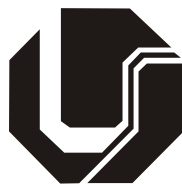


LIDIANE SARTINI DE OLIVEIRA

**UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS MÉTODOS
DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO.**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2005**

LIDIANE SARTINI DE OLIVEIRA

**UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS MÉTODOS DE
OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientadora: Prof^a. Dra. Sezimária de Fátima P. Saramago

UBERLÂNDIA – MG

2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

- O48c Oliveira, Lidiane Sartini de, 1977
Uma contribuição ao estudo dos métodos de otimização multi-objetivo /
Lidiane Sartini de Oliveira. – Uberlândia, 2005.
117f. : il.
Orientador: Sezimária de Fátima P. Saramago.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica – Modelos matemáticos - Teses. 2. Otimização
matemática - Teses. 2. - Teses. I. Saramago, Sezimária de Fátima Pereira. II.
Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica. III. Título.

621:51-7 (043.3)

Aos meus pais que tiveram como objetivo de vida a educação e formação profissional dos
filhos.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este Curso.

Agradeço a Deus que me deu mais essa oportunidade de viver, adquirir conhecimentos e que eu possa transmití-los com muita competência da maneira que os recebi.

À Professora Dra. Sezimária de Fátima P. Saramago, pelo apoio, incentivo e inestimáveis orientações, sustentadora de várias idéias, durante a realização deste trabalho.

Ao meu amigo Antônio Machado, que sempre me apoiou e incentivou durante este período de estudo.

A todos os colegas da sala de estudo pela grande ajuda e amizade.

A todos os meus familiares pelo incentivo e compreensão.

A todos os educadores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

Oliveira, L. S. **Uma Contribuição ao Estudo dos Métodos de Otimização Multi-Objetivo**. 2005. 117f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

Em problemas de otimização, existem várias situações nas quais o usuário necessita minimizar ou maximizar não apenas uma função objetivo, mas várias funções simultaneamente, que estão usualmente em conflito umas com as outras. Estas situações são formuladas como um problema de otimização multi-objetivo, também chamado de multi-critério, multi-performance ou otimização de um vetor de funções. Observa-se que problemas de otimização multi-objetivo surgem em diferentes aplicações científicas, sendo que várias pesquisas visam desenvolver métodos para solucioná-los. Existem vários critérios que podem ser considerados para resolver este complexo problema de otimização, este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo e comparação de alguns destes métodos. Os métodos clássicos baseados em escalonar as funções, onde o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar, são representados pelo método dos objetivos ponderados e o método do critério global. Uma abordagem diferente é dada no método hierárquico, da negociação e no método da programação de metas, que tratam as funções objetivo como restrições adicionais. Apresenta-se também um estudo sobre o método desenvolvido com base na abordagem min-max. Alguns problemas de otimização multi-objetivo são solucionados visando ilustrar cada metodologia estudada.

Palavras Chave: *otimização multi-critério, critério global ponderação dos objetivos, hierárquico, negociação, programação de metas, min-max.*

Oliveira, L. S. **A Contribution to the study about Multicriterion Optimization Methods.** 2005. 117f. M. Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Abstract

In optimization problems, there are many situations in which the users' goal is to minimize and or maximize several functions simultaneously, instead of dealing with a single objective function. These functions form a mathematical description of performance criteria, which are usually in conflict with each other. This situation is formulated as a multicriterion optimization problem (also called multi-performance, multiple objective or vector optimization). Multicriterion optimization problems arise various applications in sciences and engineering. There are several criteria that can be used to solve complex optimization problems. This dissertation presents a contribution to the study and comparison multiobjective optimization problems. The classic methods, based on function scalarization in which a vector function is transformed into a scalar function, are represented in the present work by the weighting objectives method and the global criterion method. A different approach is given by the hierarchical, trade-off and goal programming methods, which treats the objective functions as additional constraints. A method based of the min-max approach is also studied. Some multicriterion optimization problems are used to illustrate the methodology developed.

Keywords: *multicriterion optimization, weighting objectives, global criterion, hierarchical, trade-off, goal programming, min-max.*

Lista de Figuras

Figura 1.1	Soluções de negociação hipotéticas para o problema da compra do veículo automobilístico.	24
Figura 2.1	Desenho de uma viga.	30
Figura 2.2	Ilustração gráfica do projeto de uma viga, sem considerar a restrição de igualdade: a) Representação da região viável; b) Representação do espaço das funções objetivo.	33
Figura 2.3	Ilustração gráfica do projeto de uma viga com a restrição de igualdade: a) Região viável; b) Espaço das funções objetivo.	34
Figura 2.4	Vetor ideal f^o para o problema da viga.	36
Figura 2.5	Quatro soluções ótimas de Pareto e uma solução não-ótima.	38
Figura 3.1	Representação das soluções ótimas para o Método da Ponderação para o problema da viga representado na Fig. 2.1.	44
Figura 3.2	Interpretação geométrica do método de ponderação dos objetivos – Caso Convexo.	45
Figura 3.3	Interpretação geométrica do Método de Ponderação dos Objetivos – Caso Não - Convexo.	46
Figura 3.4	Ilustração gráfica da região viável do problema de programação de metas definido na Eq. (3.33).	61
Figura 3.5	Ilustração gráfica do espaço objetivo do problema de programação de metas definido na Eq. (3.33).	62
Figura 3.6	A programação de metas lexicográfica.	65
Figura 4.1	Ilustração gráfica do problema da usinagem de um metal: a) Região viável; b) Espaço das funções objetivo.	75
Figura 4.2	Conjunto Ótimo de Pareto para o problema da usinagem de um metal.	76
Figura 4.3	Otimização de Frequências de um Sistema Massa-mola.	82
Figura 4.4	Conjunto ótimo de Pareto para o problema do despacho econômico e ambiental, usando o Método da Ponderação dos Objetivos.	100
Figura 4.5	Resultados obtidos pelo Método Critério Global, aplicando diversas métricas, para o problema de despacho econômico e ambiental.	107

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Cinco soluções para o problema da viga em balanço.	39
Tabela 3.1	Resultados calculados para o método de ponderação para o problema da viga.	44
Tabela 3.2	Resultados obtidos quando $f_1(x)$ é mais importante que $f_2(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).	49
Tabela 3.3	Resultados obtidos quando $f_2(x)$ é mais importante que $f_1(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).	50
Tabela 3.4	Tabela de Pagamento para o Método da Negociação.	52
Tabela 3.5	Tabela de Pagamento usando a função incremento Δf_{ij} .	52
Tabela 3.6	Resultados dos cálculos para o Método de Negociação minimizando $f_1(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).	54
Tabela 3.7	Resultados dos cálculos para o Método da Negociação minimizando $f_2(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).	54
Tabela 3.8	Resultado ótimo aplicando o Método do Critério Global, para o problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).	57
Tabela 3.9	Resultados obtidos do Método da Programação de Metas para o problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).	64
Tabela 3.10	Resultados do ótimo Min-Max para o exemplo ilustrativo definido pelas Eqs. (3.44) e (3.45).	70
Tabela 3.11	Resultados do ótimo Min-Max para o projeto da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).	65
Tabela 4.1	Resultados obtidos com o Método da Ponderação dos Objetivos para o problema da usinagem de um metal.	76
Tabela 4.2	Resultados do Método de Otimização Hierárquico para o problema da usinagem de um metal considerando $f_1(x)$ o critério mais importante.	77
Tabela 4.3	Resultados do Método de Otimização Hierárquico para o problema da usinagem de um metal considerando $f_2(x)$ o critério mais importante.	78
Tabela 4.4	Resultados do Método da Negociação para o problema da usinagem de um metal, obtidos minimizando $f_1(x)$.	79
Tabela 4.5	Resultados do Método da Negociação para o problema da usinagem de um metal, obtidos minimizando $f_2(x)$.	80
Tabela 4.6	Resultados ótimos do Método do Critério Global, aplicando diversas métricas para o problema da usinagem de um metal definido pelas Eqs. (4.1) e (4.2).	81
Tabela 4.7	Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas para o problema da usinagem de um metal.	82
Tabela 4.8	Resultados obtidos para a solução ideal do problema das freqüências de um sistema massa-mola.	84
Tabela 4.9	Resultados obtidos com o Método da Ponderação para o problema das freqüências de um sistema massa-mola.	85
Tabela 4.10	Resultados obtidos com o Método Hierárquico para o problema das freqüências de um sistema massa-mola.	87
Tabela 4.11	Resultados do Método da Negociação para o problema das freqüências de um sistema massa-mola, obtidos maximizando $f_1(x)$.	89
Tabela 4.12	Resultados do Método da Negociação para o problema das freqüências de um sistema massa-mola, obtidos maximizando $f_2(x)$.	90
Tabela 4.13	Resultados do Método da Negociação para o problema das freqüências de um sistema massa-mola, obtidos maximizando $f_3(x)$.	91

Tabela 4.14	Resultados obtidos com o Método Critério Global para o problema das frequências de um sistema massa-mola.	93
Tabela 4.15	Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas para o problema das frequências de um sistema massa-mola.	94
Tabela 4.16	Resultados obtidos com o Método do Min-Max para o Problema das frequências de um sistema massa-mola.	96
Tabela 4.17	Coeficientes característicos do custo e da emissão de poluentes para alguns geradores.	98
Tabela 4.18	Resultados obtidos para soluções ideais do problema de despacho econômico e ambiental.	99
Tabela 4.19	Resultados obtidos com o Método da Ponderação dos Objetivos para o problema do despacho econômico e ambiental.	100
Tabela 4.20	Resultados obtidos para o problema do despacho econômico e ambiental, usando o Método Hierárquico e considerando $F_c(P)$ prioritária.	101
Tabela 4.21	Resultados obtidos para o problema do despacho econômico e ambiental, usando o Método Hierárquico e considerando $F_e(P)$ prioritária.	102
Tabela 4.22	Resultados do Método da Negociação para o problema do despacho econômico e ambiental, obtidos minimizando $F_c(P)$.	104
Tabela 4.23	Resultados do Método da Negociação para o problema do despacho econômico e ambiental, obtidos minimizando $F_e(P)$.	105
Tabela 4.24	Resultados do Método do Critério Global, aplicando diversas métricas para o problema do despacho econômico e ambiental.	112
Tabela 4.25	Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas, para o problema do despacho econômico e ambiental.	108

Lista de Símbolos

Letras latinas

A, n_1, n_2	Constantes assumidas para o problema da usinagem.
a_i, b_i, c_i	Coefficientes de custo para cada gerador.
c_i	Constantes multiplicadoras para o Método da Ponderação dos Objetivos.
d	Diâmetro da viga para o problema da viga em balanço.
d	Desvio entre a meta encontrada e a meta desejada no Método da Programação de Metas.
d_i, e_i	Coefficientes de custo para as válvulas.
e	Coefficiente de penalidade.
E	Módulo de elasticidade.
E^n	Espaço Euclidiano.
F	Espaço objetivo adicional.
F^p	Mapa de X^p no espaço das funções objetivo.
$f(x) = [\]^T$	Vetor que contém todas as funções objetivo.
F_c	Função custo do combustível total para o problema dos geradores.
F_{C_v}	Função do carregamento da válvula para o problema dos geradores.
F_e	Função de emissão total dos poluentes atmosféricos.
f_i^o	Vetor ótimo de cada i -ésima função objetivo.
$f_k(x)$	Funções objetivo.
F_{max}	Força máxima para o problema da viga.
f_{max}	Valor máximo viável para a função objetivo no Método da Programação de Metas.
f^o	Vetor ideal para um problema de otimização multi-critério.
$g_\ell(x)$	Funções de restrições de desigualdades.
$h_n(x)$	Funções de restrições de igualdades.
ℓ	Comprimento da viga para o problema da viga em balanço.
L	Comprimento de cada sub-rotina da viga engastada-livre do sistema massa-mola.
L_p	Métrica definida pelo pesquisador no método do critério global.
m_s	Massa suspensa do sistema massa-mola.
M_{viga}	Massa da viga do sistema massa-mola.
n, p	Variáveis de folga acrescentadas ao Método da Programação de Metas.
NO_x	Óxido de nitrogênio.
P_1	Conjunto de soluções não-dominadas.

P_2	Conjunto de soluções dominadas.
P_{DE}	Demanda total da potência.
P_{DI}	Potência dissipada na linha de emissão.
P_i	Potência real para cada i-ésimo gerador.
P_i^{sup}	Potência máxima para cada i-ésimo gerador.
P_i^{inf}	Potência mínima para cada i-ésimo gerador.
Q	Carga atuante ao problema da viga em balanço.
S	Espaço de decisão ou região viável.
s	Valor assumido pelo pesquisador para a definição da métrica no Método do Critério Global.
SO_x	Óxido de enxofre.
S_y	Força admissível para o problema da viga em balanço.
T	Denota a transposição de um vetor.
t	Meta desejada para cada função objetivo no Método da Programação de Metas.
t^{sup}	Limite superior da meta desejada para o Método da Programação de Metas.
t^{inf}	Limite inferior da meta desejada para o Método da Programação de Metas.
u^1, u^2	Pontos de um conjunto convexo.
$U_i(f_i(x))$	Função de utilidade global.
$v(x)$	Valor ótimo do desvio fracionário não-decrescente.
w_i	Coeficientes de ponderação.
$x = []^T$	Vetor das variáveis de decisão.
X^p	Conjunto de soluções não-inferiores.
x^*	Vetor ótimo.
x_i	Variáveis de decisão.
x_j^{sup}	Limite superior da restrição lateral.
x_j^{inf}	Limite inferior da restrição lateral.
$x^{o(i)}$	Vetor ótimo encontrado para cada i-ésima função objetivo.
$z_i'(x), z_i''(x)$	Desvio relativo de cada função objetivo para a obtenção do ótimo min-max.

Letras gregas

$\alpha_i, \xi_i, \Phi_i, \gamma_i, \lambda_i$	Coeficientes característicos de emissão para cada i-ésimo gerador.
β_j	Coeficientes de ponderação.
$\xi_{h_i}, \xi_{h_{j-1}}$	Coeficientes assumidos para os acréscimos ou decréscimos das funções dados em porcentagem.

ξ_{n_i}	Limites assumidos de acordo com a tabela de pagamento do Método da Negociação.
δ	Deflexão para o problema da viga em balanço.
δ_{\max}	Deflexão máxima para o problema da viga em balanço.
Δf_i	Função incremento para a construção da tabela de pagamento.
θ	Número real entre [0, 1].
ρ	Densidade.
σ_g	Tensão de flambagem admissível para o problema da viga.
σ_{\max}	Tensão máxima para o problema da viga em balanço.
ω_i	Freqüência natural do problema de um sistema massa-mola.

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvii
1 Introdução	23
2 Formulação do Problema de Otimização Multi-critério.	29
2.1 Formulação Geral do Problema	34
2.2 Solução Ideal	36
2.3 Ótimo de Pareto	37
3 Revisão: Alguns Métodos de Otimização Multi-critérios.	41
3.1 Método da Ponderação dos Objetivos	41
3.1.1 Interpretação Geométrica.	44
3.1.2 Métodos Similares	46
3.2 Método de Otimização Hierárquico	47
3.3 Método da Negociação	50
3.4 Método do Critério Global	55
3.4.1 Outras formas da função global.	55
3.5 Método da Programação de Metas	58
3.5.1 Programação de Metas Ponderada	60
3.5.2 Programação de Metas Lexicográficas	64
3.5.3 Programação de Metas usando desvio Máximo	65
3.6 Ótimo Min-Max	66
4 Simulações Numéricas	73
4.1 Aplicação 1: Problema da Usinagem de um Metal	73
4.1.1 Método da Ponderação dos Objetivos	75
4.1.2 Método de Otimização Hierárquico	77
4.1.3 Método da Negociação	78
4.1.4 Método do Critério Global	81
4.1.5 Método da Programação de Metas	81
4.2 Aplicação 2: Otimização das Frequências de um Sistema Massa-mola.	82
4.2.1 Método da Ponderação dos Objetivos	84
4.2.2 Método de Otimização Hierárquico	85

4.2.3	Método da Negociação	88
4.2.4	Método do Critério Global	92
4.2.5	Método da Programação de Metas	93
4.2.6	Método Min-max	95
4.3	Aplicação 3: Problema de despacho econômico e ambiental	95
4.3.1	Método da Ponderação dos Objetivos	99
4.3.2	Método de Otimização Hierárquico	101
4.3.3	Método da Negociação	103
4.3.4	Método do Critério Global	105
4.3.5	Método da Programação de Metas	107
5	Conclusões	109
6	Referências Bibliográficas	113

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Otimização consiste em encontrar uma ou mais soluções viáveis que correspondem a valores extremos de um ou mais objetivos. A necessidade de encontrar tais soluções ótimas do problema vem principalmente com a busca do extremo de um projeto, por exemplo, a solução para o custo mínimo de fabricação, ou a confiança máxima possível em um processo, entre outros. Por causa de tais propriedades extremas de soluções ótimas, métodos de otimização são de grande importância na prática, particularmente em projetos de engenharia e problemas de tomada de decisão.

Quando se modela um problema de otimização para um sistema físico, envolvendo uma única função objetivo, encontra-se uma solução ótima que é chamada otimização de um único objetivo. Nas últimas décadas, a maioria dos esforços neste campo têm sido empreendidos para entender, desenvolver e aplicar métodos de otimização de um único objetivo.

Atualmente, existem algoritmos de otimização de um único objetivo que trabalham com técnicas de busca com base analítica (busca local) ou base heurística (busca global), sendo que em alguns casos, nestes últimos, permitem encontrar soluções ótimas globais. Uma outra classificação para os algoritmos de otimização são os métodos clássicos (subdivididos em métodos diretos e indiretos) e os métodos naturais (subdivididos em métodos baseados em população, busca Tabu, Simulated Annealing e Nelder Mead).

É importante observar que não existem métodos universais capazes de resolver com eficácia todos os problemas de otimização. Alguns métodos, indicados para uma classe de problemas, podem não ter bom desempenho em outras aplicações.

Quando um problema de otimização envolve mais de uma função objetivo, a busca de uma ou mais soluções ótimas é conhecida como otimização multi-objetivo, também chamada de multi-critério, multi-performance ou otimização de um vetor de funções (Osyczka, 1981). Como a otimização multi-objetivo envolve objetivos múltiplos, é intuitivo pensar que otimização de um único objetivo é um caso particular da otimização multi-objetivo.

A maior parte dos problemas de otimização práticos envolvem objetivos múltiplos. Assim, não se pode aplicar a idéia de otimizar somente um dos objetivos, uma vez que os outros objetivos também são importantes. A solução que é ótima em relação a um dos objetivos necessita ser negociada em relação aos outros objetivos. Isto proíbe a escolha de uma solução que é ótima somente em relação a um objetivo.

Para exemplificar este conceito, considere a tomada de decisão envolvida na compra de um veículo automobilístico. Os preços dos carros variam de dez mil a cem mil reais. Seja dois carros extremos hipotéticos, um custando quase dez mil (solução 1) e outro custando quase cem mil (solução 2), como mostrado na Fig.1.1 (Deb, 2001).

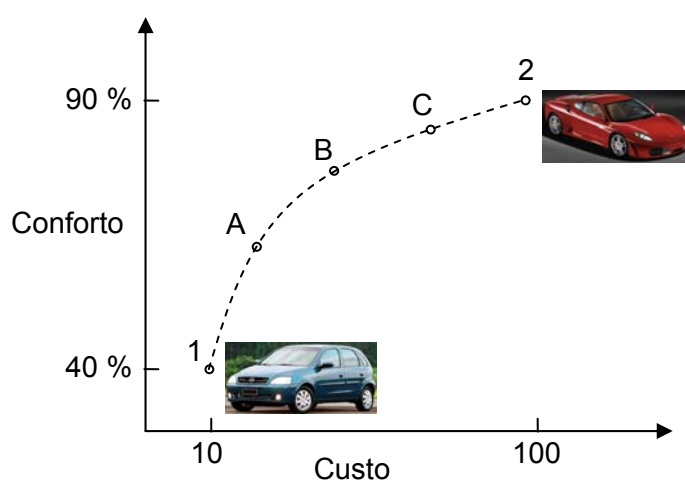


Figura 1.1 - Soluções de negociação hipotéticas para o problema da compra do veículo automobilístico.

Se o custo do veículo é o único objetivo a ser considerado durante o processo de tomada de decisão, a escolha ótima é a solução 1. Se o custo fosse o único objetivo de todos os compradores, teria-se somente um único tipo de automóvel trafegando nas vias (solução 1) e nenhum fabricante produziria outros carros mais caros. Felizmente, este processo de tomada de decisão não possui um único objetivo.

Normalmente, um veículo de custo inferior é menos confortável. A Fig.1.1 indica que o veículo mais barato tem um conforto de 40%. Para compradores ricos, considerando que o conforto é o único objetivo do processo de tomada de decisão, a escolha então, é a solução 2 (com um conforto máximo de 90%, como mostra a Fig.1.1). Entre estas duas soluções, existem muitas outras soluções, onde têm-se uma negociação entre o custo e o conforto do veículo. Algumas soluções com diferentes níveis de custo e conforto são mostrados na Fig.1.1 (soluções A, B e C). Assim, entre duas ou mais soluções, uma é melhor em termos de um objetivo, sendo que esta melhora vem somente em sacrifício de outros objetivos. Este exemplo, contradiz o pensamento intuitivo de que a otimização de um único objetivo é um

caso particular da otimização multi-objetivo, mostrando que a otimização multi-objetivo não é simples extensão da otimização de um único objetivo.

A maioria dos métodos evitam a complexidade (Deb, 2001) envolvida em um verdadeiro problema de otimização multi-objetivo e transforma, através da utilização de parâmetros pré-definidos, objetivos múltiplos em uma função escalar com um único objetivo. Assim, a maior parte dos estudos em otimização clássica multi-objetivo não se trata realmente de uma otimização multi-objetivo. Os estudos de conversão de objetivos múltiplos em um único objetivo surgem em vários campos de pesquisa, o que envolve muita dedicação na comparação de esquemas diferentes propostos para tais conversões.

Teorias e algoritmos que são aplicáveis na otimização de um único objetivo, também são aplicados na otimização de uma função de um único objetivo transformado, ou seja, uma função multi-objetivo transformada em uma função de um único objetivo.

Mas, existe uma diferença fundamental entre otimização de um único objetivo e multi-objetivos que não pode ser ignorada quando se usa o método da transformação mencionado acima: para objetivos conflitantes, cada objetivo corresponde a uma solução ótima diferente. No problema de tomada de decisão da compra do automóvel mencionado acima, as soluções 1 e 2 são soluções ótimas. Se um comprador está disposto a ter um gasto maior, o comprador tem a sua disponibilidade, um outro veículo com o conforto melhor que a solução 1. Dessa forma, o sacrifício no custo é em função de um melhor conforto. Assim, pode visualizar um conjunto de soluções ótimas (por exemplo, 1, 2, A, B e C), onde o ganho em um objetivo significa o sacrifício do outro.

Com todas estas soluções em vista, pode-se dizer que uma solução é a melhor em relação a ambos os objetivos? É irônico dizer que nenhuma destas soluções é a melhor em relação a ambos os objetivos. A razão encontra-se no fato de que nenhuma solução para este conjunto satisfaz ambos os objetivos (custo e conforto) e portanto não pode ser considerada melhor que alguma outra solução do conjunto.

O termo "otimizar" significa encontrar uma solução que irá fornecer valores aceitáveis para todas as funções objetivo. Assim, necessita-se equacionar uma forma para comparar as aproximações obtidas. Com este objetivo é definido, o conceito do ótimo de Pareto (Osyczka, 1981). Este ótimo dá um conjunto de soluções não inferiores, isto é, soluções para as quais não existem maneiras de melhorar algum critério sem piorar pelo menos um outro critério. É claro que a solução será escolhida dentro deste conjunto mas, ainda assim, existem várias opções para esta escolha. O conceito deste ótimo foi formulado por V. Pareto em 1896, sendo ainda muito importante para a análise multi-critério.

Assim, em problemas com mais de um objetivo conflitantes entre si, não existe solução ótima simples (de um único objetivo). Existe sim, um número de soluções, sendo

que todas são ótimas. Sem alguma informação a mais, nenhuma solução pertencente ao conjunto de soluções ótimas pode ser melhor que qualquer outra solução. Daí, todas estas soluções são ótimas, cabendo ao pesquisador escolher a solução mais interessante para o problema em estudo. Esta é a diferença fundamental entre otimização de um único objetivo e multi-objetivo. Em otimização multi-objetivo, o número de soluções ótimas aumenta por causa da negociação entre os objetivos conflitantes que são importantes em determinado momento. Os métodos de otimização multi-objetivo vêm sendo amplamente estudados nos últimos anos, podendo-se encontrar vários algoritmos e aplicações envolvendo objetivos múltiplos.

Yoshimura et al (2005) utilizaram a formulação de problemas multi-objetivo, particularmente a otimização hierárquica, para reformular problemas baseados na evolução de números característicos. O problema de otimização estudado considera as seguintes características de performance (que denotam o seu desempenho): precisão, eficiência, custo de manufatura e o consumo de energia. Knowles (2005) utilizou a otimização multi-objetivo na resolução de problemas onde cada avaliação das funções tem um alto custo financeiro e de tempo computacional. Nesse artigo, alguns algoritmos evolutivos são comparados, sendo proposto um algoritmo híbrido de otimização. Parsons e Scott (2004) utilizaram a otimização multi-critérios considerando o problema de projetos marítimos. Propuseram neste artigo uma metodologia que visa auxiliar a equipe de projeto na seleção da melhor solução entre um conjunto de soluções ótimas de Pareto, com um pequeno acréscimo do custo computacional. Um algoritmo genético multi-objetivo é aplicado na solução de problemas de projeto de engenharia por Andersson (2003), que aborda um projeto detalhado de uma bomba hidráulica. O problema é formulado usando modelos de simulação dinâmica, superfícies de resposta, bem com equações estáticas. Ticona (2003) apresenta um trabalho que formula o problema de alinhamento de seqüências biológicas como um problema de otimização multi-objetivo, visando encontrar um conjunto de soluções que representem um compromisso entre a extensão e a qualidade das soluções. Neste trabalho, foram aplicados vários modelos de algoritmos evolutivos para otimização multi-objetivo. O desempenho de cada modelo foi avaliado por métricas de performance encontradas na literatura. No artigo de Vankan e Maas (2002) é feita a modelagem e a otimização de projetos aeronáuticos através da utilização de funções multi-objetivo. Ambrósio (2002) utiliza programação multicritério como um instrumento para planejamento agro-ambiental. Saramago e Steffen (2001) apresentam o problema de otimização multi-objetivo que visa obter a trajetória ótima de um robô manipulador na presença de obstáculos móveis, minimizando o tempo total de percurso e a energia mecânica dos atuadores. Assis (1999) utiliza as técnicas de otimização multi-objetivo para a obtenção de soluções de

problemas diretos e inversos em máquinas rotativas, sendo que no primeiro caso, a função multi-objetivo descreve o posicionamento de velocidades críticas e a energia global de deformação do sistema rotor mancais. Enquanto que no segundo caso, a função multi-objetivo é escrita de forma a ajustar as curvas teóricas de resposta ao desbalanceamento às obtidas experimentalmente, dando ênfase ao caso de identificação dos parâmetros de mancais.

Observa-se que problemas de otimização multi-objetivo surgem em diferentes aplicações científicas, sendo que várias pesquisas visam desenvolver métodos para solucioná-los. Existem vários critérios que podem ser considerados para resolver este complexo problema de otimização (Sawaragi et al, 1985). Alguns métodos clássicos são baseados em escalonar as funções, sendo que o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar (ex.: objetivos ponderados e critério global). Outros tratam as funções objetivo como novas restrições (ex.: hierárquico, negociação e o método da meta final). Alguns métodos são desenvolvidos com base na abordagem min-max (ex.: métodos exploratórios, método da ponderação min-max).

Neste caso, pretende-se encontrar uma solução ótima que leva em consideração todos os objetivos. O objetivo deste trabalho será avaliar os seguintes métodos de otimização multi-critérios: o método da ponderação dos objetivos, hierárquico, da negociação, do critério global, da programação de metas e o método do ótimo min-max.

O método da ponderação dos objetivos, no qual o problema de otimização multi-critérios é substituído por um problema de otimização escalar através da criação de uma função com coeficientes de ponderação (ou pesos) que representam a importância relativa de cada critério.

O método do critério global, no qual a solução ótima é um vetor de variáveis de decisão que minimiza algum critério global (Boyчук e Ovchimikov, 1973; Salukvadze, 1974; Koski, 1981). A função escalar que descreve este critério global deve ser definida pelo pesquisador de forma que obtenha uma solução mais próxima possível da solução ideal.

O método de otimização hierárquico, proposto por Walz (1967), considera a situação na qual o critério pode ser ordenado em termos de importância. Seja a numeração de 1 a k que reflete esta ordem, no sentido que o primeiro critério é mais importante e o k -ésimo critério é menos importante. Conservando esta ordem, minimiza-se cada função objetivo separadamente, adicionando em cada passo uma nova restrição escrita em função de alguma função objetivo que ainda não foi avaliada.

O método da negociação, proposto por Haimes e Hall (1974), é baseado no conceito de trocar o valor de uma função objetivo por um outro valor da função, para determinar o próximo passo na busca da solução. Em muitos casos, o conceito acima é utilizado através

da minimização de uma das funções objetivo considerando as outras como restrições flexíveis que são limitadas por valores pré-determinados.

Outra técnica estudada é o método da programação de metas (Charnes et al, 1961; Ignizio, 1976; Lee, 1972), cuja idéia principal é encontrar uma solução que atinge metas pré-definidas para cada uma das soluções objetivo ou, caso esta solução não exista, obter soluções que minimizem os desvios das funções em relação a estas metas.

Vale ressaltar que para os três últimos métodos, onde as funções objetivo são tratadas como restrições adicionais, pode-se alterar a região viável do problema devido a estas novas restrições. Observe ainda, que estes métodos podem ser vistos como "iterativos", sendo sensíveis às prioridades adotadas e aos critérios de parada estabelecidos.

O conceito do método do ótimo min-max foi derivado da teoria de jogos, onde necessita-se resolver situações de conflito (Jutler, 1967; Solich, 1969; Osyczka, 1978 e 1981). O ótimo min-max compara os desvios relativos obtidos para cada função objetivo em relação a sua solução ideal e, a solução desejada, é aquela que minimiza os incrementos relativos de todas as funções objetivo. A solução ideal é obtida resolvendo separadamente o problema de otimização para cada função objetivo.

As análises serão feitas através da otimização de três problemas em engenharia. Na aplicação da usinagem de um metal, pretende-se obter uma vida máxima para a ferramenta juntamente com uma maior taxa de remoção do material. Na segunda aplicação, o objetivo é maximizar a primeira frequência natural e distanciar as três primeiras frequências naturais entre si de um sistema massa-mola. E na terceira aplicação, pretende-se selecionar geradores de uma unidade de produção de energia, de forma a minimizar o custo total do combustível e a emissão de poluentes na atmosfera.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira, no capítulo 2, tem-se a formulação de um problema de otimização multi-objetivo, com as respectivas restrições de desigualdade e de igualdades, definição do conceito de solução ideal e do conceito de ótimo de Pareto. No capítulo 3, tem-se o estudo de alguns métodos de otimização multi-critérios que podem ser usados para minimizar a função multi-objetivo, obtendo-se soluções ótimas de Pareto. A título de ilustração, para auxiliar a compreensão dos métodos, o exemplo apresentado no capítulo 2, é solucionado usando todas as técnicas estudadas. No capítulo 4, os métodos estudados são utilizados na solução de três problemas multi-critérios: a) problema de usinagem de um metal; b) otimização das frequências de um sistema massa mola; c) seleção ótima de geradores, em um problema de despacho econômico e ambiental. No capítulo 5, são apresentadas algumas discussões sobre os resultados obtidos nas simulações numéricas e propostas de continuidade do trabalho.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO.

Como o nome sugere, um problema de otimização multi-objetivo trabalha com mais de uma função objetivo, sendo constituído de um certo número de funções objetivo que podem ser minimizadas ou maximizadas. Por falta de metodologias adequadas, durante muitos anos o problema de otimização multi-objetivo foi tratado como um problema de otimização de um único objetivo. Em um problema de otimização de um único objetivo, a finalidade é encontrar uma solução que otimiza a única função objetivo, exceto em algum problema de otimização multi-modal, onde soluções ótimas múltiplas são procuradas. Estendendo esta idéia para um problema multi-objetivo, pode-se erroneamente assumir que a finalidade na otimização multi-objetivo é encontrar uma solução ótima correspondente a cada uma das funções objetivo (Deb, 2001).

Define-se programação matemática como a análise de problemas, onde se procura encontrar o ótimo da função objetivo, quando as variáveis de decisão são sujeitas a restrições de igualdade e ou desigualdade. A programação matemática está se tornando rapidamente uma ferramenta prática e fundamental na solução de problemas de Engenharia e de outros campos.

Neste estudo, a programação matemática para problemas multi-critérios é formulada procurando encontrar um vetor de variáveis de decisão o qual satisfaz as restrições e otimiza um vetor função objetivo cujos elementos representam as diferentes funções objetivo. Estas funções formam uma descrição matemática dos critérios representados, as quais estão usualmente em conflito uma com a outra. Se a solução não é aceitável, o que acontece freqüentemente, o pesquisador se encontra diante de um problema onde deve tomar decisões.

As variáveis de decisão ou variáveis de projeto são as quantidades que modificam o valor da função objetivo. Na programação matemática estas quantidades são representadas como x_i , $i=1, 2, \dots, n$, sendo x_i a variável que representa cada quantidade. Seja o projeto de uma viga escalonada onde se deseja determinar suas dimensões, conforme mostra Fig. 2.1. Neste caso, as variáveis de projeto x_1 e x_2 são:

x_1 = comprimento da seção 1 da viga.

x_2 = diâmetro interior da viga.

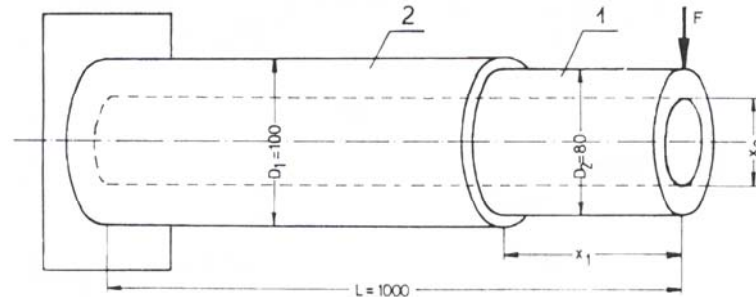


Figura 2.1 - Desenho de uma viga escalonada.

Em vários modelos de otimização a escolha do número e do tipo da variável de decisão é simples, mas, algumas vezes, esta situação não é clara.

Considere o exemplo dado no qual o diâmetro externo da viga escalonada é definido com os valores 100 mm e 80 mm. Se estes diâmetros não são pré-determinados, isto é, podem ser escolhidos durante o processo de otimização, serão tratados como novas variáveis de decisão (x_3 e x_4). Caso se deseje também escolher o material da viga, tem-se uma nova variável de projeto (x_5).

Na fase da construção do modelo matemático deve-se escolher quais quantidades serão tratadas como variáveis de decisão e quais serão consideradas como constantes. As quantidades cujos valores são constantes serão denominadas de *parâmetros*. As relações matemáticas entre as variáveis de decisão e os parâmetros constituem um modelo de otimização.

Quando tem-se n variáveis escreve-se o vetor x como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou de uma maneira mais conveniente: $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, onde T denota a transposição do vetor.

Em cada problema de otimização, tem-se várias restrições impostas pelo ambiente, processo ou recursos, que devem ser satisfeitas de forma a obter uma solução viável. Assim como nos problemas de otimização de um único objetivo, o problema de otimização multi-

objetivo é usualmente sujeito as restrições que devem ser satisfeitas pela solução viável (incluindo a solução ótima).

Estas restrições descrevem a dependência entre as variáveis de decisão e os parâmetros. Estas dependências são escritas em forma de desigualdades matemáticas e algumas vezes de igualdades.

A forma geral de escrever as restrições de desigualdade é:

$$g_\ell(x) \leq 0 \text{ para } \ell = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

Em um certo modelo, pode-se também ter as restrições de igualdade que são escritas na seguinte forma:

$$h_\pi(x) = 0 \text{ para } \pi = 1, 2, \dots, p \quad (2.2)$$

Considere o exemplo dado, segundo Osyczka (1984) assumindo que a viga representada na Fig. 2.1 pode resistir a uma força máxima $F_{\max} = 12\,000\text{ N}$ e que a tensão de flambagem admissível para o material da viga é de $\sigma_g = 180\text{ N/mm}$; neste caso, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x) = \frac{9,78 \times 10^6 x_1}{4,096 \times 10^7 - x_2^4} - 180 \leq 0 \\ g_2(x) = x_2 - 75,2 \leq 0 \\ g_3(x) = 40 - x_2 \leq 0 \\ g_4(x) = -x_1 \leq 0 \\ h_1(x) = x_1 - 5x_2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Note que o número das restrições de igualdade (p) deve ser menor que o número das variáveis de decisão (n). Se $p \geq n$, o problema é denominado super restrito (over-constrained), uma vez que não existem graus de liberdade negativos na otimização. O número de graus de liberdade é dado por $n - p$.

No exemplo considerado, todas as restrições são escritas na forma explícita. Existem, entretanto, modelos mais complicados para os quais não é possível escrever as restrições na forma explícita em relação às componentes do vetor x .

Ainda assim, para muitos métodos numéricos de otimização, as formas *implícitas* das restrições são satisfatórias. Obviamente, estas formas devem permitir o cálculo da restrição para um dado vetor x e isto é, usualmente, obtido por meio de um algoritmo.

No processo de seleção de uma “boa solução”, entre todas as soluções que satisfazem as restrições, existem vários critérios que permitem comparar estas soluções. Estes critérios consideram qualidades inerentes de cada solução e, no modelo de otimização, devem ser expressos como funções computáveis das variáveis de decisão. Estas funções são denominadas de *funções objetivo* e usualmente algumas delas podem estar em conflito umas com as outras.

Sejam as funções objetivo representadas como f_1, f_2, \dots, f_k ou para enfatizar suas dependências com as variáveis de decisão, representadas como $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$.

Uma forma de representar as funções objetivo é usando um vetor coluna $f(x)$ que contém todas as funções consideradas no modelo. Geralmente, para as k -ésimas funções objetivo, tem-se:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix}$$

ou, escrevendo-se de uma maneira mais conveniente: $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_k(x)]^T$

Seja o conjunto de todas as n -uplas dos números reais representados pelo n espaço Euclidiano E^n . Uma vez que são considerados, o vetor das variáveis de decisão e o vetor das funções objetivo, serão considerados dois espaços euclidianos:

(1) O espaço n -dimensional das variáveis de decisão (E^n) em que cada coordenada corresponde a uma componente do vetor x .

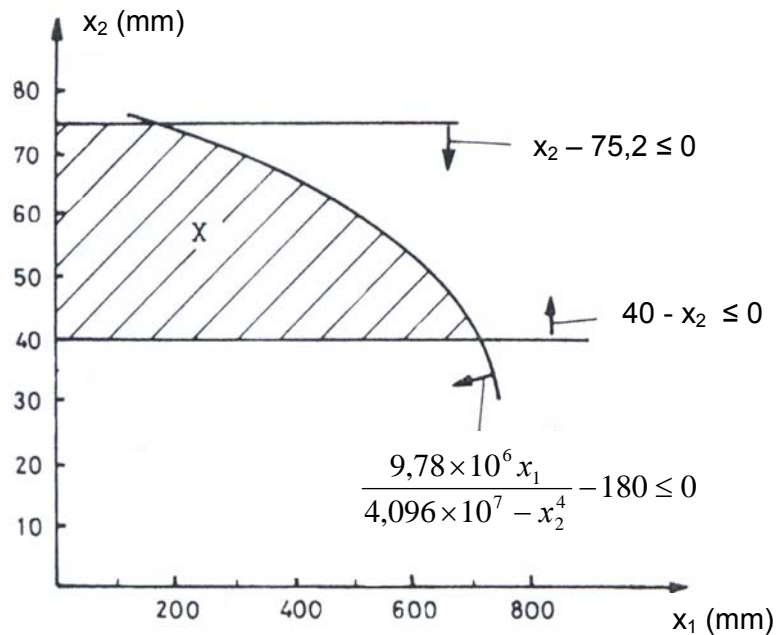
(2) O espaço k -dimensional das funções objetivo (E^k) em que cada coordenada corresponde a uma componente do vetor $f(x)$.

Todo ponto no primeiro espaço representa uma solução e fornece um certo ponto no segundo espaço, o qual determina a qualidade da solução em termos dos valores das funções objetivo. No exemplo do projeto da viga, dado na Fig. 2.1, considere que o projetista deseje que a viga satisfaça dois objetivos:

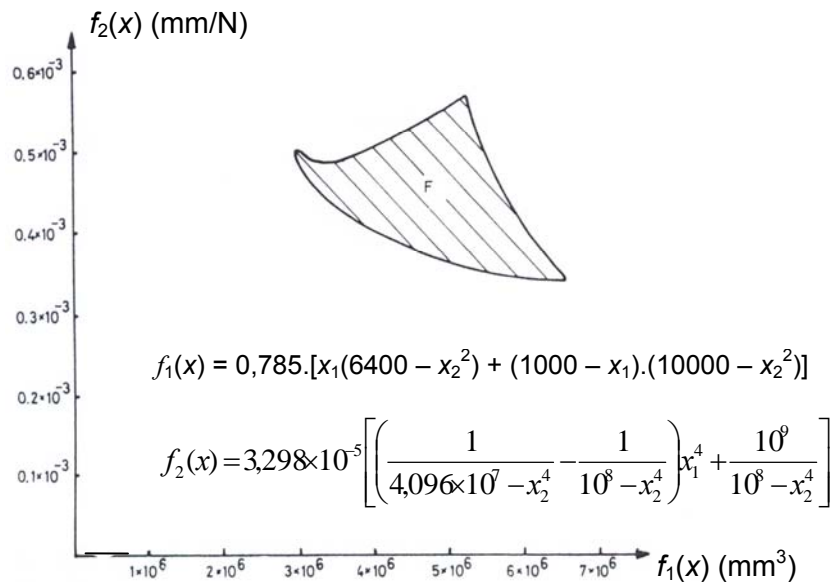
- A minimização do volume da viga $f_1(x)$ e,
- A minimização do módulo de rigidez estática (static compliance) relacionado com as mudanças geométricas da viga $f_2(x)$.

$$f_1(x) = 0,785[x_1(6400 - x_2^2) + (1000 - x_1)(10000 - x_2^2)] \text{ mm}^3 \quad (2.4)$$

$$f_2(x) = 3,298 \times 10^{-5} \left[\left(\frac{1}{4,096 \times 10^7 - x_2^4} - \frac{1}{10^8 - x_2^4} \right) x_1^3 + \frac{10^9}{10^8 - x_2^4} \right] \text{ mm/N} \quad (2.5)$$



(a)



(b)

Figura 2.2 - Ilustração gráfica do projeto de uma viga, sem considerar a restrição de igualdade: a) Representação da região viável; b) Representação do espaço das funções objetivo.

Neste exemplo, ambos os espaços são bidimensionais, sendo fácil obter as ilustrações gráficas deste problema. Estas ilustrações são mostradas nas Fig. 2.2 e 2.3. Na Fig. 2.2 considera-se as restrições de desigualdade presentes em (2.3) e as funções objetivo dadas pelas Eqs. (2.4) e (2.5). Na Fig. 2.3, adiciona-se às restrições já existentes a restrição de igualdade. Neste caso, o conjunto das soluções viáveis x é limitada para os pontos sobre a linha escura da Fig. 2.3(a). No espaço das funções objetivo, Fig. 2.3(b), somente uma curva representa o conjunto dos valores viáveis. Pode-se ver, facilmente, que a restrição de igualdade limita o conjunto das soluções viáveis.

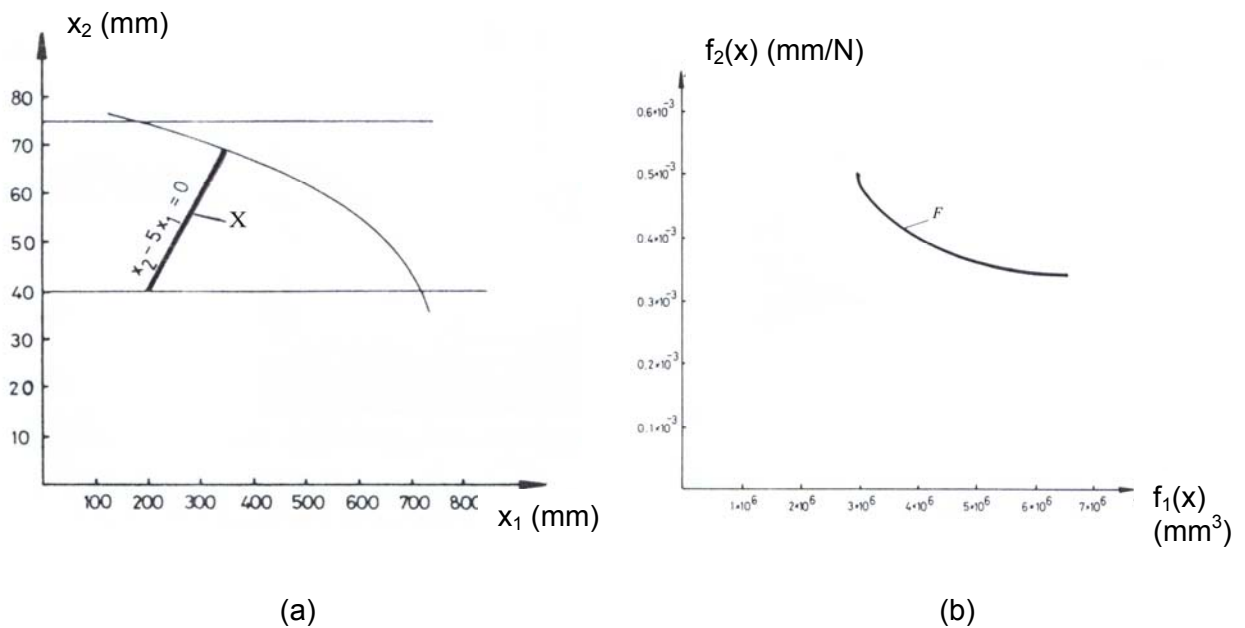


Figura 2.3 - Ilustração gráfica do projeto de uma viga com a restrição de igualdade: a) Região viável; b) Espaço das funções objetivo.

Na otimização multi-objetivo de casos simples, espaços bi ou tridimensionais, é possível obter a ilustração gráfica da formulação do problema. Esta ilustração ajuda a entender os métodos de resolução dos problemas de otimização multi-critérios, que serão discutidos nos capítulos seguintes.

2.1 Formulação Geral do Problema

Um problema de otimização multi-objetivo para programação matemática pode ser formulado como a seguir:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar ou Maximizar } f_i(x), & i = 1, 2, \dots, k \\
& \text{Sujeito a } & x_j^{\text{inf}} \leq x_j \leq x_j^{\text{sup}}, & j = 1, 2, \dots, n \\
& & g_\ell(x) \leq 0, & \ell = 1, 2, \dots, m \\
& & h_\pi(x) = 0, & \pi = 1, 2, \dots, p
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Uma solução x é um vetor de n variáveis de decisão: $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$, sujeito às restrições laterais que delimitam cada variável de decisão x_j , dentro do intervalo x_j^{inf} e x_j^{sup} .

Associado com o problema existem m restrições de desigualdade e p restrições de igualdade. Os termos $g_\ell(x)$ e $h_\pi(x)$ são chamadas de funções de restrições. Estas restrições limitam as variáveis de decisão dentro de um espaço S , denominado espaço de decisão ou região viável.

Na formulação acima, existem k funções objetivo $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]^T$. Cada função objetivo pode ser minimizada ou maximizada, procurando uma solução de compromisso que respeite todas as funções consideradas. Nos problemas de otimização multi-critérios pode-se procurar:

- (1) Minimizar todas as funções objetivo,
- (2) Maximizar todas as funções objetivo e,
- (3) Minimizar algumas e maximizar outras.

Por conveniência, todas as funções onde se pretende a maximização serão convertidas em minimização, trabalhando com a função simétrica, obtida multiplicando a função objetivo por (-1) .

Uma diferença entre otimização de um único objetivo e multi-objetivo é que, nesta última, as funções objetivo constituem um espaço multi-dimensional (E^k), em adição ao usual espaço das variáveis de decisão (E^n). Esse espaço adicional é chamado de espaço objetivo F . Para cada solução x no espaço das variáveis de decisão, existe um ponto no espaço objetivo, representado por $f(x) = F = [f_1, f_2, \dots, f_k]^T$.

Um problema de otimização multi-critérios pode ser escrito na forma reduzida como a seguir:

$$f(x^*) = \text{opt } f(x), \quad x \in X, \quad x_j^{\text{inf}} \leq x_j \leq x_j^{\text{sup}} \tag{2.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
& f: X \rightarrow E^k \\
& X = \left\{ x \in E^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0, x_j^{\text{inf}} \leq x_j \leq x_j^{\text{sup}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 Solução Ideal

Seja uma solução chamada de “solução ideal”. Para determinar esta solução, deve-se encontrar, separadamente, o mínimo atingível para todas as funções objetivo. Assumindo que este mínimo pode ser encontrado, seja $x^{o(i)} = [x_1^{o(i)}, x_2^{o(i)}, \dots, x_n^{o(i)}]^T$ o vetor de variáveis que minimiza cada i -ésima função objetivo $f_i(x)$. Em outra formulação, o vetor $x^{o(i)} \in X$ é tal que

$$f_i^o = f_i(x^{o(i)}) = \min f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.9)$$

Usa-se f_i^o para representar o valor mínimo de cada i -ésima função.

O vetor $f^o = [f_1^o, f_2^o, \dots, f_k^o]^T$ é ideal para um problema de otimização multi-critério e o ponto no F^n o qual determina este vetor é a solução ideal.

Considerando o exemplo dado pelas Eqs. (2.3) e (2.5), a solução ideal está representada na Fig. 2.4.

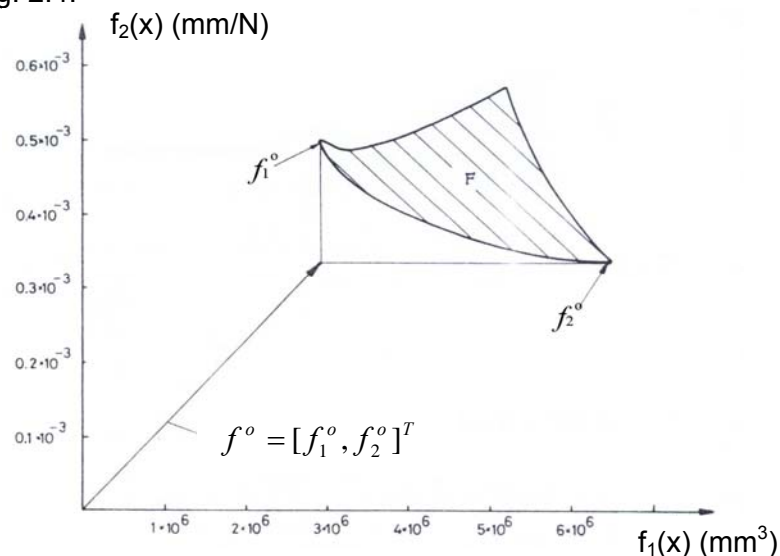


Figura 2.4 - Vetor ideal f^o para o problema da viga.

Uma vez que a solução ideal não é viável, ela não nos interessa. Mas algumas vezes será bastante útil aplicar o conceito do vetor ideal f^o .

Em geral, o vetor objetivo ideal corresponde a uma solução não-existente, porque as soluções ótimas da Eq. (2.9) para cada função objetivo são diferentes entre si. A única maneira de um vetor objetivo ideal corresponder à solução viável é se as funções objetivo fossem linearmente dependentes. Neste caso, os objetivos não são conflitantes uns com os outros e a solução ótima para qualquer uma das funções objetivo será a solução ótima para o problema de otimização multi-objetivo.

2.3 Ótimo de Pareto

O termo “otimizar” significa encontrar uma solução que irá fornecer valores aceitáveis para todas as funções objetivo. Assim, necessita-se equacionar uma forma para comparar as aproximações obtidas. Com esta finalidade define-se o conceito do ótimo de Pareto. Este ótimo dá um conjunto de soluções não inferiores, isto é, soluções para as quais não existem maneiras de melhorar algum critério sem piorar pelo menos um outro critério. É claro que a solução será escolhida dentro deste conjunto, mas, ainda assim, existem várias opções para esta escolha. O conceito deste ótimo foi formulado por V. Pareto em 1896, sendo ainda muito importante para a análise multi-critério.

A maneira mais comum de definir este ótimo é dada por:

Um ponto $x^* \in X$ é ótimo de Pareto se para todo $x \in X$

$$f_i(x) \geq f_i(x^*) \text{ para todo } i \in I = [1, 2, \dots, k] \quad (2.10)$$

ou, existe pelo menos um $i \in I$ tal que

$$f_i(x) > f_i(x^*) \text{ para no mínimo um } i \in I \quad (2.11)$$

Esta definição é baseada no conceito intuitivo de que o ponto x^* é escolhido como o ótimo se nenhum critério pode ser melhorado sem prejudicar pelo menos um outro critério.

Infelizmente, o ótimo de Pareto quase sempre não fornece uma única solução, mas, um conjunto de soluções chamadas de soluções não-inferiores ou soluções não-dominadas.

Usa-se X^p para denotar este conjunto de soluções e F^p para representar o mapa de X^p no espaço das funções objetivo. É claro que, o conjunto X^p é obtido do conjunto F^p que satisfaz as Eqs. (2.11) e (2.12).

Para ilustrar o conceito de soluções ótimas de Pareto, considere o problema de uma viga em balanço com duas variáveis de decisão: o diâmetro (d) e o comprimento (ℓ) (Deb, 2001).

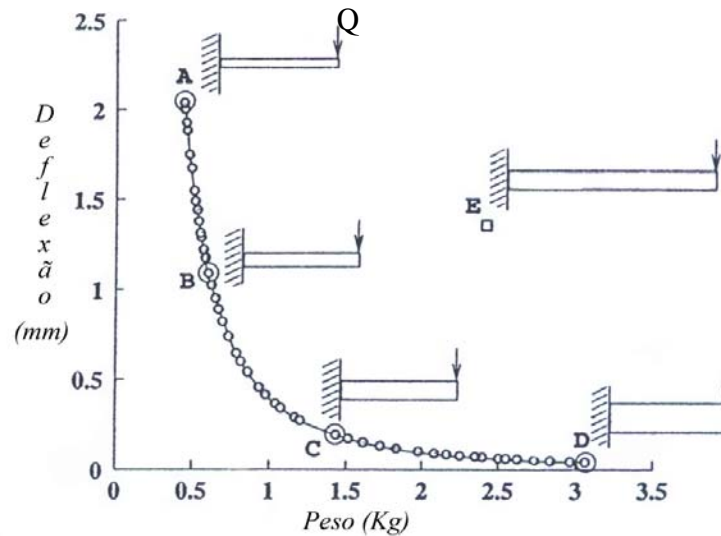


Figura 2.5 - Quatro soluções ótimas de Pareto e uma solução não-ótima.

Seja a viga submetida a uma carga Q em sua extremidade. Considere, também, dois objetivos conflitantes para o problema: minimizar o peso (f_1) e minimizar a deflexão final (f_2). O primeiro objetivo implica em uma solução ótima que tenha uma redução da dimensão (d e ℓ pequenos), então o peso total da viga é mínimo. Mas, se as dimensões são pequenas, a viga não será adequadamente rígida e a deflexão final da viga será grande.

Por outro lado, se a viga está minimizada em relação à deflexão final, a solução acarreta em dimensões grandes, fazendo com que o peso da viga seja elevado. Para a discussão, considere duas restrições: a tensão máxima σ_{\max} deve ser menor que a tensão admissível S_y e a deflexão δ menor que o limite especificado δ_{\max} .

Com todas as considerações acima e o vetor x da forma $x = [d \ \ell]^T$ o problema de otimização com dois objetivos é formulado a seguir:

$$\text{Minimizar } f_1(d, \ell) = \rho \frac{\pi d^2}{4} \ell \quad (2.12)$$

$$\text{Minimizar } f_2(d, \ell) = \delta = \frac{64Q\ell^3}{3E\pi d^4} \quad (2.13)$$

$$\text{Sujeito a: } \sigma_{\max} \leq S_y$$

$$\delta \leq \delta_{\max}$$

Aqui, a tensão máxima é calculada como:

$$\sigma_{\max} = \frac{32Q\ell}{\pi d^3} \quad (2.14)$$

Os valores dos parâmetros são:

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$Q = 1 \text{ KN}$$

$$E = 207 \text{ GPa}$$

$$S_y = 300 \text{ MPa}$$

$$\delta_{\max} = 5 \text{ mm}$$

Na Fig. 2.5 estão representadas algumas soluções e cinco destas soluções (marcadas A até E) são tabuladas na Tab. (2.1).

Tabela 2.1 - Cinco soluções para o problema da viga em balanço.

Solução	d (mm)	ℓ (mm)	Peso (Kg)	Deflexão (mm)
A	18,94	200,00	0,44	2,04
B	21,24	200,00	0,58	1,18
C	34,19	200,00	1,43	0,19
D	50,00	200,00	3,06	0,04
E	33,02	362,49	2,42	1,31

Observe que a solução A privilegia o peso mínimo sendo obtido (Deb, 2001) o diâmetro de 18,94mm, por outro lado, a solução D que prioriza a deflexão mínima obtém diâmetro 50mm. Obviamente, a solução A cuja viga tem um peso menor, implica na deflexão final maior que a obtida na solução D. Daí, nenhuma destas soluções podem ser considerada uma melhor que a outra em relação a ambos os objetivos. Quando isto acontece em relação a duas soluções, elas são chamadas de soluções não-dominadas.

Se ambos os objetivos são igualmente importantes, não se pode dizer que as duas soluções analisadas A e D, são ótimas em relação a ambos os objetivos. Destas quatro soluções (A até D), alguns pares de soluções podem ser comparadas entre si considerando ambos os objetivos. A superioridade de uma ou outra não pode ser estabelecida com ambos os objetivos em mente.

Existem muitas soluções que estão unidas pela curva da figura. Encontrando todas as soluções distintas sobre a curva, no contexto de otimização multi-objetivo, elas são chamadas soluções Ótimas de Pareto. A curva formada, unindo estas soluções, é conhecida como Frente Ótima de Pareto.

É importante notar que o espaço objetivo viável não só contém soluções ótimas de Pareto, mas também soluções que não são ótimas. Pode-se então considerar que todo o espaço de busca viável pode ser dividido em dois conjuntos de soluções: um conjunto ótimo de Pareto e um não-ótimo de Pareto.

Considere a solução E na Fig. 2.5 e também na Tab. (2.1). Comparando esta com a solução C, observa-se que esta última é melhor que a solução E em ambos os objetivos, pois a solução E tem peso maior e deflexão final maior que a solução C. Assim, a solução E é uma solução sub-ótima, e não deve ser usada. Quando isto acontece na comparação de duas soluções, é dito que a solução C domina a solução E ou que a solução E é dominada pela solução C. Existem muitas soluções no espaço de busca, que podem ser dominadas ao menos por uma solução no conjunto Ótimo de Pareto, que serão melhores que alguma solução não-ótima de Pareto. Assim, através da discussão acima, na otimização multi-objetivo a questão importante é encontrar as soluções ótimas de Pareto.

Observando que outros pares podem ser escolhidos, como foi feito acima para C e E, um conjunto finito de soluções do espaço de busca pode ser dividido em um conjunto de soluções não-dominadas P_1 e outro de soluções dominadas P_2 .

Existe uma observação importante sobre conjuntos dominados e não-dominados, que vale a pena ser mencionada. Compare as soluções D e E. A solução D é melhor em relação ao segundo objetivo, mas é pior em relação ao primeiro objetivo quando comparada com a solução E. Assim, na ausência das soluções A, B e C, e alguma outra solução não-dominada, pode-se pensar em colocar a solução E no mesmo grupo da solução D. Mas, a presença da solução C estabelece o fato que as soluções C e D são não-dominadas uma em relação à outra, enquanto que a solução E é uma solução dominada.

Assim, o conjunto não-dominado deve ser coletivamente comparado com alguma solução x para estabelecer se a última solução pertence ou não ao conjunto não-dominado. Especificamente, as duas condições seguintes devem ser verdadeiras para um conjunto não-dominado P_1 :

1. Quaisquer duas soluções de P_1 devem ser não dominadas uma em relação à outra.
2. Qualquer solução não pertencente a P_1 é dominada por pelo menos um membro de P_1 .

CAPÍTULO III

REVISÃO: ALGUNS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-CRITÉRIOS

Neste capítulo descreve-se alguns métodos básicos que podem ser usados para minimizar a função multi-objetivo, obtendo-se a solução ótima de Pareto ou um conjunto de tais soluções.

Os métodos descritos necessitam de várias informações sobre a importância de cada critério. Considerando que o pesquisador pode encontrar diferentes formas para tomar decisões, e que diferentes informações sobre a importância do critério podem ser avaliáveis, torna-se difícil indicar qual método pode ser recomendado para resolver um dado problema.

O pesquisador escolhe a melhor solução baseado nas informações que dispõe. Recentemente, muitos métodos foram desenvolvidos para serem usados de forma interativa, para fornecer o maior número de informações possíveis. Durante o procedimento interativo é apresentado ao pesquisador o conjunto de soluções ótimas de Pareto que representa todas as soluções disponíveis.

Este procedimento consiste da seqüência: fase de decisão e fase computacional. Na fase de decisão, o usuário define se é ou não a solução ótima, respeitando a importância implícita de cada critério. Caso não seja a solução ótima, o pesquisador deve fornecer várias informações sobre a direção na qual espera obter a melhor solução. Na fase computacional, uma nova solução é desenvolvida para a próxima fase de decisão. O procedimento termina quando a solução ótima é encontrada (de forma subjetiva).

3.1 Método da Ponderação dos Objetivos (Weighting Objectives Method)

O método da ponderação dos objetivos tem recebido, ao longo dos anos, maior atenção dos pesquisadores e vários modelos particulares com este método tem sido bastante aplicados.

Neste método, os problemas de otimização multi-critérios são substituídos por um problema de otimização escalar através da criação de uma função da forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (3.1)$$

onde $w_i \geq 0$ são os coeficientes de ponderação (ou pesos). Note que os coeficientes de ponderação não refletem proporcionalmente a importância relativa dos objetivos, mas são somente fatores que, quando variados, localizam pontos em X^p . Normalmente assume-se que:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad (3.2)$$

Considerando que os resultados da resolução de um modelo de otimização usando a Eq. (3.1) podem variar significativamente com a mudança dos coeficientes de ponderação, e que sabe-se pouco sobre como escolher estes coeficientes, torna-se necessário obter diferentes aproximações para resolver o mesmo problema usando valores diferentes de w_i . Assim, comparando estas soluções, o pesquisador escolhe a melhor entre elas, baseando-se em sua experiência e conhecimento do problema real.

Para os métodos numéricos de procura do mínimo dado pela Eq. (3.1), a localização depende não somente dos valores w_i , mas também das unidades nas quais as funções são expressas.

Para que w_i possa dar uma idéia da importância dos objetivos, todas as funções devem ser expressas de forma adimensional. Com este objetivo a Eq. (3.1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) c_i \quad (3.3)$$

onde c_i são constantes multiplicadoras.

Usualmente, os melhores resultados são obtidos se $c_i = \frac{1}{f_i^0}$, sendo a solução ideal f_i^0 dada em (2.9). Outra forma para a obtenção das constantes c_i é utilizar os valores

iniciais de cada função: $c_i = \frac{1}{f_i(x^0)}$.

Neste caso o vetor função é normalizado para a seguinte forma

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]^T \text{ onde } f_i = \frac{f_i(x)}{f_i^0}, i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.4)$$

A condição $f_i^0 \neq 0$ é assumida e, se isto não é satisfeita, o que raramente ocorre, outro valor de c_i deve ser escolhido pelo pesquisador.

Considere o exemplo dado na Fig. 2.1, do projeto de uma viga, cujos critérios são dados pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

Os valores ideais são dados por:

$f_1^0 = 3,17 \times 10^6 \text{ mm}^3$, sendo as variáveis de decisão $x = [343,57 \quad 68,71]^T$ (mm) e a outra função $f_2 = 0,48 \times 10^{-3} \text{ mm/N}$.

$f_2^0 = 0,34 \times 10^{-3} \text{ mm/N}$, vetor de decisão $x = [200,00 \quad 40,00]^T$ (mm), neste caso a função $f_1 = 6,03 \times 10^6 \text{ mm}^3$.

Observe que a ordem de grandeza de $f_1(x)$ é muito superior aos valores de $f_2(x)$, assim, ainda que se faça uma grande melhoria em $f_2(x)$ este procedimento teria uma influência muito pequena sobre $f(x)$. Dessa forma, caso seja usada a Eq. (3.1) diferentes valores de w_1 e w_2 sempre darão soluções muito próximas do mínimo da primeira função.

Diferentes valores de w_1 e w_2 fornecerão um subconjunto mais representativo de soluções não inferiores se $f(x)$ é normalizado convertendo a Eq. (3.1) para a seguinte forma:

$$f(x) = w_1 \frac{f_1(x)}{f_1^0} + w_2 \frac{f_2(x)}{f_2^0} \quad (3.5)$$

onde $f_1^0 = 3,17 \times 10^6 \text{ mm}^3$ e $f_2^0 = 0,34 \times 10^{-3} \text{ mm/N}$ são os valores ideais de cada critério para o problema em estudo.

Minimizando esta função para diferentes valores de w_i , obtém-se soluções não-inferiores apresentadas na Tab. 3.1 e ilustradas graficamente na Fig. (3.1).

Tabela 3.1 - Resultados calculados para o método de ponderação para o problema da viga.

w_1	w_2	$x = [x_1, x_2]^T$ (mm)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$ (mm ³ , mm/N)	$f(x)$
0,95	0,05	[343,57; 68,71] ^T	[3,17×10 ⁶ ; 0,48×10 ⁻³] ^T	1,02
0,80	0,20	[343,57; 68,71] ^T	[3,17×10 ⁶ ; 0,48×10 ⁻³] ^T	1,08
0,60	0,40	[343,57; 68,71] ^T	[3,17×10 ⁶ ; 0,48×10 ⁻³] ^T	1,16
0,50	0,50	[340,54; 68,11] ^T	[3,25×10 ⁶ ; 0,47×10 ⁻³] ^T	1,20
0,40	0,60	[319,98; 63,99] ^T	[3,73×10 ⁶ ; 0,43×10 ⁻³] ^T	1,22
0,20	0,80	[245,84; 49,17] ^T	[5,26×10 ⁶ ; 0,36×10 ⁻³] ^T	1,17
0,05	0,95	[200,00; 40,00] ^T	[6,03×10 ⁶ ; 0,34×10 ⁻³] ^T	1,04

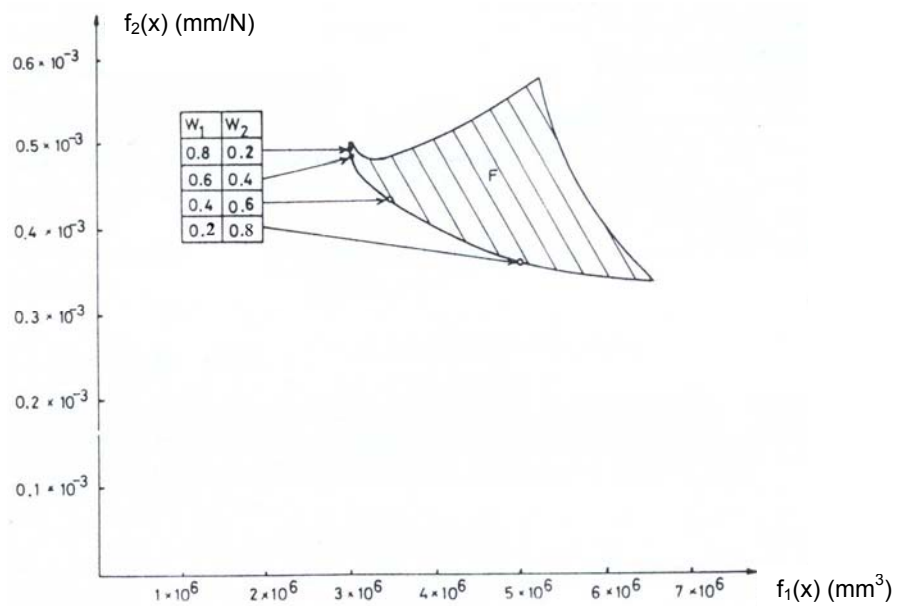


Figura 3.1 - Representação das soluções ótimas para o Método da Ponderação para o problema da viga representado na Fig. 2.1.

3.1.1 Interpretação Geométrica.

Vários métodos de solução requerem que o problema seja convexo. Usando estes métodos para problemas não-convexos, a solução pode não ser obtida. O dilema é a dificuldade para classificar o problema como convexo ou não-convexo. A seguir será definido o termo convexidade: F é convexa se para todos $u^1, u^2 \in F$ e todos $\theta \in [0,1]$

$$f(\theta u^1 + (1-\theta)u^2) \leq \theta f(u^1) + (1-\theta)f(u^2) \quad (3.6)$$

Em outras palavras, o conjunto F é convexo se para todos os pontos u^1, u^2 do conjunto, o segmento linear obtido pela união destes pontos for também do conjunto.

O método de ponderação dos objetivos pode ser interpretado geometricamente. Considere o problema de otimização com dois critérios apresentado na Fig. (3.2). No espaço das funções objetivo pode-se traçar uma reta L com inclinação $-\frac{w_1}{w_2}$. O conjunto L no qual se representa essa reta é tal que:

$$w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) = c \quad (3.7)$$

onde c é uma constante.

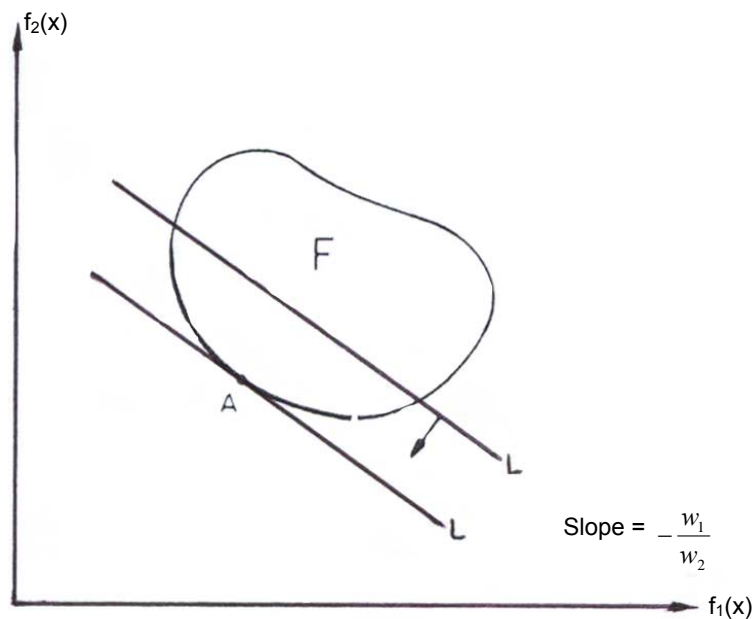


Figura 3.2 - Interpretação geométrica do método de ponderação dos objetivos – Caso Convexo.

A minimização da Eq. (3.1) pode se interpretada como o movimento da reta L com os valores de w_1 e w_2 fixos (constantes) na direção positiva tão longe quanto possível da origem, mas conservando a interseção dos conjuntos L e F . O ponto A para o qual L é tangente a F será o mínimo da Eq. (3.1).

Note que para um problema não-convexo uma grande parte do conjunto de soluções não-inferiores não pode ser avaliada, isto é, não existem valores de w_i que possam localizar os pontos em uma certa região do conjunto F^P .

Considere o problema da Fig. (3.3), o método de ponderação dos objetivos pode encontrar os pontos B e C, mas não o ponto A. É fácil ver que os pontos compreendidos entre D e E não serão avaliados por este método.

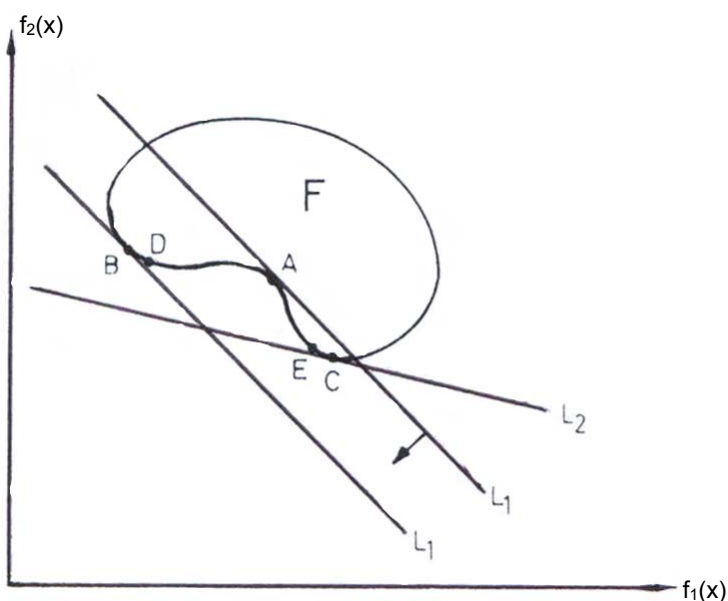


Figura 3.3 - Interpretação geométrica do Método de Ponderação dos Objetivos – Caso Não-Convexo.

3.1.2. Métodos Similares

Métodos mais sofisticados desta classe consideram w_i não como coeficientes, mas como funções, as quais refletem as preferências do pesquisador.

Pode-se destacar o método da função de utilidade (utility function) para a qual a Eq. (3.1) assume a forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k U_i(f_i(x)) \quad (3.8)$$

O método da função de utilidade requer que $U_i(f_i(x))$ seja conhecida a priori para resolver o problema. Uma vez que a avaliação de $U_i(f_i(x))$ é difícil, mesmo para um simples problema de programação linear, a aplicação deste método é bastante limitada.

A concepção da função de utilidade é, entretanto, muito usada em métodos de otimização multi-critérios.

A forma geral desta função é dada a seguir:

$$\max U(f_1(x) f_2(x) \dots f_k(x)), x \in X^p \quad (3.9)$$

onde X^p é o conjunto de soluções não-inferiores e U é a função de utilidade global definida pelo pesquisador. Desde que a forma explícita da Eq. (3.9), na maioria dos casos, não é disponível, em alguns métodos interativos assume-se que U existe mas somente é conhecida implicitamente pelo usuário. Isto significa que U não pode ser especificada, mas que o usuário pode escolher entre as soluções através da comparação das mesmas.

Os métodos nos quais usa-se o conceito da função de utilidade podem garantir a solução mais satisfatória para o pesquisador, desde que U tenha sido corretamente assumida e usada.

O método de ponderação é adequado para ser usado interativamente quando em cada fase da decisão os valores de w_i são gerados com base em um procedimento formal ou informal.

3.2 Método de Otimização Hierárquico (Hierarchical Optimization Method)

O método de otimização hierárquico foi proposto por Walz (1967) e considera a situação na qual o critério pode ser ordenado em termos de importância. Seja a numeração de 1 a k que reflete esta ordem, no sentido que o primeiro critério é o mais importante e o k -ésimo critério é o menos importante.

Conservando esta ordem, minimiza-se cada função objetivo separadamente, adicionando em cada passo uma nova restrição, escrita como a função objetivo limitada por um acréscimo ou decréscimo (ξ_{h_i}) previamente adotado.

Este método pode ser descrito como:

(1) Encontra-se o mínimo para o primeiro critério, ou seja, encontra-se

$$x^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}]^T \text{ tal que}$$

$$f_1(x^{(1)}) = \min f_1(x), x \in X \quad (3.10)$$

Faça o passo 2 para $i = 2, \dots, k$

(2) Encontra-se o mínimo da i -ésima função objetivo, isto é, encontra-se

$$x^{(i)} = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}]^T \text{ tal que}$$

$$f_i(x^{(i)}) = \min f_i(x), x \in X \quad (3.11)$$

com as restrições adicionais:

$$f_{j-1}(x) \leq \left(1 \pm \frac{\xi_{h_{j-1}}}{100} \right) f_{j-1}(x^{j-1}) \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, i \quad (3.12)$$

onde $\xi_{h_{j-1}}$ são os coeficientes assumidos para os acréscimos ou decréscimos das funções dadas em porcentagem.

O sinal '+' refere-se às funções que estão sendo minimizadas, ao passo que o sinal '-' refere-se às funções que estão sendo maximizadas. O ponto obtido na última iteração $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T$ é o ótimo determinado com este método.

Iterativamente, o método de otimização hierárquico pode ser executado solicitando ao usuário que forneça, no i -ésimo passo, o valor de ξ_{h_i} com base no mínimo obtido no $(i - 1)$ -ésimo passo.

Se depois de todos os passos, o resultado não for satisfatório, o pesquisador pode repetir os cálculos assumindo, em cada passo, outro valor para ξ_{h_i} .

Um método de otimização lexicográfico proposto por Ben-Tal (1980) pode ser visto como similar ao método de otimização hierárquico. A diferença é que assume para cada passo o valor de ξ_{h_i} igual a zero.

Como exemplo ilustrativo do método de otimização hierárquico, considere o problema da viga em estudo dado pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

Seja $f_1(x)$, o volume da viga, considerado mais importante que $f_2(x)$, o módulo da rigidez estática. Então o primeiro passo é encontrar $x^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]^T$ tal que

$$f_1(x^{(1)}) = \min f_1(x), x \in X$$

Neste exemplo tem-se $x^{(1)} = [343,57 \quad 68,71]^T$ (mm) e $f_1(x^{(1)}) = 3,17 \times 10^6 \text{ mm}^3$.

O segundo passo é encontrar $x^{(2)} = [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]^T$ tal que

$$f_2(x^{(2)}) = \min f_2(x), x \in X$$

e a restrição adicional é escrita da forma:

$$f_1(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_{h_1}}{100}\right) f_1(x^{(1)})$$

finalmente, os resultados são mostrados na Tab. 3.2.

Tabela 3.2 - Resultados obtidos quando $f_1(x)$ é mais importante que $f_2(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

ξ_{h_1}	$x = [x_1, x_2]^T$ (mm)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$ (mm ³ , mm/N)
0,10	[343,44 68,69] ^T	[3,18 × 10 ⁶ 0,48 × 10 ⁻³] ^T
0,50	[343,57 38,71] ^T	[3,17 × 10 ⁶ 0,48 × 10 ⁻³] ^T
1,00	[342,26 68,45] ^T	[3,20 × 10 ⁶ 0,47 × 10 ⁻³] ^T
5,00	[343,57 68,71] ^T	[3,17 × 10 ⁶ 0,48 × 10 ⁻³] ^T
10,00	[341,28 68,26] ^T	[3,23 × 10 ⁶ 0,47 × 10 ⁻³] ^T
30,00	[307,03 61,40] ^T	[4,02 × 10 ⁶ 0,41 × 10 ⁻³] ^T
50,00	[272,78 54,55] ^T	[4,74 × 10 ⁶ 0,37 × 10 ⁻³] ^T
100,00	[200,00 40,00] ^T	[6,03 × 10 ⁶ 0,34 × 10 ⁻³] ^T

A solução depende do valor de ξ_{h_1} , quanto menor o valor adotado para este coeficiente, maior será a aproximação da solução ideal de f_1 . Por outro lado, quanto maior o valor de ξ_{h_1} , maior será a contribuição de f_2 e o resultado caminha no sentido de f_2^0 .

Seja agora $f_2(x)$, o módulo da rigidez estática, mais importante que $f_1(x)$, o volume da viga. O primeiro passo é encontrar $x^{(2)} = [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]^T$, tal que

$$f_2(x^{(2)}) = \min f_2(x), x \in X$$

Tem-se como resultado: $x^{(2)} = [200,00 \ 40,00]^T$ (mm) e $f_2(x^{(2)}) = 0,34 \times 10^{-3}$ mm/N.

No segundo passo deve-se obter $x^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]^T$, tal que

$$f_1(x^{(1)}) = \min f_1(x), x \in X$$

e a restrição adicional é escrita da forma:

$$f_2(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_{h_2}}{100}\right) f_2(x^{(2)})$$

e tem-se os resultados mostrados na Tab. 3.3:

Tabela 3.3 - Resultados obtidos quando $f_2(x)$ é mais importante que $f_1(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

ξ_{h_2}	$x = [x_1, x_2]^T$ (mm)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$ (mm ³ , mm/N)
0,10	[201,26 40,25] ^T	[6,01 × 10 ⁶ 0,34 × 10 ⁻³] ^T
0,50	[206,46 41,29] ^T	[5,93 × 10 ⁶ 0,34 × 10 ⁻³] ^T
1,00	[212,43 42,49] ^T	[5,83 × 10 ⁶ 0,35 × 10 ⁻³] ^T
5,00	[247,26 49,45] ^T	[5,23 × 10 ⁶ 0,36 × 10 ⁻³] ^T
10,00	[274,78 54,95] ^T	[4,70 × 10 ⁶ 0,38 × 10 ⁻³] ^T
30,00	[329,54 65,91] ^T	[3,51 × 10 ⁶ 0,44 × 10 ⁻³] ^T
50,00	[343,57 68,71] ^T	[3,17 × 10 ⁶ 0,32 × 10 ⁻³] ^T

A solução depende de ξ_{h_2} , tendo um comportamento semelhante ao anterior. Neste caso, quanto menor ξ_{h_2} , mais próximo o resultado estará de f_2^0 .

Como discutido anteriormente, nota-se que a influência de $f_2(x)$ é extremamente pequena sobre $f_1(x)$. Observa-se, ainda, que a escolha da hierarquia dos critérios é fundamental em relação à qualidade da solução desejada.

3.3 Método da Negociação (Trade-Off Method)

Nos métodos de otimização multi-critérios os termos de negociação são bastante usados em diferentes contextos. Existem várias versões do método de negociação com o objetivo de buscar soluções mais eficientes. Algumas variações do método de negociação foram propostas por Haines e Hall (1974), Oppenheimer (1978), Sakawa (1981) e Musselman e Tavalage (1980). Normalmente, classifica-se um método na categoria da negociação se o conceito de trocar o valor de uma função objetivo por outro valor da função é usado para determinar o próximo passo na busca da solução.

Em muitos casos o conceito acima é utilizado através da minimização de uma das funções objetivo, considerando as outras como restrições flexíveis. Desse modo, este método é também chamado método restrito ou método ξ -restrito.

Uma simples descrição do método é dada a seguir:

(1) Encontre o mínimo da r -ésima função objetivo, isto é, encontre x^* tal que

$$f_r(x^*) = \min f_r(x), \quad x \in X \quad (3.13)$$

sujeita a restrições adicionais da forma:

- Para funções de minimização $f_i(x) \leq \xi_{n_i}$, para $i = 1, 2, \dots, k$ e $i \neq r$ (3.14)
- Para funções de maximização $f_i(x) \geq \xi_{n_i}$, para $i = 1, 2, \dots, k$ e $i \neq r$

onde ξ_{n_i} são os valores adotados, os quais não podem ser ultrapassados pelas funções objetivo.

(2) Repita o processo (1) para diferentes valores de ξ_{n_i} . Uma boa escolha do conjunto ξ_{n_i} pode ser útil durante a decisão. A busca é interrompida quando o pesquisador encontrar uma solução satisfatória.

Pode ser necessário repetir o procedimento acima para diferentes índices r .

De forma a ajudar na escolha razoável de ξ_{n_i} , frequentemente torna-se útil minimizar cada função objetivo separadamente, isto é, encontrar f_i^0 para $i = 1, \dots, k$.

Conhecendo estes valores, uma forma mais adequada é escrever a Eq. (3.14) como segue:

$$f_i(x) \leq f_i^0 + \Delta f_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k \text{ e } i \neq r \quad (3.15)$$

onde Δf_i são os valores assumidos da função incremento.

Pode ser também conveniente construir uma “Tabela de Pagamento” (pay-off table) conforme apresentado na Tab. 3.4. Nesta tabela, a linha i corresponde à solução ótima $x^{0(i)}$ a qual minimiza a i -ésima função objetivo, f_{ji} são os valores obtidos da j -ésima função $f_j(x)$ quando a i -ésima função $f_i(x)$ alcança o mínimo f_i^0 .

Tabela 3.4 - Tabela de Pagamento para o Método da Negociação.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$...	$f_i(x)$...	$f_k(x)$
$x^{o(1)}$	f_1^o	f_{21}	...	f_{i1}	...	f_{k1}
$x^{o(2)}$	f_{12}	f_2^o	...	f_{i2}	...	f_{k2}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x^{o(i)}$	f_{1i}	f_{2i}	...	f_i^o	...	f_{ki}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x^{o(k)}$	f_{1k}	f_{2k}	...	f_{ik}	...	f_k^o

A tabela de pagamento dada em Tab. 3.5, refere-se à função incremento (Δf_{ij}), onde Δf_{ji} é definido com segue:

$$\Delta f_{ji} = \left| f_j(x^{0(i)}) - f_j^0 \right| \quad (3.16)$$

Tabela 3.5 - Tabela de Pagamento usando a função incremento Δf_{ij} .

	$\Delta f_1(x)$	$\Delta f_2(x)$...	$\Delta f_i(x)$...	$\Delta f_k(x)$
$x^{o(1)}$	0	Δf_{21}	...	Δf_{i1}	...	Δf_{k1}
$x^{o(2)}$	Δf_{12}	0	...	Δf_{i2}	...	Δf_{k2}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x^{o(i)}$	Δf_{1i}	Δf_{2i}	...	0	...	Δf_{ki}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x^{o(k)}$	Δf_{1k}	Δf_{2k}	...	Δf_{ik}	...	0

Similarmente, pode-se construir a tabela de pagamento utilizando incrementos relativos das funções.

$$\Delta f_{ji}^r = \left| \frac{f_j(x^{0(i)}) - f_j^0}{f_j(x^{0(i)})} \right| \quad (3.17)$$

A tabela de pagamento também pode ser útil na tomada de decisão quando aplicada a outros métodos de otimização multi-critérios.

Como exemplo deste método, considere o problema da viga em estudo definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

A tabela de pagamento para os valores das funções é:

	$f_1(x)$	$f_2(x)$
$x^{o(1)} = [343,57 \quad 68,71]^T$	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$
$x^{o(2)} = [200,00 \quad 40,00]^T$	$6,03 \times 10^6$	$0,34 \times 10^{-3}$

Em função dos incrementos, dados pela Eq. (3.16), tem-se:

	$\Delta f_1(x)$	$\Delta f_2(x)$
$x^{o(1)} = [343,57 \quad 68,71]^T$	0	$0,14 \times 10^{-3}$
$x^{o(2)} = [200,00 \quad 40,00]^T$	$2,86 \times 10^6$	0

E em função dos incrementos relativos, Eq. (3.17), obtém-se:

	$\Delta f_1^r(x)$	$\Delta f_2^r(x)$
$x^{o(1)} = [343,57 \quad 68,71]^T$	0	0,28
$x^{o(2)} = [200,00 \quad 40,00]^T$	0,47	0

Para aplicar o método, seja o problema de otimização definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5), considerando a minimização do volume da viga, sujeita a uma restrição adicional.

Então deve-se encontrar $x^* = [x_1, x_2]^T$ tal que

$$f_1(x) = \min 0,785[x_1(6400 - x_2^2) + (1000 - x_1)(10000 - x_2^2)] \text{ mm}, x \in X$$

Sujeito à restrição adicional, dado por (3.15) e (3.17), escrita como:

$$\frac{f_2(x) - f_2^o(x)}{f_2(x)} \leq \xi_{n_2}$$

Na tabela anterior, verifica-se que o valor limite para $f_2(x)$ é $\xi_{n_2} = 0,28$.

Tabela 3.6 - Resultados dos cálculos para o Método de Negociação minimizando $f_1(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

ξ_{n_2}	$x = [x_1, x_2]^T$ (mm)	$f_1(x)$ (mm ³)	$f_2(x)$ (mm/N)
0,05	[249,03 ; 49,81] ^T	$5,20 \times 10^6$	$0,36 \times 10^{-3}$
0,10	[279,59 ; 55,92] ^T	$4,60 \times 10^6$	$0,38 \times 10^{-3}$
0,28	[343,56 ; 68,71] ^T	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$
0,50	[343,57 ; 68,71] ^T	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$

Observe que para valores maiores ou iguais que ξ_{n_2} tem-se a solução ideal f_1^0 . Para valores menores que ξ_{n_2} , negocia-se a solução dando maior importância à minimização de $f_2(x)$.

Para este mesmo problema, minimizando agora a função $f_2(x)$, e tratando $f_1(x)$ como uma restrição adicional, considerando o valor limite para $f_1(x)$, $\xi_{n_1} = 0,47$, tem-se os resultados apresentados na Tab. 3.7.

Tabela 3.7 - Resultados dos cálculos para o Método da Negociação minimizando $f_2(x)$, no problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

ξ_{n_1}	$x = [x_1, x_2]^T$ (mm)	$f_2(x)$ (mm/N)	$f_1(x)$ (mm ³)
0,10	[328,84 ; 65,77] ^T	$0,44 \times 10^{-3}$	$3,52 \times 10^6$
0,20	[309,57 ; 61,91] ^T	$0,41 \times 10^{-3}$	$3,97 \times 10^6$
0,47	[205,87 ; 41,17] ^T	$0,34 \times 10^{-3}$	$5,94 \times 10^6$
0,50	[200,00 ; 40,00] ^T	$0,34 \times 10^{-3}$	$6,03 \times 10^6$

Observe que o comportamento é semelhante, para $\xi_{n_1} \geq 0,47$ tem-se solução ideal f_1^0 . Para valores $\xi_{n_1} < 0,47$ pode-se escolher valores que permitam também a minimização de $f_2(x)$.

3.4 Método do Critério Global (Global Criterion Method)

Neste método, a solução ótima é um vetor de variáveis de decisão que minimiza algum critério global. A função que descreve este critério global deve ser definida pelo pesquisador de forma que obtenha uma solução mais próxima possível da solução ideal. A forma mais comum desta função é:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{f_i^o - f_i(x)}{f_i^o} \right)^s \quad (3.18)$$

Para esta equação Boychuk e Ovchimikov (1973) propuseram $s = 1$ e Salukvadze (1974) propôs $s = 2$, mas outros valores para s também podem ser usados.

Naturalmente, a solução obtida após a minimização da Eq. (3.18) diferirá grandemente de acordo com os valores escolhidos para s . Desse modo, o problema é determinar qual s resultaria em uma solução que seja a mais satisfatória para o pesquisador.

Também pode acontecer que, qualquer que seja a escolha de s , a Eq. (3.18) forneça uma solução inaceitável.

3.4.1. Outras formas da função global.

Outra possível medida da “proximidade para a solução ideal” é uma família de Métrica- L_p definida como:

$$L_p(f) = \left[\sum_{i=1}^k |f_i^o - f_i(x)|^s \right]^{1/s}, 1 \leq s \leq \infty \quad (3.19)$$

Por exemplo,

$$L_1(f) = \sum_{i=1}^k |f_i^o - f_i(x)| \quad (3.20)$$

$$L_2(f) = \left[\sum_{i=1}^k (f_i^o - f_i(x))^2 \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

$$L_\infty(f) = \max |f_i^o - f_i(x)|, i \in I \quad (3.22)$$

Note que a minimização de $L_2(f)$ equivale à minimização da distância Euclidiana entre o valor da função e a solução ideal.

Ao invés de se trabalhar com a distância no sentido absoluto, é recomendado o uso de distâncias relativas, assim a Eq. (3.19) pode ser reescrita como:

$$L_p(f) = \left[\sum_{i=1}^k \left| \frac{f_i^o - f_i(x)}{f_i^o} \right|^s \right]^{1/s}, 1 \leq s \leq \infty \quad (3.23)$$

Koski (1981) propôs uma Métrica- L_p com um vetor normalizado da função objetivo na forma:

$$f_i(x) = \frac{f_i(x) - \min f_i(x)}{\max f_i(x) - \min f_i(x)}, x \in X \quad (3.24)$$

Neste caso, os valores de todas as funções normalizadas são limitadas pelo intervalo de [0, 1].

O método do critério global com Métrica- $L_\infty(f)$ relativa é também chamado o método min-max, daí para esta métrica o ótimo x^* é definido como segue:

$$f(x^*) = \min \max \left| \frac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0} \right| \quad (3.25)$$

Posteriormente, poderá ser verificado que a equação acima é igual ao primeiro passo que define o ótimo no sentido min-max (Eq. 3.38).

Usando o método do critério global uma solução não-inferior é obtida. Se certos parâmetros w_i são usados como pesos para os critérios, um determinado conjunto de soluções não-inferiores pode ser obtido. Assim, existem várias possibilidades resultantes da aplicação de métodos baseados na abordagem min-max.

Um método ligeiramente deferente foi proposto por Wierzbicki (1978, 1980). Neste método a função global tem uma forma tal que penaliza os desvios em relação a uma função objetivo definida como referência. Seja um ponto interessante do espaço de trabalho, escolhido pelo pesquisador para o cálculo da função objetivo de referência. Seja $f^r = [f_1^r, f_2^r, \dots, f_k^r]^T$ um vetor definido por este ponto. Então, a função a ser minimizada tem a forma:

$$F(x, f^r) = - \sum_{i=1}^k (f_i(x) - f_i^r)^2 + e \sum_{i=1}^k (\max(0, f_i(x) - f_i^r))^2 \quad (3.26)$$

onde $e > 0$ é um coeficiente de penalidade, que pode ser escolhido como constante.

Minimizando a Eq. (3.26) para o ponto assumido f^r obtém-se a solução não-inferior a qual é próxima deste ponto. Se pontos diferentes f^r são escolhidos, o procedimento resulta em diferentes soluções.

Note que, se métodos numéricos de otimização são usados, as unidades nas quais as funções objetivo são expressas influenciarão sobre os resultados obtidos. Assim, um procedimento usual é trabalhar com as funções objetivo normalizadas.

Para o exemplo em estudo, representado na Fig. 2.1 e definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5), obteve-se os resultados apresentados na Tab. 3.8.

Tabela 3.8 – Resultado ótimo aplicando o Método do Critério Global, para o problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

Técnica	x^* (mm)	$f_1(x)$ (mm ³)	$f_2(x)$ (mm/N)
Métrica-L ₁ :			
$\min L_1(f) = f_1^o - f_1(x) + f_2^o - f_2(x) $	[343,57 68,71] ^T	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$
Métrica-L ₂ relativa:			
$\min f = \left(\frac{f_1^o - f_1(x)}{f_1^o} \right)^2 + \left(\frac{f_2^o - f_2(x)}{f_2^o} \right)^2$	[320,71 64,14] ^T	$3,71 \times 10^6$	$0,43 \times 10^{-3}$
Métrica-L ₂ :			
$\min L_2(f) = [(f_1^o - f_1(x))^2 + (f_2^o - f_2(x))^2]^{\frac{1}{2}}$	[343,57 68,71] ^T	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$
Métrica-L ₃ :			
$\min L_3(f) = \left(f_1^o - f_1(x) ^3 + f_2^o - f_2(x) ^3 \right)^{\frac{1}{3}}$	[343,57 68,71] ^T	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$
Métrica-L ₃ relativa:			
$\min f = \left(\left \frac{f_1^o - f_1(x)}{f_1^o} \right ^3 + \left \frac{f_2^o - f_2(x)}{f_2^o} \right ^3 \right)^{\frac{1}{3}}$	[317,81 63,56] ^T	$3,78 \times 10^6$	$0,42 \times 10^{-3}$

Utilizando a Métrica-L₂ relativa e a Métrica-L₃ relativa, os resultados foram semelhantes, pois a idéia é minimizar o erro relativo das funções em relação aos valores ideais. As soluções obtidas representam um compromisso entre as duas funções objetivo. Nas outras métricas apresentadas, o “princípio” é minimizar o erro absoluto da função em relação aos valores ideais. Por esse motivo os resultados obtidos nestes casos foram semelhantes entre si e aproximaram-se da solução ideal f_1^o , uma vez que o valor absoluto de $f_1(x)$ é muito superior a $f_2(x)$, tornando-a predominante na solução.

3.5 Método da Programação de Metas (Goal Programming Method)

Programação de metas foi inicialmente utilizado em um problema de programação linear com uma única função objetivo por Charnes et al (1961). Além disso, a programação de metas ganhou popularidade depois do trabalho de Ignizio (1976), Lee (1972) e vários outros. Romero (1991) fez um levantamento do “estado da arte” desta técnica e listou várias aplicações em engenharia onde a programação de metas foi utilizada (Clayton et al, 1982, Sayyouth, 1981).

Este método requer que o pesquisador especifique metas para cada objetivo que deseja atingir. A idéia principal da programação de metas é encontrar uma solução que atinja metas pré-definidas para cada uma das funções objetivo. Se não existir a solução que atinja as metas pré-especificadas para todas as funções objetivo, a tarefa é encontrar soluções que minimizam desvios em relação às metas. Por outro lado, se esta solução existir, a tarefa do método é identificar esta solução particular. Em certo sentido, esta tarefa é semelhante à tomada de decisão e a solução obtida é uma solução satisfatória, que pode ser diferente da solução ótima.

As metas, isto é, seus valores quantitativos, são considerados como restrições adicionais. Assim, novas variáveis são acrescentadas para representar os desvios em relação às metas pré-determinadas.

A função objetivo especifica os desvios em relação a estas metas e prioriza a realização (sucesso) de cada meta, em termos quantitativos.

Seja uma função objetivo $f(x)$ com um vetor solução x . Sem perder a generalidade, considere que esta função objetivo está sendo minimizada. Na programação de metas, um valor alvo t é escolhido para cada uma das funções objetivo pelo usuário, e a tarefa é então encontrar uma solução que tem um valor objetivo igual a t , sujeito a condição que a solução encontrada seja viável ($x \in S$).

Formulação do problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Meta } (f_i(x) = t_i) , i = 1, k & \\ x \in S & \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde S é a região viável. Se a meta t é menor que o valor ótimo, $f(x^*)$, naturalmente, não existe uma solução viável que atingirá exatamente a meta acima.

O objetivo da programação de metas é encontrar a solução que minimiza o desvio d entre a meta encontrada e a meta desejada t . A solução para este problema é ainda x^* , e o desvio é $d = f(x^*) - t$. Similarmente, se o valor da função objetivo na meta t é maior que o

valor máximo viável, f_{max} , a solução do problema da programação de meta é x , o qual faz $f(x) = f_{max}$. Por outro lado, se o valor da função objetivo na meta t está dentro da faixa $[f(x), f_{max}]$, a solução para o problema, usando este método é a solução viável x que faz o valor objetivo exatamente igual a t . Embora esta solução possa não ser a solução ótima da função restrita $f(x)$, esta será o resultado ótimo obtido através do método de programação de metas.

A programação de metas é preferencialmente aplicada em problemas de otimização multi-objetivo. Na realidade, a programação de metas mostra-se bastante interessante quando múltiplos critérios são considerados. Na Eq. (3.27) as funções foram escritas iguais a t_i ($f_i(x) = t_i$). Mas, as funções podem ser de quatro tipos diferentes, como mostrado abaixo (Steuer, 1986):

1. Menor ou igual a t ($f(x) \leq t$)
2. Maior ou igual a t ($f(x) \geq t$)
3. Igual a t ($f(x) = t$)
4. Dentro da faixa ($f(x) \in [t^{inf}, t^{sup}]$)

De forma a permitir a obtenção das metas acima, duas variáveis não-negativas denominadas desvios (n e p) são usualmente introduzidas. Para a função menor ou igual a t ($f(x) \leq t$), o desvio negativo n é adicionada na função objetivo, então $f(x) + n \geq t$. O desvio n representa uma quantidade a ser adicionada à função objetivo quando esta não atinge a meta t . Aqui, o objetivo da programação é minimizar o desvio n .

$$\begin{array}{c} | \qquad \qquad \qquad | \\ \hline f(x) \quad + n \quad t \end{array} \qquad f(x) + n \geq t, p = 0.$$

O objetivo da programação de metas é minimizar o desvio n para encontrar a solução, de forma que o desvio seja mínimo.

$$\text{Observe que } \begin{cases} f(x) < t, n > 0 \\ f(x) \geq t, n = 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Para a função maior ou igual a t ($f(x) \geq t$), um desvio positivo p é subtraído da função objetivo, então, $f(x) - p \leq t$. Aqui, o desvio p representa uma quantidade a ser subtraída do valor objetivo quando esta ultrapassa a meta t .

$$\begin{array}{c} | \qquad \qquad \qquad | \\ \hline t \quad - p \quad f(x) \end{array} \qquad f(x) - p \leq t, n = 0.$$

$$\text{Observe que } \begin{cases} f(x) > t, p > 0 \\ f(x) \leq t, p = 0 \end{cases} \qquad (3.29)$$

Para a meta igual a t ($f(x) = t$) a função objetivo precisa ter o valor t , e assim são usados ambos os desvios positivos e negativos, então $f(x) - p + n = t$. Aqui, o objetivo do método é minimizar a soma $(p + n)$, então a solução obtida é a distância mínima em relação a meta nas duas direções.

Se $f(x) > t$, o desvio p deve ser um valor positivo diferente de zero e se $f(x) < t$, o desvio n deve ser um valor positivo diferente de zero. Para $f(x) = t$, ambos os desvios p e n devem ser zeros. O quarto tipo da meta é tratado usando duas restrições:

$$\begin{cases} f(x) - p \leq t^{\text{inf}} \\ f(x) + n \geq t^{\text{sup}} \end{cases} \quad (3.30)$$

O objetivo aqui é minimizar a soma $(p + n)$. Todas as restrições acima podem ser substituídas por uma restrição de igualdade

$$f(x) - p + n = t \quad (3.31)$$

Assim, para resolver o problema de programação de metas, cada meta é convertida em ao menos uma restrição de igualdade, e o objetivo é minimizar todos os desvios p e n . Existem vários tipos de métodos de programação de metas dependendo da forma que os desvios são minimizados. Neste estudo, discute-se brevemente três métodos populares. Em todos esses métodos assume-se que são k objetivos $f_k(x)$, cada uma contendo os quatro tipos de metas.

3.5.1 Programação de metas ponderada

Considere uma função multi-objetivo, onde para cada função objetivo estabelece-se uma meta:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } k \sum_{j=1} (w_j p_j + \beta_j n_j) \\ & \text{sujeito } a: f_j(x) - p_j + n_j = t_j \quad j = 1, 2, \dots, k \\ & \quad x \in S \\ & \quad n_j, p_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aqui, os parâmetros w_j e β_j são fatores de ponderação para minimizar os desvios do j -ésimo objetivo em relação a j -ésima meta.

Para a função menor ou igual a t ($f(x) \leq t$), o parâmetro w_j é zero ($p_j = 0$). Analogamente, para a função maior ou igual a t ($f(x) \geq t$), o parâmetro β_j é zero ($n_j = 0$). Para o intervalo de t ($f(x) \in [t^{inf}, t^{sup}]$), existe um par de restrições para cada função objetivo. Usualmente, os fatores de ponderação w_j e β_j são valores fixados pelo pesquisador.

$$\text{Objetivos : } f_1 = 10x_1 \leq 2$$

$$\text{Exemplo: } f_2 = \frac{10 + (x_2 - 5)^2}{10x_1} \leq 2 \quad (3.33)$$

$$\text{sujeito a : } S \equiv (0,1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 10)$$

O intervalo de decisão que contém a solução viável ($x \in S$) está mostrado na Fig. 3.4. As metas ($f_1 \leq 2$ e $f_2 \leq 2$) estão mostradas na Fig. 3.5.

É claro que não existe a solução viável que atinja ambas as metas. Então a solução resultante para este problema violará uma das duas ou ambas as metas acima, mas em um sentido mínimo.

Resolvendo este problema usando a programação de meta ponderada, o problema (3.33) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } w_1 p_1 + w_2 p_2, && (\beta_1 = \beta_2 = 0) \\ &\text{sujeito a : } 10x_2 - p_1 \leq 2, && (n_1 = 0) \\ &\frac{10 + (x_2 - 5)^2}{10x_1} - p_2 \leq 2, && (n_2 = 0) \\ &0,1 \leq x_1 \leq 1, && 0 \leq x_2 \leq 10 \\ &0 \leq p_1 \leq 10, && 0 \leq p_2 \leq 10 \end{aligned} \quad (3.34)$$

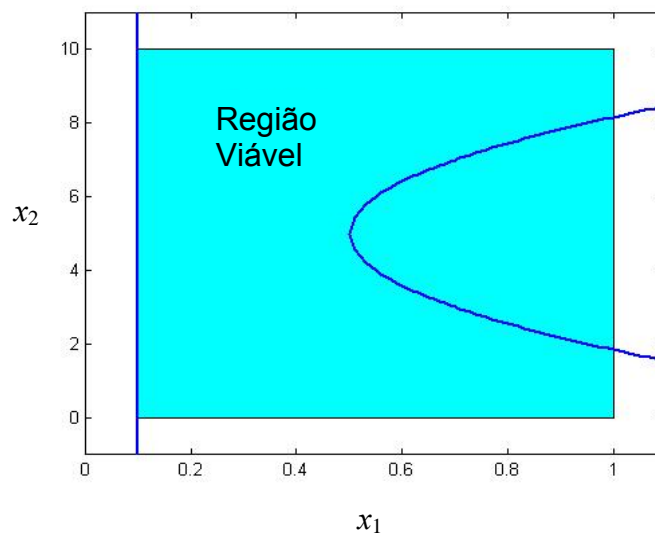


Figura 3.4 - Ilustração gráfica da região viável do problema de programação de metas definido na Eq. (3.33).

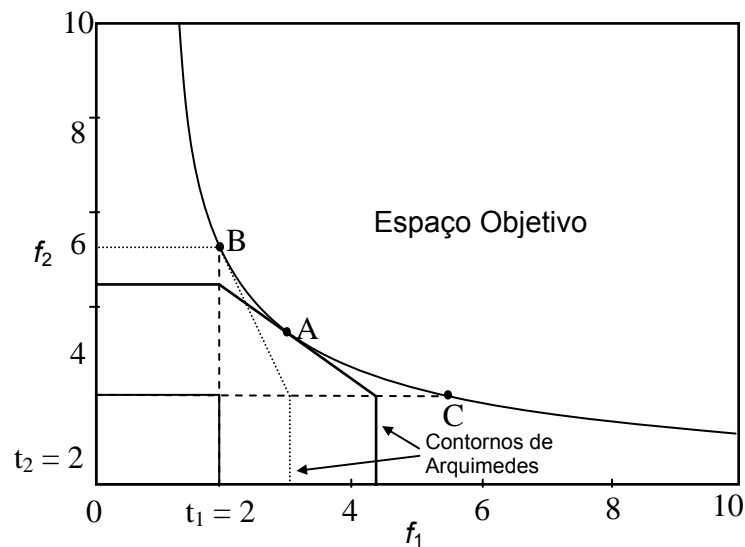


Figura 3.5 - Ilustração gráfica do espaço objetivo do problema de programação de metas definido na Eq. (3.33).

Note que no problema de programação não-linear acima, os desvios n_1 e n_2 das restrições são eliminados usando uma relação “ \leq ”. As Fig. 3.4 e Fig. 3.5 deixa claro o conceito de objetivo a ser alcançado. Uma vez que, como citado anteriormente, não existe solução viável que atinja ambas as metas, o objetivo da programação é encontrar a solução na região viável que minimiza os desvios em relação às metas de ambos os objetivos.

Agora surge a dependência da solução com os fatores de ponderação w_1 e w_2 . Escolhendo um valor para estes pesos, constrói-se uma função de penalidade artificial (também conhecida como função de utilidade) fora do espaço objetivo. Assim, o objetivo $w_1 p_1 + w_2 p_2$ produz contornos (conhecidos como contornos de Arquimedes), como mostrado na Fig. 3.5.

A minimização do problema dado pela Eq. (3.34) para um conjunto de valores de w_1 e w_2 , permite encontrar uma solução que pertence a qualquer um dos contornos de Arquimedes, o qual é tangente ao espaço objetivo viável da nova função objetivo definida pela Eq. (3.34). Considerando valores iguais para os pesos ($w_1 = w_2 = 0,50$) tem-se um contorno mínimo, marcado pela linha contínua, mostrado na Fig. 3.5, e a solução resultante, marcado por A, é dada a seguir:

$$x_1 = 0,32; x_2 = 5,00; p_1 = p_2 = 1,16$$

Nesta solução, os valores das funções objetivo são $f_1 = 3,16$ e $f_2 = 3,16$, com isso violando as metas $f_1 \leq 2$ e $f_2 \leq 2$.

Um resultado interessante surge quando são escolhidos fatores de ponderação diferentes. Por exemplo, se são escolhidos $w_1 = 1,00$ e $w_2 = 0,00$, o contorno resultante é

mostrado por uma linha pontilhada e a solução correspondente, marcada por B, é a seguinte:

$$x_1 = 0,20; x_2 = 5,00; p_1 = 0,00; p_2 = 1,16$$

os valores das funções objetivo são $f_1 = 2,00$ e $f_2 = 5,00$.

Por outro lado, se são escolhidos $w_1 = 0,00$ e $w_2 = 1,00$, a solução resultante, marcada por C, é:

$$x_1 = 0,50; x_2 = 4,45; p_1 = 7,82; p_2 = 0,00$$

os valores das funções objetivo são $f_1 = 5,00$ e $f_2 = 2,00$.

Soluções A, B e C são mostradas na Fig. 3.5. A Fig. 3.4 mostra que existe muito mais soluções dentro do intervalo $0,20 \leq x_1 \leq 0,50$ e $x_2 = 5,00$, cada uma da qual é a solução do problema de programação acima para diferentes conjuntos de fatores de ponderação w_1 e w_2 .

Assim, observa-se que a solução do problema de programação de metas ponderada depende largamente da escolha dos fatores de ponderação e que possui dificuldades análogas àquelas encontradas no método de ponderação estudado anteriormente.

No problema da viga em estudo, definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5), tem-se a seguinte formulação:

$$\text{Minimizar } f = w_1 p_1 + w_2 p_2$$

Sujeito às restrições originais do problema dadas pela Eq. (2.3) além de duas restrições adicionais (adimensionalizadas), que são obtidas estabelecendo que as metas a serem atingidas para cada função seja igual aos valores ideais das mesmas:

$$g_6(x) = \frac{f_1(x)}{f_1^o} - p_1 \leq 1 \quad (3.35)$$

$$g_7(x) = \frac{f_2(x)}{f_2^o} - p_2 \leq 1. \quad (3.36)$$

sendo as restrições laterais: $0 < x_1 < 1000$; $40 < x_2 < 75,20$; $-0,5 < p_1 < 0,5$; $-0,5 < p_2 < 0,5$. Os resultados obtidos são mostrados na Tab. 3.9 e como pode ser observado, para o problema da viga, o método obteve resultados satisfatórios quando comparado aos

resultados obtidos através dos métodos anteriores. Considerando a prioridade para w_1 os valores obtidos é o valor ideal f_1^0 , quando a prioridade é para w_2 , os valores tendem para a solução ideal f_2^0 .

Tabela 3.9 - Resultados obtidos do Método da Programação de Metas para o problema da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

w_1	w_2	$x = [x_1, x_2]^T (mm)$	$f_1(x) (mm^3)$	$f_2(x) (mm/N)$
0,90	0,10	$[343,57 \ 68,71]^T$	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$
0,70	0,30	$[343,57 \ 68,71]^T$	$3,17 \times 10^6$	$0,48 \times 10^{-3}$
0,50	0,50	$[340,54 \ 68,11]^T$	$3,25 \times 10^6$	$0,47 \times 10^{-3}$
0,30	0,70	$[290,41 \ 58,08]^T$	$4,38 \times 10^6$	$0,39 \times 10^{-3}$
0,10	0,90	$[271,96 \ 54,39]^T$	$4,76 \times 10^6$	$0,37 \times 10^{-3}$
0,01	0,99	$[271,96 \ 54,39]^T$	$4,76 \times 10^6$	$0,37 \times 10^{-3}$

3.5.2 Programação de metas lexicográficas.

Nesta abordagem, diferentes metas são classificadas em vários níveis de prioridades. A meta com o primeiro nível de prioridade é muito mais importante que alguma meta com o nível superior. Assim, é importante cumprir as metas do primeiro nível antes de considerar as metas do segundo nível de prioridade. Alguns pesquisadores argumentam que tal consideração das metas é mais prática (Ignizio, 1976), embora existem algumas críticas dessa metodologia (Zeleny, 1982).

Esta abordagem formula e resolve um número de problemas de programação de metas seqüencial. Primeiro, somente as metas e restrições correspondentes ao primeiro nível de prioridade são consideradas na formulação do problema de programação de metas, sendo obtido sua solução. Se existir múltiplas soluções para este problema, outro problema de programação de metas é formulado considerando as metas do segundo nível de prioridade. Neste caso, o objetivo é só minimizar alguns desvios nas metas do segundo nível de prioridade. Mas, as metas do primeiro nível são usadas como fortes restrições tal que a solução obtida não viole as metas do primeiro nível. Esse processo continua com metas de nível superior na seqüência. O processo é encerrado assim que um dos problemas de programação resulte em uma única solução. Quando isto acontece, todas as metas subseqüentes de nível superior de prioridades são consideradas pouco importantes e

são conhecidas como metas resultantes (Romero, 1991). Usualmente, uma única solução ótima de Pareto é encontrada por este método.

Considere um caso qualquer, onde o espaço das funções f_1 e f_2 são representados na Fig. 3.6.

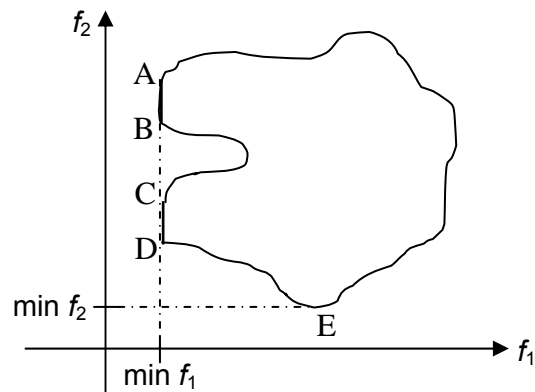


Figura 3.6 - A programação de metas lexicográfica.

Se o objetivo f_1 é mais importante que f_2 , minimiza-se o problema com f_1 primeiro, ignorando f_2 . Neste caso, encontra-se soluções múltiplas em AB e CD no primeiro nível da programação de meta. Daí, como existe mais de uma solução para este problema, procede-se para o segundo nível da otimização, onde f_2 é minimizada. A procura é limitada entre soluções encontradas no primeiro nível da programação. A solução do segundo nível da programação é D, que é a solução mínima de f_2 entre todas as soluções em AB e CD. Portanto, a solução D é a solução principal do problema. É interessante notar que se f_2 é considerada mais importante que f_1 , então a solução E poderá ser a única solução ótima do primeiro nível de otimização e o processo poderá parar aqui. A solução E será declarada como solução principal do problema.

3.5.3 Programação de Metas usando desvio Máximo

Esta metodologia é análoga à programação de meta ponderada, mas em vez de minimizar a soma ponderada dos desvios em relação às metas, esta soma deve obedecer a um valor máximo de desvio d , escrito na forma de restrição e este desvio máximo é minimizado. Resultando em um problema de programação não-linear, dado por:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } d \\
& \text{sujeito a: } w_j p_j + \beta_j n_j \leq d, \quad j = 1, 2, \dots, k \\
& \quad f_j(x) - p_j + n_j = t_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \\
& \quad x \in S \\
& \quad n_j, p_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Aqui, o parâmetro d é o desvio máximo. Este método requer a escolha dos fatores de ponderação w_j e β_j , que dependem da análise do usuário.

3.6 Ótimo Min-Max

A idéia do ótimo min-max para aplicações nos problemas de otimização multi-critérios, foi tomada da teoria dos jogos, onde necessita-se resolver situações de conflitos.

A aproximação min-max para um modelo linear foi proposta por Jutler (1967) e Solich (1969). E foi posteriormente desenvolvida por Osyczka (1978 e 1981).

O ótimo min-max compara os desvios relativos obtidos de cada função objetivo $f_i(x)$ com o vetor dado pela solução ideal f_i^o . O desvio relativo pode ser calculado por:

$$z_i'(x) = \frac{|f_i(x) - f_i^o|}{|f_i^o|}, \quad i \in I, \quad x \in X \tag{3.38}$$

ou

$$z_i''(x) = \frac{|f_i(x) - f_i^o|}{|f_i(x)|}, \quad i \in I, \quad x \in X \tag{3.39}$$

Agora define-se o ótimo min-max como a seguir:

- Um ponto $x^* \in X$ é ótimo min-max, se para todo $x \in X$ a seguinte fórmula recursiva é satisfeita:

$$\underline{\text{Passo 1:}} \quad v_1(x^*) = \min \max\{z_i(x)\}, \quad i \in I, \quad x \in X \tag{3.40}$$

E então $I_1 = \{i_1\}$, onde i_1 é o índice para o qual o valor de $z_i(x)$ é máximo.

Se existir um conjunto de soluções $x_1 \subset X$ no qual satisfaz o passo (1), então:

$$\underline{\text{Passo 2:}} \quad v_2(x^*) = \min \max\{z_i(x)\}, \quad i \in I, \quad x \in X_1, i \notin I_1 \tag{3.41}$$

E então $I_1 = \{i_1, i_2\}$, onde i_2 é o índice para o qual o valor de $z_i(x)$ nesse passo é máximo.

Se existir um conjunto de soluções $x_{r-1} \subset X$ nos quais satisfazem o passo ($r-1$), então:

$$\text{Passo } r: v_r(x^*) = \min \max\{z_i(x)\}, \quad i \in I, \quad x \in X_{r-1}, i \notin I_{r-1} \quad (3.42)$$

E então $I_r = \{i_{r-1}, i_r\}$, onde i_r é o índice para o qual o valor de $z_i(x)$ no r -ésimo passo é máximo.

Se existir um conjunto de soluções $x_{k-1} \subset X$ no qual satisfaz o passo ($k-1$), então:

$$\text{Passo } k: v_k(x^*) = \min z_i(x), \quad i \in I, \quad x \in X_{k-1}, i \notin I_{k-1} \quad (3.43)$$

Onde $v_1(x^*), \dots, v_k(x^*)$ é o conjunto dos valores ótimos dos desvios fracionários ordenados não-decrescentes.

Esse ótimo pode ser escrito como: conhecendo a solução ideal de cada função objetivo, as quais podem ser obtidas resolvendo separadamente o problema de otimização para cada critério, a solução desejada é aquela que fornece o menor valor dos incrementos relativos de todas as funções objetivo.

O ponto $x^* \in X$ o qual satisfaz o passo (1) pode ser chamado a melhor solução considerando todos os critérios simultaneamente e os termos de mesma importância.

Com Vanderplaats (1999) é apresentado um método similar denominado otimização de compromisso. Como exemplo ilustrativo tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\text{Otimizar } \begin{cases} f_1(x) = x_1 + x_1 x_2^2 \rightarrow \min \\ f_2(x) = x_1^2 x_2 + x_2 \rightarrow \min \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\text{Sujeita a } \begin{cases} g_1(x) = 12 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(x) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 16x_2 - 80 \geq 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Em todos os casos que serão estudados nesta dissertação será considerado um conjunto finito das soluções de Pareto obtido através do Método da Ponderação dos Objetivos. Para este exemplo, o conjunto adotado é apresentado na 1ª coluna da Tab. 3.10.

Seja o ponto $x = [2,08 \quad 7,30]^T$, das Eqs. (3.44), resulta:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= 2,08 + 2,08 \cdot (7,3)^2 = 113,12 \\ f_2(x) &= (2,08)^2 \cdot 7,30 + 7,30 = 38,96 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = [113,12, 38,96]^T$$

De forma análoga, para todas as soluções consideradas, obtém-se os vetores com os valores das funções objetivo $f_1(x)$ e $f_2(x)$, dados na 2ª coluna da Tab. (3.10). Seja $f_1^0 = \min f_1(x)$ e $f_2^0 = \min f_2(x)$, cujos valores são calculados como: $f_1^0 = 102,26$ e $f_2^0 = 38,77$.

Calcula-se, agora, os desvios relativos da cada função objetivo, dados pelas Eqs. (3.38) e (3.39), resultando para a primeira solução:

$$z_1'(x) = \frac{|f_1(x) - f_1^0|}{|f_1^0|} = \frac{|113,12 - 102,26|}{102,26} = 0,11$$

$$z_1''(x) = \frac{|f_1(x) - f_1^0|}{|f_1(x)|} = \frac{|113,12 - 102,26|}{113,12} = 0,10$$

$$z_2'(x) = \frac{|f_2(x) - f_2^0|}{|f_2^0|} = \frac{|38,96 - 38,77|}{38,77} = 0,00$$

$$z_2''(x) = \frac{|f_2(x) - f_2^0|}{|f_2(x)|} = \frac{|38,96 - 38,77|}{38,96} = 0,00$$

Repetindo este procedimento para todas as soluções constroem-se as colunas dos vetores $z_1'(x)$, $z_1''(x)$, $z_2'(x)$ e $z_2''(x)$.

A 7ª coluna é dada por $z(x) = [z_1(x), z_2(x)]^T$ de modo que $z_1(x) = \max [z_1'(x), z_1''(x)]$ e $z_2(x) = \max [z_2'(x) \text{ e } z_2''(x)]$.

Daí, escolhe-se o $\max \{z_i(x)\}$ e origina-se o vetor que ocupa a 8ª coluna. As respectivas posições dos valores máximos resultam no vetor i_1 da 9ª coluna.

O vetor da última coluna é obtido quando se retira do vetor $z(x)$ o valor $\max \{z_i(x)\}$. Caso o número de variáveis de projeto seja $n > 2$, então a última coluna seria composta por um vetor com $n-1$ variáveis e em seguida repetiria o processo utilizado para a obtenção da 8ª, 9ª e 10ª coluna.

O ponto ótimo é dado pelo valor mínimo entre os valores máximos da 8ª coluna da Tab. 3.10.

No exemplo dado, tem uma única solução, a qual é dada por: $x^* = \begin{bmatrix} 2,24 \\ 6,83 \end{bmatrix}$

representado pelo valor $\min \max \{z_i(x)\} = 0,058$. Para o ponto x^* os valores das funções objetivo são: $f_1(x^*) = 108,27$ e $f_2(x^*) = 40,14$.

Considere o exemplo do projeto da viga, assumindo que o pesquisador não tem idéia sobre a importância de cada critério. Assim, tenta resolver esta situação comparando a solução ideal de cada critério através da técnica do ótimo min-max.

A solução ideal de cada critério, já utilizados nas seções anteriores, são:

(1) Volume da viga

$$\bar{x}^{o(1)} = \begin{bmatrix} 343,57 \text{ mm} \\ 68,71 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

$$f(x^{o(1)}) = \begin{bmatrix} 3,17 \times 10^6 \text{ mm}^3 \\ 0,48 \times 10^{-3} \text{ mm} / N \end{bmatrix}$$

(2) Função relacionada com o módulo de rigidez estática.

$$x^{o(2)} = \begin{bmatrix} 200,00 \text{ mm} \\ 40,00 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

$$f(x^{o(2)}) = \begin{bmatrix} 6,03 \times 10^6 \text{ mm}^3 \\ 0,34 \times 10^{-3} \text{ mm} / N \end{bmatrix}$$

Aplicando o critério do ótimo min-max, conforme descrito nas Eqs. (3.38) a (3.43), constroem-se a Tab. 3.11.

Observando a Tab. 3.11, na 8ª linha, verifica-se que o menor valor do $\max\{z_i(x)\}$, é dado por: $\min \{\max\{z_i(x)\}\} = 0,25$, assim obtém-se a solução:

Tabela 3.10 - Resultados do ótimo Min-Max para o exemplo ilustrativo definido pelas Eqs. (3.44) e (3.45).

$x = [x_1, x_2]^T$	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$	$z_1'(x)$	$z_1''(x)$	$z_2'(x)$	$z_2''(x)$	$z(x) = [z_1(x), z_2(x)]^T$	$\max\{z_i(x)\}$	i_1	$z_i(x), i \neq i_1$
[2,08 7,30] ^T	[113,12 38,96] ^T	0,11	0,10	0,00	0,00	[0,11; 0,00] ^T	0,11	1	0,00
[2,10 7,21] ^T	[111,64 39,17] ^T	0,09	0,08	0,01	0,01	[0,09; 0,01] ^T	0,09	1	0,01
[2,13 7,13] ^T	[110,36 39,44] ^T	0,08	0,07	0,02	0,02	[0,08; 0,02] ^T	0,08	1	0,02
[2,18 6,97] ^T	[108,27 40,14] ^T	0,06	0,05	0,03	0,03	[0,06; 0,03] ^T	0,06	1	0,03
[2,24 6,83]^T	[106,62 41,02]^T	0,04	0,04	0,06	0,05	[0,04; 0,06]^T	0,06	2	0,04
[2,27 6,76] ^T	[105,93 41,53] ^T	0,04	0,03	0,07	0,07	[0,04; 0,07] ^T	0,07	2	0,04
[2,30 6,69] ^T	[105,31 42,09] ^T	0,03	0,03	0,09	0,08	[0,03; 0,09] ^T	0,09	2	0,03
[2,37 6,56] ^T	[104,26 43,37] ^T	0,02	0,02	0,12	0,11	[0,02; 0,12] ^T	0,12	2	0,02
[2,45 6,42] ^T	[103,43 44,91] ^T	0,01	0,01	0,16	0,14	[0,01; 0,16] ^T	0,16	2	0,01
[2,54 6,28] ^T	[102,81 46,78] ^T	0,00	0,00	0,21	0,17	[0,00; 0,21] ^T	0,21	2	0,00
[2,59 6,21] ^T	[102,58 47,87] ^T	0,00	0,00	0,23	0,19	[0,00; 0,23] ^T	0,23	2	0,00
[2,64 6,14] ^T	[102,41 49,08] ^T	0,00	0,00	0,27	0,21	[0,00; 0,27] ^T	0,27	2	0,00

$$x^* = \begin{bmatrix} 319,98 \text{ mm} \\ 63,99 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

$$f(x^*) = \begin{bmatrix} 3,73 \times 10^6 \text{ mm}^3 \\ 0,43 \times 10^{-3} \text{ mm/N} \end{bmatrix}$$

Esta solução é bastante similar àquelas encontradas quando foram utilizadas as Métricas- L_2 relativa ou L_3 relativa, como observado na apresentação destes métodos.

Tabela 3.11 - Resultados do ótimo Min-Max para o projeto da viga definido pelas Eqs. (2.3) a (2.5).

$x = [x_1, x_2]^T$ (mm)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$ (mm ³ , mm/N)	$z_1'(x)$	$z_1''(x)$	$z_2'(x)$	$z_2''(x)$	$z(x) = [z_1(x), z_2(x)]^T$	$\max\{z_i(x)\}$	i_1	$z_i(x), i \neq i_1$
[200,00 40,00] ^T	[6,03×10 ⁶ 0,34×10 ⁻³] ^T	0,90	0,47	0,00	0,00	[0,90; 0,00] ^T	0,90	1	0,00
[214,77 42,95] ^T	[5,79×10 ⁶ 0,35×10 ⁻³] ^T	0,83	0,45	0,01	0,01	[0,83; 0,01] ^T	0,83	1	0,01
[245,84 49,17] ^T	[5,26×10 ⁶ 0,36×10 ⁻³] ^T	0,66	0,40	0,05	0,05	[0,66; 0,05] ^T	0,66	1	0,05
[290,40 58,08] ^T	[4,38×10 ⁶ 0,39×10 ⁻³] ^T	0,38	0,28	0,14	0,12	[0,38; 0,14] ^T	0,38	1	0,14
[319,98 63,99]^T	[3,73×10⁶ 0,43×10⁻³]^T	0,18	0,15	0,25	0,20	[0,18; 0,25]^T	0,25	2	0,18
[340,54 68,11] ^T	[3,25×10 ⁶ 0,47×10 ⁻³] ^T	0,02	0,02	0,37	0,27	[0,02; 0,37] ^T	0,37	2	0,02
[343,57 68,71] ^T	[3,17×10 ⁶ 0,48×10 ⁻³] ^T	0,00	0,00	0,40	0,28	[0,00; 0,40] ^T	0,40	2	0,00

CAPÍTULO IV

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nas aplicações que seguintes foi utilizado um micro computador Pentium 4 que permitiu uma execução dos programas com um tempo aproximado de 5 segundos. Nas aplicações 1 e 3 foi utilizado o Método Seqüencial com uma subrotina constr do Matlab, já na aplicação 2 foi usado o Método do Multiplicador do Lagrange Aumentado em um código computacional DOT (FORTRAN).

4.1 Aplicação 1: Problema da Usinagem de um metal.

Considere o problema da usinagem de um metal (Osyczka, 1981), onde pretende-se alcançar dois objetivos:

- (1) Maximizar a taxa de remoção do material;
- (2) Maximizar a vida da ferramenta de corte.

Apesar de que ambas procuram pontos de máximos, seus objetivos são opostos entre si.

Seja o problema de otimização definido empiricamente por:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{máx } f_1(x) = 100 d x_1 x_2 \\ \text{máx } f_2(x) = \frac{A}{x_1^{n_1} x_2^{n_2}} \end{array} \right. & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{máx } f_1(x) = 6000 x_1 x_2 \text{ mm}^3 / \text{min} \\ \text{máx } f_2(x) = \frac{1,28 \times 10^7}{x_1^{3,33} x_2^{2,22}} \text{ min} \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{min } f_1(x) = -6000 x_1 x_2 \text{ mm}^3 / \text{min} \\ \text{min } f_2(x) = -\left(\frac{1,28 \times 10^7}{x_1^{3,33} x_2^{2,22}} \right) \text{ min} \end{array} \right. & \quad (4.1) \end{aligned}$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_1(x) = x_1 - 263,9 \leq 0 \\ g_2(x) = 21,1 - x_1 \leq 0 \\ g_3(x) = x_2 - 1 \leq 0 \\ g_4(x) = 0,05 - x_2 \leq 0 \\ g_5(x) = x_1 x_2^{0,75} - 95,7 \leq 0 \\ g_6(x) = 1600 - x_1^2 x_2 \leq 0 \\ 21,1 < x_1 < 263,9 \\ 0,05 < x_2 < 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

onde:

- $x_1 \left(\frac{m}{\text{min}} \right)$ é a velocidade do corte

- $x_2 \left(\frac{mm}{\text{rev}} \right)$ é a taxa de alimentação/ revolução

- $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são as velocidades de corte máximas e mínimas.

- $g_3(x)$ e $g_4(x)$ são os valores máximos e mínimos da taxa de alimentação.

- $g_5(x)$ é devido à potência máxima na máquina.

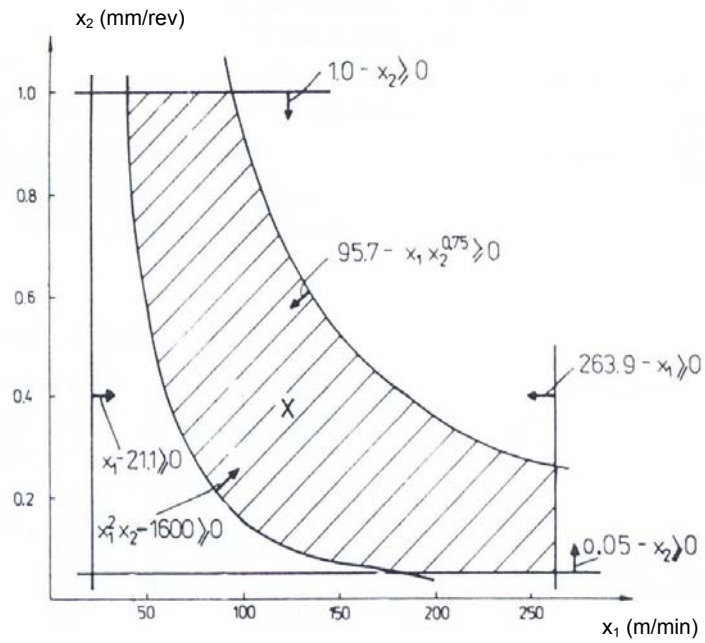
- $g_6(x)$ é a qualidade da usinagem.

De acordo com a Eq. (2.9) a solução ideal resulta em:

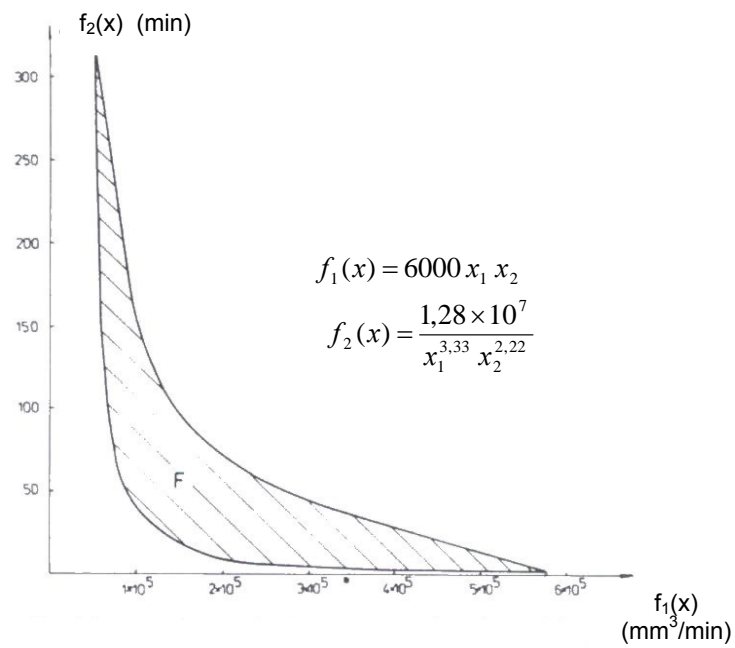
$$f_1^o = 5,74 \times 10^5 \text{ mm}^3/\text{min}; \quad f_2 = 3,24 \text{ min e } x = [95,70 \quad 1,00]^T \text{ (m/min, mm/min)}. \quad (4.3)$$

$$f_1 = 5,37 \times 10^4 \text{ mm}^3/\text{min}; \quad f_2^o = 312,19 \text{ min e } x = [178,88 \quad 0,05]^T \text{ (m/min, mm/min)}.$$

A representação gráfica das restrições e das funções objetivos podem ser vistas na Fig. 4.1, (a) e (b), respectivamente:



(a)



(b)

Figura 4.1 – Ilustração gráfica do problema da usinagem de um metal: a) Região viável; b) Espaço das funções objetivo.

4.1.1 Método da Ponderação dos Objetivos

Seja a formulação proposta na Eq. (3.3):

$$\min f(x) = -\left(w_1 \frac{f_1(x)}{f_1^0} + w_2 \frac{f_2(x)}{f_2^0} \right) \quad (4.4)$$

sujeito as restrições dadas pro (4.2) e a solução ideal é dada por (4.3).

Tabela 4.1 - Resultados obtidos com o método da Ponderação dos Objetivos para o problema da usinagem de um metal.

w_1	w_2	$x = [x_1, x_2]^T$ (m/min, mm/min)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$ (mm ³ /min, min)
0,90	0,10	[96,89 0,98] ^T	[5,72 × 10 ⁵ ; 3,23] ^T
0,70	0,30	[96,91 0,98] ^T	[5,72 × 10 ⁵ ; 3,23] ^T
0,50	0,50	[95,70 1,00] ^T	[5,74 × 10 ⁵ ; 3,24] ^T
0,40	0,60	[91,59 1,00] ^T	[5,50 × 10 ⁵ ; 3,75] ^T
0,30	0,70	[84,60 1,00] ^T	[5,08 × 10 ⁵ ; 4,89] ^T
0,20	0,80	[100,0 0,56] ^T	[3,36 × 10 ⁵ ; 10,12] ^T
0,10	0,90	[100,0 0,48] ^T	[2,62 × 10 ⁵ ; 17,55] ^T
0,05	0,95	[100,0 0,38] ^T	[2,26 × 10 ⁵ ; 24,57] ^T

Os valores ótimos obtidos são mostrados na Tab. 4.1 e representados na Fig. 4.2. Observa-se que existe dificuldades para obter a curva de Pareto, uma vez que a solução é pouco sensível à variação dos fatores de ponderação.

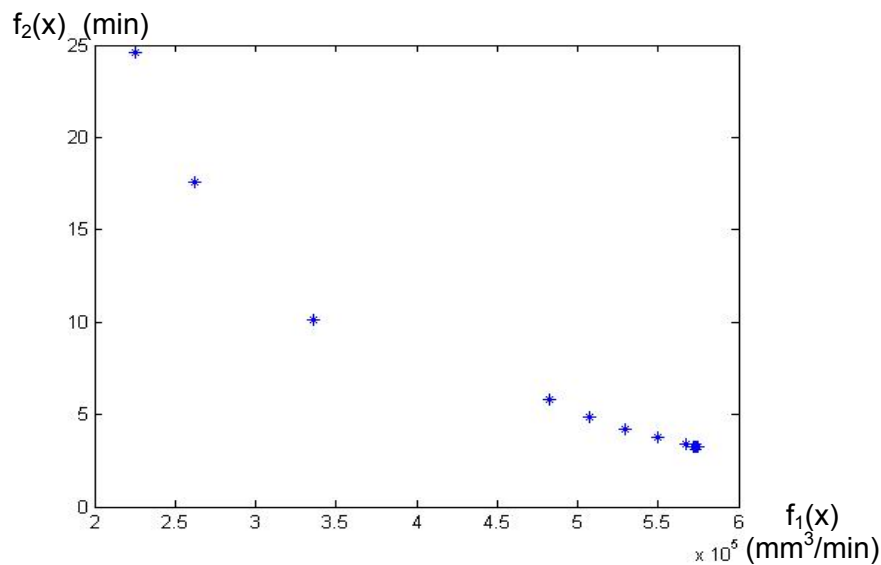


Figura 4.2 - Conjunto Ótimo de Pareto para o problema da usinagem de um metal.

4.1.2 Método de Otimização Hierárquico

Seja o problema de otimização, definido em (4.1) e (4.2), considerando $f_1(x)$ como critério mais importante. Este problema será reescrito, conforme proposto em (3.10) a (3.12), como:

$$\text{Passo 1: } f_1(x^{(1)}) = \min f_1(x) \quad (4.5)$$

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 6$

Cuja solução é $f_1(x^{(1)}) = f_1^o = 5,74 \times 10^5 \text{ mm}^3/\text{min}$, a seguir deve-se:

$$\text{Passo 2: } f_2(x^{(1)}) = \min f_2(x),$$

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 6$ (4.6)

$$f_1(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_{h_1}}{100}\right) f_1^o$$

Tabela 4.2 – Resultados do método de otimização Hierárquico para o problema da usinagem de um metal considerando $f_1(x)$ o critério mais importante.

ξ_{h_1}	$x = [x_1, x_2]^T$ (m/min, mm/min)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$ (mm^3/min , min)
0,10	$[95,70 \ 1,00]^T$	$[5,74 \times 10^5 \ 3,24]^T$
0,50	$[95,70 \ 1,00]^T$	$[5,76 \times 10^5 \ 3,22]^T$
1,00	$[95,70 \ 1,00]^T$	$[5,77 \times 10^5 \ 3,21]^T$
5,00	$[95,69 \ 1,02]^T$	$[5,88 \times 10^5 \ 3,07]^T$
10,00	$[95,68 \ 1,05]^T$	$[6,03 \times 10^5 \ 2,91]^T$

Nota-se na Tab. 4.2, que os valores de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sofreram uma pouca influência com a variação dos valores de ξ_{h_1} , este comportamento é justificado pelo fato de que $f_1(x)$ possui valor absoluto muito superior a $f_2(x)$, as soluções são apresentadas na Tab. 4.2.

Agora, considere o mesmo problema de otimização priorizando $f_2(x)$.

$$\text{Passo 1: } f_2(x^{(2)}) = \min f_2(x) \quad (4.7)$$

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 6$

De forma análoga, $f_2(x^{(2)}) = f_2^o = 312,19$ min, assim, o próximo passo consiste em:

$$\text{Passo 2: } f_1(x^{(2)}) = \min f_1(x),$$

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 6$

(4.8)

$$f_2(x) \leq \left(1 + \frac{\xi_{h_2}}{100}\right) f_2^o$$

Tabela 4.3 – Resultados do método de otimização Hierárquico para o problema da usinagem de um metal considerando $f_2(x)$ o critério mais importante.

ξ_{h_2}	$x = [x_1, x_2]^T$ (m/min, mm/min)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$ (mm ³ /min, min)
0,10	$[178,88 \ 0,05]^T$	$[5,36 \times 10^4 \ 312,35]^T$
0,50	$[178,88 \ 0,05]^T$	$[5,36 \times 10^4 \ 312,97]^T$
1,00	$[178,88 \ 0,05]^T$	$[5,35 \times 10^4 \ 313,75]^T$
5,00	$[178,88 \ 0,05]^T$	$[5,31 \times 10^4 \ 319,93]^T$
10,00	$[178,88 \ 0,05]^T$	$[5,25 \times 10^4 \ 327,53]^T$

Se aumentar ξ_{h_2} , o problema não consegue obter outra solução, pois as restrições não são obedecidas. Observa-se que neste caso as soluções para $f_2(x)$ são melhores, quando comparadas com a tabela anterior. Pode-se constatar, que o método hierárquico é sensível à escolha dos primeiros $f(x)$ a serem minimizados.

4.1.3 Método da Negociação

Para o exemplo da usinagem, a tabela de pagamento para os valores das funções é:

	$f_1(x)$	$f_2(x)$
$x^{o(1)} = [95,70 \ 1,00]^T$	$- 5,74 \times 10^5$	$- 3,24$
$x^{o(2)} = [178,88 \ 0,05]^T$	$- 5,37 \times 10^4$	$- 312,19$

Em função dos incrementos, dados pela Eq. (3.16), tem-se:

	$\Delta f_1(x)$	$\Delta f_2(x)$
$x^{o(1)} = [95,70 \ 1,00]^T$	0	308,95
$x^{o(2)} = [178,88 \ 0,05]^T$	$5,20 \times 10^5$	0

E em função dos incrementos relativos, Eq.(3.17), obtém-se:

	$\Delta f_1^r(x)$	$\Delta f_2^r(x)$
$x^{o(1)} = [95,70 \ 1,00]^T$	0	95,30
$x^{o(2)} = [178,88 \ 0,05]^T$	9,70	0

Para aplicar o método da negociação será obedecido o procedimento proposto nas Eqs. (3.13) a (3.17).

Caso 1: Otimização de $f_1(x)$, tratando $f_2(x)$ como restrição flexível.

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= -6000 x_1 x_2 & (4.9) \\ \text{sujeita a: } & \begin{cases} g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 6 \\ f_2(x) \geq \xi_{n_2} \Rightarrow -f_2(x) + \xi_{n_2} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De acordo com a “tabela de pagamento”, verifica-se que o valor limite para $f_2(x)$ é $\xi_{n_2} = 95,30$ e os resultados são mostrados na Tab. 4.4.

Tabela 4.4 – Resultados do método da Negociação para o problema da usinagem de um metal, obtidos minimizando $f_1(x)$.

ξ_{n_2}	$x = [x_1, x_2]^T$ (m/min, mm/min)	$f_1(x)$ (mm ³ /min)	$f_2(x)$ (min)
10,00	$[68,23 \ 1,00]^T$	$4,09 \times 10^5$	10,00
50,00	$[42,00 \ 1,00]^T$	$2,52 \times 10^5$	50,00
95,30	$[61,42 \ 0,42]^T$	$1,56 \times 10^5$	95,30
120,00	$[75,59 \ 0,28]^T$	$1,26 \times 10^5$	120,00
200,00	$[119,77 \ 0,11]^T$	$8,01 \times 10^4$	200,00

Observe que para valores menores ou iguais que ξ_{n_2} a solução tende para o valor ideal f_1^0 . Para valores maiores que ξ_{n_2} , negocia-se a solução dando maior importância à minimização de $f_2(x)$. Para o valor limite $\xi_{n_2} = 95,30$ tem-se uma solução de compromisso.

Caso 2: Otimização de $f_2(x)$, tratando $f_1(x)$ como restrição flexível.

$$\min f_2(x) = -\frac{1,28 \times 10^7}{x_1^{3,33} x_2^{2,22}} \quad (4.10)$$

sujeita a:
$$\begin{cases} g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 6 \\ f_1(x) \geq \xi_{n_1} \Rightarrow -f_1(x) + \xi_{n_1} \leq 0 \end{cases}$$

De acordo com a “tabela de pagamento”, verifica-se que o valor limite para $f_1(x)$ é $\xi_{n_1} = 9,70$ e os resultados são mostrados na Tab. 4.5.

Tabela 4.5 – Resultados do método da Negociação para o problema da usinagem de um metal, obtidos minimizando $f_2(x)$.

ξ_{n_1}	$x = [x_1, x_2]^T$ (m/min, mm/min)	$f_1(x)$ (mm ³ /min)	$f_2(x)$ (min)
0,50	[178,88 0,05] ^T	$5,37 \times 10^4$	312,19
3,00	[178,88 0,05] ^T	$5,37 \times 10^4$	312,19
6,00	[178,88 0,05] ^T	$5,37 \times 10^4$	312,19
9,70	[178,88 0,05] ^T	$5,37 \times 10^4$	312,19
12,00	[178,88 0,05] ^T	$5,37 \times 10^4$	312,19
15,00	[178,88 0,05] ^T	$5,37 \times 10^4$	312,19

Observe que, neste caso, para quaisquer valor de ξ_{n_1} tem-se a solução ideal f_2^0 , como o valor $f_1(x)$ é muito superior a $f_2(x)$, não é possível obter outras soluções com a variação de ξ_{n_1} .

4.1.4 Método do Critério Global

Tabela 4.6 – Resultados ótimos do método do Critério Global, aplicando diversas métricas para o problema da usinagem de um metal definido pelas Eqs. (4.1) e (4.2).

Técnica	x^* (m/min, mm/min)	$f_1(x)$ (mm ³ /min)	$f_2(x)$ (min)
Métrica-L ₁	[95,70 1,00] ^T	$5,74 \times 10^5$	3,24
Métrica-L ₂ relativa	[263,90 0,08] ^T	$1,32 \times 10^5$	27,34
Métrica-L ₂	[95,70 1,00] ^T	$5,74 \times 10^5$	3,24
Métrica-L ₃	[95,70 1,00] ^T	$5,74 \times 10^5$	3,24
Métrica-L ₃ relativa	[263,90 0,09] ^T	$1,43 \times 10^5$	23,02

Observando os resultados apresentados na Tab. 4.6, verifica-se que ao ser utilizada a Métrica-L₂ relativa ou a Métrica-L₃ relativa, os resultados foram semelhantes, representando um compromisso entre as duas funções objetivo. Já nas outras métricas apresentadas, os valores também foram semelhantes entre si e aproximaram-se da solução ideal f_1^o , uma vez que o valor absoluto de $f_1(x)$ é predominante sobre $f_2(x)$.

4.1.5 Método da Programação de Metas

Seja o problema da usinagem de um metal, definido pelas Eqs. (4.1) e (4.2), onde estabelece-se como metas para as funções objetivo seus valores ideais. Utilizando a formulação dada em (3.22), este problema será reescrito como:

$$\text{Minimizar } f = w_1 p_1 + w_2 p_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_\ell(x) \leq 0, \ell = 1, \dots, 6 \\ g_7(x) = \frac{f_1(x)}{f_1^o} - p_1 \leq 1 \\ g_8(x) = \frac{f_2(x)}{f_2^o} - p_2 \leq 1 \\ 21,1 < x_1 < 263,9 \\ 0,05 < x_2 < 1 \\ -1,5 < p_i < 1,5 \end{cases} \quad (4.11)$$

Tabela 4.7 - Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas para o problema da usinagem de um metal.

w_1	w_2	$x = [x_1, x_2]^T$ (m/min, mm/min)	$f_1(x)$ (mm ³ /min)	$f_2(x)$ (min)
0,99	0,01	[100,01 0,16] ^T	$9,60 \times 10^4$	163,72
0,90	0,10	[245,79 0,05] ^T	$7,37 \times 10^4$	108,36
0,70	0,30	[263,90 0,06] ^T	$9,65 \times 10^4$	55,13
0,50	0,50	[147,69 0,17] ^T	$1,53 \times 10^5$	37,55
0,30	0,70	[99,99 0,44] ^T	$2,62 \times 10^5$	17,66
0,10	0,90	[263,90 0,16] ^T	$2,48 \times 10^5$	6,76
0,01	0,99	[100,00 0,94] ^T	$5,66 \times 10^5$	3,19

Os valores ótimos são mostrados na Tab. 4.7, onde nota-se que o método obteve resultados satisfatórios em relação aos resultados obtidos pelos métodos anteriores. Como se trata de um problema de maximização, quando se prioriza w_1 os valores obtidos caminham em direção ao valor ideal f_2^0 , quando a prioridade é para w_2 , os valores tendem para a solução ideal f_1^0 .

4.2 Aplicação 2: Otimização das Freqüências de um Sistema Massa-mola.

Nesta aplicação, as simulações foram realizadas utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado (MMLA). O código computacional desenvolvido em Fortran foi aplicado ao programa DOT (Design Optimization Tools Program) desenvolvido por Vanderplaats (1995).

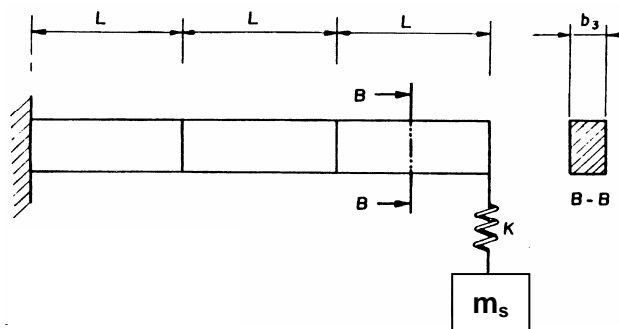


Figura 4.3 - Otimização de Freqüências de um Sistema Massa-mola.

Seja o problema de otimização em dinâmica, proposto por Faria (1991) e estudado por Oliveira e Saramago (2004), que considera uma viga engastada-livre, com um sistema massa-mola suspenso em sua extremidade livre, discretizada em três elementos de mesmo comprimento, conforme Fig. 4.3. Acoplou-se ao programa de otimização subrotinas capazes de obter as três primeiras frequências naturais (ω_1 , ω_2 e ω_3), pelo Método dos Elementos Finitos. O objetivo é maximizar a primeira frequência natural e distanciar as três primeiras frequências naturais entre si:

$$\begin{cases} f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x)]^T \\ f_1(x) = \max \omega_1 \\ f_2(x) = \max(\omega_2 - \omega_1) \\ f_3(x) = \max(\omega_3 - \omega_2) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{sujeito a : } \begin{cases} g_1(x) = 0,02 - h_1 \leq 0; & g_2(x) = h_1 - 0,03 \leq 0(m) \\ g_3(x) = 0,02 - h_2 \leq 0; & g_4(x) = h_2 - 0,03 \leq 0(m) \\ g_5(x) = 0,02 - h_3 \leq 0; & g_6(x) = h_3 - 0,03 \leq 0(m) \\ g_7(x) = 0,02 - b_1 \leq 0; & g_8(x) = b_1 - 0,03 \leq 0(m) \\ g_9(x) = 0,02 - b_2 \leq 0; & g_{10}(x) = b_2 - 0,03 \leq 0(m) \\ g_{11}(x) = 0,02 - b_3 \leq 0; & g_{12}(x) = b_3 - 0,03 \leq 0(m) \\ g_{13}(x) = 190 \times 10^3 - K \leq 0; & g_{14}(x) = K - 760 \times 10^3 \leq 0(N/m) \end{cases} \quad (4.13)$$

sendo dados:

$$L = 0,1 \text{ m}$$

$$\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$m_s = 0,1$$

$$M_{\text{viga}} = 0,14625 \text{ Kg}$$

Seja inicialmente a obtenção da solução ideal, conforme a Eq. (2.9), sendo que os resultados encontrados são mostrados na Tab. 4.8.

Considere: **Caso 1:** $f_1^o = \text{máx } f_1(x)$;

Caso 2: $f_2^o = \text{máx } f_2(x)$;

Caso 3: $f_3^o = \text{máx } f_3(x)$.

Tabela 4.8 - Resultados obtidos para a solução ideal do problema das freqüências de um sistema massa-mola.

	Pontos Iniciais	Caso 1	Caso 2	Caso 3
b_1 (mm)	25,00	30,00	20,00	30,00
b_2 (mm)	25,00	30,00	20,00	30,00
b_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00
h_1 (mm)	25,00	30,00	20,00	30,00
h_2 (mm)	25,00	30,00	20,00	30,00
h_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	30,00
K (N/m)	380,00	759,55	759,55	189,89
ω_1 (Hz)	5,55	8,11	4,46	5,32
ω_2 (Hz)	10,69	16,28	14,58	11,13
ω_3 (Hz)	46,59	54,01	38,31	57,71
f_i^o (Hz)	–	8,11	10,12	46,58

4.2.1 Método da Ponderação dos Objetivos

A solução do problema proposto em (4.12) e (4.13), será formulada, usando a Eq. (3.3), como:

$$f(x) = \left(w_1 \frac{f_1(x)}{f_1^0} + w_2 \frac{f_2(x)}{f_2^0} + w_3 \frac{f_3(x)}{f_3^0} \right) \quad (4.14)$$

sendo que a solução ideal é dada na Tab. 4.8.

O resultado ótimo é fortemente dependente dos valores adotados para estes coeficientes, quando $w_1 = 0,8$ (prioridade maior para f_1) obtém-se um valor próximo à solução ideal ($f_1^o = 8,11$). O mesmo ocorre quando prioriza-se f_2 ou f_3 .

Neste exemplo, o sucesso pode ser justificado considerando uma distribuição convexa no espaço das funções objetivo (Deb, 2001).

Tabela 4.9 - Resultados obtidos com o Método da Ponderação para o problema das frequências de um sistema massa-mola.

Pontos Iniciais		$w_1 = 0,80$	$w_1 = 0,33$	$w_1 = 0,10$	$w_1 = 0,10$
		$w_2 = 0,10$	$w_2 = 0,33$	$w_2 = 0,80$	$w_2 = 0,10$
		$w_3 = 0,10$	$w_3 = 0,33$	$w_3 = 0,10$	$w_3 = 0,80$
$b_1 (mm)$	25,00	30,00	30,00	30,00	30,00
$b_2 (mm)$	25,00	20,00	29,70	25,20	20,00
$b_3 (mm)$	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00
$h_1 (mm)$	25,00	30,00	30,00	30,00	30,00
$h_2 (mm)$	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00
$h_3 (mm)$	25,00	20,00	20,00	30,00	20,00
$K (N/m)$	380,00	759,54	759,55	378,39	759,55
$\omega_1 (Hz)$		8,11	7,98	6,72	6,75
$\omega_2 (Hz)$		16,29	16,89	16,62	12,38
$\omega_3 (Hz)$		54,03	54,97	48,16	57,82
$f_1(x)$		8,11	7,98	6,72	6,75
$f_2(x)$		8,19	8,92	9,90	5,63
$f_3(x)$		37,74	38,08	31,54	45,44

4.2.2 Método de Otimização Hierárquico

O problema de otimização das frequências, definido em (4.12) e (4.13), será solucionado usando o método de otimização hierárquico, Eqs. (3.10) a (3.12), considerando três situações distintas:

Caso 1: Considere o problema de otimização priorizando $f_1(x)$:

$$\begin{aligned} \text{Passo 1: } \max f_1(x) & \Rightarrow f_1^0 = 8,11 \text{ Hz} & (4.15) \\ \text{sujeito a } g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 14 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Passo 2: } \max f_2(x) & \\ \text{sujeito a } g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 14 & (4.16) \end{aligned}$$

$$f_1(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_1}}{100}\right) f_1^o \quad \Rightarrow f_2^*$$

Passo 3: $\max f_3(x)$

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 14$ (4.17)

$$f_1(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_1}}{100}\right) f_1^o$$

$$f_2(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_1}}{100}\right) f_2^*$$

Caso 2: Considere o problema de otimização priorizando $f_2(x)$:

Passo 1: $\max f_2(x)$ $\Rightarrow f_2^o = 10,12 \text{ Hz}$ (4.18)

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 14$

Passo 2: $\max f_1(x)$ (4.19)

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 14$

$$f_2(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_2}}{100}\right) f_2^o \quad \Rightarrow f_1^*$$

Passo 3: $\max f_3(x)$ (4.20)

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 14$

$$f_2(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_2}}{100}\right) f_2^o$$

$$f_1(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_2}}{100}\right) f_1^*$$

Caso 3: Considere o problema de otimização priorizando $f_3(x)$:

Passo 1: $\max f_3(x)$ $\Rightarrow f_3^o = 46,58 \text{ Hz}$ (4.21)

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 14$

Passo 2: $\max f_2(x)$ (4.22)

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 14$

$$f_3(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_3}}{100}\right) f_3^o \quad \Rightarrow f_2^*$$

Passo 3: $\max f_1(x)$ (4.23)

sujeito a $g_\ell(x)$, $\ell = 1, \dots, 14$

$$f_3(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_3}}{100}\right) f_3^o$$

$$f_2(x) \leq \left(1 - \frac{\xi_{h_3}}{100}\right) f_2^*$$

Tabela 4.10 - Resultados obtidos com o Método Hierárquico para o problema das freqüências de um sistema massa-mola.

Pontos Iniciais	Caso 1			Caso 2			Caso 3			
	$\xi_{h_1} =$	$\xi_{h_1} =$	$\xi_{h_1} =$	$\xi_{h_2} =$	$\xi_{h_2} =$	$\xi_{h_2} =$	$\xi_{h_3} =$	$\xi_{h_3} =$	$\xi_{h_3} =$	
	0,10	10,00	50,00	0,10	10,00	50,00	0,10	10,00	50,00	
b_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00	20,00	30,00	30,00	27,28	27,28
b_2 (mm)	25,00	30,00	29,95	29,47	20,00	20,00	20,00	20,00	27,28	27,28
b_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	22,71	22,71
h_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,04	20,10	30,00	30,00	27,28	27,28
h_2 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00	30,00	20,00	30,00	27,28	27,28
h_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00	30,00	20,00	30,00	27,28	27,28
K (N/m)	380,00	759,5	760,0	760,0	759,55	759,99	760,0	190,0	293,16	293,17
ω_1 (Hz)	8,10	8,11	8,10	4,47	4,48	6,72	5,27	5,83	5,83	
ω_2 (Hz)	16,27	16,28	16,31	14,57	14,58	16,61	11,23	10,52	10,52	
ω_3 (Hz)	54,01	54,01	54,05	38,34	38,38	48,16	57,69	51,58	51,58	
$f_1(x)$	8,10	8,11	8,10	4,47	4,48	6,72	5,27	5,83	5,83	
$f_2(x)$	8,17	8,18	8,21	10,10	10,10	9,89	5,96	4,69	4,69	
$f_3(x)$	37,74	37,73	37,74	23,77	23,80	31,54	46,46	41,06	41,06	

Nos três casos estudados, cujos resultados são apresentados na Tab. 4.10, nota-se que a função priorizada tem seus valores maximizados e que os resultados obtidos aproximam-se dos valores ideais. Além disso, novamente, os fatores ξ_{h_i} não influenciaram os resultados.

4.2.3 Método da Negociação

A tabela de pagamento para os valores das funções do sistema massa-mola é dada por:

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$x^{o(1)} = [30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 759,55]^T$	- 8,11	- 8,17	- 37,73
$x^{o(2)} = [20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 759,55]^T$	- 4,46	- 10,12	- 23,73
$x^{o(3)} = [30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 189,89]^T$	- 5,32	- 5,81	- 46,58

Em função dos incrementos, dados pela Eq.(3.16), tem-se:

	$\Delta f_1(x)$	$\Delta f_2(x)$	$\Delta f_3(x)$
$x^{o(1)} = [30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 759,55]^T$	0	1,95	8,85
$x^{o(2)} = [20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 759,55]^T$	3,65	0	22,85
$x^{o(3)} = [30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 189,89]^T$	2,79	4,31	0

E em função dos incrementos relativos, Eq.(3.17), obtém-se:

	$\Delta f_1^r(x)$	$\Delta f_2^r(x)$	$\Delta f_3^r(x)$
$x^{o(1)} = [30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 759,55]^T$	0	0,24	0,23
$x^{o(2)} = [20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 20,00 \ 759,55]^T$	0,82	0	0,96
$x^{o(3)} = [30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 189,89]^T$	0,52	0,74	0

A otimização usando o método da Negociação, Eqs. (3.13) a (3.17), também considera três situações de interesse:

Caso 1: Maximizar a primeira frequência natural, tratando $f_2(x)$ e $f_3(x)$ como restrições flexíveis.

$$\text{sujeita a: } \begin{cases} g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 14 \\ f_2(x) \geq \xi_{n_2} \Rightarrow -f_2(x) + \xi_{n_2} \leq 0 \\ f_3(x) \geq \xi_{n_3} \Rightarrow -f_3(x) + \xi_{n_3} \leq 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Neste caso, como pretende-se maximizar $f_1(x)$, de acordo com a “tabela de pagamento” os valores para ξ_{n_2} e ξ_{n_3} , que são os valores limites 0,24 e 0,23, respectivamente.

Tabela 4.11 - Resultados do método da Negociação para o problema das frequências de um sistema massa-mola, obtidos maximizando $f_1(x)$.

Pontos Iniciais		$\xi_{n_2} = 0,00$	$\xi_{n_2} = 0,24$	$\xi_{n_2} = 1,00$	$\xi_{n_2} = 10,00$
		$\xi_{n_3} = 0,00$	$\xi_{n_3} = 0,23$	$\xi_{n_3} = 1,50$	$\xi_{n_3} = 15,00$
b_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00
b_2 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00
b_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00
h_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	21,16
h_2 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00
h_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00
K (N/m)	380,00	759,55	759,55	759,55	159,55
ω_1 (Hz)		8,10	8,10	8,10	4,73
ω_2 (Hz)		16,27	16,27	16,27	14,72
ω_3 (Hz)		54,01	54,01	54,01	39,13
$f_1(x)$		8,10	8,10	8,10	4,73
$f_2(x)$		8,17	8,17	8,17	9,99
$f_3(x)$		37,74	37,74	37,74	24,41

Os resultados são mostrados na Tab. 4.11. Observe que para valores menores ou iguais aos limites ξ_{n_2} e ξ_{n_3} , obtém-se uma aproximação para a solução ideal f_1^0 . Para valores suficientemente maiores que ξ_{n_2} e ξ_{n_3} , os resultados afastam-se de f_1^0 , aumentando a prioridade das funções $f_2(x)$ e $f_3(x)$.

Caso 2: Maximizar a distância entre as duas primeiras frequências naturais, tratando $f_1(x)$ e $f_3(x)$ como restrições flexíveis.

$$\text{sujeita a: } \begin{cases} g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 14 \\ f_1(x) \geq \xi_{n_1} \Rightarrow -f_1(x) + \xi_{n_1} \leq 0 \\ f_3(x) \geq \xi_{n_3} \Rightarrow -f_3(x) + \xi_{n_3} \leq 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Neste caso, como pretende-se maximizar $f_2(x)$ e de acordo com a “tabela de pagamento” os valores para ξ_{n_1} e ξ_{n_3} , são os valores limites 0,82 e 0,96, respectivamente. Os resultados são mostrados na Tab. 4.12.

Tabela 4.12 – Resultados do método da Negociação para o problema das frequências de um sistema massa-mola, obtidos maximizando $f_2(x)$.

		$\xi_{n_1} = 0,70$	$\xi_{n_1} = 0,82$	$\xi_{n_1} = 1,00$	$\xi_{n_1} = 10,00$
	Pontos Iniciais	$\xi_{n_3} = 0,60$	$\xi_{n_3} = 0,96$	$\xi_{n_3} = 1,50$	$\xi_{n_3} = 15,00$
b_1 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	30,00
b_2 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	30,00
b_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00
h_1 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	30,00
h_2 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	30,00
h_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00
K (N/m)	380,00	759,55	759,55	759,55	760,00
ω_1 (Hz)		4,46	4,46	4,46	8,10
ω_2 (Hz)		14,57	14,57	14,57	16,27
ω_3 (Hz)		38,31	38,31	38,31	54,01
$f_1(x)$		4,46	4,46	4,46	8,10
$f_2(x)$		10,11	10,11	10,11	8,17
$f_3(x)$		23,74	23,74	23,74	37,74

Os valores obtidos são próximos aos da solução ideal f_2^0 quando adota-se coeficientes menores ou iguais aos limites ξ_{n_1} e ξ_{n_3} . Na medida em que esses valores aumentam, os resultados afastam-se de f_2^0 , priorizando as funções $f_1(x)$ e $f_3(x)$.

Caso 3: Maximizar a distância entre a segunda e terceira frequência natural, tratando $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como restrições flexíveis.

$$\text{sujeita a: } \begin{cases} g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 14 \\ f_1(x) \geq \xi_{n_1} \Rightarrow -f_1(x) + \xi_{n_1} \leq 0 \\ f_2(x) \geq \xi_{n_2} \Rightarrow -f_2(x) + \xi_{n_2} \leq 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

De acordo com a “tabela de pagamento”, verifica-se que o valor limite para $f_1(x)$ é $\xi_{n_1} = 0,52$ e o limite para $f_2(x)$ é $\xi_{n_2} = 0,74$ e os resultados são mostrados na Tab. 4.13.

Tabela 4.13 – Resultados do método da Negociação para o problema das frequências de um sistema massa-mola, obtidos maximizando $f_3(x)$.

		$\xi_{n_1} = 0,00$	$\xi_{n_1} = 0,52$	$\xi_{n_1} = 1,00$	$\xi_{n_1} = 10,00$
	Pontos Iniciais	$\xi_{n_2} = 0,00$	$\xi_{n_2} = 0,74$	$\xi_{n_2} = 1,50$	$\xi_{n_2} = 15,00$
b_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	30,00
b_2 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00
b_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00
h_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	30,00
h_2 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,44
h_3 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	20,00
K (N/m)	380,00	190,00	190,00	190,00	759,69
ω_1 (Hz)		5,32	5,32	5,32	6,81
ω_2 (Hz)		11,13	11,13	11,13	16,64
ω_3 (Hz)		57,71	57,71	57,71	48,46
$f_1(x)$		5,32	5,32	5,32	6,81
$f_2(x)$		5,81	5,81	5,81	9,83
$f_3(x)$		46,58	46,58	46,58	31,82

De forma análoga aos casos anteriores, para valores menores ou iguais que os limites ξ_{n_1} e ξ_{n_2} , os resultados são próximos da solução ideal f_3^0 . Uma vez que estes limites aumentam, os resultados afastam de f_3^0 , priorizando as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

4.2.4 Método do Critério Global

Serão considerados as seguintes técnicas, para a solução do problema dado pelas Eqs. (4.12) e (4.13):

$$\text{Métrica-}L_1: \min L_1(f) = |(f_1^o - f_1(x))| + |(f_2^o - f_2(x))| + |(f_3^o - f_3(x))| \quad (4.27)$$

sujeita às restrições dadas por (4.13).

$$\text{Métrica-}L_2 \text{ relativa: } \min f(x) = \left(\frac{f_1^o - f_1(x)}{f_1^o} \right)^2 + \left(\frac{f_2^o - f_2(x)}{f_2^o} \right)^2 + \left(\frac{f_3^o - f_3(x)}{f_3^o} \right)^2 \quad (4.28)$$

sujeita às restrições dadas por (4.13).

$$\text{Métrica-}L_2: \min f(x) = [(f_1^o - f_1(x))^2 + (f_2^o - f_2(x))^2 + (f_3^o - f_3(x))^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

sujeita às restrições dadas por (4.13).

$$\text{Métrica-}L_3: \min L_3(f) = [(f_1^o - f_1(x))^3 + (f_2^o - f_2(x))^3 + (f_3^o - f_3(x))^3]^{\frac{1}{3}} \quad (4.30)$$

sujeita às restrições dadas por (4.13).

$$\text{Métrica-}L_3 \text{ relativa: } \min f(x) = \left[\left| \frac{f_1^o - f_1(x)}{f_1^o} \right|^3 + \left| \frac{f_2^o - f_2(x)}{f_2^o} \right|^3 + \left| \frac{f_3^o - f_3(x)}{f_3^o} \right|^3 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4.31)$$

sujeita às restrições dadas por (4.13).

Utilizando a Métrica- L_2 relativa, a Métrica- L_2 e a Métrica- L_1 , os resultados são bons e representam um compromisso entre as três funções objetivo. Já nas Métrica- L_3 e Métrica- L_3 relativa, os resultados permaneceram no valor inicial.

Tabela 4.14 - Resultados obtidos com o Método Critério Global para o problema das frequências de um sistema massa-mola.

Pontos Iniciais	Métrica-L ₁	Métrica-L ₂ relativa	Métrica-L ₂	Métrica-L ₃	Métrica-L ₃ relativa
b ₁ (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	25,00
b ₂ (mm)	25,00	30,00	20,00	20,00	25,00
b ₃ (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	25,00
h ₁ (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	25,00
h ₂ (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	25,00
h ₃ (mm)	25,00	30,00	21,00	27,21	25,00
K (N/m)	380,00	394,80	759,55	354,10	380,00
ω ₁ (Hz)		6,87	7,96	6,59	5,55
ω ₂ (Hz)		12,38	16,67	12,71	10,69
ω ₃ (Hz)		57,86	55,63	57,45	46,59
f ₁ (x)		6,87	7,96	6,59	5,55
f ₂ (x)		5,51	8,71	6,12	5,14
f ₃ (x)		45,58	38,96	44,75	35,90

4.2.5 Método da Programação de Metas

Seja a solução do problema dado por (4.12) e (4.13), considerando as metas estabelecidas como os seus valores ideais, ou seja, a meta a ser alcançada por $f_1(x) = 8,11$, $f_2(x) = 10,12$ e $f_3(x) = 46,58$, conforme dados na Tab. 4.8.

Seja o problema de otimização formulado como:

$$\min f(x) = w_1 p_1 + w_2 p_2 + w_3 p_3 \quad (4.32)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_\ell(x), \ell = 1, \dots, 14 \\ -100 < p_i < 100 \\ f_1(x) - p_1 - 8,11 \leq 0 \\ f_2(x) - p_2 - 10,12 \leq 0 \\ f_3(x) - p_3 - 46,58 \leq 0 \end{cases}$$

Tabela 4.15 - Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas para o problema das frequências de um sistema massa-mola.

Pontos Iniciais		$w_1 = 0,80$	$w_1 = 0,33$	$w_1 = 0,10$	$w_1 = 0,10$
		$w_2 = 0,10$	$w_2 = 0,33$	$w_2 = 0,80$	$w_2 = 0,10$
		$w_3 = 0,10$	$w_3 = 0,33$	$w_3 = 0,10$	$w_3 = 0,80$
b_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	30,00
b_2 (mm)	25,00	30,00	20,00	20,00	30,00
b_3 (mm)	25,00	20,00	20,00	20,00	20,00
h_1 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	30,00
h_2 (mm)	25,00	30,00	30,00	30,00	30,00
h_3 (mm)	25,00	27,96	30,00	20,00	30,00
K (N/m)	380,00	190,00	478,13	759,55	190,00
ω_1 (Hz)		5,31	7,09	7,98	5,31
ω_2 (Hz)		11,13	13,19	16,89	11,13
ω_3 (Hz)		57,71	57,88	54,97	57,71
$f_1(x)$		5,31	7,09	7,96	5,31
$f_2(x)$		5,82	6,09	8,91	5,81
$f_3(x)$		46,58	44,69	38,08	46,58

O resultado obtido por este método é semelhante ao resultado obtido pelo primeiro método (Método da Ponderação dos Objetivos) onde, ao se priorizar $w_1 = 0,8$ (prioridade maior para f_1) obtém-se um valor próximo à solução ideal ($f_1^0 = 8,11$). O mesmo ocorre quando prioriza f_2 e f_3 .

Neste método, o pesquisador deve ser sensível tanto às metas a serem alcançadas quanto aos intervalos dos p_i . Uma vez que, intervalos não apropriados, não permitem a obtenção de soluções ótimas.

Observando as restrições impostas ao problema e os resultados obtidos para b_i , h_i e K nas Tab. 4.8 a 4.15, verifica-se que todos os pontos ótimos encontrados obedecem às restrições impostas.

4.2.6 Método Min-Max

O método min-max, apresentado em (3.38) a (3.43) será aplicado para otimizar as frequências naturais conforme o problema dado por (4.12) e (4.13). Com esta finalidade, constroeu-se a Tab. 4.16, considerando algumas soluções de Pareto obtidas com o método da ponderação dos objetivos. Analisando esta tabela, observa-se que o $\min\{\max\{z_i(x)\}\} = 0,08$ (3ª linha), que corresponde à solução:

$$x^* = [30,00 \ 30,00 \ 20,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 30,00 \ 759,55]^T$$

Para o ponto x^* os valores das funções objetivo são:

$$f_1(x^*) = 7,86 \text{ Hz}$$

$$f_2(x^*) = 7,08 \text{ Hz}$$

$$f_3(x^*) = 43,17 \text{ Hz}$$

Observe que a solução obtida por este método, não prioriza nenhum dos critérios, mas representa uma solução de compromisso entre todas as funções objetivo consideradas.

4.3 Aplicação 3: Problema de despacho econômico e ambiental.

Considere agora o problema de despacho econômico e ambiental, proposto por Abido (2003), que consiste na seleção de geradores, de uma unidade de produção de energia de forma a minimizar o custo do combustível e emissão dos poluentes na atmosfera, satisfazendo um conjunto de restrições. Dessa forma, o problema do despacho econômico e ambiental é transformado em um problema de otimização multi-objetivo restrito e não-linear. Geralmente, o problema é formulado da seguinte forma:

As curvas dos custos de consumo de combustível pelos geradores são representadas por funções quadráticas acrescidas de uma componente que representa os efeitos do carregamento da válvula. O custo do combustível total $F_c(P)$ é dado em \$/h e a função é expressa por:

Tabela 4.16 - Resultados obtidos com o Método do Min-Max para o Problema das frequências de um sistema massa-mola.

Nº	$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T$ (mm mm mm mm mm mm N/m)	$f(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x)]^T$ (Hz Hz Hz)	$z_1'(x)$	$z_1''(x)$	$z_2'(x)$	$z_2''(x)$	$z_3'(x)$	$z_3''(x)$
1	[30 30 20 30 30 24,2 759,55] ^T	[8,03 7,59 41,05] ^T	0,01	0,01	0,25	0,33	0,12	0,13
2	[30 30 20 30 30 27,4 759,55] ^T	[7,94 7,28 42,48] ^T	0,02	0,02	0,28	0,39	0,09	0,10
3	[30 30 20 30 30 30 759,54]^T	[7,86 7,08 43,17]^T	0,03	0,03	0,30	0,43	0,07	0,08
4	[30 30 20 30 30 27,7 759,55] ^T	[7,78 7,77 42,28] ^T	0,04	0,04	0,23	0,30	0,09	0,10
5	[30 30 20 30 30 30 369,04] ^T	[6,74 5,46 45,63] ^T	0,17	0,20	0,46	0,85	0,02	0,02
6	[30 20 20 30 30 30 399,14] ^T	[6,78 5,83 42,22] ^T	0,16	0,20	0,42	0,74	0,03	0,03
7	[30 29 20 30 30 30 393,80] ^T	[6,86 5,54 45,45] ^T	0,15	0,18	0,45	0,83	0,02	0,02
8	[30 20 20 30 30 25,2 759,55] ^T	[7,86 8,06 41,43] ^T	0,03	0,03	0,20	0,26	0,11	0,12
9	[30 20 20 30 30 30 759,55] ^T	[7,70 7,55 42,82] ^T	0,05	0,05	0,25	0,34	0,08	0,09
10	[30 30 20 30 30 30 190,00] ^T	[5,32 5,81 46,58] ^T	0,34	0,52	0,43	0,74	0,00	0,00
11	[30 20 20 30 30 20 759,54] ^T	[7,97 8,91 38,09] ^T	0,02	0,02	0,12	0,14	0,18	0,22
12	[30 20 20 30 20 20 759,55] ^T	[6,71 9,89 31,55] ^T	0,17	0,21	0,02	0,02	0,32	0,48

Nº	$z(x) = [z_1(x), z_2(x), z_3(x)]^T$	$\max \{z_i(x)\}$	i_1	$z_i^*(x), i \neq i_1$	$\max \{z_i^*(x)\}$	i_2	$z_i^{**}(x), i \neq i_2$
1	[0,01 0,33 0,13] ^T	0,33	2	[0,01 0,13] ^T	0,13	2	0,01
2	[0,02 0,39 0,10] ^T	0,39	2	[0,02 0,10] ^T	0,10	2	0,02
3	[0,03 0,43 0,08]^T	0,43	2	[0,03 0,08]^T	0,08	2	0,03
4	[0,04 0,30 0,10] ^T	0,30	2	[0,04 0,10] ^T	0,10	2	0,04
5	[0,20 0,85 0,02] ^T	0,85	2	[0,20 0,02] ^T	0,20	1	0,02
6	[0,20 0,74 0,03] ^T	0,74	2	[0,20 0,03] ^T	0,20	1	0,03
7	[0,18 0,83 0,02] ^T	0,83	2	[0,18 0,02] ^T	0,18	1	0,02
8	[0,03 0,26 0,12] ^T	0,26	2	[0,03 0,12] ^T	0,12	2	0,03
9	[0,05 0,34 0,09] ^T	0,34	2	[0,05 0,09] ^T	0,09	2	0,05
10	[0,52 0,74 0,00] ^T	0,74	2	[0,52 0,00] ^T	0,52	1	0,00
11	[0,02 0,14 0,22] ^T	0,22	3	[0,02 0,14] ^T	0,14	2	0,02
12	[0,21 0,02 0,48] ^T	0,48	3	[0,21 0,02] ^T	0,21	1	0,02

$$Fc(P) = \sum_{i=1}^n a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 + F_{cv} \quad \text{com} \quad F_{cv} = \left| d_i \text{sen} \left[e_i (P_i^{\min} - P_i) \right] \right| \quad (4.33)$$

onde F_{cv} é a função do carregamento da válvula, n é o número de geradores, a_i , b_i e c_i , são os coeficientes de custo para cada gerador, d_i e e_i são os coeficientes de custo para as válvulas e P_i é a potência real para cada gerador. P é o vetor das potências reais dos geradores e definido como $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]^T$.

A emissão total dos poluentes atmosféricos $F_e(P)$ tais como o óxido de enxofre SO_x , e o óxido de nitrogênio NO_x causados por unidades térmicas que consomem combustíveis fósseis pode ser expresso em ton/h, como:

$$F_e(P) = \sum_{i=1}^n 10^{-2} \left(\alpha_i + \phi_i P_i + \gamma_i P_i^2 \right) + \xi_i e^{(\lambda_i P_i)} \quad (4.34)$$

onde α_i , ϕ_i , γ_i , ξ_i e λ_i são os coeficientes característicos de emissão para cada gerador.

Para uma operação estável, a potência real de cada gerador está restrita entre limites inferiores e superiores como segue:

$$P_i^{\inf} < P_i < P_i^{\sup}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.35)$$

E a potência total gerada deve cobrir a demanda total P_{DE} e a potência dissipada na linha de emissão P_{DI} . Daí,

$$\sum_{i=1}^n P_i = P_{DE} + P_{DI} \quad (4.36)$$

Logo, tem-se a seguinte formulação:

$$\text{Minimizar} \quad \begin{cases} Fc(P) = \sum_{i=1}^n a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 + F_{cv} \\ F_e(P) = \sum_{i=1}^n 10^{-2} \left(\alpha_i + \phi_i P_i + \gamma_i P_i^2 \right) + \xi_i e^{(\lambda_i P_i)} \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} h_1(P) = \sum_{i=1}^n P_i - P_{DE} - P_{DI} = 0 \\ g_i(P) = P_i - P_i^{\text{sup}} \leq 0 & i = 1, \dots, 6 \\ g_j(P) = P_j^{\text{inf}} - P_j \leq 0 & j = 7, \dots, 12 \end{cases} \quad (4.38)$$

Na Eq. (4.33) serão considerados, desprezíveis os efeitos do carregamento da válvula, ou seja, $F_{cv} = 0$.

Além disso, para as restrições (4.35) e (4.36) serão adotados:

$$\begin{aligned} P_{DE} + P_{DI} &= 283 \text{ MW} \\ P_i^{\text{inf}} &= 10 \text{ MW e } P_i^{\text{sup}} = 120 \text{ MW.} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Os valores dos coeficientes característicos do custo de combustível e emissão de poluentes são dados na Tab. 4.17.

Tabela 4.17 - Coeficientes característicos do custo e da emissão de poluentes para alguns geradores.

		G ₁	G ₁	G ₃	G ₄	G ₅	G ₆
Custo	a	10	10	20	10	20	10
	b	200	150	180	100	180	150
	c	100	120	40	60	40	100
Emissão	α	4,091	2,543	4,258	5,426	4,258	6,131
	ϕ	- 5,554	- 6,047	- 5,094	- 3,550	- 5,094	- 5,555
	γ	6,490	5,638	4,586	3,380	4,586	5,151
	ξ	2×10^{-4}	5×10^{-4}	1×10^{-6}	2×10^{-3}	1×10^{-6}	1×10^{-5}
	λ	2,857	3,333	8,000	2,000	8,000	6,667

A seguir, foram obtidas as soluções ideais, conforme a Eq. (2.9), sendo que os resultados encontrados são mostrados na Tab. 4.18.

Considere: **Caso 1:** $F_c^o = \min F_c(P)$;

Caso 2: $F_e^o = \min F_e(P)$.

Tabela 4.18 - Resultados obtidos para soluções ideais do problema de despacho econômico e ambiental.

	Pontos Iniciais	Caso 1	Caso 2
P ₁ (MW)	50,00	11,00	40,00
P ₂ (MW)	50,00	30,00	46,00
P ₃ (MW)	50,00	52,00	54,00
P ₄ (MW)	50,00	101,00	38,00
P ₅ (MW)	50,00	52,00	54,00
P ₆ (MW)	50,00	36,00	51,00
F _c (\$/h)	655,00	599,22	637,38
F _e (ton/h)	0,20	0,22	0,19
f _i ^o	–	599,22	0,19

4.3.1 Método da Ponderação dos Objetivos

Para a solução do problema de otimização definido em (4.37) e (4.38), o método da ponderação dos objetivos proposto em (3.3) é formulado como:

$$f(x) = w_1 \frac{F_c}{F_c^o} + w_2 \frac{F_e}{F_e^o}. \quad (4.40)$$

conforme a Tab. 4.18, $F_c^o = 599,22$ \$/h e $F_e^o = 0,19$ ton/h.

Para este problema em estudo, os valores ótimos obtidos foram bem sensíveis à variação dos coeficientes de ponderação w_i , conforme mostrado na Fig. 4.5, que representa a curva do conjunto ótimo de Pareto.

Tabela 4.19 - Resultados obtidos com o Método da Ponderação dos Objetivos para o problema do despacho econômico e ambiental.

w_1	w_2	$P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)	$F_c(P)$ (\$/h)	$F_e(P)$ (ton/h)
1,00	0,00	[11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] ^T	599,22	0,22
0,90	0,10	[17,00 33,00 53,00 88,00 53,00 39,00] ^T	600,85	0,21
0,80	0,20	[21,00 35,00 54,00 78,00 54,00 41,00] ^T	604,26	0,21
0,70	0,30	[25,00 37,00 54,00 70,00 54,00 43,00] ^T	608,44	0,20
0,60	0,40	[29,00 39,00 54,00 63,00 54,00 44,00] ^T	612,82	0,20
0,50	0,50	[31,00 40,00 54,00 58,00 54,00 46,00] ^T	617,27	0,20
0,40	0,60	[34,00 42,00 54,00 53,00 54,00 47,00] ^T	621,62	0,20
0,30	0,70	[36,00 43,00 54,00 48,00 54,00 48,00] ^T	625,82	0,20
0,20	0,80	[37,00 44,00 54,00 45,00 54,00 49,00] ^T	629,86	0,19
0,10	0,90	[39,00 45,00 54,00 41,00 54,00 50,00] ^T	633,72	0,19
0,00	1,00	[41,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,39	0,19

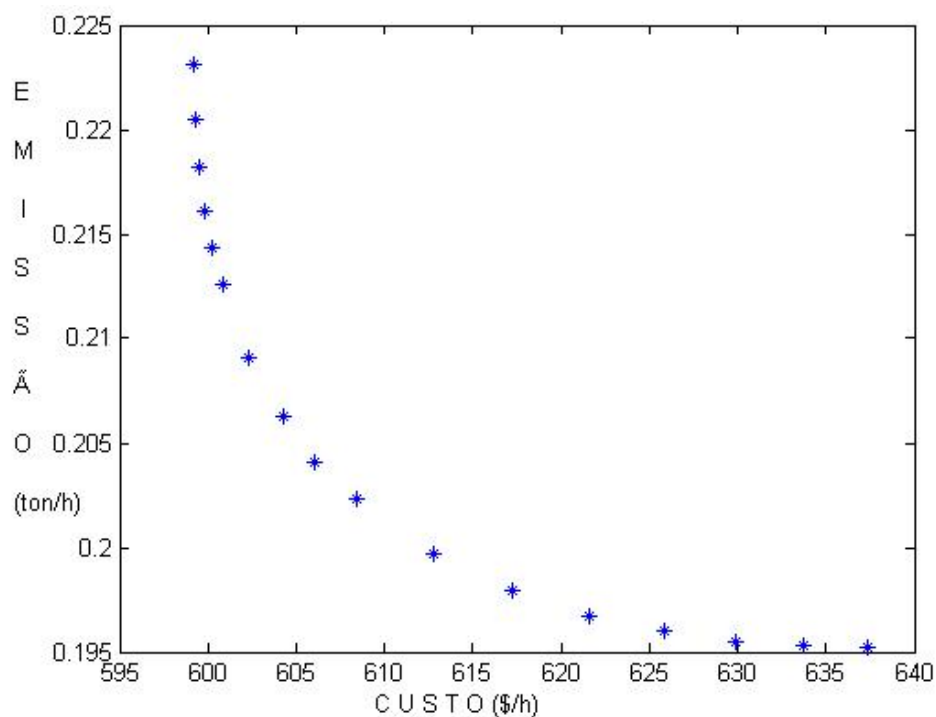


Figura 4.4 - Conjunto ótimo de Pareto para o problema do despacho econômico e ambiental, usando o método da Ponderação dos Objetivos.

4.3.2 Método Hierárquico

O problema do despacho econômico e ambiental será solucionado pelo método Hierárquico, Eqs. (3.10) a (3.12), considerando duas prioridades distintas:

Caso 1: Minimizar o custo do combustível é prioritário.

$$\begin{aligned} \text{Passo 1: } \min Fc(P) & \Rightarrow Fc^o(P) = 599,22 \text{ \$/h} & (4.41) \\ \text{sujeito a: } h_1(P) & = 0 \\ g_\ell(P) & \leq 0, \ell = 1, \dots, 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Passo 2: } \min Fe(P) & & (4.42) \\ \text{sujeito a: } h_1(P) & = 0 \\ g_\ell(P) & \leq 0, \ell = 1, \dots, 12 \\ Fc(P) - \left(1 + \frac{\xi_{h_1}}{100}\right) Fc^o & \leq 0 \end{aligned}$$

Os resultados variam de acordo com os valores de ξ_{h_1} e são apresentados na Tab. 4.20.

Tabela 4.20 - Resultados obtidos para o problema do despacho econômico e ambiental, usando o método Hierárquico e considerando $Fc(P)$ prioritária.

ξ_{h_1}	$P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)	$Fc(P)$ (\$/h)	$Fe(P)$ (ton/h)
0,10	[14,00 32,00 53,00 93,00 53,00 37,00] ^T	599,82	0,22
0,50	[19,00 34,00 53,00 83,00 54,00 40,00] ^T	602,22	0,21
2,00	[27,00 38,00 54,00 66,00 54,00 44,00] ^T	611,20	0,20
5,00	[37,00 44,00 54,00 45,00 54,00 49,00] ^T	629,18	0,19
8,00	[40,00 45,00 54,00 39,00 54,00 51,00] ^T	636,40	0,19
10,00	[40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,38	0,19
20,00	[40,00 45,00 54,00 40,00 54,00 51,00] ^T	635,38	0,19
50,00	[40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,36	0,19

Nota-se que o problema de otimização é sensível à variação de ξ_{h_1} , ou seja, na medida que o ξ_{h_1} aumenta, a solução ótima tende para a solução ideal da função de emissão.

Caso 2: Minimizar a emissão de poluentes é prioritário.

$$\begin{aligned} \text{Passo 1: } \min Fe(P) & \Rightarrow Fe^o(P) = 0,19 \text{ ton/h} & (4.43) \\ \text{sujeito a: } h_1(P) & = 0 \\ g_\ell(P) & \leq 0, \ell = 1, \dots, 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Passo 2: } \min Fc(P) & & (4.44) \\ \text{sujeito a: } h_1(P) & = 0 \\ g_\ell(P) & \leq 0, \ell = 1, \dots, 12 \end{aligned}$$

$$Fe(P) - \left(1 + \frac{\xi_{h_2}}{100}\right) Fe^o \leq 0$$

Os resultados variam de acordo com os valores de ξ_{h_2} e são apresentados na Tab. 4.21.

Tabela 4.21 - Resultados obtidos para o problema do despacho econômico e ambiental, usando o método Hierárquico e considerando $Fe(P)$ prioritária.

ξ_{h_2}	$P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)	$Fc(P)$ (\$/h)	$Fe(P)$ (ton/h)
0,10	[41,00 46,00 53,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,53	0,19
0,50	[40,00 48,00 53,00 37,00 53,00 52,00] ^T	639,40	0,19
2,00	[41,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,35	0,19
5,00	[29,00 39,00 54,00 63,00 54,00 44,00] ^T	612,85	0,20
8,00	[22,00 35,00 54,00 76,00 54,00 41,00] ^T	605,05	0,20
10,00	[19,00 34,00 54,00 83,00 54,00 40,00] ^T	602,37	0,21
15,00	[13,00 31,00 53,00 96,00 53,00 37,00] ^T	599,48	0,22
20,00	[11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] ^T	599,22	0,22
50,00	[11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] ^T	599,22	0,22

Também neste caso, a solução é modificada com a variação de ξ_{h_2} , à medida que este cresce, tende para a solução ideal da função custo de combustível.

4.3.3 Método da Negociação

Para este problema, a tabela de pagamento para os valores das funções é:

	$F_c(P)$	$F_e(P)$
$P^{o(1)} = [11,00 \ 30,00 \ 52,00 \ 101,00 \ 52,00 \ 36,00]^T$	599,22	0,22
$P^{o(2)} = [40,00 \ 46,00 \ 54,00 \ 38,00 \ 54,00 \ 51,00]^T$	637,38	0,19

Em função dos incrementos, dados pela Eq.(3.16), tem-se:

	$\Delta F_c(P)$	$\Delta F_e(P)$
$P^{o(1)} = [11,00 \ 30,00 \ 52,00 \ 101,00 \ 52,00 \ 36,00]^T$	0	0,03
$P^{o(2)} = [40,00 \ 46,00 \ 54,00 \ 38,00 \ 54,00 \ 51,00]^T$	38,16	0

E em função dos incrementos relativos, Eq.(3.17), obtém-se:

	$\Delta F_c^r(P)$	$\Delta F_e^r(P)$
$P^{o(1)} = [11,00 \ 30,00 \ 52,00 \ 101,00 \ 52,00 \ 36,00]^T$	0	0,14
$P^{o(2)} = [40,00 \ 46,00 \ 54,00 \ 38,00 \ 54,00 \ 51,00]^T$	0,06	0

O problema de otimização será solucionado pelo método da Negociação, Eqs. (3.13) a (3.17), considerando dois casos:

Caso 1: Minimizar o custo do combustível, tratando $F_e(P)$ como restrição.

$$\min F_c(P) \quad (4.45)$$

$$\text{sujeito a: } h_1(P) = 0$$

$$g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12$$

$$\left(\frac{F_e - F_e^o}{F_e} \right) \leq \xi_{n_2}$$

De acordo com a “tabela de pagamento”, verifica-se que o valor limite para $Fe(P)$ é $\xi_{n_2} = 0,14$ e os resultados são mostrados na Tab. 4.22.

Tabela 4.22 – Resultados do método da Negociação para o problema do despacho econômico e ambiental, obtidos minimizando $Fc(P)$.

ξ_{n_2}	$P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)	$Fc(P)$ (\$/h)	$Fe(P)$ (ton/h)
0,05	[28,00 38,00 54,00 65,00 54,00 44,00] ^T	611,85	0,20
0,10	[18,00 33,00 53,00 86,00 53,00 39,00] ^T	601,36	0,21
0,14	[11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] ^T	599,22	0,22
0,20	[11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] ^T	599,22	0,22
0,30	[11,00 30,00 52,00 101,00 52,00 36,00] ^T	599,22	0,22

Observe que para valores maiores que ξ_{n_2} tem-se a solução ideal Fc^o . Para valores menores ou iguais que ξ_{n_2} , negocia-se a solução dando maior importância à minimização de $Fe(P)$.

Caso 2: Minimizar a emissão de poluentes, tratando $Fc(P)$ como restrição.

$$\min Fe(P) \tag{4.46}$$

$$\text{sujeito a: } h_1(P) = 0$$

$$g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12$$

$$\left(\frac{Fc - Fc^o}{Fc} \right) \leq \xi_{n_1}$$

De acordo com a “tabela de pagamento”, verifica-se que o valor limite para $Fe(P)$ é $\xi_{n_1} = 0,06$ e os resultados são mostrados na Tab. 4.23.

Tabela 4.23 - Resultados do método da Negociação para o problema do despacho econômico e ambiental, obtidos minimizando $Fe(P)$

ξ_{n_1}	$P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)	$Fc(P)$ (\$/h)	$Fe(P)$ (ton/h)
0,01	[23,00 36,00 54,00 76,00 54,00 41,00] ^T	605,27	0,20
0,04	[35,00 42,00 54,00 50,00 54,00 48,00] ^T	624,19	0,20
0,06	[40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,33	0,19
0,10	[40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,33	0,19
0,20	[40,00 46,00 54,00 38,00 54,00 51,00] ^T	637,34	0,19

De forma análoga, observe que para valores maiores ou iguais que ξ_{n_1} temos a solução ideal $Fe(P)$. Para valores menores que ξ_{n_1} , negocia-se a solução dando maior importância à minimização de $Fc(P)$.

4.3.4 Método do Critério Global

$$\text{Métrica-}L_1: \min L_1(f) = |Fc^o - Fc| + |Fe^o - Fe| \quad (4.47)$$

$$\text{sujeito a: } h_1(P) = 0$$

$$g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12$$

$$\text{Métrica-}L_2 \text{ relativa: } \min f(x) = \left(\frac{Fc^o - Fc}{Fc^o} \right)^2 + \left(\frac{Fe^o - Fe}{Fe^o} \right)^2 \quad (4.48)$$

$$\text{sujeito a: } h_1(P) = 0$$

$$g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12$$

$$\text{Métrica-}L_2: \min L_p(f) = \left[(Fc^o - Fc)^2 + (Fe^o - Fe)^2 \right]^{1/2} \quad (4.49)$$

$$\text{sujeito a: } h_1(P) = 0$$

$$g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12$$

$$\text{Métrica-}L_3: \min L_3(f) = \left(|Fc^o - Fc|^3 + |Fe^o - Fe|^3 \right)^{1/3} \quad (4.50)$$

$$\text{sujeito a: } h_1(P) = 0$$

$$g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12$$

$$\text{Métrica-}L_3 \text{ relativa: } \min f(x) = \left(\left| \frac{Fc^o - Fc}{Fc^o} \right|^3 + \left| \frac{Fe^o - Fe}{Fe^o} \right|^3 \right)^{1/3} \quad (4.51)$$

$$\text{sujeito a: } h_1(P) = 0$$

$$g_\ell(P) \leq 0, \ell = 1, \dots, 12$$

Tabela 4.24 – Resultados do método do Critério Global, aplicando diversas métricas para o problema do despacho econômico e ambiental.

Técnica	$P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)	Fc(P) (\$/h)	Fe(P) (ton/h)
Métrica- L_1	[11 30 52 101 52 36] ^T	599,22	0,22
Métrica- L_2 relativa	[32 41 54 56 54 46] ^T	618,98	0,20
Métrica- L_2	[11 30 52 101 52 36] ^T	599,22	0,22
Métrica- L_3 :	[11 30 52 101 52 36] ^T	599,23	0,22
Métrica- L_3 relativa:	[33 41 54 55 54 46] ^T	619,52	0,20

Utilizando a Métrica- L_2 relativa e a Métrica- L_3 relativa, os resultados foram semelhantes e representam um compromisso entre as duas funções objetivo, apresentados na Fig. 4.6. Já nas outras métricas apresentadas, os valores também foram semelhantes e aproximaram-se da solução ideal Fc^o , uma vez que o valor absoluto de Fc(P) é predominante sobre Fe(P).

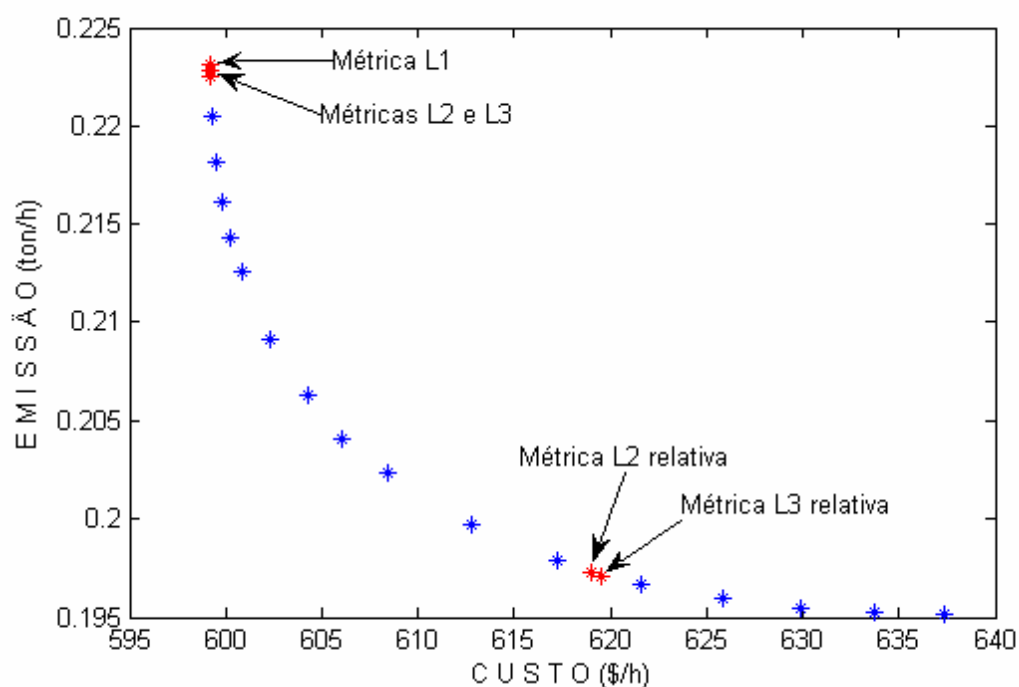


Figura 4.5 - Resultados obtidos pelo Método Critério Global, aplicando diversas métricas, para o problema de despacho econômico e ambiental.

4.3.5 Método da Programação de Metas

Seja a solução do problema (4.37) e (4.38) considerando as metas estabelecidas para cada função objetivo como o seu valor ideal, dados na Tab. 4.18. Assim o problema de otimização será escrito como:

$$\text{Minimizar } f(P) = w_1 p_1 + w_2 p_2 \quad (4.52)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} h_1(P) = 0 \\ g_\ell(P) \leq 0 \quad \ell = 1, \dots, 12 \\ g_{13}(P) = \frac{Fc}{Fc^o} - p_1 \leq 1 \\ g_{14}(P) = \frac{Fe}{Fe^o} - p_2 \leq 1 \\ -0,5 < p_i < 0,5 \end{cases}$$

Tabela 4.25 - Resultados obtidos com o Método da Programação de Metas, para o problema do despacho econômico e ambiental.

w_1	w_2	$P = [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]^T$ (MW)	$F_c(P)$ (\$/h)	$F_e(P)$ (ton/h)
0,99	0,01	[10,00 26,00 42,00 94,00 42,00 32,00] ^T	519,37	0,22
0,90	0,10	[10,00 26,00 42,00 94,00 42,00 32,00] ^T	519,37	0,22
0,80	0,20	[10,00 26,00 42,00 94,00 42,00 32,00] ^T	519,37	0,22
0,70	0,30	[20,00 34,00 52,00 78,00 52,00 40,00] ^T	587,67	0,21
0,60	0,40	[26,00 37,00 53,00 65,00 53,00 43,00] ^T	598,49	0,20
0,50	0,50	[31,00 40,00 53,00 57,00 53,00 45,00] ^T	605,67	0,20
0,40	0,60	[33,00 41,00 53,00 50,00 53,00 47,00] ^T	610,80	0,20
0,30	0,70	[36,00 43,00 53,00 46,00 53,00 48,00] ^T	614,72	0,20
0,20	0,80	[37,00 44,00 53,00 42,00 53,00 49,00] ^T	617,76	0,19
0,10	0,90	[38,00 44,00 52,00 39,00 52,00 49,00] ^T	620,20	0,19
0,01	0,99	[40,00 45,00 52,00 37,00 52,00 50,00] ^T	626,59	0,19

Os resultados obtidos são apresentados na Tab. 4.25, onde pode-se notar que este método obteve resultados satisfatórios em relação aos resultados obtidos através dos métodos anteriores. Quando se tem a prioridade para w_1 os valores obtidos caminha em direção ao valor ideal F_c^0 , quando a prioridade é para w_2 , os valores tendem para a solução ideal F_e^0 .

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado o estudo de alguns métodos de otimização multi-critérios visando a compreensão e comparação das técnicas consideradas. Para isto, os métodos estudados foram aplicados a três problemas de otimização em engenharia.

Entre os métodos baseados em escalonamento de funções foram considerados, neste estudo, o método da Ponderação dos Objetivos e o Critério Global. No primeiro, a solução ótima depende da escolha dos coeficientes de ponderação, permitindo que, com a variação dos coeficientes, obtenha-se um conjunto de soluções ótimas. No segundo método, são propostas algumas métricas responsáveis em minimizar o erro relativo ou absoluto das funções objetivo do problema em relação à solução ideal de cada uma destas funções. Este método é indicado para os casos onde deseja-se obter uma solução que atenda a todas as funções objetivo, considerando-as com o mesmo nível de prioridade. Dependendo da métrica escolhida as soluções podem ser diferentes entre si. De uma forma geral, foi possível observar que as métricas que minimizam o erro relativo produzem melhores resultados. No sentido de que estas métricas são capazes de calcular uma solução que represente um compromisso entre diversas funções objetivo que compõe o problema, ou seja, o ganho em um objetivo representa o menor sacrifício possível nos outros.

Uma outra classe de técnicas utiliza as funções objetivo para adicionar restrições ao problema, sendo considerados: o método Hierárquico, da Negociação e o da Programação de Metas. O método Hierárquico e o da Negociação têm como principal característica priorizar um único critério tratando os outros objetivos como restrições adicionais. A convergência da solução depende fortemente dos valores absolutos das funções objetivo. Nos casos onde se têm uma função objetivo com valor absoluto muito superior às outras, estes métodos apresentam dificuldades em determinar uma solução de compromisso para o problema. Este comportamento foi observado, por exemplo, no problema da usinagem de um metal. Uma característica importante destes métodos, conforme indicado no próprio nome, é obter soluções que ajudem a tomada de decisão quando algum critério deva ser altamente priorizado.

Durante a aplicação do método da Programação de Metas foram observadas dificuldades na escolha das metas, na priorização dos objetivos e, ainda, durante a escolha

do intervalo das variáveis de folga (ρ_i), uma vez que, intervalos não apropriados, não permitem a obtenção de soluções ótimas. Para a aplicação desta metodologia, torna-se necessário um amplo conhecimento do problema em estudo.

Um último método estudado, que pode ser aplicado quando não se conhece a importância de cada função objetivo dificultando a determinação das prioridades, é o método baseado na abordagem min-max. Para isto, são considerados os desvios relativos de cada função em relação aos seus valores ideais. Apesar de ser uma técnica trabalhosa, é capaz de obter uma solução que represente um compromisso entre os diversos critérios que compõe o problema.

O método do critério global e o método min-max fornecem uma solução ótima para o problema, representando melhor compromisso entre as funções objetivo. Os outros métodos estudados fornecem alguns pontos do Conjunto Ótimo de Pareto, obtidos com a variação dos parâmetros de controle de cada método.

As metodologias propostas foram analisadas através de três problemas. Na primeira aplicação, o objetivo era maximizar a taxa de remoção de material em um processo convencional de usinagem, juntamente com a maximização da vida da ferramenta de corte, sendo, portanto, dois objetivos opostos entre si. Neste problema, as variáveis de projeto foram a velocidade de corte e a taxa de alimentação. Os seguintes parâmetros de usinagem foram considerados como restrições: os limitantes para a velocidade de corte e para a taxa de alimentação, a potência máxima da máquina e a qualidade superficial. Observou-se, neste caso, que o método da Ponderação dos Objetivos apresentou dificuldades para a obtenção da curva de Pareto, uma vez que a solução foi pouco sensível à variação dos coeficientes de ponderação. Como citado anteriormente, nesta aplicação, os métodos Hierárquico e da Negociação foram pouco eficazes, devido ao fato de que o valor absoluto de uma função é muito superior ao da outra. No método do Critério Global os resultados obtidos com as métricas L_2 , L_3 e L_1 (consideram o erro absoluto) convergiram para a solução ideal da taxa de remoção ideal, uma vez que o valor absoluto desta função é muito superior ao da outra. As métricas que usam o erro relativo foram capazes de obter soluções que consideram a influência dos dois critérios. Durante a aplicação do método da Programação de Metas, considerando a solução ideal como a meta a ser atingida para cada critério, foram obtidos resultados satisfatórios. Quando os pesos de uma determinada meta são priorizados, os valores calculados tendem para este valor.

A segunda aplicação foi na área de dinâmica de estruturas. Neste caso, o modelo é constituído por uma viga em balanço que sustenta na extremidade um sistema mola-peso. A análise dinâmica foi feita através do método de elementos finitos. O objetivo era maximizar a primeira frequência natural e distanciar as três primeiras frequências naturais entre si, as

quais são influenciadas pelas dimensões da viga engastada-livre e a constante de rigidez da mola, considerando constante a carga suspensa pelo sistema. No método da Ponderação dos Objetivos a solução é sensível à variação dos coeficientes de ponderação, sendo possível obter soluções que correspondam à prioridade definida durante a escolha destes coeficientes. A aplicação do método Hierárquico se mostrou eficiente, pode-se observar que quando qualquer um dos critérios foi priorizado seu valor foi maximizado. No método da Negociação, os resultados convergem para a solução ideal de cada função quando as restrições flexíveis do problema são limitadas por valores menores ou iguais que ξ_n . Caso contrário, os valores das funções objetivo afastam da solução ideal, aumentando a prioridade das outras funções. No método do Critério Global, os resultados apresentam uma solução de compromisso entre as três funções objetivo. Observou-se que a solução obtida para o ótimo min-max não priorizou nenhum critério, mas assim como no método anterior, apresenta uma solução que considera a influência de todas as funções objetivo do problema. O comportamento da Programação de Metas é semelhante ao método da Ponderação dos Objetivos, ou seja, quando foi priorizada alguma função obteve-se uma solução próxima à solução ideal, uma vez que a mesma foi adotada como meta a ser atingida.

A terceira aplicação analisou a seleção de geradores de uma unidade de produção de energia, de forma a minimizar o consumo de combustível e a emissão dos poluentes na atmosfera. Nesta análise, considerou-se com restrições do problema a potência real mínima e máxima de cada gerador e a potência total que deve cobrir a demanda e a perda por potência dissipada. O método da Ponderação dos Objetivos demonstrou uma excelente performance, os valores ótimos foram bem sensíveis à variação dos coeficientes de ponderação, sendo possível determinar com eficácia a Curva Ótima de Pareto. Os resultados para o método Hierárquico foram coerentes, pois quando qualquer um dos critérios foi priorizado seu valor foi minimizado. Além disso, foram sensíveis à variação dos coeficientes adotados para o acréscimo (ξ_h) das funções objetivo nas restrições flexíveis. No método da Negociação os pontos ótimos foram obtidos de acordo com os valores de ξ_n dados pela Tabela de Pagamento. Para valores maiores que ξ_n os resultados tendem para os valores ideais, já quando os valores adotados são menores negocia-se a solução do problema. Os valores ótimos calculados pelas métricas L_2 e L_3 relativas foram semelhantes entre si e representam um compromisso entre os dois critérios. O método da Programação de Metas apresentou o mesmo comportamento das aplicações anteriores, obedecendo as metas estabelecidas.

As técnicas estudadas permitem trabalhar com funções multi-objetivo possibilitando a obtenção de soluções ótimas. Quando as funções possuem valores absolutos que diferem

muito entre si é essencial adimensionalizar as funções antes da aplicação dos métodos. Pode-se usar os valores da solução ideal para esta finalidade, o que permitirá uma melhor análise dos resultados.

Uma contribuição desta pesquisa foi a produção de um texto básico que visa auxiliar o usuário na solução de problemas de otimização que envolvam vários objetivos conflitantes entre si. As metodologias apresentadas podem ser aplicadas por pesquisadores de várias áreas, tornando-se ferramentas a serem usadas para ajudar a tomada de decisão.

Analisando os resultados obtidos durante a solução de alguns problemas de otimização multi-objetivo, devido a própria natureza deste tipo de problema, comprova-se que é difícil recomendar um determinado método como sendo o mais eficaz. Os resultados obtidos são influenciados pelo método escolhido, e podem ser modificados até mesmo pela diferentes abordagens adotadas dentro de um mesmo método. Sendo, portanto, altamente recomendável que para o mesmo problema, diversas técnicas sejam testadas.

A importância dessa área de pesquisa permite deixar algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Aprofundar o estudo de cada método, inclusive abordando os métodos similares propostos na bibliografia, por exemplo, os métodos que utilizam o conceito de função de utilidade, o método de otimização lexicográfico, entre outros.
- Aplicar os métodos estudados na solução de problemas complexos de otimização multi-critérios, por exemplo, no projeto ótimo de sistemas robóticos.
- Escrever um código computacional, amigável e interativo, com várias técnicas de otimização multi-critérios, de forma que seja acessível para profissionais de outras áreas.
- Análise da sensibilidade dos métodos em relação aos parâmetros do problema.
- Fazer um estudo fixando a técnica estudada e modificando o método de otimização (clássicos e naturais).

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abido, M. A., 2003, “A niched Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective environmental/economic dispatch”, *Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 25, pp 97 – 105.

Ambrósio, L. A., 2002, “Programação Multicritério: Um Instrumento para Planejamento Agroambiental”, *Curso de Especialização em Gestão Agroambiental, Laboratório de Análises e Métodos Quantitativos, FAEF.*

Andersson, J., 2003, “Applications of a Multi-Objective Genetic Algorithm to Engineering Design Problems”, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Second International Conference, EMO2003, Faro, Portugal, Vol. 2632, pp. 737 – 751.*

Assis, E. G., 1999, “Uso técnico de otimização para auxiliar o projeto e identificar parâmetros de máquinas rotativas”, *Tese de Doutorado apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFU, Uberlândia, Brasil.*

Azarm, S., 1996, “*Multiobjective Optimum Design*”, <http://www.glue.umd.edu/~azarm/>.

Ben-Tal, A., 1980, “Characterization of Pareto and Lexicographic Optimal Solutions”, In *Multiple Criteria Decision Making Theory and Application*, G. Fangel and T. Gal, eds., Springer-Verlag, New York.

Boychuk, L. M. and Ovchinnikov, V. O., 1973, “Principal Methods of Solution Multicriterial Optimization Problems (survey)”, *Soviet Automatic Control*, 6, pp 1 – 4.

Charnes, A. and Cooper, W. W., 1961, “Management Models and Industrial Applications of Linear Programming”, Vol. 1, Wiley, New York. Chapter 6, Appendix B, Basic Existence Theorems and Goal Programming.

Clayton, E. R., Weber, W. E. and Taylor, B. W., 1982, "A goal programming approach to the optimization of multi-response simulation models". IIE Transactions 14(4), pp 282 – 287.

Deb, K., 2001, "Multi-objective optimization using Evolutionary Algorithms", John Wiley & Sons, pp 77-80 e 129-135.

Eschenauer, H., Koski, J. and Osyczka, A., 1990. "Multicriteria Design Optimization". Berlin, Springer-Verlag.

Faria, M. L. M., 1991, "Uma Contribuição aos Procedimentos de Otimização Aplicados a Sistemas Mecânicos", Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFU, Uberlândia, MG.

Haimes, Y. Y., and Hall, W. A., 1974, "Multiobjective in Water Resources Systems Analysis: The Surrogate Worth Trade-Off Method", Wat. Resources Res., 10, pp 615 - 624.

Ijiri, Y., 1965, 'Management Goals and Accounting for Control', North-Holland, Amsterdam.

Ignizio, J. P., 1976, "Goal Programming and Extensions", Lexington Books, Massachusetts.

Jutler, H., 1967, "Liniejnaja modal z nieskolkimi clevymi funkcjami (Linear Model with Several Objectiv Functions)", Ekonomika i matematiceckije Metody, Vol. III, No. 3, pp 397-406.

Knowles, J., 2005, "A Hybrid Algorithm with on-line Landscape Approximation for Expensive Multi-Objective Optimization Problems", IEEE Transactions on Evolutionary Computation.

Korhonen, P. and Soismaa, M., 1981, "An Interactive Multiple Criteria Approach to Ranking Alternatives", J. Opl. Res. Soc., 32, pp 577 – 585.

Koski, J., 1981, "Multicriterion Optimization in Structural Design", Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design, University of Arizona, Tucson, Arizona.

Lee, S. M., 1972, "Goal Programming for Decision Analysis", Auerbach Publishers, Philadelphia, Pennsylvania.

Mulssealm, K. and Tavalage, J., 1980, "A trade-Off Cut Approach to Multiple Objective Optimization", *Operations Research*, 28, 6, pp 1424 – 1435.

Oliveira, L. S. and Saramago, S. F. P., 2004, "A Comparative Study About Some Methods of the Multi-Objective Optimization", In: XXV IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTACIONAL METHODS IN ENGINEERING, XXV CILAMCE. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, v. 1, pp. 1-17.

Oppenheimer, K. R., 1978, "A Proxy Approach to Multi-attribute Decision Making", *Management Science*, 24, pp 675 – 689.

Osyczka, A., 1978, "An Approach to Multicriterion Optimization Problems for Engineering Design", *Comp. Methods in Applied Mech. And Eng.*, 15, pp 309 – 333.

Osyczka, A., 1981, "An Approach to Multicriterion Optimization for Structural Design", *Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design*, University of Arizona.

Parsons, M. G. and Scott, R. L., 2004, "Formulation of Multicriterion Design Optimization Problems for Solution with Scalar Numerical Optimization Methods", *SNAME*, Vol. 48, pp 61 – 76.

Romero, C., 1991, "Handbook of Critical Issues in Goal Programming", Oxford, Uk: Pergamon Press.

Sakawa, M., 1981, "An Interactive Computer Program for Multiobjective Decision Making by the Sequential Proxy Optimization Technique", *Int. J. Man-Machine Studies*, 14, pp 193 – 213.

Salukvadze, M. E., 1974, "On the Existence of Solution in Problems of Optimization under Vector Valued Criteria", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 12, 2, pp 203 – 217.

Saramago, S. F. P. and Steffen Jr, V., 2001, "Trajectory Modeling of Robots Manipulators in the Presence of Obstacles", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Kluwer Academic, vol. 110, n. 1, pp 17 – 34.

Sawaragi, Y., Nakayama, H. and Tanino, T., 1985, "Theory of Multiobjective Optimization", Academic Press, Inc., Orlando, Florida, U.S.A.

Sayyouth, M. H., 1981, "Goal Programming: A new tool for optimization in petroleum reservoir history matching", *Applied Mathematics Modelling*, 5(4), pp 223 – 226.

Solich, R., 1969, "Zadanie programowania liniowego z wieloma funkcjami celu (Linear Programming Problem with Several Objective Functions)", *Przeglad Statystyczny*, 16, pp 24 –30.

Steuer, R. E., 1986, "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application", New York: Wiley.

Ticona, W. G. C., 2003, "Aplicação de Algoritmos Genéticos Multi-Objetivo para Alinhamento de Sequências Biológicas", *Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, USP - São Carlos.*

Vanderplaats, G., 1995, "DOT – Design Optimization Tools Program" – Users Manual, Vanderplaats Research & Development, Inc, Colorado Springs.

Vanderplaats, G., 1999, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", third edition, Vanderplaats Research & Development, Inc, Colorado Springs.

Vankan, W.J. and Maas, R., 2002, *Approximate modelling and multi objective optimisation in aeronautic design*, CMMSE, National Aerospace Laboratory NLR, Alicante, Spain.

Yoshimura, M., Sasaki, K., Izui, K. and Nishiwaki, S., 2005, "Hierarchical Multi-objective Optimization Methods for Deeper Understanding of Design Solutions and Breakthrough for Optimum Design Solutions", 6th World Congress on Structural and Mutidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, Brasil.

Walz, F. M., 1967, "An Engineering Approach: Hierarchical Optimization Criteria", IEEE Trans. Automatic Control, AC – 12, 179.

Wierzbichi, A. P., 1978, "On the Use of Penalty Functions in Multiobjective Optimization", Proceedings of the International Symposium on Operations Research, Mannheim.

Wierzbichi, A. P., 1980, "The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization", In Multiple Criteria Decision Making Theory and Application, Fandel, G. and Gal, T. (eds.), Springer-Verlag, New York, pp 469 – 486.

Zeleny, M., 1974, "Linear Multiobjective Programming", Springer-Verlag, New York.

Zeleny, M., 1982, "Multiple Criteria Decision Making", New York: McGraw-Hill.

Zionts, S. and Wallenius, J., 1976, "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem", Mgmt. Sci., 22, 6, pp 632 – 663.