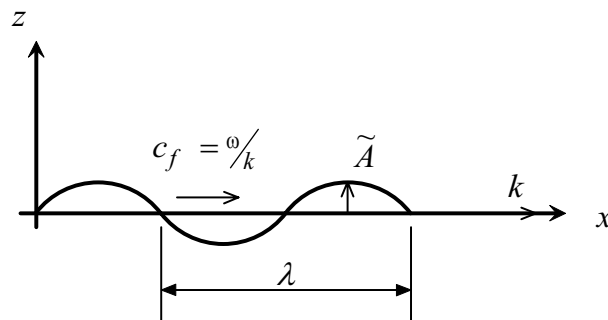


Figura 4.6 – Propagação de onda em uma interface plana.

O símbolo  $\lambda$  presente na Figura 4.6 representa o comprimento de onda e é dado por:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (4.21)$$

A impedância apresentada pelo fluido como uma reação ao distúrbio causado por esta onda determina:

- a pressão do fluido no contorno.
- a eficiência com que a onda irradia energia sonora.

A velocidade normal de uma onda transversal harmônica plana pode ser expressa na forma complexa exponencial como sendo:

$$\dot{u}_n(x, t) = \tilde{A} e^{i(\omega t - kx)} \quad (4.22)$$

onde  $k$  é um número de onda arbitrário e  $\tilde{A}$  é a amplitude complexa de pressão sonora.

O campo de pressão sonora do fluido deverá satisfazer a forma bi-dimensional da equação de Helmholtz, que é dada por (Fahy, 2001):

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}(x)}{\partial z^2} + k^2 \tilde{p}(x) = 0 \quad (4.23)$$

A solução geral da equação (4.23) é dada por:

$$\tilde{p}(x, z) = \tilde{B} e^{-ik_x x} e^{-ik_z z} \quad (4.24)$$

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 \quad (4.25)$$

onde:

- $\tilde{B}$  é amplitude complexa de pressão sonora.
- $k_x$  é a componente em  $x$  do número de onda acústica  $k$ .
- $k_z$  é a componente em  $z$  do número de onda acústica  $k$ .

Quando o fluido tem movimento normal à direção  $z=0$ , escreve-se:

$$k_x = k_f \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25) obtém-se:

$$k_z^2 = k^2 - k_f^2 \quad (4.27)$$

Obtém-se a amplitude do campo de pressão sonora aplicando a equação de momentos na direção  $z$ , na superfície:

$$\left( \frac{\partial \tilde{p}(x, z)}{\partial z} \right)_{z=0} = -ik_z \tilde{B} e^{-ik_f x} = -i\omega \rho_0 \tilde{u}_n = -i\omega \rho_0 \tilde{A} e^{-ik_f x} \quad (4.28)$$

A solução do campo de pressão toma a forma:

$$\tilde{p}(x, z) = \omega \rho_0 \tilde{A} (k^2 - k_f^2)^{-1/2} e^{-ik_f x} e^{-i\sqrt{k^2 - k_f^2} z} \quad (4.29)$$

A impedância da onda de fluido presente no contorno é dada por:

$$z(k) = \frac{\tilde{p}(x, 0)}{\tilde{u}(x, 0)} \quad (4.30)$$

Substituindo as equações (4.22) e (4.29), com  $z=0$  e  $t=0$ , em (4.30) obtém-se a impedância acústica específica de onda:

$$z(k) = \frac{\omega \rho_0}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} = \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 - \left( \frac{k_f}{k} \right)^2}} \quad (4.31)$$

A equação (4.31) é de grande importância prática, pois representa a impedância de radiação específica, que pode ser utilizada para determinar a eficiência da radiação sonora para qualquer forma de campo vibracional no contorno da placa.

Analisando a equação (4.31) verifica-se que:

- Se o número de onda de flexão  $k_f$  é menor que o número de onda acústica  $k$ , ou seja,  $c_f > c$ , as ondas de flexão são supersônicas (acusticamente rápidas). A placa vibra com frequência superior à frequência de coincidência. A impedância apresentada pelo contorno do fluido é real (resistiva). Portanto, existe energia sonora radiada para  $z(k) \rightarrow \rho_c$  quando  $\frac{k_f}{k} \rightarrow 0$  ou  $\omega \rightarrow \infty$ .
- Se o número de onda de flexão  $k_f$  é maior que o número de onda acústica  $k$ , ou seja,  $c_f < c$ , as ondas de flexão são subsônicas (acusticamente lentas). A placa vibra

com frequência inferior à frequência crítica. A impedância apresentada pelo contorno do fluido é imaginária (puramente reativa) positiva e proporcional à frequência, indicando que o fluido apresenta uma reação inercial. Neste caso, a equação (4.29) indica que o campo de pressão cai exponencialmente com o aumento da distância à superfície. Não há potência sonora radiada, mas apenas uma perturbação do fluido na região próxima à superfície.

- Quando o número de onda de flexão é igual ao número de onda acústica, a placa vibra na frequência crítica, as ondas de flexão propagam-se com a mesma velocidade das ondas acústicas. Devido a isso são denominadas ondas de flexão sônica. Neste caso a impedância é infinita.

#### 4.2-Radiação de ruído de uma placa finita.

Na seção anterior verificou-se que placas vibrando abaixo da frequência crítica não geram potência sonora. Porém esta conclusão é válida apenas teoricamente, uma vez que na prática verifica-se que placas finitas são capazes de radiar quando vibram abaixo da frequência crítica. Isto decorre do fato que durante a vibração da placa o fluido move-se de uma região de deslocamentos positivos para uma região de deslocamentos negativos, conforme mostra a Figura 4.7, que ilustra a radiação de uma placa de contornos rígidos.

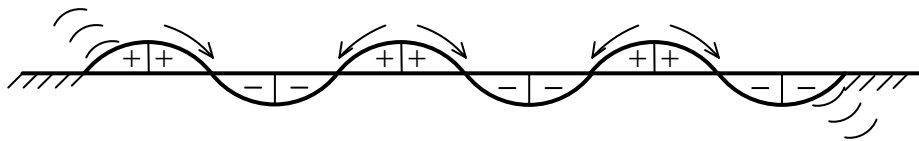


Figura 4.7- Radiação de uma placa finita

Através da Figura 4.7 verifica-se que apenas nas extremidades não ocorre o cancelamento dos efeitos de células vizinhas, o que significa que somente no contorno da placa o fluido é significativamente comprimido.

Dependendo do tipo de modo predominante de vibração da placa, simétrico ou anti-simétrico, ocorre a interação construtiva ou destrutiva do campo sonoro, conforme mostram as Figuras 4.8 e 4.9.

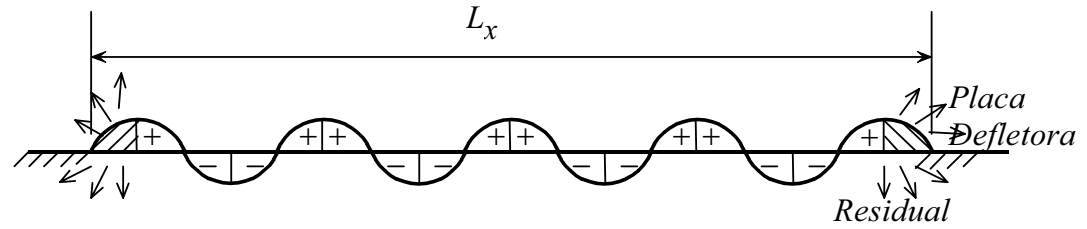


Figura 4.8 – Placas radiando em frequências subcríticas. Modo simétrico; interação construtiva.

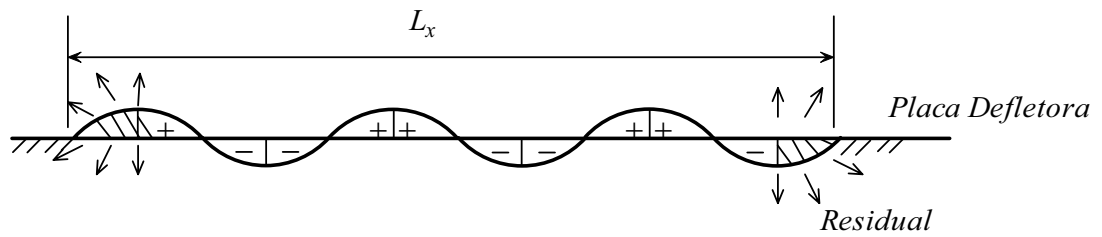


Figura 4.9 – Placas radiando em frequências subcríticas. Modo anti-simétrico; interação destrutiva.

Verifica-se que uma placa com contornos livres apresenta baixa eficiência de radiação porque as zonas limites não podem comprimir o fluido. Isto pode ser mais claramente visualizado na Figura 4.10.

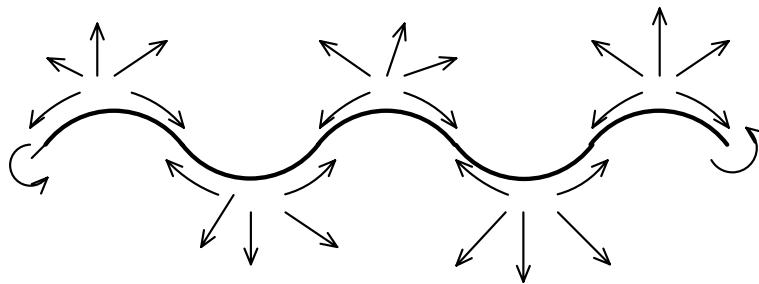


Figura 4.10 – Fenômeno de cancelamento em placas com contorno livre radiando em frequências subcríticas

#### 4.3-Excitação de Uma Placa Retangular Simplesmente Apoiada por uma Fonte Sonora Monopolo.

Considere-se uma placa retangular simplesmente apoiada nas quatro extremidades cujo amortecimento estrutural é desprezível. Sobre esta placa incide obliquamente uma onda acústica plana. A Figura 4.11 ilustra o sistema placa-onda incidente bem como o sistema de coordenadas adotado.

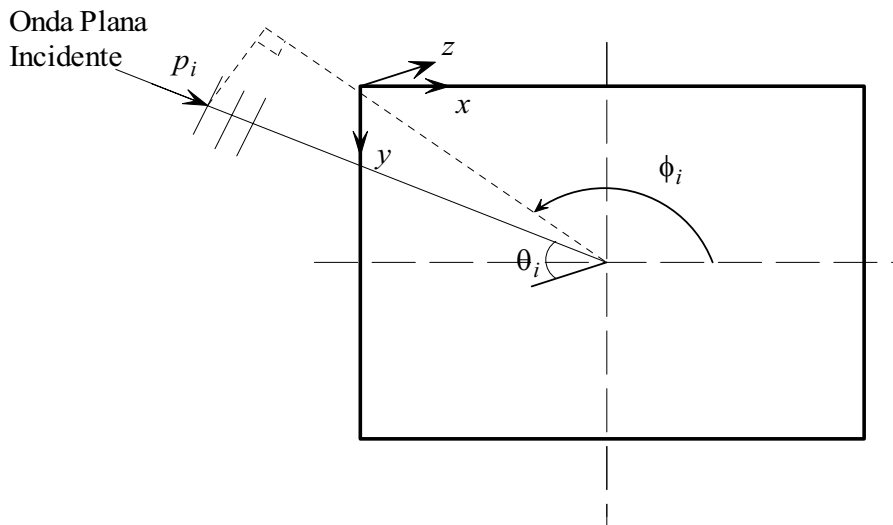


Figura 4.11- Sistema onda incidente–placa e sistema de coordenadas.

A onda plana de pressão sonora que incide sobre a placa pode ser descrita através da seguinte equação:

$$p_i(x, y, t) = P_i e^{i(\omega t - kx \sin \theta_i \cos \phi_i - ky \sin \theta_i \sin \phi_i)} \quad (4.32)$$

onde  $P_i$  é a amplitude da pressão sonora,

$\omega$  é a frequência da onda de pressão sonora

$k$  é o número de onda acústica

$\theta_i$  e  $\phi_i$  são os ângulos de incidência da onda plana na placa

$x, y$ , sistema de referência de coordenadas da placa.

De acordo com o desenvolvimento apresentado na Seção 2.8, a equação do movimento da placa é dada pela equação (2.85); repetida abaixo.

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - m_s \ddot{w} + p = 0 \quad (4.33)$$

Para o cálculo do campo acústico radiado é necessário conhecer o campo de deslocamentos da placa. De acordo com o desenvolvimento apresentado na Seção 3.3, este pode ser descrito através da seguinte equação:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{L_x} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L_y} y \right) \quad (4.34)$$

Introduzindo a solução (4.34) em (4.33), após avaliação das derivadas indicadas, obtém-se:

$$\begin{aligned} & D \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{L_x} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L_y} y \right) \left[ \left( \frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2 \right\} + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{W}_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{L_x} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L_y} y \right) \rho_P h = \bar{P} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde:

$$\bar{P} = P_i e^{-i(kx \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_i + ky \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \phi_i)} \quad (4.36)$$

Utilizando a propriedade de ortogonalidade das autofunções (vide desenvolvimento de equações (3.58) a (3.60)), da equação (4.35) obtém-se:

$$\ddot{W}_{mn} \frac{L_x}{2} \frac{L_y}{2} \rho_P h + DW_{mn} \frac{L_x}{2} \frac{L_y}{2} \left[ \left( \frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2 =$$



$$e^{i\omega t} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \bar{P} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y}\right) dx dy \quad (4.37)$$

Considerando movimento harmônico, escreve-se:

$$W_{mn} = \bar{W}_{mn} e^{i\omega t} \quad (4.38)$$

Assim,

$$\ddot{W}_{mn} = -\omega^2 \bar{W}_{mn} e^{i\omega t} \quad (4.39)$$

Substituindo (4.39) em (4.37), após manipulações algébricas chega-se a:

$$\bar{W}_{mn} = \frac{\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \bar{P} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y}\right) dx dy}{\frac{L_x L_y}{4} (\rho_P h \omega_{mn}^2 - \omega^2 \rho_P h)} \quad (4.40)$$

com as frequências naturais dadas por:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (4.41)$$

Substituindo a equação (4.36) em (4.40) escreve-se:

$$\bar{W}_{mn} = \frac{\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} P_i e^{-i(kx \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_i + ky \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \phi_i)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y}\right) dx dy}{\frac{L_x L_y}{4} \rho_P h (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (4.42)$$

Para facilitar o desenvolvimento o numerador da equação (4.42) é expresso sob a forma:

$$I = P_i \int_0^{L_x} e^{-i(kx \sin \theta_i \cos \phi_i)} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}\right) dx \int_0^{L_y} e^{-i(ky \sin \theta_i \sin \phi_i)} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y}\right) dy \quad (4.43)$$

ou:

$$I = P_i \bar{I}_m \bar{I}_n$$

Desenvolvendo primeiramente  $\bar{I}_m$ :

$$\bar{I}_m = \int_0^{L_x} e^{-i(kx \sin \theta_i \cos \phi_i)} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) dx \quad (4.44)$$

O resultado da integração indicada depende de uma das seguintes situações:

**1ª Situação:**

$$(k \sin \theta_i \cos \phi_i) = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right) \quad (4.45)$$

Neste caso, tem-se:

$$\bar{I}_m = -\frac{L_x}{2} \left[ \frac{-\sin^2(m\pi) - i \cos(m\pi) \sin(m\pi) + im\pi}{m\pi} \right] \quad (4.46)$$

Como  $m$  é sempre um número inteiro, a equação (4.46) fica:

$$\bar{I}_m = -\frac{iL_x}{2} \quad (4.47)$$

**2ª Situação:**

$$(k \sin \theta_i \cos \phi_i) \neq \left(\frac{m\pi}{L_x}\right) \quad (4.48)$$

Neste caso (4.44) tem a seguinte solução geral:

$$\bar{I}_m = \frac{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right) e^{-iL_x k \text{sen}\theta_i \cos\phi_i} \cos(m\pi) + ik \text{sen}\theta_i \cos\phi_i e^{-iL_x k \text{sen}\theta_i \cos\phi_i} \text{sen}(m\pi) - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)}{(k \text{sen}\theta_i \cos\phi_i)^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)} \quad (4.49)$$

Sendo  $m$  um número inteiro, a equação (4.49) assume a forma:

$$\bar{I}_m = \frac{(m\pi)L_x \left[1 - (-1)^m e^{-iL_x k \text{sen}\theta_i \cos\phi_i}\right]}{(m\pi)^2 - (kL_x \text{sen}\theta_i \cos\phi_i)^2} \quad (4.50)$$

Desenvolve-se agora  $\bar{I}_n$ , dado por:

$$\bar{I}_n = \int_0^{L_y} e^{-i(kx \text{sen}\theta_i \text{sen}\phi_i)} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) dy \quad (4.51)$$

Considerando novamente as duas situações, tem-se:

1ª Situação:

$$(k \text{sen}\theta_i \text{sen}\phi_i) = \left(\frac{n\pi}{L_y}\right) \quad (4.52)$$

$$\bar{I}_n = -\frac{1}{2} \left[ \frac{-\text{sen}^2(n\pi) - i \cos(n\pi) \text{sen}(n\pi) + in\pi}{\frac{n\pi}{L_y}} \right] = -i \frac{L_y}{2} \quad (4.53)$$

2ª Situação:

$$(k \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \phi_i) \neq \left( \frac{n\pi}{L_y} \right) \quad (4.54)$$

$$\bar{I}_n = \frac{\left( \frac{n\pi}{L_y} \right) e^{-iL_y k \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_i} \cos(n\pi) + ik \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_i e^{-iL_y k \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_i} \operatorname{sen}(n\pi) - \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)}{(k \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_i)^2 - \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)} \quad (4.55)$$

$$\bar{I}_n = \frac{(n\pi)L_y \left[ 1 - (-1)^n e^{-iL_y k \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \phi_i} \right]}{(n\pi)^2 - (kL_y \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \phi_i)^2} \quad (4.56)$$

Desta forma, a equação (4.42) pode ser expressa da seguinte forma em função de  $\bar{I}_m$  e  $\bar{I}_n$ :

$$\bar{W}_{mn} = \frac{P_i \bar{I}_m \bar{I}_n}{\frac{L_x L_y}{4} \rho_P h (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (4.57)$$

Introduzindo as relações:

$$\bar{I}_m = L_x \bar{I}'_m \quad \bar{I}_n = L_y \bar{I}'_n \quad (4.58)$$

a equação (4.57) é reescrita sob a forma:

$$\bar{W}_{mn}^{pi} = \frac{4P_i \bar{I}'_m \bar{I}'_n}{\rho_P h (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (4.59)$$

A equação (4.59) representa as amplitudes modais de vibração da placa causada pela incidência de uma onda plana.

A análise da equação (4.59) revela que existem dois fatores que determinam a maior ou menor participação de um dado modo na resposta da placa. O primeiro fator está relacionado com a proximidade da frequência de excitação com a frequência natural do modo. Com efeito, se  $\omega \rightarrow \omega_{mn}$  o termo  $(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rightarrow 0$ ,  $\bar{W}_{mn}^{pi} \rightarrow \infty$ , o que implica que o modo  $(m,n)$  terá participação preponderante na resposta.

O segundo fator está relacionado com a posição de incidência da onda plana, através dos termos  $\bar{I}_m'$  e  $\bar{I}_n'$  presentes na equação (4.59) e calculados através das equações (4.47) e (4.53), ou (4.50) e (4.56).

Considerar-se-ão nesta análise os casos em que são válidas as equações (4.53) e (4.56).

➤ Quando  $\phi_i = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$ , a equação (4.53) fica:

$$\bar{I}_m' = \frac{L_x [1 - (-1)^m]}{m\pi} \quad (4.60)$$

Assim quando  $m$  é par, a equação (4.60) tem-se:

$$\bar{I}_m' = 0 \quad (4.61)$$

Quando  $m$  é ímpar, a equação (4.60) toma a seguinte forma:

$$\bar{I}_m' = \frac{L_x [1 + 1]}{m\pi} = \frac{2L_x}{m\pi} \quad (4.62)$$

Assim, verifica-se que para o caso em que a onda plana incide com  $\phi_i = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$ ; os modos com  $m$  par não participam da resposta da placa, que fica então exclusivamente determinada pela contribuição dos modos com  $m$  ímpar.

➤ Quando  $\phi_i = 0, \pi, 3\pi \dots$ , a equação (4.56) reduz-se a :

$$\bar{I}_n' = \frac{L_y [1 - (-1)^n]}{n\pi} \quad (4.63)$$

Para  $n$  par, tem-se:

$$\bar{I}'_n = \frac{L_y [1-1]}{n\pi} = 0 \quad (4.64)$$

Quando  $n$  é ímpar:

$$\bar{I}'_n = \frac{L_y [1+1]}{n\pi} = \frac{2L_y}{n\pi} \quad (4.65)$$

Assim, verifica-se que para o caso em que a onda plana incide com  $\phi_i = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$ ; os modos com  $n$  par não participam da resposta da placa, que fica então exclusivamente determinada pela contribuição dos modos com  $n$  ímpar.

- Quando  $\theta_i = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ , o produto dos termos  $\bar{I}'_m$  e  $\bar{I}'_n$  da equação (4.59) pode ser escrito como:

$$\bar{I}'_m \bar{I}'_n = \frac{L_x L_y [1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n]}{mn\pi^2} \quad (4.66)$$

A partir de (4.66) chega-se a :

- Para  $m$  e  $n$  são pares:

$$\bar{I}'_m \bar{I}'_n = 0 \quad (4.67)$$

Se  $m$  é ímpar e  $n$  é par, a equação (4.66) tem-se:

$$\bar{I}'_m \bar{I}'_n = 0 \quad (4.68)$$

Quando  $m$  é par e  $n$  é ímpar:

$$\bar{I}'_m \bar{I}'_n = 0 \quad (4.69)$$

Quando  $m$  e  $n$  são ímpares, tem-se:

$$\bar{I}'_m \bar{I}'_n = \frac{4L_x L_y}{mn\pi^2} \quad (4.70)$$

Verifica-se, portanto, que para  $\theta_i = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ , apenas os modos com  $m$  e  $n$  ímpares contribuem na resposta da placa.

#### 4.4-Radiação Sonora de Placas Vibrantes.

Uma vez que o movimento da placa devido a uma onda incidente foi completamente determinado na seção anterior realizar-se-á, nesta seção, o procedimento de cálculo da pressão acústica radiada pela placa, devida ao seu movimento vibratório. Para tanto, será utilizada a aproximação da segunda integral de Rayleigh. O sistema de coordenadas da placa radiando pressão sonora é ilustrado na Figura 4.12.

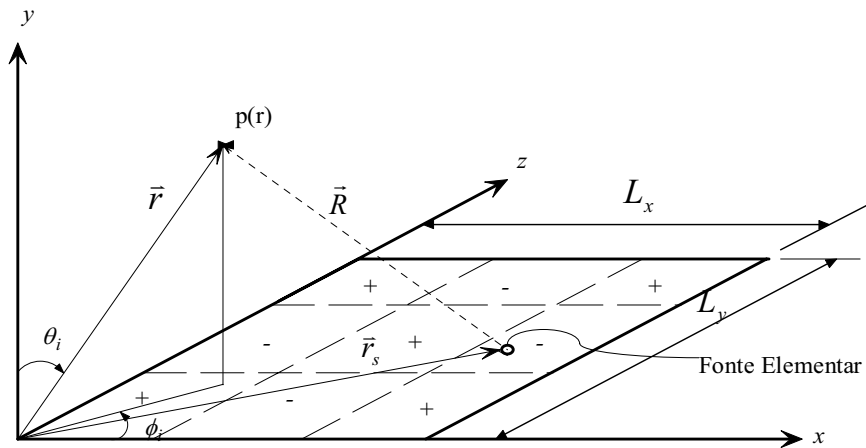


Figura 4.12 – Sistema de Coordenadas de uma placa radiando pressão sonora.

A avaliação da integral de Rayleigh é provavelmente a aproximação conceitual mais simples para o cálculo do campo sonoro radiado por uma área de superfície vibrante.

A integral de Rayleigh fornece a pressão complexa em um dado ponto  $p(r)$  do campo sonoro, em termos das velocidades complexas  $\dot{w}(r_s)$  associadas com uma fonte elementar no ponto  $r_s$  da superfície  $S$  de acordo com a expressão (Fuller, 1997):

$$p(r) = \int_S \frac{i\omega\rho_0\dot{w}(r_s)e^{-ikR}}{2\pi R} dS \quad (4.71)$$

onde:

$R$  é a distância do ponto de observação à fonte elementar.

$\vec{r}$  é vetor que fornece a posição do ponto de observação em relação à origem do sistema de coordenadas.

$\vec{r}_s$  é vetor que fornece a posição da fonte elementar em relação à origem do sistema de coordenadas.

$\dot{w}(r_s)$  é a componente da velocidade normal à superfície  $S$ .

$\rho_o$  é a densidade do meio acústico.

O vetor  $\vec{r}$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{r} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{k} \quad (4.72)$$

onde  $(x_p, y_p, z_p)$  são as coordenadas retangulares que relacionam-se com as coordenadas esféricas do ponto de análise da seguinte forma:

$$x_p = r \sin\theta \cos\phi \quad (4.73)$$

$$y_p = r \sin\theta \sin\phi \quad (4.74)$$

$$z_p = r \cos\theta \quad (4.75)$$

O vetor  $\vec{r}_s$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{r}_s = x_s\vec{i} + y_s\vec{j} \quad (4.76)$$

onde  $(x_s, y_s)$  são as coordenadas retangulares da fonte elementar na placa.



De acordo com a Figura 4.12, o vetor  $\vec{R}$  é dado por:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_s \quad (4.77)$$

Substituindo as equações (4.72) e (4.76) em (4.77) obtém-se:

$$\vec{R} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k} - x_s \vec{i} - y_s \vec{j} \quad (4.78)$$

Substituindo as equações (4.73) a (4.75) em (4.78), o vetor  $\vec{R}$  fica:

$$\vec{R} = (r \sin \theta \cos \phi - x_s) \vec{i} + (r \sin \theta \sin \phi - y_s) \vec{j} + (r \cos \theta) \vec{k} \quad (4.79)$$

Os módulos dos vetores  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_s$  e  $\vec{R}$  são dados pelas expressões:

$$r^2 = |\vec{r}|^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \quad (4.80)$$

$$r_s^2 = |\vec{r}_s|^2 = x_s^2 + y_s^2 \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} R^2 = |\vec{R}|^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 2r \sin \theta \cos \phi x_s + x_s^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ &\quad - 2r \sin \theta \sin \phi y_s + y_s^2 + r^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (4.82)$$

Substituindo as equações (4.80) e (4.81) em (4.82) obtém-se:

$$R^2 = r^2 + r_s^2 - 2r \sin \theta \cos \phi x_s - 2r \sin \theta \sin \phi y_s \quad (4.83)$$

No campo distante, onde  $R \gg L_x, L_y$  pode-se fazer as seguintes considerações:

- $r_s^2$  pode ser desconsiderado, pois  $r_s \ll r$ .
- $R \rightarrow r$

Utilizando estas considerações, a equação (4.83) pode ser escrita sob a forma:

$$R = r - x_s \sin \theta \cos \phi - y_s \sin \theta \sin \phi \quad (4.84)$$

Denominando  $x_s = x$  e  $y_s = y$ , substituindo em (4.71) a equação (4.84) e a primeira derivada temporal da equação (4.34), a pressão sonora radiada é expressa na seguinte forma complexa :

$$p(r, \theta, \phi) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{i\omega\rho_0 \dot{W}_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{-ik(r-x\sin\theta\cos\phi-y\sin\theta\sin\phi)} dx dy}{2\pi r} \quad (4.85)$$

Para prosseguir o desenvolvimento, escreve-se (4.85) sob a forma:

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{i\omega\rho_0 \dot{W}_{mn} e^{-ikr}}{2\pi r} \left( \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) e^{ikx\sin\theta\cos\phi} dx \right) \left( \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{iky\sin\theta\sin\phi} dy \right) \quad (4.86)$$

Adotando procedimento similar àquele apresentado na Seção 4.4, definem-se:

$$I_m = \int_0^{L_x} e^{i(kx\sin\theta\cos\phi)} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) dx \quad (4.87)$$

#### **1ª Situação:**

$$\text{Para } (k \sin \theta \cos \phi) = \left( \frac{m\pi}{L_x} \right) \quad (4.88)$$

$$I_m = -\frac{iL_x}{2} \quad (4.89)$$

#### **2ª Situação:**

$$\text{Para } (k \sin \theta \cos \phi) \neq \left( \frac{m\pi}{L_x} \right) \quad (4.90)$$

$$I_m = \frac{m\pi \left[ 1 - (-1)^m e^{iL_x k \sin \theta \cos \phi} \right]}{(m\pi)^2 - (kL_x \sin \theta \cos \phi)} \quad (4.91)$$

Calculando o segundo termo de (4.86):

$$I_n = \int_0^{L_y} \sin \left( \frac{n\pi y}{L_y} \right) e^{iky \sin \theta \sin \phi} dy \quad (4.92)$$

**1ª Situação:**

$$\text{Para } (k \sin \theta \sin \phi) = \left( \frac{n\pi}{L_y} \right) \quad (4.93)$$

$$I_n = -\frac{iL_y}{2} \quad (4.94)$$

**2ª Situação:**

$$\text{Para } (k \sin \theta \sin \phi) \neq \left( \frac{n\pi}{L_y} \right) \quad (4.95)$$

$$I_n = \frac{n\pi \left[ 1 - (-1)^n e^{iL_y k \sin \theta \sin \phi} \right]}{(n\pi)^2 - (kL_y \sin \theta \sin \phi)^2} \quad (4.96)$$

Escrevendo a equação (4.86) em termos de  $I_m$  e  $I_n$ , tem-se:

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{i\omega \rho_0 \dot{W}_{mn} e^{-ikr}}{2\pi r} I_m I_n \quad (4.97)$$

Considerando o movimento harmônico da placa, escreve-se:

$$\dot{W}_{mn} = i\omega \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} e^{i\omega t} \quad (4.98)$$

Substituindo a equação (4.98) em (4.97) chega-se a:

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{-\omega^2 \rho_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} I_m I_n \quad (4.99)$$

Considerando  $R=r$  e substituindo a equação (4.84) em (4.99) escreve-se :

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{-\omega^2 \rho_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r - x \sin \theta \cos \phi - y \sin \theta \sin \phi}{c}\right)}}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} I_m I_n \quad (4.100)$$

Para campo distante pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$x \equiv \frac{L_x}{2} \qquad y \equiv \frac{L_y}{2} \quad (4.101)$$

Substituindo a equação (4.101) em (4.100) obtém-se:

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{-\omega^2 \rho_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{\sin \theta}{2c} (L_x \cos \phi + L_y \sin \phi)\right)}}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} I_m I_n \quad (4.102)$$

Desta forma, a pressão sonora radiada pode ser expressa sob a forma:

$$p(r, \theta, \phi) = K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} I_m I_n \quad (4.103)$$

onde  $K$  é uma constante dada por:

$$K = \frac{-\omega^2 \rho_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{\sin \theta}{2c} (L_x \cos \phi + L_y \sin \phi)\right)}}{2\pi R} \quad (4.104)$$

Empregando o Princípio da Superposição pode-se obter a expressão que fornece a pressão sonora total radiada simultaneamente por várias fontes resultantes de excitação harmônica. No estudo em questão deseja-se conhecer os campos de pressão radiados pela fonte primária descrita na seção 4.3, e pela placa instrumentada com atuadores piezoelétricos, descrito na seção 3.3. Para tanto, calcular-se-á a pressão radiada em cada um destes casos.

A pressão radiada pela fonte primária pode ser calculada da seguinte forma:

$$p_n(r, \theta, \phi) = \frac{-\omega^2 \rho_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^{pi} I_m I_n \quad (4.105)$$

onde  $W_{mn}^{pi}$  é a amplitude modal da excitação causada por uma fonte primária, que é dada pela equação (4.59).

A pressão sonora radiada por excitação controlada, atuadores piezoelétricos, é dada por:

$$p_c(r, \theta, \phi) = \frac{-\omega^2 \rho_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^c I_m I_n \quad (4.106)$$

onde  $W_{mn}^c$  é a amplitude modal da excitação causada por atuadores piezoelétricos e dada pela equação (3.73).

Quando a fonte primária e os atuadores piezoelétricos atuam simultaneamente, ou seja, quando são utilizados atuadores piezoelétricos no controle, o campo de pressão sonora resultante pode ser visualizado como uma superposição das pressões sonoras calculadas através das equações (4.105) e (4.106), para um dado valor da frequência de excitação harmônica. Desta forma escreve-se a pressão total como sendo:

$$p_t = p_n + p_c \quad (4.107)$$

#### 4.5-Eficiência de Radiação sonora em Placas Vibrantes.

A resistência à radiação correspondente aos modos naturais de uma placa retangular finita é determinada a partir da energia total radiada no campo distante.

A intensidade acústica no campo distante é dada por (Gerges,2000):

$$I(r, \theta, \phi) = \frac{|p(r, \theta, \phi)|^2}{2\rho c} \quad (4.108)$$

Utilizando a equação (4.86) que fornece a pressão sonora em campo distante a partir da Integral de Rayleigh, a intensidade acústica é expressa sob a forma:

$$I(r, \theta, \phi) = 2\rho c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\dot{W}_{mn}|^2 \left( \frac{kL_x L_y}{\pi^3 r m n} \right) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\left[\left(\frac{\alpha}{m\pi}\right)^2 - 1\right] \left[\left(\frac{\beta}{n\pi}\right)^2 - 1\right]} \right\} \quad (4.109)$$

onde:

$$\alpha = kL_x \sin \theta \cos \phi \quad (4.110)$$

$$\beta = kL_y \sin \theta \sin \phi \quad (4.111)$$

Na equação (4.109) utiliza-se:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ quando } m \text{ é ímpar.}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ quando } m \text{ é par.}$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \text{ quando } n \text{ é ímpar.}$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \text{ quando } n \text{ é par.}$$

Integrando a intensidade acústica sobre uma hemisfera de raio  $r$ , obtém-se a potência radiada total, que é dada por:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.112)$$

A eficiência de radiação do modo  $(m, n)$  é definida por:

$$\sigma_{mn} = \frac{\Pi}{\langle |\dot{w}|^2 \rangle} \quad (4.113)$$

onde o termo  $\langle |\dot{w}|^2 \rangle$  representa a média espacial e temporal do quadrado da velocidade da superfície, que é dada por:

$$\langle |\dot{w}|^2 \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{1}{2} \dot{W}_{mn}^2 dx dy \quad (4.114)$$

Neste caso:

$$\langle |\dot{w}|^2 \rangle = \frac{1}{8} |\dot{W}_{mn}|^2 \quad (4.115)$$

Wallace (1972) define a eficiência modal de radiação como sendo:

$$\sigma_{mn} = \frac{8\Pi}{\rho c L_x L_y |\dot{W}_{mn}|^2} \quad (4.116)$$

Considerando a simetria da intensidade acústica, a eficiência de radiação pode ser escrita como:

$$\sigma_{mn} = \frac{64k^2 L_x L_y}{\pi^6 m^2 n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\left[\left(\frac{\alpha}{m\pi}\right)^2 - 1\right] \left[\left(\frac{\beta}{n\pi}\right)^2 - 1\right]} \right\}^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (4.117)$$

Considerando que o comprimento de onda acústica é muito maior que o comprimento da onda de flexão na placa, ( $f \ll f_c$ ), expandindo a integral (4.117) em séries de potências e integrando-a obtém-se:

➤ Quando  $m$  e  $n$  são ímpares:

$$\sigma_{mn} \cong \frac{32k^2 L_x L_y}{m^2 n^2 \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 L_x L_y}{20} \left[ \left( 1 - \frac{8}{(m\pi)^2} \right) \frac{L_x}{L_y} + \left( 1 - \frac{24}{(n\pi)^2} \right) \frac{L_y}{L_x} \right] \right\}, \quad kL_x, kL_y \ll 1 \quad (4.118)$$

➤ Quando  $m$  é ímpar e  $n$  é par:

$$\sigma_{mn} \cong \frac{8k^4 L_x L_y^3}{3m^2 n^2 \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 L_x L_y}{20} \left[ \left( 1 - \frac{8}{(m\pi)^2} \right) \frac{L_x}{L_y} + \left( 1 - \frac{24}{(n\pi)^2} \right) \frac{L_y}{L_x} \right] \right\}, \quad kL_x, kL_y \ll 1 \quad (4.119)$$

➤ Quando  $m$  e  $n$  são pares:

$$\sigma_{mn} \cong \frac{2k^6 L_x^3 L_y^3}{15m^2 n^2 \pi^5} \left\{ 1 - \frac{5k^2 L_x L_y}{64} \left[ \left( 1 - \frac{24}{(m\pi)^2} \right) \frac{L_x}{L_y} + \left( 1 - \frac{24}{(n\pi)^2} \right) \frac{L_y}{L_x} \right] \right\}, \quad kL_x, kL_y \ll 1 \quad (4.120)$$

Quando o número de onda acústico é normalizado pelo número de onda da placa:



$$k_p = \left[ \left( \frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] \quad (4.121)$$

Define-se a razão do número de onda por:

$$\gamma = \frac{k}{k_p} \quad (4.122)$$

Desta forma a eficiência de radiação assume a forma:

➤ Quando  $m$  e  $n$  são ímpares:

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} \cong & \frac{32}{mn\pi^2} \left( \frac{L_x n}{mL_y} + \frac{L_y m}{nL_x} \right) \gamma^2 \left\{ 1 - \left[ \left( 1 - \frac{8}{(m\pi)^2} \right) \frac{L_x}{L_y} + \left( 1 - \frac{8}{(n\pi)^2} \right) \frac{L_y}{L_x} \right] \right. \\ & \left. \bullet \left( \frac{L_x n}{L_y m} + \frac{L_y m}{L_x n} \right) \frac{mn\pi}{12} \gamma^2 \right\}, \gamma^2 \ll 1 \end{aligned} \quad (4.123)$$

➤ Quando  $m$  é ímpar e  $n$  é par:

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} \cong & \frac{8}{3\pi} \left( \frac{L_x n}{mL_y} + \frac{L_y m}{nL_x} \right) \gamma^4 \frac{L_x}{L_y} \left\{ 1 - \left[ \left( 1 - \frac{8}{(m\pi)^2} \right) \frac{L_x}{L_y} + \left( 1 - \frac{24}{(n\pi)^2} \right) \frac{L_y}{L_x} \right] \right. \\ & \left. \bullet \left( \frac{L_x n}{L_y m} + \frac{L_y m}{L_x n} \right) \frac{mn\pi}{20} \gamma^2 \right\}, \gamma^2 \ll 1 \end{aligned} \quad (4.124)$$

➤ Quando  $m$  e  $n$  são pares:

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} \cong & \frac{2mn\pi}{15} \left( \frac{L_x n}{mL_y} + \frac{L_y m}{nL_x} \right)^3 \gamma^6 \left\{ 1 - \left[ \left( 1 - \frac{24}{(m\pi)^2} \right) \frac{L_x}{L_y} + \left( 1 - \frac{24}{(n\pi)^2} \right) \frac{L_y}{L_x} \right] \right. \\ & \left. \bullet \left( \frac{L_x n}{L_y m} + \frac{L_y m}{L_x n} \right) \frac{5mn\pi}{64} \gamma^2 \right\}, \gamma^2 \ll 1 \end{aligned} \quad (4.125)$$

Para  $(kL_x / m\pi)$  e  $(kL_y / n\pi) \gg 1$ , a eficiência de radiação é dada para todos os modos como sendo:

$$\sigma_{mn} \cong 1 \quad (4.126)$$

A eficiência de radiação em um domínio de frequências intermediárias pode ser obtida integrando-se a equação (4.98).

Através das equações (4.123) a (4.125), verifica-se que a eficiência de radiação depende dos seguintes fatores:

1. Razão entre os números de onda
2. Número do modo de vibração
3. Razão de aspecto, dada por:

$$\left( \frac{L_x n}{mL_y} \right) + \left( \frac{mL_y}{nL_x} \right) \quad (4.127)$$

A razão de aspecto é mínima quando a área intranodal, ou área adjacente entre linhas nodais, é quadrada.

Quando  $\gamma \ll 1$ , a placa pode vibrar segundo modos tipo *canto* ou modos tipo *borda* (Lenzi). Estas formas de vibração baseiam-se na noção do cancelamento da influência de células vizinhas, restando células não canceladas nos cantos ou nas bordas, conforme pode ser verificado na figuras abaixo.

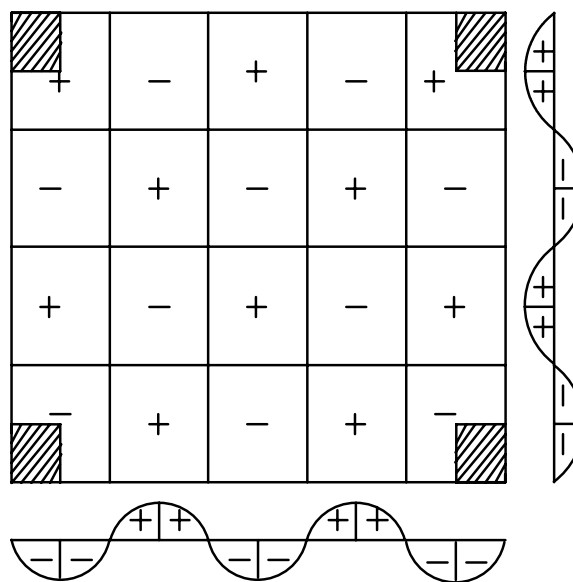


Figura 4.13 – Fenômeno de cancelamento em placas radiando em frequências subcríticas - modo de canto.

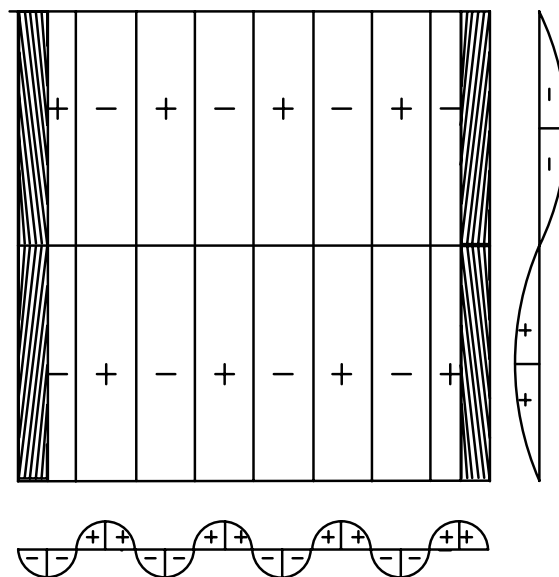


Figura 4.14 – Fenômeno de Cancelamento em placas radiando em frequências subcríticas - modo de borda.

Através das figuras acima verifica-se que os modos tipo borda têm uma maior eficiência de radiação, mesmo quando as frequências destes modos forem, em média, menores que as

dos modos tipo canto, isto porque os modos tipo bordas têm áreas radiantes maiores, sendo assim, responsáveis por uma maior potência radiada.

#### 4.6-Diretividade de Fonte.

A fonte primária, representada pela onda sonora plana harmônica e a placa instrumentada com os elementos piezoelétricos atuam como fontes sonoras reais. Como tais, elas não apresentam um padrão uniforme de radiação em todas as direções, pois existem algumas restrições físicas, como, por exemplo, o chão. Fontes reais radiam segundo um Índice de Diretividade, que é definido por Gerges (2000) segundo:

$$DI(\theta) = 10 \log D_{\theta} \quad (4.128)$$

onde  $D_{\theta}$  é o fator de diretividade que pode ser expresso da seguinte forma:

$$D_{\theta} = \frac{I(\theta)}{I_{ref}} \quad (4.129)$$

onde  $I(\theta)$  é a intensidade sonora na direção  $\theta$  e à distância R da fonte, descrita por:

$$I(\theta) = \frac{p^2(\theta)}{2\rho c} \quad (4.130)$$

$I_{ref}$  é a intensidade sonora de preferência, dada por:

$$I_{ref} = \frac{p_{ref}^2}{2\rho c} \quad (4.131)$$

Na equação (4.131),  $p_{ref} = 2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ , é o valor de pressão sonora de referência, correspondente ao limiar da audição em 1000Hz.

Desta forma, o cálculo da intensidade sonora na direção  $\theta$  à distância  $R$  da fonte primária, para o caso em análise, pode ser realizado introduzindo a equação (4.105) em (4.130):

$$I(\theta) = \frac{p_n^2(\theta)}{2\rho c} \quad (4.132)$$

Realizando a substituição das equações (4.132) e (4.131) em (4.129), o índice de diretividade da fonte primária, representada pela onda plana harmônica pode ser calculado de acordo com:

$$DI(\theta) = 20 \log \frac{p_n}{p_{ref}} \quad (4.133)$$

De maneira similar, a intensidade sonora total do sistema, na direção  $\theta$  à distância  $R$  pode ser calculada substituindo-se a equação (4.107) em (4.130):

$$I(\theta) = \frac{p_t^2(\theta)}{2\rho c} \quad (4.134)$$

Substituindo as equações (4.134) e (4.131) em (4.129), calcula-se o índice de diretividade da placa instrumentada com atuadores piezoelétricos e excitada por uma onda plana harmônica oblíqua incidente.

$$DI(\theta) = 20 \log \frac{p_t}{p_{ref}} \quad (4.135)$$

#### 4.7-Perda de Transmissão em Placas.

Após o controle de vibração da placa há o interesse em avaliar a perda de transmissão sonora. Para tanto, calcula-se primeiramente a potência acústica da onda plana incidente, que é dada por:

$$\Pi_i = P_i^2 L_x L_y \frac{\cos \theta_i}{2\rho c} \quad (4.136)$$

A potência acústica radiada pela placa é dada por:

$$\Pi_t = \frac{\Phi R^4}{2\rho c} \quad (4.137)$$

onde  $\Phi$  é potência acústica radiada, que pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\Phi = \frac{1}{R^2} \int_s |p_t|^2 ds = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |p_t|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.138)$$

onde  $p_t$  é calculado através da equação (4.107).

A perda de transmissão pode então ser calculada através da seguinte relação:

$$TL = 10 \log_{10} \left( \frac{\Pi_i}{\Pi_t} \right) \quad (4.139)$$

## Capítulo V

### Controle Ativo de Ruído

As técnicas de controle de ruído podem ser classificadas em dois grupos: técnicas passivas e técnicas ativas.

As técnicas passivas utilizam materiais absorventes, montados próximos à fonte, ou aderidos a ela. Estas técnicas mostram-se mais eficientes para altas frequências (acima de 500Hz), uma vez que para baixas frequências o volume de material absorvente necessário para uma redução satisfatória do nível de ruído é consideravelmente aumentado e com isso os custos tornam-se muito elevados.

Por outro lado, as técnicas ativas utilizam o princípio da superposição, criando uma interferência destrutiva de modo que o ruído indesejado seja eliminado.

Neste capítulo serão revistos os fundamentos do controle ativo de ruído (ANC), bem como as técnicas de controle empregadas na sua implementação, tais como controle *feedback* e *feedforward*.

#### 5.1 Revisão Histórica

O controle ativo de ruído teve início na década de 30 com Paul Lueg , que patenteou um sistema de controle de ruído no ano de 1938. Nesta patente são utilizados dois princípios básicos das técnicas ativas: Interferência e absorção (Tokhi,1992).

A interferência baseia-se no princípio da superposição de ondas sonoras. Por meio da superposição pode-se obter uma diminuição do ruído, podendo-se chegar até à sua completa supressão. Com base neste princípio, Lueg utilizou um transdutor (fonte de controle) para introduzir uma perturbação secundária no sistema a fim de cancelar a perturbação primária e desta forma atenuar o ruído original. Este sistema está ilustrado na Figura 5.1.

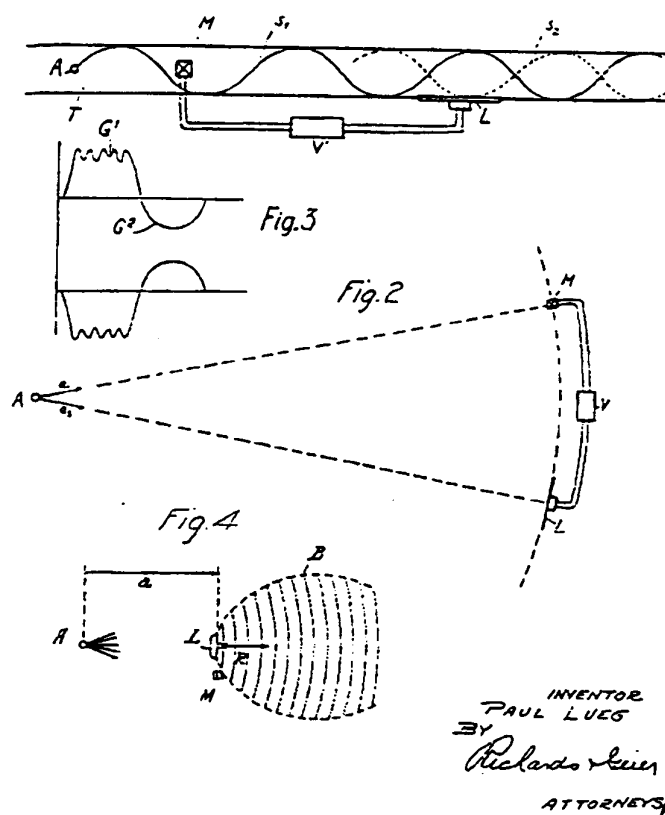


Figura 5.1- Patente de Lueg. Figura extraída de (Hansen).

Paul Lueg utilizou o princípio da absorção para sincronizar os movimentos do diafragma de um alto falante em oposição de fase com o ruído indesejado, de tal forma que a energia acústica do ruído fosse absorvida pelo alto falante.

Na década de 50, Olson desenvolveu um absorvedor sonoro eletrônico que era composto por microfone, amplificador e alto-falante, conforme ilustrado na Figura 5.2.



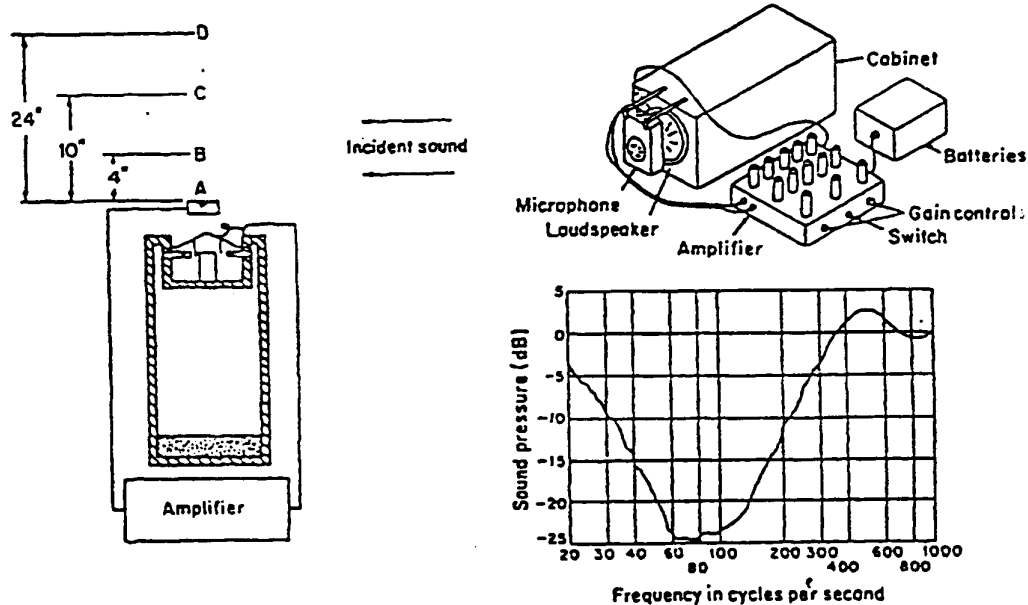


Figura 5.2- Absorvedor eletrônico de Olson. Figura extraída de (Hansen).

A idéia do controle ativo é relativamente simples. Porém no passado nem sempre sua implementação pôde ser realizada com sucesso, devido ao fato de que havia limitações na implementação do controle. Atualmente, com o desenvolvimento do controle digital de rápido processamento, o controle ativo de ruído tornou-se viável em aplicações práticas.

## 5.2 Mecanismos Físicos

Conforme visto no capítulo anterior, a intensidade sonora em campo distante é proporcional à pressão média quadrática e a potência sonora radiada total é igual à intensidade sonora integrada sobre uma superfície esférica. Desta forma, fica evidente que a potência sonora radiada por uma fonte elementar pode ser influenciada pela presença de outra fonte correlacionada.

Considerando-se a energia sonora produzida por um pequeno elemento de área de uma superfície vibrando harmonicamente, a razão média temporal em que o elemento realiza trabalho em um fluido contínuo circundante é dada pelo produto médio no tempo da velocidade de volume pela componente da força de reação do fluido que está em fase com a velocidade. A presença de outro elemento de superfície vibrando na mesma frequência induz uma pressão

adicional no elemento original. Conseqüentemente, a potência sonora radiada é alterada se esta pressão original tem uma componente em fase com a velocidade do elemento. A potência pode ser aumentada ou diminuída dependendo da defasagem existente entre os sinais relativos às duas componentes de pressão.

O controle ativo de ruído baseado no mecanismo de cancelamento utiliza sinais gerados eletronicamente e que são introduzidos no sistema através de transdutores que convertem os sinais eletrônicos em som. Esta perturbação secundária pode atuar no sistema causando o cancelamento de ruído proveniente da fonte primária. Neste caso, verifica-se que a atenuação do nível de ruído ocorre apenas localmente, podendo até ser aumentado em outras regiões. Isto ocorre devido ao fato que a energia total dos ruídos gerados pela fonte primária e pela fonte secundária permanecem inalteradas.

De outra forma, verifica-se que quando a introdução da fonte secundária promove alterações na impedância de radiação da fonte primária, a atenuação obtida é global, ou seja, a potência sonora radiada pela fonte primária é total ou parcialmente suprimida em todos os pontos do campo sonoro. Este processo pode ser melhor explicado através das seguintes considerações:

Fazendo com que todo campo sonoro gerado pela fonte secundária, ou quase todo ele, seja defasado de  $180^{\circ}$  em relação ao campo sonoro original, então o som radiado pela fonte primária poderia ser efetivamente “cancelado”. Porém verifica-se que neste caso, o mecanismo de controle não é propriamente o cancelamento, uma vez que o campo sonoro gerado pela fonte de controle “descarregou” a fonte primária, alterando sua impedância de radiação fazendo com que ela irradiasse muito menos som. Para obter uma supressão efetiva da potência sonora radiada pela fonte primária, é necessário que sua impedância de radiação seja alterada de forma a tornar-se puramente reativa. Isto pode ser conseguido utilizando uma fonte de controle suficientemente grande e posicionada de maneira a ser capaz de apresentar a impedância requerida pela fonte primária. Em três dimensões é necessário que a fonte de controle esteja próxima à fonte primária e também tenha tamanho e velocidade de volume de saída similares, a fim de alterar significativamente a impedância de radiação.

Quando o ruído indesejado é de natureza aleatória ou transiente, o mecanismo de controle não consiste na mudança de impedância de radiação da fonte primária pois o ruído a ser controlado não é periódico. Neste caso, a fonte de controle absorve ou reflete a energia da fonte primária.

### 5.3 Técnicas de Controle

O controle ativo de ruído necessita de controladores eletrônicos para o controle dos sinais que alimentam os atuadores. Estes controladores são construídos utilizando diversas técnicas, dentre as quais as mais utilizadas são as técnicas de controle *Feedback* (retroalimentação) e *Feedforward* (alimentação avançada).

#### 5.3.1- Controle Feedback

Um sistema feedback de controle ativo de ruído é constituído de uma fonte de controle, um sensor de erro e um algoritmo de controle. conforme ilustra Figura 5.3, que apresenta o controle ativo feedback de uma onda plana propagando-se em um duto.

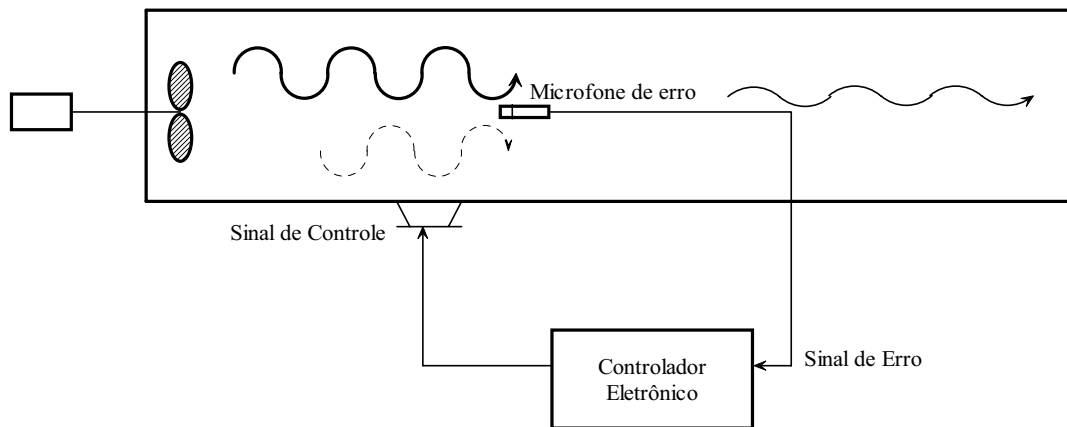


Figura 5.3 - Controle ativo de ruído. Sistema feedback básico.

Através da observação da Figura 5.3, verifica-se que nos sistemas feedback um sensor de erro adquire o sinal proveniente da fonte primária, também chamado sinal de erro, e o envia até o controlador eletrônico que o processa afim de produzir adequadamente um sinal que será emitido pela fonte de controle. Este processo é realizado de maneira que o sinal de erro seja minimizado. As características do sistema de controle feedback são escolhidas de forma que a perturbação do sistema seja suprimida o mais rapidamente possível. Admite-se que a excitação em malha fechada do sistema ocorra devido à diferença entre as excitações primária e secundária.

Este tipo de controle é mais eficiente na redução da resposta transiente dos sistemas que na resposta, em regime permanente. É ideal para casos onde não é possível amostrar a perturbação de entrada, ou para ruído aleatório.

A desvantagem dos controladores feedback está relacionada à sua inerente instabilidade em altas frequências, quando a fase da resposta não é facilmente controlada. Esta característica dos controladores feedback pode causar sérios problemas na presença de ruídos de alta frequência, ou para casos de controladores feedback não adaptativos, se o sistema físico sob controle sofre modificações em relação às condições nominais de projeto.

Os problemas de estabilidade destes controladores podem ser minimizados posicionando-se o sensor de erro o mais próximo possível da fonte de controle, de forma a minimizar o atraso do sistema e maximizar a autocorrelação do ruído em intervalos de tempo superiores ao atraso do sistema.

Exemplos da utilização prática do controlador feedback incluem protetores auriculares ativos, sistemas de suspensão veicular ativa e controle ativo de vibração estrutural. Porém existem algumas aplicações para as quais a utilização do controlador feedback não é adequada, entre as quais estão o controle de ondas acústicas propagando-se em dutos, onde a reflexão é negligenciável e o controle de ondas de flexão em estruturas onde não ocorre reflexão.

### 5.3.2- Controle Feedforward

Um sistema feedforward de controle ativo de ruído é constituído de uma fonte de controle, um sensor de referência, um sensor de erro e um algoritmo de controle, conforme ilustra Figura 5.4, que apresenta o controle ativo feedforward de uma onda plana propagando-se em um duto.

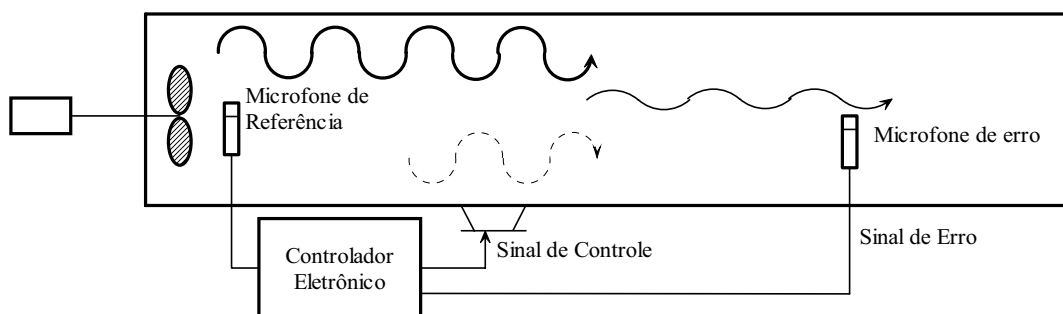


Figura 5.4- Controle Ativo de Ruído Básico, Sistema Feedforward.

No sistema de controle *feedforward*, o sinal da fonte primária é obtido pelo sensor de referência e transmitido ao controlador através da fonte de controle. A efetividade do controlador é medida pelo sensor de erro que fornece um sinal para o algoritmo de controle utilizar no ajuste na saída de maneira a minimizar o erro. O tempo de processamento do controlador deverá ser muito menor que o tempo necessário para o sinal acústico propagar-se do sensor de referência à fonte de controle, para ruído de banda larga.

O controle *feedforward* mostra-se mais eficiente na redução da resposta em regime permanente que na resposta transiente. Ele também permite que a otimização do sistema físico e do controlador seja feita separadamente.

Devido à sua estabilidade inerente, controladores *feedforward* têm sido mais freqüentemente empregados que os do tipo *feedback*, quando se dispõe do sinal de referência correlacionado com o sinal de erro.

A técnica de controle utilizada neste trabalho enquadra-se dentre os controladores *feedforward* não adaptativos, uma vez que o sinal de controle é processado com o conhecimento prévio do sinal emitido pela fonte primária.

#### **5.4- Controle Ótimo**

Em conformidade com a teoria apresentada no Capítulo 4, considera-se que a fonte primária emita ondas sonoras planas que incidem obliquamente sobre uma placa simplesmente apoiada. Com o objetivo de reduzir o som radiado em campo distante, a placa é utilizada como fonte secundária, sendo seu movimento excitado por atuadores piezoelétricos a ela acoplados.

É descrita a seguir uma teoria de controle, desenvolvida por Fuller *et al.* (1991), que pode ser considerada do tipo *feedforward*, destinada a otimizar a voltagem complexa a ser aplicada aos atuadores piezoelétricos, com vistas à minimização da potência acústica total radiada (pela fonte primária e pela placa) no campo distante.

Quando as fontes primárias e os atuadores piezoelétricos atuam simultaneamente, o campo de pressão sonora resultante pode ser considerado como resultante da superposição das pressões sonoras parciais, dadas pelas equações (4.105) e (4.106), para excitação harmônica em regime permanente. Assim, tem-se:

$$p_t = p_n + p_c = \sum_{j=1}^{N_s} (P_i)_j B_j + \sum_{l=1}^{N_c} \left( C_o \frac{d_{31} V}{t} \right)_l A_l \quad (5.1)$$

onde:

- $N_s$  é o número de fontes sonoras,
- $N_c$  é o número de atuadores piezoelétricos,
- $P_i$  é a amplitude da pressão incidente,
- $B_j$  e  $A_l$  são as funções de distribuição de pressão sonora resultantes da onda plana incidente e da excitação da placa pelos elementos piezoelétricos, respectivamente.

De acordo com os desenvolvimentos apresentados nas Seções 4.3 e 4.4, tais funções são dadas por:

$$B_j = K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mnj}^{Pi} I_m I_n \quad (5.2)$$

$$A_l = K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mnl}^c I_m I_n \quad (5.3)$$

Nas equações (5.2) e (5.3)  $K$ ,  $I_m$  e  $I_n$  são dados pelas equações (4.104), (4.91) e (4.96) respectivamente.  $Q_{mnj}^{Pi}$  e  $Q_{mnl}^c$  são dados por:

$$Q_{mnj}^{Pi} = \frac{W_{mnj}^{Pi}}{(P_i)_j} \quad (5.4)$$

$$Q_{mnl}^c = \frac{W_{mnl}^c}{\left( C_o d_{31} \frac{V}{t} \right)_l} \quad (5.5)$$

O controle do campo sonoro pode ser conseguido através de uma escolha apropriada da voltagem  $V$ , em termos de sua amplitude e fase. Para tanto, a função objetivo a ser minimizada é definida como sendo a integral da pressão sonora média quadrática sobre uma

hemisfera de raio  $R$  em campo distante. Esta função objetivo é proporcional à potência acústica radiada dada por (4.138), repetida abaixo:

$$\Phi = \frac{1}{R^2} \int_S |p_t|^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |p_t|^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (5.6)$$

Substituindo a equação (5.1) em (5.6) verifica-se que a função objetivo é quadrática, possuindo portanto um único mínimo.

Escrevendo a equação (5.1) na forma matricial:

$$\{\bar{A}\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{N_s} \end{Bmatrix}_{N_s \times 1} \quad \{\bar{B}\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{N_s} \end{Bmatrix}_{N_s \times 1} \quad \{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} (P_i)_1 \\ (P_i)_2 \\ \vdots \\ (P_i)_{N_s} \end{Bmatrix}_{N_s \times 1} \quad \{\bar{p}\} = \begin{Bmatrix} \left(C_o \frac{d_{31}V}{t}\right)_1 \\ \left(C_o \frac{d_{31}V}{t}\right)_2 \\ \vdots \\ \left(C_o \frac{d_{31}V}{t}\right)_{N_s} \end{Bmatrix}_{N_s \times 1} \quad (5.7)$$

e substituindo a equação (5.7) em (5.1), a expressão da pressão total pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$p_t = \{\bar{B}\}^T \{\bar{q}\} + \{\bar{A}\}^T \{\bar{p}\} \quad (5.8)$$

Desta forma, escreve-se a pressão média quadrática como:

$$|p_t|^2 = \left( \{\bar{B}\}^T \{\bar{q}\} + \{\bar{A}\}^T \{\bar{p}\} \right)^T \left( \{\bar{B}\}^{*T} \{\bar{q}\}^* + \{\bar{A}\}^{*T} \{\bar{p}\}^* \right) \quad (5.9)$$

onde os superscrito  $*$  indica a conjugação complexa e  $^T$  denota a transposição matricial.

Desenvolvendo a equação (5.9) obtém-se:

$$\Phi = \{\bar{p}\}^T \{\bar{A}\} \{\bar{A}\}^{*T} \{\bar{p}\}^* + 2 \operatorname{Re} \left( \{\bar{q}\}^T \{\bar{B}\} \{\bar{A}\}^{*T} \{\bar{p}\}^* \right) + \{\bar{q}\}^T \{\bar{B}\} \{\bar{B}\}^{*T} \{\bar{q}\}^* \quad (5.10)$$

Substituindo a equação (5.10) em (5.6), a função objetivo pode ser escrita sob a forma:

$$\Phi = \{\bar{p}\}^T \{\tilde{A}\} \{\bar{p}\}^* + 2 \operatorname{Re} \left( \{\bar{q}\}^T \{\tilde{B}A\} \{\bar{p}\}^* \right) + \{\bar{q}\}^T \{\tilde{B}\} \{\bar{q}\}^* \quad (5.11)$$

onde

$$\{\tilde{A}\}_{N_c \times N_c} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\bar{A}\} \{\bar{A}\}^{*T} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.12)$$

$$\{\tilde{B}A\}_{N_c \times N_c} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\bar{B}\} \{\bar{A}\}^{*T} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.13)$$

$$\{\tilde{B}\}_{N_s \times N_s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\bar{B}\} \{\bar{B}\}^{*T} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.14)$$

Pode-se verificar que as formas gerais dos elementos típicos dos vetores definidos acima são as seguintes:

$$\tilde{A}_{rs} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_r K_s^* \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{klr}^c Q_{mns}^{c*} I_{klr}^c I_{mns}^{c*} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.15)$$

$$\tilde{B}A_{rs} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_r K_s^* \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{klr}^{Pi} Q_{mns}^{c*} I_{klr}^{Pi} I_{mns}^{c*} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.16)$$

$$\tilde{B}_{rs} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_r K_s^* \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{klr}^{Pi} Q_{mns}^{Pi*} I_{klr}^{Pi} I_{mns}^{Pi*} \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.17)$$

Sendo o termo  $\{\bar{q}\} \{\tilde{B}\} \{\bar{q}\}^*$  constante, a função objetivo (5.11) pode ser redefinida como:

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \{\bar{q}\}^T \{\tilde{B}\} \{\bar{q}\}^* \quad (5.18)$$



Definindo-se :

$$\bar{F}^T = -\{\bar{q}\}^T \{\tilde{B}A\}, \quad (5.19)$$

A função objetivo modificada pode ser escrita como:

$$\tilde{\Phi} = \{\bar{p}\}^T \{\tilde{A}\} \{\bar{p}\}^* + 2 \operatorname{Re} \left( -\bar{F}^T \{\bar{p}\}^* \right) \quad (5.20)$$

Derivando a função objetivo em relação a  $\{\bar{p}\}$ , impõe-se a seguinte condição de estacionariedade:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial p} = 2 \{\tilde{A}\} \{\bar{p}\}^* - 2\bar{F} = 0 \quad (5.21)$$

Assim, o controle ótimo que minimiza a função objetivo, é dado por:

$$\{\bar{p}\}_{opt} = \{\tilde{A}\}^{-1} \bar{F} \quad (5.22)$$

onde  $\{\bar{p}\}_{opt}$  é o vetor dos sinais de controle ótimo.

## Capítulo VI

### Simulações Numéricas e Resultados

Neste capítulo apresentam-se os testes realizados a fim de validar a teoria apresentada nos capítulos anteriores. São verificadas as influências de diferentes fatores no controle, tais como tamanho, número e posicionamento dos atuadores piezoelétricos.

#### 6.1 – Características da placa adotada.

A placa escolhida é de aço, retangular, simplesmente apoiada em suas quatro bordas. Suas propriedades físicas e geométricas encontram-se na Tabela 6.1.

Tabela 6.1- Especificações da placa

Módulo de Elasticidade $E$ [N/m <sup>2</sup> ]	207x10 <sup>9</sup>
Densidade $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7870
Coefficiente de Poisson	0,292
Espessura da Placa $h$ [m]	0,002
Dimensão da Placa em $x$ , $L_x$ [m]	0,38
Dimensão da Placa em $y$ , $L_y$ [m]	0,30

As frequências naturais da placa, calculadas utilizando a teoria desenvolvida no Capítulo 2, são fornecidas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2- Frequências naturais da placa [Hz]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	87,7	249,8	520,0	898,2	1384,5	1978,9
	2	188,7	350,8	621,0	999,3	1485,6	2079,9
	3	357,1	519,2	789,4	1167,6	1653,9	2248,3
	4	592,9	755,0	1025,1	1403,4	1889,7	2484,1
	5	896,0	1058,1	132,82	1706,5	2192,8	2787,2

## 6.2 -Excitação de uma placa utilizando atuadores piezoelétricos.

Os experimentos numéricos descritos nesta seção foram realizados com o objetivo de caracterizar as vibrações transversais da placa, induzidas pela ativação de um par de atuadores piezoelétricos colados simetricamente sobre suas faces. Tais atuadores são comandados por sinais harmônicos defasados de  $180^\circ$  de modo a solicitar a placa em flexão pura em regime vibratório.

São examinadas as influências da posição e das dimensões dos atuadores sobre o comportamento dinâmico da placa.

Os parâmetros característicos dos elementos piezoelétricos adotados são dados na Tabela 6.3, correspondendo a uma cerâmica do tipo PZT (Zirconato Titanato de Chumbo) G-1195 (Crawley & de Luis, 1987)

Tabela 6.3 – Propriedades da cerâmica piezoelétrica G-1195

Módulo de Elasticidade $E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$63 \times 10^9$
Coefficiente de Poisson	0,3
Espessura do PZT $t$ [m]	0,0002
Módulo Piezoelétrico $d_{31}$ [C/N]	$190 \times 10^{-12}$

A fim de verificar a influência do posicionamento do atuador na resposta da placa são consideradas três configurações descritas a seguir.

### 6.2.1 –Configuração I.

Na Configuração I um elemento piezoelétrico é colado à placa na posição:  $x_1=0,32\text{m}$ ,  $x_2=0,36\text{m}$ ,  $y_1=0,04\text{m}$  e  $y_2=0,26\text{m}$ , conforme representa a Figura 6.1.

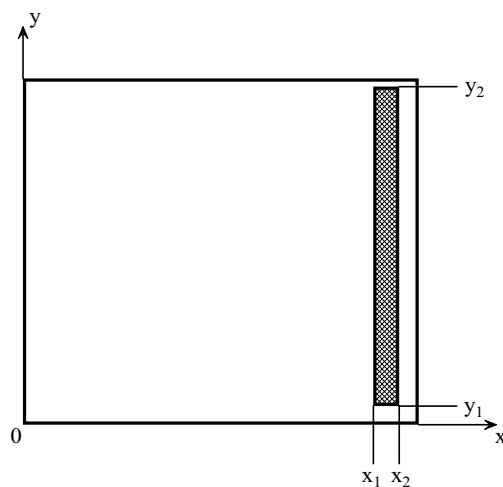


Figura 6.1- Sistema placa-PZT, Configuração I.

O sistema é excitado com valores de frequência  $\omega=87,5$  Hz e  $\omega=187,8$  Hz., próximos às frequências naturais dos modos (1,1) e (2,1), respectivamente, e em uma frequência com valor intermediário entre estas ( $\omega=139,7$  Hz). Em cada caso, a resposta do sistema foi calculada utilizando a equação (3.73), que fornece as amplitudes modais da placa, as quais foram normalizadas em dB pela maior amplitude.

- **Frequência de excitação 87,5 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega=87,5$  Hz são apresentadas na Tabela 6.4 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados graficamente na Figura 6.2.

Tabela 6.4- Configuração I. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega=87,5$ Hz. [dB]

		<i>n</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	0	-380,2	-82,1	-386,9	-91,1	-402,8
	2	-47,0	-378,3	-78,3	-382,4	-86,3	-397,8
	3	-51,7	-379,5	-77,9	-381,3	-84,7	-396,0
	4	-55,4	-381,9	-79,3	-381,9	-84,9	-395,9
	5	-59,2	-385,0	-81,7	-383,7	-86,3	-397,0

Através da Tabela 6.4 verifica-se que o modo ao qual corresponde a maior amplitude é o modo (1,1) sendo, portanto o modo predominante na resposta. Tal predominância é confirmada pela confrontação da Figura 6.2 com a Figura 2.8, que revela a semelhança existente entre o campo de deslocamentos forçados e aquele correspondente ao modo (1,1). Os pequenos valores presentes nas colunas ( $n = 2, 4$  e  $6$ ) indicam que estes modos não são excitados, tendo pequena participação na resposta. Este resultado está de acordo com a análise realizada na Seção 3.3, sobre os fatores que influenciam a participação dos modos na resposta da placa. Como esclarece a equação (3.77), para o caso em que o elemento piezoelétrico está simetricamente posicionado em relação a  $\bar{x}$ , os modos com  $n$  par não participam da resposta da placa.

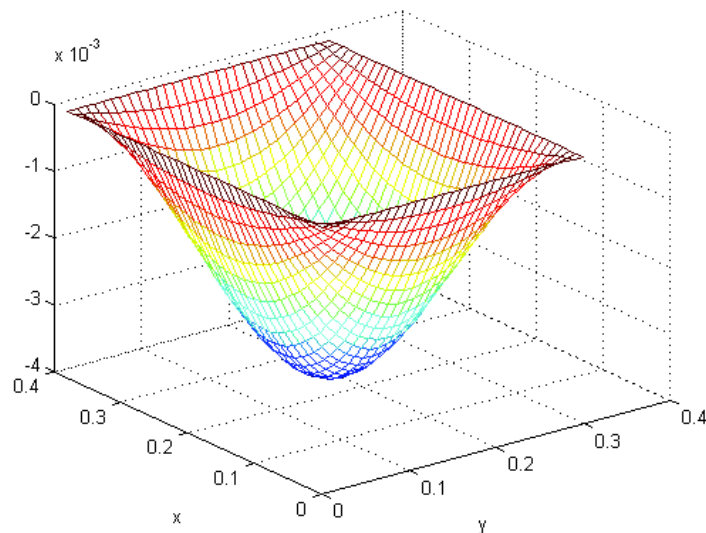


Figura 6.2 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 87,5Hz. Configuração I.

- **Frequência de excitação 187,8 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega = 187,8$  Hz são apresentadas na Tabela 6.5 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados graficamente na Figura 6.3.

Tabela 6.5- Configuração I. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega=187,8\text{Hz}$ . [dB]

		<i>n</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-49,9	-364,9	-72,0	-377,5	-81,8	-393,6
	2	0	-366,8	-68,5	-373,1	-77,0	-388,7
	3	-40,3	-369,4	-68,4	-372,0	-75,5	-386,8
	4	-45,6	-372,4	-69,9	-372,7	-75,7	-386,7
	5	-49,8	-375,7	-72,40	-374,6	-77,1	-387,8

Verifica-se através da Tabela 6.5 que quando o sistema é excitado na frequência de 187,8Hz, o modo que mais contribui na resposta é o modo (2,1). A Figura 6.3 ilustra o campo de deslocamentos transversais da placa para o caso em análise, observando-se a semelhança deste campo com aquele correspondente ao modo (2,1), ilustrado na Figura 2.10.

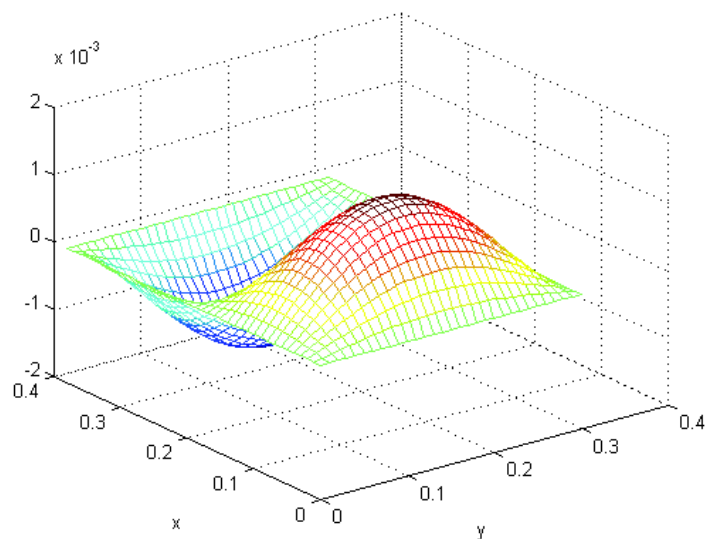


Figura 6.3 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 187,8Hz. Configuração I.

- **Frequência de excitação 139,7 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega = 139,7$  Hz são apresentadas na Tabela 6.6 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados graficamente na Figura 6.4.

Tabela 6.6 - Configuração I. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega = 139,7$  Hz. [dB]

		<i>n</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-9,4	-335,8	-39,4	-344,5	-48,7	-360,5
	2	0	-335,1	-35,7	-340,1	-43,9	-355,5
	3	-8,5	-336,9	-35,5	-338,9	-42,4	-353,7
	4	-12,8	-339,5	-36,9	-339,6	-42,6	-353,6
	5	-16,8	-342,7	-39,3	-341,5	-44,0	-354,7

A frequência de 139,7 Hz encontra-se entre as frequências naturais dos modos (1,1) e (2,1). Com isso, quando o sistema é excitado nesta frequência a resposta obtida é multi modal. Este comportamento é facilmente verificado na Tabela 6.6, que mostra que o modo (2,1) apresenta a maior contribuição na resposta, e que os modos (1,1) e (2,1) têm, também, participações significativas. A Figura 6.4 representa a distribuição de amplitudes da resposta forçada do sistema, podendo-se notar que esta distribuição não se assemelha a nenhum dos modos de vibração individualmente.

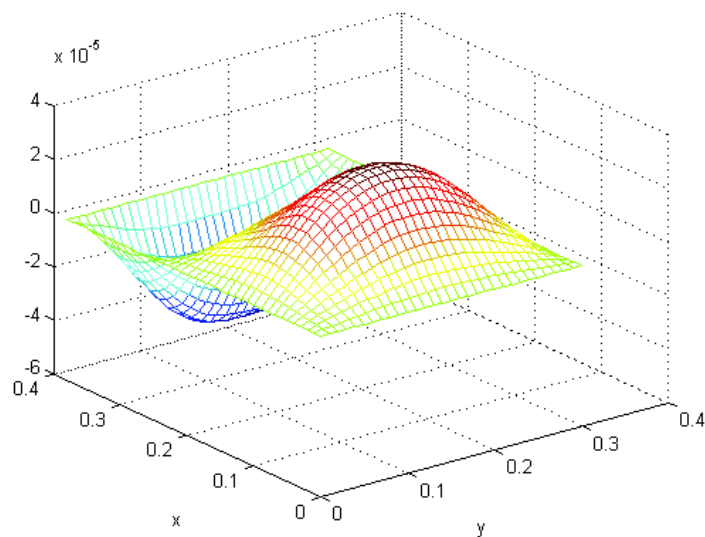


Figura 6.4 – Deslocamentos Forçados da placa excitada em 139,7Hz. Configuração I.

### 6.2.2 –Configuração II.

Na configuração II os elementos piezoelétricos foram colados à placa na seguinte posição:  $x_1=0,04\text{m}$ ,  $x_2=0,34\text{m}$ ,  $y_1=0,23\text{m}$  e  $y_2=0,27\text{m}$ , conforme representa a Figura 6.5 .

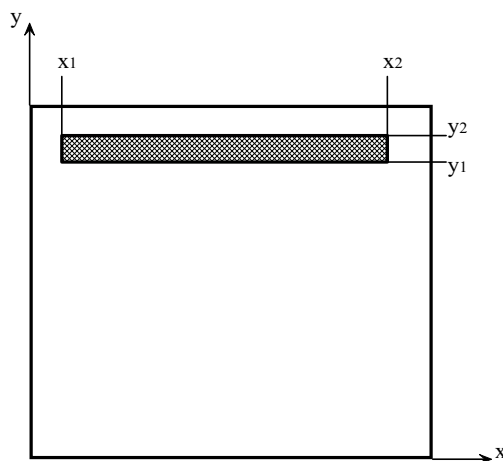


Figura 6.5- Sistema placa-PZTs, Configuração II.



- **Frequência de excitação 87,5 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega=87,5$  Hz são apresentadas na Tabela 6.7 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados graficamente na Figura 6.4.

Tabela 6.7 - Configuração II. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega=87,5$ Hz. [dB]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	0	-49,7	-56,0	-62,7	-71,8	-373,9
	2	-372,0	-374,3	-378,8	-384,7	-393,6	-695,5
	3	-72,3	-71,3	-74,1	-79,3	-87,7	-389,4
	4	-380,1	-377,7	-379,5	-383,9	-391,9	-693,3
	5	-101,6	-98,5	-99,6	-103,5	-111,0	-412,1

A análise da Tabela 6.7 permite verificar que o modo (1,1) é o predominante na resposta, pois apresenta maior amplitude de vibração. Observa-se também que os modos com  $m$  ímpar têm participação na resposta, enquanto os modos com  $m$  par não têm participações significativas. Tal resultado confirma a análise realizada na Seção 3.3 para o caso em que o elemento piezoelétrico está posicionado simetricamente em relação a  $\bar{y}$ , quando apenas os modos com  $m$  ímpar participam da resposta.

A Figura 6.6 apresenta a distribuição dos deslocamentos forçados, observando-se a semelhança deste padrão com o campo de deslocamentos correspondentes ao modo (1,1), apresentado na Figura 2.8.

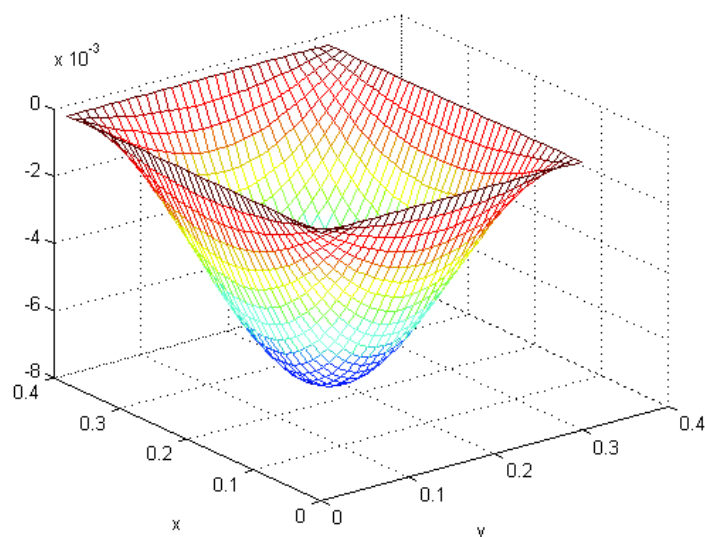


Figura 6.6 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 87,5Hz. Configuração II.

- **Frequência de excitação 187,8 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega = 187,8$  Hz são apresentadas na Tabela 6.8 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados graficamente na Figura 6.7.

Tabela 6.8 - Configuração II. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega = 187,8$ Hz. [dB]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-13,8	0	-11,5	-18,7	-28,1	-330,3
	2	-290,5	-328,3	-334,5	-340,8	-349,8	-651,8
	3	-26,4	-26,7	-30,1	-35,5	-44,0	-345,7
	4	-335,7	-333,6	-335,6	-340,2	-348,2	-649,6
	5	-57,7	-54,6	-55,8	-59,8	-67,4	-368,5

Como pode ser observado na Tabela 6.8, a placa excitada em 187,8Hz vibra com contribuição preponderante do modo (1,2), que apresenta o maior valor de amplitude modal. Verifica-se que existe participação menos significativa dos demais modos com  $m=1$ . Este comportamento é confirmado pela da Figura 6.7, que revela que o padrão de deslocamentos

forçados assemelha-se ao campo de deslocamentos correspondentes ao modo (2,1), representado na Figura 2.9.

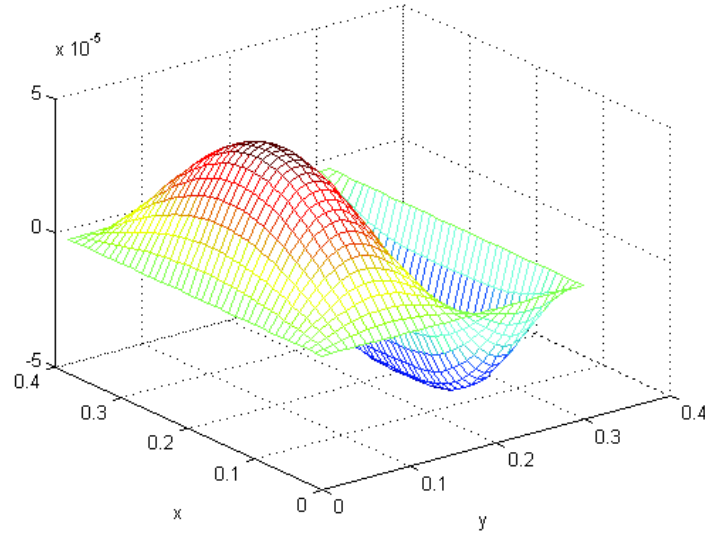


Figura 6.7 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 187,8Hz. Configuração II.

- **Frequência de excitação 139,7 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega = 139,7$  Hz são apresentadas na Tabela 6.9 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados graficamente na Figura 6.8.

Tabela 6.9 - Configuração II. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega = 139,7$ Hz. [dB]

		<i>n</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-2,5	0	-8,0	-14,9	-24,2	-326,3
	2	-319,6	-325,8	-330,9	-337,0	-345,9	-647,9
	3	-23,8	-23,2	-26,3	-31,6	-40,1	-341,7
	4	-332,2	-329,9	-331,8	-336,3	-344,3	-645,7
	5	-53,9	-50,8	-51,9	-55,8	-63,4	-364,5

Assim como na configuração I, também o sistema de configuração II excitado em 139,7Hz apresenta um comportamento multi modal. No entanto, os modos predominantes neste caso são os modos (1,1), (1,2) havendo ainda contribuição menor dos demais modos

com  $m=1$ . Na Figura 6.8 verifica-se que a distribuição de amplitudes da resposta forçada do sistema não se assemelha a nenhum dos modos de vibração individualmente.

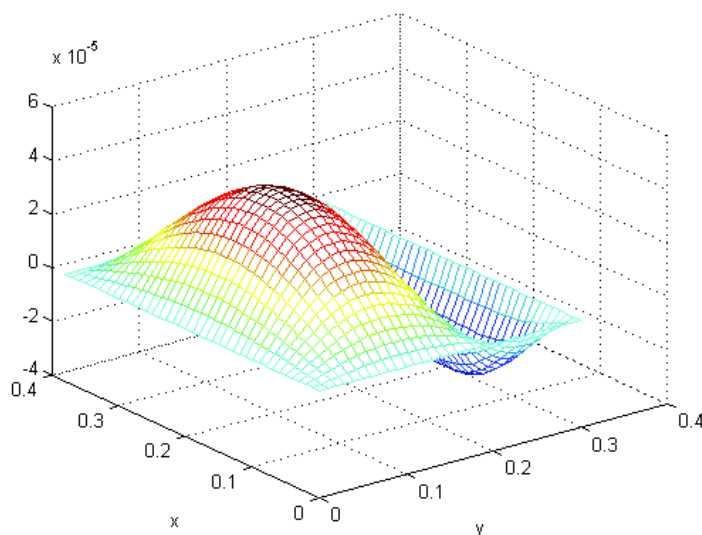


Figura 6.8 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 139,7Hz. Configuração II.

### 6.2.3 – Configuração III.

Na configuração III os elementos piezoelétricos foram colados à placa na seguinte posição:  $x_1 = 0,16\text{m}$ ,  $x_2 = 0,22\text{m}$ ,  $y_1 = 0,13\text{m}$  e  $y_2 = 0,17\text{m}$ , como ilustra a Figura 6.9 .

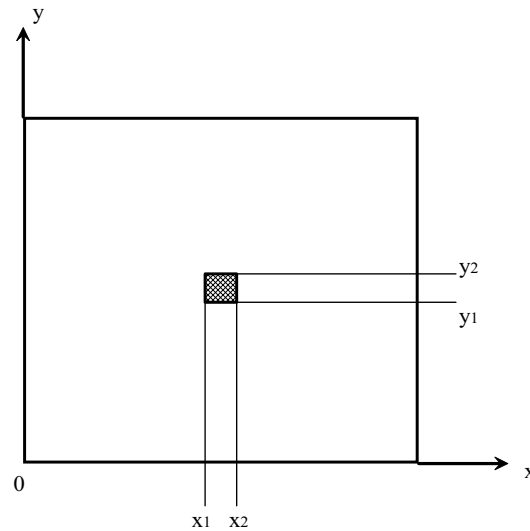


Figura 6.9- Sistema placa-PZTs, Configuração III.

- **Frequência de excitação 87,5 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega = 87,5$  Hz são apresentadas na Tabela 6.10 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados graficamente na Figura 6.10.

Tabela 6.10 - Configuração III. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega = 87,5$  Hz. [dB]

		<i>n</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	0	-365,8	-62,1	-371,9	-71,8	-384,2
	2	-369,8	-688,2	-382,6	-691,8	-391,4	-703,5
	3	-58,7	-373,7	-66,6	-374,9	-74,1	-386,0
	4	-375,7	-689,3	-381,1	-688,7	-387,5	-699,0
	5	-68,7	-381,6	-72,7	-379,8	-78,1	-389,4

De acordo com os resultados da Tabela 6.10, o elemento piezoelétrico disposto na configuração III não é eficiente na excitação dos modos com *m* e *n* pares, fato que confirma a análise desenvolvida na seção 3.3 para o caso de atuador posicionado com dupla simetria.

O modo predominante na resposta é o modo (1,1), que apresenta maior amplitude modal. Verifica-se que os modos com demais valores de  $m$  e  $n$  ímpares também participam na resposta da placa.

A Figura 6.10 ilustra os deslocamentos forçados do sistema, observando-se a semelhança entre o campo de deslocamentos forçados encontrado neste caso e aquele correspondente ao modo (1,1), representado na Figura 2.8.

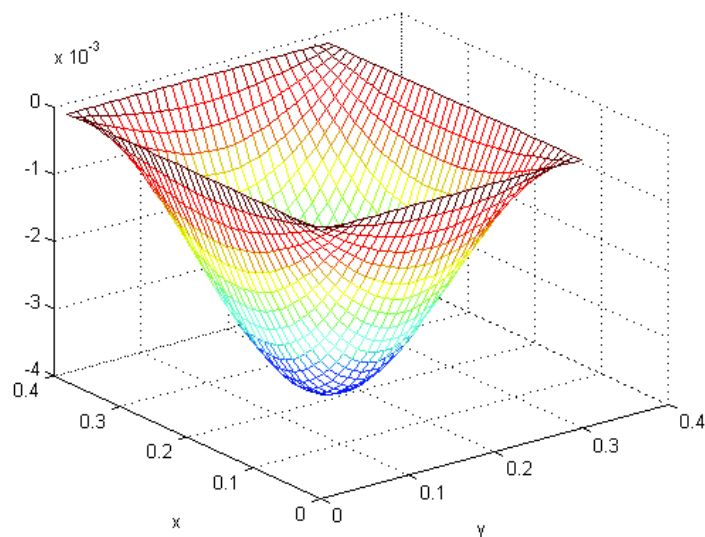


Figura 6.10– Deslocamentos forçados da placa excitada em 87,5Hz. Configuração III.

- **Frequência de excitação 187,8 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega = 187,8$  Hz são apresentadas na Tabela 6.11 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são mostradas na Figura 6.11.

Tabela 6.11 - Configuração III. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega=187,8\text{Hz}$ . [dB]

		<i>n</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-0,9	-303,2	-4,6	-315,1	-15,3	-327,6
	2	-275,5	-629,4	-325,5	-635,1	-334,8	-647,0
	3	0	-316,3	-9,7	-318,3	-17,6	-329,5
	4	-318,5	-632,4	-324,4	-632,2	-331,0	-642,6
	5	-11,9	-324,9	-16,1	-323,3	-21,6	-332,9

Embora a frequência de excitação 187,8Hz seja muito próxima à do modo (2,1), verifica-se na Tabela 6.11 que este modo não é excitado e a resposta do sistema tem participação preponderante dos modos (1,1) e (3,1). A explicação para tal fato é feita na seção 3.3, que mostra que o posicionamento do atuador não permite a excitação de modos com *m* par.

O presente caso é útil para introduzir uma outra abordagem utilizada para analisar o grau de participação dos modos na resposta da placa, em função da posição do elemento piezoelétrico com respeito às linhas nodais. Nota-se que quando um modo é tal que as arestas paralelas do atuador estão simetricamente posicionadas em relação a uma de suas linhas nodais (que separa as regiões que se deslocam com diferença de fase de  $180^\circ$ ), não é possível excitar este modo. No caso em questão, isto ocorre para os modos com *m* e *n* pares.

Na Figura 6.11 é possível observar claramente o comportamento multi modal do sistema, notando-se que o campo de deslocamentos obtido não é característico de nenhum modo individualmente.

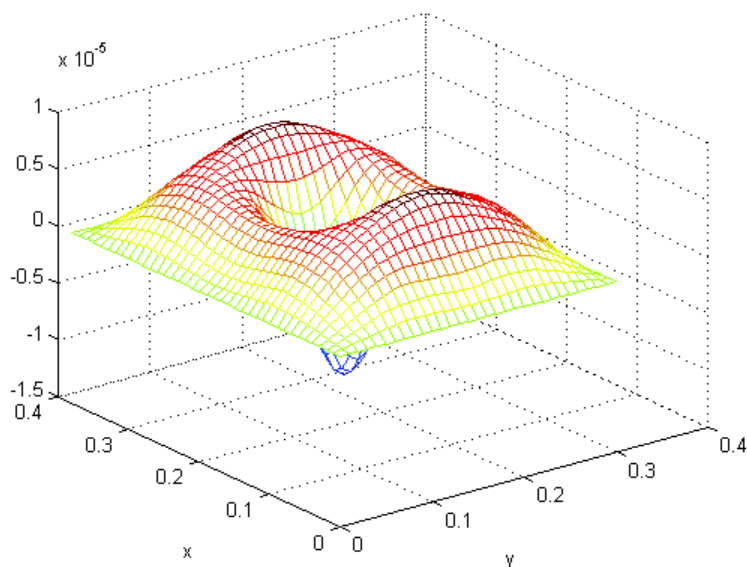


Figura 6.11– Deslocamentos forçados da placa excitada em 187,8Hz. Configuração III.

- **Frequência de excitação 139,7 Hz**

As amplitudes modais obtidas para  $\omega = 139,7$  Hz são apresentadas na Tabela 6.12 e as amplitudes dos deslocamentos transversais da placa em regime harmônico são apresentados na Figura 6.12.

Tabela 6.12 - Configuração III. Amplitudes modais da placa excitada pelas pastilhas piezoelétricas,  $\omega = 139,7$ Hz. [dB]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	0	-313,67	-11,6	-321,7	-21,7	-334,1
	2	-315,0	-637,2	-332,3	-641,6	-341,3	-653,4
	3	-7,7	-323,3	-16,3	-324,8	-24,0	-335,9
	4	-325,3	-639,0	-330,9	-638,6	-337,4	-649,0
	5	-18,5	-331,5	-22,5	-329,7	-28,0	-339,3

Através da Tabela 6.12 verifica-se que os modos com combinações ímpares de  $m$  e  $n$  apresentam as maiores participações na resposta. Isto confere ao sistema um comportamento multi modal, que pode ser visualizado na Figura 6.12. Observa-se que o padrão obtido não é similar ao de nenhum modo individual.



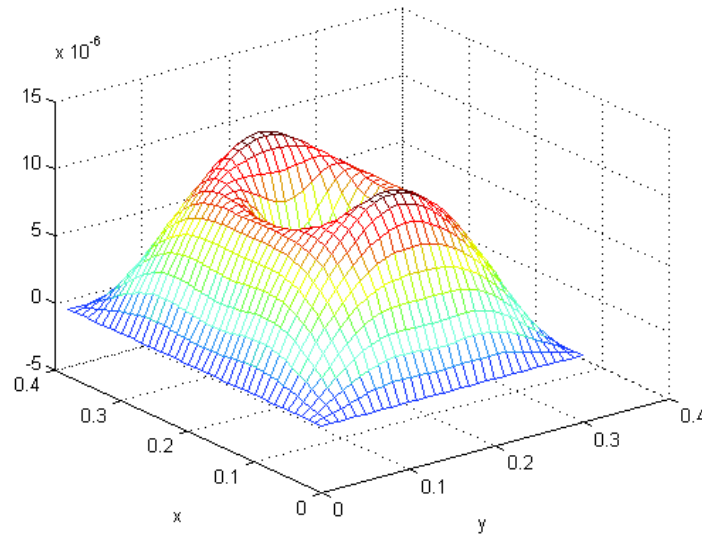


Figura 6.12 – Deslocamentos forçados da placa excitada em 139,7Hz. Configuração III.

### 6.3 -Excitação da placa por uma onda sonora plana oblíqua incidente.

Nesta seção é estudado o comportamento vibratório da placa quando excitada por uma onda sonora plana harmônica de incidência oblíqua que apresenta os seguintes parâmetros:

- ângulos de incidência  $\phi_i = 0^\circ$  e  $\theta_i = 45^\circ$ ;
- amplitude da onda  $P_i = 10 \text{ N/m}^2$ ; ( $P_i = 114\text{dB}$ );

São consideradas três frequências de excitação distintas: 85Hz, 190 Hz e 140Hz. Os dois primeiros valores de frequência são próximos aos valores das frequências naturais dos modos (1,1) e (2,1) e o terceiro é um valor intermediário entre estas. Para cada uma destas frequências é calculada a resposta do sistema através da equação (4.59), que fornece as amplitudes modais da placa, as quais foram normalizadas em dB pela maior amplitude.

- **Frequência de excitação 85 Hz**

Na Tabela 6.13 apresentam-se as amplitudes modais obtidas para  $\omega = 85$  Hz.

Tabela 6.13- Amplitudes modais da placa excitada por uma onda plana,  $\omega = 87,5$  Hz. [dB]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	0	*	-64,5	*	-86,2	*
	2	-55,2	*	-87,3	*	-107,0	*
	3	-57,9	*	-81,6	*	-98,9	*
	4	-82,9	*	-102,1	*	-117,2	*
	5	-78,7	*	-95,2	*	-108,3	*

Na Tabela 6.13 utiliza-se o símbolo \* nas posições correspondentes às amplitudes dos modos  $n=2$ ,  $n=4$  e  $n=6$  que, por serem nulas, resultam, após a normalização, na expressão indeterminada  $20\log_{10}(0)$ .

Verifica-se que o modo predominante na resposta é o modo (1,1), que apresenta maior valor de amplitude. Este resultado está de acordo com o esperado uma vez que a frequência de excitação é muito próxima da frequência natural deste modo. Conforme indica a equação (4.59), para uma dada posição da fonte excitadora em que seja possível a excitação de um modo, a participação deste modo na resposta será tanto maior quanto mais próxima for a frequência de excitação de sua frequência natural.

A Figura 6.13 representa os deslocamentos forçados da placa (normalizados pela máxima amplitude), observando-se que este padrão vibratório é característico do modo (1,1), uma vez que não se verifica a presença de linhas nodais.

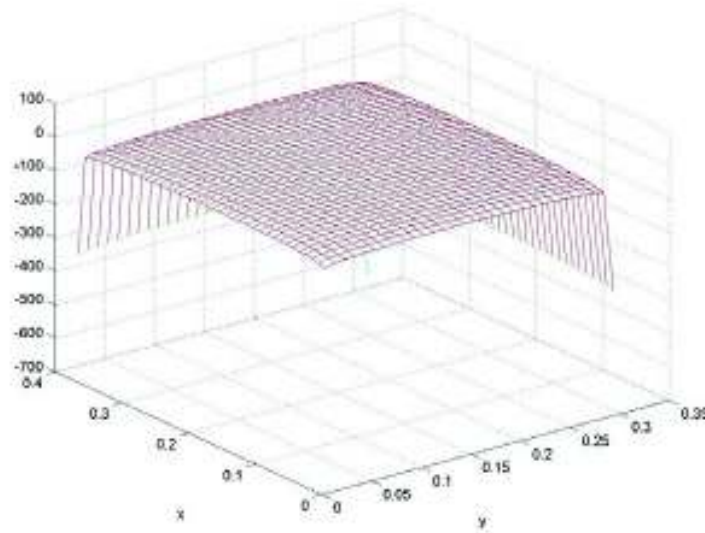


Figura 6.13 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente com frequência de 85 Hz.

- **Frequência de excitação 190 Hz**

Na Tabela 6.14 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa excitada pela onda plana oblíqua incidente de frequência 190Hz. Observa-se que o modo correspondente à maior amplitude modal é o modo (2,1). Este resultado está de acordo com o previsto pela equação (4.59), já que a frequência de excitação é muito próxima da frequência natural deste modo. A Figura 6.14 ilustra o perfil de deslocamentos forçados da placa, observando-se a semelhança deste com a distribuição característica do modo (2,1), que apresenta uma linha nodal na direção  $y$ , dividindo simetricamente a placa na direção  $x$ .

Tabela 6.14- Amplitudes modais da placa excitada por uma onda plana,  $\omega=190\text{Hz}$ . [dB]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-22,9	*	-50,8	*	-73,3	*
	2	0	*	-66,9	*	-87,2	*
	3	-43,4	*	-69,1	*	-86,7	*
	4	-62,6	*	-82,3	*	-97,6	*
	5	-66,3	*	-82,9	*	-96,2	*

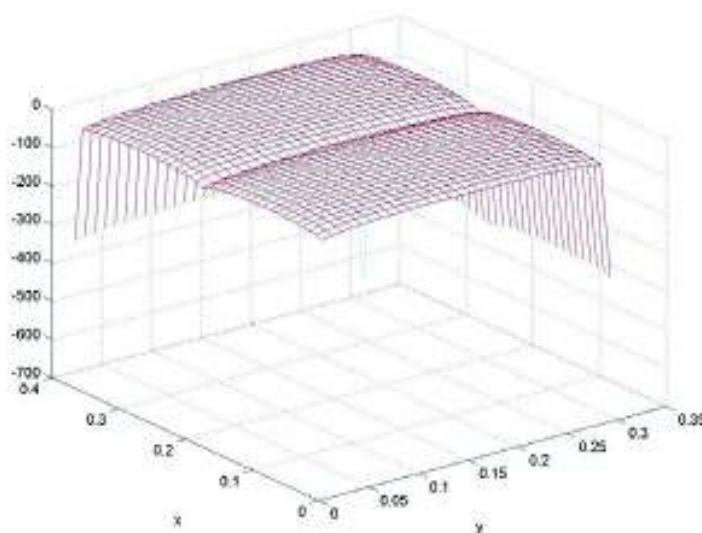


Figura 6.14 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente com frequência de 190 Hz.

- **Frequência de excitação 140 Hz**

Na Tabela 6.15 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente com frequência de 140Hz. Nota-se que quando a onda incidente excita a placa nesta condição não ressonante, a resposta do sistema contém a contribuição preponderante do modo (1,1), que apresenta maior amplitude na resposta. A Figura 6.15 evidencia este comportamento, pois campo de deslocamentos forçados obtido assemelha-se à distribuição de deslocamentos característica do modo (1,1), não havendo linhas nodais em nenhuma direção.

Tabela 6.15- Amplitudes modais da placa excitada por uma onda plana,  $\omega=140\text{Hz}$ . [dB]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	0	*	-36.0	*	-58.0	*
	2	-17.8	*	-54.5	*	-74.5	*
	3	-29.1	*	-53.6	*	-71.1	*
	4	-50.2	*	-69.6	*	-84.8	*
	5	-50.7	*	-67.2	*	-80.4	*

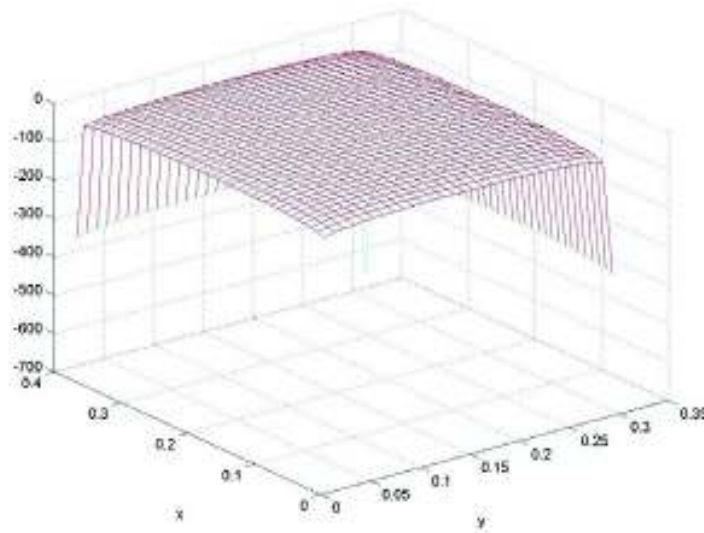


Figura 6.15 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente com frequência de 140 Hz.

De acordo com a teoria apresentada na Seção 4.3, quando excitada em uma dada frequência, a placa passa a radiar pressão sonora, sendo possível avaliar a contribuição de cada modo de vibração na pressão sonora radiada. Tal contribuição é quantificada por um índice de eficiência de radiação. Assim, para as frequências de 85Hz e 190Hz foram calculadas as eficiências de radiação de cada modo, utilizando as equações (4.113), (4.114) e (4.115). Os valores obtidos são fornecidos nas Tabelas 6.16 e 6.17 e serão referenciados posteriormente quando da análise dos resultados das simulações de controle ativo.

Tabela 6.16 – Eficiência modal de radiação da placa excitada em  $\omega = 85\text{Hz}$

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	$0,16 \times 10^{-3}$	$0,51 \times 10^{-9}$	$0,30 \times 10^{-5}$	$0,98 \times 10^{-11}$	$0,40 \times 10^{-6}$	$0,90 \times 10^{-12}$
	2	$0,89 \times 10^{-9}$	$0,16 \times 10^{-14}$	$0,91 \times 10^{-11}$	$0,17 \times 10^{-16}$	$0,57 \times 10^{-12}$	$0,84 \times 10^{-18}$
	3	$0,44 \times 10^{-5}$	$0,13 \times 10^{-10}$	$0,02 \times 10^{-5}$	$0,64 \times 10^{-12}$	$0,40 \times 10^{-7}$	$0,77 \times 10^{-13}$
	4	$0,22 \times 10^{-10}$	$0,39 \times 10^{-16}$	$0,84 \times 10^{-12}$	$0,15 \times 10^{-17}$	$0,89 \times 10^{-13}$	$0,12 \times 10^{-18}$
	5	$0,63 \times 10^{-6}$	$0,11 \times 10^{-11}$	$0,47 \times 10^{-7}$	$0,10 \times 10^{-12}$	$0,10 \times 10^{-7}$	$0,18 \times 10^{-13}$

Tabela 6.17 – Eficiência modal de radiação da placa excitada em  $\omega = 190\text{Hz}$ 

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	$0,81 \times 10^{-3}$	$0,13 \times 10^{-7}$	$0,15 \times 10^{-4}$	$0,25 \times 10^{-9}$	$0,20 \times 10^{-5}$	$0,22 \times 10^{-10}$
	2	$0,22 \times 10^{-7}$	$0,19 \times 10^{-12}$	$0,22 \times 10^{-9}$	$0,21 \times 10^{-14}$	$0,14 \times 10^{-10}$	$0,10 \times 10^{-15}$
	3	$0,22 \times 10^{-4}$	$0,32 \times 10^{-9}$	$0,11 \times 10^{-5}$	$0,16 \times 10^{-10}$	$0,19 \times 10^{-6}$	$0,19 \times 10^{-11}$
	4	$0,56 \times 10^{-9}$	$0,49 \times 10^{-14}$	$0,21 \times 10^{-10}$	$0,19 \times 10^{-15}$	$0,22 \times 10^{-11}$	$0,15 \times 10^{-16}$
	5	$0,31 \times 10^{-5}$	$0,28 \times 10^{-10}$	$0,23 \times 10^{-6}$	$0,27 \times 10^{-11}$	$0,51 \times 10^{-7}$	$0,45 \times 10^{-12}$

#### 6.4 - Controle ativo do ruído empregando uma placa instrumentada com atuadores piezoelétricos.

A partir deste ponto considerar-se-ão casos em que a placa é excitada por uma onda plana incidente e passa a atuar como fonte transmissora de ruído. Deseja-se controlar o ruído transmitido através do controle da vibração da placa. Para tanto, são utilizados atuadores piezoelétricos colados simetricamente sobre as duas faces da placa. Considera-se a adesão perfeita. Os atuadores são ativados com defasagem de fase de  $180^\circ$ . Este sistema é representado na Figura 4.11. A onda plana incidente é descrita pela equação (4.32).

##### 6.4.1- Influência do tamanho dos atuadores no controle.

A fim de verificar a influência do tamanho dos atuadores na redução da potência acústica total radiada (pela fonte primária e pela placa instrumentada) no campo distante, considera-se a situação em que a onda harmônica plana apresenta os seguintes parâmetros:

- ângulos de incidência  $\phi_i = 0^\circ$  e  $\theta_i = 45^\circ$ ;
- amplitude da onda  $P_i = 1,5 \text{ N/m}^2$ ; ( $P_i = 97,5\text{dB}$ );
- freqüências de excitação: 85Hz e 190 Hz.

O centro do par de atuadores é posicionado em  $x=0,19\text{m}$  e  $y=0,15\text{m}$ , que corresponde ao centro geométrico da placa, conforme ilustrado na Figura 6.16.

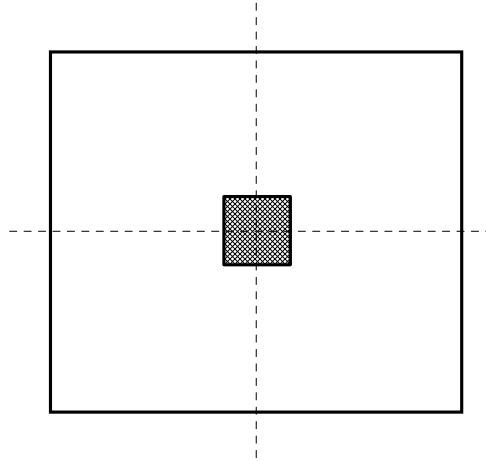


Figura 6.16 – Esquema ilustrativo da posição do par de atuadores no centro da placa.

A partir de diferentes dimensões do atuador foram calculadas a tensão elétrica ótima, utilizando a equação (5.22), e a perda de transmissão em campo distante, com  $R=10\text{m}$ , utilizando a equação (4.139). Os resultados obtidos para os dois valores considerados da frequência de excitação encontram-se nas Tabelas 6.18 e 6.19 apresentadas a seguir.

Tabela 6.18 - Influência do tamanho dos atuadores. Frequência de excitação  $\omega = 85\text{Hz}$ .

Caso	Tamanho do Atuador [cm x cm]	Voltagem do atuador [V]	Redução Total da Potência Radiada [dB]
1	1 x 1	255,8 - 54,3i	76,2
2	2 x 2	64,1 - 13,6i	76,2
3	3 x 3	28,6 - 6,1i	76,2
4	4 x 4	16,1 - 3,4i	76,2
5	6 x 6	7,3 - 1,5i	76,2
6	10 x 10	2,7 - 0,6i	76,1
7	12 x 12	1,9 - 0,4i	76,1
8	15 x 15	1,3 - 0,3i	76,2
9	20 x 20	0,8 - 0,2i	76,2
10	38 x 30	0,5 - 0,1i	75,2

Tabela 6.19 - Influência do tamanho dos atuadores. Frequência de excitação da placa  $\omega = 190\text{Hz}$ .

Caso	Tamanho do Atuador [cm] x [cm]	Voltagem do atuador [V]	Redução Total da Potência Radiada [dB]
1	1 x 1	145,9 - 73,7i	0,5
2	2 x 2	36,6 - 18,5i	0,5
3	3 x 3	16,4 - 8,3i	0,5
4	4 x 4	9,3 - 4,7i	0,5
5	6 x 6	4,2 - 2,1i	0,5
6	10 x 10	1,6 - 0,8i	0,5
7	12 x 12	1,2 - 0,6i	0,5
8	15 x 15	0,8 - 0,4i	0,5
9	20 x 20	0,6 - 0,3i	0,5
10	38 x 30	0,6 - 0,3i	0,5

Alterando a posição do centro dos atuadores para as seguintes coordenadas da placa:  $x=0,17\text{ m}$  e  $y=0,15\text{m}$ , conforme ilustra a Figura 6.17, e realizando o mesmo procedimento descrito para o caso anterior, considerando a frequência de excitação de 85 Hz, foram obtidos os resultados da Tabela 6.20.

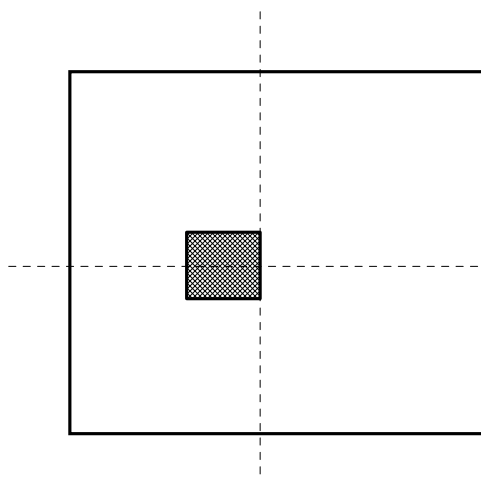


Figura 6.17 – Esquema ilustrativo da posição do par de atuadores na placa.



Tabela 6.20 - Efeito do tamanho dos atuadores,  $\omega = 85\text{Hz}$ .

Caso	Tamanho do Atuador [cm] x [cm]	Voltagem do atuador [V]	Redução Total da Potência Radiada [dB]
1	1 x 1	259,3 – 55,0i	62,5
2	2 x 2	64,9 – 13,8i	62,5
3	3 x 3	29,0 – 6,1i	62,5
4	4 x 4	16,4 – 3,5i	62,5
5	6 x 6	7,4 – 1,6i	62,5
6	10 x 10	2,8 – 0,6i	62,4
7	14 x 14	1,5 – 0,3i	62,5

Através da análise das Tabelas 6.18, 6.19 e 6.20 verifica-se que o tamanho do atuador piezoelétrico não exerce nenhuma influência sobre a máxima redução da potência sonora total radiada. Observa-se também que a magnitude da tensão ótima é inversamente proporcional à área dos atuadores piezoelétricos. Este resultado, que já haviam sido observados por Wang *et al.* (1991), é muito significativo, pois os materiais piezoelétricos apresentam limitações relacionadas aos limites de tensão elétrica que podem suportar, de modo a garantir a integridade física do material e seu perfeito funcionamento. Desta forma, é necessário que a escolha do tamanho das pastilhas seja compatível com os limites de tensão elétrica suportados pelo material.

#### 6.4.2- Influência do número e posicionamento de atuadores no controle.

O estudo da influência do número de atuadores piezoelétricos no controle da potência acústica radiada é feito avaliando a perda de transmissão para diferentes números e posições dos atuadores.

Considera-se que a onda oblíqua incidente plana harmônica que excita a placa instrumentada com atuadores piezoelétricos apresente os seguintes parâmetros:

- ângulos de incidência  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\theta_i = 45^\circ$ ;
- amplitude da onda  $P_i = 10 \text{ N/m}^2$ ; ( $P_i = 97,5\text{dB}$ );

São considerados três valores distintos da frequência de excitação: 85Hz, 190 Hz e 140Hz.

A resposta da placa é obtida considerando a superposição dos efeitos da onda incidente e dos atuadores piezoelétricos. A participação da onda incidente na resposta da placa, em termos das amplitudes modais, é calculada através da equação (4.59). Similarmente,

a participação dos atuadores piezoelétricos na resposta da placa é calculada através da equação (3.73), utilizando os valores ótimos de tensão elétrica que minimiza a potência acústica total radiada no campo distante. Estes valores foram obtidos mediante a resolução da equação (5.22).

O padrão de diretividade de radiação sonora é obtido para os casos em que a placa é excitada apenas pela onda incidente e quando são superpostos os efeitos da onda incidente e dos atuadores piezoelétricos na placa. Para estes dois casos os índices de diretividade foram calculados utilizando as equações (4.133) e (4.135), respectivamente. Nas sub-seções seguintes são apresentados e analisados os resultados obtidos de simulações de controle ativo considerando diferentes configurações.

#### **6.4.2.1- Controle ativo utilizando a primeira configuração.**

Nesta configuração utiliza-se um par de atuadores fixado ao centro da placa, nas seguintes coordenadas:  $x_1 = 0,17$  m,  $x_2 = 0,21$  m,  $y_1 = 0,12$  m e  $y_2 = 0,18$ , como ilustrado na Figura 6.16.

- **Frequência de excitação 85 Hz**

Na Tabela 6.21 são apresentadas as amplitudes modais normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 85 Hz e controlada pela ativação dos atuadores piezoelétricos. Assim como nas seções anteriores, a normalização é feita pelo maior valor de amplitude modal.

Comparando os valores aqui obtidos com os da Tabela 6.13 verifica-se que os atuadores foram eficazes no controle do modo (1,1) uma vez que houve uma redução da ordem de 40 dB na amplitude deste modo.

As pequenas amplitudes das colunas correspondentes a  $n=2, 4$  e  $6$  são justificadas por dois fatores: a onda incidente não excita a placa nos modos com  $n$  par conforme mostra a equação (4.59) para  $\phi=0^0$ , e o posicionamento dos atuadores não permite a excitação dos modos com  $m$  e  $n$  par, conforme evidenciado na seção 3.3 para o caso de simetria dupla. Observa-se também um aumento na participação dos modos (3,1) e (1,3). O perfil de deslocamentos forçados do sistema após o controle está apresentado na Figura 6.18, que evidencia o comportamento multi modal da resposta do sistema.

Tabela 6.21 - Amplitudes modais, [dB], da placa controlada por um par de atuadores  $\omega=85\text{Hz}$

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-43,2	-353,2	-40,1	-358,3	-52,1	-365,5
	2	-55,2	*	-87,3	*	-107,01	*
	3	-35,6	-360,7	-44,9	-360,9	-53,8	-366,9
	4	-82,9	-679,2	-102,1	-677,6	-117,2	-683,0
	5	-45,5	-367,7	-49,9	-364,8	-57,0	-369,4

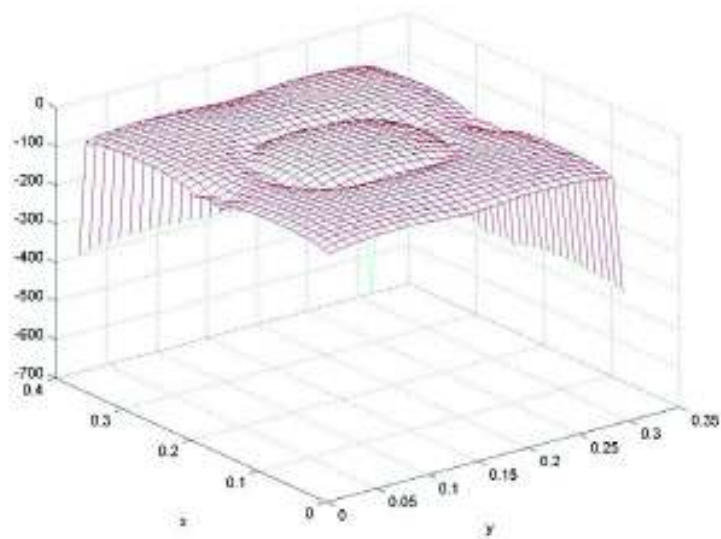


Figura 6.18 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85 Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.19 representa os padrões de diretividade de radiação para a placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85 Hz, sem controle e controlada pelos atuadores piezoelétricos.

Nas Figuras 6.20 a 6.49 encontram-se representadas as contribuições de cada modo na diretividade de radiação da placa controlada.

Nestas figuras verifica-se que o padrão dos índices de diretividade de pressão sonora radiada pela placa sem controle é característico do modo (1,1). Para a placa controlada por um par de atuadores piezoelétricos, observa-se que existe atenuação dos níveis de pressão

sonora radiada. O padrão residual do índice de diretividade obtido assemelha-se ao do modo (2,1), que é o mais representativo da resposta do sistema. Verifica-se também a redução global do nível de pressão sonora radiada.

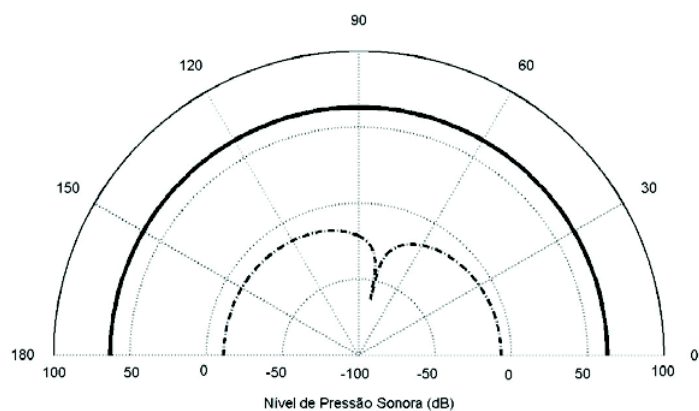


Figura 6.19- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( \_\_\_\_ ) : sem controle; ( \_.\_. ): com controle.

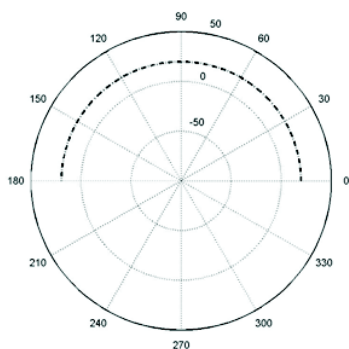


Figura 6.20 - Modo(1,1)

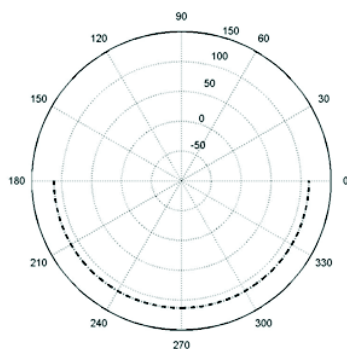


Figura 6.21 - Modo(1,2)

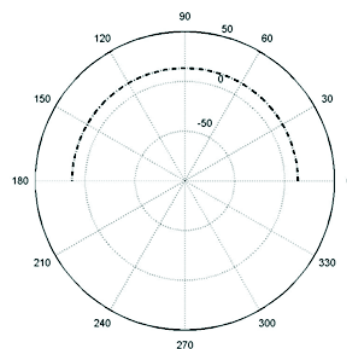


Figura 6.22 - Modo(1,3)

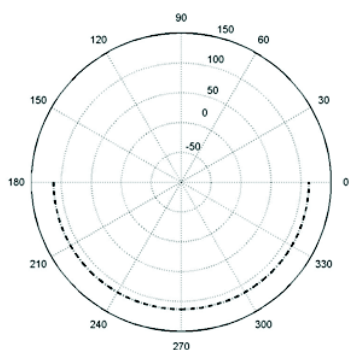


Figura 6.23 - Modo(1,4)

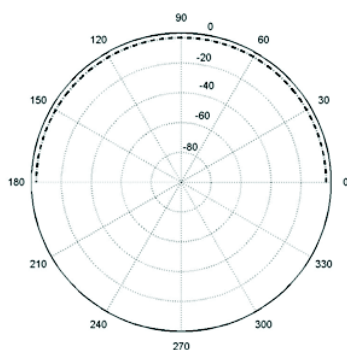


Figura 6.24 - Modo(1,5)

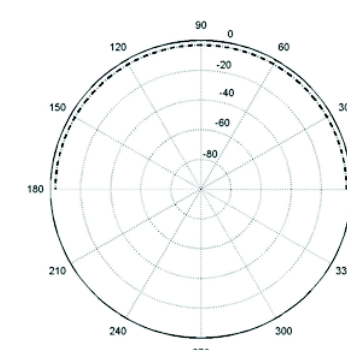


Figura 6.25 - Modo(1,6)

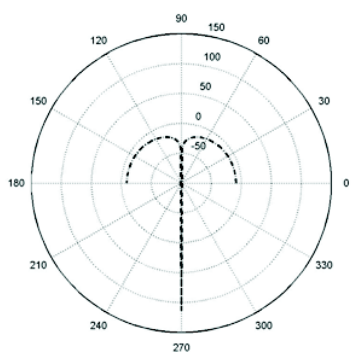


Figura 6.26 - Modo (2,1)

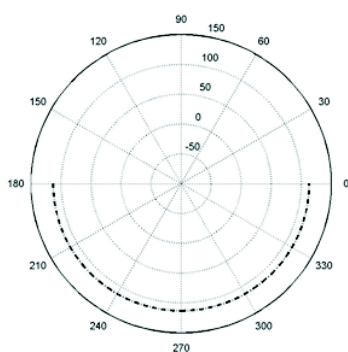


Figura 6.27 - Modo (2,2)

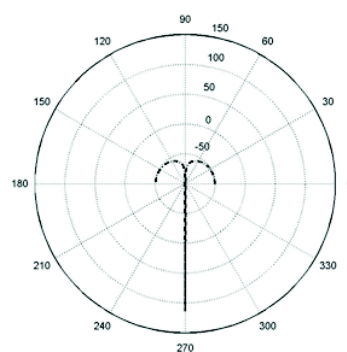


Figura 6.28 - Modo (2,3)

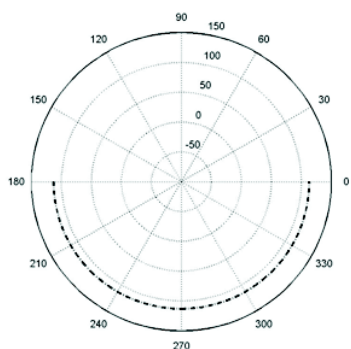


Figura 6.29 - Modo (2,4)

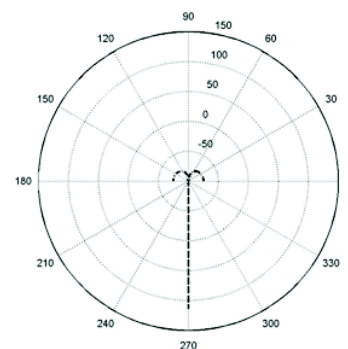


Figura 6.30 - Modo (2,5)

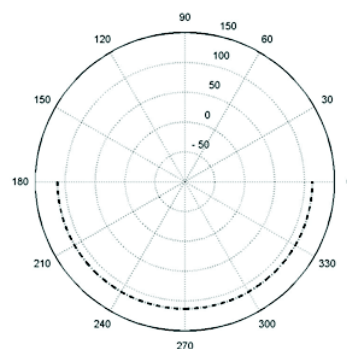


Figura 6.31 - Modo (2,6)

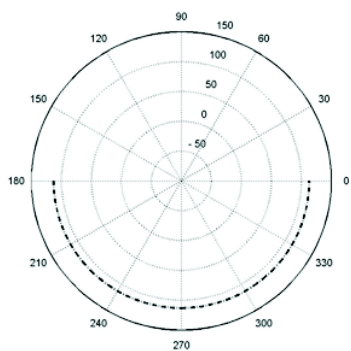


Figura 6.32 - Modo (3,1)

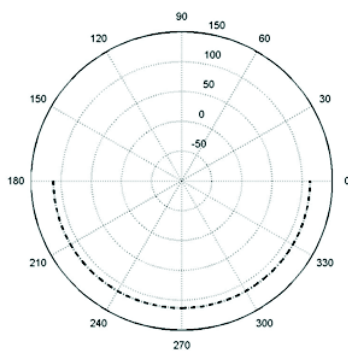


Figura 6.33- Modo (3,2)

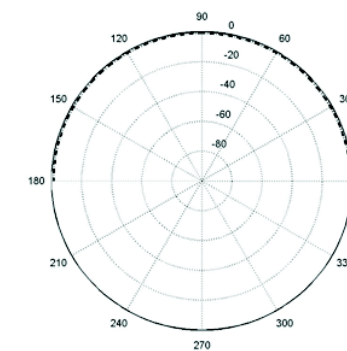


Figura 6.34- Modo (3,3)

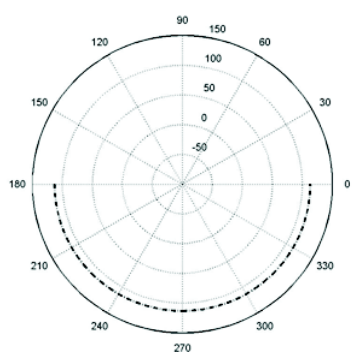


Figura 6.35 - Modo (3,4)

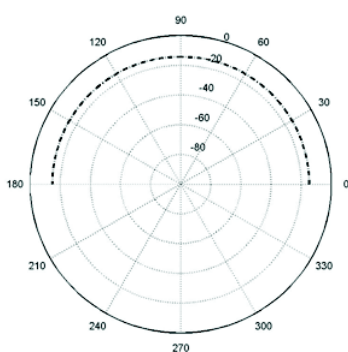


Figura 6.36 - Modo (3,5)

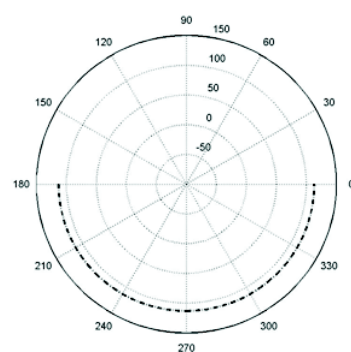


Figura 6.37 - Modo (3,6)

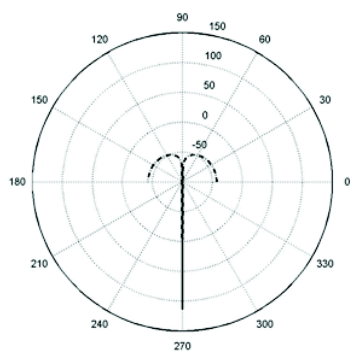


Figura 6.38 - Modo (4,1)

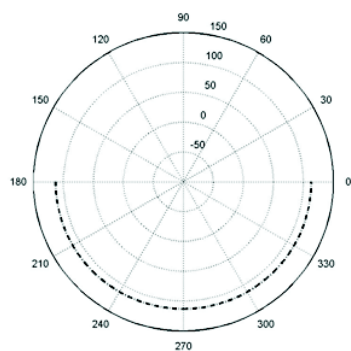


Figura 6.39 - Modo (4,2)

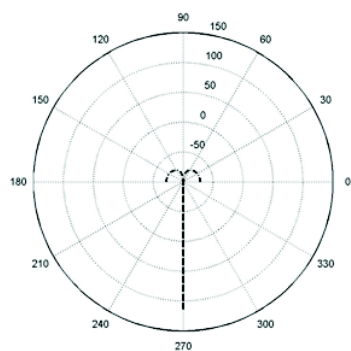


Figura 6.40 - Modo (4,3)

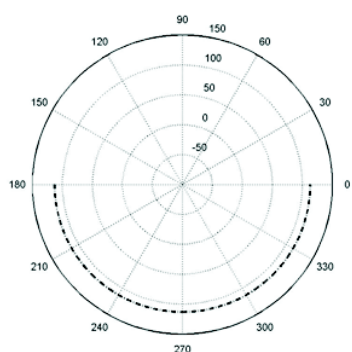


Figura 6.41 - Modo (4,4)

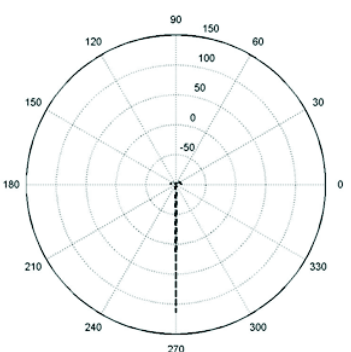


Figura 6.42 - Modo (4,5)

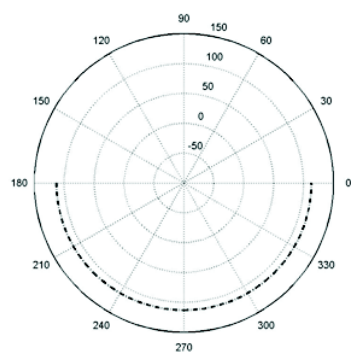


Figura 6.43 - Modo (4,6)

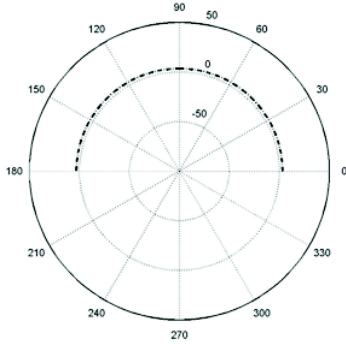


Figura 6.44 -Modo (5,1)

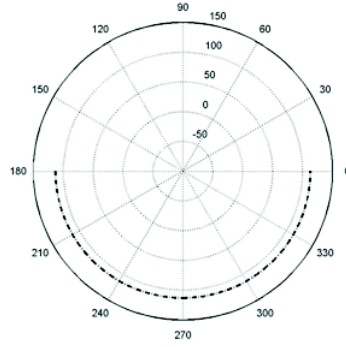


Figura 6.45 - Modo (5,2)

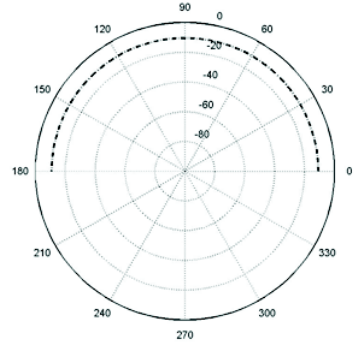


Figura 6.46 - Modo (5,3)

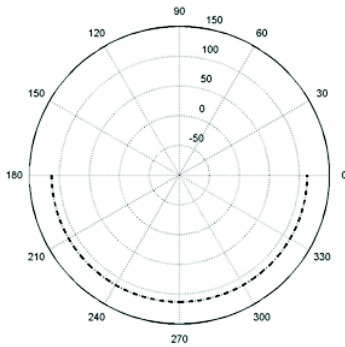


Figura 6.47 - Modo (5,4)

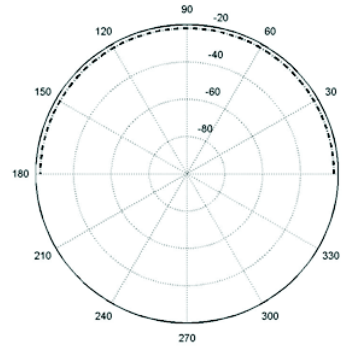


Figura 6.48 - Modo (5,5)

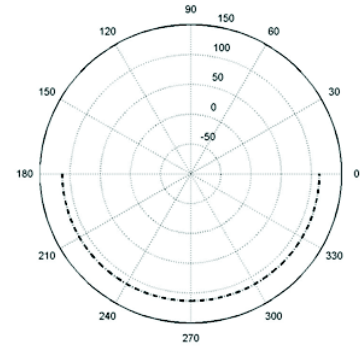


Figura 6.49 - Modo (5,6)

A redução da potência sonora total radiada foi de 76,2 dB aplicando-se ao piezoelétrico a voltagem ótima de  $V=(72,5 -15,4i) e^{i\omega t}$  volts. O valor complexo da tensão elétrica indica a amplitude e a fase em que os atuadores devem atuar em relação à onda incidente, que são calculados segundo.

$$V=(72,5 -15,4i) e^{i\omega t} = \bar{V}e^{i(\omega t+\phi)}$$

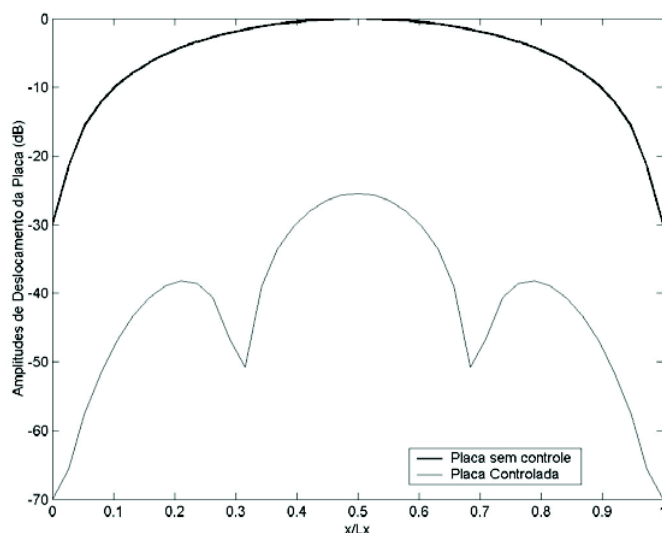
com:

$$\bar{V} = \sqrt{72,5^2 + 15,4^2} \quad \phi = \text{tg}^{-1}(-15,4/72,5)$$

A atenuação obtida pode ser explicada através da análise de alguns fatores. Conforme mostra a Tabela 6.17, o modo (1,1), predominante na vibração da placa antes do controle tem eficiência de radiação da ordem de  $10^{-3}$ . Após o controle, a placa passa a vibrar predominantemente no modo (3,1) e este tem eficiência de radiação da ordem de  $10^{-5}$ . Desta

forma, verifica-se que nesta configuração, após o controle, a placa perde eficiência de radiação e a potência sonora radiada total é reduzida.

Outro fator que influencia na redução da potência sonora radiada total é a redução global das amplitudes de vibração da placa, como mostra a Figura 6.50 que apresenta uma comparação das distribuições de deslocamento da placa sem e com controle. As curvas foram construídas ao longo do plano médio horizontal.



Redução Total da Potência

Sonora Radiada: 76,2 dB

$\bar{V} = 74,1 \text{ volts}$

$\phi : -11,99^\circ$

Figura 6.50- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e com controle.

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

Na Tabela 6.22 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz e controlada por um par de atuadores. Através da observação das Tabelas 6.15 e 6.22 verifica-se que o modo (1,1) foi controlado e que os modos (3,1) e (1,3) tiveram suas participações na resposta aumentadas. Na Figura 6.51 estão representados os deslocamentos forçados da placa controlada, observando-se o seu comportamento multi modal.



Tabela 6.22 Amplitudes modais da placa controlada por um par de atuadores  $\omega = 140\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-15,8	-324,5	-13,1	-331,6	-25,6	-338,9
	2	-17,81	*	-54,5	*	-74,5	*
	3	-8,0	-333,8	-18,2	-334,3	-27,2	-340,4
	4	-50,2	-652,5	-69,6	-651,1	-84,8	-656,4
	5	-18,9	-341,1	-23,3	-338,3	-30,4	-342,9

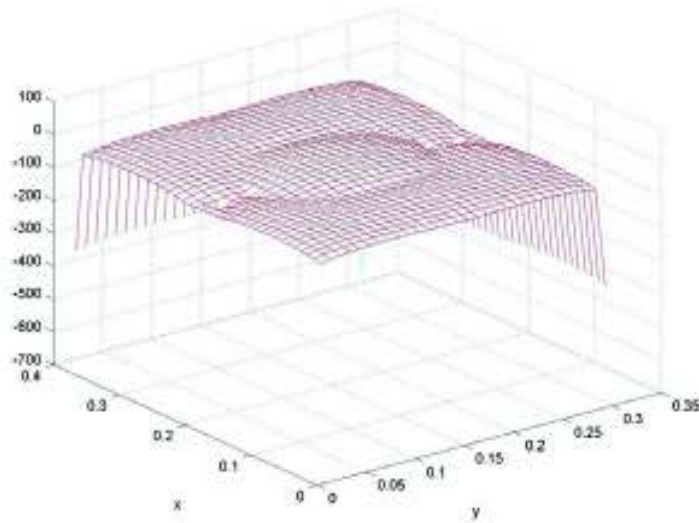


Figura 6.51 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140 Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.52 representa os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle. Verifica-se uma redução total da potência sonora radiada total de 34,5 dB, aplicando-se aos piezoelétricos a voltagem complexa ótima  $V = (57,6 - 20,7i)$  volts.

A Figura 6.53 permite comparar as distribuições de deslocamento da placa ao longo de seu plano médio horizontal, sem e com controle, observando-se uma pequena redução global das amplitudes.

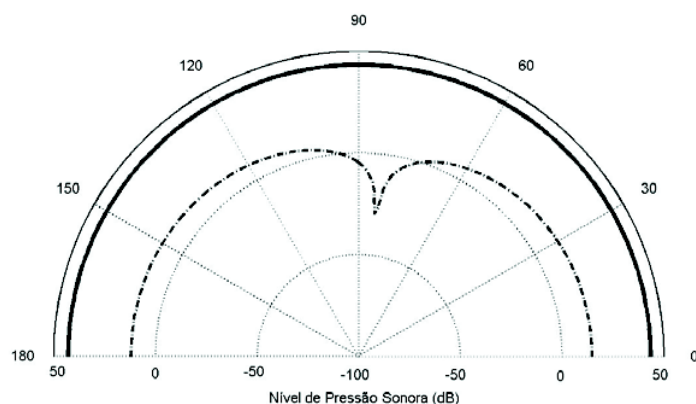
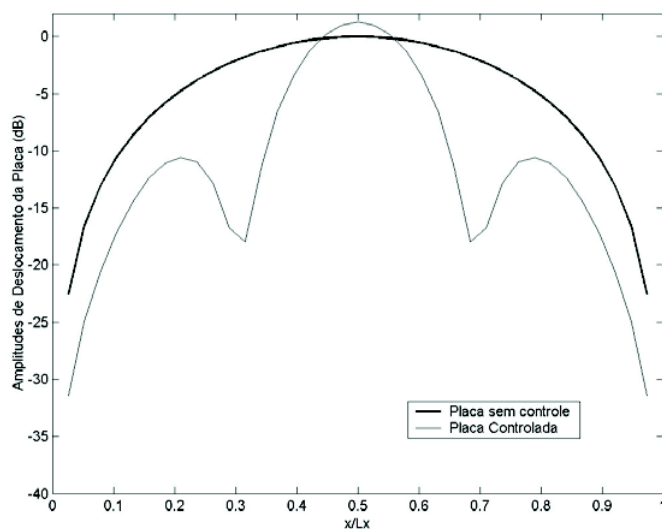


Figura 6.52- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( — ):sem controle; ( - - ) : com controle.



Redução Total da Potência  
Sonora Radiada: 34,5 dB

$\bar{V}$  : 61,2 volts

$\phi$  : -19,77°

Figura 6.53- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e com controle.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Na Tabela 6.23 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz e controlada por um par de atuadores. Conforme mencionado anteriormente na Seção 3.3, este posicionamento dos atuadores não permite o controle do modo (2,1). Tal fato é evidenciado na Tabela 6.23, que

mostra que não houve atenuação nenhuma da participação do modo (2,1), que continua a ser dominante na resposta do sistema.

Na Figura 6.54, observa-se que o padrão de respostas forçadas da placa obtido assemelha-se à distribuição de deslocamentos característica do modo (2,1), com uma linha nodal perpendicular ao eixo  $x$ , passando pelo plano médio da placa.

Tabela 6.23 Amplitudes modais [dB], da placa controlada por um par de atuadores  $\omega = 190\text{Hz}$

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-37,3	-335,6	-27,8	-346,8	-40,8	-354,3
	2	0,0	*	-66,9	*	-87,2	*
	3	-21,9	-348,5	-33,3	-349,5	-42,5	-355,7
	4	-62,6	-667,6	-82,3	-666,3	-97,6	-671,7
	5	-34,0	-356,3	-38,6	-353,6	-45,7	-358,2

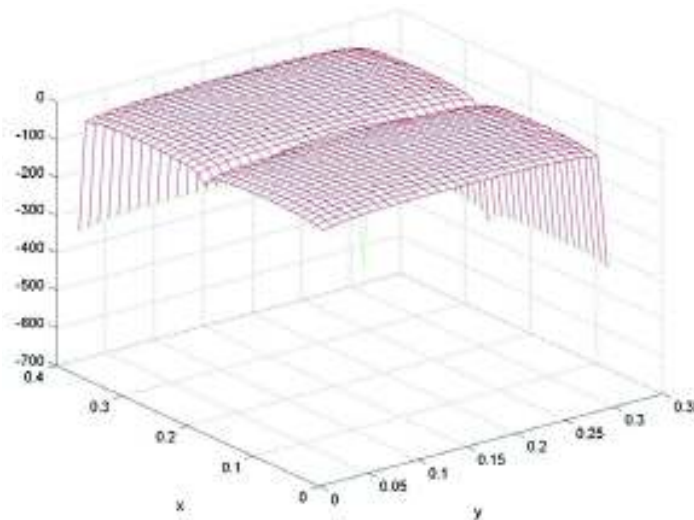


Figura 6.54 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190 Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.55 representa os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle. Após o controle não se verifica redução no nível de pressão sonora radiada devido ao fato, evidenciado anteriormente, que o posicionamento do atuador nesta configuração não é eficiente no controle dos modos com  $m$  e  $n$  pares.

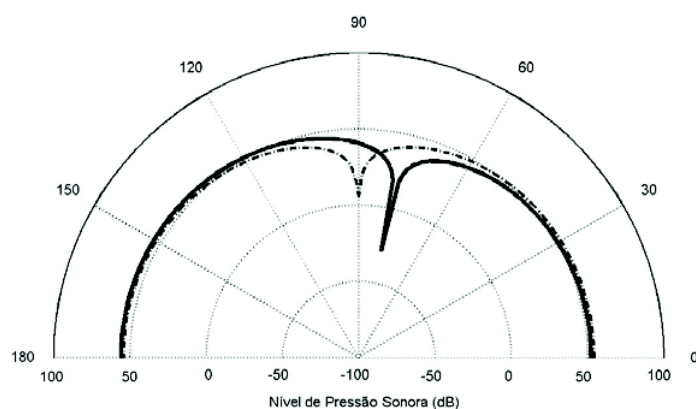
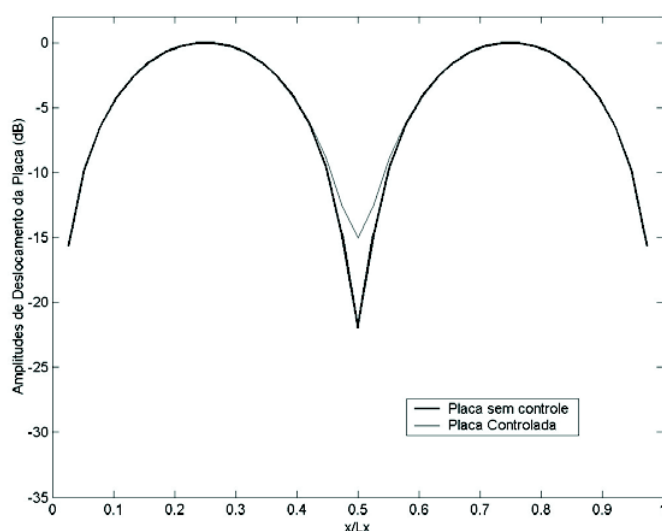


Figura 6.55- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( — ):sem controle; ( \_ \_ ): com controle.

A redução total da potência sonora radiada total foi de apenas 0,5dB. Como não houve atenuação no modo predominante da resposta, esta pequena redução pode ser justificada por uma ligeira redução da participação do modo (1,1) após o controle. De acordo com a Tabela 6.19, este modo apresenta maior eficiência de radiação.

A tensão elétrica ótima aplicada foi  $V = (41,9 - 21,2i)$  Volts.

A Figura 6.56 permite comparar as distribuições de deslocamento da placa ao longo de seu plano médio horizontal, sem e com controle, observando-se que não houve redução global das amplitudes de vibração.



Redução Total da Potência  
Sonora Radiada: 0,5 dB

$\bar{V}$  : 46,9 volts

$\phi$  : -26,84°

Figura 6.56- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 190Hz, sem controle e com controle.

#### 6.4.2.2- Controle ativo utilizando a segunda configuração.

Nesta configuração são utilizados dois pares de atuadores piezoelétricos no controle, fixados na placa nas seguintes coordenadas:

- primeiro par de atuadores:  $x_1 = 0,075\text{m}$ ,  $x_2 = 0,115\text{m}$ ,  $y_1 = 0,12\text{m}$  e  $y_2 = 0,18\text{m}$ .
- segundo par de atuadores:  $x_1 = 0,265\text{m}$ ,  $x_2 = 0,305\text{m}$ ,  $y_1 = 0,12\text{m}$  e  $y_2 = 0,18\text{m}$ .

Os parâmetros acústicos utilizados são os mesmos da seção anterior. O sistema placa-atuadores encontra-se representado na Figura 6.57.

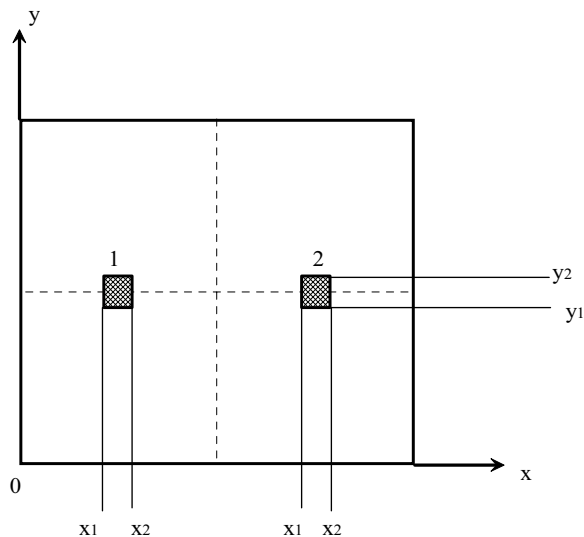


Figura 6.57- Segunda configuração do sistema placa e atuadores piezoelétricos.

#### • Frequência de excitação de 85 Hz

Na Tabela 6.24 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz e controlada por dois pares de atuadores. Da mesma forma que nas seções anteriores, a normalização é feita pelo maior valor de amplitude modal.

Fazendo uma comparação entre as Tabelas 6.13 e 6.24 observa-se a atenuação das amplitudes do modo (1,1). A participação do modo (2,1) também foi reduzida. Entretanto os modos (3,1) e (1,3) tiveram suas amplitudes modais aumentadas em relação ao sistema sem controle.

A Figura 6.58 apresenta o perfil de deslocamentos forçados, sendo possível verificar que a resposta do sistema é de natureza multi modal.

Tabela 6.24 - Amplitudes modais da placa controlada por dois pares de atuadores  $\omega=85\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-67,5	-353,3	-40,2	-358,3	-52,2	-365,6
	2	-75,8	-382,2	-66,9	-384,7	-78,4	-391,5
	3	-37,1	-360,8	-44,7	-360,9	-53,9	-367,1
	4	-82,9	-676,3	-102,2	-674,7	-117,2	-679,9
	5	-45,2	-367,8	-50,1	-364,9	-56,9	-369,5

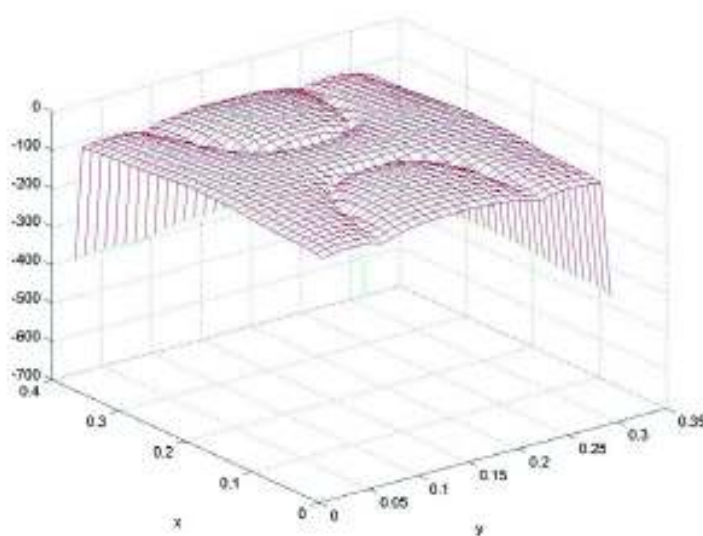


Figura 6.58 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.59 representa os índices de diretividade de radiação obtidos nas condições sem controle e com controle. Observa-se que o controle leva a uma atenuação global dos níveis de pressão sonora. Para a configuração em estudo, a redução da potência sonora total radiada foi de 87,5 dB.

A tensão elétrica ótima aplicada aos atuadores piezoelétricos é  $V_1=(51,3 - 8,9i)$  volts no primeiro par de atuadores e de  $V_2=(50,5 - 12,7i)$  volts no segundo par.

A Figura 6.60 apresenta uma comparação das distribuições de deslocamento da placa ao longo do plano médio horizontal, sem e com controle, observando-se uma significativa redução global das amplitudes de vibração forçada.

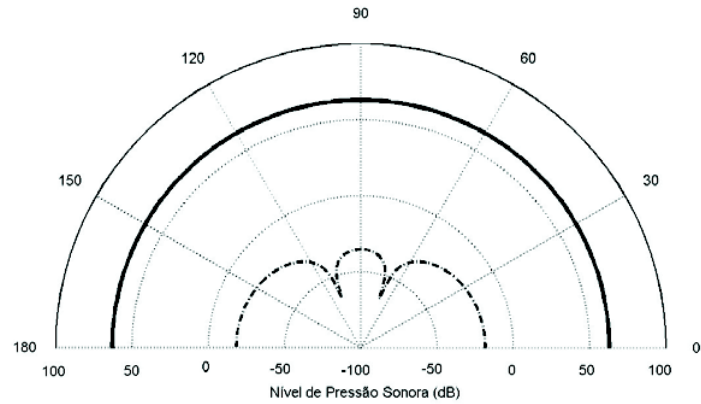


Figura 6.59- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( — ):sem controle; ( \_.\_ ): com controle.

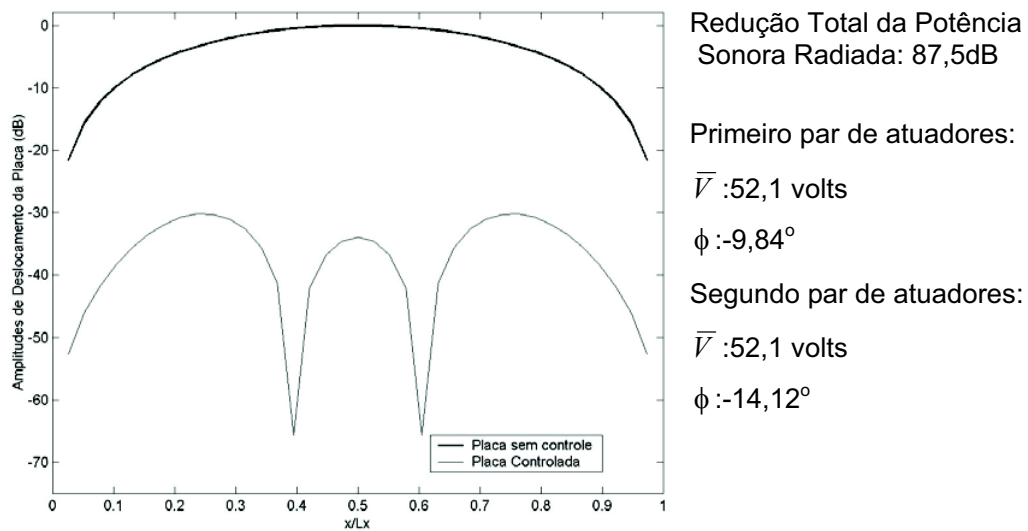


Figura 6.60 - Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e com controle.

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

Na Tabela 6.25 são apresentadas as amplitudes modais normalizadas de vibração da placa excitada em 140Hz. Comparando os dados desta com aqueles fornecidos na Tabela 6.15 nota-se que após o controle a participação dos modos (1,1) e (2,1) é reduzida, ocorrendo um aumento significativo das amplitudes de vibração nos modos (3,1) e (1,3) que passam a ser os mais significativos.

A Figura 6.61 representa o padrão dos deslocamentos forçados da placa após o controle, sendo possível observar o comportamento multimodal.

Tabela 6.21 - Amplitudes modais da placa controlada por dois pares de atuadores  $\omega=140\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-34,1	-322,8	-11,5	-329,9	-23,9	-337,3
	2	-43,3	-349,1	-34,5	-352,5	-46,3	-359,3
	3	-7,8	-332,1	-16,2	-332,6	-25,6	-338,7
	4	-50,2	-647,7	-69,6	-646,3	-84,8	-651,6
	5	-16,8	-339,4	-21,7	-336,6	-28,7	-341,2

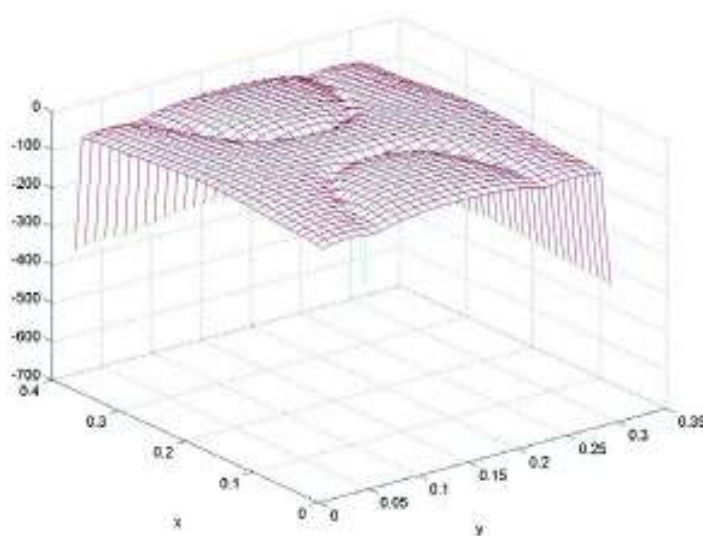


Figura 6.61 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.62 representa os padrões de diretividade de radiação do sistema sem controle e com controle. Mais uma vez, observa-se uma expressiva redução dos níveis de pressão sonora radiada em campo distante.

A redução total da potência sonora radiada após o controle, utilizando dois pares de atuadores, foi de 49,4 dB, e as tensões ótimas aplicadas ao primeiro e segundo pares de atuadores foram  $V_1 = (50,7 - 14,8i)$  volts e  $V_2 = (48,5 - 20,7i)$  volts, respectivamente.

A figura 6.63 apresenta uma comparação das amplitudes de vibração forçada da placa sem e com o controle ativo. Observa-se uma pequena redução global das amplitudes de vibração forçada.



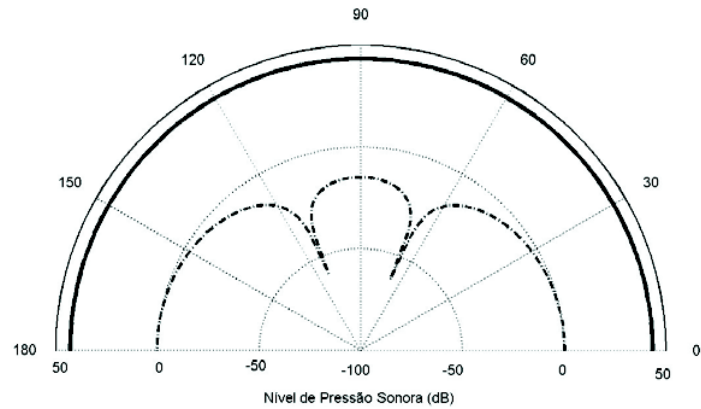


Figura 6.62- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( — ) :sem controle; ( \_.\_ ): com controle.

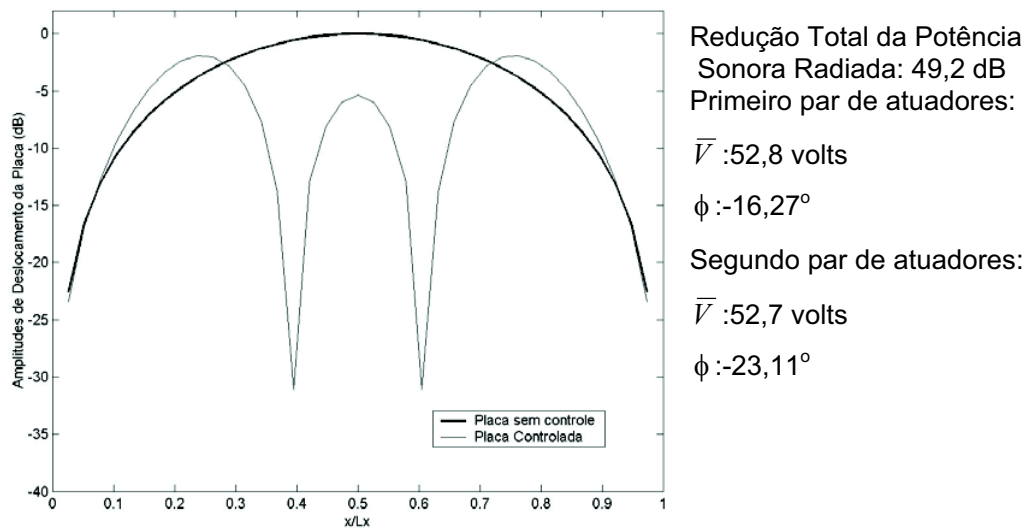


Figura 6.63- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e com controle.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Na Tabela 6.26 são apresentadas as amplitudes modais normalizadas de vibração da placa. Comparando esta tabela com a Tabela 6.14, verifica-se que o modo (2,1) pôde ser controlado. O modo (1,1) também teve sua amplitude reduzida. Contudo, houve um acréscimo da participação dos modos (3,1) e (1,3) que se tornaram predominantes na resposta.

O perfil de deslocamentos forçados do sistema após o controle está apresentado na Figura 6.64, que evidencia o comportamento multi modal da resposta do sistema.

Tabela 6.26 - Amplitudes modais da placa controlada por dois pares de atuadores  $\omega=190\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-43,5	-333,3	-25,7	-344,5	-38,6	-352,0
	2	-56,0	-360,8	-47,2	-365,5	-59,4	-372,5
	3	-21,1	-346,3	-30,8	-347,3	-40,4	-353,5
	4	-62,6	-662,2	-82,3	-661,0	-97,6	-666,4
	5	-31,4	-354,1	-36,5	-351,4	-43,7	-356,0

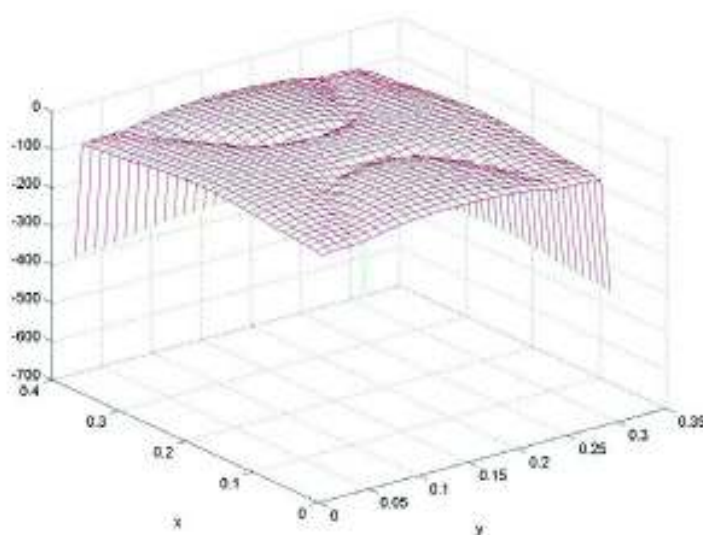


Figura 6.64 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.65 representa os padrões de diretividade de radiação obtidos para o sistema sem controle e com controle.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando dois pares de atuadores foi de 43,5 dB, para tensões ótimas  $V_1=(51,8 -21,7i)$  volts e  $V_2=(48,2 -28,8i)$  volts.

A Figura 6.66 apresenta uma comparação das distribuições de deslocamento da placa, ao longo do plano médio horizontal, sem e com controle.

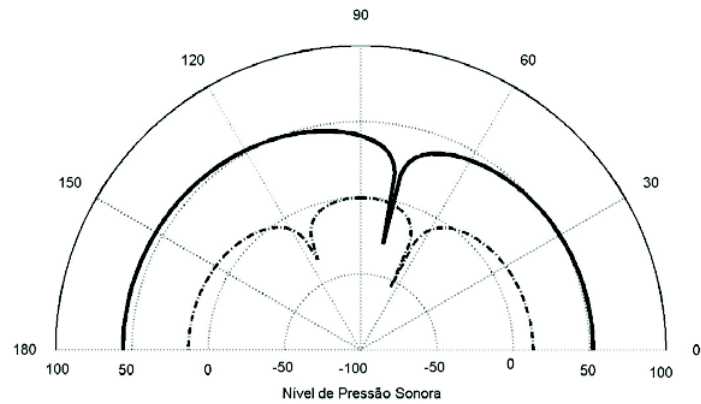


Figura 6.65- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( — ):sem controle; ( \_ \_ ): com controle.

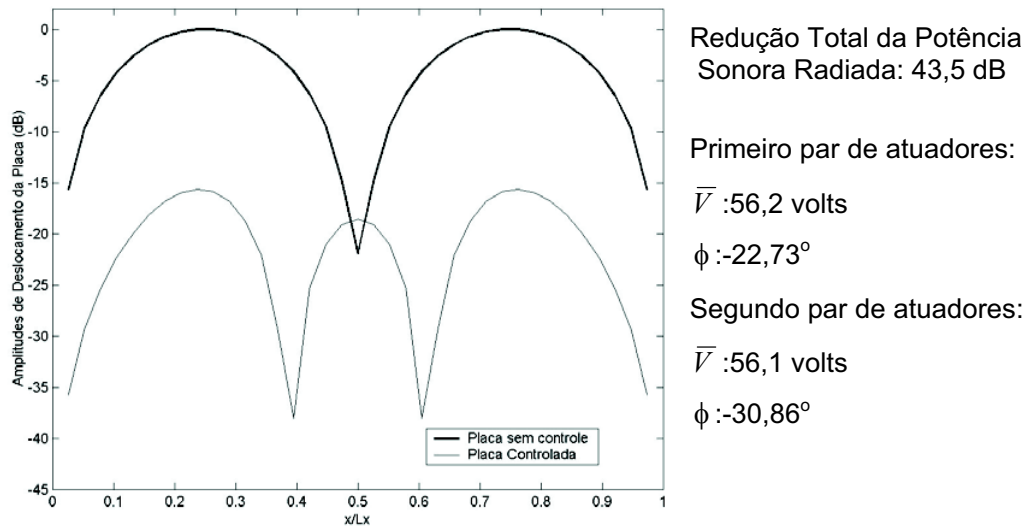


Figura 6.66- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 190Hz, sem controle e com controle.

#### 6.4.2.3- Controle ativo utilizando a terceira configuração.

Nesta configuração são utilizados três pares de atuadores piezoelétricos no controle, fixados na placa nas seguintes coordenadas:

- primeiro par de atuadores:  $x_1 = 0,075\text{m}$ ,  $x_2 = 0,115\text{m}$ ,  $y_1 = 0,12\text{m}$  e  $y_2 = 0,18\text{m}$ .
- segundo par de atuadores:  $x_1 = 0,17\text{m}$ ,  $x_2 = 0,21\text{m}$ ,  $y_1 = 0,12\text{m}$  e  $y_2 = 0,18\text{m}$ .
- terceiro par de atuadores:  $x_1 = 0,265\text{m}$ ,  $x_2 = 0,305\text{m}$ ,  $y_1 = 0,12\text{m}$  e  $y_2 = 0,18\text{m}$ .

Os parâmetros acústicos utilizados são os mesmos da seção anterior. O sistema placa-atuadores encontra-se representado na Figura 6.67.

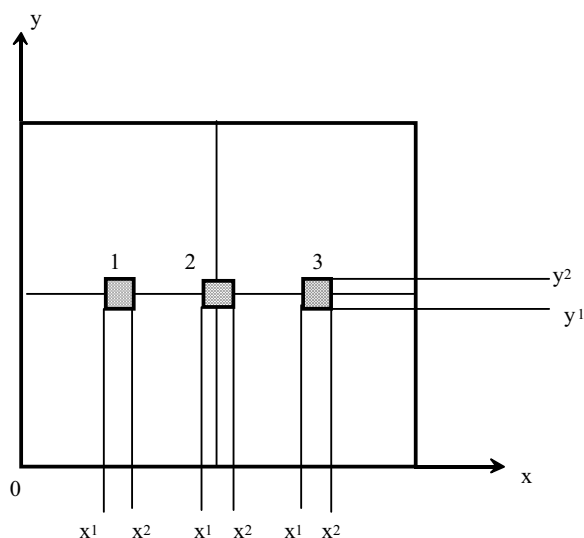


Figura 6.67 - Terceira configuração do sistema placa e atuadores piezoelétricos.

#### • Frequência de excitação de 85 Hz

Na Tabela 6.27 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz e controlada pelos três pares de atuadores. Da mesma forma que nas seções anteriores, a normalização é feita pelo maior valor de amplitude modal.

Através da comparação das Tabelas 6.13 e 6.27, constata-se que os modos (1,1) e (2,1) foram controlados. No entanto, houve um aumento das amplitudes dos modos (3,1) e (1,3), sendo este último predominante na resposta. Tal comportamento é comprovado pela Figura 6.68 que ilustra o perfil de deslocamentos forçados da placa.

Tabela 6.27 - Amplitudes modais da placa controlada por três pares de atuadores  $\omega=85\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-48,7	-353,2	-40,1	-358,3	-52,2	-365,5
	2	-75,8	-382,2	-66,9	-384,7	-78,4	-391,5
	3	-49,9	-378,8	-63,9	-378,9	-71,5	-385,0
	4	-82,9	-697,6	-102,1	-696,0	-117,2	-701,3
	5	-65,0	-385,8	-67,7	-382,9	-75,2	-387,5

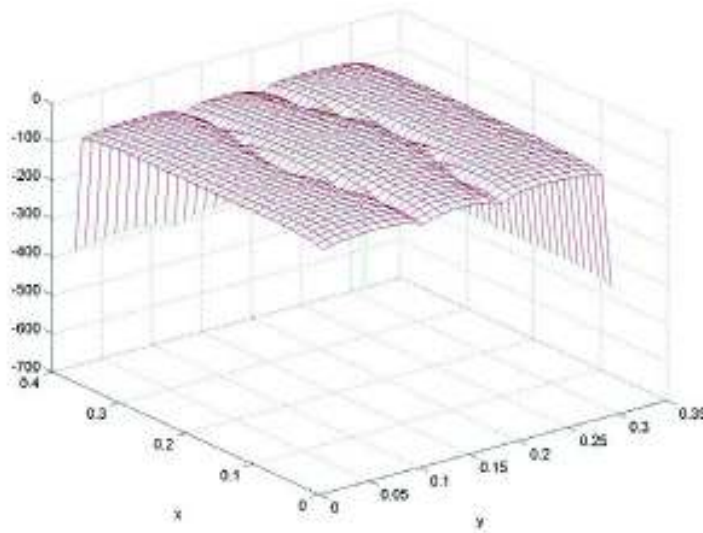


Figura 6.68 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.69 representa os padrões de diretividade de radiação em campo distante para as condições sem controle e com controle. Verifica-se que existe uma significativa redução do nível de pressão sonora radiada. A redução total da potência sonora radiada do sistema com controle é de 95,7 dB, e a tensão aplicada ao primeiro par de atuadores é  $V_1 = (22,8 - 2,8i)$  volts, ao segundo par é  $V_2 = (40,6 - 8,6i)$  volts e ao terceiro par é  $V_3 = (21,9 - 6,7i)$  volts.

A Figura 6.70 permite comparar as distribuições de deslocamento da placa ao longo de seu plano médio horizontal, sem e com controle, observando-se uma significativa redução global das amplitudes.

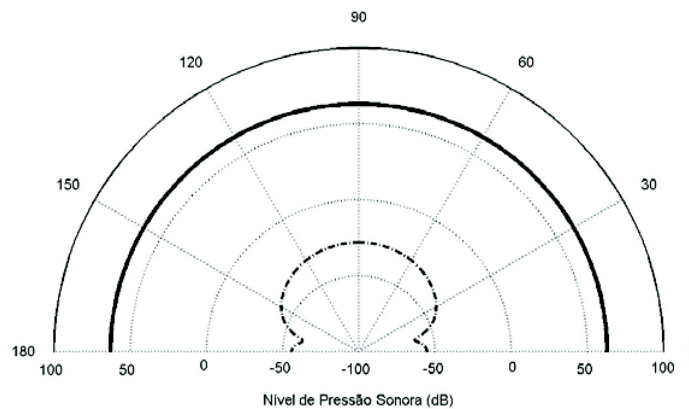
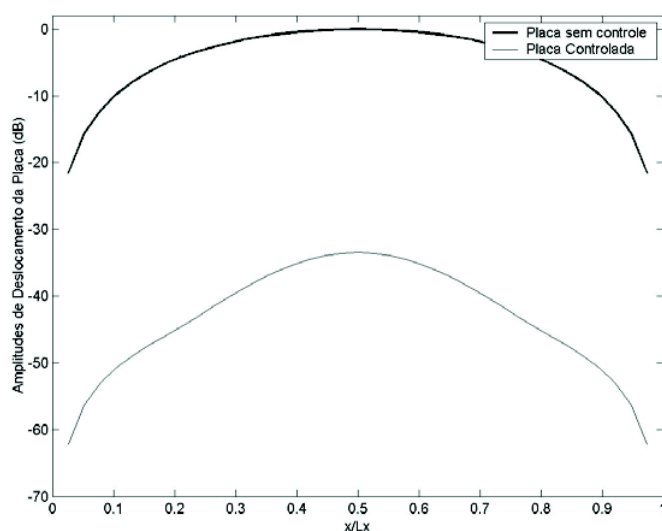


Figura 6.69- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. (\_\_\_):sem controle; (---): com controle.



Redução Total da Potência Sonora  
Radiada: 97,5 dB

Primeiro par de atuadores:

$\bar{V}$  :22,9 volts

$\phi$  :-7,0°

Segundo par de atuadores:

$\bar{V}$  :41,5 volts

$\phi$  :-11,96°

Terceiro par de atuadores:

$\bar{V}$  :22,9 volts

$\phi$  :-17,01°

Figura 6.70- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e com controle.

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

Na Tabela 6.28 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz e controlada por três pares de atuadores. Comparando esta tabela com a Tabela 6.15, verifica-se que o sistema tem os modos (1,1) e (2,1) controlados uma vez que houve redução das amplitudes destes modos. Porém, o modo (1,3) torna-se predominante na resposta, como ilustra a Figura 6.71, que mostra o campo de deslocamentos forçados do sistema controlado.

Tabela 6.28 - Amplitudes modais da placa controlada por três pares de atuadores  $\omega$  =140Hz, [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-20,9	-323,8	-12,4	-330,9	-24,9	-338,3
	2	-43,3	-349,1	-34,5	-352,5	-46,3	-359,3
	3	-22,0	-352,1	-37,7	-352,6	-45,2	-358,7
	4	-50,2	-665,7	-69,6	-664,3	-84,8	-669,6
	5	-39,0	-359,4	-41,3	-356,6	-48,9	-361,3

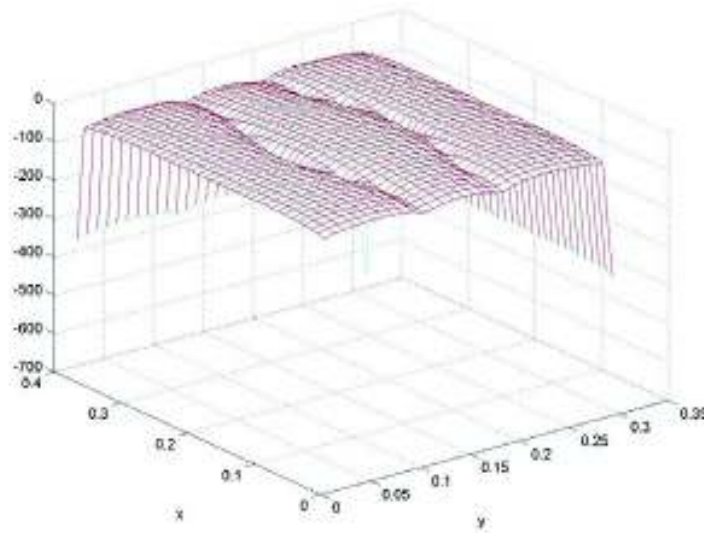


Figura 6.71 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.72 representa os padrões de diretividade de radiação obtidos nas condições sem controle e com controle. Observa-se mais uma vez uma expressiva redução do nível de pressão sonora radiada para o sistema com controle.

A redução total da potência sonora radiada com controle, utilizando três pares de atuadores, foi de 60,5 dB e as tensões aplicadas aos três pares de atuadores foram  $V_1 = (20,7 - 4,1i)$  volts,  $V_2 = (34,8 - 12,5i)$  volts e  $V_3 = (18,6 - 10,0i)$  volts ao primeiro, segundo e terceiro par de atuadores, respectivamente.

A Figura 6.73 apresenta as curvas das amplitudes de vibração forçada da placa antes e depois do controle, verificando-se uma ligeira atenuação das amplitudes.

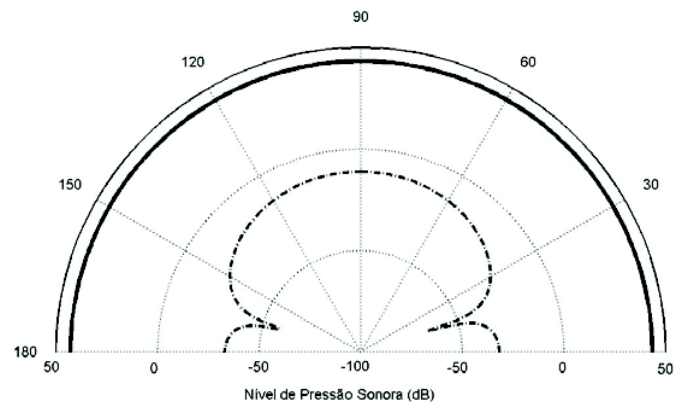


Figura 6.72- Diretividade de radiação da placa excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz.( \_\_\_\_ ):sem controle; ( \_.\_. ): com controle.

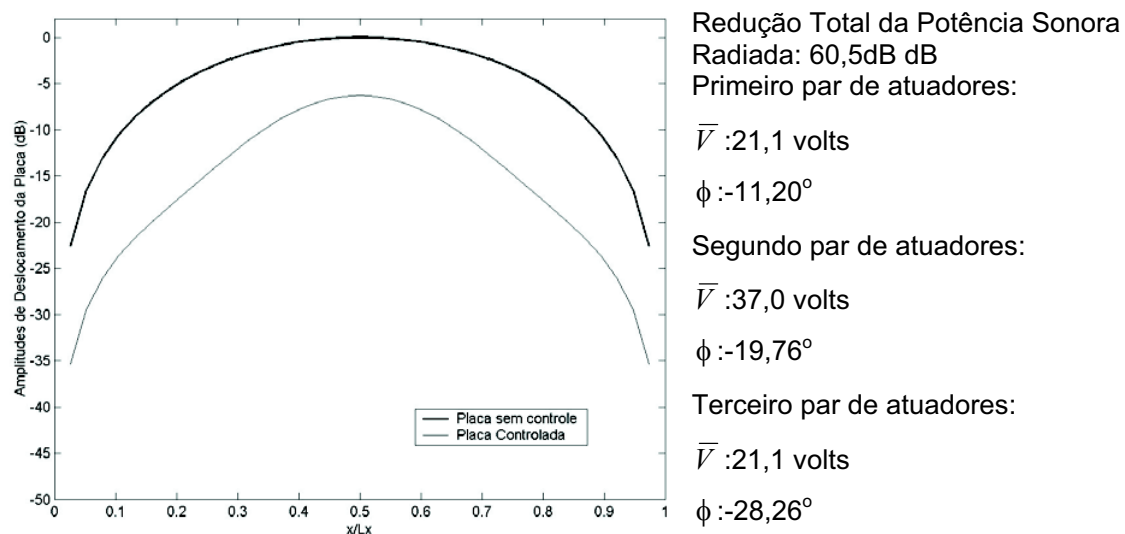


Figura 6.73- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e com controle.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Na Tabela 6.29 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. Através da comparação desta tabela com a Tabela 6.14 verifica-se que esta configuração é eficiente no controle dos modos (1,1) e (2,1), verificando-se contudo o aumento da participação de outros modos de ordem mais elevada. O modo predominante na resposta controlada é o modo (1,3), como pode ser visto na Figura 6.74, que representa o campo de deslocamentos forçados do sistema controlado.

Tabela 6.29 - Amplitudes modais da placa controlada por três pares de atuadores  $\omega$  =190Hz, [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-36,8	-336,1	-28,3	-347,3	-41,4	-354,8
	2	-55,9	-360,8	-47,2	-365,5	-59,4	-372,5
	3	-37,8	-370,1	-56,6	-371,1	-63,5	-377,3
	4	-62,6	-678,7	-82,3	-677,4	-97,6	-682,8
	5	-58,3	-377,9	-59,6	-375,2	-67,6	-379,8



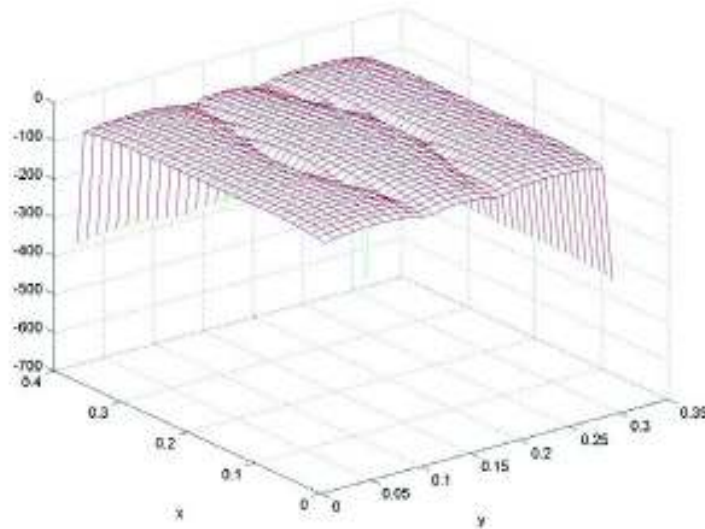


Figura 6.74 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.75 representa os padrões de diretividade de radiação obtidos nas condições sem controle e com controle. Verifica-se que existe atenuação global do nível de pressão sonora radiada no campo distante.

A redução total da potência sonora radiada do sistema com controle é de 57,1 dB, e as tensões aplicadas aos três pares de atuadores foi  $V_1 = (18,4 - 4,8i)$  volts,  $V_2 = (28,0 - 14,1i)$  volts e  $V_3 = (14,8 - 11,9i)$  volts.

A figura 6.76 apresenta uma comparação das amplitudes de vibração forçada da placa sem e com o controle ativo.

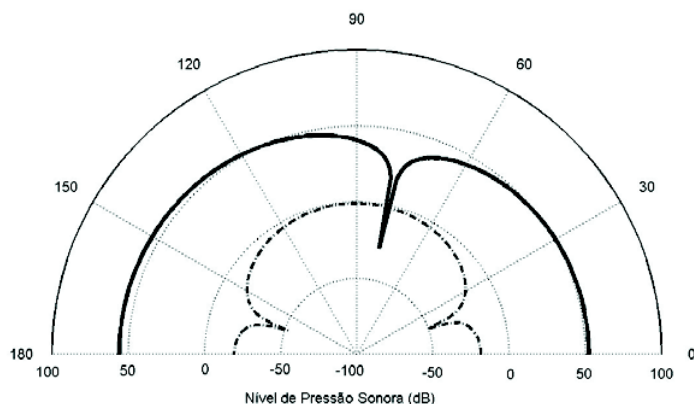


Figura 6.75- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( — ):sem controle; ( \_ \_ ): com controle

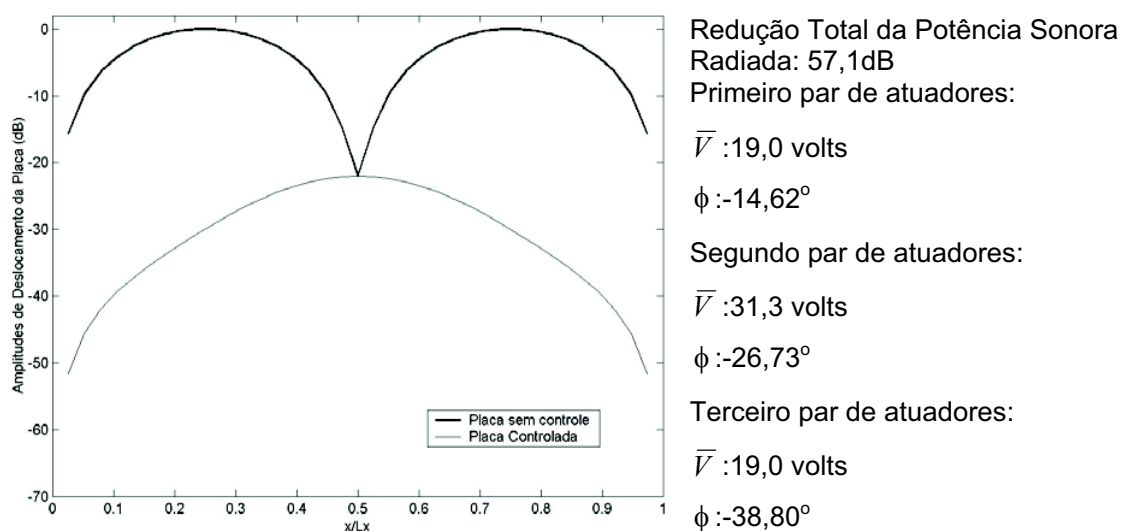


Figura 6.76 - Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 190Hz, sem controle e com controle.

#### 6.4.2.4- Controle ativo utilizando a quarta configuração.

Nesta configuração são utilizados quatro pares de atuadores piezoelétricos no controle, fixados na placa nas seguintes coordenadas:

- primeiro par de atuadores:  $x_1 = 0,075\text{m}$ ,  $x_2 = 0,115\text{m}$ ,  $y_1 = 0,12\text{m}$  e  $y_2 = 0,18\text{m}$ .

- segundo par de atuadores:  $x_1 = 0,170\text{m}$ ,  $x_2 = 0,210\text{m}$ ,  $y_1 = 0,195\text{m}$  e  $y_2 = 0,255\text{m}$ .
- terceiro par de atuadores:  $x_1 = 0,265\text{m}$ ,  $x_2 = 0,305\text{m}$ ,  $y_1 = 0,12\text{m}$  e  $y_2 = 0,18\text{m}$ .
- quarto par de atuadores:  $x_1 = 0,170\text{m}$ ,  $x_2 = 0,210\text{m}$ ,  $y_1 = 0,0450\text{m}$  e  $y_2 = 0,1050\text{m}$ .

Os parâmetros acústicos utilizados são os mesmos adotados na seção anterior. O sistema placa-atuadores encontra-se representado na Figura 6.77.

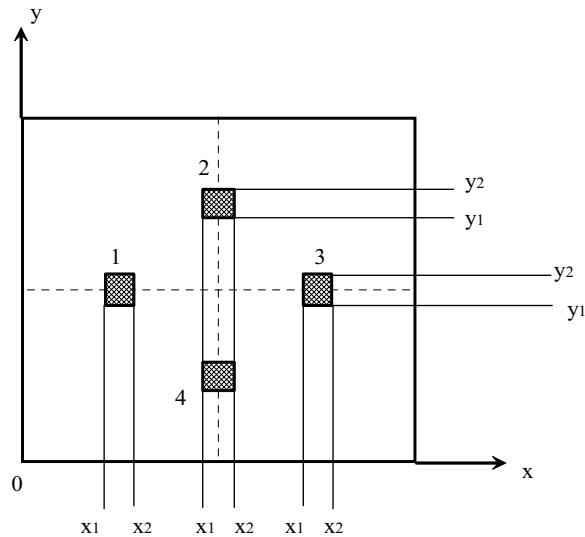


Figura 6.77- Quarta configuração do sistema placa e atuadores piezoelétricos.

#### • Freqüência de excitação de 85 Hz

Na Tabela 6.30 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de freqüência 85Hz e controlada por quatro pares de atuadores. Comparando esta tabela com a Tabela 6.13, verifica-se que os modos (1,1), (2,1) e (3,1) foram controlados, uma vez que tiveram suas amplitudes de vibração reduzidas. No entanto houve um crescimento na amplitude do modo (3,3) que se tornou predominante na resposta do sistema, como ilustra a Figura 6.78 que apresenta uma comparação das amplitudes de vibração forçada da placa sem e com o controle ativo. Observa-se uma pequena redução global das amplitudes de vibração forçada. A amplitude do modo (4,1) não é alterada devido ao posicionamento dos atuadores que se encontram sobre as linhas nodais deste modo.

Tabela 6.30 - Amplitudes modais da placa controlada quatro pares de atuadores  $\omega=85\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-61,3	-360,0	-56,1	-385,2	-73,4	-384,5
	2	-75,8	-382,2	-66,9	-384,7	-78,4	-391,5
	3	-69,6	-360,3	-44,6	-359,7	-53,9	-366,2
	4	-82,9	-679,2	-102,1	-674,9	-117,2	-680,3
	5	-63,3	-372,5	-50,1	-363,7	-56,9	-368,7

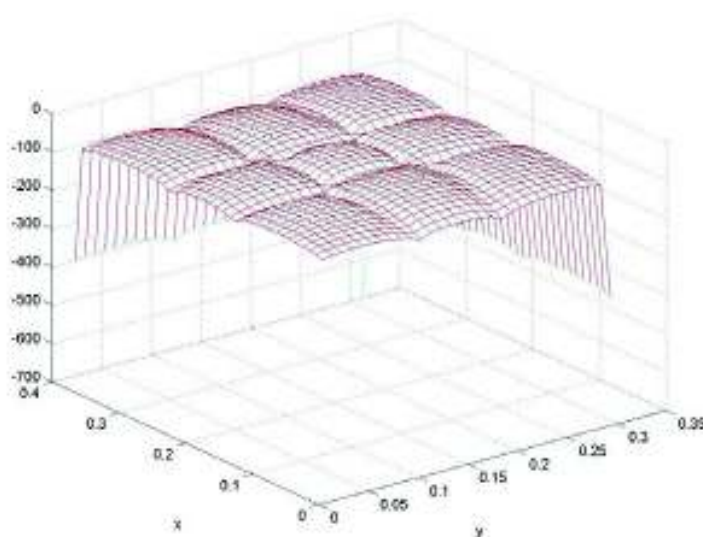


Figura 6.78 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlada por de atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.79 representa os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle. Verifica-se que existe uma redução do nível de pressão sonora radiada após a utilização do controle.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando quatro pares de atuadores foi de 107,1 dB, e a tensão aplicada ao primeiro par foi  $V_1 = (28,6 - 4,0i)$  volts, ao segundo par foi  $V_2 = (22,8 - 4,8i)$  volts, ao terceiro par foi  $V_3 = (27,7 - 7,9i)$  volts e ao quarto par foi  $V_4 = (22,8 - 4,8i)$  volts.

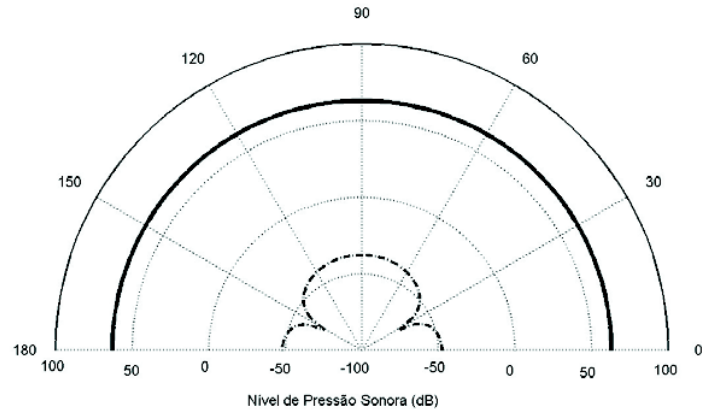


Figura 6.79 - Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( \_\_\_\_ ):sem controle; ( \_.\_. ):com controle.

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

Na Tabela 6.31 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz e controlada por quatro pares de atuadores. Comparando esta tabela com a Tabela 6.15 observa-se que assim como para a frequência de 85Hz, também para 140Hz esta configuração se mostrou eficiente no controle dos modos (1,1), (2,1) e (3,1). Houve um aumento na amplitude da resposta do modo (3,3) que se tornou predominante na resposta, como ilustra a Figura 6.80, que representa os deslocamentos forçados da placa com controle.

Tabela 6.31 - Amplitudes modais da placa controlada quatro pares de atuadores  $\omega=140\text{Hz}$ , [dB].

		<i>n</i>					
		1	2	3	4	5	6
<i>m</i>	1	-33,3	-325,9	-27,8	-356,7	-45,7	-355,3
	2	-43,3	-349,1	-34,5	-352,5	-46,3	-359,3
	3	-41,5	-337,9	-16,6	-331,7	-26,0	-337,7
	4	-50,2	-654,3	-69,6	-646,9	-84,81	-652,2
	5	-35,4	-356,3	-22,1	-335,8	-29,0	-340,3

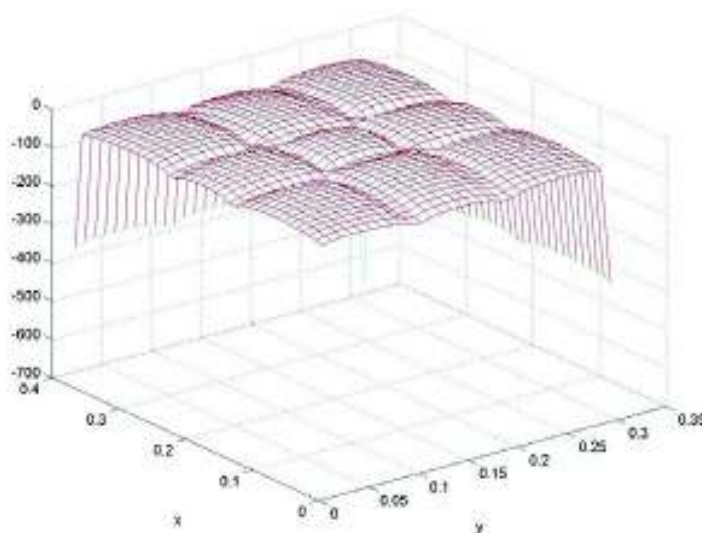


Figura 6.80 – Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.81 representa os padrões de diretividade de radiação para as condições sem controle e com controle. Verifica-se que existe uma grande redução do nível de pressão sonora radiada com a utilização do controle.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando quatro atuadores foi de 70,0 dB. A tensão aplicada ao primeiro atuador foi  $V_1 = (27,3 - 6,5i)$  volts,  $V_2 = (21,3 - 7,7i)$  volts ao segundo atuador,  $V_3 = (25,2 - 12,4i)$  volts ao terceiro atuador e de  $V_4 = (21,3 - 7,7i)$  volts ao quarto atuador.

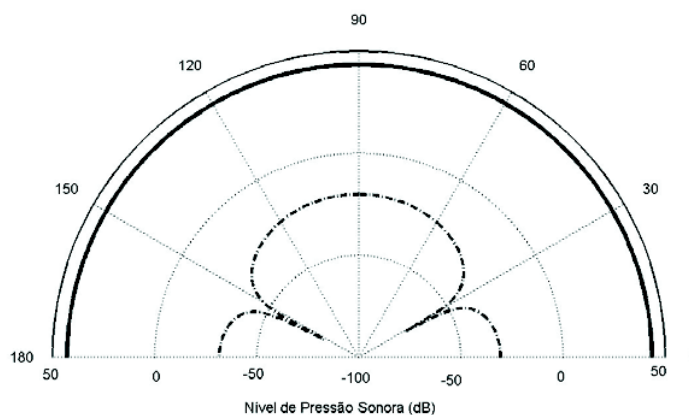


Figura 6.81 - Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. (\_\_\_):sem controle; (---): controlada.

• **Frequência de excitação de 190 Hz**

Na Tabela 6.32 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz e controlada por quatro pares de atuadores. Utilizando esta configuração é possível controlar os modos (1,1), (2,1) e (3,1). Porém o modo (4,1) não é controlado devido à localização dos atuadores. Ocorre também neste caso um aumento da amplitude do modo (3,3) que se torna predominante na resposta.

A Figura 6.82 apresenta os deslocamentos forçados residuais do sistema após o controle.

Tabela 6.32 - Amplitudes modais da placa controlada quatro pares de atuadores  $\omega=190\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-48,7	-335,2	-42,9	-371,5	-61,7	-377,67
	2	-55,9	-360,8	-47,2	-365,5	-59,4	-372,5
	3	-56,9	-352,6	-32,0	-347,3	-41,6	-352,8
	4	-62,6	-667,5	-82,3	-662,4	-97,6	-667,7
	5	-51,2	-365,6	-37,7	-351,4	-44,7	-355,9

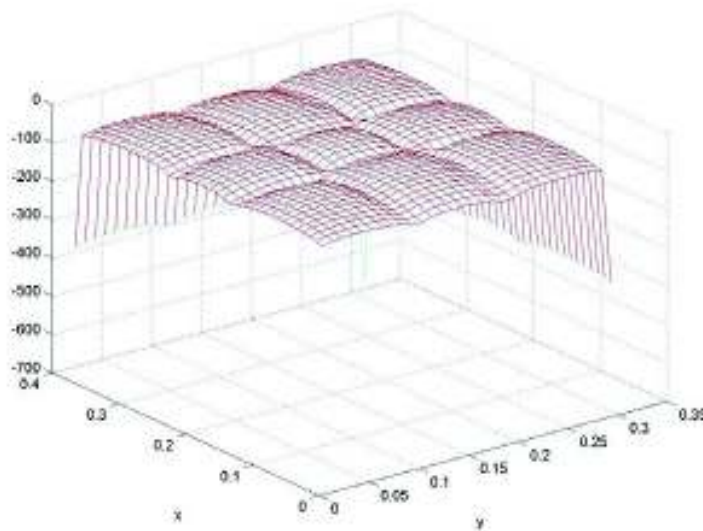


Figura 6.82 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlada por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.83 representa os padrões de diretividade de radiação para as condições sem controle e com controle. Observa-se que existe notável atenuação do nível de pressão sonora.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando quatro pares de atuadores foi de 66,2dB, e a tensão aplicada ao primeiro par foi  $V_1 = (25,6 - 8,4i)$  volts,  $V_2 = (19,5 - 9,8i)$  volts ao segundo,  $V_3 = (22,0 - 15,6i)$  volts ao terceiro e  $V_4 = (19,5 - 9,8i)$  volts ao quarto.

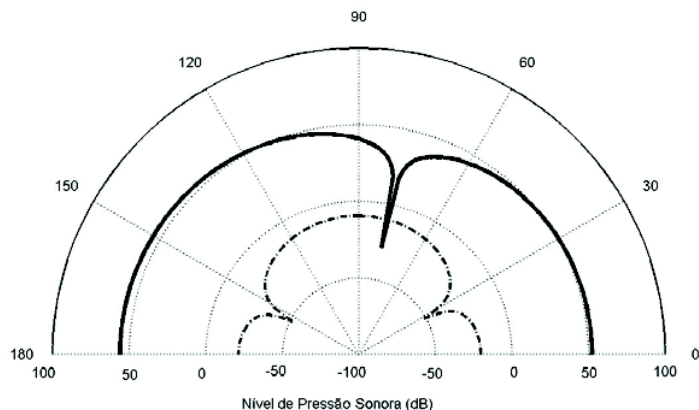


Figura 6.83- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz. ( — ):sem controle; ( \_ \_ ): com controle.

#### 6.4.2.5- Controle ativo utilizando a quinta configuração.

Nesta configuração são utilizados quatro pares de atuadores piezoelétricos no controle, fixados na placa nas seguintes coordenadas:

- primeiro par de atuadores:  $x_1 = 0,075\text{m}$ ,  $x_2 = 0,115\text{m}$ ,  $y_1 = 0,195\text{m}$  e  $y_2 = 0,255\text{m}$ .
- segundo par de atuadores:  $x_1 = 0,265\text{m}$ ,  $x_2 = 0,305\text{m}$ ,  $y_1 = 0,195\text{m}$  e  $y_2 = 0,255\text{m}$ .
- terceiro par de atuadores:  $x_1 = 0,265\text{m}$ ,  $x_2 = 0,305\text{m}$ ,  $y_1 = 0,045\text{m}$  e  $y_2 = 0,105\text{m}$ .
- quarto par de atuadores:  $x_1 = 0,075\text{m}$ ,  $x_2 = 0,115\text{m}$ ,  $y_1 = 0,045\text{m}$  e  $y_2 = 0,105\text{m}$ .

Os parâmetros acústicos utilizados são os mesmos daqueles empregados nos casos anteriores. O sistema placa-atuadores encontra-se representado na Figura 6.84.



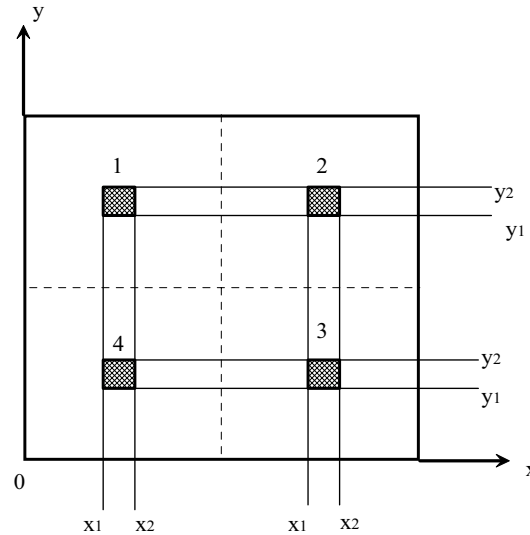


Figura 6.84 - Configuração V, placa com quatro pares de atuadores.

#### • Frequência de excitação de 85 Hz

Na Tabela 6.33 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz e controlada por quatro pares de atuadores. Comparando esta tabela com a Tabela 6.13 observa-se que os modos (1,1) e (2,1) foram controlados, uma vez que as amplitudes destes modos sofreram reduções significativas. Porém houve um acréscimo na participação dos modos (3,1) e (1,3) que se tornaram mais significativos na resposta. Esta configuração não se mostrou eficiente no controle do modo (4,1), o que pode ser justificado pelo posicionamento dos atuadores.

A Figura 6.85 apresenta os deslocamentos residuais da placa após o controle, observando-se que o padrão de deslocamentos obtido é de natureza multi modal, ficando aparente a contribuição preponderante dos modos (1,3) e (3,1).

Tabela 6.33 - Amplitudes modais da placa controlada quatro pares de atuadores  $\omega=85\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-44,2	-360,4	-41,3	-355,9	-51,9	-363,5
	2	-86,7	*	-69,9	-383,2	-78,8	-386,9
	3	-37,1	*	-44,9	-358,5	-53,9	-365,2
	4	-82,9	-691,5	-102,1	-672,2	-117,2	-679,9
	5	-45,2	-372,2	-50,0	-362,5	-57,1	-368,6

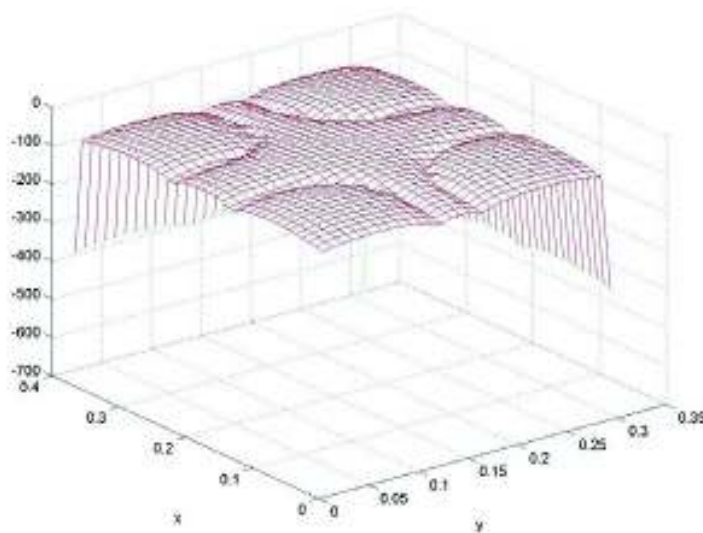


Figura 6.85 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 85Hz e controlados por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.86 representa os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle. Observa-se uma significativa redução da pressão sonora radiada em campo distante.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando quatro atuadores foi de 90,2 dB e a tensão aplicada ao primeiro par de atuadores foi  $V_1 = (36,0 - 6,4i)$  volts, ao segundo par de atuadores foi  $V_2 = (35,5 - 8,8i)$  volts, ao terceiro par de atuadores foi  $V_3 = (35,5 - 8,8i)$  volts e ao quarto par de atuadores foi  $V_4 = (36,0 - 6,4i)$  volts.

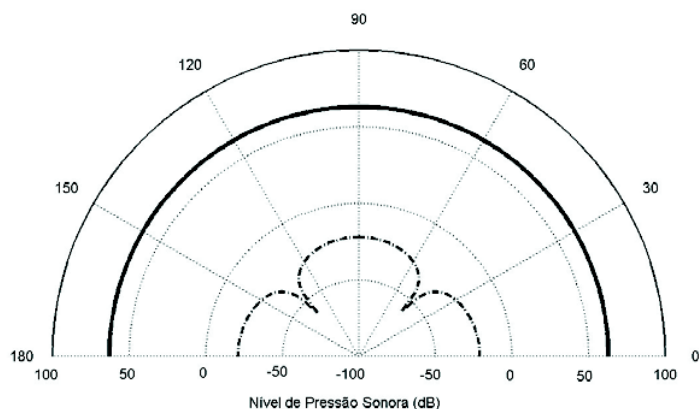


Figura 6.86- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz. ( — ):sem controle; ( - - ):com controle.

• **Frequência de excitação de 140 Hz**

Na Tabela 6.34 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz e controlada por quatro pares de atuadores.

Tabela 6.34 - Amplitudes modais da placa controlada quatro pares de atuadores  $\omega=140\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-13,4	*	-11,0	-325,9	-22,0	-334,2
	2	-53,7	*	-37,1	-350,6	-46,2	*
	3	-6,2	-338,3	-14,9	-328,6	-24,0	-335,8
	4	-50,2	-651,3	-69,6	-642,3	-84,8	-647,2
	5	-15,3	*	-20,1	-332,6	-27,2	-335,2

Para esta configuração os modos (1,1) e (2,1) foram controlados, uma vez que tiveram suas amplitudes reduzidas. Porém as amplitudes dos modos (3,1) e (1,3) foram aumentadas e estes modos tornaram-se predominantes na reposta. Assim como no caso anterior, a amplitude do modo (4,1) não sofreu alteração.

A Figura 6.87 apresenta os deslocamentos modais da placa após o controle.

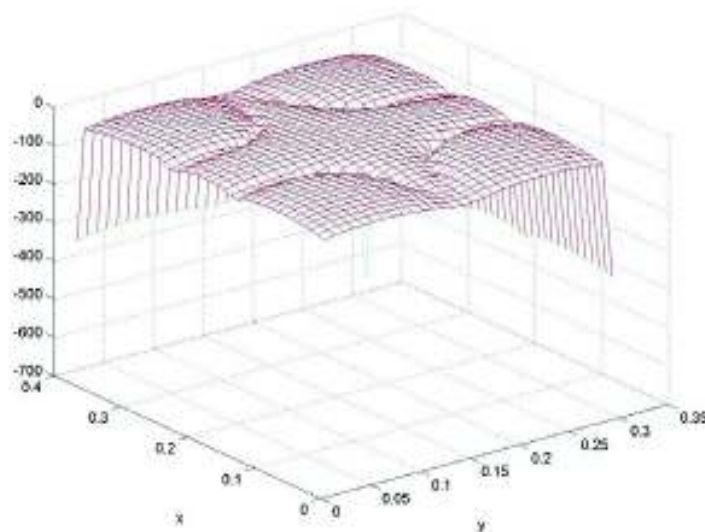


Figura 6.87 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 140Hz e controlada por quatro pares de atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.88 representa os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle. Verifica-se uma significativa redução dos níveis de pressão sonora radiados pela placa com controle.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando quatro pares de atuadores foi de 50,1 dB, e a tensão aplicada aos atuadores foi : $V_1 = (42,4 - 13,0i)$ volts,  $V_2 = (41,0 - 16,9i)$  volts,  $V_3 = (41,0 - 16,9i)$  volts e  $V_4 = (42,4 - 13,0i)$ volts.

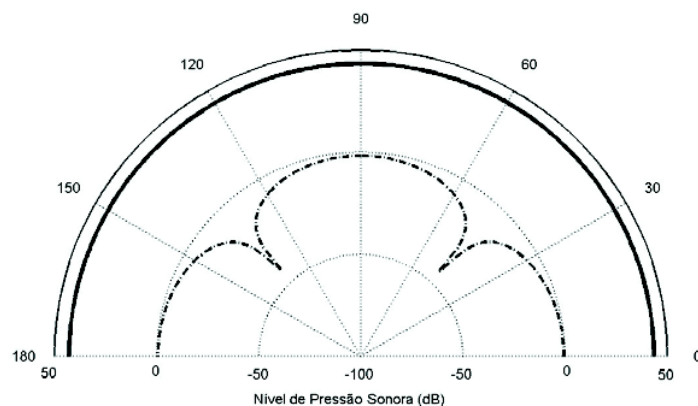


Figura 6.88- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( \_\_\_\_ ):sem controle; ( \_.\_. ):com controle.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Na Tabela 6.35 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz e controlada por quatro pares de atuadores. Verifica-se que esta configuração é eficiente para o controle do modo (2,1). Porém não atua sobre o modo (1,1) e ocasiona um aumento da participação dos modos (3,1), (1,3), (2,3) e (3,3) que têm suas amplitudes ampliadas.

A Figura 6.89 apresenta os deslocamentos residuais da placa após o controle.

Tabela 6.35 - Amplitudes modais da placa controlada por quatro pares de atuadores  $\omega = 190\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-23,3	-335,5	-21,4	-336,9	-33,2	-345,7
	2	-65,7	*	-49,2	-363,0	-58,7	-365,6
	3	-15,7	-346,6	-25,9	-339,7	-35,2	-344,9
	4	-62,6	*	-82,3	-653,5	-97,6	-659,0
	5	-26,4	-359,6	-31,3	-343,8	-38,4	-347,7

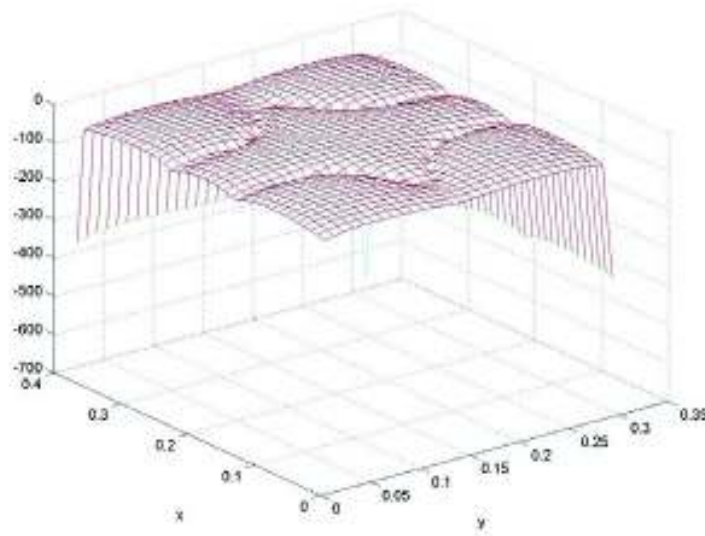


Figura 6.89 - Deslocamentos forçados normalizados da placa excitada por uma onda oblíqua incidente de frequência 190Hz e controlados por atuadores piezoelétricos.

A Figura 6.90 representa os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle utilizando quatro pares de atuadores piezoelétricos.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando quatro pares de atuadores foi de 40,2 dB, e a tensão aplicada aos atuadores foi de  $V_1 = (64,8 - 29,5i)$  volts,  $V_2 = (62,2 - 34,6i)$  volts,  $V_3 = (62,2 - 34,6i)$  volts e  $V_4 = (64,7 - 29,5i)$  volts.

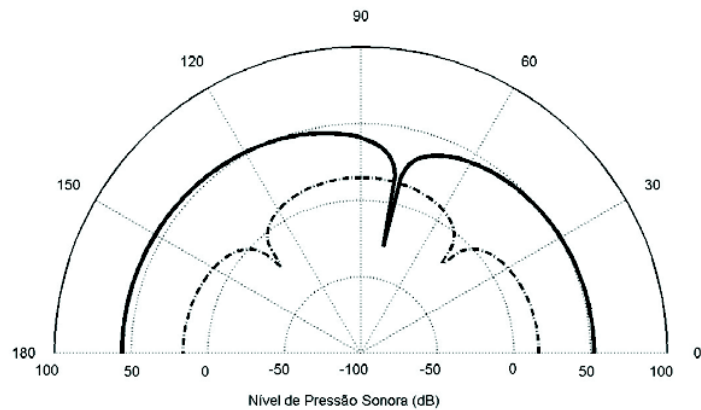


Figura 6.90- Diretividade de radiação da placa, excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz. ( \_\_\_\_ ):sem controle; ( \_.\_ ):com controle.

### 6.4.3-Análise comparativa dos resultados obtidos nas diferentes configurações

#### • Frequência de excitação de 85 Hz

A Figura 6.91 ilustra os padrões de deslocamentos da placa excitada em 85Hz sem controle e controlada por diferentes configurações, já descritas em seções anteriores.

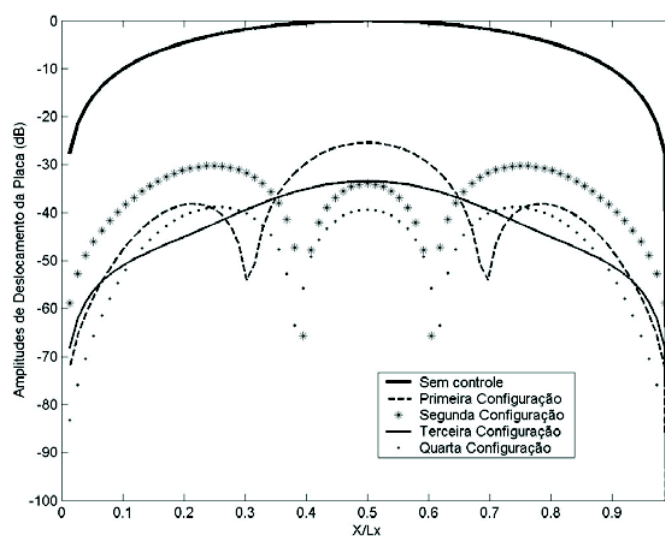


Figura 6.91 – Comparação dos padrões de deslocamentos obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 85Hz.

A Figura 6.92 ilustra os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle utilizando diferentes configurações.

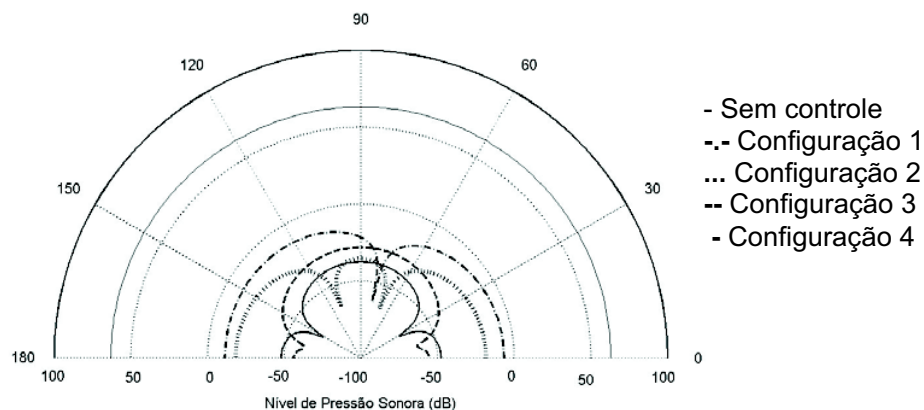


Figura 6.92 – Comparação dos padrões de diretividade de radiação obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 85Hz.

A Tabela 6.36 permite comparar as perdas de transmissão e as amplitudes e fases da tensão aplicada em cada par de atuadores, para as diferentes configurações estudadas. Verifica-se que existe uma tendência de aumento da perda de transmissão à medida que é aumentado o número de atuadores.

Tabela 6.36 - Análise comparativa dos resultados obtidos utilizando-se as diferentes configurações já estudadas.

	Perda de Transmissão (dB)		$\bar{V}$ (Volts)	$\phi$ (Grau)
1ªConfiguração	76,2	Atuador 1	74,1	-11,99
2ªConfiguração	87,5	Atuador 1	52,1	-9,84
		Atuador 2	52,1	-14,12
3ªConfiguração	97,5	Atuador 1	22,9	-7,00
		Atuador 2	41,5	-11,96
		Atuador 3	22,9	-17,01
4ªConfiguração	107,1	Atuador 1	28,9	-7,96
		Atuador 2	23,3	-11,89
		Atuador 3	28,8	-15,92
		Atuador 4	23,3	-11,89

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

A Figura 6.93 ilustra os padrões de deslocamentos da placa excitada à frequência de 140 Hz sem controle e controlada pelas diferentes configurações.

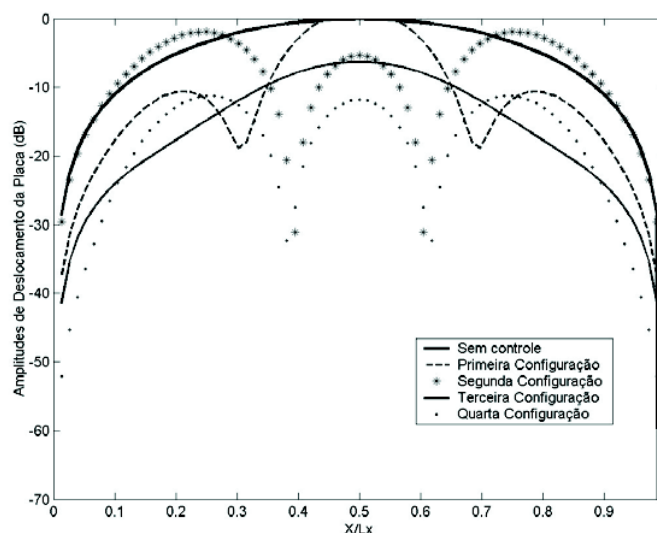


Figura 6.93 – Comparação dos padrões de deslocamento obtidos utilizando diferentes configurações de controle, para frequência de excitação 140Hz.

A Figura 6.94 ilustra os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle utilizando diferentes configurações.

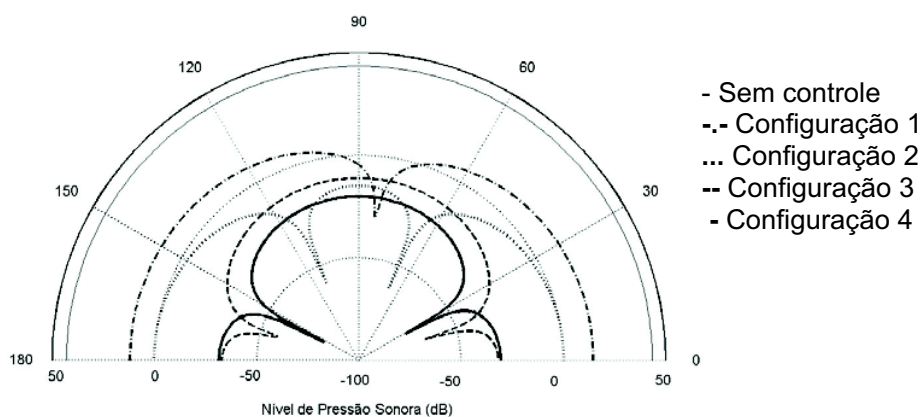


Figura 6.94 – Comparação dos padrões de diretividade de radiação da placa obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 140Hz.

A Tabela 6.37 apresenta as perdas de transmissão e as amplitudes e fases da tensão aplicada em cada par de atuadores, para as diferentes configurações estudadas. Também para placa excitada em 140Hz observa-se que existe uma tendência de aumento da perda de transmissão à medida que é aumentado o número de atuadores.



Tabela 6.37 - Análise comparativa dos resultados obtidos utilizando-se as diferentes configurações já estudadas.

	Perda de Transmissão (dB)		$\bar{V}$ (Volts)	$\phi$ (Grau)
1ªConfiguração	34,5	Atuador 1	61,2	-19,77
2ªConfiguração	49,2	Atuador 1	52,8	-16,27
		Atuador 2	52,7	-23,11
3ªConfiguração	60,5	Atuador 1	21,1	-11,20
		Atuador 2	37,0	-19,76
		Atuador 3	21,1	-28,26
4ªConfiguração	70,0	Atuador 1	28,1	-13,39
		Atuador 2	22,6	-19,88
		Atuador 3	28,1	-26,20
		Atuador 4	22,6	-19,87

• **Frequência de excitação de 190 Hz**

A Figura 6.95 ilustra os padrões de deslocamentos da placa excitada à frequência de 190Hz, sem controle e controlada por diferentes configurações, já descritas em seções anteriores.

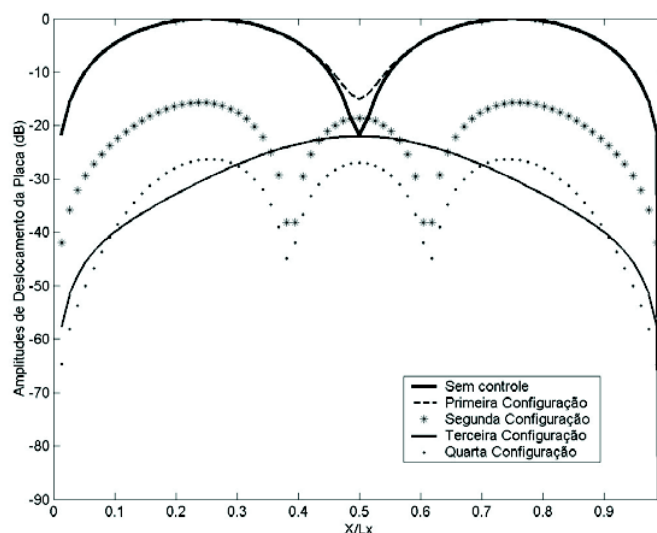


Figura 6.95 – Comparação dos padrões de deslocamento obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 190Hz.

A Figura 6.96 ilustra os padrões de diretividade de radiação nas condições sem controle e com controle utilizando diferentes configurações.

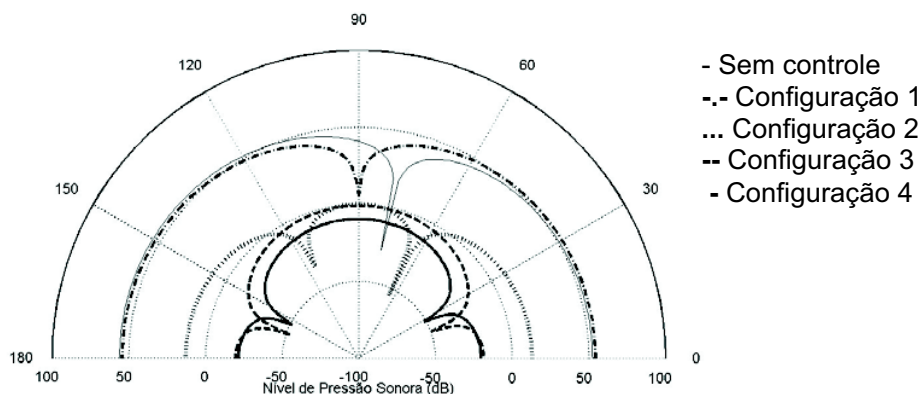


Figura 6.96 – Comparação dos padrões de diretividade de radiação da placa obtidos utilizando diferentes configurações de controle, frequência de excitação 190Hz.

A Tabela 6.38 apresenta os valores da perda de transmissão, da amplitude e da fase da tensão aplicada em cada atuador, para as diferentes configurações estudadas. Assim como os casos anteriores, também para a placa excitada em 190Hz observa-se que existe uma tendência de aumento da perda de transmissão com o aumento do número de atuadores.

Tabela 6.38 - Análise comparativa dos resultados obtidos utilizando-se as diferentes configurações já estudadas.

	Perda de Transmissão (dB)		$\bar{V}$ (Volts)	$\phi$ (Grau)
1ªConfiguração	0,5	Atuador 1	46,9	-26,84
2ªConfiguração	43,5	Atuador 1	56,2	-22,73
		Atuador 2	56,1	-30,86
3ªConfiguração	57,1	Atuador 1	19,0	-14,62
		Atuador 2	31,3	-26,73
		Atuador 3	19,0	-38,80
4ªConfiguração	66,2	Atuador 1	26,94	-18,16
		Atuador 2	21,83	-26,68
		Atuador 3	26,97	-35,34
		Atuador 4	21,82	-26,68

#### 6.4.4- Utilização de dois atuadores controlados pelo mesma tensão elétrica

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos utilizando o mesmo sinal de controle para dois pares de atuadores piezoelétricos fixados à placa, nas posições ilustradas na Figura 6.58.

O interesse no estudo desta configuração justifica-se pelo fato de que neste sistema de controle um dos equipamentos mais caros é a fonte de controle (amplificador de voltagem). Assim, a possibilidade de se utilizar mais de um piezoelétrico guiado por uma mesma fonte de controle reduziria os custos.

Também estes testes foram realizados considerando três frequências de excitação distintas: 85Hz, 190 Hz e 140Hz. Os dois primeiros valores de frequência são próximos aos valores das frequências naturais dos modos (1,1) e (2,1) e o terceiro é um valor intermediário entre estas. Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

##### • Frequência de excitação de 85 Hz

Na Tabela 6.39 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente com frequência de 85Hz e controlada por dois pares de atuadores guiados pelo mesmo sinal de controle. Comparando a Tabela 6.39 com a Tabela

6.13, verifica-se que houve uma redução da ordem de 60 dB na amplitude do modo (1,1) que deixou de ser dominante na resposta da placa controlada. Os modos com  $m$  e  $n$  ímpares tiveram suas amplitudes modais aumentadas em relação ao sistema sem controle. Nos demais modos não foi observada nenhuma alteração na resposta.

Apesar de apenas o modo (1,1) apresentar redução nas amplitudes modais do sistema controlado, houve uma redução nas amplitudes de vibração forçada do sistema, como mostra a Figura 6.97, que permite comparar as distribuições de deslocamento da placa ao longo de seu plano médio horizontal, sem e com controle.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando dois atuadores guiados pelo mesmo sinal foi de 76,06 dB, e a tensão ótima aplicada em cada atuador foi  $V = (50,9 - 10,8i)$  volts.

Tabela 6.39 - Amplitudes modais da placa controlada por dois pares de atuadores que obedecem ao mesmo sinal de controle.  $\omega = 85\text{Hz}$ , [dB]

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-67,6	-353,3	-40,2	-358,3	-52,2	-365,6
	2	-55,2	-657,0	-87,3	-659,7	-107,0	-666,4
	3	-37,1	-360,8	-44,7	-360,9	-53,9	-367,0
	4	-82,9	-676,3	-102,2	-674,7	-117,6	-680,0
	5	-45,2	-367,8	-50,1	-364,9	-56,9	-369,5

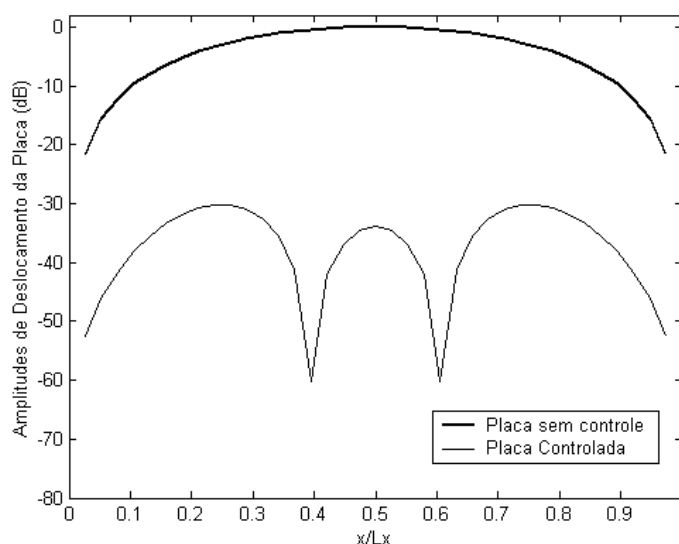


Figura 6.97-Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 85Hz, sem controle e controlada por dois piezoelétricos guiados pelo mesmo sinal.

• **Frequência de excitação de 140 Hz**

Na Tabela 6.40 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz e controlada por dois pares de atuadores guiados pelo mesmo sinal de controle. Comparando esta tabela com a Tabela 6.15, verifica-se que houve uma redução na participação do modo (1,1). Entretanto ocorreu um aumento significativo da participação do modo (3,1), que se tornou predominante na resposta. Assim como ocorreu para a frequência de excitação de 85Hz, também para este caso os demais modos com  $m$  e  $n$  ímpares tiveram suas participações aumentadas e não houve alteração na amplitude de resposta forçada dos modos com  $m$  ou  $n$  par.

A Figura 6.98, apresenta uma comparação as distribuições de deslocamento da placa ao longo de seu plano médio horizontal, nas condições sem e com controle.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando dois atuadores guiados pelo mesmo sinal foi de 34,42 dB, e a tensão aplicada em cada atuador foi  $V = (49,6 - 17,8i)$  volts.

Tabela 6.40 Amplitudes modais da placa controlada por dois pares de atuadores que obedecem ao mesmo sinal de controle.  $\omega = 140\text{Hz}$ , [dB].

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-34,1	-322,8	-11,5	-329,9	-23,8	-337,3
	2	-17,8	-627,9	-54,5	-631,0	-74,5	-638,4
	3	-7,8	-332,1	-16,2	-332,6	-25,6	-338,7
	4	-50,2	-647,8	-69,6	-646,4	-84,8	-651,7
	5	-16,8	-339,4	-21,7	-336,6	-28,7	-341,2

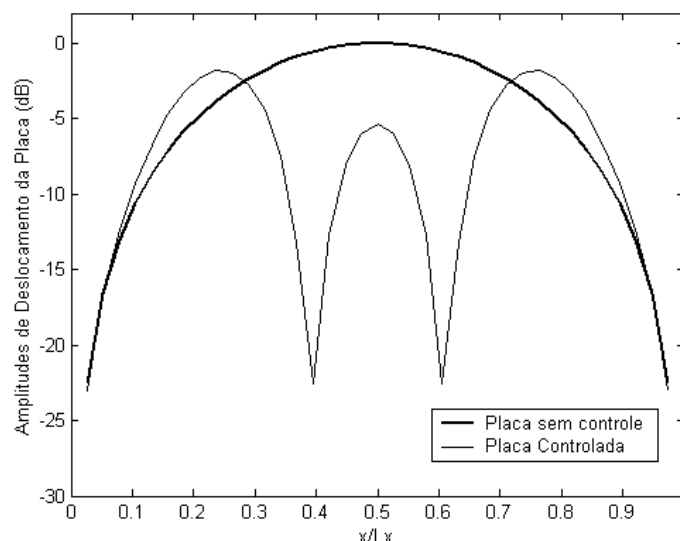


Figura 6.98- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e controlada por dois pares de atuadores piezoelétricos guiados pelo mesmo sinal.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Na Tabela 6.41 são apresentadas as amplitudes normalizadas de vibração da placa quando excitada por uma onda incidente de frequência 190Hz e controlada por dois pares de atuadores guiados pelo mesmo sinal de controle. Através da comparação das Tabelas 6.14 e 6.41 constata-se que não houve alteração das amplitudes do modo (2,1), que continua a predominar na resposta do sistema controlado. O modo (1,1) sofreu uma redução em amplitude na resposta forçada do sistema com controle. Os modos com  $m$  e  $n$  ímpares tiveram suas participações aumentadas e não houve alteração na amplitude de resposta forçada dos modos com  $m$  ou  $n$  par.

A Figura 6.99, apresenta uma comparação as distribuições de deslocamento da placa ao longo de seu plano médio horizontal, sem e com controle.

A redução total da potência sonora radiada após o controle utilizando dois pares de atuadores guiados pelo mesmo sinal foi de 0,51dB, e a tensão aplicada em cada atuador foi  $V=(49,9 - 25,2i)$ volts.

Tabela 6.41- Amplitudes modais da placa, [dB] controlada por dois pares de atuadores que obedecem ao mesmo sinal de controle.  $\omega = 190\text{Hz}$ .

		$n$					
		1	2	3	4	5	6
$m$	1	-43,5	-333,3	-25,7	-344,5	-38,6	-352,56
	2	0,0	-641,9	-66,9	-645,7	-87,2	-652,6
	3	-21,1	-346,8	-30,8	-347,8	-40,4	-353,4
	4	-62,6	-662,8	-82,3	-661,6	-97,6	-666,4
	5	-31,4	-354,6	-36,4	-351,8	-43,9	-356,5

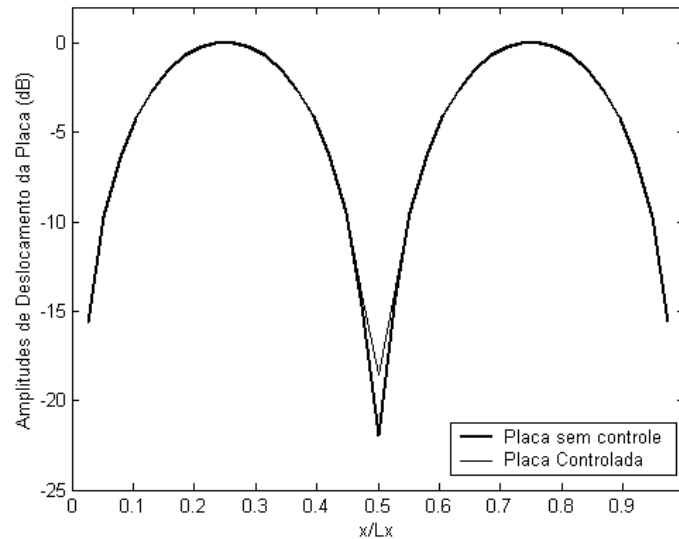


Figura 6.99- Amplitudes de deslocamentos da placa excitada em 140Hz, sem controle e controlada por dois pares de atuadores piezoelétricos guiados pelo mesmo sinal.

Comparando os resultados de redução de potência sonora radiada, obtidos utilizando-se dois atuadores guiados pelo mesmo sinal, com os resultados obtidos utilizando-se apenas um atuador, observa-se que o emprego de dois atuadores comandados pelo mesmo sinal não conduziu a nenhuma redução adicional da potência sonora total radiada, em relação ao uso de apenas um atuador.

## Capítulo VII

### Otimização do Posicionamento dos Atuadores Piezoelétricos

Nos testes numéricos apresentados no capítulo anterior os atuadores foram fixados à placa em posições escolhidas arbitrariamente. Os resultados obtidos indicam que o posicionamento dos elementos piezoelétricos é um parâmetro de fundamental importância na redução da potência sonora total radiada. Desta forma, a obtenção da máxima atenuação da potência sonora radiada está condicionada ao posicionamento ótimo dos atuadores piezoelétricos na placa.

Assim sendo, propõe-se e avalia-se, neste capítulo um procedimento de otimização do posicionamento ótimo dos atuadores piezoelétricos na placa utilizando os chamados Algoritmos Genéticos (AGs). A escolha desta técnica específica foi baseada nos fatos de os AGs, apresentam importantes vantagens em relação aos métodos tradicionais de otimização, conforme será evidenciado a seguir.

#### 7.1 – Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos são métodos de busca aleatória e otimização baseados na evolução genética de organismos biológicos. Esta técnica foi criada por Holland na década de 60 e largamente estudada por Goldberg (1989) e Mitchell (1996).

Os AGs operam sobre uma população de indivíduos gerada aleatoriamente sobre o espaço de busca e geralmente representada por cadeias binárias. Cada indivíduo é considerado uma possível solução para o problema e a ele é atribuído um índice de aptidão, quantificado pelo valor da função objetivo a ele associado.

Como nos organismos biológicos, nos Algoritmos Genéticos a população de indivíduos passa por um processo de evolução e nesta etapa é dada maior probabilidade de reprodução aos indivíduos melhor adaptados. A evolução é feita através de três operadores fundamentais, realizados aleatoriamente.

O primeiro operador é a *seleção*. Nesta etapa são escolhidos os melhores indivíduos para reprodução, em quantidades proporcionais ao seu índice de aptidão.



O segundo operador consiste no *cruzamento* dos indivíduos selecionados, nesta etapa do processo ocorre troca de material genético entre os indivíduos envolvidos.

O terceiro operador é a *mutação* de alguns indivíduos da população, ocorrendo a modificação do conteúdo genético destes indivíduos.

A principal característica dos AGs é a de que eles operam simultaneamente com um conjunto de pontos do espaço de busca, e não com um único ponto, como é o caso dos métodos convencionais de otimização. Além disso, a aplicabilidade dos AGs não é limitada pela necessidade de computar os gradientes e pela existência de descontinuidades na função objetivo, uma vez que são requeridos apenas os valores da função objetivo, avaliados para cada indivíduo da população. Dadas as suas características, os Algoritmos Genéticos apresentam geralmente boa robustez a multimodalidade (existência de mínimos locais da função objetivo) e à presença de incertezas (ruído experimental) que podem intervir na função objetivo. (Silva, 1999)

## 7.2 – Posicionamento ótimo dos atuadores piezoelétricos.

Para a escolha do posicionamento ótimo dos elemento piezoelétricos foram adotadas como variáveis de projeto as posições dos centros das pastilhas piezoelétricas, que foram relacionadas com as coordenadas  $x1$ ,  $x2$ ,  $y1$  e  $y2$  figurando na equação (3.73), fixando-se as dimensões dos atuadores em 0,04 x 0,06 m. Os limites impostos às variáveis de projeto (restrições laterais) correspondem às dimensões da placa nas direções  $x$  e  $y$ .

A função objetivo adotada corresponde à perda de transmissão em campo distante.

A placa apresenta as propriedades físicas e geométricas descritas na Tabela 6.1.

As cerâmicas piezoelétricas utilizadas apresentam as propriedades descritas na Tabela 6.3.

Considerou-se a excitação por uma onda harmônica plana com as seguintes características:

- ângulos de incidência  $\phi_i = 0^\circ$  e  $\theta_i = 45^\circ$ ;
- amplitude da onda  $P_i = 10 \text{ N/m}^2$ ;
- frequências de excitação: 85Hz, 140Hz e 190 Hz.

A seguir apresentar-se-ão os resultados de otimização obtidos através da utilização dos AGs, para diferentes números de atuadores no controle.

### 7.2.1 – Otimização do controle utilizando-se um par de atuadores piezoelétricos.

#### • Frequência de excitação de 85 Hz

Para a placa excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz e controlada pela ativação de um par de atuadores, o posicionamento ótimo dos atuadores na placa obtido foi:  $x_c=0,1899$  m e  $y_c=0,1499$  m. Esta posição corresponde ao centro da placa, como representa a Figura 7.1.

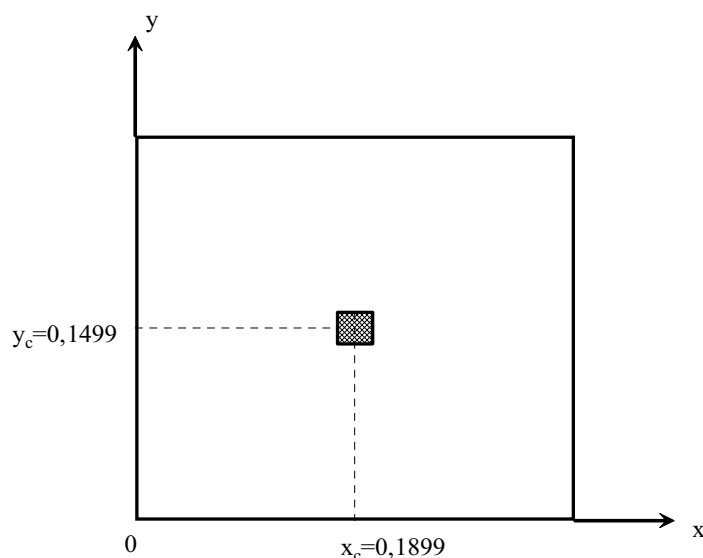


Figura 7.1 – Esquema representativo do posicionamento ótimo do atuador, com a placa excitada em 85Hz.

A redução da potência sonora total radiada foi de 76,2 dB aplicando-se ao piezoelétrico a voltagem ótima de  $V=(72,5 -15,4i)$  volts. Neste caso verifica-se que a escolha arbitrária, descrita na seção 6.4.2.1, coincide com o ótimo encontrado pelo G.A

Este resultado foi obtido com uma população de 10 indivíduos e 50 gerações. A evolução desta população ao curso das gerações encontra-se representada na Figura 7.2, que apresenta as curvas da aptidão média da população, bem como a do melhor indivíduo.

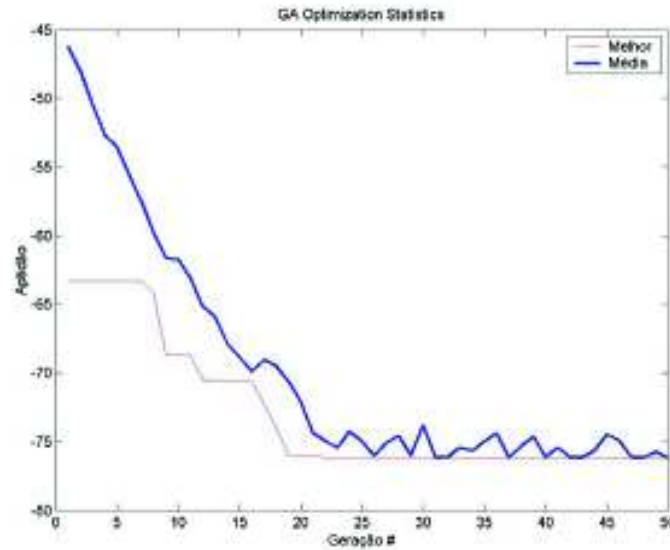


Figura 7.2 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85 Hz.

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

Para a placa excitada por uma onda incidente de frequência 140Hz e controlada pela ativação de um par de atuadores, o posicionamento ótimo dos atuadores na placa obtido foi:  $x_c=0,19$  m e  $y_c= 0,15$  m. Esta posição, que corresponde aos atuadores posicionados no centro da placa, encontra-se representada na Figura 7.1. A redução total da potência sonora radiada total obtida foi de 34,5 dB, aplicando-se aos piezoelétricos a voltagem complexa ótima  $V= (57,6 -20,7i)$  volts.

A Figura 7.3 apresenta a aptidão da média da população, bem como a do melhor indivíduo, ao longo das gerações.

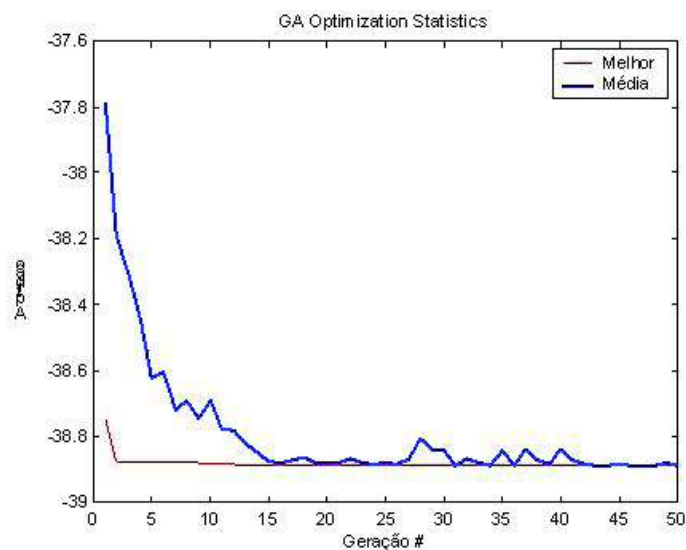


Figura 7.3 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 140Hz.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Para esta frequência de excitação o posicionamento ótimo obtido foi:  $x_c=0,3475$  m e  $y_c= 0.1500$  m, como representa a Figura 7.4. A redução total da potência sonora radiada total obtida foi de 9,49 dB, aplicando-se aos piezoelétricos a voltagem complexa ótima  $V= (-7.0797 -14.0215i)$  volts.

A Figura 7.5 apresenta a aptidão da média da população, bem como a do melhor indivíduo, ao longo das gerações.

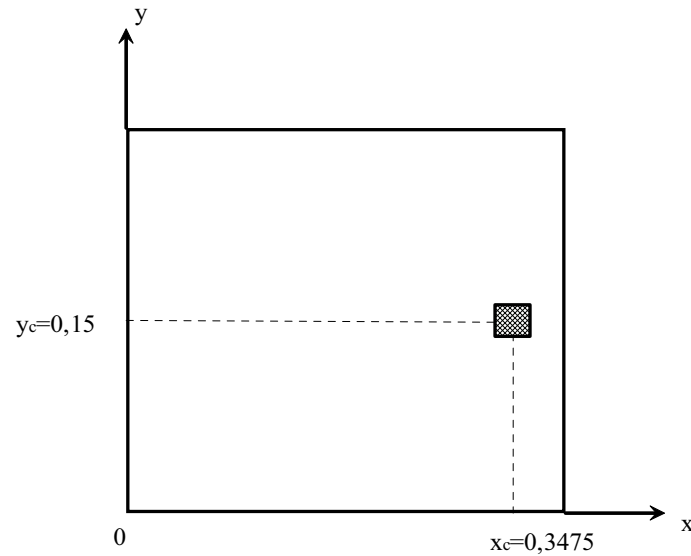


Figura 7.4 – Esquema representativo do posicionamento ótimo do atuador, com a placa excitada em 190Hz.

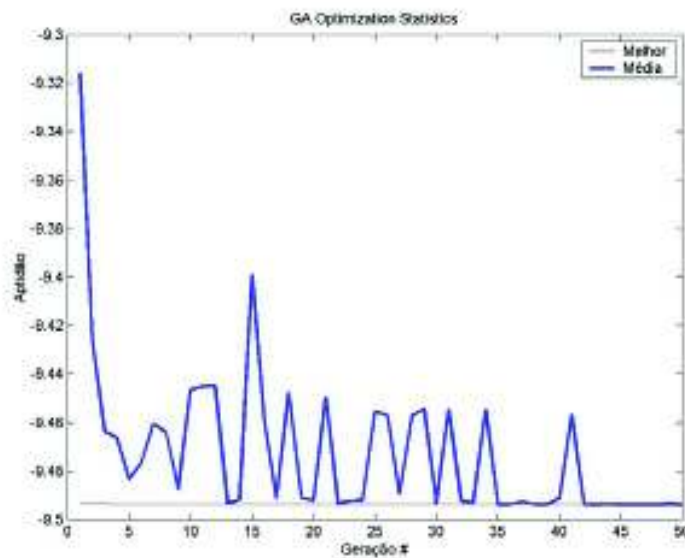


Figura 7.5 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 190Hz.

### 7.2.2 – Otimização do controle utilizando dois pares de atuadores piezoelétricos

Devido à maior complexidade do problema, para otimizar a posição de dois atuadores foi necessário aumentar o número de indivíduos e de gerações para que a convergência do

processo fosse atingida. Assim, para a otimização do posicionamento de três pares de atuadores na placa foram utilizados 100 indivíduos, evoluindo durante 100 gerações, considerando que 90% da população sofreu cruzamento e apenas 9% da população sofreu mutação.

#### • Frequência de excitação de 85 Hz

Os perfis de evolução da média e do melhor indivíduo para a placa excitada por uma onda incidente de frequência 85Hz e controlada pela ativação de dois pares de atuadores, encontram-se representados na Figura 7.6. O posicionamento ótimo dos atuadores na placa obtido foi:

- Atuador 1:  $x_c = 0,04\text{m}$  e  $y_c = 0,15\text{m}$
- Atuador 2:  $x_c = 0,22\text{m}$  e  $y_c = 0,15\text{m}$

Esta posição encontra-se representada na Figura 7.7. A redução total ótima da potência sonora radiada total obtida foi de 96,64 dB.

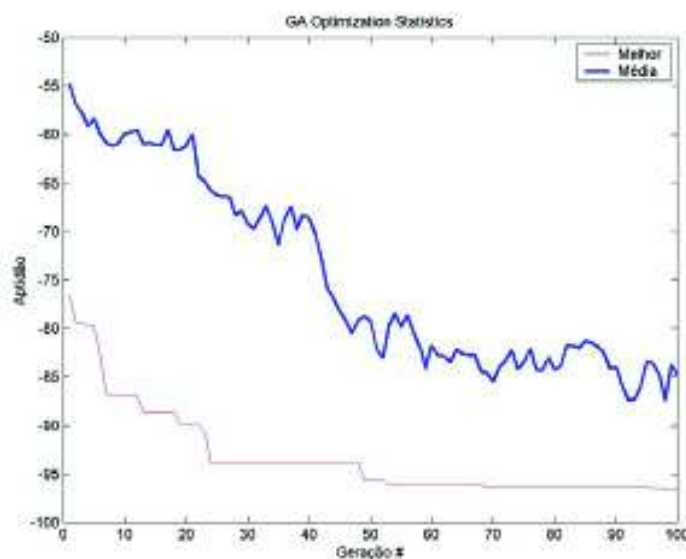


Figura 7.6 – Aptidão da média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85Hz.

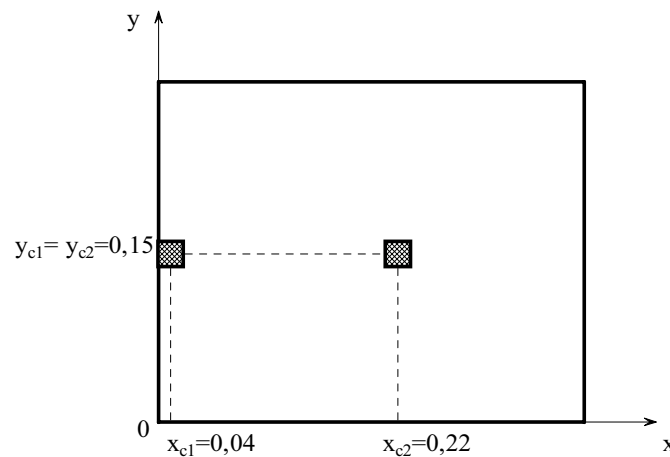


Figura 7.7– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 85Hz.

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

Os perfis de evolução da média e do melhor indivíduo encontram-se representados na Figura 7.8. Verifica-se que mesmo com um elevado número de indivíduos e gerações, o desvio padrão entre a média e o melhor indivíduo é grande. Entretanto, observa-se a convergência do melhor indivíduo, que determina a seguinte posição para o centro das pastilhas piezoelétricas:

- Atuador 1:  $x_c = 0,13\text{m}$  e  $y_c = 0,15\text{m}$
- Atuador 2:  $x_c = 0,27\text{m}$  e  $y_c = 0,15\text{m}$

A Figura 7.9 ilustra os atuadores piezoelétricos fixados à placa na posição ótima. Para esta disposição dos atuadores, a redução total da potência sonora radiada total obtida foi de 60,50 dB.

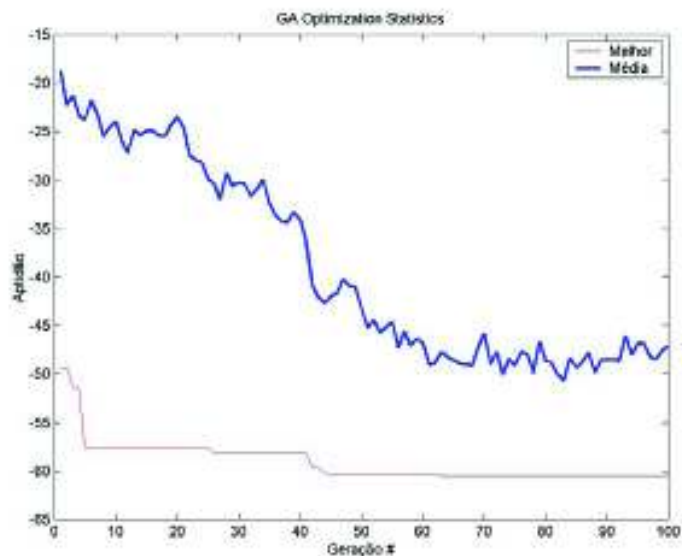


Figura 7.8– Aptidão da média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 140Hz.

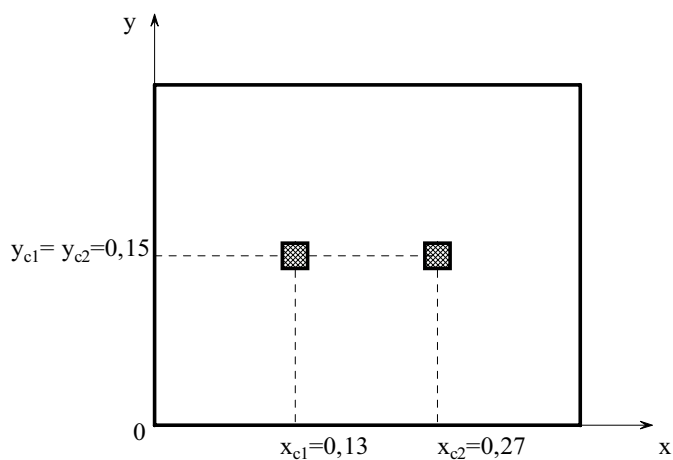


Figura 7.9– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 140Hz.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Também para este caso foi utilizada a população com 100 indivíduos ao longo de 100 gerações. As curvas representativas da evolução da aptidão da média e do melhor indivíduo encontram-se apresentados na Figura 7.10. As posições ótimas obtidas para o melhor indivíduo foram dadas por:

- Atuador 1:  $x_c = 0,12\text{m}$  e  $y_c = 0,15\text{m}$



➤ Atuador 2:  $x_c = 0,25\text{m}$  e  $y_c = 0,15\text{m}$

A Figura 7.11 representa os atuadores piezoelétricos fixados à placa na posição ótima. Para este posicionamento dos atuadores, a redução total da potência sonora radiada total obtida foi de 57,17 dB.

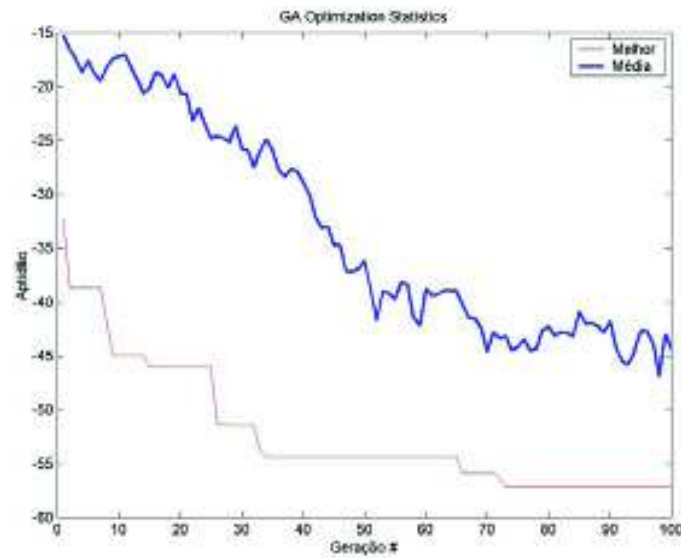


Figura 7.10 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 190Hz.

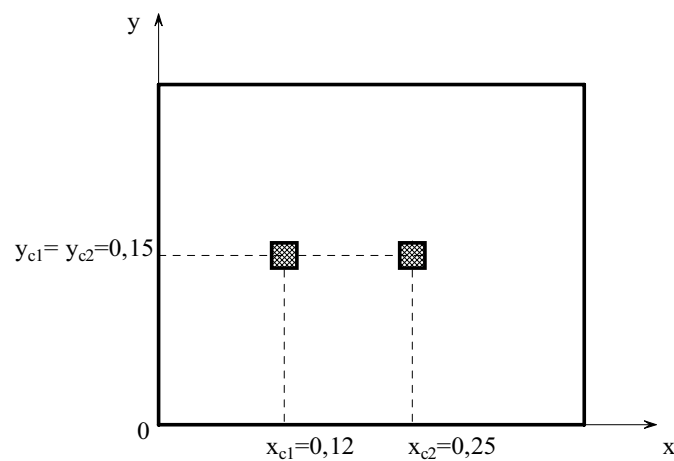


Figura 7.11 – Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 190Hz.

### 7.2.3 – Otimização do controle utilizando três pares de atuadores piezoelétricos na placa.

Para a otimização do posicionamento de três pares de atuadores na placa foram utilizados 100 indivíduos, evoluindo durante 100 gerações, considerando que 90% da população sofreu cruzamento e apenas 9% da população sofreu mutação.

#### • Frequência de excitação de 85 Hz

Na Figura 7.12 encontram-se as curvas representativas da aptidão da média e do melhor indivíduo ao longo das gerações. É possível verificar uma grande diferença entre os valores da aptidão média e a do melhor indivíduo. No entanto, observa-se a convergência do melhor indivíduo, que determina que a posição ótima obtida para cada atuador é dada por:

- Atuador 1:  $x_c = 0,27\text{m}$  e  $y_c = 0,15\text{m}$ .
- Atuador 2:  $x_c = 0,12\text{m}$  e  $y_c = 0,04\text{m}$ .
- Atuador 3:  $x_c = 0,12\text{m}$  e  $y_c = 0,20\text{m}$ .

A Figura 7.13 ilustra os atuadores piezoelétricos fixados à placa na posição ótima. Para esta disposição dos atuadores, a redução total da potência sonora radiada total obtida foi de 113,19 dB.

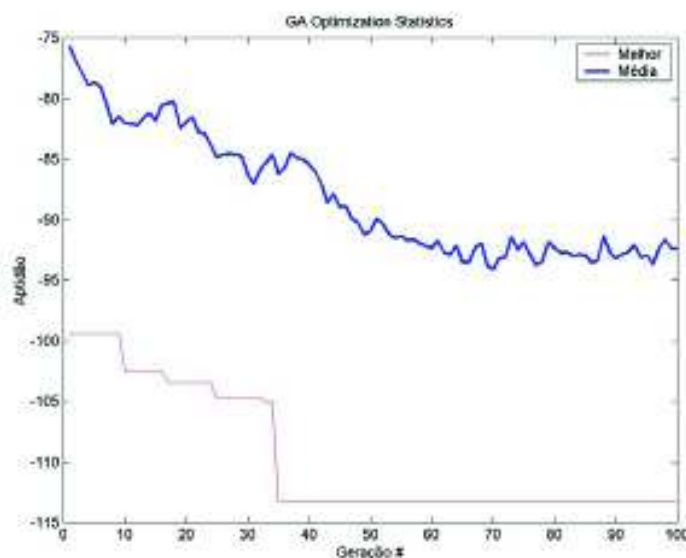


Figura 7.12 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85Hz.

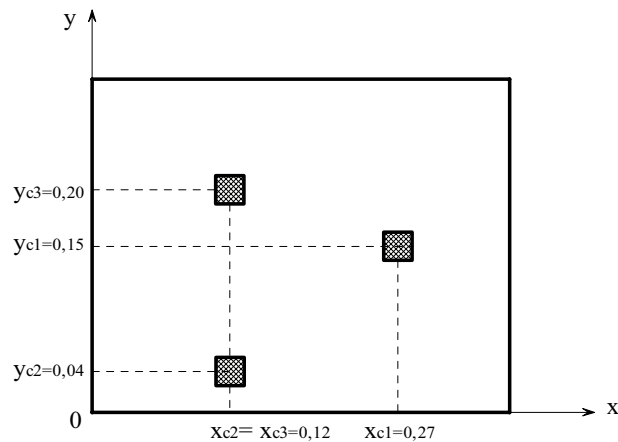


Figura 7.13– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 85Hz.

#### • Frequência de excitação de 140 Hz

Para a placa excitada em 140Hz calculou-se o posicionamento ótimo de três pares de atuadores. A Figura 7.14 apresenta as aptidões da média e do melhor indivíduo. Verifica-se que as duas curvas não convergem para o mesmo valor, no entanto, existe estabilidade do valor obtido para o melhor indivíduo. O posicionamento ótimo de cada par de atuadores é dado por:

- Atuador 1:  $x_c = 0,28\text{m}$  e  $y_c=0,23\text{m}$ .
- Atuador 2:  $x_c = 0,13\text{m}$  e  $y_c=0,15\text{m}$ .
- Atuador 3:  $x_c = 0,27\text{m}$  e  $y_c=0,08\text{m}$ .

Na Figura 7.15 estão representados os pares de atuadores fixados à placa em suas posições ótimas, as quais produzem uma redução total da potência sonora radiada total de 70,98 dB.

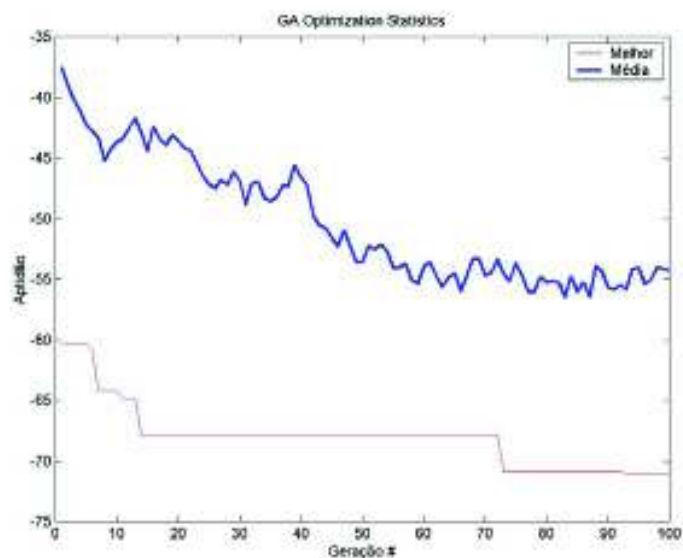


Figura 7.14 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 140Hz.

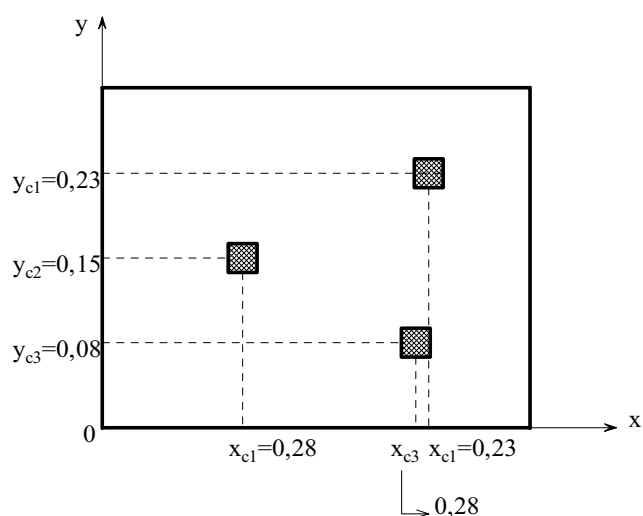


Figura 7.15– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 140Hz.

#### • Frequência de excitação de 190 Hz

Na Figura 7.16 encontram-se as curvas representativas da aptidão da média e do melhor indivíduo ao longo das gerações. É possível verificar uma grande diferença entre a

aptidão média e a do melhor indivíduo, no entanto observa-se a convergência do melhor indivíduo, que determina que a posição ótima obtida para cada atuador é dada por:

- Atuador 1:  $x_c = 0,25\text{m}$  e  $y_c=0,09\text{m}$
- Atuador 2:  $x_c = 0,11\text{m}$  e  $y_c=0,15\text{m}$
- Atuador 3:  $x_c = 0,25\text{m}$  e  $y_c=0,22\text{m}$

Na Figura 7.17 estão representados os pares de atuadores fixados à placa em suas posições ótimas as quais produzem uma redução total da potência sonora radiada total de 62,35 dB.

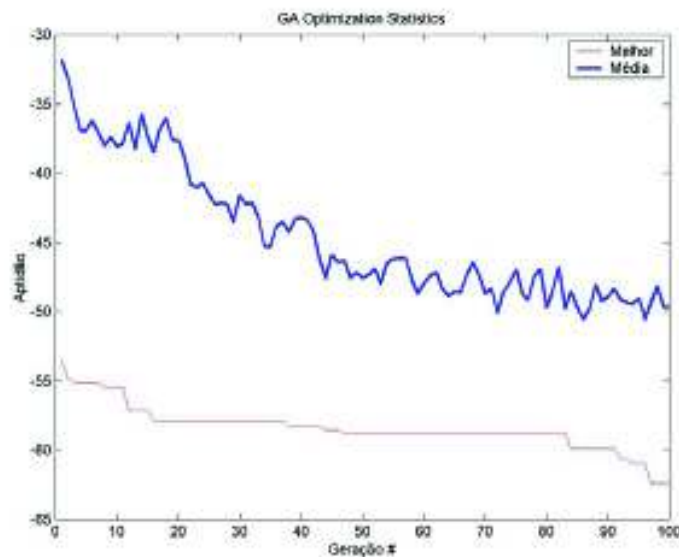


Figura 7.16 – Aptidão média e do melhor indivíduo da população ao longo das gerações. Placa excitada em 85Hz.

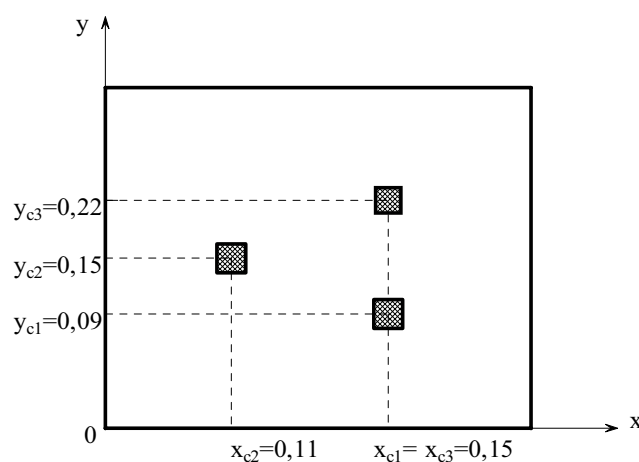


Figura 7.17– Esquema representativo do posicionamento ótimo dos atuadores para a placa excitada em 190Hz.

### 7.3 – Análise comparativa dos resultados obtidos com o posicionamento arbitrário e com o posicionamento ótimo dos atuadores piezoelétricos.

Nesta seção são apresentadas análises comparativas dos resultados de atenuação da potência sonora radiada total obtidos utilizando os posicionamentos arbitrários dos elementos piezoelétricos, definidos nas configurações descritas nas seções 6.4.2.1 a 6.4.2.3, e utilizando o posicionamento ótimo dos atuadores.

A Tabela 7.1 apresenta os valores da perda de transmissão para o controle utilizando um par de atuadores posicionados arbitrariamente e de maneira ótima, para as frequências de excitação de 85Hz, 140Hz e 190Hz. Verifica-se que para as frequências de 85Hz e 140Hz, os resultados obtidos para perda de transmissão são idênticos, pois o posicionamento ótimo encontrado coincide com a escolha arbitrária, ambos posicionando o centro do par de atuadores no centro geométrico da placa.

Tabela 7.1 - Análise comparativa dos resultados obtidos para o sistema controlado por um par de atuadores, posicionado de forma arbitrária e ótima.

Frequência de Excitação (Hz)	Perda de Transmissão (dB)	
	Posicionamento Arbitrário	Posicionamento Ótimo
85	76,2	76,2
140	34,5	34,5
190	0,5	9,5

Na Tabela 7.2 são apresentados os valores de perda de transmissão obtidos para o sistema excitado em 85Hz, 140Hz e 190Hz e controlado por dois pares de atuadores posicionados de forma arbitrária e ótima.

Tabela 7.2 - Análise comparativa dos resultados obtidos para o sistema controlado por dois pares de atuadores, posicionados de forma arbitrária e ótima.

Frequência de Excitação (Hz)	Perda de Transmissão (dB)	
	Posicionamento Arbitrário	Posicionamento Ótimo
85	87,5	96,64
140	49,2	60,50
190	43,5	57,17

Na Tabela 7.3 são apresentados os valores de perda de transmissão obtidos para o sistema excitado em 85Hz, 140Hz e 190Hz e controlado por três pares de atuadores posicionados de forma arbitrária e ótima.

Tabela 7.3 - Análise comparativa dos resultados obtidos para o sistema controlado por três pares de atuadores, posicionados de forma arbitrária e ótima.

Frequência de Excitação (Hz)	Perda de Transmissão (dB)	
	Posicionamento Arbitrário	Posicionamento Ótimo
85	97,5	113,19
140	60,5	70,98
190	57,1	62,35

As comparações apresentadas revelam que as posições ótimas conduziram invariavelmente ao aumento da atenuação da potência sonora radiada em campo distante. Observa-se que os resultados obtidos com os piezoelétricos fixados na posição ótima apresentam atenuações superiores aos resultados obtidos com os piezoelétricos fixados em posições arbitrárias. Um resultado significativo que representa esta constatação é que com três atuadores posicionados de maneira ótima a atenuação obtida foi de 113,19 dB para a placa excitada em 85Hz, enquanto que a quarta configuração descrita na Seção 6.4.2.4, que utiliza quatro atuadores fixados à placa de maneira arbitrária obteve uma atenuação de 107,1 dB para esta mesma frequência de excitação.



## Capítulo VIII

### Conclusões Gerais e Perspectivas de Trabalhos Futuros

O trabalho de pesquisa desenvolvido, reportado neste memorial, trata do estudo de procedimentos de controle ativo de ruído empregando pastilhas piezoelétricas fixadas em placas planas, onde o sistema placa-atuadores é empregado como uma fonte de controle.

Ao longo dos capítulos precedentes buscou-se apresentar os diversos aspectos envolvidos no procedimento de controle, a saber:

- a) modelagem analítica do comportamento vibratório de placas retangulares planas, finas e uniformes, com base na teoria de placas de Kirchhoff.
- b) apresentação dos fundamentos da piezoeletricidade linear e sua exploração na construção de sensores de deformação e atuadores.
- c) desenvolvimento da formulação analítica descrevendo a interação mecânica entre uma placa e atuadores piezoelétricos a ela fixados.
- d) apresentação de uma revisão sobre os conceitos básicos referentes à acústica e vibroacústica.
- e) modelagem do comportamento vibratório de placas excitadas por fontes sonoras representadas por ondas acústicas harmônicas planas oblíquas;
- f) modelagem da radiação sonora emitida por placas retangulares em campo distante baseada na integral de Rayleigh.
- g) apresentação revisão dos técnicas de controle ativo de ruído do tipo *feedback* e *feedforward* e desenvolvimento da formulação de uma técnica de controle ótimo do tipo *feedforward* não adaptativo.
- h) proposição de uma estratégia de posicionamento ótimo dos atuadores piezoelétricos com vistas à máxima atenuação da potência sonora radiada em campo distante.

Com base na teoria desenvolvida foram elaboradas rotinas computacionais em linguagem MATLAB<sup>®</sup> implementando as diversas etapas de modelagem, controle e otimização, incluindo rotinas para a avaliação da eficiência do controle em termos dos padrões de diretividade em campo distante e da atenuação global da potência sonora radiada.

Os programas computacionais foram empregados na realização de numerosas simulações numéricas em que foi avaliada a influência do número, posição e tamanho das pastilhas piezoelétricas na eficiência do sistema de controle e na tensão elétrica necessária. Para cada caso, a eficiência do controle foi avaliada em termos dos padrões de diretividade em campo distante e da atenuação global da potência sonora radiada. Em cada simulação realizada buscou-se interpretar os resultados em termos do comportamento modal do sistema.

As simulações numérico-computacionais evidenciaram a eficiência do sistema de controle de ruído em questão, uma vez que, via de regra, obtiveram-se atenuações significativas na potência sonora total radiada em campo distante.

Foi verificado que o posicionamento dos atuadores sobre a placa interfere de forma determinante no nível de atenuação de ruído, fato que motivou o estudo de uma técnica de determinação do posicionamento ótimo dos atuadores, objetivando a máxima atenuação da potência sonora radiada. Para tanto, adotou-se o método de otimização dos Algoritmos Genéticos, tendo em vista o fato que este método comporta vantagens importantes em relação aos métodos de otimização convencionais, tendo-se mostrado particularmente adequado ao problema em estudo. Os resultados obtidos confirmaram a conveniência de se empregar procedimentos de otimização do posicionamento dos atuadores, uma vez que as configurações otimizadas superaram, via de regra, as atenuações de potência sonora obtidas para malhas de atuadores piezoelétricos posicionados de forma arbitrária.

As conclusões específicas que podem ser extraídas deste trabalho são:

- É possível utilizar atuadores piezoelétricos na excitação de um dado modo da placa, desde que estes sejam favoravelmente posicionados.
- Para a aplicação considerada, o tamanho dos atuadores piezoelétricos não exerce qualquer influência sobre a máxima redução da pressão sonora total radiada em campo distante.
- A magnitude da tensão elétrica ótima aplicada aos elementos piezoelétricos é inversamente proporcional à área das pastilhas piezoelétricas.
- É possível controlar os modos de vibração da placa através do emprego de atuadores piezoelétricos fixados à superfície desta.
- O controle de um dado modo pode acarretar aumento da participação modal de outros modos (efeito conhecido como *spillover*). No entanto, como os modos de vibração da placa apresentam diferentes eficiências de radiação, se o modo que se tornou predominante após o controle apresentar eficiência de radiação menor que a do modo predominante anteriormente ao controle, a potência sonora radiada em campo distante é atenuada para o sistema com controle.

- O posicionamento dos atuadores é um fator determinante da eficiência do sistema de controle ativo de ruído proposto neste trabalho.
- Aumentando-se o número de atuadores, verifica-se o aumento da atenuação potência sonora radiada em campo distante.
- As posições ótimas, obtidas através do Algoritmo Genético, conduziram invariavelmente ao aumento da atenuação da potência sonora radiada em campo distante.

São as seguintes as conclusões gerais: o trabalho realizado constituiu uma primeira abordagem do problema de controle ativo de ruído empregando placas instrumentadas com pastilhas piezoelétricas, ficando evidente a existência de diversos aspectos do problema passíveis de estudos complementares. Neste sentido pode-se mencionar o uso de outras estratégias de controle, tais como algoritmo *feedforward* adaptativos, dentre os quais destaca-se o algoritmo *LMS (Least Mean Square)* (Elliott, 1987) que tem sido utilizado com sucesso em aplicações semelhantes.

Em relação à otimização do posicionamento dos atuadores, outras técnicas de otimização numérica, tais como o *Simulated Annealing* e *Tabu Search* podem ser avaliadas.

O procedimento de modelagem pode ainda ser estendido para considerar outros efeitos relevantes, a saber:

- a) presença de mais de uma fonte primária harmônica;
- b) formas mais gerais de excitação acústica, tais como periódicas, impulsivas e aleatórias;
- c) consideração de outras condições de contorno da placa.

A validação experimental dos procedimentos de modelagem e controle é outro aspecto passível de investigação, uma vez que permitirá avaliar a influência de diversos aspectos de natureza prática.

Há que se ressaltar a tendência, verificada em outros países, de popularização, associada à redução de custos, de sistemas de controle ativo baseados em elementos piezoelétricos, o que favorecerá a incorporação desta tecnologia nos produtos e processos industriais. Este fato justifica a continuação dos trabalhos de pesquisa dedicados ao tema, com vistas à obtenção de soluções mais econômicas e eficientes.

Por fim, o desenvolvimento do trabalho de pesquisa aqui reportado forneceu à aluna uma oportunidade de treinamento na metodologia da investigação científica, permitindo-lhe realizar um estudo aprofundado de três importantes sub-áreas da Engenharia Mecânica:

vibrações, acústica e controle. Estes fatos contribuíram positivamente para sua formação científica, abrindo-lhe amplas perspectivas para continuação de trabalhos de pesquisa.