

**MARCO TÚLIO SANTANA ALVES**

**AVALIAÇÃO NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DOS MÉTODOS ERA E  
ERA/OKID PARA A IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS**

**Dissertação** apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica da Universidade Federal de  
Uberlândia, como parte dos requisitos  
para obtenção do título de **MESTRE EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de Concentração: Mecânica dos  
Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. José Francisco  
Ribeiro

**UBERLÂNDIA-MG**

**2005**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

A474a	<p>Alves, Marco Túlio Santana, 1974- Avaliação numérica e experimental dos métodos ERA e ERA/OKID para a identificação de sistemas mecânicos / Marco Túlio Santana Alves. - 2005. 121 f. : il.</p> <p>Orientador: José Francisco Ribeiro.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Inclui bibliografia.</p> <p>1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Estimativa de parâmetro - Teses. 3. Sistemas lineares - Teses. 4. Modelos matemáticos - Teses. I. Ribeiro, José Francisco. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
CDU: 621:531.01	

Ao meu pai, José, a quem devo tudo que sou e que alcancei  
Aos meus irmãos, Alessandro e Charmenie, pelo apoio incondicional

À memória de minha mãe, Meigna

“O fator fundamental da credulidade dos espíritos incultos reside na própria ignorância: acreditam, porque lhes faltam conhecimentos que lhes permitam criticar ou discordar. O mesmo se dá com os espíritos pusilânimes: tudo aceitam, porque não têm ânimo nem disposição para analisar ou rejeitar aquilo que, por mero comodismo ou fraqueza, admitem sem oposição.”

*Dante Veoleci*

“... verdadeiro valor não dão à gente; essas honras vãs, esse ouro puro... melhor é merecerlos sem os ter que possuí-los sem os merecer”

*Camões*

## AGRADECIMENTOS

À Deus.

À toda minha família, por ter acreditado no meu potencial.

Aos amigos de sempre: Marcelo, Renato, Luigi Roberto (Lui) e Elizabeth Cristina (Lis).

À turma da banda: Juca, Gustavo Fagundes, William, Leandro, por terem compreendido minha saída para que eu pudesse engajar neste projeto.

Ao amigo Dr. Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu, por ter me apresentado a área de Controle, me convencendo a optar por ela, e de me recomendar seu orientador como a melhor opção para ser o meu também.

Ao Prof. Dr. José Francisco Ribeiro, o Tito, pela paciência, pelos valiosos ensinamentos que levarei comigo como edificante legado, e pelo tratamento dado a mim e aos meus “irmãos” de orientação, como uma família, pela sua preocupação, tanto com o trabalho, quanto com a pessoa.

Ao amigo Rafael Luis Teixeira, pelo incentivo dado ao meu ingresso neste Programa.

À turma do Laboratório Computacional da Pós-Graduação, principalmente para: Ricardo Simões, Daniel, Sebastião Simões (P.O.), Hexaner, Ciro, Peter, etc.

Ao amigo Ilvan, pela presteza demonstrada no difícil início desta jornada acadêmica.

Aos amigos Patrick, Israel e Leandro pela paciência e auxílio dispensados, sobretudo, nas atividades experimentais.

Aos professores Sônia Aparecida Goulart de Oliveira e Edsonei Pereira Parreira pelas cartas de recomendação que, com certeza, foram determinantes para meu ingresso no Programa.

Às secretárias Lucy, Inês e Kelly pela educação e pelo bom atendimento prestado.

Aos professores de quem fui aluno na Pós-Graduação: José Francisco Ribeiro, Lépore, João Carlos, Duarte, Marcos Morais, Ribeiro e Válder.

À todos os funcionários da FEMEC.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela estrutura e pelos apoios diversos.

À FAPEMIG, pelo auxílio financeiro que viabilizou a realização deste trabalho.

À turma da Sadia, William, Mário, Leandro, Márcia, Tatiana etc., por terem me dado a oportunidade de aprender um pouco mais e por terem me acolhido com amizade no período que precedeu a defesa desta. Aquele abraço!

E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram e acreditaram nesta dissertação.

Alves, M. T. S., 2005, "Avaliação Numérica e Experimental dos Métodos ERA e ERA/OKID para a Identificação de Sistemas Mecânicos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## RESUMO

Este trabalho apresenta dois algoritmos de identificação de sistemas lineares em espaço de estados, quais sejam: o ERA (Eigensystem Realization Algorithm), desenvolvido por Juang e Pappa (1985), e o ERA/OKID (Observer/Kalman Filter Identification), por Phan *et al.* (1992). Ambos foram concebidos no ambiente da Engenharia Aeroespacial, onde se fazia imprescindível o surgimento de uma ferramenta confiável para identificação das complexas estruturas e dos sistemas inerentes.

O primeiro requer que o sistema seja submetido a uma entrada impulsiva e que a saída (Parâmetros de Markov) decorrente seja organizada numa matriz conhecida como matriz de Hankel. Esta matriz é então decomposta em valores singulares, o que permite, com o auxílio dos conceitos de controlabilidade e observabilidade, uma manipulação matemática conveniente que fornece a realização desejada, ou seja, o sistema em espaço de estados. O segundo foi concebido para sistemas pouco amortecidos e, por isso, incorpora, matematicamente, um observador de estado para que seja acrescido um amortecimento virtual no sinal. Este recurso permite uma compressão dos dados e, por conseguinte, menor esforço computacional. Assim sendo, o OKID fornece, a partir de qualquer tipo de entrada, os parâmetros de Markov do observador e do sistema, onde estes últimos "alimentarão" o ERA.

A motivação do trabalho é a de auxiliar a Engenharia de Controle na identificação, em espaço de estados, de sistemas complexos, cuja modelagem analítica é dificultada por razões diversas, além de auxiliar a simulação destes.

Para tanto, o trabalho apresenta a Teoria de Realização de Sistemas, os algoritmos ERA e ERA/OKID, onde, a partir destes preceitos, foi feita uma avaliação numérica de um sistema mecânico com 2 GDL's usando o ERA e uma avaliação experimental de um duto acústico empregando o ERA/OKID.

A dissertação concluiu que, para os casos estudados, as técnicas apresentadas são eficientes, constituindo, assim, poderosas ferramentas de identificação, e aponta, ainda, alguns desdobramentos futuros da pesquisa ora realizada.

Alves, M. T. S., 2005, "A Numerical and Experimental Evaluation of ERA and ERA/OKID for Mechanical Systems Identification", M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

## ABSTRACT

This work presents two algorithms of identification of state-space linear systems, as follows: ERA (Eigensystem Realization Algorithm), developed by Juang and Pappa (1985), and ERA/ OKID (Observer/ Kalman Filter Identification), by Phan et al. (1992). Both were conceived at the environment of Aerospace Engineering, where it was indispensable the appearance of a trustworthy tool to identify the complex structures and the inherent systems.

The first one requires that the system is subjected to an impulse input and that the output (Markov Parameters) is organized in a known matrix as Hankel matrix. This matrix is then decomposed in singular values, which permits, with the help of the concepts of controllability and observability, a convenient mathematical manipulation that gives the desired realization, that is the system in state-space. The second one was conceived for underdamping systems. Therefore, it results, mathematically, in a state observer, so that, a virtual damping at the signal is added. This resource allows a data compression and, consequently, lower computational effort. Thus, OKID provides, from any sort of input, Markov parameters of the observer and the system, and the last one will feed ERA.

The motivation of the work is to help the Control Engineering in the identification, in state-space, of complex systems, whose analytical modelling is difficult due to several reasons. Furthermore, it helps its simulations.

In order to make it possible, the work presents the Theory of Systems Realization, ERA and ERA/ OKID algorithms, and from these concepts, a numerical assessment of a mechanical system with two degrees of freedom using ERA, and an experimental assessment of an acoustic pipe using ERA/ OKID.

The dissertation concluded that, for the studied cases, the presented techniques are efficient, and as a result, they become powerful tools of identification and points out some future perspectives in the realized research.

## LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 2.1 – Viga engastada com atuador localizado em um nó deste modo de vibrar .....</p> <p>Figura 2.2 – Viga engastada com sensor localizado em um nó deste modo de vibrar .....</p> <p>Figura 2.4 – Fluxograma do ERA .....</p> <p>Figura 3.1 – Efeito da incorporação de um observador no sistema sobre a resposta no domínio do tempo .....</p> <p>Figura 3.2 – Estratégia do OKID .....</p> <p>Figura 3.3 – Diagramas de Bloco: Sistema Real (a) e Sistema com Observador (b) ..</p> <p>Figura 3.4 – Fluxograma do OKID .....</p> <p>Figura 4.1 – Representação da adição do ruído branco à saída do sistema teórico ...</p> <p>Figura 4.2 – Sistema mecânico de 2 GDL's simulado .....</p> <p>Figura 4.3 – Esquema da seqüência das simulações numéricas para o ERA .....</p> <p>Figura 4.4 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (Sem Ruído com <math>\alpha = \beta = 50</math>) .....</p> <p>Figura 4.5 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (Sem Ruído com <math>\alpha = \beta = 200</math>) .....</p> <p>Figura 4.6 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (Sem Ruído com <math>\alpha = \beta = 500</math>) .....</p> <p>Figura 4.7 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (<math>PCT = 10\%</math> com <math>\alpha = \beta = 50</math>) .....</p> <p>Figura 4.8 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (<math>PCT = 10\%</math> com <math>\alpha = \beta = 200</math>) .....</p> <p>Figura 4.9 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (<math>PCT = 10\%</math> com <math>\alpha = \beta = 500</math>) .....</p> <p>Figura 4.10 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (<math>PCT = 25\%</math> com <math>\alpha = \beta = 50</math>) .....</p> <p>Figura 4.11 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado (<math>PCT = 25\%</math> com <math>\alpha = \beta = 200</math>) .....</p>	<p style="text-align: right;">12</p> <p style="text-align: right;">14</p> <p style="text-align: right;">31</p> <p style="text-align: right;">35</p> <p style="text-align: right;">36</p> <p style="text-align: right;">41</p> <p style="text-align: right;">52</p> <p style="text-align: right;">55</p> <p style="text-align: right;">56</p> <p style="text-align: right;">57</p> <p style="text-align: right;">58</p> <p style="text-align: right;">59</p> <p style="text-align: right;">60</p> <p style="text-align: right;">61</p> <p style="text-align: right;">62</p> <p style="text-align: right;">63</p> <p style="text-align: right;">64</p> <p style="text-align: right;">65</p>
---	---

Figura 4.12 – FRF, MAC, MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado ( $PCT = 25\%$ com $\alpha = \beta = 500$ ) .....	66
Figura 5.1 – Desenho Descritivo do Duto Acústico .....	74
Figura 5.2 – Foto da Bancada Experimental do Duto Acústico .....	75
Figura 5.3 – Esquema da Bancada Experimental .....	75
Figura 5.4 – Esquema da Convenção de um Ensaio .....	76
Figura 5.5 – Sinais de Entrada 1, Saída 1 e Saída 2 .....	77
Figura 5.6 – Sinais de Entrada 2, Saída 1 e Saída 2 .....	78
Figura 5.7 – Esquema da estratégia para identificação do sistema .....	79
Figura 5.8 – Fluxograma da “Otimização Manual” dos parâmetros $p$ e $n$ .....	79
Figura 5.9 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Referência (Saída 1) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 70$ .....	81
Figura 5.10 – Coerência entre Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Referência (Saída 1) .....	81
Figura 5.11 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Erro (Saída 2) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 70$ .....	82
Figura 5.12 – Coerência entre Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Erro (Saída 2) .....	82
Figura 5.13 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Referência (Saída 1) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 70$ .....	83
Figura 5.14 – Coerência entre Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Referência (Saída 1) .....	83
Figura 5.15 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Erro (Saída 2) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 70$ .....	84
Figura 5.16 – Coerência entre Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Erro (Saída 2) .....	84
Figura 5.17 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Referência (Saída 1) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 130$ .....	84
Figura 5.18 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Erro (Saída 2) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 130$ .....	86
Figura 5.19 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Referência (Saída 1) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 130$ ..	87
Figura 5.20 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada	

2) e o Microfone de Erro (Saída 2) – $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 130$ .....	88
Figura 5.21 – Comparação entre os sinais de saídas 1 e 2 medidos e simulados devido à entrada 1 (Alto-Falante de Excitação) .....	89
Figura 5.22 – Comparação entre os sinais de saídas 1 e 2 medidos e simulados devido à entrada 2 (Alto-Falante de Controle) .....	90
Figura 5.23 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Referência) .....	91
Figura 5.24 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Erro) ....	91
Figura 5.25 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Controle – Microfone de Referência) .....	92
Figura 5.26 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Controle – Microfone de Erro) .....	93
Figura 5.27 – SOM e Diagonal de $\Sigma$ versus o Número de Modos ( $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 70$ ) .....	93
Figura 5.28 – SOM e Diagonal de $\Sigma$ versus o Número de Modos ( $\alpha = \beta = 200$ e $p = n = 130$ ) .....	93
Figura 5.29 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Referência) .....	95
Figura 5.30 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Erro) .....	96
Figura 5.31 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Controle – Microfone de Referência) .....	97
Figura 5.32 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Controle – Microfone de Erro) .....	98
Figura I.1 – Tela Inicial da Interface Gráfica (TEL A 1) .....	111
Figura I.2 – Tela para a escolha do arquivo de dados (TEL A 2) .....	112
Figura I.3 – Tela para salvar o arquivo que contém o sistema identificado (TEL A 3)	113
Figura I.4 – Tela com os resultados da identificação (TEL A 4) .....	114
Figura II.1 – Caracterização das incertezas do sistema .....	115

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais (Sem Ruído com $\alpha = \beta = 50$ ) .....	58
Tabela 4.2	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais (Sem Ruído com $\alpha = \beta = 200$ ) .....	59
Tabela 4.3	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais (Sem Ruído com $\alpha = \beta = 500$ ) .....	60
Tabela 4.4	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais ( $PCT = 10\%$ com $\alpha = \beta = 50$ ) .....	61
Tabela 4.5	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais ( $PCT = 10\%$ com $\alpha = \beta = 200$ ) .....	62
Tabela 4.6	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais ( $PCT = 10\%$ com $\alpha = \beta = 500$ ) .....	63
Tabela 4.7	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais ( $PCT = 25\%$ com $\alpha = \beta = 50$ ) .....	64
Tabela 4.8	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais ( $PCT = 25\%$ com $\alpha = \beta = 200$ ) .....	65
Tabela 4.9	– Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais ( $PCT = 25\%$ com $\alpha = \beta = 500$ ) .....	66
Tabela 4.10	– Consolidação das Identificações para todos os casos .....	67
Tabela 5.1	– Componentes do Sistema – Duto Acústico .....	74
Tabela 5.2	– Componentes da Bancada Experimental .....	76
Tabela 5.3	– Características do Sinal de Entrada .....	76
Tabela 5.4	– Configuração de Parâmetros utilizados nas Identificações .....	80

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Arábicos

Símbolo	Significado
$\mathbf{A}$	matriz da dinâmica do sistema no domínio discreto
$\hat{\mathbf{A}}_m$	matriz da dinâmica do sistema em coordenadas modais
$\mathbf{A}_c$	matriz da dinâmica do sistema no domínio contínuo
$\bar{\mathbf{A}}$	matriz da dinâmica do sistema com observador incorporado
$\hat{\mathbf{A}}$	matriz $\mathbf{A}$ identificada
$\tilde{\mathbf{A}}$	matriz da dinâmica do sistema com filtro de Kalman incorporado
$\hat{\mathbf{A}}_{red}$	matriz da dinâmica do sistema identificado reduzido
$\underline{\mathbf{A}}$	matriz da dinâmica do sistema mecânico teórico
$\mathbf{B}$	matriz dos atuadores no domínio discreto
$\hat{\mathbf{B}}_m$	matriz dos atuadores em coordenadas modais
$\mathbf{B}_c$	matriz dos atuadores no domínio contínuo
$\bar{\mathbf{B}}$	matriz dos atuadores com observador incorporado
$\hat{\mathbf{B}}$	matriz $\mathbf{B}$ identificada
$\tilde{\mathbf{B}}$	matriz dos atuadores com filtro de Kalman incorporado
$\underline{\mathbf{B}}$	matriz dos atuadores do sistema mecânico teórico
$\hat{\mathbf{B}}_{red}$	matriz dos atuadores do sistema identificado reduzido
$\mathbf{C}$	matriz dos sensores no domínio discreto
$\hat{\mathbf{C}}_m$	matriz dos sensores em coordenadas modais
$\hat{\mathbf{C}}$	matriz $\mathbf{C}$ identificada
$\underline{\mathbf{C}}$	matriz dos sensores do sistema mecânico teórico
$\mathbf{C}_s$	matriz de amortecimento do sistema mecânico teórico
$\hat{\mathbf{C}}_{red}$	matriz dos sensores do sistema identificado reduzido
$\mathbf{D}$	matriz de perturbação dos sensores devido aos atuadores no domínio discreto
$\hat{\mathbf{D}}$	matriz $\mathbf{D}$ identificada

<b>D</b>	matriz de perturbação dos sensores devido aos atuadores do sistema mecânico teórico
<i>dt</i>	tempo de amostragem
<b>E</b>	operador Esperança
<b>E<sub>m</sub></b>	matriz auxiliar para determinação de $\hat{\mathbf{C}}$
<b>E<sub>r</sub></b>	matriz auxiliar para determinação de $\hat{\mathbf{B}}$
<b>G</b>	matriz do ganho do observador
<b>H</b>	matriz de Hankel
<b>I</b>	matriz identidade
<b>K</b>	ganho do filtro de Kalman
<b>K<sub>s</sub></b>	matriz de rigidez do sistema mecânico teórico
<i>l</i>	tamanho da amostra ou comprimento do vetor de dados
<i>ln</i>	operador logaritmo neperiano ou logaritmo natural
<i>m</i>	número de entradas
<b>M<sub>s</sub></b>	matriz de massa do sistema mecânico teórico
<i>MAC<sub>i</sub></i>	coerência de amplitude modal relativo ao modo <i>i</i>
<i>MSV<sub>i</sub></i>	valor singular do modo <i>i</i>
<i>n</i>	ordem do sistema
<i>n<sub>red</sub></i>	ordem do sistema reduzido
<b>O<sub>m</sub></b>	matriz nula quadrada de ordem <i>m</i>
<b>O<sub>r</sub></b>	matriz nula quadrada de ordem <i>r</i>
<i>p</i>	número de parâmetros de Markov do observador
<b>P</b>	matriz de observabilidade
<b>PCT</b>	porcentagem do sinal $y(k)$ sobre o qual é injetado ruído branco
$\bar{\mathbf{q}}_i$	evolução temporal “esperada” do modo <i>i</i>
$\hat{\mathbf{q}}_i$	evolução temporal identificada do modo <i>i</i>
<b>Q</b>	matriz de controlabilidade
<b>Q<sub>m</sub></b>	matriz de controlabilidade em coordenadas modais
<b>R</b>	matriz resultante da decomposição em valores singulares da matriz <b>H</b>
<i>r</i>	número de saídas
<b>S</b>	matriz resultante da decomposição em valores singulares da matriz <b>H</b>
<b>SOM</b>	seletor de ordem do modelo
<b>u</b>	vetor de controle ou de entrada

$\mathbf{U}, \mathcal{U}$	matriz dos dados de entrada do sistema
$\mathbf{v}$	matriz de entrada para sistema o sistema com observador
$\vec{\mathbf{v}}_1$	vetor genérico
$\vec{\mathbf{v}}_2$	vetor genérico
$\mathbf{V}, \mathcal{V}, \bar{\mathbf{V}}$	matriz dos dados de entrada do sistema como observador
$\mathbf{x}$	vetor de estados
$\hat{\mathbf{x}}$	estado estimado
$\mathbf{x}_m$	vetor de estados em coordenadas modais
$\mathbf{y}$	vetor das medidas
$\mathbf{Y}, \mathcal{Y}$	parâmetro de Markov do sistema
$\tilde{\mathbf{Y}}$	parâmetro de Markov do filtro de Kalman
$\bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathcal{Y}}$	parâmetro de Markov do observador
$\bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)}$	parâmetro de Markov do observador devido à entrada
$\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}$	parâmetro de Markov do observador devido à saída
$\tilde{\mathbf{Y}}_k^{(2)}$	parâmetro de Markov do observador devido à saída para $p \leq k \leq 1$
$\mathbf{Y}_k^o$	parâmetro de Markov do ganho do observador
$\underline{\mathbf{Y}}$	Parâmetros de Markov do sistema para $k \leq p+2$
$\mathbf{w}$	vetor de ruído no processo

## Gregos

Símbolo	Significado
$\alpha$	parâmetro que compõe o número de linhas da matriz $H$
$\beta$	parâmetro que compõe o número de colunas da matriz $H$
$\varphi$	vetor arbitrário
$\psi$	autovetor
$\Psi$	matriz modal
$\Delta t$	tempo de amostragem
$\theta$	ângulo entre os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$
$\hat{\Lambda}$	matriz diagonal dos autovalores da matriz $\hat{A}$
$\Lambda_c$	matriz diagonal dos autovalores da matriz $A$ no domínio contínuo
$\hat{\lambda}_i$	autovalor identificado relativo ao modo $i$
$\lambda_i$	autovalor “esperado” relativo ao modo $i$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	matriz dos resíduos
$\Sigma$	matriz resultante da decomposição em valores singulares da matriz $H$
$\boldsymbol{u}$	vetor de ruído na medida
$\sigma$	elemento da diagonal da matriz $\Sigma$

## SUMÁRIO

<b>Capítulo I – INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo II – TEORIA DA REALIZAÇÃO DE SISTEMAS</b>	<b>5</b>
2.1 Controlabilidade e Observabilidade .....	5
2.1.1 Controlabilidade no Domínio do Tempo .....	8
2.1.2 Observabilidade no Domínio do Tempo .....	12
2.2 Conceitos Básicos de Realização .....	13
2.3 Eigensystem Realization Algorithm – ERA .....	19
2.3.1 Formulação Básica .....	20
2.3.2 Relação com Ruídos .....	24
2.3.3 Técnicas para Distinção dos Modos Reais dos Modos de Ruído .....	25
2.3.3.1 Coerência de Amplitude Modal – MAC .....	25
2.3.3.2 Valor Singular do Modo – MSV .....	28
2.3.3.3 Comentários sobre o MAC e o MSV .....	29
2.3.3.4 Estratégia para Redução Modal .....	30
2.4 O Algoritmo .....	31
<b>Capítulo III – IDENTIFICAÇÃO COM OBSERVADOR/FILTRO DE KALMAN</b>	<b>35</b>
3.1 Equação Básica do Observador .....	36
3.2 Cálculo dos Parâmetros de Markov .....	45
3.2.1 Parâmetros de Markov do Sistema .....	45
3.2.2 Parâmetros de Markov do Ganho do Observador .....	48
3.3 Considerações importantes sobre a escolha do parâmetro $p$ .....	49
3.4 Relação com o Filtro de Kalman .....	51
3.5 O Algoritmo OKID .....	52
<b>Capítulo IV – AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO ERA</b>	<b>55</b>
4.1 O Sistema Mecânico Simulado .....	55
4.2 Análise de Sensibilidade do ERA aos Parâmetros $\alpha$ , $\beta$ e ao Ruído através de Simulação .....	56
4.2.1 Sem ruído – PCT = 0% .....	57
4.2.2 Com ruído – PCT = 10% .....	60
4.2.3 Com ruído – PCT = 25% .....	62

4.3 Análise dos Resultados .....	66
4.3.1 Impacto do Ruído sobre o MAC .....	66
4.3.2 Impacto do Ruído sobre o MSV .....	67
4.3.3 Impacto do Ruído sobre o SOM .....	67
4.3.4 Impacto de $\alpha$ e $\beta$ sobre o MAC .....	67
4.3.5 Impacto de $\alpha$ e $\beta$ sobre o MSV .....	68
4.3.6 Impacto de $\alpha$ e $\beta$ sobre o SOM .....	68
4.3.7 Conclusões Parciais .....	69
4.4 Considerações Parciais .....	70
<b>Capítulo V – AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DO ERA/OKID</b>	<b>73</b>
5.1 Introdução .....	73
5.2 Bancada Experimental .....	73
5.2.1 O Duto Acústico .....	73
5.2.2 O Equipamento e o Esquema de Montagem do Experimento .....	74
5.3 O Ensaio .....	76
5.3.1 Sinais Injetados e Adquiridos .....	77
5.4 Estratégia para a Identificação .....	79
5.4.1 Escolha dos parâmetros utilizados no ERA/OKID .....	79
5.5 Resultados e Discussão .....	80
5.5.1 Resultados do 1º Caso .....	81
5.5.2 Resultados do 2º Caso .....	84
5.5.3 Simulação do Duto Acústico Identificado .....	89
5.5.3.1 Simulando com uma entrada do tipo “ruído branco” .....	89
5.5.3.2 Simulando com uma entrada do tipo impulsiva .....	91
5.5.4 Avaliação dos Critérios para Redução Modal .....	93
5.5.5 Redução Modal do Sistema Identificado .....	95
5.5.6 Conclusões Parciais .....	99
<b>Capítulo VI – CONCLUSÕES</b>	<b>101</b>
<b>Capítulo VII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>105</b>
<b>Anexo I – A INTERFACE GRÁFICA</b>	<b>111</b>
<b>Anexo II – RELAÇÃO ENTRE OS GANHOS DO OBSERVADOR E DO FILTRO DE KALMAN</b>	<b>115</b>

# **Capítulo I**

## **INTRODUÇÃO**

A compreensão dos fenômenos da natureza e sua representação por meio de modelos matemáticos têm sido uma preocupação básica e constante na história das ciências aplicadas, notadamente nos campos da física e da engenharia. Nesta área tão positiva do conhecimento pode-se dizer que só se conhece um fenômeno físico a partir do momento em que se define uma representação matemática para a mesmo, representação esta que seja capaz de inferir o comportamento do fenômeno no tempo e no espaço, sob determinadas condições de contorno bem estabelecidas. Um modelo é tanto melhor quanto melhor for esta representação e menores forem os vínculos ou fronteiras em que está inserido.

Assim, a representação matemática de sistemas físicos é a pedra angular em que se assenta a grande parte das construções teóricas da ciência moderna. Se para compreender e controlar determinado fenômeno é preciso antes conhecê-lo, infere-se que é necessário antes modelá-lo, ou representá-lo matematicamente.

A área de identificação de sistemas dinâmicos é, no campo da engenharia, o segmento de pesquisa que busca, a partir de observações e ensaios experimentais, derivar as representações ou modelos matemáticos dos sistemas estudados. A experimentação e a representação requerem dos investigadores duas características muito importantes: uma sólida e rigorosa base matemática e boa dose de intuição no trato do fenômeno experimental (Santo, 2001 e Deistler, 2004).

As técnicas de identificação têm evoluído acentuadamente nos últimos tempos, isto se deve em grande parte, ao desenvolvimento dos recursos de informática. Os algoritmos de identificação têm se tornado mais precisos e velozes.

Sob um prisma histórico, as conquistas mais importantes na área da identificação dos fenômenos físicos remontam aos séculos XVIII e XIX. O principal foco, neste período, era pesquisar por periodicidades e tendências “ocultas”, como, por exemplo, órbitas de planetas (Laplace, Euler, Lagrange, Fourier, etc). Foi neste período que Gauss, em 1795, se tornou pioneiro no campo da modelagem e da identificação concebendo o tão conhecido método dos Mínimos Quadrados. Já na terceira década do século XX, Yule (1927) investigou os sistemas lineares estocásticos, que envolviam modelos de sistemas com

média móvel (MA) e auto-regressivos (AR) e que eram usados para explicar ciclos “quase periódicos”. Um pouco depois, cientistas como Wiener (1930) e Kolmogorov (1939) contribuíram para o surgimento de teorias de processos estacionários. Concomitantemente, surgiu a teoria de Máxima Verossimilhança e de estimação para sistemas lineares MIMO com dimensão finita através de vetores de equações diferença com erros de ruído branco, ou seja, sistemas ARX. A década de 60 experimentou um grande avanço tecnológico devido à corrida espacial, o que implicou, naturalmente, no acréscimo de complexidade nos sistemas inerentes a este segmento. Foi nesta época que foram desenvolvidas as teorias de estruturas para sistemas MIMO em espaço de estados e sistemas ARMA (Kalman, 1960). Ainda neste período surgiram técnicas não paramétricas como a estimação espectral e a estimação de funções de transferência. No início da década 70, Hannah (1969, 1971 e 1976), por exemplo, desenvolveu técnicas de estimação para sistemas SISO valendo-se de estruturas de modelos AR, ARMA, ARX e ARMAX, enquanto que Box e Jenkis (1970), criaram um procedimento para identificação de sistemas SISO, incluindo a estimação da ordem de tais sistemas.

Num contexto mais atual, Lus et al. (2002) relatam que os pesquisadores que trabalham com teoria de controle preferem, em geral, uma formulação de primeira ordem para os modelos. Por exemplo, Ibrahim e Mikulcik (1977) propõem um método de identificação direta para identificação de parâmetros de vibração. Já Ewins (1984) reúne, em um compêndio, uma gama de métodos de identificação de parâmetros modais tanto no domínio do tempo quanto no da freqüência. Juang e Pappa (1985) e Juang et al. (1988, 1993) conceberam um método de identificação bastante conveniente para Engenharia de Controle, que tornou possível obter a representação do sistema em variáveis de estado. A este algoritmo, inicialmente denominado por ERA (Eigensystem Realization Algorithm), ou realização de auto-sistema; foram derivadas duas extensões: o ERA/DC, (com correlações de dados) e o ERA/OKID (com observador/filtro de Kalman). Os resultados desses dois métodos de identificação geram ou parâmetros modais complexos do sistema em questão, ou modelos em espaço de estados, de onde também se podem extrair os parâmetros modais. Na literatura especializada o ERA é um dos procedimentos mais investigados. Ao estudar este método que nasceu nos laboratórios da NASA (Langley Research Center, Hampton, Virginia) em meados da década de 80, vindo a tornar-se um produto comercial, depara-se com inúmeras interrogações notadamente quando se pensa em aplicá-lo a um sistema físico real. Existem, no método, determinados parâmetros afeitos principalmente à inicialização e a convergência que, nos artigos publicados, aparecem de maneira vaga e nebulosa.

Assim, frente à abrangência e potencialidade do algoritmo ERA – comprovada por centenas de publicações que se serviram ferramenta comercial – e os detalhes, sob a nossa ótica, ainda obscuros, pretende-se com este trabalho:

***“Estudar o algoritmo ERA e sua variação ERA/OKID, procurando identificar a sensibilidade do método aos seus parâmetros de inicialização. Pretende-se avaliar a metodologia numérica e experimentalmente e desenvolver ainda uma interface computacional amigável que facilite a utilização do método em ambiente experimental”.***

Para atingir o objetivo proposto o trabalho obedece a seguinte organização: no Capítulo II é apresentada a Teoria de Realização de Sistemas, de onde derivam os algoritmos ERA; no Capítulo III é apresentada uma técnica auxiliar de identificação chamada OKID (Observer/Kalman Identification), que incorpora ou um observador, ou um filtro de Kalman no sistema a ser identificado; o Capítulo IV é dedicado à simulação numérica do ERA, onde é avaliada sua sensibilidade aos parâmetros inerentes simulando um sistema mecânico de dois graus de liberdade; o Capítulo V é reservado à avaliação experimental do ERA/OKID, onde é identificado um duto acústico, que é um sistema extremamente complexo e que é acometido por atrasos; no Capítulo VI constam as conclusões e os desdobramentos futuros desta dissertação.

## Capítulo II

### TEORIA DA REALIZAÇÃO DE SISTEMAS

No campo da identificação de parâmetros de sistemas dinâmicos vários métodos têm sido desenvolvidos, analisados e testados. Estabelecer uma relação entre estes métodos é uma questão que surge naturalmente. Neste capítulo, um arcabouço matemático unificado baseado na teoria da realização de sistemas, é apresentado para discutir a inter-relação entre estes métodos. Os métodos no domínio do tempo para identificação de parâmetros modais no campo das estruturas são baseados na matriz função de transferência, que fornece os parâmetros de Markov. O conhecimento dos parâmetros de Markov torna possível a construção da matriz de Hankel, que é a base para a realização do modelo em espaço de estado discretizado no tempo.

Mas, para se identificar o sistema, ou obter sua realização, faz-se necessário, ainda, o conhecimento de teorias que permitem avaliar se o sistema pode, ou não, ser controlado e/ou observado.

Este capítulo começa com a discussão sobre estas teorias. O conceito básico de realização mínima, que foi desenvolvida por Ho e Kalman (1965), será então descrita. Posteriormente, o ERA (Eigensystem Realization Algorithm) ou Realização de Auto-Sistema para identificação de parâmetros modais, que foi desenvolvido por Juang e Pappa (1985), é apresentado.

#### 2.1 Controlabilidade e Observabilidade

A partir do sistema escrito na forma de espaço de estados é possível derivar teorias que permitem investigar se todos os estados em questão podem ser controlados e/ou observados, onde estas são chamadas na literatura de teoria de Controlabilidade e de Observabilidade, respectivamente. Logo, para que se possa iniciar o desenvolvimento acerca destas, de acordo com Juang (1994), escreve-se os sistemas invariantes no tempo da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \quad (2.2)$$

ou por sua representação no domínio do tempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) \quad (2.4)$$

onde

- $\mathbf{x}$  é o vetor de estado ( $n \times 1$ );
- $\mathbf{u}$  é o vetor de controle ou de entrada ( $r \times 1$ );
- $\mathbf{y}$  é o vetor das saídas medidas ( $m \times 1$ );
- $\mathbf{A}_c$  e  $\mathbf{A}$  são as matrizes da dinâmica do sistema nos domínios contínuo e discreto, respectivamente ( $n \times n$ );
- $\mathbf{B}_c$  e  $\mathbf{B}$  são as matrizes dos atuadores nos domínios contínuo e discreto, respectivamente ( $n \times r$ );
- $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são as matrizes dos sensores ( $m \times n$ ) e da perturbação dos sensores devido aos atuadores ( $m \times r$ );

Tais equações, Eq. (2.3) e Eq (2.4), são usadas para determinar a resposta do sistema para qualquer entrada.

A solução no instante  $t_f$  para equação (2.1) é, Kwakernaak (1972):

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{\mathbf{A}_c(t_f - t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}_c(t_f - \tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

para  $t \geq t_0$ . A solução para a representação discreta da equação (2.3), no tempo,  $t_i = k\Delta t$  onde  $\Delta t$  é o tempo de amostragem, é da seguinte forma (Juang, 1994):

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k-j) \quad (2.6)$$

ou numa forma matricial compacta

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t_0)$  é o estado inicial em  $t = t_0$ .

A derivação das teorias de controlabilidade e observabilidade são similares para os casos contínuo e discreto. Será abordado, neste trabalho, somente o caso discreto. Além disso, faz-se necessário, para o bom entendimento das teorias ora citadas, a introdução de alguns conceitos, como: modo de vibrar e matriz modal, e significados de termos como: autovalor e autovetor, que neste trabalho são representados pelas letras gregas  $\lambda$  e  $\Psi$ , respectivamente.

Segundo Thomson e Dalhleh (1998), um sistema de  $N$  graus de liberdade possui a mesma quantidade de freqüências naturais, onde para cada uma delas existe um estado de vibração correspondente com a configuração de deslocamento conhecida por modo normal. Os termos matemáticos relacionados com essas quantidades são conhecidos como autovalores e autovetores, respectivamente, onde são determinados a partir de um sistema de  $N$  equações do movimento e têm certas propriedades dinâmicas associadas ao sistema. Logo, eles definem modo como sendo uma vibração livre não amortecida que depende somente da massa e da rigidez do sistema e de como elas são distribuídas. Quando vibra em um desses modos, todos os pontos do sistema ficam submetidos a um simples movimento harmônico que passa através de suas posições de equilíbrio simultaneamente. Para que um modo de vibrar seja observado é necessário que as condições iniciais aplicadas ao sistema assim o permita. Para uma condição inicial mais genérica, como uma excitação impulsiva, a vibração livre resultante pode conter todos os modos de vibrar simultaneamente. Sob um outro prisma, como no de Seto (1971), modo de vibrar é um estado de movimento em que todas as massas, em sistemas não contínuos, oscilam alcançando deslocamentos máximos simultaneamente, passando por suas posições de equilíbrio, também simultaneamente; ou, alternativamente, é um estado onde todas as partes móveis do sistema oscilam em fase com uma dada freqüência. Já matriz modal é aquela que contém os modos de vibrar, ou forma dos modos, de um sistema, e que são obtidas calculando-se os autovetores deste.

### 2.1.1 Controlabilidade no Domínio do Tempo

Um estado  $\mathbf{x}(k)$  de um sistema é dito controlável se este estado pode ser atingido a partir de qualquer estado inicial do sistema num intervalo de tempo finito por alguma ação de controle limitada. Se todos os estados são controláveis, o sistema é chamado *completamente controlável* ou simplesmente *controlável*.

Para determinar a controlabilidade completa no tempo de amostragem  $k$ , é necessário e suficiente determinar se o estado zero, ao invés de todos os estados iniciais, pode ser transferido para todos os estados finais. Para justificar o exposto rescreve-se a Eq. (2.7) na seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

que é equivalente partir do estado nulo e ir até o estado final  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)$ . Portanto, se é possível mostrar que o sistema pode ir do estado nulo para qualquer  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ , então ele pode ir de qualquer  $\mathbf{x}(0)$  para qualquer  $\mathbf{x}(k)$ . Uma avaliação da Eq. (2.8) revela que a matriz  $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$  deve representar um papel importante na determinação da controlabilidade do sistema.

**TEOREMA 2.1** – O sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, com dimensão finita e discretizado no tempo  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k)$  de ordem  $n$  é controlável se, e somente se, a  $n \times kr$  bloco da matriz de controlabilidade  $\mathbf{Q}_k$  tem posto  $n$ , onde

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \quad (2.9)$$

**PROVA** – Para provar este teorema, primeiro calcula-se a decomposição em valores singulares de  $\mathbf{Q}_k$ , o que resulta em

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \triangleq [\mathbf{R}_k \quad \mathbf{R}_0] \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^T \\ \mathbf{S}_0^T \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_n$ ,  $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_{kr}$  e  $\Sigma_k = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k]$  com  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_k > 0$ . Note também que  $\mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{I}_{kr}$  significam, respectivamente, a matriz identidade de ordem  $n$  e  $kr$ . As matrizes  $\mathbf{R}_k$  e  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{S}_k$  e  $\mathbf{S}_0$  são submatrizes com a apropriada partição de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$ , respectivamente. Note que  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_{kr}$  implica  $\mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_k = \mathbf{I}_k$  e  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k = \mathbf{I}_k$ , respectivamente. Nesta decomposição é assumido que o número  $k$  de valores singulares não-nulos é menor que  $n$ , que é a ordem do sistema.

Desde que  $\mathbf{R}$  seja uma matriz não-singular, pode-se pré-multiplicar a Eq. (2.8) por  $\mathbf{R}^T$ , o que resulta

$$\mathbf{R}^T \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \mathbf{u}(k-3) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \mathbf{u}(k-3) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Agora define-se  $\mathbf{u}_k^T = [\mathbf{u}(k-1)^T \quad \mathbf{u}(k-2)^T \quad \mathbf{u}(k-3)^T \quad \dots \quad \mathbf{u}(0)^T]$ . A equação acima se torna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^T \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{R}_0^T \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^T \\ \mathbf{S}_0^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \Sigma_k \mathbf{S}_k^T \mathbf{u}_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Na Eq. (2.12) é possível verificar que a parte inferior do vetor do lado esquerdo desta não pode ser atingida por qualquer vetor força  $\mathbf{u}_k$  a partir do estado nulo. Isto implica que aqueles vetores  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ , que fazem a componente  $\mathbf{R}_0^T \hat{\mathbf{x}}(k) = 0$ , não podem ser atingidos a partir do estado nulo, isto é, o sistema não é controlável.

Para tornar o sistema controlável, é suficiente e necessário eliminar a parte nula no membro direito da equação acima. A única forma de fazê-lo é incrementar o número de valores singulares não-nulos  $k$ , até  $k = n$  (ordem do sistema). Se  $k = n$ , a equação acima se torna

$$\mathbf{R}_0^T \hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n^T \\ \mathbf{S}_0^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \Sigma_n \mathbf{S}_n^T \mathbf{u}_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Desde que  $\Sigma$  e  $\mathbf{S}_n$  tenham ambos posto  $n$ , o vetor de controle  $\mathbf{u}_k$  pode ser resolvido, como por Juang (1994), da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_k = (\mathbf{S}_n^T)^{\dagger} \Sigma_n^{-1} \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{I} - (\mathbf{S}_n^T)^{\dagger} \mathbf{S}_n^T] \cdot \varphi = \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1} \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{I} - \mathbf{S}_n \mathbf{S}_n^T] \cdot \varphi \quad (2.14)$$

onde o sobrescrito  $\dagger$  significa a pseudo-inversa e  $\varphi$  é um vetor arbitrário de dimensão  $nr \times 1$ . Note que  $(\mathbf{S}_n^T)^{\dagger} = \mathbf{S}_n (\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n)^{-1} = \mathbf{S}_n$  desde que  $\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{I}_n$ , que é o resultado de  $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_{kr}$  como indicado anteriormente. Esta equação simplesmente indica que, para qualquer vetor  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  desejado e um vetor  $\varphi$  escolhido arbitrariamente, existe um vetor de controle  $\mathbf{u}_k$  que transferirá o estado nulo ao vetor desejado  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ . O fato de  $\varphi$  ser um vetor arbitrário faz com que o vetor de controle não seja determinado de uma única forma. Em outras palavras, existe mais do que um vetor de controle que pode transferir o estado nulo até o estado final desejado  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ . A norma do vetor de controle  $\mathbf{u}_k$  torna-se mínima quando  $\varphi = 0$ . Conclui-se, então, um sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, com dimensão finita e discretizado no tempo é **controlável**, se, e somente se, sua matriz de controlabilidade tem posto igual à ordem do sistema.

Em muitos problemas práticos é desejado que todos os modos de vibrar de um determinado sistema sejam controláveis e é por essa razão que o teorema a seguir é postulado.

**TEOREMA 2.2** – Considere uma força de controle escalar  $\mathbf{u}(k)$  para o sistema discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\mathbf{u}(k)$  onde  $\mathbf{b}$  é um vetor coluna. Assuma que a matriz constante  $\mathbf{A}$  tem autovalores distintos  $\lambda_i$ . O sistema é controlável se, e somente se, o vetor constante  $\mathbf{b}_m = \Psi^{-1}\mathbf{b}$  não tenha elementos nulos, onde  $\Psi$  é a matriz modal com autovetores de  $\mathbf{A}$  como seus vetores coluna.

**PROVA** – Para provar este teorema, primeiro monta-se a seguinte matriz de controlabilidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}] = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b}] \\ &= \Psi\Psi^{-1}[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{b}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_k = \Psi [\Psi^{-1} \mathbf{b} \quad \Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi \Psi^{-1} \mathbf{b} \quad \dots \quad \Psi^{-1} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{A} \Psi \Psi^{-1} \mathbf{b}] \quad (2.15)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} \mathbf{b} &= \mathbf{b}_m \\ \Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi &= \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] = \Lambda \\ \Psi^{-1} \mathbf{A}^2 \Psi &= [\Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi] [\Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi] = \text{diag}[\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2] = \Lambda^2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \Psi^{-1} \mathbf{A}^k \Psi &= [\Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi] \dots [\Psi^{-1} \mathbf{A} \Psi] = \text{diag}[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k] = \Lambda^k \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo-se a Eq. (2.16) na Eq. (2.15) vem

$$\mathbf{Q}_k = \Psi [\mathbf{b}_m \quad \Lambda \mathbf{b}_m \quad \dots \quad \Lambda^{k-1} \mathbf{b}_m] = \Psi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \dots & \lambda_n^{k-1} b_n \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbf{b}_m = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_n]^T$$

Se qualquer elemento  $b_i$  de  $\mathbf{b}_m$  for zero, por exemplo,  $b_i = 0$ , então a matriz de controlabilidade fica da seguinte forma

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \dots & \lambda_n^{k-1} b_n \end{bmatrix}$$

Esta matriz obviamente tem posto menor que  $n$ , pois a segunda matriz no membro direito tem somente  $n-1$  linhas não-nulas. Portanto, se o sistema é controlável, então todos os elementos  $b_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  devem ser não-nulos. Na prova, é notado que a matriz

dos autovetores  $\Psi$  tem um posto completo  $n$  porque um sistema com autovalores distintos tem todos os autovetores independentes. Em estruturas,  $b_i = 0$  ocorre somente quando a força de controle  $u$  é aplicada exatamente no nó do modo correspondente ao autovalor  $\lambda_i$ . Isto significa que se a força de controle  $u$  estiver localizada no nó de um modo, então o modo é não controlável, como pode ser visualizado, qualitativamente, na ilustração da Fig. (2.1).

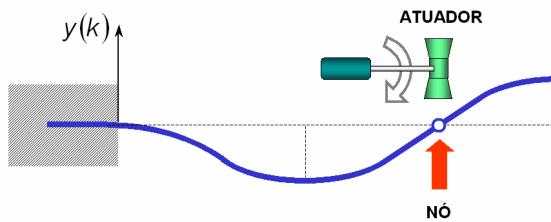


Figura 2.1 – Viga engastada com atuador localizado em um nó deste modo de vibrar

### 2.1.2 Observabilidade no Domínio do Tempo

Um estado  $x(k)$  em um dado tempo de amostragem  $k$  de um sistema é observável se o conhecimento da entrada  $u(k)$  e da saída  $y(k)$  sobre um intervalo de tempo finito  $[0, k]$  determina, completamente, o estado  $x(k)$ . Se todos os estados são observáveis, o sistema é chamado completamente observável ou simplesmente observável.

Para determinar a observabilidade, é necessário e suficiente verificar se o estado inicial  $x(0)$  de um sistema com entrada nula, isto é,  $u(k)=0$ , pode ser completamente determinado a partir da saída  $y(k)$ , uma vez que o conhecimento do estado inicial  $x(0)$  e da entrada  $u(k)$  permite o cálculo do estado  $x(k-1)$  a partir da Eq. (2.7), onde, tanto o vetor de medidas  $y$  quanto o vetor de controle  $u$  devem ser conhecidos até o instante  $k-1$ .

**TEOREMA 2.3** – O sistema dinâmico, linear, invariante no tempo, com dimensão finita e discretizado no tempo  $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$  de ordem  $n$  com a equação de medida  $y(k)=Cx(k)+Du(k)$  de ordem  $m$  é observável se, e somente se, o bloco  $kp \times n$  da matriz  $P_k$  tem posto  $n$ , onde

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

**PROVA** – Para provar este teorema, é suficiente verificar se o estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  pode ser reconstruído a partir do conhecimento do vetor de medidas  $\mathbf{y}$  no intervalo de tempo  $[0, k-1]$ , quando  $\mathbf{u}(k)=0$ . Do modelo discreto no tempo, Eq. (2.3) e (2.4) com  $\mathbf{u}(k)=0$ , vem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{Cx}(0) \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{Cx}(1) = \mathbf{CAx}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(k-1) &= \mathbf{Cx}(k-1) = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta equação, a Eq. (2.19), pode ser rescrita como

$$\mathbf{Y}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-1) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_k \mathbf{x}(0) \quad (2.20)$$

onde uma única solução existe se, e somente se,  $\mathbf{P}_k$  tem posto  $n$ . A única solução deve ser  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}_k^\dagger \mathbf{Y}_k$  onde o sobrescrito  $\dagger$  significa a pseudo-inversa.

Baseado no Teorema 2.3, um teorema especial para o modelo discreto no tempo em coordenadas modais pode ser derivado proporcionando interpretação física dentro da teoria geral da observabilidade.

Similarmente ao caso da Controlabilidade, o que se deseja é que todos os modos sejam observáveis, ou seja, que os sensores alocados no sistema sejam capazes de medir as grandezas físicas inerentes como: deslocamento, velocidade e aceleração. Eis o que motiva a postulação do próximo teorema.

**TEOREMA 2.4** – Considere o sistema discreto no tempo

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k)$$

e um vetor de medidas escalar

$$\mathbf{y}(k), k = 1, 2, \dots$$

da equação de medidas  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}u(k)$  onde  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  são vetores-linha constantes, indicando que o sistema tem um só sensor de saída. Assuma que a matriz constante  $\mathbf{A}$  tem distintos autovalores  $\lambda_i$ . O sistema é observável se, e somente se, o vetor constante  $\mathbf{c}_m = \mathbf{c}\Psi$  não tenha elementos nulos, onde  $\Psi$  é a matriz modal com autovetores de  $\mathbf{A}$  como seus vetores-coluna.

**PROVA** – Este Teorema tem a mesma natureza do Teorema 2.2. Por isso pode ser provado pela mesma abordagem usada no teorema supracitado.

Fisicamente este teorema implica que se existe um único sensor e ele está localizado em um nó de um modo, então o modo torna-se não-observável, como pode ser visualizado, de forma qualitativa, no exemplo da Fig. (2.2). Perceba que, neste modo de vibrar o sensor não consegue captar, ou “observar”, movimento algum deste nó.

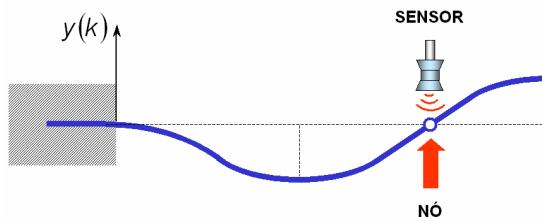


Figura 2.2 – Viga engastada com sensor localizado em um nó deste modo de vibrar

Esta assertiva pode ser facilmente justificada pela transformação do sistema discreto no tempo.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}u(k)$$

para

$$\mathbf{x}_m(k+1) = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{x}_m(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{c}_m \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} \mathbf{u}(k)$$

em coordenadas modais, onde

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}_m \quad \mathbf{B}_m = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{c}_m = \mathbf{c} \boldsymbol{\Psi} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

Se qualquer elemento  $c_i$  do vetor  $\mathbf{c}_m$  for zero, por exemplo  $c_1 = 0$ , então a coordenada correspondente  $x_{m1}$  é não-observável no sentido que a medida não contém qualquer contribuição da coordenada modal  $x_{m1}$ .

$$\mathbf{y}(k) = [0 \ c_2 \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}$$

## 2.2 Conceitos Básicos de Realização

É neste momento do capítulo que se inicia, propriamente, o desenvolvimento do arcabouço matemático que permitirá a identificação de sistemas. Para tanto, serão utilizados como ferramentas os conceitos e teorias previamente discutidos.

Num contexto mais introdutório, esta seção tem o objetivo de, a partir dos sinais de excitação  $\mathbf{u}$  e dos sinais medidos  $\mathbf{y}$ , obter a realização do sistema, ou o sistema identificado. Ao longo do texto serão apresentadas todas as terminologias e conceitos complementares pertinentes a estes procedimentos, o que possibilitará ao leitor seu entendimento e sua implementação.

Inicialmente, escreve-se o sistema discreto como abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \tag{2.21}$$

e

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \tag{2.22}$$

Agora, sobre o sistema descrito pelas Eq. (2.21) e Eq. (2.22) aplica-se, uma entrada impulsiva unitária da forma  $\mathbf{u} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ , considerando, ainda, condições iniciais nulas,  $\mathbf{x}(0) = 0$  (Alves e Ribeiro, 2004). Assim, é possível obter, recursivamente, uma expressão para resposta impulsiva  $\mathbf{Y}$ , cuja dimensão é  $m \times r$ , como mostrado abaixo

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(1) = \mathbf{Ax}(0) + \mathbf{Bu}(0) = \mathbf{B} \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{Cx}(0) + \mathbf{Du}(0) = \mathbf{D} \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(2) = \mathbf{Ax}(1) + \mathbf{Bu}(1) = \mathbf{AB} \\ \mathbf{y}(1) = \mathbf{Cx}(1) + \mathbf{Du}(1) = \mathbf{CB} \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(3) = \mathbf{Ax}(2) + \mathbf{Bu}(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{B} \\ \mathbf{y}(2) = \mathbf{Cx}(2) + \mathbf{Du}(2) = \mathbf{CAB} \end{cases}$$

$$k=3 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(4) = \mathbf{Ax}(3) + \mathbf{Bu}(3) = \mathbf{A}^3\mathbf{B} \\ \mathbf{y}(3) = \mathbf{Cx}(3) + \mathbf{Du}(3) = \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \end{cases}$$

⋮

$$k=\dots \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{B} \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} = \mathbf{Y}_k \end{cases}$$

que culmina na seguinte seqüência:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}, \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{CB}, \quad \mathbf{Y}_2 = \mathbf{CAB}, \quad \dots, \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} \quad (2.23)$$

Esta seqüência de matrizes constantes é conhecida como matrizes dos **Parâmetros de Markov**. Os parâmetros de Markov são usados aqui como a base para identificação de modelos discretos no domínio do tempo, Eq. (2.21) e (2.22), representadas por quatro matrizes constantes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ . Já que  $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$ , somente as três matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  precisam ser determinadas. Salienta-se que esta é uma abordagem matemática que permite obter tais parâmetros. Cabe lembrar que o cada sinal de entrada consegue recuperar a respectiva coluna das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$ . Na prática, obtém-se os parâmetros de Markov montando-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^{(1,1)} & \mathbf{y}_k^{(1,2)} & \dots & \mathbf{y}_k^{(1,j)} \\ \mathbf{y}_k^{(2,1)} & \mathbf{y}_k^{(2,2)} & \dots & \mathbf{y}_k^{(2,j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_k^{(i,1)} & \mathbf{y}_k^{(i,2)} & \dots & \mathbf{y}_k^{(i,j)} \end{bmatrix}_{m \times r} \quad (2.24)$$

onde  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, r$ , sendo que cada coluna representa a resposta do sistema à  $j$ -ésima entrada e cada linha a  $i$ -ésima saída, lembrando ainda que  $m$  e  $r$  são, respectivamente, o número de saídas e de entradas. Em outras palavras, por exemplo, o elemento  $\mathbf{y}_k^{(2,1)}$  é o vetor de medidas relativo à saída 2 devido à entrada 1. Na verdade, a construção da matriz  $\mathbf{Y}_k$ , como mostrado na Eq. (2.24), é imprescindível para implementação computacional do método.

Uma **realização** é a determinação de um tripé  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$  a partir dos parâmetros de Markov mostrados na Eq. (2.23), para que o modelo discreto, Eq. (2.21) e Eq. (2.22), seja satisfeito, ou, como preconiza Juang e Pappa (1985), realização é o processo de construção da representação, em espaço de estados, de um sistema a partir de dados experimentais. Segundo Juang (1994) e Moreira (1998), um sistema qualquer tem um número infinito de realizações que predirá a resposta idêntica para uma entrada particular qualquer, o que do ponto de vista da engenharia de controle, é suficiente, já que a exigência principal é que seja mantida a relação entre entrada e saída (Lim *et al.*, 1998). Realização Mínima significa um modelo que tem a menor dimensão possível em espaço de estados dentre todos os sistemas realizáveis que tem a mesma relação de entrada e saída. Todas as realizações mínimas têm o mesmo grupo de autovalores, que são os parâmetros modais do próprio sistema.

Assuma, então, que a matriz de estado  $\mathbf{A}$  de ordem  $n$  tem um grupo completo de autovetores linearmente independentes  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  com autovalores correspondentes  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  que não são necessariamente distintos. Definindo  $\Lambda$  como sendo a matriz diagonal dos autovalores e  $\Psi$  a matriz dos autovetores, vem:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

e

$$\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]$$

A realização  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$  pode ser transformada para a realização  $[\Lambda, \Psi^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\Psi]$ . A diagonal da matriz  $\Lambda$  contém a informação dos amortecimentos modais e freqüências naturais amortecidas. A matriz  $\Psi^{-1}\mathbf{B}$  a amplitude modal inicial e a matriz  $\mathbf{C}\Psi$  a forma dos modos nos pontos de sensores. Todos os parâmetros modais de um sistema dinâmico podem, então, ser identificados pelo tripé  $[\Lambda, \Psi^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\Psi]$ . Os amortecimentos modais e as freqüências naturais amortecidas desejadas são simplesmente as partes real e imaginária dos autovalores  $\Lambda_c$ , após transformação a partir do modelo no domínio discreto para o domínio contínuo usando a relação  $\Lambda_c = \ell n(\Lambda)/\Delta t$ .

É importante notar que a transformação a partir do modelo discreto para o modelo contínuo não é única. A parte imaginária de um logaritmo natural de um número complexo pode ser ajustada por adição de qualquer múltiplo de  $2\pi$ , que permite  $\Lambda_c$  assumir diferentes valores. Isso corresponde ao fato de que quaisquer duas freqüências que diferem de um múltiplo de  $2\pi/\Delta t$  não podem ser distinguidos quando observados no tempo amostrado. Portanto, na prática, se alguém deseja interpretar as freqüências naturais do sistema físico, ou o intervalo de tempo de amostragem  $\Delta t$  deve ser suficientemente pequeno, ou um filtro deve ser adicionado para prevenir as freqüências além da freqüência de Nyquist, o que pode induzir uma freqüência menor na realização.

A realização de um sistema pode ser obtida a partir da matriz de Hankel generalizada cuja dimensão é  $\alpha m \times \beta r$ , composta pelos parâmetros de Markov da Eq. (2.23):

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+\beta-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+\beta-1}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+\alpha-2}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+\alpha-1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+\alpha+\beta-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros que compõem, respectivamente, o número de linhas e o número de colunas da matriz de Hankel  $\mathbf{H}$ .

Para o caso quando  $k = 1$ ,

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{1+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{\beta-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\beta\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^\alpha\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{\alpha+\beta-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e para o caso em que  $k = 2$ ,

$$\mathbf{H}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \cdots & \mathbf{Y}_{\beta+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots & \mathbf{Y}_{2+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{1+\alpha} & \cdots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^\beta\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CA}^3\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{\beta+1}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^\alpha\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\alpha+1}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{\alpha+\beta-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Note que  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$  não está incluído em  $\mathbf{H}(0)$ . Se  $\alpha \geq n$  e  $\beta \geq n$  (onde  $n$  é a ordem do sistema), a matriz  $\mathbf{H}(k-1)$  tem posto  $n$ , o que pode ser comprovado substituindo-se os parâmetros de Markov da Eq. (2.23) na Eq. (2.25) e decompondo-se  $\mathbf{H}(k-1)$  em três matrizes, como a seguir:

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{Q}_\beta$  são

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix}_{m(\alpha+1) \times n} \quad (2.28)$$

e

$$\mathbf{Q}_\beta = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B}]_{m \times r(\beta+1)} \quad (2.29)$$

A matriz  $\mathbf{P}_\alpha$  é a matriz de controlabilidade enquanto que a matriz  $\mathbf{Q}_\beta$  é a matriz de observabilidade. Se a ordem do sistema é  $n$  então a mínima dimensão da matriz de estado é  $n \times n$ . Se o sistema é controlável e observável, então as matrizes  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{Q}_\beta$  tem posto  $n$ . Portanto a matriz de Hankel tem, também, posto  $n$ .

### 2.3 Eigensystem Realization Algorithm – ERA

O ERA, Eigensystem Realization Algorithm (ou Algoritmo de Realização de Auto-Sistema), foi desenvolvido por Juang e Pappa (1985) no contexto da engenharia

aeroespacial, onde as estruturas e sistemas são bem mais complexos quando comparados à maioria das aplicações conhecidas. Sendo o ERA um algoritmo de identificação, ele é capaz de determinar, a partir dos dados experimentais de entrada e de saída, as matrizes que representam o comportamento dinâmico do sistema em espaço de estados.

A priori, esta técnica vislumbrou duas áreas de oportunidades, a saber: identificação de parâmetros modais e redução de modelos dinâmicos. Entretanto, o ERA pode ser empregado como uma poderosa ferramenta no projeto de controladores, já que sua formulação assim o permite.

Seu nicho de aplicações mais explorado, até então, é o das estruturas mecânicas como: as aeroespaciais (Juang e Pappa, 1985; Lim *et al.*, 1998; Sczibor e Marques, 2003), sistemas mecânicos vibratórios (Salazar, 2000; Alves e Ribeiro, 2004), construções civis de grande porte (Lus *et al.*, 2002), estruturas veiculares automobilísticas, (Rezende *et al.*, 2004), entre outros.

O arcabouço matemático exigido para compreensão do método reside, basicamente, na álgebra linear, onde, para este trabalho, o recurso principal é o da decomposição em valores singulares da matriz de Hankel já apresentada na seção 2.2, que é uma versão estendida do algoritmo de Ho-Kalman (1965). Já os conceitos físicos necessários para o entendimento e manipulação dos resultados são de âmbito modal, como: modos de vibrar, forma dos modos etc.

### 2.3.1 Formulação Básica

O processo ERA, propriamente dito, inicia com a decomposição da matriz de Hankel, Eq. (2.26), usando decomposição em valores singulares,

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{S}^T \quad (2.30a)$$

onde as colunas das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  são ortonormais e  $\Sigma$  é uma matriz retangular

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30b)$$

com

$$\Sigma_n = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n] \quad (2.30c)$$

e  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) monotonicamente decrescente  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$

Agora, seja  $R_n$  e  $S_n$  as matrizes formadas pelas  $n$  primeiras colunas das matrizes  $R$  e  $S$ , respectivamente. Daí, a matriz  $H(0)$  fica da seguinte forma:

$$H(0) = R_n \Sigma_n S_n^T \quad (2.32)$$

Como as matrizes  $R$  e  $S$ , são ortonormais, por conseguinte,  $R_n$  e  $S_n$  também, aplica-se a seguinte propriedade:

$$R_n^T R_n = I_n = S_n^T S_n \quad (2.33)$$

Este é um momento importante do desenvolvimento matemático do método. Primeiramente, faz-se  $k = 1$  na Eq. (2.27), igualando à Eq. (2.32); em seguida fatora-se  $\Sigma_n$ , obtendo a seguinte expressão:

$$P_\alpha Q_\beta = R_n \Sigma_n S_n^T \Rightarrow P_\alpha Q_\beta = R_n \Sigma_n^{1/2} \cdot \Sigma_n^{1/2} S_n^T \quad (2.34)$$

Fazendo uma analogia entre o primeiro e segundo membro da Eq. (2.34) pode-se extrair as seguintes relações:

$$P_\alpha = R_n \Sigma_n^{1/2} \quad \text{e} \quad Q_\beta = \Sigma_n^{1/2} S_n^T \quad (2.35)$$

Agora, fazendo  $k = 2$  na Eq. (2.27), vem:

$$H(1) = P_\alpha A Q_\beta \quad (2.36)$$

Substituindo, ainda, as matrizes da Eq. (2.35) na Eq. (2.36), tem-se

$$H(1) = R_n \Sigma_n^{1/2} A \Sigma_n^{1/2} S_n^T \quad (2.37)$$

Neste momento já é possível determinar a matriz  $\mathbf{A}$  identificada fazendo a seguinte manipulação matemática:

- Pré e pós-multiplicar ambos os membros da Eq. (2.37) por  $\mathbf{R}_n^T$  e  $\mathbf{S}_n$ , respectivamente;
- Aplicar a propriedade descrita na Eq. (2.33);
- Isolar a matriz  $\mathbf{A}$ .

Assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n &= \mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \mathbf{A} \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n \\ \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n &= \mathbf{I}_n \Sigma_n^{1/2} \mathbf{A} \Sigma_n^{1/2} \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para isolar a matriz  $\mathbf{A}$  basta pré e pós multiplicar a Eq. (2.38), por  $\Sigma_n^{-1/2}$

$$\Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2} = \underbrace{\Sigma_n^{-1/2} \Sigma_n^{1/2}}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{A} \underbrace{\Sigma_n^{1/2} \Sigma_n^{-1/2}}_{\mathbf{I}_n}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2} \quad (2.39)$$

onde  $\hat{\mathbf{A}}$  é a matriz  $\mathbf{A}$  identificada.

Para a determinação das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são definidas duas matrizes auxiliares, como abaixo:

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m \\ \vdots \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix}_{m(\beta-1) \times m} \quad (2.40)$$

e

$$\mathbf{E}_r = [\mathbf{I}_r \quad \mathbf{O}_r \quad \cdots \quad \mathbf{O}_r]_{r \times r(\alpha-1)} \quad (2.41)$$

onde,  $\mathbf{I}_m$  e  $\mathbf{I}_r$  são matrizes identidades de ordem  $m$  e  $r$ , respectivamente, e,  $\mathbf{O}_m$  e  $\mathbf{O}_r$  são matrizes quadradas nulas de ordem  $m$  e  $r$ , respectivamente. Desta forma, determina-se a

matriz  $\mathbf{B}$  multiplicando-se a matriz de controlabilidade da Eq. (2.29) com a Eq. (2.40), como abaixo:

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_m \quad (2.42)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B})_{n \times m} & (\mathbf{AB})_{n \times m} & (\mathbf{A}^2\mathbf{B})_{n \times m} & \dots & (\mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B})_{n \times m} \end{bmatrix}_{n \times m(\beta-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m \\ \vdots \\ \mathbf{O}_m \end{bmatrix}_{m(\beta-1) \times m}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{B})_{n \times m} \cdot \mathbf{I}_m = \mathbf{B}_{n \times m} \quad (2.43)$$

Culmina, então, na Eq. (2.43), o desenvolvimento teórico para identificação da matriz  $\hat{\mathbf{B}}$ . Entretanto, na prática não se dispõe da matriz de controlabilidade para proceder como na Eq. (2.42). Desta forma, faz-se necessário o emprego da matriz de controlabilidade na forma da Eq. (2.35), pois esta advém da decomposição da matriz de Hankel, que é construída a partir de dados experimentais. Logo, a matriz  $\hat{\mathbf{B}}$  é calculada como abaixo:

$$\hat{\mathbf{B}} = \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_m \quad (2.44)$$

Analogamente, identifica-se a matriz  $\mathbf{C}$  multiplicando-se a matriz auxiliar descrita na Eq. (2.40) com a matriz de observabilidade descrita na Eq. (2.29), como a seguir:

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_r \mathbf{P}_\alpha \quad (2.45)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{I}_r \quad \mathbf{O}_r \quad \dots \quad \mathbf{O}_r]_{r \times r(\alpha-1)} \begin{bmatrix} (\mathbf{C})_{r \times n} \\ (\mathbf{CA})_{r \times n} \\ (\mathbf{CA}^2)_{r \times n} \\ \vdots \\ (\mathbf{CA}^{\alpha-1})_{r \times n} \end{bmatrix}_{r(\alpha-1) \times n}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{I}_r \cdot (\mathbf{C})_{r \times n} \quad (2.46)$$

A Eq. (2.46) prova a identificação da matriz  $\hat{\mathbf{C}}$ . Da mesma forma que para a matriz  $\hat{\mathbf{B}}$  pode-se refinar a expressão que identifica a matriz em questão. Substituindo a primeira expressão da Eq. (2.35) na Eq. (2.45), vem:

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_r \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \quad (2.47)$$

Finalmente, a matriz  $\hat{\mathbf{D}}$  identificada é simplesmente, segundo a Eq. (2.23), o parâmetro de Markov quando  $k = 0$ , ou seja

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{Y}_0 \quad (2.48)$$

Conclui-se, então, o desenvolvimento matemático que permitiu a determinação da formulação básica do ERA, ou seja, aquela que denota a realização de um sistema. Portanto, resta agora, para a efetiva inicialização do algoritmo, construir a matriz  $\mathbf{Y}_k$  a partir dos dados coletados experimentalmente, como mostrado na Eq. (2.24).

### 2.3.2 Relação com Ruídos

Devido aos ruídos de medição e arredondamentos computacionais a matriz  $\Sigma$  na Eq. (2.30a) não é exatamente da forma apresentada na Eq. (2.30b), onde, como já mencionado,  $n$  representa a dimensão esperada para o sistema a ser identificado. A matriz de Hankel  $\mathbf{H}(k)$  apresenta posto completo e a alternativa que se coloca é “truncar” a matriz  $\Sigma$  retendo os  $n$  mais importantes valores singulares. A questão que se coloca no momento é a seguinte: como se fazer o truncamento, ou ainda, uma vez feito tal “truncamento”, como analisá-lo, como verificar se a dimensão  $n$  escolhida é ou não adequada?

Então, da Eq. (2.34), vem:

$$\mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \equiv \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \cdot \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (2.49)$$

onde o sinal de aproximação  $\approx$  é usado devido ao ruído e ao truncamento dos pequenos valores singulares não nulos. O gramiano de controlabilidade  $\mathbf{Q}_\beta \mathbf{Q}_\beta^T$  e o gramiano de observabilidade  $\mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{P}_\alpha$ , podem ser calculados como

$$\mathbf{Q}_\beta \mathbf{Q}_\beta^T = \Sigma_n \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_\alpha^T \mathbf{P}_\alpha = \Sigma_n \quad (2.50)$$

O fato dos gramianos de observabilidade e controlabilidade serem iguais e diagonais implica que o sistema realizado  $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}]$  é tanto controlável e observável. Esta propriedade é chamada de realização internamente balanceada. Isso significa que o sinal de transferência a partir da entrada até o estado, e, então, do estado até a saída são similares e balanceadas.

Alguns valores singulares (elementos da diagonal da matriz  $\Sigma_n$ ) podem ser relativamente pequenos e, portanto, desprezíveis; em outras palavras, eles contêm muito mais informações a respeito do ruído do que do sistema propriamente dito. Logo, o sistema reduzido após a eliminação desses valores singulares é então considerado como a parte robustamente observável e controlável do sistema realizado e, ainda sim, é capaz de ser representativo da dinâmica ou do fenômeno. Em outras palavras, Moreira (1998) diz que, o ruído no sinal faz com que surjam modos residuais não nulos na decomposição em valores singulares da matriz de Hankel, que são chamados de modos computacionais, cujas magnitudes são bem inferiores àquelas dos modos que realmente compõe o sistema. Quanto maior for a magnitude dos modos computacionais maior é o nível de ruído presente no sinal.

Para auxiliar nesta tarefa existem técnicas que procuram extrair os “modos computacionais” e auxiliar na determinação da ordem mínima do sistema.

### **2.3.3 Técnicas para Distinção dos Modos Reais dos Modos de Ruído.**

Serão apresentadas, nesta dissertação, duas técnicas para distinção dos modos reais – aqueles que realmente contribuem para o sistema – dos modos de ruído. São as técnicas: Coerência de Amplitude Modal (MAC), Valor Singular do Modo (MSV) e uma técnica que é combinação das anteriores, o SOM, seletor de ordem do modelo.

#### **2.3.3.1 Coerência de Amplitude Modal – MAC**

Primeiramente, conhecendo-se a realização  $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}]$ , deve-se transformá-la para coordenadas modais, como descreve Sczibor e Marques (2003):

$$\hat{\mathbf{A}}_m = \hat{\Psi}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \hat{\Psi} = \hat{\Lambda} \quad (2.51)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_m = \hat{\Psi}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \quad (2.52)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_m = \hat{\mathbf{C}} \hat{\Psi} \quad (2.53)$$

Portanto, o sistema identificado em coordenadas modais assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m(k+1) &= \hat{\Lambda} \mathbf{x}_m(k) + \hat{\mathbf{B}}_m \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \hat{\mathbf{C}}_m \mathbf{x}_m(k) + \hat{\mathbf{D}} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde

- $\hat{\Lambda}$  é uma matriz diagonal que contém os autovalores identificados  $\hat{\lambda}_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , do sistema;
- $\hat{\mathbf{B}}_m$  é a matriz dos atuadores em coordenadas modais;
- $\hat{\mathbf{C}}_m$  é a matriz dos sensores em coordenadas modais;

Devido ao fato do vetor de medidas  $\mathbf{y}$  ser real, todas as grandezas complexas na Eq. (2.54), inclusive os autovalores, aparecem como pares de complexos conjugados.

As matrizes  $\hat{\mathbf{B}}_m$  e  $\hat{\mathbf{C}}_m$  podem, ainda, serem abertas, como:

$$\hat{\mathbf{B}}_m = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{C}}_m = [\hat{c}_1 \quad \hat{c}_2 \quad \cdots \quad \hat{c}_n] \quad (2.55)$$

e os parâmetros de Markov expressos como

$$\hat{\mathbf{Y}}_k = \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\Lambda}^{k-1} \hat{\mathbf{B}}_m = \sum_{i=1}^n \hat{c}_i \hat{\lambda}_i^{k-1} \hat{b}_i \quad (2.56)$$

O leitor pode perceber que na Eq. (2.56) cada parâmetro de Markov pode ser escrito como uma combinação das  $n$  componentes que contribuem para o modelo a partir de diferentes coordenadas modais. Portanto, cada coordenada tem uma seqüência de parâmetros de Markov descritas como a seguir:

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_i \hat{b}_i & \hat{c}_i \hat{\lambda}_i \hat{b}_i & \dots & \hat{c}_i \hat{\lambda}_i^{\ell-2} \hat{b}_i \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.57)$$

onde  $\ell$  é o comprimento do vetor de dados.

Seja a seqüência definida como

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \hat{b}_i & \hat{\lambda}_i \hat{b}_i & \dots & \hat{\lambda}_i^{\ell-2} \hat{b}_i \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.58)$$

que representa a evolução no tempo reconstruída a partir dos autovalores identificados  $\hat{\lambda}_i$  e do vetor linha  $\hat{b}_i$ . Assim sendo, a seqüência completa dos parâmetros de Markov assume a seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \sum_{i=1}^n \hat{c}_i \hat{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Neste momento concluiu-se o desenvolvimento que permite determinar a evolução temporal de cada modo identificado,  $\hat{q}_i$ . Para se encontrar a evolução “esperada”,  $\bar{q}_i$ , deve-se transformar a matriz de controlabilidade para coordenadas modais (Sczibor, 2003), como abaixo:

$$\mathbf{Q}_m = \hat{\Psi}^{-1} \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \quad (2.60)$$

onde  $\mathbf{Q}_m$  é a matriz de controlabilidade modal. Desenvolvendo a Eq. (2.32) tem-se:

$$\mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_1 \ \lambda_1 b_1 \ \dots \ \lambda_1^{\ell-2} b_1] \\ [b_2 \ \lambda_2 b_2 \ \dots \ \lambda_2^{\ell-2} b_2] \\ \vdots \\ [b_n \ \lambda_n b_n \ \dots \ \lambda_n^{\ell-2} b_n] \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Cabe agora justificar porque a matriz  $\mathbf{Q}_m$  contempla a evolução temporal “esperada” das contribuições modais dos parâmetros de Markov. O leitor pode verificar na Eq. (2.60) a referida matriz advém de dois fatores,  $\Sigma$  e  $\mathbf{S}$ , que por sua vez são provenientes da decomposição da matriz de Hankel na Eq. (2.32), onde esta última é construída a partir dos sinais de saídas medidos. Já a evolução temporal dos modos identificados é totalmente determinada a partir do sistema identificado em coordenadas modais.

O **MAC** pode ser entendido como sendo o produto escalar entre a evolução temporal “esperada” do modo  $i$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_i$ , e a identificada,  $\hat{\mathbf{q}}_i^*$ , onde o sobrescrito “\*” significa transposto conjugado, como expresso abaixo:

$$\mathbf{MAC}_i = \frac{|\bar{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_i^*|}{\sqrt{|\bar{\mathbf{q}}_i \bar{\mathbf{q}}_i^*| \cdot |\hat{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_i^*|}} \quad (2.62)$$

e que o índice  $i$  está compreendido no intervalo  $[1, n]$  em que  $n$  é a ordem estimada para o sistema.

Há uma correspondência da Eq. (2.62) com a expressão que calcula o coseno do ângulo entre dois vetores quaisquer, como ilustrado a seguir:

$$\cos \theta = \frac{\bar{\mathbf{v}}_1 \bullet \bar{\mathbf{v}}_2}{|\bar{\mathbf{v}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{v}}_2|} \quad (2.63)$$

Portanto, assim como o  $\cos \theta$ , o  $\mathbf{MAC}_i$  pode variar conforme:

$$0 \leq \mathbf{MAC}_i \leq 1 \quad (2.64)$$

o que induz a seguinte interpretação: quanto mais próximo da unidade é o  $\mathbf{MAC}_i$ , mais próximo o modo estimado está do modo real e, quanto mais próximo de zero, mais

contaminado por ruído a estimação está. Os **MAC**'s de todos os modos forma um vetor, como abaixo:

$$\mathbf{MAC} = [\mathbf{MAC}_1 \quad \mathbf{MAC}_2 \quad \dots \quad \mathbf{MAC}_i] \quad (2.65)$$

onde  $1 < i < n$  e  $n$  é a ordem estimada para o sistema.

### 2.3.3.2 Valor Singular do Modo – MSV

O **MSV** (Mode Singular Value), ou Valor Singular do Modo, é uma técnica que caracteriza a contribuição de cada modo para identificar a resposta impulsiva do modelo, ou os parâmetros de Markov. É razoável que um modo que dê uma grande contribuição à resposta impulsiva do modelo identificado dê, também, uma grande contribuição da resposta impulsiva dos dados. Esta informação garante a eficiência do algoritmo na identificação.

Da Eq. (2.57) fica evidente que cada coordenada modal contribui para resposta impulsiva por meio de cada seqüência modal, que é quantificada tomando-se seu máximo valor singular, isto é,

$$\mathbf{MSV}_i = \sqrt{\|\hat{\mathbf{c}}_i\| \left( 1 + |\hat{\lambda}_i| + |\hat{\lambda}_i|^2 + \dots + |\hat{\lambda}_i|^{\ell-2} \right) \|\hat{\mathbf{b}}_i\|} \approx \sqrt{\frac{|\hat{\mathbf{c}}_i| \cdot |\hat{\mathbf{b}}_i|}{1 - |\hat{\lambda}_i|}} \quad (2.66)$$

onde o sinal de aproximação é valido somente quando  $|\hat{\lambda}_i| < 1$  e o número de parâmetro de Markov,  $\ell$ , é suficientemente grande. Os **MSV**'s de todos os modos também pode ser alocados em um vetor, como a seguir:

$$\mathbf{MSV} = [\mathbf{MSV}_1 \quad \mathbf{MSV}_2 \quad \dots \quad \mathbf{MSV}_i] \quad (2.67)$$

onde  $1 < i < n$  e  $n$  é a ordem estimada para o sistema.

### 2.3.3.3 Seletor de Ordem do Modelo (SOM)

É intrínseco ao **MAC** a comparação entre as evoluções temporal identificada e a “esperada”, como mostrado na Eq. (2.63). Em outras palavras, o **MAC** mede o quanto expressiva está a contribuição de cada modo do modelo quando comparado aos dados

reais. O **MSV**, por sua vez, é calculado utilizando somente dados provenientes do sistema identificado em coordenadas modais, ou seja, ele não faz consideração alguma com os dados reais.

À luz destas observações propõe-se uma formulação heurística para a escolha da ordem do modelo. Uma vez que o **MSV** é uma forma de refinamento sobre o **MAC**, sugere-se usar o produto destes dois indicadores como um terceiro critério para seleção da ordem do modelo. A proposta para definição deste novo critério obedece ao seguinte algoritmo:

Sejam os vetores **MAC** e **MSV**, mostrados nas Eq. (2.65) e Eq. (2.67), respectivamente.

- Calcula-se o produto ponto a ponto entre os vetores **MAC** e **MSV**, gerando o vetor **SOM**, cuja sigla significa Seletor da Ordem do Modelo;
- Ordena-se, decrescentemente, o **SOM**;
- Normaliza-se o **SOM** pelo seu valor máximo;

O **SOM** constitui, portanto, um novo critério que auxiliará a redução modal, ou seja, a determinação da ordem mínima do sistema identificado, onde o **SOM<sub>i</sub>**, referente a cada modo, assim como o **MAC**, varia entre 0 e 1.

#### 2.3.3.4 Estratégia para a Redução Modal

Uma vez identificado a ordem mais apropriado para o modelo, normalmente menor do que aquela previamente escolhida, é necessário reduzir o modelo até esta ordem. Existem duas alternativas, a saber: a primeira é a de reaplicar o algoritmo ERA utilizando a nova ordem e a segunda é de se reduzir o modelo já identificado simplesmente removendo-se os modos indesejáveis. Seja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B} u \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D} u$$

com dimensões apropriadas e

$$\hat{\mathbf{A}}_{red} = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n_{red}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_{red}1} & \cdots & a_{n_{red}n_{red}} \end{array} \right]_{n_{red} \times n_{red}} \left| \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{array} \right. = \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n_{red}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_{red}1} & \cdots & a_{n_{red}n_{red}} \end{array} \right]_{n_{red} \times n_{red}} \quad (2.68)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{red} = \left[ \begin{array}{ccc|c} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_{red}1} & \cdots & b_{n_{red}r} \end{array} \right]_{n_{red} \times r} = \left[ \begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_{red}1} & \cdots & b_{n_{red}r} \end{array} \right]_{n_{red} \times r} \quad (2.69)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{red} = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1n_{red}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn_{red}} \end{array} \right]_{m \times n_{red}} \left| \begin{array}{c} c_{1n} \\ c_{mn} \end{array} \right. = \left[ \begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1n_{red}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn_{red}} \end{array} \right]_{m \times n_{red}} \quad (2.70)$$

onde as matrizes  $\hat{\mathbf{A}}_{red}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_{red}$  e  $\hat{\mathbf{C}}_{red}$  compõe o sistema identificado reduzido, lembrando que a matriz  $\mathbf{D}$  não sofre alteração com a redução.

Embora esta estratégia de redução apresente um excelente ajuste entre o modelo reduzido e o completo no domínio da freqüência, ela não garante a concordância do ganho DC entre os dois modelos. Uma alternativa a esta estratégia é considerar nula na equação da dinâmica apenas as derivadas dos estados a serem eliminados,  $x_2$ , e resolver as equações para  $x_1$ . A função MODRED do MATLAB® implementa as duas abordagens, como mencionado.

## 2.4 O Algoritmo

Eis o fluxograma para aplicação da técnica.

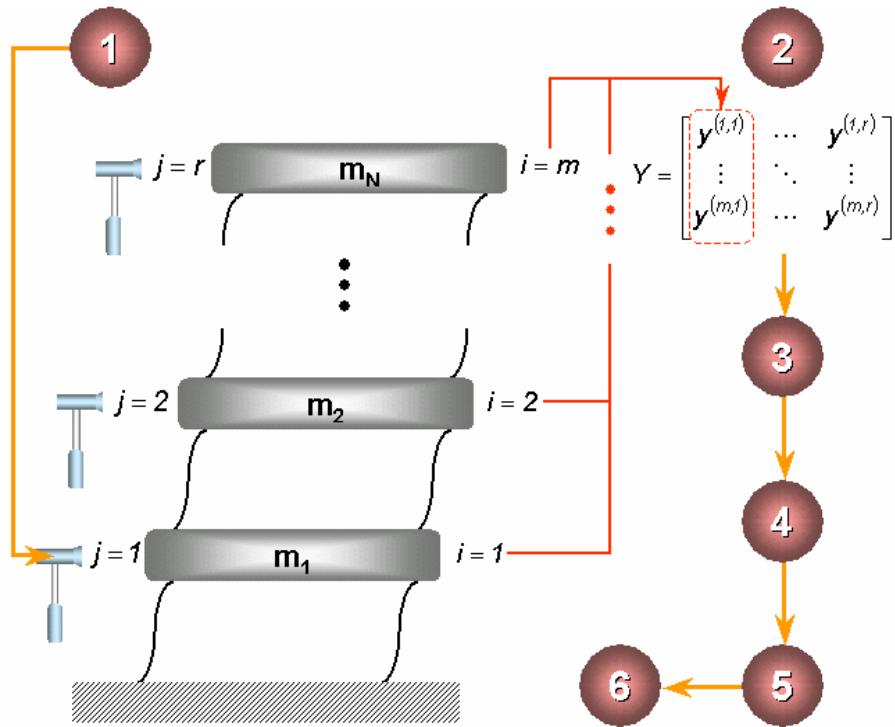


Figura 2.3 – Fluxograma do ERA

### Passo 1

- Excita-se individualmente cada entrada  $j$  com um sinal impulsivo adquirindo todas as saídas monitoradas, ou seja, o ensaio deve ser de um sistema SIMO (Single Input / Multiple Outputs) ou uma entrada / várias saídas.

### Passo 2

- Ao final de todos os ensaios realizados no passo 1 monta-se a matriz da Eq. (2.24), onde as saídas são as respostas impulsivas.

**Passo 3**

- Escolhe-se os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , montando-se, em seguida, a matriz de Hankel, Eq. (2.25). A escolha adequada destes requer alguma intuição de engenharia (Juang, 1994).
- Estima-se uma ordem  $n$  para o sistema a ser identificado.

**Passo 4**

- Decompõe-se a matriz de Hankel  $H(0)$  em valores singulares.

**Passo 5**

- Utilizando-se o  $H(1)$  da Eq. (2.26) e as Eq. (2.39), Eq. (2.44), Eq. (2.47) e Eq. (2.48) obtém-se a realização do sistema, ou seja, as matrizes identificadas  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ .

**Passo 6**

- Aplicam-se os critérios **MAC**, **MSV**, **SOM** conforme discutido na seção 2.3.3, e seleciona-se uma nova ordem para o sistema.

**Passo 7**

- Faz-se nova identificação do sistema retornando-se ao passo 5 com a ordem mínima selecionada no passo 6, ou reduz-se o sistema usando a formulação apresentada na Equação 2.68.

**Passo 8**

- Comparam-se as respostas impulsivas e as FRF's dos sistemas real e identificado. Se não forem satisfatórias, reaplicar o algoritmo.

## Capítulo III

### IDENTIFICAÇÃO COM OBSERVADOR / FILTRO DE KALMAN

Este capítulo tem a função de apresentar o OKID (Observer/Kalman Identification) que é uma técnica de Identificação com observador de estado. O OKID é uma metodologia que foi concebida para ser utilizada, principalmente, na identificação de estruturas levemente amortecidas, como aquelas que são próprias do segmento aeroespacial. Sabe-se que esta classe de estruturas, quando excitadas, apresentam uma taxa de decaimento do sinal de saída muito pequena, ou, do ponto de vista da teoria de controle, tem um tempo de acomodação muito grande. É neste contexto que se faz necessária a introdução de um observador de estado que introduz um amortecimento artificial no sistema, o que, consequentemente, antecipa a estabilização do sinal de saída, diminuindo o comprimento do vetor de dados adquiridos. A Figura (3.1) ilustra este efeito.

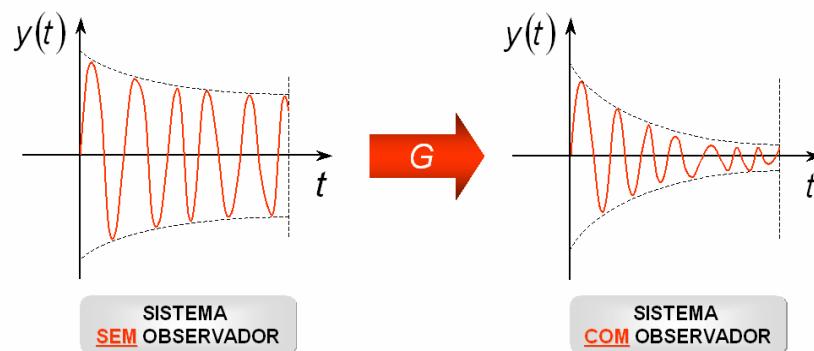


Figura 3.1 – Efeito da incorporação de um observador no sistema sobre a resposta no domínio do tempo

Este artifício contribui, sobremaneira, tanto para redução do esforço computacional do método quanto para a precisão dos resultados obtidos.

A incorporação do observador de estado faz com que o sistema verdadeiro se transforme, matematicamente, em um novo, de onde serão obtidos os parâmetros de

Markov do observador, como ilustrado na Fig. (3.2). Entretanto, na prática, não são estes que interessam, mas sim os parâmetros de Markov do sistema verdadeiro. Eis, então, a principal contribuição do OKID: recuperar os parâmetros de Markov do sistema verdadeiro e do ganho do observador a partir daqueles obtidos do sistema com observador.

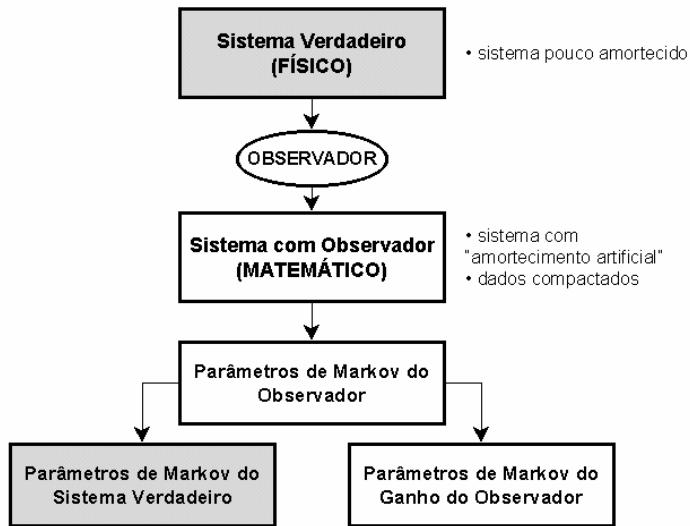


Figura 3.2 – Estratégia do OKID

Dentre os métodos que operam inteiramente no domínio do tempo, o OKID tem se mostrado eficiente e robusto (Bernal e Gunes, 1999), uma vez que ele é capaz de obter, a partir de qualquer tipo de sinal de entrada, a resposta impulsiva do sistema verdadeiro, que é imprescindível para “alimentar” o ERA, além de ser aplicável a qualquer sistema, independente do quão amortecido ele seja.

### 3.1 Equação Básica do Observador

Considere o sistema linear, discreto e invariante no tempo descrito por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (3.2)$$

Fazendo as condições iniciais nulas,  $\mathbf{x}(0) = 0$ , o conjunto destas equações para uma seqüência de  $k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(0) &= 0 \\
 \mathbf{y}(0) &= \mathbf{D}\mathbf{u}(0) \\
 \\
 \mathbf{x}(1) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \\
 \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(1) \\
 \\
 \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(1) \\
 \mathbf{y}(2) &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(2) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}(\ell - 1) &= \sum_{i=1}^{\ell-1} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(\ell - 1 - i) \\
 \mathbf{y}(\ell - 1) &= \sum_{i=1}^{\ell-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(\ell - 1 - i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\ell - 1)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Agrupando a Eq. (3.3) numa forma matricial, vem:

$$\begin{matrix} (m \times \ell) & (m \times r\ell) & (r\ell \times \ell) \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{Y} & \mathbf{U} \end{matrix} \tag{3.4}$$

onde

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \cdots \ \mathbf{y}(\ell - 1)]$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{D} \ \mathbf{C}\mathbf{B} \ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\ell-2}\mathbf{B}]$$

e

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(\ell - 1) \\ & \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}(\ell - 2) \\ & & \mathbf{u}(0) & \cdots & \mathbf{u}(\ell - 3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

A Eq. (3.4) é uma representação matricial da relação entre a evolução no tempo da entrada e da saída. A matriz  $\mathbf{y}$  é uma matriz dos dados de saída  $m \times \ell$  onde  $m$  é o número de saídas e  $\ell$  o número de dados adquiridos. A matriz  $\mathbf{Y}$ , de dimensão  $m \times r\ell$  com  $r$  número de entradas, contendo todos os parâmetros de Markov  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{CB}$ ,  $\mathbf{CAB}$ , ...,  $\mathbf{CA}^{\ell-2}\mathbf{B}$  a serem determinados. A matriz  $\mathbf{U}$  é uma matriz triangular superior,  $r\ell \times \ell$  dos dados de entrada.

Uma análise da Eq. (3.4) indica que existem  $m \times r\ell$  incógnitas na matriz dos parâmetros de Markov mas somente  $m \times \ell$  equações. Para o caso de  $r > 1$ , a solução para  $\mathbf{Y}$  não é única. Contudo, é sabido que, para um sistema linear com dimensão finita,  $\mathbf{Y}$  deve ser único. A matriz  $\mathbf{Y}$  só pode ser determinada unicamente a partir de um conjunto de equações para  $r = 1$ . Mesmo neste caso, três são as situações que constituem empecilho para o cálculo de  $\mathbf{Y}$ , a saber:

- sinal de entrada com valor inicial, isto é,  $\mathbf{u}(0) = 0$ ;
- sinal de entrada que não é “rico” suficiente em freqüência, como, por exemplo, um sinal harmônico;
- comprimento do vetor de dados,  $\ell$ , muito grande.

A ocorrência de qualquer um destes tópicos acima expostos faz com que a matriz  $\mathbf{U}$  se torne mal-condicionada e assim a matriz  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}\mathbf{U}^{-1}$  não pode ser calculada com precisão.

Agora, considere o caso onde  $\mathbf{A}$  é assintoticamente estável de modo que para algum  $p$  suficientemente grande,  $\mathbf{A}^k \approx 0$  para  $k \geq p$ . Logo, a Eq. (3.4) pode ser aproximada por:

$$\begin{matrix} (m \times \ell) & m \times r(p+1) & r(p+1) \times \ell \\ \mathbf{y} & \approx & \mathbf{Y} & \mathbf{U} \end{matrix} \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(p) \ \dots \ \mathbf{y}(\ell-1)]$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{D} \ \mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \dots \ \mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}]$$

e

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(p) & \cdots & \mathbf{u}(\ell-1) \\ \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}(p-1) & \cdots & \mathbf{u}(\ell-2) \\ \mathbf{u}(0) & \cdots & \mathbf{u}(p-2) & \cdots & \mathbf{u}(\ell-3) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}(p) & \cdots & \mathbf{u}(\ell-p-1) \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{U}$ , supracitadas, se referem às versões truncadas das matrizes  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{U}$  mostradas na Eq. (3.4), respectivamente. A escolha do comprimento  $\ell > r(p+1)$ , onde  $r$  é o número de entradas e  $p$  é um inteiro, é feita tal que  $\mathbf{CA}^k\mathbf{B} \approx 0$  para  $k \geq p$ . A Eq. (3.5) indica que existem mais equações  $m \times \ell$  do que incógnitas  $m \times r(p+1)$  pois  $\ell > r(p+1)$ . Conclui-se que os dados têm uma realização na forma da Eq. (3.1), então os primeiros  $p$  parâmetros de Markov aproximadamente satisfazem  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}\mathbf{U}^\dagger$  onde  $\mathbf{U}^\dagger$  é a pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{U}$ , e o erro de aproximação decresce à medida que  $p$  cresce.

Infelizmente, para estruturas espaciais levemente amortecidas, o inteiro  $p$  assim como o comprimento  $\ell$  requerido para tornar válida a aproximação descrita na Eq. (3.5), tornam a matriz  $\mathbf{U}$  é muito grande, dificultando a solução numérica da pseudo-inversa  $\mathbf{U}^\dagger$ . Diante deste fato, a questão suscitada é: existe alguma forma de acrescentar artificialmente amortecimento no sistema para permitir a solução da Eq. (3.5) para os parâmetros de Markov? A teoria de controle, neste caso, sugere que uma realimentação seja adicionada ao sistema, o que torna o sistema tão amortecido quanto se deseja, adicionando-se e subtraindo-se o termo  $\mathbf{Gy}(k)$  no lado direito da equação de estado na Eq. (3.1), vem

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \mathbf{Gy}(k) - \mathbf{Gy}(k)$$

mas como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k)$$

então

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \mathbf{G}[\mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k)] - \mathbf{Gy}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \mathbf{G}\mathbf{Cx}(k) + \mathbf{G}\mathbf{Du}(k) - \mathbf{Gy}(k)$$

Agrupando os termos em  $\mathbf{x}(k)$  e  $\mathbf{u}(k)$ , vem

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D})\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}\mathbf{y}(k)$$

Redefinindo

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k) \quad (3.6)$$

e isolando seus termos, vem:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D} \quad -\mathbf{G}] \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

onde:

- $\bar{\mathbf{A}}$  é a matriz da dinâmica com o observador incorporado ( $n \times n$ );
- $\bar{\mathbf{B}}$  é a matriz posicionadora dos atuadores com o observador incorporado ( $n \times [r+m]$ );
- $\mathbf{v}(k)$  é uma matriz de “entrada”;
- $\mathbf{G}$  é uma matriz arbitrária  $n \times m$  escolhida para fazer a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  tão estável quanto desejado.

A figura abaixo ilustra, em forma de diagrama de blocos, um comparativo entre os sistemas real e com observador, que foi tratado matematicamente por meio das definições descritas na Eq. (3.7).

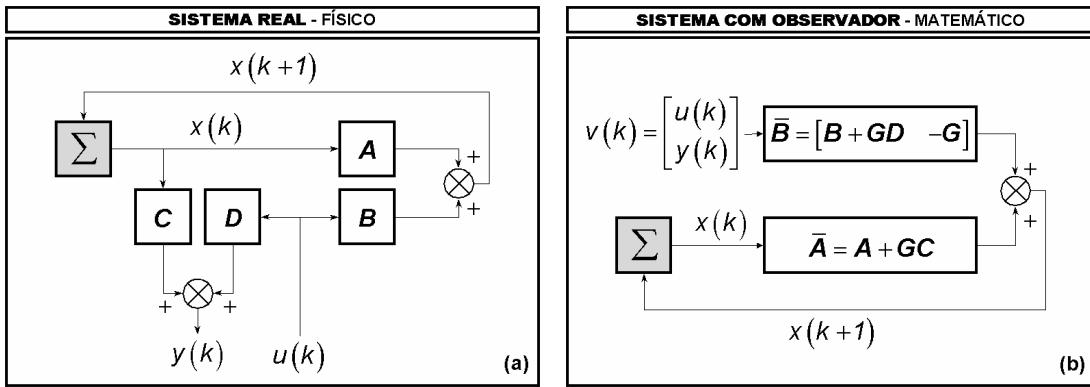


Figura 3.3 – Diagramas de Bloco: Sistema Real (a) e Sistema com Observador (b)

Embora a Eq. (3.6) seja matematicamente idêntica à Eq. (3.1), ela é expressa usando matrizes diferentes para o sistema e tem uma entrada diferente também. Na verdade, a Eq. (3.6) é uma equação na forma de observador se o estado  $x(k)$  é considerado como um vetor de observador de estado. Portanto, os parâmetros de Markov do sistema na Eq. (3.6) serão referidos como sendo **parâmetros de Markov do Observador**. A descrição de entrada-saída na forma matricial para Eq. (3.6) torna-se:

$$\begin{matrix} (m \times \ell) & m \times [(m+r)(\ell-1)+r] & [(m+r)(\ell-1)+r] \times \ell \\ \mathbf{y} & \approx & \bar{\mathbf{Y}} & \mathbf{v} \end{matrix} \quad (3.8)$$

onde

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(p) \ \dots \ \mathbf{y}(\ell-1)]$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \ \dots \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}} \ \dots \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{\ell-2}\bar{\mathbf{B}}]$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(\ell-1) \\ \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(\ell-2) \\ \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(p-2) & \dots & \mathbf{v}(\ell-3) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(\ell-p-1) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}(0) \end{bmatrix}$$

A Eq. (3.8) é obtida da Eq. (3.4) pela substituição de  $\mathbf{A}$  por  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{B}$  por  $\bar{\mathbf{B}}$  e  $\mathbf{u}$  por  $\mathbf{v}$  exceto na primeira linha. A partir deste ponto do texto, para se situar melhor, o leitor deve interpretar o termo “pólo” como sendo, também, um autovalor. Prosseguindo, o fato da matriz  $\mathbf{G}$ , de dimensão  $n \times m$ , poder ser escolhida arbitrariamente faz com que os autovalores de  $\bar{\mathbf{A}}$  possam ser arbitrariamente atribuídos por um sistema observável. Phan *et al.* (1992) considera a identificação dos parâmetros de Markov para qualquer locação de pólos do observador para  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}$ ; considera ainda que o desenvolvimento matemático pode ser interpretado como a tentativa de colocar os autovalores de  $\bar{\mathbf{A}}$  na origem, isto é, um observador “sem batimento”, salientando que este procedimento tem uma outra conotação, que é a de introduzir uma freqüência natural nula neste observador; daí o termo “sem batimento”. Disso resulta que  $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{B} = 0$  para  $k \geq p$ . Quando se trata de dados reais com ruídos, os autovalores de  $\bar{\mathbf{A}}$  são na verdade colocados tal que  $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{B} \approx 0$  para  $k \geq p$  onde  $p$  é um inteiro suficientemente grande. Assim, para resolver os parâmetros de Markov do observador a partir de dados reais utiliza-se a mesma abordagem feita na Eq. (3.5):

$$\begin{matrix} (m \times \ell) & m \times [(m+r)p+r] & [(m+r)p+r] \times \ell \\ \mathbf{y} & \approx & \bar{\mathbf{Y}} & V \end{matrix} \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(p) \ \dots \ \mathbf{y}(\ell-1)]$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \ \dots \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}}]$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(\ell-1) \\ \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(\ell-2) \\ \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(p-2) & \dots & \mathbf{v}(\ell-3) \\ \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & \mathbf{v}(p) & \dots & \mathbf{v}(\ell-p-1) \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes  $\mathbf{V}$  e  $\bar{\mathbf{Y}}$  referem-se às versões truncadas de  $\mathbf{V}$  e  $\bar{\mathbf{Y}}$  na Eq. (3.8). Semelhantemente à Eq. (3.5), se os dados têm uma realização na forma das Eq. (3.1) e Eq. (3.2), ou de suas equivalentes, Eq. (3.6) e (3.2), então os  $p$  primeiros parâmetros de Markov aproximadamente satisfazem  $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y}\bar{\mathbf{V}}^\dagger$  onde  $\mathbf{V}^\dagger$  é a pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{V}$  e

o erro de aproximação decresce à medida que  $p$  cresce. Perceba que os parâmetros de Markov do observador assim identificados podem não necessariamente aparecer para ter decaimento assintótico durante os  $p - 1$  passos, embora isso resulte  $\bar{C}\bar{A}^k\bar{B} = 0$  para  $k \geq p$  no caso de dados livre de ruídos. Para que  $\bar{Y}$  tenha, então, solução única, todas as linhas da matriz  $V$  devem ser linearmente independentes. Além disso, para minimizar o erro numérico devido ao cálculo da pseudo-inversa, as linhas de  $V$  devem ser escolhidas de forma que fiquem o mais independentes possível. Como um resultado, o máximo valor de  $p$  é o número que minimiza o número  $(r + m)p + r \leq \ell$  de linhas independentes de  $V$ . O  $p$  máximo significa o limite superior da ordem do observador “sem batimento”.

Todas as equações abaixo assumem condições iniciais nula,  $\mathbf{x}(0) = 0$ . Para condições iniciais não nulas, uma abordagem um tanto diferente deve ser usada. A partir da Eq. (3.6) mostra-se que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k) \\
 \mathbf{x}(k+2) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+1) \\
 &= \bar{\mathbf{A}}^2\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+1) \\
 \mathbf{x}(k+3) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+2) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+2) \\
 &= \bar{\mathbf{A}}^3\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+2) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}(k+p) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+p-1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+p-1) \\
 &= \bar{\mathbf{A}}^p\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k) + \bar{\mathbf{A}}^{p-2}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+1) + \cdots + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+p-1)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando a equação das medidas, Eq. (3.2), vem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+p) &= \mathbf{Cx}(k+p) + \mathbf{Du}(k+p) \\
&= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^p \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{p-1} \mathbf{B}\mathbf{v}(k) + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{p-2} \mathbf{B}\mathbf{v}(k+1) + \dots + \\
&\quad + \dots + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}}^{p-2} \mathbf{v}(k+p-1) + \mathbf{Du}(k+p)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

O conjunto destas equações, para uma seqüência de  $k = 0, 1, \dots, \ell - 1$ , pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^p \mathbf{x} + \bar{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{V}} \tag{3.12}$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{y}} &= [\mathbf{y}(p) \ \mathbf{y}(p+1) \ \dots \ \mathbf{y}(\ell-1)] \\
\mathbf{x} &= [\mathbf{x}(0) \ \mathbf{x}(1) \ \dots \ \mathbf{x}(\ell-p-2)] \\
\bar{\mathbf{Y}} &= [\mathbf{D} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \ \dots \ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}}]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(p) & \mathbf{u}(p+1) & \dots & \mathbf{u}(\ell-1) \\ \mathbf{v}(p-1) & \mathbf{v}(p) & \dots & \mathbf{v}(\ell-2) \\ \mathbf{v}(p-2) & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(\ell-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(\ell-p-1) \end{bmatrix}_{r(p+1) \times (\ell-p)}$$

Note que o primeiro termo na Eq. (3.12) representa o efeito do passo precedente  $p-1$ . Para o caso onde  $\bar{\mathbf{A}}^p$  é suficientemente pequeno e todos os estados em  $\mathbf{x}$  são limitados, a Eq. (3.12) pode ser aproximada ao se desprezar o primeiro termo do segundo membro, como abaixo:

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{V}} \tag{3.14}$$

que tem a seguinte solução calculada por mínimos quadrados:

$$\bar{Y} = \bar{y}\bar{V}^T [\bar{V}\bar{V}^T]^{-1} \quad \text{ou} \quad \bar{Y} = \bar{y}\bar{V}^T [\bar{V}\bar{V}^T]^{-1} \quad (3.15)$$

considerando, é claro, que  $[\bar{V}\bar{V}^T]^{-1}$  exista, caso contrário  $\bar{V}^T [\bar{V}\bar{V}^T]^{-1}$  deve ser substituído por  $\bar{V}^T$ . Note o leitor que, a Eq. (3.14) é idêntica à Eq. (3.9) exceto pelo fato do  $y$ , nesta última equação, ser substituído por  $\bar{y}$  e  $V$  por  $\bar{V}$ , onde, ainda, verifica-se que  $\bar{y}$  e  $\bar{V}$  são, respectivamente, subconjuntos das matrizes  $y$  e  $V$  pela eliminação das  $p$  primeiras colunas. No caso de condições iniciais desconhecidas a Eq. (3.14) deve ser empregada para eliminar o efeito destas, pois se tornam desprezíveis quando elas são multiplicadas por  $\bar{A}^p$ . Em outras palavras, as condições iniciais têm influência desprezível sobre os dados medidos após  $p$  passos no tempo. Quando existe ruído presente tanto na medida quanto na dinâmica do sistema, a eliminação da dependência das condições iniciais faz com que a resposta do sistema se torne estacionária.

### 3.2 Cálculo dos Parâmetros de Markov

Os parâmetros de Markov do observador contemplam tanto os parâmetros de Markov do sistema como os do ganho do observador. Os parâmetros de Markov do sistema são utilizados para calcular as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , ao passo que os parâmetros de Markov do ganho do observador são usados para determinar a matriz de ganho do observador  $G$ .

#### 3.2.1 Parâmetros de Markov do Sistema

Para recuperar os parâmetros de Markov do sistema em  $Y$  a partir dos parâmetros de Markov do observador, faz-se a seguinte partição em  $\bar{Y}$ , tal como:

$$\bar{Y} = [\bar{Y}_0 \quad \bar{Y}_1 \quad \bar{Y}_2 \quad \dots \quad \bar{Y}_p] \quad (3.16)$$

onde

$$\bar{Y}_0 = D \quad (3.17a)$$

$$\bar{Y}_k = C\bar{A}^{k-1}\bar{B} \quad (3.17b)$$

$$= [C(A + GC)^{k-1}(B + GD) \quad - C(A + GC)^{k-1}G] \quad (3.17c)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)} & -\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)} \end{bmatrix}; \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.17d)$$

O sinal negativo usado para  $\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}$  na Eq. (3.17d) é escolhido tal que  $\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)} = \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1}\mathbf{G}$ .

Note que o parâmetro de Markov do observador identificado  $\bar{\mathbf{Y}}_0$  tem dimensão menor que os demais. As dimensões dos parâmetros de Markov do observador são as seguintes:

$$\bar{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{D} \quad (r \times m)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1}(\mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{G}) \quad (r \times m)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)} \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1}\mathbf{G} \quad (r \times r)$$

onde, para efeito didático, pode-se inserir a terceira equação da Eq. (3.17d) na Eq. (3.16) contemplando as dimensões acima mencionadas, como:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \left[ \underbrace{\bar{\mathbf{Y}}_0}_{(r \times m)} \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_1^{(1)} & -\bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_2^{(1)} & -\bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_p^{(1)} & -\bar{\mathbf{Y}}_p^{(2)} \end{bmatrix} \right] \quad (3.18)$$

Vale informar que, remontando a definição de  $\bar{\mathbf{B}}$  feita na Eq. (3.7), cada parâmetro de Markov do observador tem uma parte relativa à entrada,  $\bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)}$  e outra relativa à saída  $-\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}$ .

O desenvolvimento a seguir é de crucial importância tanto para o entendimento do método quanto para sua implementação. É neste momento que serão feitas as considerações acerca do  $\bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)}$  e do  $-\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}$  que permitirão o prosseguimento do algoritmo.

Inicia-se este processo a partir do primeiro parâmetro de Markov  $\mathbf{CB}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{CB} = \mathbf{C}(\mathbf{B} + \mathbf{GD}) - (\mathbf{CG})\mathbf{D} \\ &= \bar{\mathbf{Y}}_1^{(1)} - \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}\mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para obter o segundo parâmetro de Markov  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{CAB}$ , considere primeiro o produto  $\bar{\mathbf{Y}}_2^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Y}}_2^{(1)} &= \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})(\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D}) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} + \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{B}}_{\bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \bar{\mathbf{Y}}_1} + \underbrace{\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{G}\mathbf{D}}_{\bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}} \\
&= \mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_1 - \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}\mathbf{D}
\end{aligned}$$

Então, para determinar  $\mathbf{Y}_2$ , basta isolá-lo na expressão acima, resultando em:

$$\mathbf{Y}_2 = \bar{\mathbf{Y}}_2^{(1)} - \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_1 - \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}\mathbf{D} \quad (3.20)$$

Similarmente, para obter o parâmetro de Markov  $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ , considere primeiro o produto

$$\bar{\mathbf{Y}}_3^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Y}}_3^{(1)} &= \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^2(\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D}) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{GCA} + \mathbf{AGC} + \mathbf{GCGC})(\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D}) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}}_{\bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \bar{\mathbf{Y}}_2} + \underbrace{\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{B}}_{\bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}} + \underbrace{\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^2\mathbf{G}\mathbf{D}}_{\bar{\mathbf{Y}}_3^{(2)}} \\
&= \mathbf{Y}_3 + \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}\mathbf{Y}_1 + \bar{\mathbf{Y}}_3^{(2)}\mathbf{D}
\end{aligned}$$

Daí utiliza-se o mesmo recurso utilizado para  $\mathbf{Y}_2$ , isola-se  $\mathbf{Y}_3$  na expressão acima, o que resulta em:

$$\mathbf{Y}_3 = \bar{\mathbf{Y}}_3^{(1)} - \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_2 - \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}\mathbf{Y}_1 - \bar{\mathbf{Y}}_3^{(2)}\mathbf{D} \quad (3.21)$$

Por indução matemática, extrai-se a relação geral entre os parâmetros de Markov do sistema real e do observador, que é:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0 = \bar{\mathbf{Y}}$$

$$\mathbf{Y}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)}\mathbf{Y}_{k-i} \quad \text{para } k = 1, \dots, p \quad (3.22)$$

$$\mathbf{Y}_k = - \sum_{i=1}^p \bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)} \mathbf{Y}_{k-i} \quad \text{para } k = p+1, \dots, \infty$$

Uma vez obtidos os parâmetros de Markov do sistema, monta-se a matriz de Hankel e a partir deles derivam-se as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  do sistema, como preconizado no desenvolvimento do algoritmo ERA, já enunciado no capítulo anterior.

### 3.2.2 Parâmetros de Markov do Ganho do Observador

Para identificar o ganho do observador, recupera-se, primeiramente, a seguinte seqüência de parâmetros:

$$\mathbf{Y}_k^o = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{G}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

em termos dos parâmetros de Markov do observador. Na verdade, o primeiro parâmetro na seqüência é simplesmente:

$$\mathbf{Y}_1^o = \mathbf{CG} = \mathbf{Y}_1^{(2)} \quad (3.24)$$

O próximo parâmetro é obtido considerando  $\bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)} &= \mathbf{CAG} = \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{GC})\mathbf{G} = \underbrace{\mathbf{CAG}}_{\mathbf{Y}_2^o} + \underbrace{\mathbf{CGCG}}_{\bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_1^o} \\ &= \mathbf{Y}_2^o + \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_1^o \end{aligned}$$

que, ao se isolar  $\mathbf{Y}_2^o$ , resulta

$$\mathbf{Y}_2^o = \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)} - \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_1^o \quad (3.25)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Y}}_3^{(2)} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^2\mathbf{G} \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})^2\mathbf{G} = \mathbf{C}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{G} \\
&= \mathbf{C}[\mathbf{A}^2 + (\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{G}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}]\mathbf{G} \\
&= \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{G}}_{\mathbf{Y}_3^o} + \underbrace{\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}} + \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{G}}_{\bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}} \\
&= \mathbf{Y}_3^o + \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}\mathbf{Y}_1^o + \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_2^o
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\mathbf{Y}_3^o = \mathbf{Y}_3^{(2)} - \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_2^o - \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)}\mathbf{Y}_1^o \quad (3.26)$$

Por indução, deduz-se a relação geral, que é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_1^o &= \mathbf{C}\mathbf{G} = \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \\
\mathbf{Y}_k^o &= \bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)}\mathbf{Y}_{k-i}^o \quad \text{para } k = 2, \dots, p \\
\mathbf{Y}_k^o &= - \sum_{i=1}^p \bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)}\mathbf{Y}_{k-i}^o \quad \text{para } k = p+1, \dots, \infty
\end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.3 Considerações importantes sobre a escolha do parâmetro $p$

É sabido que uma vez determinado os parâmetros de Markov é possível obter a realização em espaço de estados do sistema em questão utilizando o ERA, inclusive seus parâmetros modais.

A Equação (3.22) mostra que  $\mathbf{Y}_k$  para  $k \geq p+1$  é uma combinação linear dos seus  $p$  parâmetros de Markov do sistema passados, isto é,  $\mathbf{Y}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-2}, \dots, \mathbf{Y}_{k-p}$ . Em outras palavras, existe somente  $p$  parâmetros de Markov do sistema independentes. A questão suscitada, então, é a seguinte: qual é o valor de  $p$  que deve ser escolhido para a identificação de um sistema de ordem  $n$ ? Eis o momento de responder esta questão.

Primeiro, note que existe somente  $p+1$  parâmetros de Markov do observador calculados como solução em mínimos quadrados a partir da Eq. (3.8). Pela escolha de  $p$ ,

$\bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)}$  e  $\bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}$  são considerados nulos para  $k > p$ . A relação entre os parâmetros de Markov do observador e do sistema pode ser posteriormente desenvolvida. Seja, então, as matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(2)}$  e  $\underline{\mathbf{Y}}$  definidas como:

$$\tilde{\mathbf{Y}}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{Y}}_p^{(2)} & -\bar{\mathbf{Y}}_{p-1}^{(2)} & -\bar{\mathbf{Y}}_{p-2}^{(2)} & \cdots & -\bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \cdots & \mathbf{Y}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \cdots & \mathbf{Y}_{N+2} \\ \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \mathbf{Y}_6 & \cdots & \mathbf{Y}_{N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{p+1} & \mathbf{Y}_{p+2} & \mathbf{Y}_{p+3} & \cdots & \mathbf{Y}_{N+p} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{p+2} & \mathbf{Y}_{p+3} & \mathbf{Y}_{p+4} & \cdots & \mathbf{Y}_{p+N+1} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde  $N$  é um inteiro arbitrário suficientemente grande e  $\mathbf{H}$  é, obviamente, a matriz generalizada de Hankel construída a partir de um determinado número de parâmetros de Markov do sistema. Então, a partir das Eq. (3.22) e Eq. (3.28) obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{Y}}^{(2)} \mathbf{H} = \underline{\mathbf{Y}} \quad (3.29)$$

A partir da definição dos parâmetros de Markov do sistema a matriz pode ser expressa por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{PAQ} \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz da dinâmica do sistema,  $\mathbf{P}$  a matriz de observabilidade e  $\mathbf{Q}$  a matriz de controlabilidade. Então a Equação (3.29) assume a seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{Y}}^{(2)} \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{Y}}^{(2)} \mathbf{H} (\mathbf{PAQ}) = \underline{\mathbf{Y}} \quad (3.31)$$

É sabido que o posto de uma matriz  $\mathbf{H}$  suficientemente grande é a ordem da parte controlável e observável do sistema, onde, do ponto de vista experimental, a matriz  $\mathbf{A}$

identificada representa somente a parte. A dimensão de  $\mathbf{H}$  é  $mp \times Nr$  onde  $N$  é um inteiro arbitrário. Assumindo que  $Nr > mp$ , conclui-se que o posto máximo de  $\mathbf{H}$  vale  $mp$ . A exposição a seguir constitui a chave para o entendimento do critério de escolha do parâmetro  $p$ .

Se  $p$  é escolhido de tal sorte que  $mp > n$  (ordem da matriz  $\mathbf{A}$ ) e  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(2)}$  é escolhido unicamente, então a matriz  $\mathbf{A}$  realizada com ordem  $n$  deve existir. Conclui-se então que, o número de parâmetros de Markov do observador calculados,  $p$ , deve ser escolhido tal que  $mp > n$ , onde  $m$  é o número de saídas. Obviamente que  $p$  pode ser menor que a ordem real do sistema de múltiplas saídas. Para um sistema SISO o valor de  $p$  pode ser maior ou igual que a ordem do sistema. O número  $p$  determina, então, o número máximo de parâmetros de Markov (independentes) do sistema, como visto na Eq. (3.22). Portanto,  $mp$  representa o limite superior da ordem do sistema identificado. Uma importante ressalva é que, quando uma matriz de Hankel é formada com o propósito de identificação, não há benefício algum em incluir parâmetros de Markov adicionais além daquele número necessário para criar uma matriz de Hankel de posto completo.

### 3.4 Relação com o Filtro de Kalman

A correspondência entre os ganhos do observador e do filtro de Kalman é expressa pela Eq. (3.32). A metodologia para calcular ambos, em módulo, é exatamente a mesma. As implicações matemáticas que provam esta relação estão detalhadas no Anexo II. É esta relação que confere, portanto, uma natureza estocástica à identificação.

$$\mathbf{K} = -\mathbf{G} \quad (3.32)$$

### 3.5 O Algoritmo OKID



Figura 3.4 – Fluxograma do OKID

**Passo 1**

- Escolher o valor de  $p$  (ver Eq. (3.9)) que determina o número de parâmetros de Markov do observador. Em geral, a exigência é que  $p$  seja maior que a ordem real do sistema (pelo menos 2 a 3 passos de tempo maior);
- Para condições iniciais nulas, montar as matrizes  $y$  e  $V$  (ver Eq. (3.9)); já para condições iniciais não nulas montar as matrizes  $\bar{y}$  e  $\bar{V}$  (ver Eq. (3.14));
- Calcular a solução por mínimos quadrados a matriz dos parâmetros de Markov do observador  $\bar{Y}$  (ver Eq. (3.15)).

**Passo 2**

- A partir dos parâmetros de Markov do observador identificados, emprega-se a Eq. (3.31) para determinar os parâmetros de Markov combinados do sistema e do ganho do observador.

### **Passo 3**

- Determinar a realização do modelo em espaço de estados do sistema e do ganho do observador a partir dos parâmetros de Markov do sistema e do ganho do observador usando ERA ou ERA/DC, que não é tratado nesta dissertação mas que é discutido por Juang (1994).
- Analisar e selecionar a ordem da realização mínima utilizando os critérios discutidos no Capítulo II.

### **Passo 4**

- Encontrar os autovalores e autovetores do sistema realizado, o transformando para coordenadas modais para que seja possível a identificação dos parâmetros modais, que incluem freqüências, amortecimentos e forma dos modos nas posições dos sensores.

## Capítulo IV

### AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO ERA

Este capítulo tem o objetivo de avaliar numericamente a robustez do método ERA na sua formulação clássica.

A avaliação deste algoritmo verificará sua sensibilidade à variação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , que compõem a dimensão da matriz de Hankel  $H$  (Eq. (2.25)), no caso de adição de ruído branco, em níveis crescentes, à saída do sistema. Tal adição corresponderá a uma porcentagem sobre o sinal de saída  $y$ , como representado no esquema abaixo.

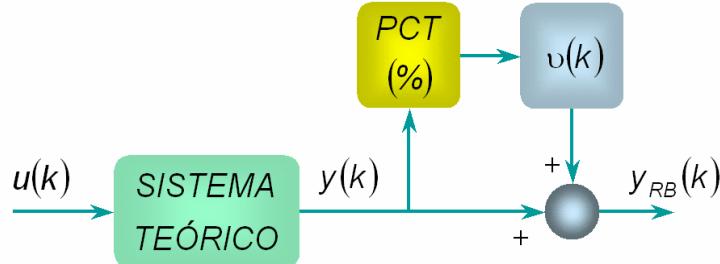


Figura 4.1 – Representação da adição do ruído branco à saída do sistema teórico

Logo, a partir da representação ilustrada na Fig. (6.1) pode-se extrair a seguinte expressão matemática:

$$\mathbf{y}_{RB}(k) = \mathbf{y}(k) + PCT \cdot \mathbf{u}(k) \cdot \mathbf{y}(k)$$

$$\mathbf{y}_{RB}(k) = [1 + PCT \cdot \mathbf{u}(k)] \cdot \mathbf{y}(k) \quad (4.1)$$

onde,

- $\mathbf{y}_{RB}(k)$  é o sinal de saída medido com o ruído branco contemplado;
- $\mathbf{y}(k)$  é o sinal de saída medido (teórico) sem ruído;

- $PCT$  é a porcentagem do sinal  $y(k)$  sobre o qual é injetado ruído branco;
- $u(k)$  é um ruído branco;

#### 4.1 O Sistema Mecânico Simulado

A Figura (4.2) ilustra o clássico sistema mecânico a ser simulado e identificado, um sistema MCK de 2 GDL's.

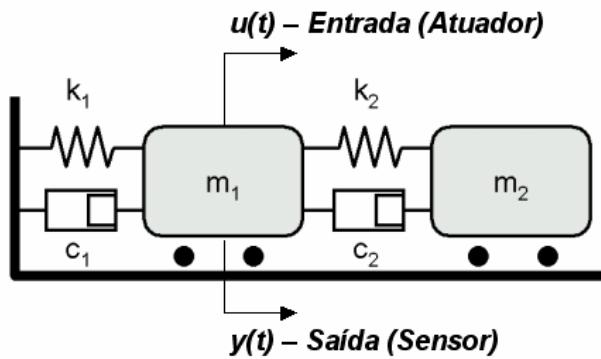


Figura 4.2 – Sistema mecanico de 2 GDL's simulado

onde as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são:

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 2,5 \cdot 10^4 & -1,5 \cdot 10^5 \\ -1,5 \cdot 10^5 & 1,5 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ e } \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

respectivamente, e as matrizes de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{K}_s & -\mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \rightarrow (\text{dinâmica})$$

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{1}{m_1} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \rightarrow (\text{atuadores})$$

$$\mathbf{C} = [2000 \ 0 \ 0 \ 0] \ \frac{v}{m} \rightarrow (\text{sensores})$$

$$\mathbf{D} = 0 \rightarrow (\text{perturbação dos sensores devido aos atuadores})$$

#### 4.2 Análise de Sensibilidade do ERA aos Parâmetros $\alpha$ , $\beta$ e ao Ruído através de Simulação

O planejamento das simulações obedecerá ao esquema ilustrado abaixo.

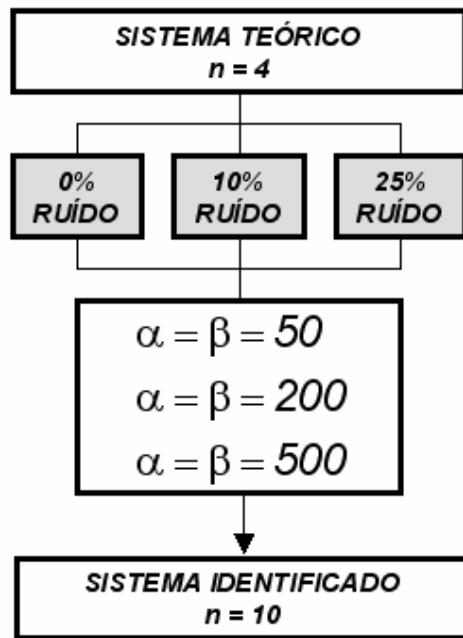


Figura 4.3 – Esquema da seqüência das simulações numéricas para o ERA

#### 4.2.1 Sem ruído – PCT = 0%

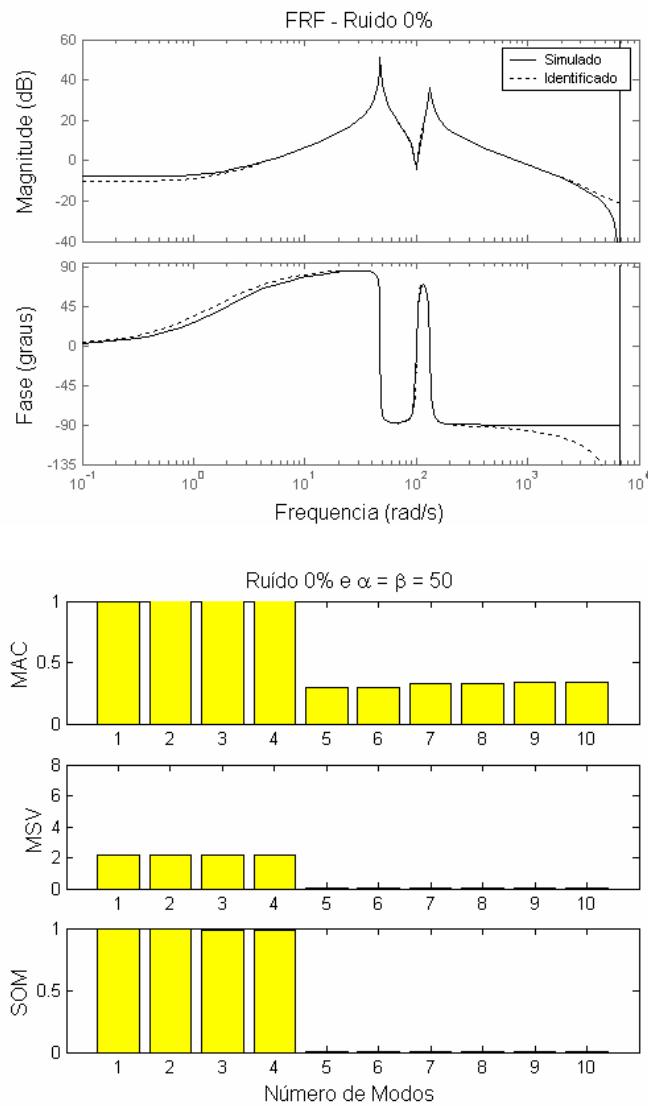


Figura 4.4 – FRF, MAC e MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado.

(Sem Ruído com  $\alpha = \beta = 50$ ) – CASO 1

Tabela 4.1 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
(Sem Ruído com  $\alpha = \beta = 50$ )

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAC	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,2952	0,2952	0,3228	0,3228	0,3421	0,3421
MSV	2,1514	2,1514	2,1860	2,1860	0	0	0	0	0	0
Freqüência (rad/s)	133,2	133,2	47,5	47,5	5094,2	5094,2	7103,6	7103,6	648,6	648,6

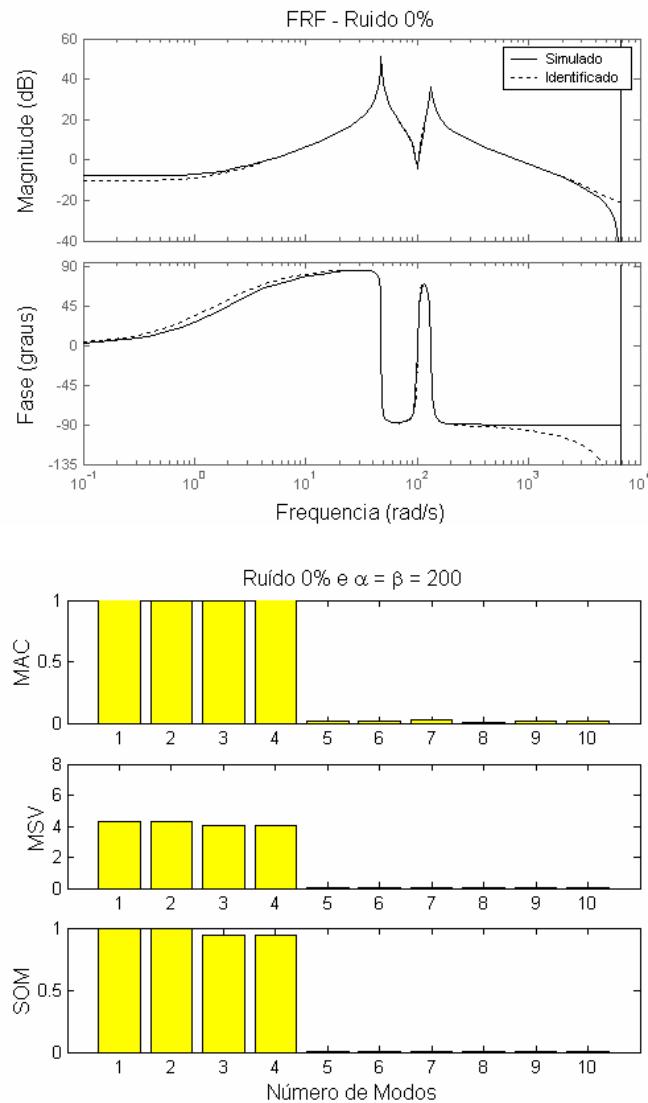


Figura 4.5 – FRF, MAC e MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado.  
(Sem Ruído com  $\alpha = \beta = 200$ ) – CASO 2

Tabela 4.2 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
(Sem Ruído com  $\alpha = \beta = 200$ )

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAC	1,000	1,000	1,000	1,000	0,0149	0,0149	0,0305	0,0072	0,0167	0,0167
MSV	4,2986	4,2986	4,0485	4,0485	0	0	0	0	0	0
Freqüência (rad/s)	47,5	47,5	133,2	133,2	1,1980	1,1980	0,8712	1,5329	0,9910	0,9910

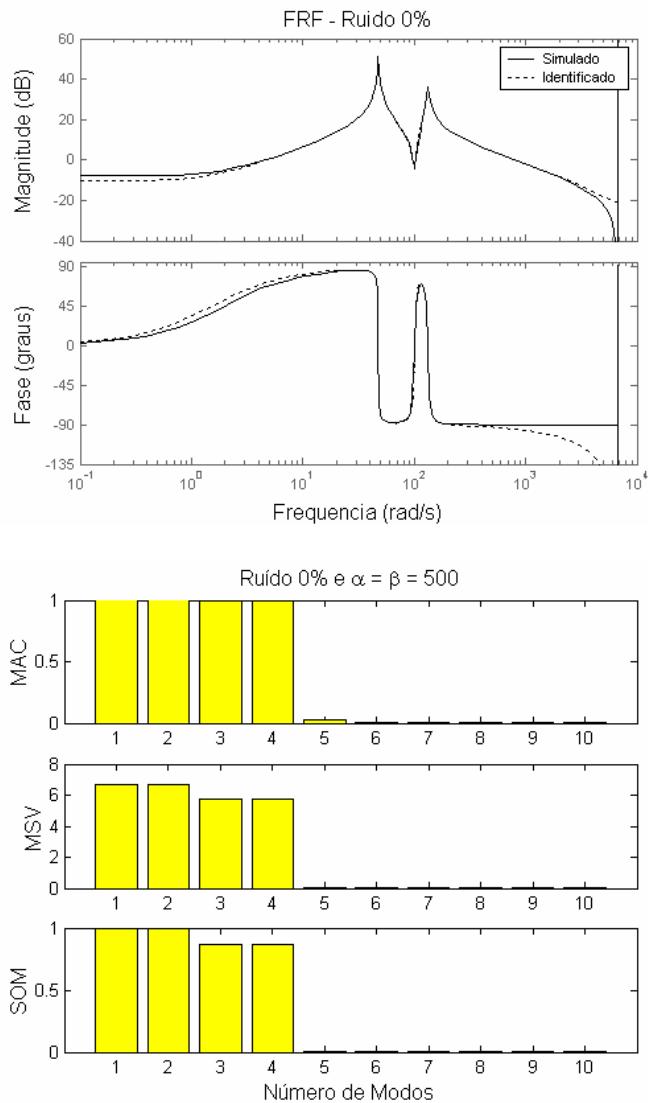


Figura 4.6 – FRF, MAC e MSV e SOM dos Sistemas Simulado e Identificado.  
(Sem Ruído com  $\alpha = \beta = 500$ ) – CASO 3

Tabela 4.3 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
(Sem Ruído com  $\alpha = \beta = 500$ )

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAC	1,000	1,000	1,000	1,000	0,0262	0,0058	0,0057	0,0057	0,0043	0,0032
MSV	6,6595	6,6595	5,7779	5,7779	0	0	0	0	0	0
Freqüência (rad/s)	47,5	47,5	133,2	133,2	7490	11438	13729	13729	14316	18091

#### 4.2.2 Com ruído – PCT = 10%

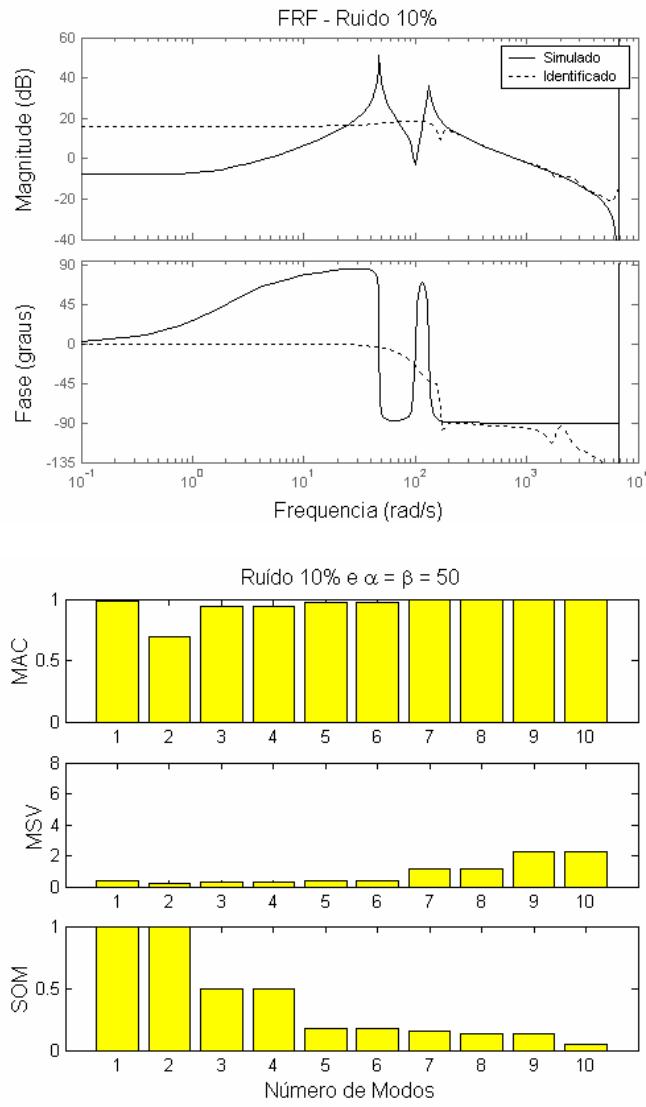


Figura 4.7 – FRF, MAC e MSV dos Sistemas Simulado e Identificado.  
( $PCT = 10\%$  com  $\alpha = \beta = 50$ ) – CASO 4

Tabela 4.4 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
( $PCT = 10\%$  com  $\alpha = \beta = 50$ )

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>MAC</b>	0,9812	0,6917	0,9368	0,9368	0,9764	0,9764	0,9997	0,9997	0,9999	0,9999
<b>MSV</b>	0,3610	0,1717	0,3291	0,3291	0,3977	0,3977	1,1171	1,1171	2,2540	2,2540
Freqüência (rad/s)	6664,7	6714,8	2438,4	2438,4	1721,7	1721,7	170,1	170,1	125,7	125,7

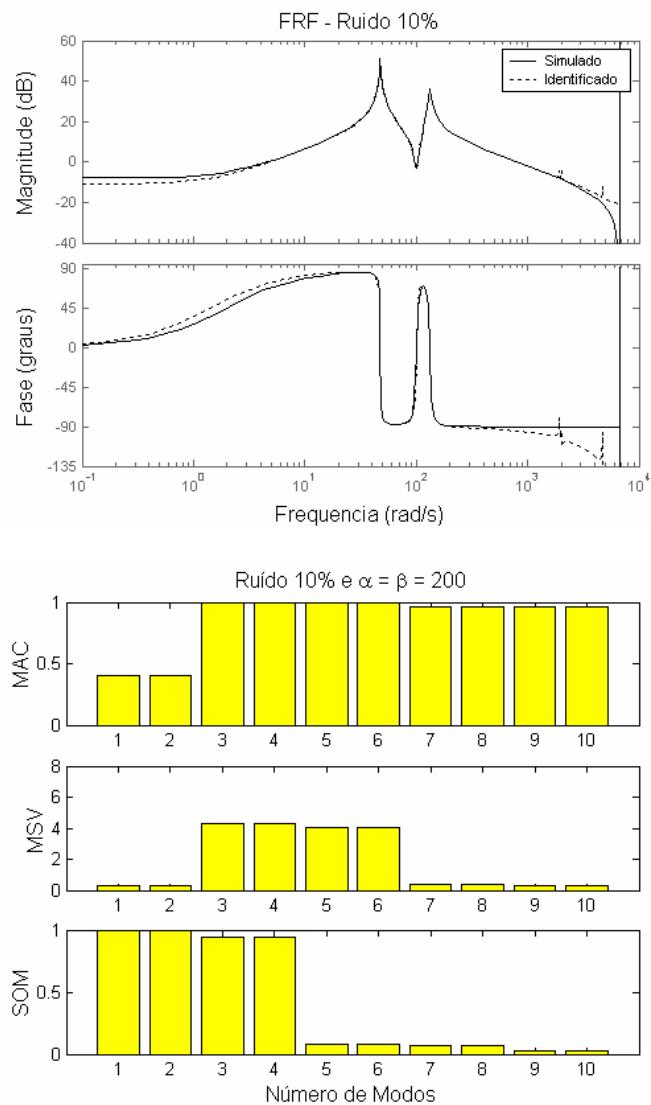


Figura 4.8 – FRF's, MAC's e MSV's dos Sistemas Simulado e Identificado.  
 $(PCT = 10\% \text{ com } \alpha = \beta = 200)$  – CASO 5

Tabela 4.5 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
 $(PCT = 10\% \text{ com } \alpha = \beta = 200)$

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>MAC</b>	0,4026	0,4026	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	0,9587	0,9587	0,9637	0,9637
<b>MSV</b>	0,3056	0,3056	<b>4,2929</b>	<b>4,2929</b>	<b>4,0430</b>	<b>4,0430</b>	0,3637	0,3637	0,2789	0,2789
Freqüência (rad/s)	4683,0	4683,0	<b>47,5</b>	<b>47,5</b>	<b>133,1</b>	<b>133,1</b>	2017,0	2017,0	1922,4	1922,4

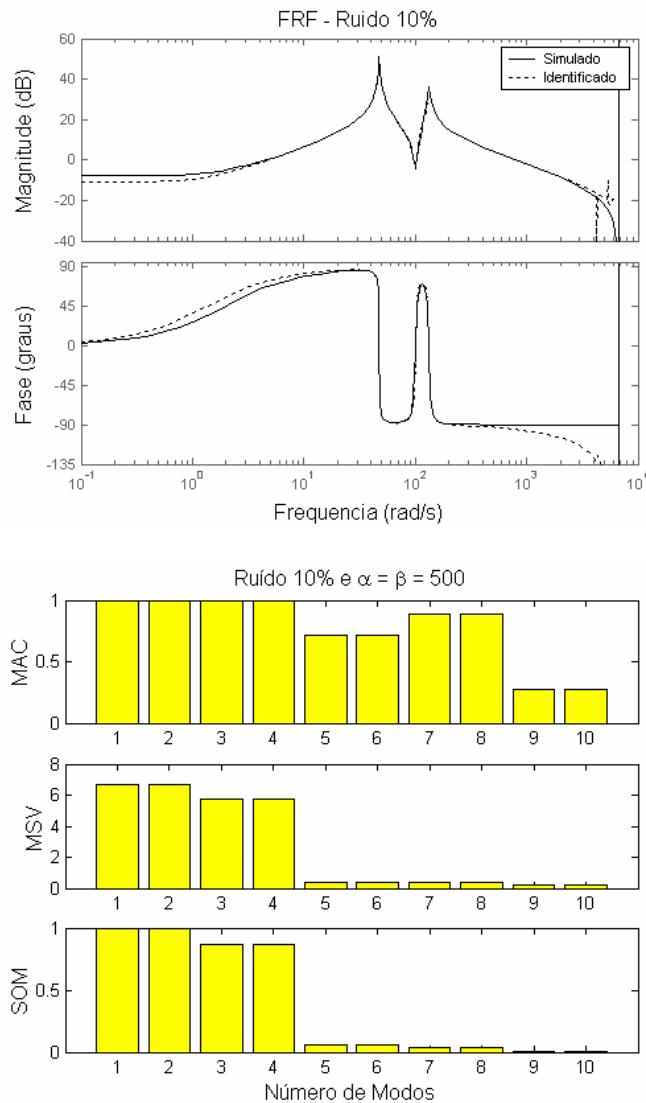


Figura 4.9 – FRF, MAC e MSV dos Sistemas Simulado e Identificado.  
 $(PCT = 10\% \text{ com } \alpha = \beta = 500)$  – CASO 6

Tabela 4.6 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
 $(PCT = 10\% \text{ com } \alpha = \beta = 500)$

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAC	1,000	1,000	1,000	1,000	0,7155	0,7155	0,8877	0,8877	0,2691	0,2691
MSV	6,6625	6,6625	5,7815	5,7815	0,3557	0,3557	0,4161	0,4161	0,1910	0,1910
Freqüência (rad/s)	47,5	47,5	133,2	133,2	4280,6	4280,6	5371,7	5371,7	5771,1	5771,1

#### 4.2.3 Com ruído – PCT = 25%

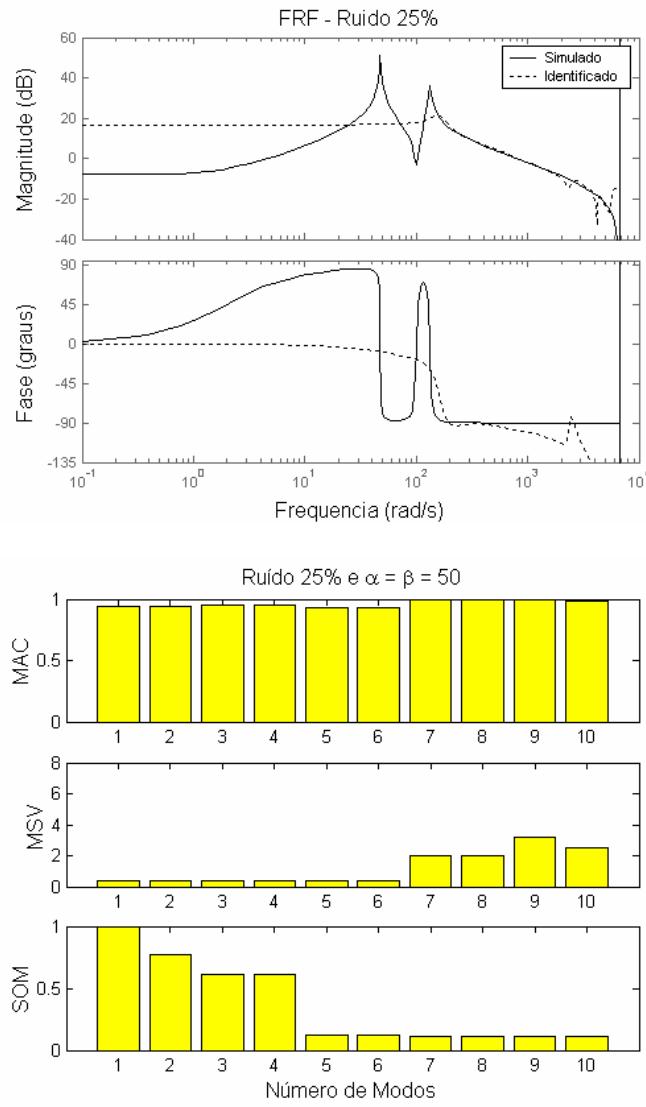


Figura 4.10 – FRF, MAC e MSV dos Sistemas Simulado e Identificado.

(PCT = 25% com  $\alpha = \beta = 50$ ) – CASO 7

Tabela 4.7 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
(PCT = 25% com  $\alpha = \beta = 50$ )

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>MAC</b>	0,9385	0,9385	0,9544	0,9544	0,9304	0,9304	0,9997	0,9997	0,9919	0,9912
<b>MSV</b>	0,4092	0,4092	0,3984	0,3984	0,3962	0,3962	1,9952	1,9952	3,2205	2,4965
<b>Freqüência (rad/s)</b>	5782,6	5782,6	4234,5	4234,5	2439,3	2439,3	164,7	164,7	245,1	307,1

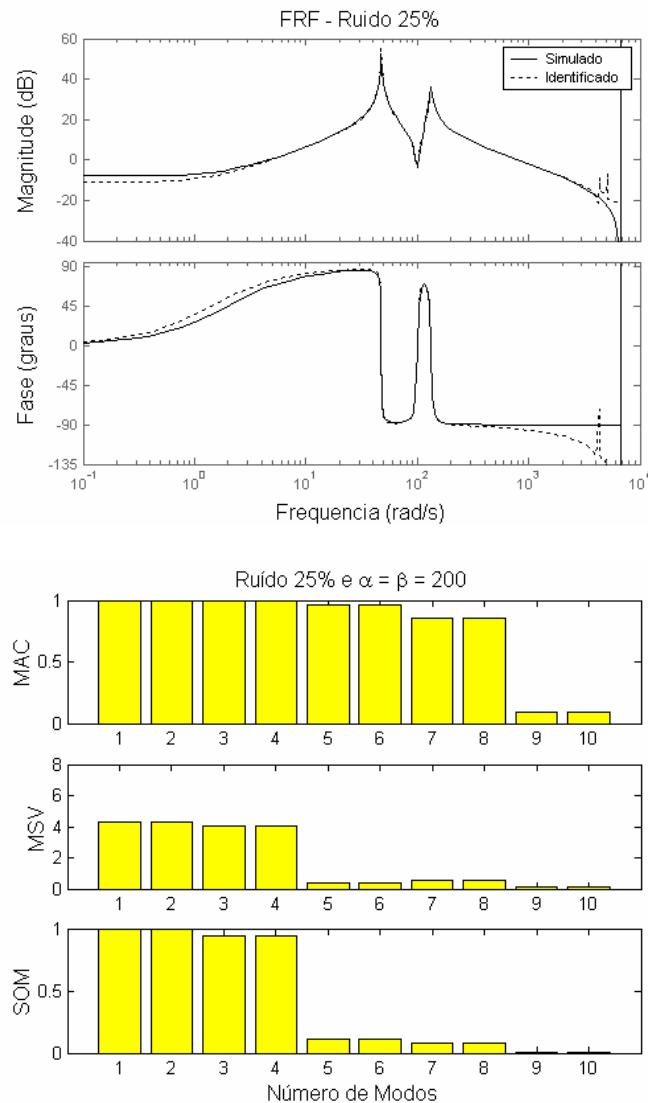


Figura 4.11 – FRF's, MAC's e MSV's dos Sistemas Simulado e Identificado.  
( $PCT = 25\%$  com  $\alpha = \beta = 200$ ) – CASO 8

Tabela 4.8 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
( $PCT = 25\%$  com  $\alpha = \beta = 200$ )

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAC	1,000	1,000	1,000	1,000	0,9579	0,9579	0,8562	0,8562	0,0950	0,0950
MSV	4,2810	4,2810	4,0485	4,0485	0,3833	0,3833	0,5124	0,5124	0,1566	0,1566
Freqüência (rad/s)	47,4	47,4	133,3	133,3	5062,2	5062,2	4295,0	4295,0	3979,8	3979,8

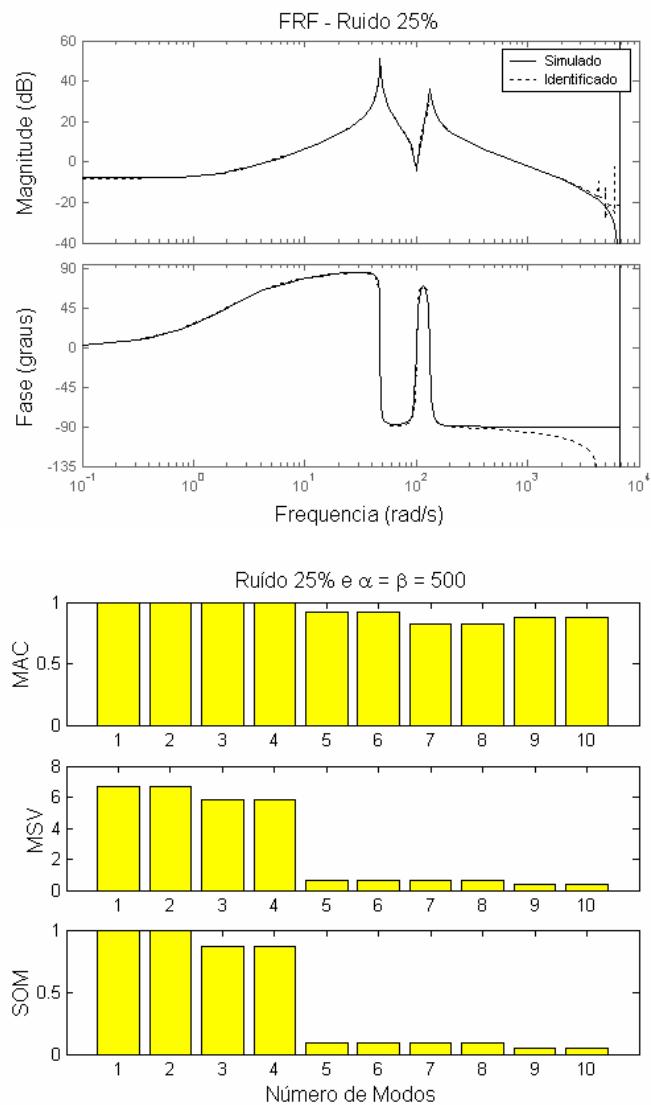


Figura 4.12 – FRF’s, MAC’s e MSV’s dos Sistemas Simulado e Identificado.  
 $(PCT = 25\% \text{ com } \alpha = \beta = 500)$  – CASO 9

Tabela 4.9 – Associação do MAC e MSV com as respectivas freqüências naturais  
 $(PCT = 25\% \text{ com } \alpha = \beta = 500)$

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAC	1,000	1,000	1,000	1,000	0,9180	0,9180	0,8248	0,8248	0,8781	0,8781
MSV	6,6880	6,6880	5,7896	5,7896	0,6553	0,6553	0,6726	0,6726	0,4028	0,4028
Freqüência (rad/s)	47,5	47,5	133,2	133,2	6046,3	6046,3	4317,2	4317,2	5011,2	5011,2

Tabela 4.10 – Consolidação das Identificações para todos os casos

Caso	PCT (%)	$\alpha = \beta$	Freqüência Natural (rad/s)		Amortecimento (%)	
			$\omega_1$	$\omega_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
<i>Real</i>	-	-	47,5	133,2	1,14	2,34
1	0	50	47,5	133,2	1,14	2,34
2		200	47,5	133,2	1,14	2,34
3		500	47,5	133,2	1,14	2,34
4	10	50	-	125,7	-	48,2
5		200	47,4	133,3	0,99	2,31
6		500	47,5	133,2	1,12	2,36
7	25	50	-	164,7	-	18,8
8		200	47,4	133,3	0,67	2,28
9		500	47,5	133,2	1,21	2,33

### 4.3 Análise dos Resultados

#### 4.3.1 Impacto do ruído sobre o *MAC*

Notou-se que, fixando-se os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , a evolução do nível de ruído fez com que os *MAC* dos modos que não contribuíram efetivamente para o modelo aumentasse. Esta observação procede uma vez que o critério *MAC* mede o quanto alinhados estão as evoluções “esperadas” e identificadas de cada modo, como discutido na seção 2.3.3.3. Em

outras palavras, isso quer dizer que o **MAC** tende a reconhecer o ruído incidente no sinal de saída utilizado na identificação. É importante dizer que, mesmo para o caso sem ruído ocorreram **MAC** consideráveis para os modos que não contribuem efetivamente para o modelo. Isso se deve aos “modos computacionais” decorrentes de erros de arredondamento computacional, o que simula um “ruído”.

#### 4.3.2 Impacto do ruído sobre o **MSV**

Fixando-se, também, os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , o acréscimo de ruído no sinal de saída, utilizado no algoritmo de identificação, não interferiu nos valores dos **MSV** daqueles modos que realmente compõem o sistema. Entretanto, os **MSV** correspondentes àqueles modos insignificantes sofreram um discreto aumento, mas, mesmo assim, eles eram bem reduzidos quando comparados com os modos efetivos, não configurando, portanto, motivo para confusão. Este comportamento se deve ao fato do **MSV** ser um critério que analisa a contribuição de cada modo para resposta impulsiva do sistema sem fazer comparação com os dados reais, onde é natural concluir que os **MSV** dos modos efetivos se sobressaiam frente aos demais, independentemente do nível de ruído incidente.

#### 4.3.3 Impacto do ruído sobre o **SOM**

O comportamento do **SOM**, para um mesmo valor de  $\alpha$  e  $\beta$ , é, qualitativamente, o mesmo do **MSV**, já que este último constitui uma envoltória, ou uma “janela” sobre o **MAC**, como preconizado na seção 2.3.3.3.

#### 4.3.4 Impacto de $\alpha$ e $\beta$ sobre o **MAC**

Esta análise foi feita mantendo-se constante o nível de ruído sobre o sinal de saída do sistema, onde os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram variados crescentemente. Mas, para tanto, algumas considerações foram feitas. Foi apresentado, na seção 2.3.3, que o **MAC** depende das evoluções temporais identificada,  $\hat{q}_i$ , e “esperada”,  $\bar{q}_i$ , de cada modo  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), onde estas são funções do comprimento do vetor de dados  $\ell$ , como mostrado nas Eq. (2.58) e Eq. (2.61), respectivamente. No entanto, para se avaliar o comportamento do **MAC** submetido à variação de  $\ell$ , substituiu-se ele por  $\alpha$  e  $\beta$ , que são iguais neste estudo. Logo,  $\hat{q}_i$  e  $\bar{q}_i$  assumem a seguinte forma:

$$\hat{q}_i = \begin{bmatrix} \hat{b}_i & \hat{\lambda}_i \hat{b}_i & \dots & \hat{\lambda}_i^{\beta-2} \hat{b}_i \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\bar{q}_i = \begin{bmatrix} b_i & \lambda_i b_i & \dots & \lambda_i^{\beta-2} b_i \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A informação mais flagrante observada nos casos estudados foi o fato de que a evolução dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  ratificaram os modos efetivos mantendo seus respectivos **MAC** iguais à unidade. Uma justificativa para o este comportamento é o fato de  $\alpha$  e  $\beta$  maiores contemplar, na matriz de Hankel, maior número de parâmetros de Markov (como evidenciado na Eq. (2.25)), o que torna o vetor de dados mais representativo. Entretanto, observou-se que o comportamento dos **MAC** correspondentes aos demais modos não seguia uma tendência, o que, neste caso, fragiliza a confiança neste critério.

#### 4.3.5 Impacto de $\alpha$ e $\beta$ sobre o **MSV**

Similarmente ao item anterior, substituiu-se o  $\ell$  por  $\beta$  na Eq. (2.66), culminando na Eq. (4.4):

$$MSV_i = \sqrt{|\hat{c}_i| (1 + |\hat{\lambda}_i| + |\hat{\lambda}_i|^2 + \dots + |\hat{\lambda}_i|^{\beta-2})} |\hat{b}_i| \quad (4.4)$$

Foi observado que os **MSV** dos modos efetivos, quando fixou-se o nível de ruído, aumentava à medida que  $\alpha$  e  $\beta$  também, enquanto que os dos demais modos variaram sem tendência mas numa escala muito menor, de forma que podem ser desprezados. É imprescindível dizer que  $\hat{c}_i$  e  $\hat{b}_i$  mensuram, respectivamente, o quanto observável e o quanto controlável é o modo  $i$ . Em outras palavras, quanto maior é a observabilidade e controlabilidade de um determinado modo, mais importante é sua contribuição para o modelo, e, portanto, ele deve ser retido. Caso contrário, seu **MSV** será bem pequeno, o que permite que o respectivo modo seja alijado do modelo.

#### 4.3.6 Impacto de $\alpha$ e $\beta$ sobre o **SOM**

O comportamento do **SOM**, para um nível de ruído e com a variação de  $\alpha$  e  $\beta$ , é, pela mesma razão exposta no ítem 4.3.3, qualitativamente o mesmo do **MSV**.

#### 4.3.7 Conclusões Parciais

- **Quanto ao *MAC* ou Coerência de Amplitude Modal**

O **MAC** revelou-se um bom “ratificador” dos modos efetivos mas que não pode ser utilizado isoladamente, já que, como foi visto, ele pode ter um valor próximo da unidade e estar vinculado a um modo que não contribui para o modelo.

- **Quanto ao *MSV* ou Valor Singular do Modo**

O **MSV** revelou-se um critério mais confiável, pois ele é calculado somente sobre o sistema identificado, ou seja, a sua convergência para os modos efetivos é mais rápida, como foi observado nos casos estudados. Além disso, os **MSV** dos modos alheios ao modelo são insignificantes quando comparados aos dos modos efetivos. Contrariamente ao **MAC**, o **MSV** pode ser utilizado isoladamente.

- **Quanto ao *SOM* ou Seletor da Ordem do Modelo**

Como foi tratado no Capítulo II, o **SOM** foi concebido para constituir um critério híbrido a partir do **MAC** e do **MSV** aliando, é claro, as potencialidades de ambos. Como já foi dito anteriormente, o **MSV** é a “janela” ou filtro do **MAC**, onde o **SOM** contempla os modos efetivos de forma mais visível e em ordem decrescente, o que facilita a análise e determinação da ordem mínima do modelo. Esta tendência é facilmente observada em todas as tabelas deste capítulo, onde realmente existe um vínculo entre os **MAC** e **MSV** mais altos com as freqüências naturais reais do sistema, como mostrado nas áreas sombreadas, o que, intuitivamente, sugeriu a concepção do **SOM**.

- **Quanto à estimação da ordem do modelo (*n*)**

Como na prática o sistema a ser identificado é, em princípio, desconhecido, recomenda-se identificá-lo com uma ordem relativamente alta. Esta escolha demanda uma boa intuição de Engenharia, sobretudo em sistemas complexos. Após a identificação lança-se mão dos critérios supracitados para determinação da ordem mínima do modelo, que será, então, utilizada na sua redução.

- **Quanto à escolha dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$**

Como já foi discutido no Capítulo II, a única exigência a ser respeitada é a seguinte:  $\alpha \geq n$  e  $\beta \geq n$ . Portanto, pelo mesmo motivo do item anterior, deve-se ter bom senso atribuindo a eles altos valores relativos.

- **Quanto à Estimação do Ganho DC**

Todas as identificações realizadas denotam, através da comparação entre as FRF's simulada e identificada, que o algoritmo revela uma dificuldade em estimar o ganho DC do sistema.

#### **4.4 Considerações Parciais**

Para que esta dissertação explore todos os critérios de distinção dos modos reais dos modos de ruído apresentados será avaliado experimentalmente, no próximo capítulo, um sistema bem mais complexo, onde será aplicado, para se determinar a ordem mínima do modelo, o critério da análise dos gramianos de controlabilidade e de observabilidade discutido na seção 2.3.3.4.

## **Capítulo V**

### **AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DO ERA/OKID**

#### **5.1 Introdução**

Na grande maioria das publicações o ERA/OKID é aplicado em sistemas extremamente complexos, como aqueles próprios da engenharia aeroespacial, como tratados por: Juang *et al.* (1993), Juang (1994), Chen e Valasek (1999) e Hur e Valasek (2003), por exemplo.

No entanto, vislumbrou-se, nesta dissertação, a aplicação do ERA/OKID para identificar sistemas acústicos, que apresentam atrasos, pequenas não-linearidades, e que cuja determinação analítica dos modelos é extremamente complexa (Delfino *et al.*, 2004).

Para atingir este objetivo, além da implementação dos algoritmos em MATLAB<sup>®</sup>, foi construída, no Laboratório de Sistemas Mecânicos da FEMEC, uma bancada experimental composta por um duto acústico – sistema a ser identificado –, por 2 microfones (sensores) 2 alto-falantes (atuadores).

O sucesso da identificação deste sistema permitirá a sua simulação numérica, bem como o projeto de controladores que demandam o conhecimento do sistema em espaço de estados.

#### **5.2 Bancada Experimental**

A descrição da bancada experimental é feita em dois tópicos. O primeiro descreve o duto acústico e o segundo a montagem dos equipamentos envolvidos.

##### **5.2.1 O Duto Acústico**

O duto acústico é ilustrado na Fig. (5.1), onde constam as dimensões utilizadas e as posições dos sensores e atuadores, bem como as convenções utilizadas relativas às entradas e saídas. O duto é feito de PVC de 150 mm de diâmetro interno.

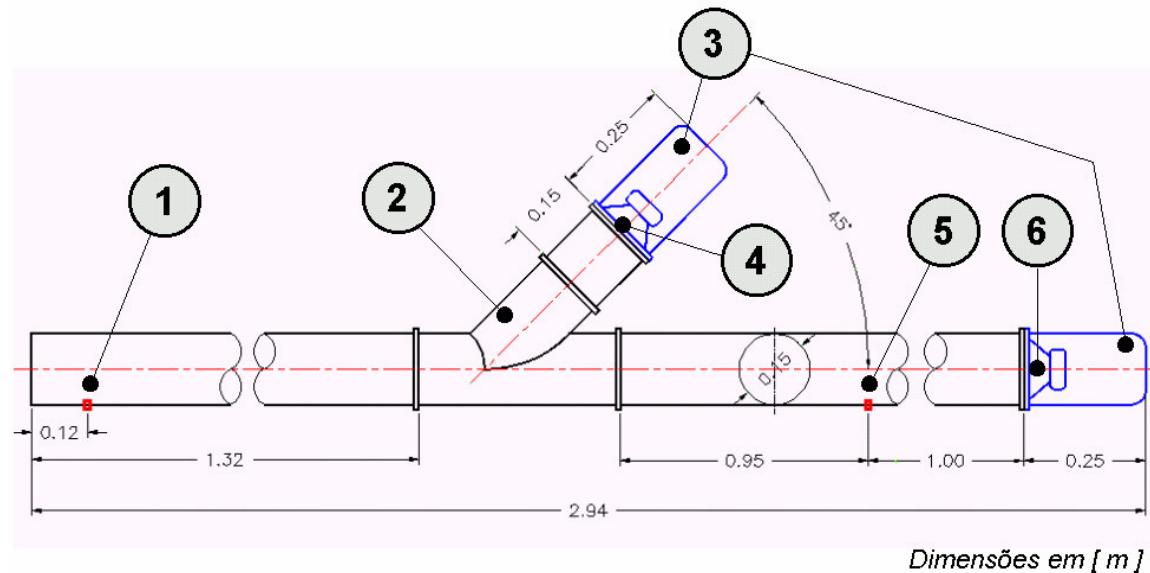


Figura 5.1 – Desenho Descritivo do Duto Acústico

A Tabela (5.1) discrimina os itens que compõem o sistema, segundo a Fig. (5.1).

Tabela 5.1 – Componentes do Sistema – Duto Acústico

Item	Descrição
1	Microfone de Erro – SAÍDA 2
2	Junção em Y a 45º – PVC Ø150 mm
3	Tubo Selado – PVC Ø150 mm
4	Alto-Falante de Controle – ENTRADA 2
5	Microfone de Referência – SAÍDA 1
6	Alto-Falante de Excitação – ENTRADA 1

### 5.2.2 O Equipamento e o Esquema de Montagem do Experimento

A Figura (5.2) ilustra bancada utilizada enquanto que a Fig. (5.3) ilustra claramente o esquema utilizado no experimento.

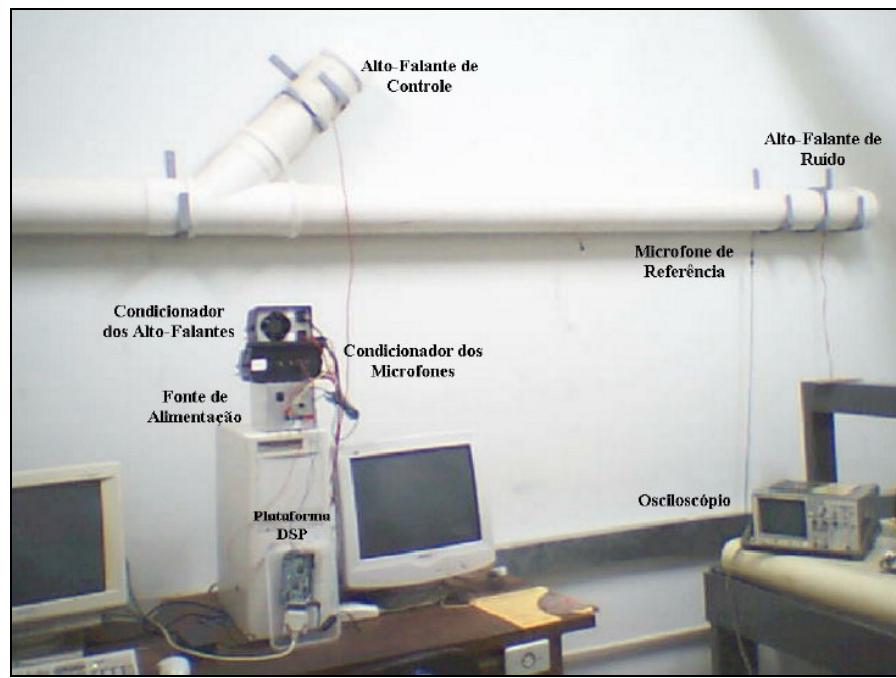


Figura 5.2 – Foto da Bancada Experimental do Duto Acústico

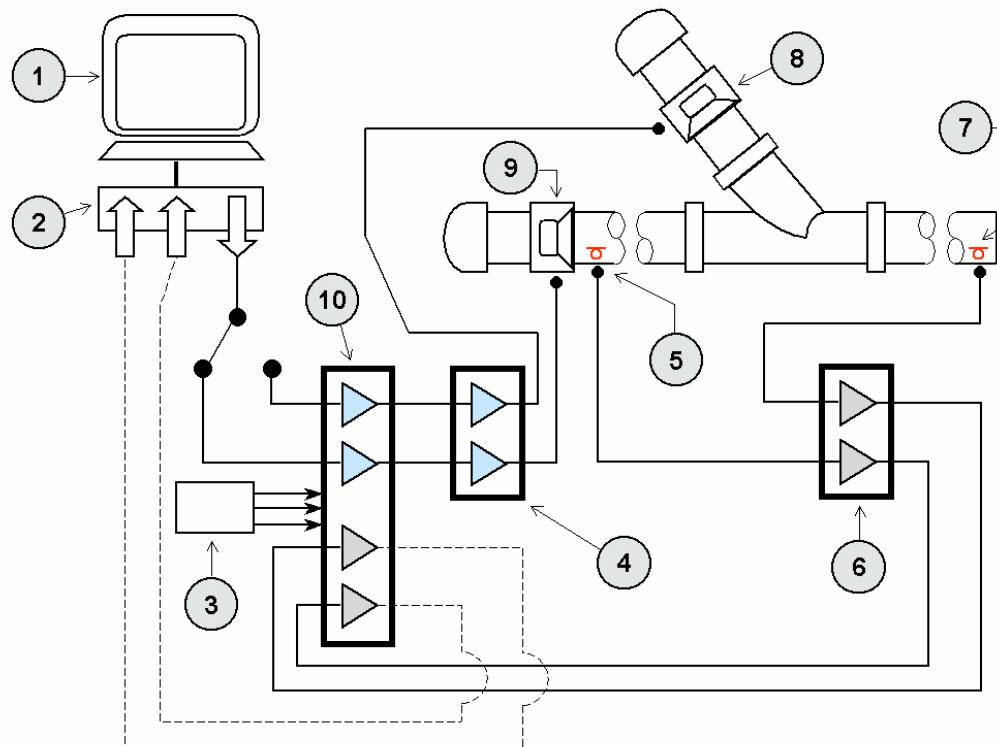


Figura 5.3 – Esquema da Bancada Experimental

Todos os elementos utilizados no experimento estão discriminados na Tab. (5.3).

Tabela 5.2 – Componentes da Bancada Experimental

<b>Item</b>	<b>Descrição</b>	<b>Características</b>
1	Microcomputador	Pentium 4 – 2GHz – 512 MB
2	Placa de Aquisição de Dados e Controle	dSpace®
3	Fonte de Alimentação	$\pm 12$ V
4	Amplificador dos Alto-Falantes	
5	Microfone de Referência	Eletreto
6	Amplificador dos Microfones	
7	Microfone de Erro	Eletreto
8	Alto-Falante de Controle	Bravox 6” – BA6SS 140 W RMS
9	Alto-Falante de Excitação	Bravox 6” – BA6SS 140 W RMS
10	Filtro Passa-Baixa 500 Hz (incorporado em 4 e 5)	

### 5.3 O Ensaio

Como mostrado na Fig. (5.1) e na Tab. (5.1) o sistema em questão, o duto acústico, é composto por 2 entradas e 2 saídas. Entretanto, o sistema foi ensaiado na modalidade SIMO por duas vezes, ou seja, ensaiou-se a Entrada 1 adquirindo-se as Saídas 1 e 2 e, posteriormente, procedendo igualmente com a Entrada 2.

Todas as características do sinal de entrada utilizado no experimento estão descritas na Tab. (5.3):

Tabela 5.3 – Características do Sinal de Entrada

<b>Tipo do Sinal de Entrada</b>	Ruído Branco
<b>Amplitude do Sinal de Entrada (V)</b>	$\pm 0,5$ (máxima)
<b>Freqüência de Amostragem (Hz)</b>	5000
<b>Tempo de Amostragem (ms)</b>	0,2
<b>Duração do Ensaio (s)</b>	5
<b>Número de Pontos</b>	25000

Neste trabalho, considerou-se um ensaio como sendo a aquisição dos sinais relativos aos dois sistemas SIMO inerentes ao duto acústico em questão, como esquematizado pela Fig. (5.3).

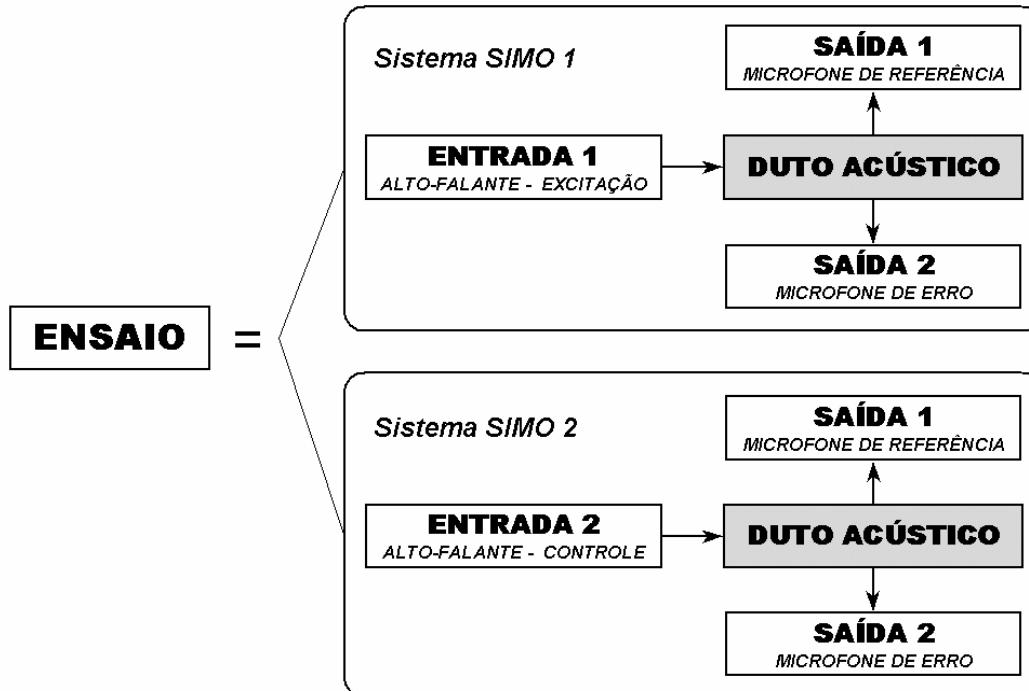


Figura 5.4 – Esquema da Convenção de um Ensaio

Neste contexto, foram realizados 10 ensaios, onde, para cada um deles, foi gerado um ruído branco diferente como sinal de entrada. Foram utilizados, do vetor de dados, apenas 1000 pontos, o que equivale a 0,2 segundo de aquisição. A utilização de um número maior de pontos pode causar problemas no cálculo da pseudo-inversa da matriz  $\bar{V}$  (ver Eq. (3.15)).

### 5.3.1 Sinais Injetados e Adquiridos

As figuras seguintes, Fig. (5.5) e Fig. (5.6), mostram os sinais relativos a um determinado ensaio.

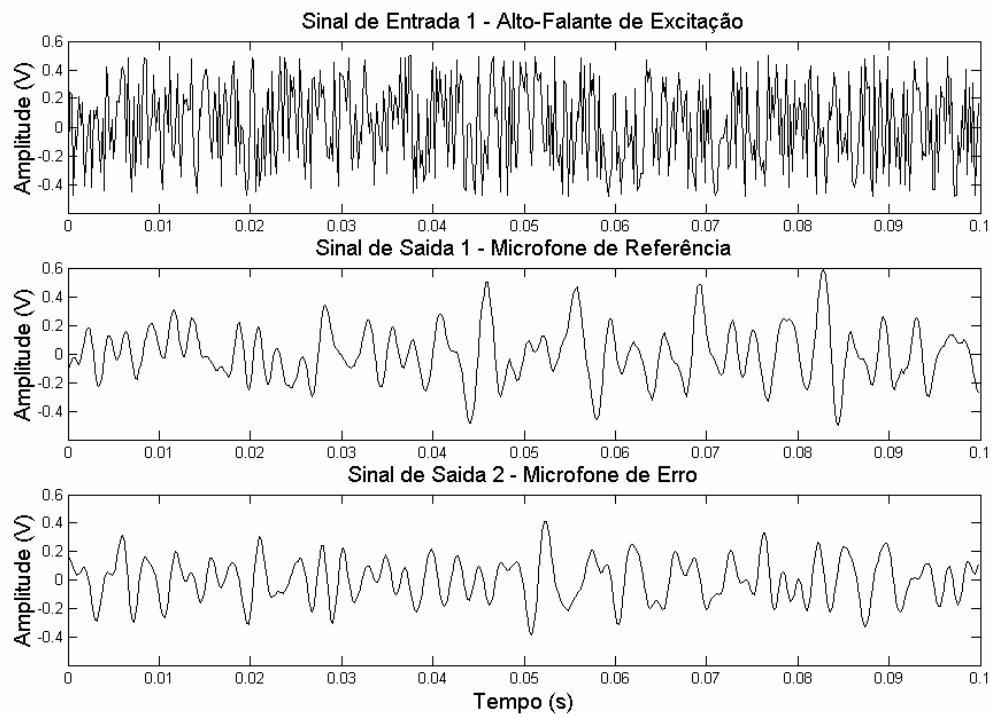


Figura 5.5 – Sinais de Entrada 1, Saída 1 e Saída 2

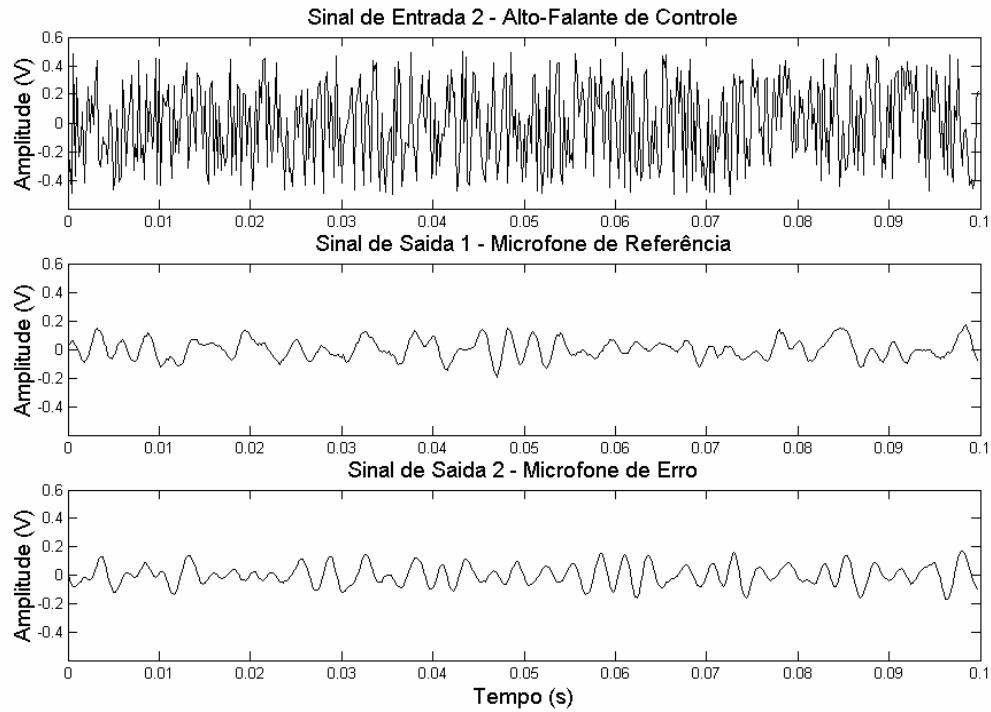


Figura 5.6 – Sinais de Entrada 2, Saída 1 e Saída 2

A partir dos sinais de todos os ensaios calculou-se a FRF média para que ela servisse de referência para a identificação. Para tanto, foi aplicado, a todos os sinais, um janelamento do tipo Hanning antes do cálculo das Transformadas de Fourier, ou das “fft’s”.

#### 5.4 Estratégia para a Identificação

A estratégia empregada foi a de calcular, utilizando o OKID, os parâmetros de Markov do sistema relativos a cada ensaio para, no final, calcular a média dos parâmetros de Markov do sistema. Este recurso pode ser utilizado pois estes parâmetros nada mais são que a resposta impulsiva do sistema, como discutido no Capítulo II. Uma vez executado este passo, “alimenta-se” o ERA, que fará a identificação propriamente dita do “sistema médio”. A Figura (5.6) ilustra mais claramente a referida estratégia.

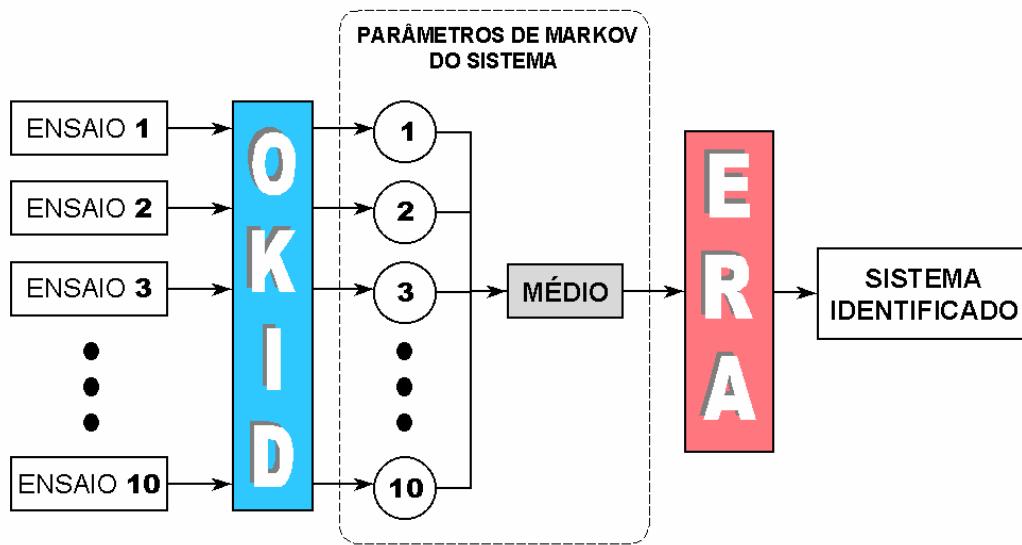


Figura 5.7 – Esquema da estratégia para identificação do sistema

##### 5.4.1 Escolha dos parâmetros utilizados no ERA/OKID

A escolha dos parâmetros utilizados nos algoritmos ERA e OKID foi feita tendo como referência a FRF média dos 10 ensaios realizados. Na verdade foi feita uma busca iterativa para determinação dos parâmetros  $p$  e  $n$ , como no fluxograma da Fig. (5.8), onde  $\alpha$  e  $\beta$  compõem a dimensão da matriz de Hankel  $H$ .

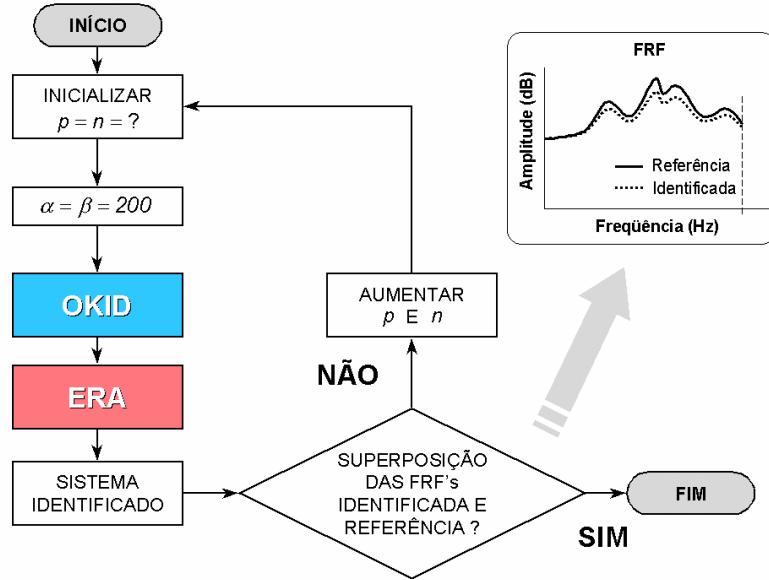


Figura 5.8 – Fluxograma da Busca Iterativa dos parâmetros  $p$  e  $n$

O resultado desta otimização é o seguinte:  $p = n = 130$ . Entretanto, para efeito de comparação, decidiu-se identificar o sistema utilizando, também, os seguintes valores:  $p = n = 70$ . Perceba o leitor que não há problema algum em  $p$  e  $n$  serem iguais, já que a relação a ser respeitada é a seguinte:  $pm \geq n$ , mesmo para sistemas com múltiplas saídas, que é o caso deste trabalho, onde  $m = 2$  (2 saídas).

## 5.5 Resultados e Discussão

Os resultados a seguir foram obtidos identificando-se o duto acústico a partir de 2 (duas) configurações dos parâmetros inerentes, como na Tab. (5.4):

Tabela 5.4 – Configuração de Parâmetros utilizados nas Identificações

Parâmetros		
<b>1º Caso</b>	$p = n = 70$	$\alpha = \beta = 200$
<b>2º Caso</b>	$p = n = 130$	$\alpha = \beta = 200$

Como o filtro dos amplificadores, tanto dos alto-falantes quanto dos microfones, têm banda passante de 0 a 500 Hz, optou-se por utilizar esta mesma faixa para plotar os gráficos das FRF's dos sistemas medido e identificado.

### 5.5.1 Resultados do 1º Caso

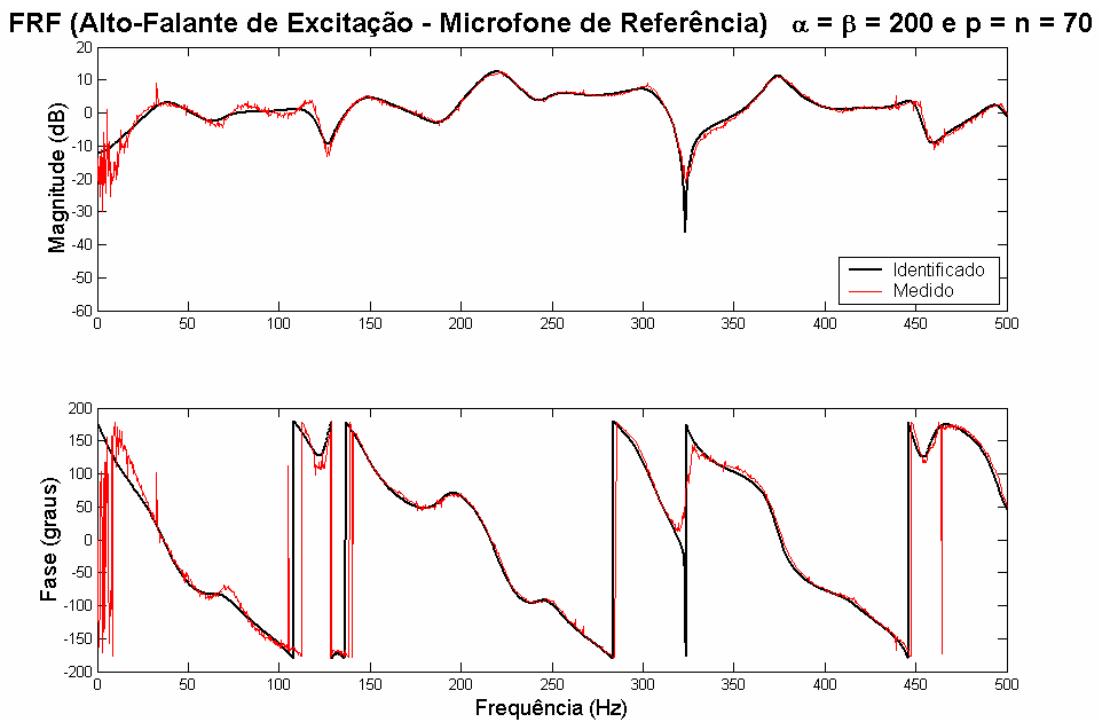


Figura 5.9 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Referência (Saída 1) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 70$

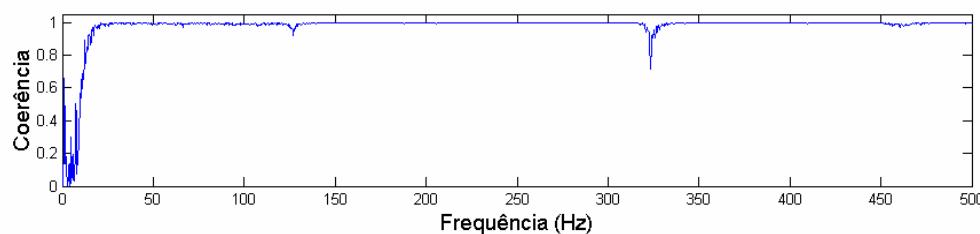


Figura 5.10 – Coerência entre Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Referência (Saída 1)

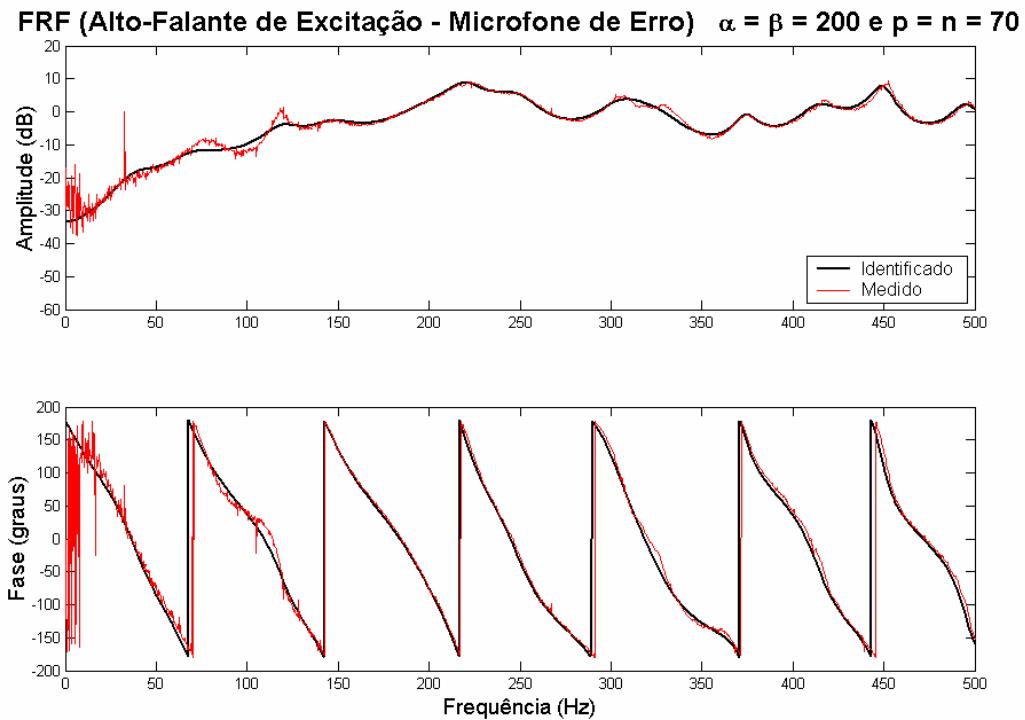


Figura 5.11 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Erro (Saída 2) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 70$

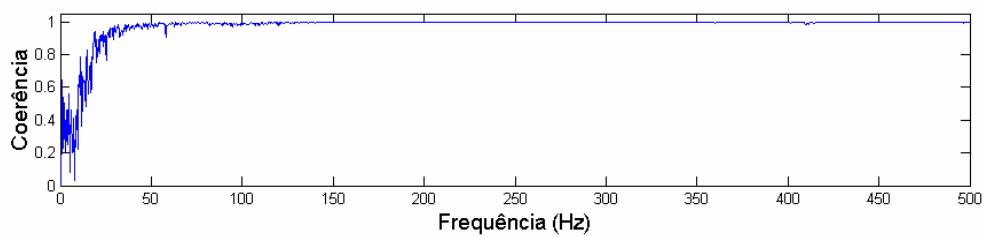


Figura 5.12 – Coerência entre Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Erro (Saída 2)

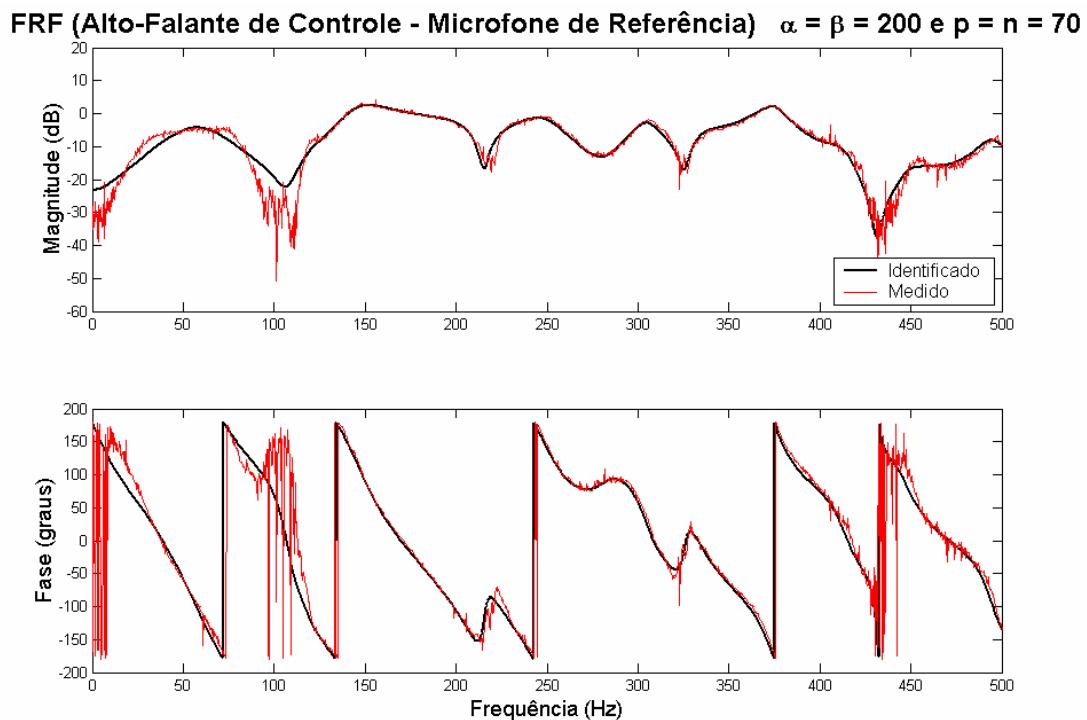


Figura 5.13 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Referência (Saída 1) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 70$

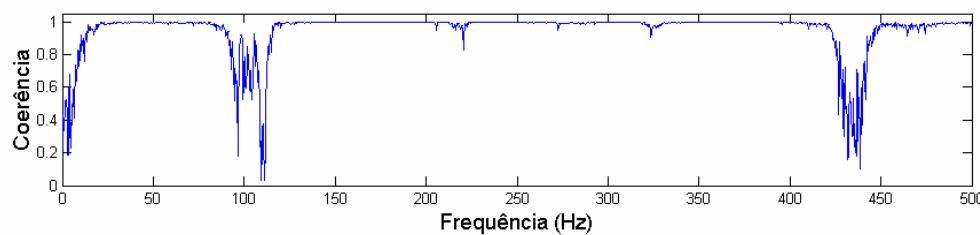


Figura 5.14 – Coerência entre Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Referência (Saída 1)

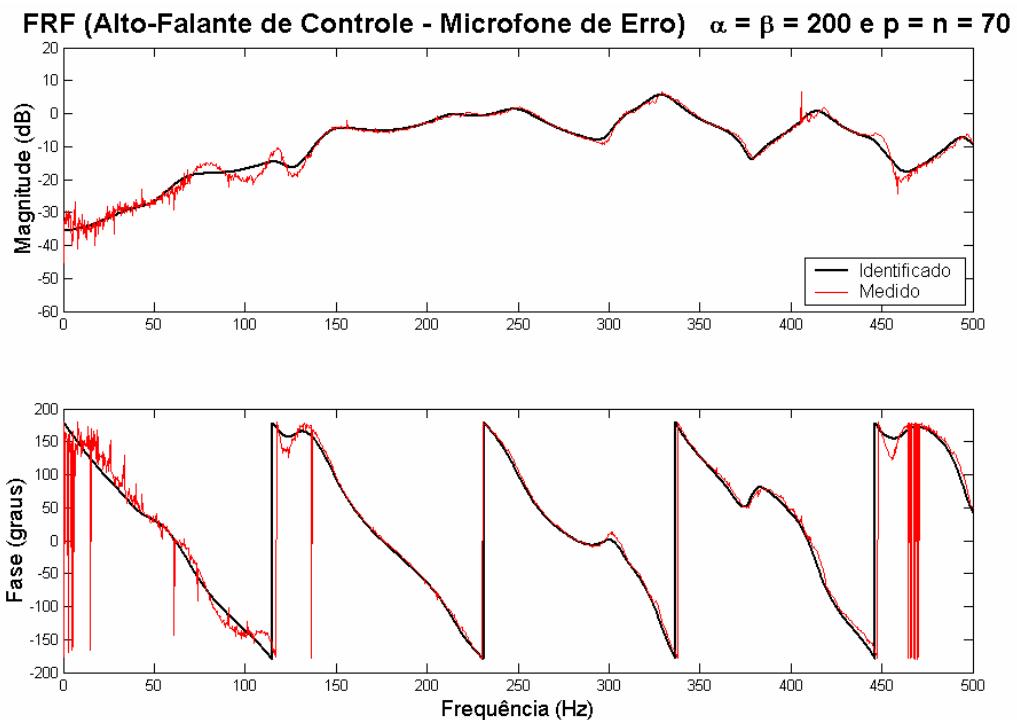


Figura 5.15 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Erro (Saída 2) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 70$

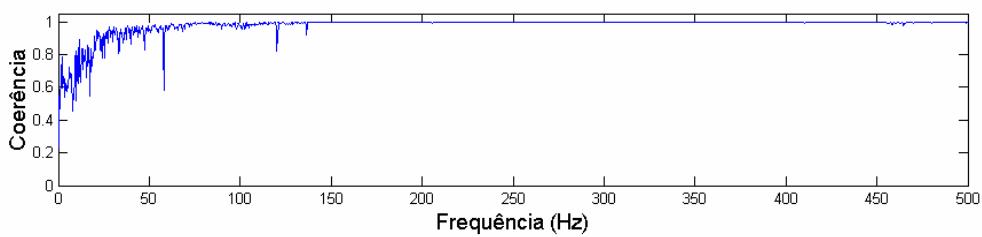


Figura 5.16 – Coerência entre Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Erro (Saída 2)

### 5.5.2 Resultados do 2º Caso

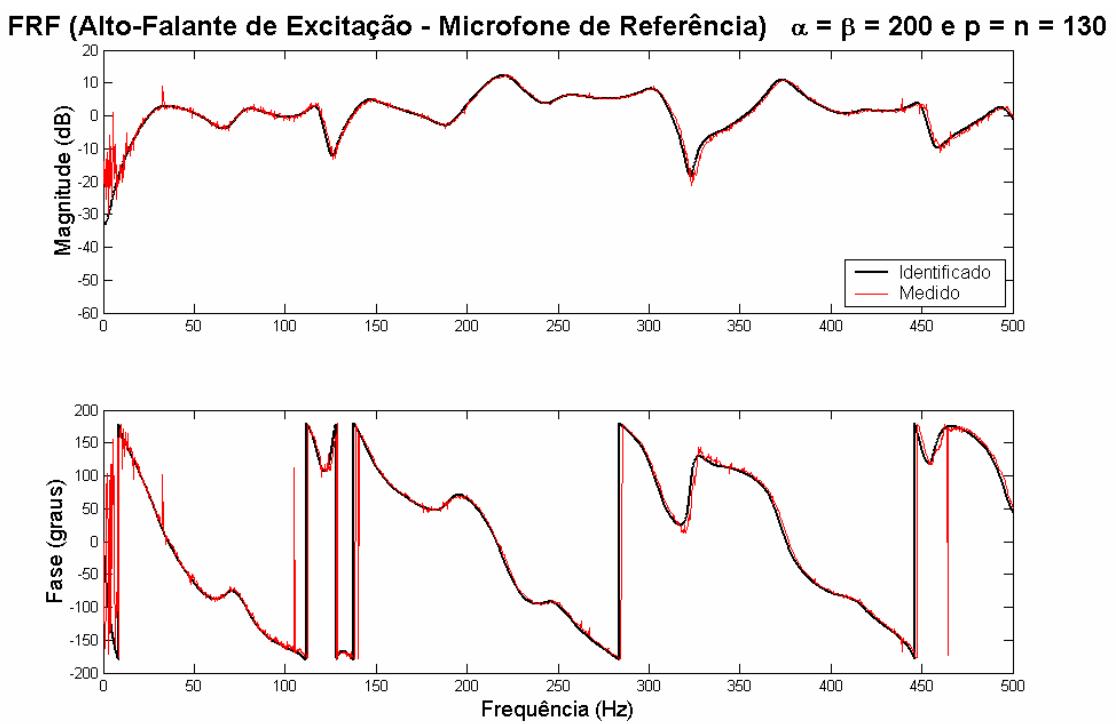


Figura 5.17 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Referência (Saída 1) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 130$

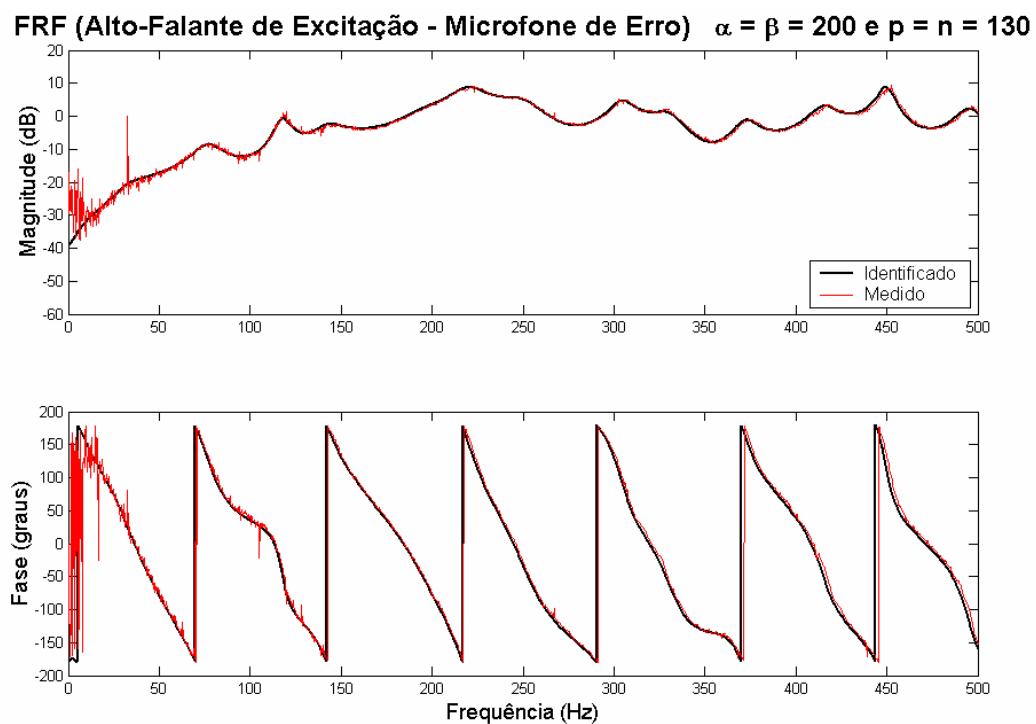


Figura 5.18 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Excitação (Entrada 1) e o Microfone de Erro (Saída 2) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 130$

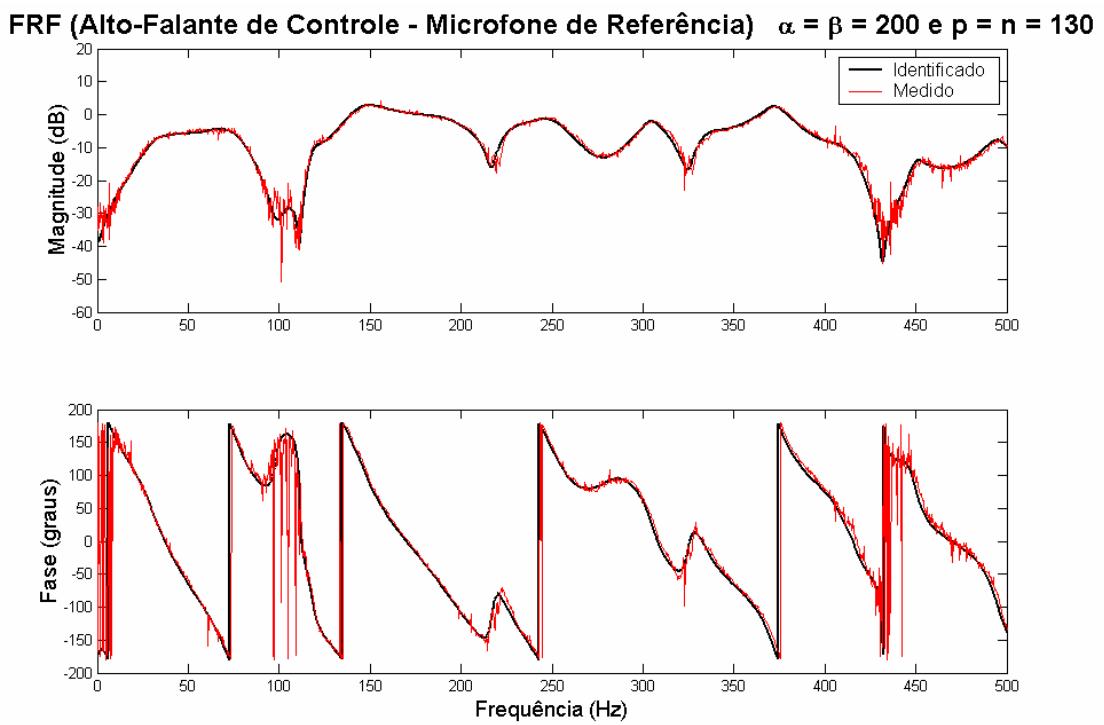


Figura 5.19 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Referência (Saída 1) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 130$

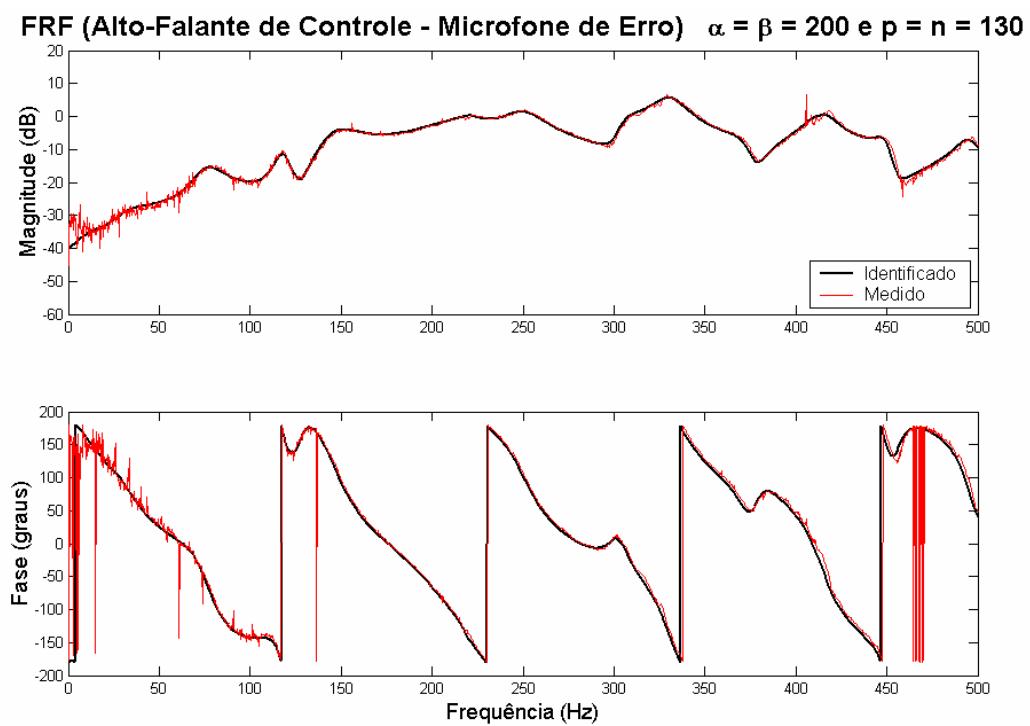


Figura 5.20 – FRF's Identificada e Medida entre o Alto-Falante de Controle (Entrada 2) e o Microfone de Erro (Saída 2) –  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 130$

### 5.5.3 Simulação do Duto Acústico Identificado

#### 5.5.3.1 Simulando com uma entrada do tipo “ruído branco”

Nesta seção foi simulado, no domínio do tempo, o duto acústico identificado no 2º Caso, devido a superposição das FRF's medidas e identificada, o que garante maior fidedignidade. O sinal de entrada para a simulação foi o mesmo utilizado no ensaio experimental. A Figura (5.20) e a Fig. (5.21) ilustram as comparações entre os sinais de saídas medidos e simulados a partir do duto identificado, onde a primeira figura é relativa à Entrada 1 e a segunda à Entrada 2.

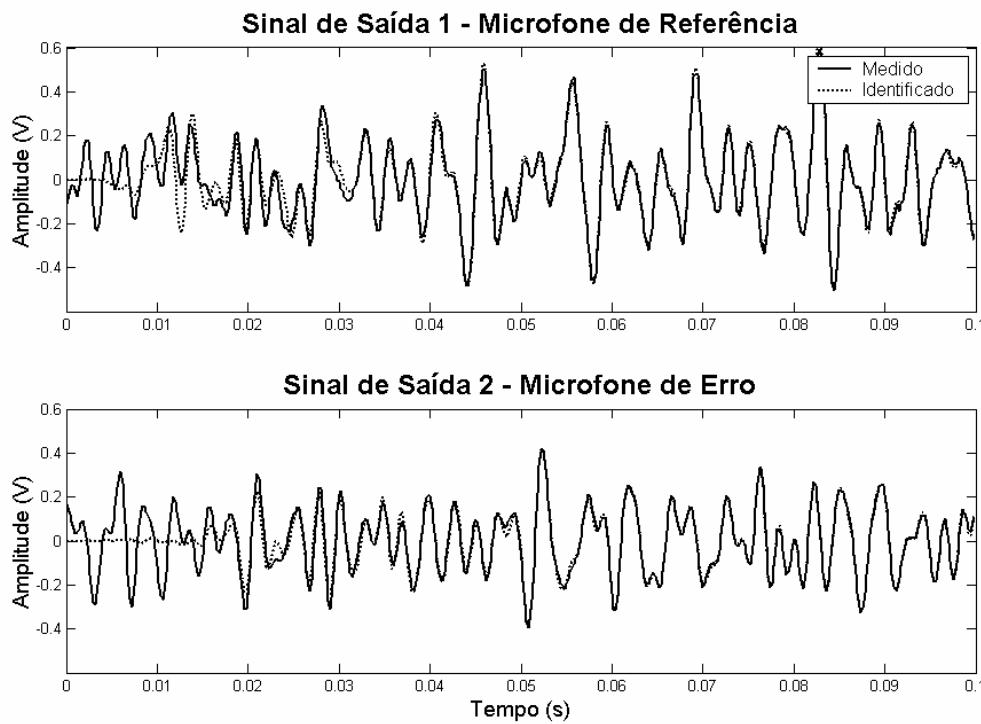


Figura 5.21 – Comparação entre os sinais de saídas 1 e 2 medidos e simulados devido à entrada 1 (Alto-Falante de Excitação)

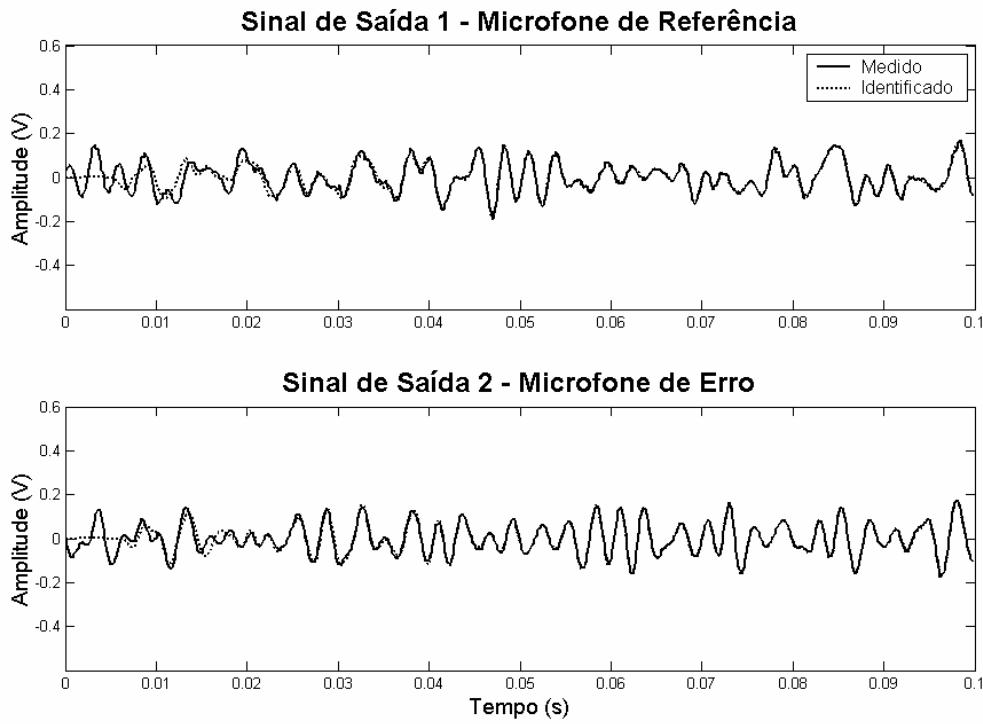


Figura 5.22 – Comparação entre os sinais de saídas 1 e 2 medidos e simulados devido à entrada 2 (Alto-Falante de Controle)

Os resultados das comparações feitas nas Fig. (5.20) e Fig. (5.21) revela que a identificação do duto acústico foi eficiente. Entretanto, o leitor pode perceber que os sinais de saídas simulados no sistema identificados levaram cerca de 0,02 segundo para superpor os sinais medidos experimentalmente. No entanto, vale lembrar que o resultado da identificação é proveniente de 10 ensaios, ou seja, é um “sistema médio” e que os sinais de saídas utilizados como referência é correspondente a um determinado ensaio, que foi escolhido aleatoriamente, uma vez que não é possível fazer média dos sinais decorrentes da excitação por ruído branco. Enfim, mesmo diante dessa realidade o sistema identificado é representativo do sistema real.

### 5.5.3.2 Simulando com uma entrada do tipo impulsiva

Esta seção tem o objetivo de verificar se o ERA/OKID tem potencial para captar atrasos inerentes a sistema acústicos, analisando as respostas impulsivas.

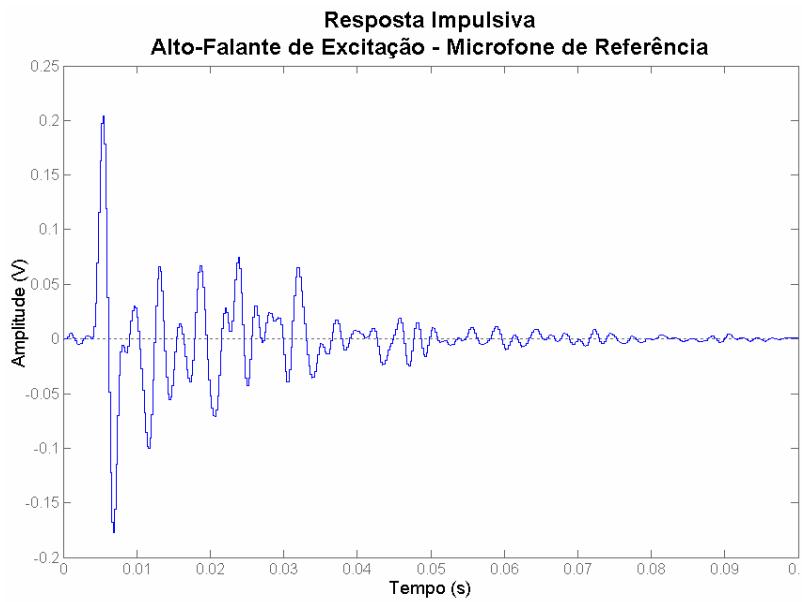


Figura 5.23 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Referência)

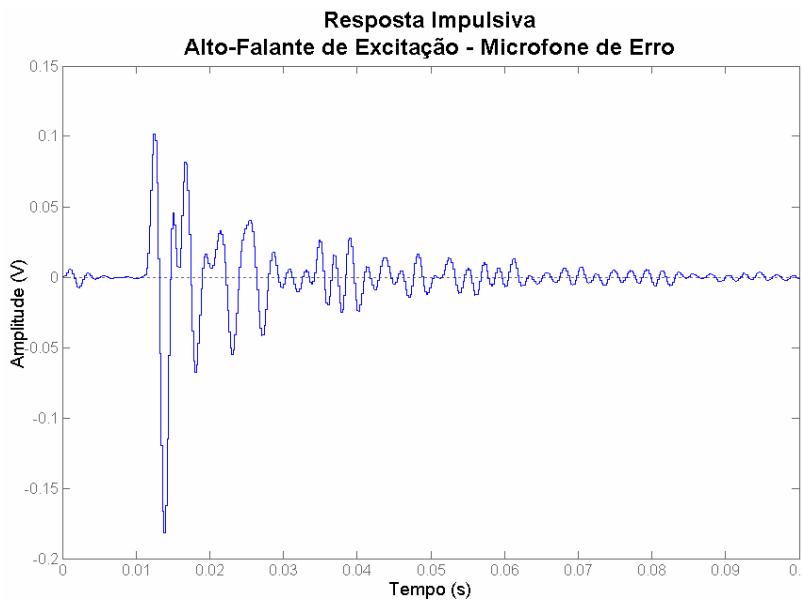


Figura 5.24 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Erro)

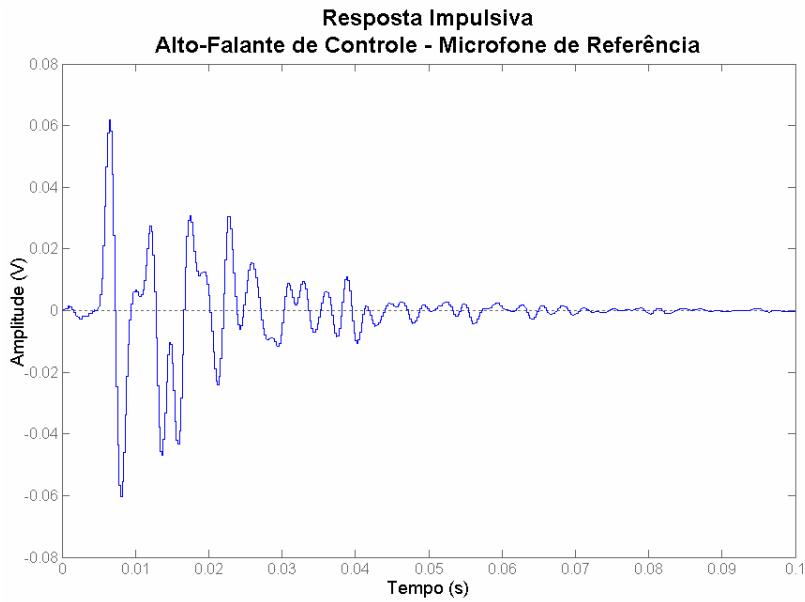


Figura 5.25 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Controle – Microfone de Referência)

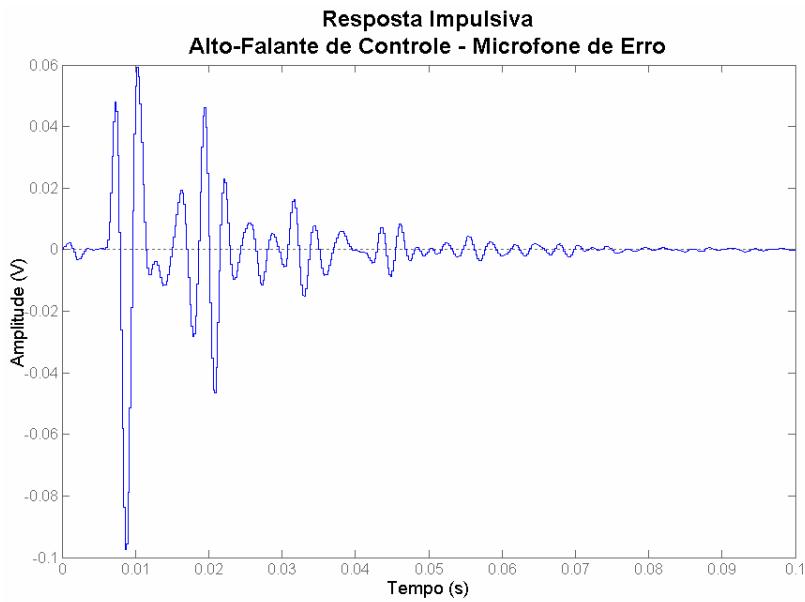


Figura 5.26 – Resposta Impulsiva (Alto-Falante de Controle – Microfone de Erro)

Todas as figuras mostradas nesta seção revelaram que o ERA/OKID foi eficiente bastante ao ponto de explicitar, nas respostas impulsivas, os atrasos entre a injeção do sinal pelos alto-falantes e a captação pelos microfones.

#### 5.5.4 Avaliação dos Critérios para Redução Modal

Nesta seção foram utilizados dois critérios para determinação da ordem mínima do modelo, ou seja, aqueles que distinguem os modos efetivos dos modos relativos a ruídos, a saber: o **SOM** e a análise dos gramianos de controlabilidade e observabilidade, que equivale, conceitualmente e numericamente, a análise da diagonal da matriz  $\Sigma$  apresentada na Eq. (2.32), o que foi realmente feito. O emprego destes dois critérios resultou nas Fig. (5.26) e Fig. (5.27), relativos, respectivamente, ao 1º e ao 2º caso identificados.

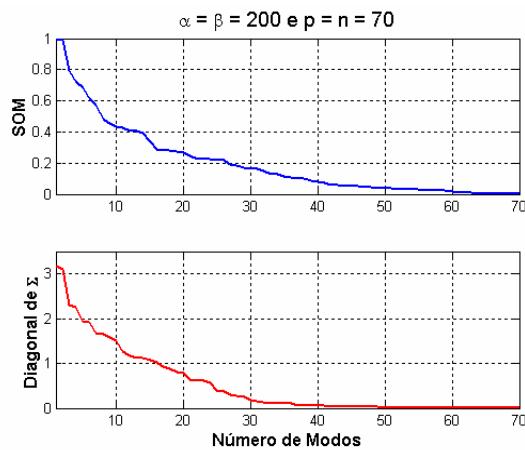


Figura 5.27 – SOM e Diagonal de  $\Sigma$  versus o Número de Modos  
 $(\alpha = \beta = 200 \text{ e } p = n = 70)$

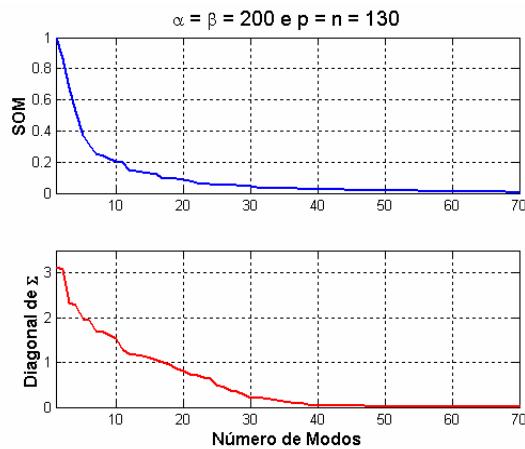


Figura 5.28 – SOM e Diagonal de  $\Sigma$  versus o Número de Modos  
 $(\alpha = \beta = 200 \text{ e } p = n = 130)$

Analizando-se ambas as figuras observa-se que, para o caso do sistema estudado, que o **SOM** apresenta um decaimento mais “rápido” quando a ordem estimada para o sistema identificado aumenta. No caso da diagonal da matriz  $\Sigma$  não se observou mudança devido ao aumento da ordem. No entanto, percebe-se que, para os dois casos, a diagonal de  $\Sigma$  converge, ou estabiliza, bem antes do **SOM**, o que sugere o descarte deste último para fins de redução modal, apesar dele também estabilizar quase no mesmo ponto para o caso em que  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 130$ . Logo, utilizando-se o critério eleito, determina-se a ordem mínima pela análise visual da Fig. (5.27), onde 40 é o valor encontrado para esta. Os valores acima deste corresponde a modos não-observáveis e não-controláveis.

O que se conclui a partir das observações acima e da teoria explanada na seção 2.3.2 é que a análise da diagonal de  $\Sigma$  revelou ser um critério mais robusto e econômico que o **SOM**, já que ele não depende do sistema identificado em coordenadas modais para seu cálculo e nem que seja ordenado decrescentemente, ele depende apenas de  $\Sigma$ , que é tão somente o resultado da decomposição em valores singulares da matriz de Hankel  $H$ .

### 5.5.5 Redução Modal do Sistema Identificado

Uma vez determinada a ordem mínima do sistema, ou seja,  $n_{red} = 40$ , procede-se a redução modal conforme explicado na seção 2.3.3.4. O resultado desta redução pode ser observado nas Fig. (5.28), Fig. (5.29), Fig. (5.30) e Fig. (5.31), onde são comparadas as FRF's dos sistemas real, identificado e identificado reduzido. O sistema reduzido foi o identificado no 2º Caso (seção 5.5.2), uma vez que ele se revelou mais representativo pelo fato das FRF's medida e identificada estarem superpostas. Vale dizer que, escolheu-se uma escala de freqüência mais ampla, 0 a 1000 Hz, para que o leitor pudesse visualizar melhor o efeito da redução.

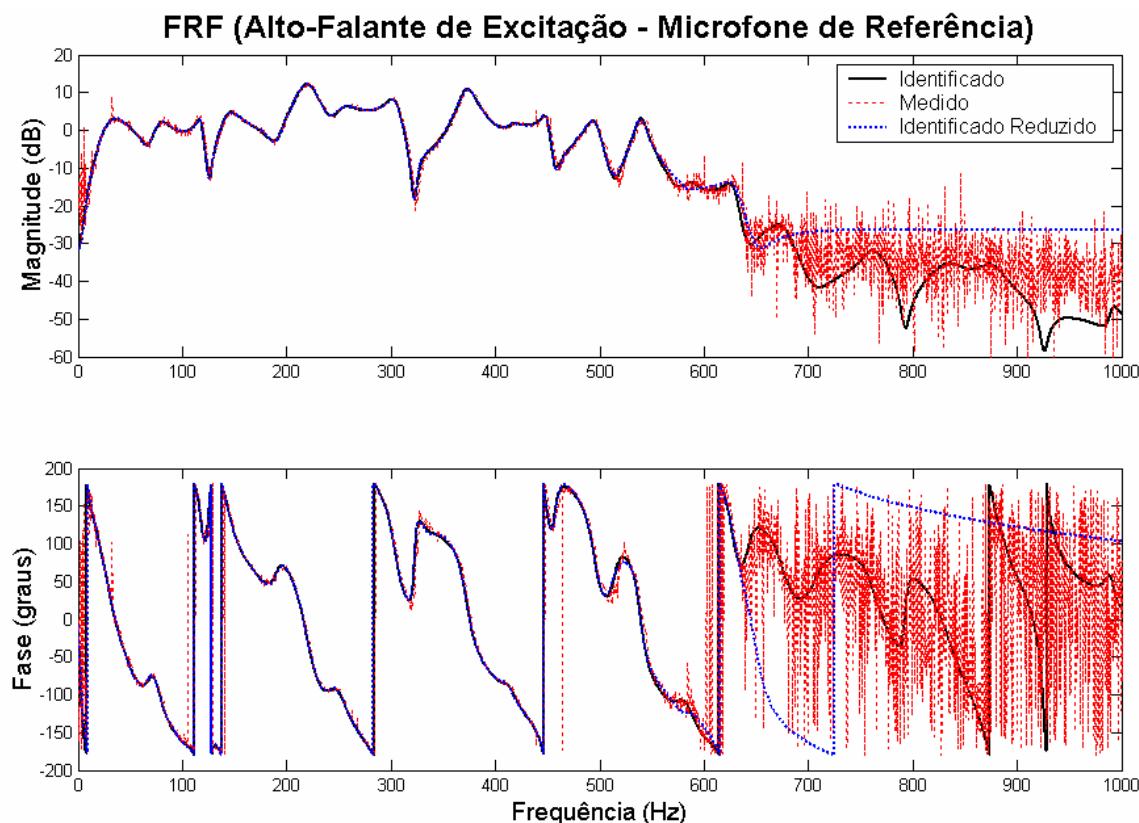


Figura 5.29 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Referência)

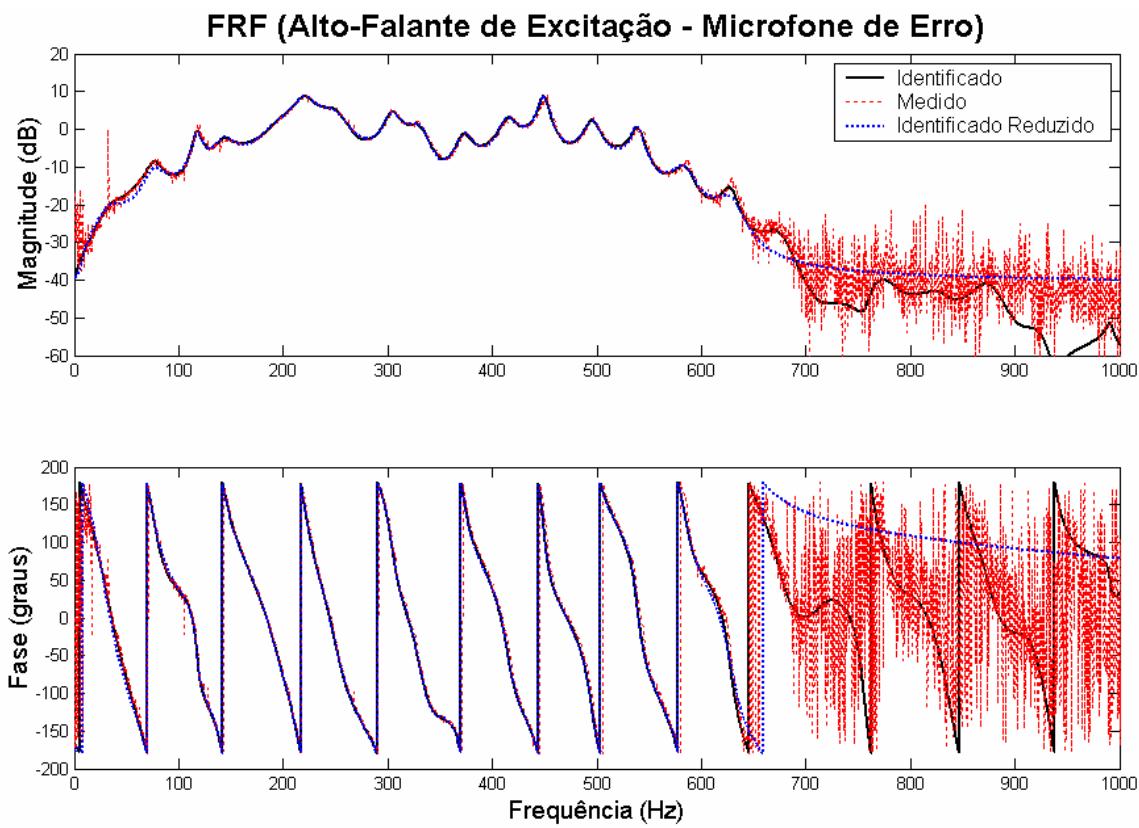


Figura 5.30 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Excitação – Microfone de Erro)

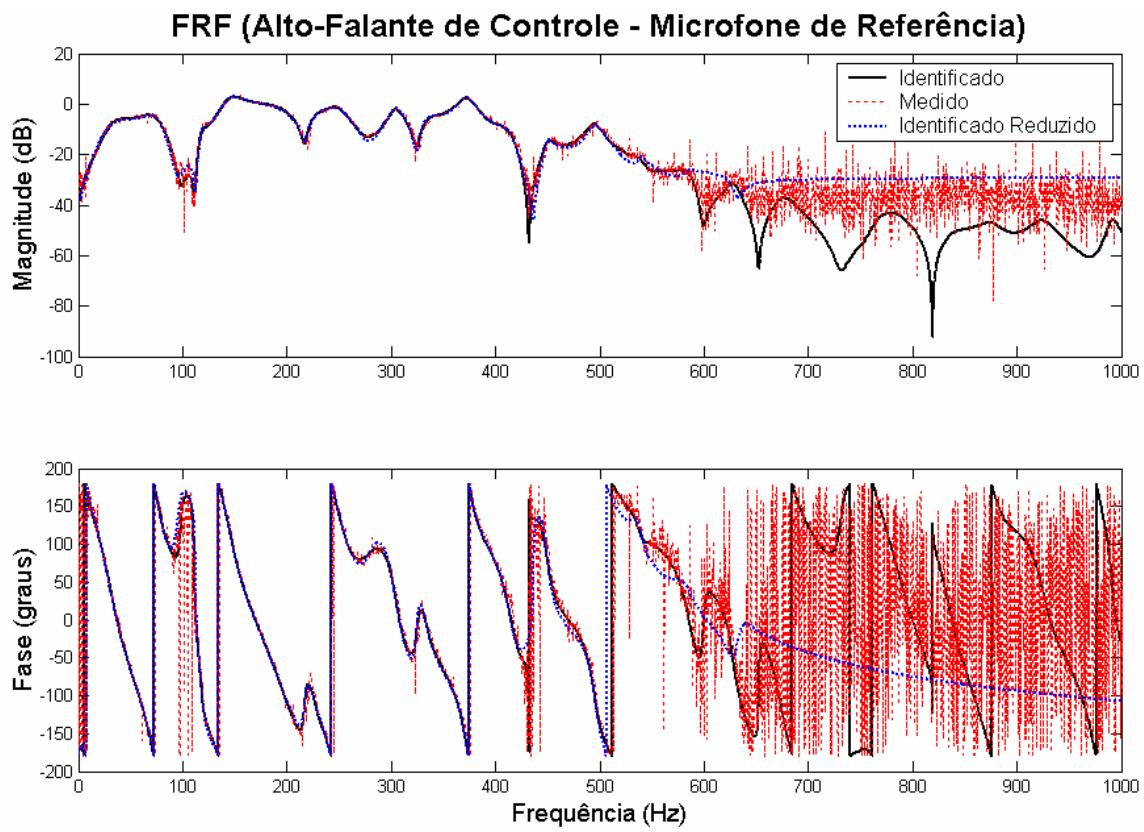


Figura 5.31 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Controle – Microfone de Referência)

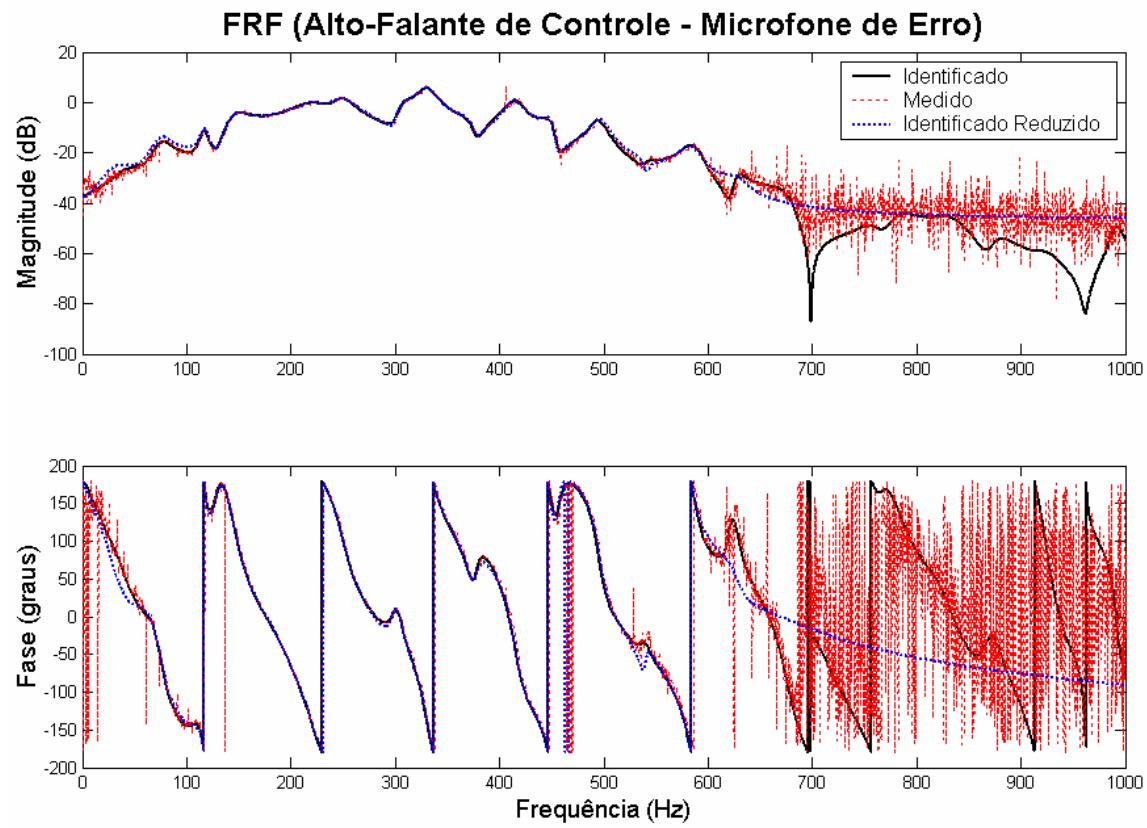


Figura 5.32 – Comparação das FRF's dos sistemas medido, identificado e identificado reduzido (Alto-Falante de Controle – Microfone de Erro)

### 5.5.6 Conclusões Parciais

Concluiu-se que, para o caso do duto acústico, era impossível validá-lo sem que estivessem disponíveis as FRF's correspondentes aos dados medidos, elas constituíram, desta forma, a referência mais confiável. Vale lembrar que a escolha do número de parâmetros de Markov do observador,  $p$ , e da ordem,  $n$ , que resultou na melhor identificação, só foi possível através da “otimização manual” explicada na seção 5.4.1, onde a condição de parada era justamente a superposição das FRF's identificada sobre as medidas.

Observou-se que foi possível, ainda, reduzir o sistema identificado empregando os critérios discutidos na seção 2.3.3, onde o sistema passou da ordem 130 para ordem 40. No entanto, se o sistema fosse identificado, inicialmente, com a ordem  $n = 40$  não haveria superposição das FRF's, tendência esta que é mostrada nas Fig. (5.9), Fig. (5.10), Fig. (5.11) e Fig. (5.12), onde a identificação utilizou os seguintes valores:  $\alpha = \beta = 200$  e  $p = n = 70$ . Sob um prisma mais prático, é preferível identificar um sistema com uma ordem estimada alta, já que cabe o recurso da redução.

Outra informação interessante, que pode ser abstraída das Fig. (5.29), Fig. (5.30), Fig. (5.31) e Fig. (5.32), é o fato das FRF's, tanto o sistema identificado completo quanto o reduzido, superporem à medida até cerca de 600 Hz. Além disso, observando-se desde a Fig. (29) até a Fig. (32) nota-se a dificuldade em se identificar o ganho DC do sistema, como já mencionado no Capítulo IV.

Em suma, toda essa argumentação justifica o fato do processo de identificação de sistemas demandar um perfil intuitivo marcante por parte do pesquisador e de ser encarado, também, como uma “arte”, como preconizado por Santo (2001) e Deistler (2004), visto que, neste trabalho, viveu-se um dilema entre a disponibilidade de eficientes algoritmos de identificação e a ausência de uma metodologia rígida ou automática que permitisse a escolha dos parâmetros de inicialização destes.

## Capítulo VI

### CONCLUSÕES

Estudou-se neste trabalho o método ERA de identificação de sistemas dinâmicos, notadamente as suas duas variações principais: o ERA puro (ou original) e o ERA/OKID. A formulação matemática destas duas abordagens foi vista em detalhes, assim como algumas foram realizadas algumas avaliações numéricas e experimentais. Ao longo do desenvolvimento do trabalho propôs-se uma nova metodologia de análise (**SOM**) e determinação dos modos efetivos presentes no sistema objeto da identificação. Desenvolveu-se também uma interface computacional amigável e facilitadora para ser utilizada na aplicação dos algoritmos.

Uma das preocupações preliminarmente posta neste trabalho para o estudo do ERA como metodologia de identificação de sistemas dinâmicos foi a investigação da sensibilidade do método aos seus parâmetros de inicialização. Esta análise foi conduzida por meio de ensaios experimentais e numéricos que permitiram concluir que:

- tanto o ERA quanto o ERA/OKID revelaram-se instrumentos valiosos e eficientes na identificação dos sistemas dinâmicos;
- comprovou-se a alta sensibilidade dos algoritmos aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , que compõem a dimensão da matriz de Hankel, sobretudo nos casos em que há ruído no sinal. Quanto maior  $\alpha$  e  $\beta$  melhor foi a identificação e maior o custo computacional;
- comprovou-se que é tanto mais difícil a identificação de um sistema quanto maior for o nível de ruído presente no sinal;
- o ERA/OKID demandou maior esforço computacional que o ERA no processo de identificação;
- o ERA/OKID revelou-se, para os casos estudados, mais robusto que o ERA, pois não depende da entrada impulsiva – mais difícil de ser gerada – como o algoritmo ERA;
- o ERA/OKID revelou-se bastante eficiente e robusto para a identificação do duto acústico, que é um sistema bastante complexo com níveis consideráveis de atraso e forte amortecimento;

- a escolha do número ( $p$ ) de parâmetros de Markov do Observador e da ordem ( $n$ ) estimada para o sistema identificado revelou ser, para os casos estudados, uma que requer alguma experiência e intuição do pesquisador;
- para os casos estudados a disponibilidade das FRF's de referência (medidas) foi muito importante para os ajustes dos modelos identificados;
- quanto aos critérios de distinção dos modos efetivos daqueles relativos a ruído a análise dos gramianos de controlabilidade e observabilidade (ou diagonal da matriz  $\Sigma$ ) revelou-se mais robusta e imediata que o **SOM**. Essa assertiva vale para os casos aqui estudados. Em outras situações, devido aos níveis de ruídos presentes principalmente, isto pode não ser verdadeiro. Em linhas gerais, a escolha da ordem efetiva do modelo deve ser feita a partir de uma análise conjunta dos vários critérios discutidos no trabalho, quais sejam: dos gramianos, do **SOM**, do **MSV** e do **MAC**.
- por fim, verificou-se nos ensaios alguma dificuldade nas metodologias em se estimar o ganho DC dos sistemas.

Pode-se dizer que, de uma maneira geral, os objetivos postos para este trabalho, quais sejam:

*“Estudar o algoritmo ERA e sua variação ERA/OKID, procurando identificar a sensibilidade do método aos seus parâmetros de inicialização. Pretende-se avaliar a metodologia numérica e experimentalmente e desenvolver ainda uma interface computacional amigável que facilite a utilização do método em ambiente experimental”.*

foram atingidos restando como desdobramento para futuros trabalhos:

- avaliar a sensibilidade dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , à posição e ao número de sensores e atuadores presentes no sistema;
- automatizar a escolha dos parâmetros  $p$  e  $n$  através de um processo de otimização acoplado ao ERA/OKID, onde, por exemplo, a partir das FRF's reais e identificadas se derivaria um funcional apropriada a ser minimizado.
- estudar e eventualmente propor mecanismos que melhorem a identificação do ganho DC dos sistemas e;

- comparar o ERA com métodos de identificação que utilizam como dados de entrada o comportamento dos sistemas no domínio da freqüência.

Finalmente, evidenciou-se ser indispensável para uma boa identificação o grau de sensibilidade do pesquisador diante do fenômeno investigado. Algo imponderável, portanto e decorrente da sua familiaridade com as bancadas do laboratório e do nível de conhecimento teórico dos fenômenos que cercam o sistema a ser identificado.

## **Capítulo VII**

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

AGBABIAN, M. S., MASRI, S. F., MILLER, R. K., and CAUGHEY, T. K., 1991, "System Identification Approach to Detection of Structural Changes", ASCE Journal of Engineering Mechanics, 117(2), pp. 370-390.

AGUIRRE, L. A., 2004, "Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares aplicadas a Sistemas Reais", Editora UFMG, 2<sup>a</sup> Edição, Belo Horizonte – MG, Brasil.

ALVES, M. T. S. e RIBEIRO, J. F., 2004, "Identificação de Sistemas Mecânicos Lineares usando o ERA (Eigensystem Realization Algorithm)", III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Belém-PA, Brasil.

ALVIN, K. F., 1993, "Second-Order Structural Identification State-Space Base System Realizations", PhD Thesis, University of Colorado, USA.

BERNAL, D. e GUNES B., 1999, "Performance of an Observer State-Space Identification in the Presence of Mild Nonlinearities".

BOX, G. E. P. e JENKINS, G. M., 1970, "Time Series Analysis, Forecasting and Control", Holden-Day, San Francisco.

CHEN, W. and VALASEK, J., 1999, "Observer/Kalman Filter Identification for On-Line System Identification of Aircraft", AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Portland-OR, USA.

Control System Toolbox for use with MATLAB®, Version 5, 2002.

DEISTLER, M., 2004, "System Identification – General Aspects and Structure", Interuniversity Attraction Poles – Phase V – "Dynamical Systems and Control: Computation, Identification and Modelling, Louvain-la-Neuve, Belgium.

DELFINO, L. C., NUÑEZ, I. J. C., CARDOSO, P. M., RIBEIRO, J. F., 2004, "Controle Ativo de Ruídos em Dutos Implementado em Plataforma DSP", 14º POSMEC – Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.

EWINS, D. J., 1984, "Modal Testing: Theory and Practice", Letchworth, Research Studies Press.

HANNAH, E. J., 1969, "The Identification of Vector Mixed Autoregressive-Moving Average Systems", Biometrika, 57, 223-225.

HANNAH, E. J., 1971, "The Identification Problem for Multiple Equation System with Moving Average Errors", Econometrica, 39, 751-766.

HANNAH, E. J., 1976, "The Identification and Parameterization of ARMAX and State Space Forms", Econometrica, 44(4), 713-723.

HO, B. L. e KALMAN, R. E., 1965, "Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Data", 3<sup>rd</sup> Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, pp. 449-459.

HUR, G. B. e VALASEK, J., 2003, "System Identification of Powered Parafoil-Vehicle from Flight Test Data", AIAA.

IBRAHIM, S. R. e MIKULCIK, E. C., 1977, "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response", Shock and Vibration Bulletin, 47(4), pp.183-198.

IBRAHIM, S. R., 1977, "Random Decrement Technique for Modal Identification of Structures", Journal of Spacecraft and Rockets, 14(11), pp.696-700.

JUANG, J. N., 1994, "Applied System Identification", Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

- JUANG, J. N. and PAPPA, R. S., 1985, "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Modal Reduction", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 8, nº 5, pp. 620-627.
- JUANG, J. N., COOPER, J. E., WRIGHT, J. R., 1988, "An Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlations (ERA/DC) for Model Parameter Identification", *Control Theory and Advanced Technology*, 4(1), pp.5-14.
- JUANG, J. N., PHAN, M., HORTA, L. G., LONGMAN, R.W., 1993, "Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(2), pp.320-329.
- KAILATH, T., 1980, "Linear Systems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- KALMAN, R. E., 1960, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *Journal of Basic Engineering*, 82D, 35–45.
- KOLMOGOROV, A. N., 1939, Sur l'interpolation et l'extrapolation des suites stationnaires: *C.R. Acad. Sci.*, 208, 2043-2045.
- KWAKERNAAK, H. and SIVAN, R., 1972, "Linear Optimal Control Systems", John Wiley & Sons.
- LEW, J. S., JUANG, J. N., LONGMAN, R. W., 1993, "Comparison of Several Systems Identification Methods for Flexible Structures", *Journal of Sound and Vibration*, pp. 461-480.
- LIM, R. K., PHAN, M. Q., LONGMAN, R. W., 1998, "State-Space System Identification with Identified Hankel Matrix", Department of Mechanical and Aerospace Engineering Technical Report nº 3045, Princeton University, Princeton, New Jersey, USA.
- LIU, J. J., MA, C. K., KUNG, I. C., LIN, D. C., 2000, "Input Force Estimation of a Cantilever Plate by using a System Identification Technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, pp. 1309-1322.

LUS, H., BETTI, R., LONGMAN, R.W., 1999, "Identification of Linear Structural Systems Using Earthquake-Induced Vibration Data", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28, 1449-1467.

LUS, H., 2001, "Control Theory Based System Identification", PhD. Thesis, Columbia University, New York.

LUS, H., BETTI, R., LONGMAN, R.W., 2002, "Obtaining Refined First Order Predictive Models of Linear Structural Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31, pp.1413-1440.

LUS, H., BETTI, R., DE ANGELIS, M., and LONGMAN, R. W., 2002, "Constructing Second Order Models of Mechanical Systems From Identified State Space Realizations. Part I: Numerical Investigations", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*.

MOORE, B. C., 1981, "Principal Component Analisys in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, Nº 1, pp. 17-32.

MOREIRA, F. J. O., 1998, "Um Controlador  $H_{\infty}$  de Banda Limitada para o Controle Ativo de Vibrações Estruturais", Tese de Doutorado, UNICAMP, p247.

PHAN, M. Q., HORTA, L. G., JUANG, J. N., LONGMAN, R. W., 1992, "Identification of Linear Systems by an Asimptotically Stable Observer", NASA Langley Research Center Report L-16940, Hampton-VA, USA.

REZENDE, J. C. C., BORGES, J. A. F., PINTO FILHO, R. R., LEAL, M. F., 2004, "Comparação entre um Modelo de Elementos Finitos (MEF) e Análise Modal de uma Estrutura Veicular", III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Belém-PA, Brasil.

RIVERA, D. E., 1998, "System Identification for Process Control: A Short Course – Module Three", Department of Chemical, Bio and Materials Engineering and Control Systems Engineering Laboratory, Arizona State University.

- SALAZAR, J. W. A., 2000, "Identificação de Sistemas de Estruturas Mecânicas e Aplicações", Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- SANTO, I. A. C. P. E., 2001, "Modelação e Estimação de Parâmetros", Prova de Aptidão Pedagógica e Capacidade Técnica, Universidade do Minho, Portugal.
- SCZIBOR, V. and MARQUES, F. D., 2003, "Wing Structure Modal Parameter Estimation and Qualification using ERA", 17<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2003), São Paulo-SP, Brazil.
- SETO, W. W., 1971, "Vibrações Mecânicas", Editora McGraw-Hill, Rio de Janeiro, Brasil.
- SILVA, S. e LOPES JR., V., 2004, "Active Damping using LMI Controller Based in an Identified Model by ERA", 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC, Ilha Solteira-SP, Brasil, pp. 504-511.
- SMYTH, A. W., MASRI, S. F., CAUGHEY, T. K., HUNTER, N. F., 2000, "Surveillance of Intricate Mechanical Systems on the Basis of Vibration Signature Analysis", ASME Journal of Applied Mechanics, 67(3), pp.540-551.
- THAN, M. T., 1999, "Dynamic Models for Controller Design", Department of Chemical and Process Engineering", University of Newcastle.
- TJÄRNSTRÖM, F., 2002, "Variance Expressions and Model Reduction in System Identification", PhD Thesis, Linköping Universitet, Sweden.
- YULE, G. U., 1927, "On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers", Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A 226, 267-298.
- WIENER, N., 1930, "Generalised Harmonic Analysis", Acta Mathematica, 35, 117-258.

## ANEXO I

### A Interface Computacional

Tendo em vista uma utilização amigável dos algoritmos desenvolvidos construiu-se uma interface gráfica. Esta interface é de grande utilidade para usuários não profundamente familiarizados com os procedimentos de identificação.

Algumas telas da referida interface são mostradas abaixo, onde a tela inicial é ilustrada pela Fig. (I.1).

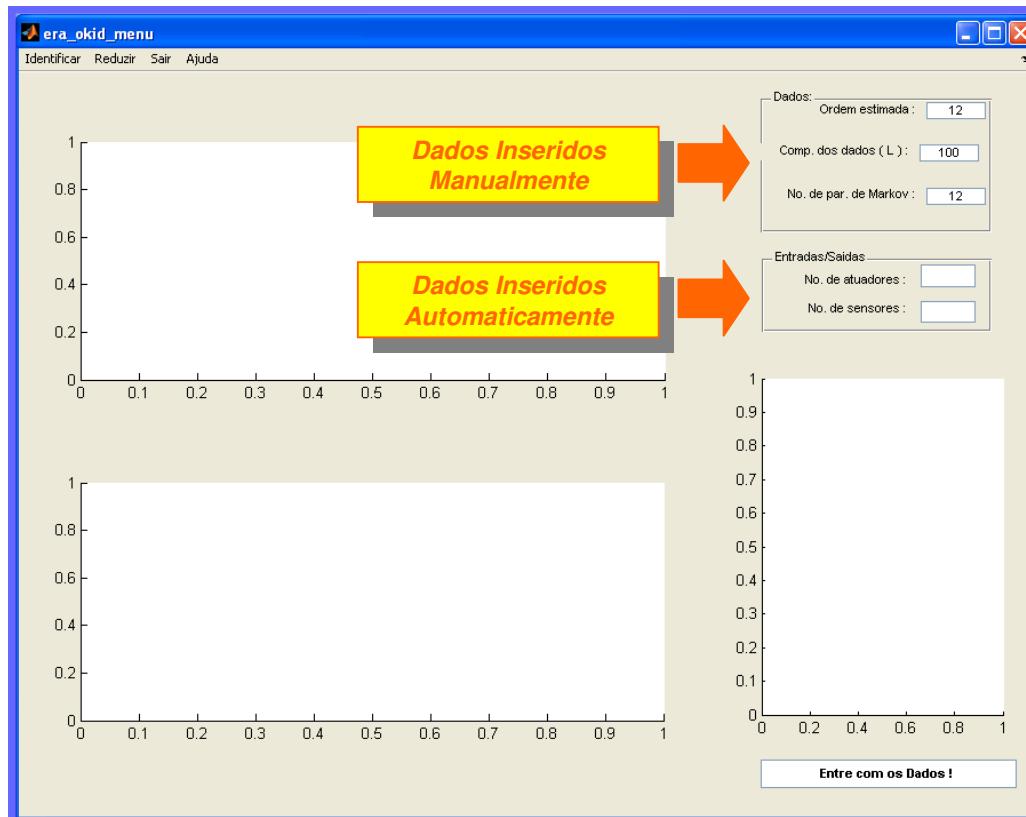


Figura I.1 – Tela Inicial da Interface Gráfica (TELA 1)

A interface requer do usuário dados de entrada, o arquivo com os dados experimentais, cuja organização e detalhamento estão descritos no “*help*” do programa.

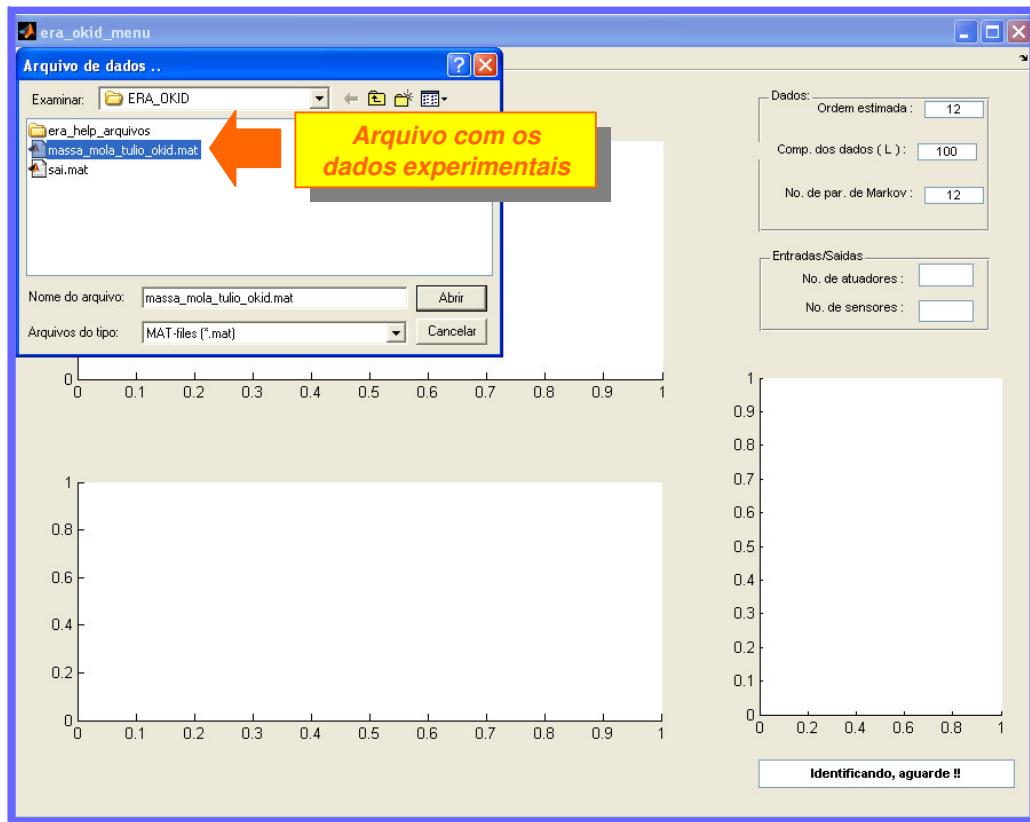


Figura I.2 – Tela para a escolha do arquivo de dados (TELA 2)

Uma vez carregado o arquivo de dados o sistema procede a identificação oferecendo a opção ao usuário de salvar o sistema identificado, conforme mostrado na Fig. (I.3).

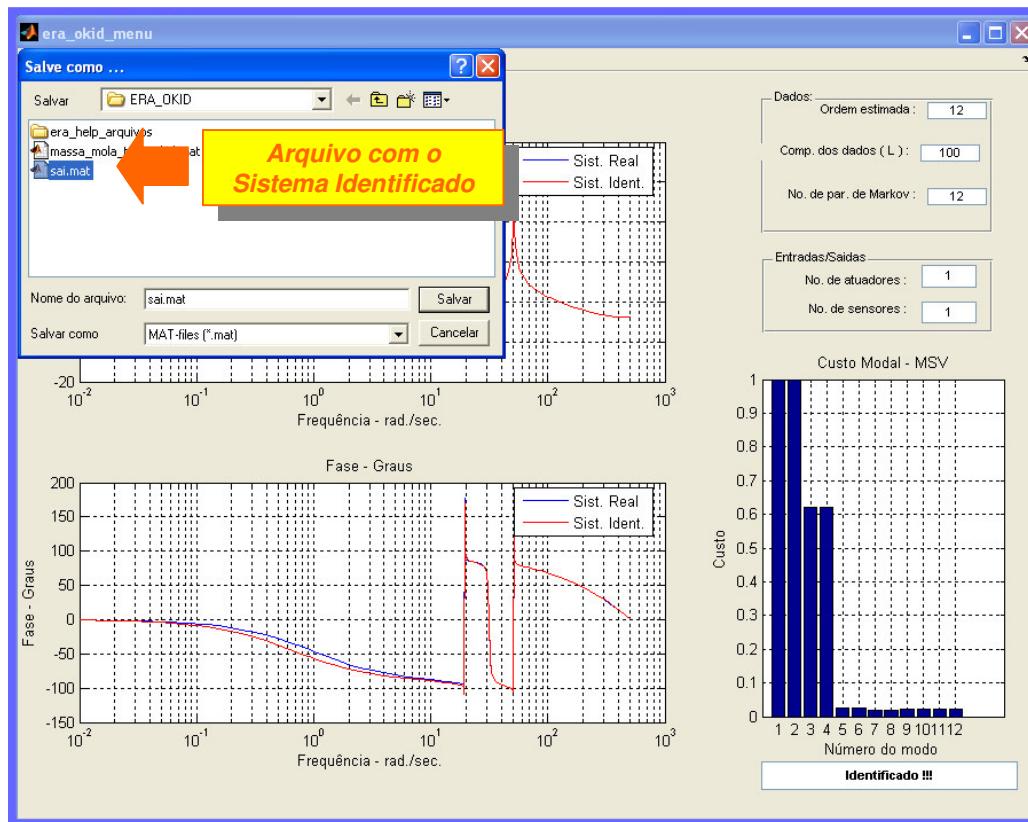


Figura I.3 – Tela para salvar o arquivo que contém o sistema identificado (TELA 3)

Finalmente, os resultados, comparativo entre as FRF's real e identificada e o MSV, são mostrados graficamente como na Fig. (I.4).

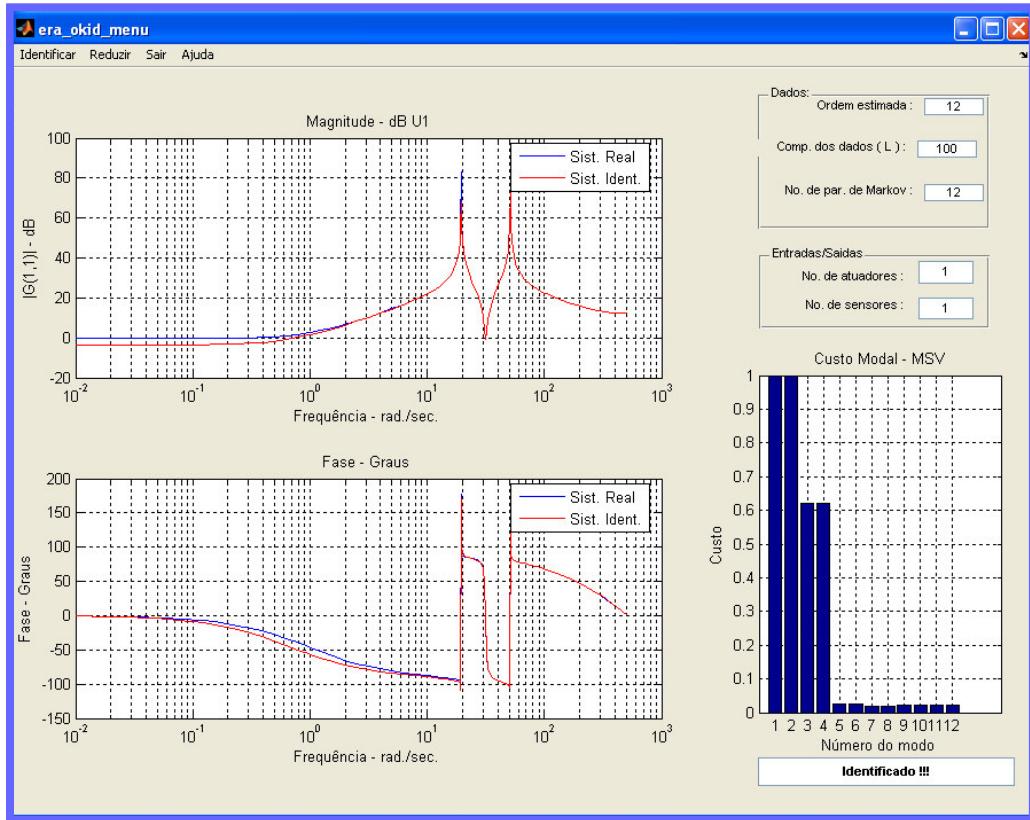


Figura I.4 – Tela com os resultados da identificação (TELA 4)

## ANEXO II

### Relação entre os ganhos do Observador e do Filtro de Kalman

No capítulo III foi feito um desenvolvimento matemático para obter a forma de se calcular o ganho do observador. Além disso, foi postulada uma relação entre os ganho do observador calculado e o ganho do Filtro de Kalman que será justificada por este anexo.

Existem basicamente duas maneiras de caracterizar, do ponto de vista estocástico, as incertezas do sistema que incluem o ruído no processo (entrada) e o ruído medido (saída). Uma delas é descrever o processo e os ruídos medidos diretamente em termos de suas covariâncias estatísticas. A outra maneira é especificar a equação do filtro de Kalman com seu ganho de Kalman, que é função das covariâncias do processo e dos ruídos medidos. A figura abaixo ilustra a questão.



Figura II.1 – Caracterização das incertezas do sistema

O filtro de Kalman tem sido estudado por décadas. Para calcular o ganho do filtro de Kalman, o modelo do sistema deve ser conhecido e as covariâncias individuais do ruído no processo e do ruído na medida também. Na prática, estas exigências são um tanto restritas, uma vez que, nem o sistema nem as características do ruído podem ser conhecidas exatamente. Não obstante, o modelo matemático do sistema pode ser derivado analiticamente, ou experimentalmente, a partir de dados de entrada e saída através de um método de identificação de sistemas. Uma estimativa da covariância do ruído na medida pode ser obtida pela consulta das características do sensor. A covariância do ruído no processo, contudo, é quase impossível de se obter pela medida direta, logo, desta forma, algumas suposições são requeridas. Isso então dificulta a precisa determinação das

características dos ruídos no processo e na medida. O ruído no processo contempla tanto as incertezas no sistema quanto o ruído na entrada propriamente dito.

Sejam as equações Eq. (II.1) e Eq. (II.2) reescritas de forma contemplar ruídos no processo e na medida como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (\text{II.1})$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (\text{II.2})$$

onde

- $\mathbf{w}(k)$  é o ruído no processo, que é branco, suposto Gaussiano e de média nula, cuja matriz de covariância é  $\mathbf{Q}_V$ ;
- $\mathbf{v}(k)$  é o ruído na medida, que é branco, suposto Gaussiano e de média nula, cuja matriz de covariância é  $\mathbf{R}_V$ ;

É feita uma hipótese onde  $\mathbf{w}(k)$  e  $\mathbf{v}(k)$  são estatisticamente independentes entre si.

Um típico filtro de Kalman para a Eq. (II.1) pode então ser escrita como

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}_r(k) \quad (\text{II.3})$$

onde

- $\hat{\mathbf{x}}(k)$  é o estado estimado;
- $\mathbf{K}$  é o ganho do filtro de Kalman;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  é o resíduo;

A equação da medida estimada é, por conseguinte, da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (\text{II.4})$$

O termo  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  é definido como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k) \quad (\text{II.5})$$

Substituindo a Eq. (II.4) na Eq. (II.5), vem

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (\text{II.6})$$

e agora a Eq. (II.6) na Eq. (II.3)

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k)]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}\mathbf{y}(k) - \mathbf{K}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{D}]\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}\mathbf{y}(k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{D} \quad \mathbf{K}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Definindo

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{D} \quad \mathbf{K}]$$

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

onde

- $\tilde{\mathbf{A}}$  é a matriz da dinâmica  $\mathbf{A}$  com o filtro de Kalman incorporado;
- $\tilde{\mathbf{B}}$  é a matriz dos atuadores  $\mathbf{B}$  com o filtro de Kalman incorporado;
- $\mathbf{v}$  é uma matriz de realimentação.

Reescrevendo a Eq. (II.7) utilizando as matrizes acima definidas, vem

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k) \quad (\text{II.8})$$

Agora, isolando  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  da Eq. (II.5)

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{y}(k) - \boldsymbol{\varepsilon}_r$$

e o substituindo na Eq. (II.3), determina-se a equação de medida, como abaixo

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) - \boldsymbol{\varepsilon}_r &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\varepsilon}_r \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Fazendo uma analogia entre as Eq. (II.6) e Eq. (II.8) nota-se que elas são idênticas se  $\mathbf{G} = -\mathbf{K}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(k) = 0$ . Esta afirmação pode, a princípio, parecer estranha, já que, o cálculo do ganho do filtro de Kalman depende tanto da covariância do ruído no processo,  $\mathbf{Q}_V$ , quanto da covariância do ruído na medida,  $\mathbf{R}_V$ . Mas, o que garante  $\mathbf{G} = -\mathbf{K}$  é o fato das equações para os cálculos do ganho do observador, Eq. (II.6), e do ganho de Kalman, Eq. (II.8), serem as mesmas, salvo pelo termo de erro  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ , que será tratado em seguida.

A combinação das Eq. (II.7) e Eq. (II.8) pode ser escrita matricialmente, como a seguir:

$$\bar{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^p\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{II.10})$$

onde  $\bar{\mathbf{y}}$  e  $\bar{\mathbf{V}}$  estão definidos de forma semelhante como para a Eq. (II.12) e

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}} \quad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\tilde{\mathbf{B}}]$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{x}}(0) \quad \hat{\mathbf{x}}(1) \quad \hat{\mathbf{x}}(2) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}(\ell - p - 2)]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_r(p) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(p+1) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(p+2) \quad \dots \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(\ell - 1)]$$

sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a matriz de resíduos, cujos elementos são definidos na Eq. (II.5), e  $\ell$  o comprimento do vetor de dados. Caso ocorra do observador ser o filtro de Kalman, então o resíduo é branco, tem média nula e é Gaussiano.

Pós-multiplicando ambos os membros da Eq. (II.10) por  $\bar{\mathbf{V}}^T$ , obtém-se

$$\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{V}}^T = \bar{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T + \boldsymbol{\varepsilon}\bar{\mathbf{V}}^T + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^p\hat{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T \quad (\text{II.11})$$

Particionando  $\bar{\mathbf{V}}$  em linhas

$$\bar{\mathbf{V}}^T = [\mathbf{v}_p^T \quad \mathbf{v}_{p-1}^T \quad \mathbf{v}_{p-2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{v}_0^T] \quad (\text{II.12})$$

o que significa que

$$\mathbf{v}_i = [\mathbf{v}(i) \quad \mathbf{v}(i+1) \quad \cdots \quad \mathbf{v}(\ell-p-1+i)]; \quad i=0, 1, 2, \dots, p$$

Então, a Eq. (II.11) pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{y}}\mathbf{v}_p^T \quad \bar{\mathbf{y}}\mathbf{v}_{p-1}^T \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{y}}\mathbf{v}_0^T] - \tilde{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p\mathbf{v}_p^T & \mathbf{v}_p\mathbf{v}_{p-1}^T & \cdots & \mathbf{v}_p\mathbf{v}_0^T \\ \mathbf{v}_{p-1}\mathbf{v}_p^T & \mathbf{v}_{p-1}\mathbf{v}_{p-1}^T & \cdots & \mathbf{v}_{p-1}\mathbf{v}_0^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_0\mathbf{v}_p^T & \mathbf{v}_0\mathbf{v}_{p-1}^T & \cdots & \mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^T \end{bmatrix} \\ & = [\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}_p^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}_{p-1}^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}_0^T] + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^p[\hat{\mathbf{x}}\mathbf{v}_p^T \quad \hat{\mathbf{x}}\mathbf{v}_{p-1}^T \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0^T] \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Analizando o termo  $\boldsymbol{\varepsilon}\bar{\mathbf{V}}^T$

$$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}_i^T = \sum_{j=0}^{I-p-i} \boldsymbol{\varepsilon}_r(p+j)\mathbf{v}^T(i+j) = \sum_{k=p}^{I-1} \boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-p+i); \quad i=0, 1, 2, \dots, p \quad (\text{II.14})$$

Considerando um processo ergódico, o valor esperado de  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-p+i)$  pode ser obtido da seguinte forma (Juang, 1994):

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-p+i)] = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell-p} \sum_{k=p}^{\ell-1} \boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-p+i); \quad k > p$$

Na Eq. (II.10), a escolha de um  $p$  suficientemente grande implica que os efeitos dos transientes do filtro de Kalman são desprezíveis de forma que  $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \approx 0$ . Assim sendo, pode-se reescrever a Eq. (II.11) da seguinte forma:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell-p} [\mathbf{y}\mathbf{V}^T - \tilde{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T] =$$

$$\begin{aligned}
&= E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-1) \quad \dots \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-p)] \\
&\quad + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^p E[\hat{\mathbf{x}}(k)\mathbf{v}^T(k+p) \quad \hat{\mathbf{x}}(k)\mathbf{v}^T(k+p-1) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}(k)\mathbf{v}^T(k)]
\end{aligned} \tag{II.15}$$

para todo  $k > p$ .

Escolhendo um observador tal que

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{V}}^T [\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T]^{-1} \tag{II.16}$$

no limite  $\ell \rightarrow \infty$  a Eq. (II.14) recai em

$$\begin{aligned}
&E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-1) \quad \dots \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-p)] = \\
&= -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^p E[\hat{\mathbf{x}}(k)\mathbf{v}^T(k+p) \quad \hat{\mathbf{x}}(k)\mathbf{v}^T(k+p-1) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}(k)\mathbf{v}^T(k)]
\end{aligned} \tag{II.17}$$

Sendo  $\tilde{\mathbf{A}}$ , que está na forma de um observador, assintoticamente estável e o  $p$  escolhido suficientemente grande, pode-se negligenciar o lado direito da Eq. (II.17), isto é,

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{v}^T(k-i)] = 0 \tag{II.18}$$

para  $i = 0, \dots, p$  e  $k > p$ .

Substituindo a definição de  $\mathbf{v}$  feita na Eq. (II.7) na Eq. (II.18) resulta

$$\begin{aligned}
&E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{u}^T(k-i)] = 0 \quad i = 0, \dots, p \\
&E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{y}^T(k-j)] = 0 \quad j = 1, \dots, p
\end{aligned} \tag{II.19}$$

para  $k > p$ , o que implica que o resíduo  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)$  em qualquer instante de tempo  $k$  é ortogonal à função de entrada  $\mathbf{u}(k-i)$  com o atraso  $0 \leq i \leq p$  e à função de saída  $\mathbf{y}(k-j)$  com o atraso  $1 \leq j \leq p$ .

Dado um conjunto de dados de um sistema dimensionalmente finito descrito pelas Eq. (II.1) e Eq. (II.2), então existe um filtro de Kalman com a propriedade que o resíduo é branco, tem média nula e é Gaussiano, isto é,

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)] = 0; \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(j)\boldsymbol{\varepsilon}_r^T(k)] = 0; \quad j \neq k \quad (\text{II.20})$$

e que satisfaz o princípio de ortogonalidade

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_r(k)\mathbf{y}^T(k-i)] = 0; \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{II.21})$$

Se o processo experimental é estacionário e aleatório, o ganho do filtro de Kalman é uma constante que recupera os parâmetros do Markov do filtro de Kalman no limite quando  $\ell \rightarrow \infty$ , satisfazendo, então, a solução por mínimos quadrados se, é claro, existir  $[\mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1}$ . Esta inversa sempre existe no caso da entrada ser suficientemente “rica” na freqüência.

Juang (1994) conclui que, qualquer observador que satisfaça a Eq. (II.15), ou sua equivalente, Eq. (II.16), reproduz o mesmo mapeamento entre entrada e saída como faz um filtro de Kalman se o comprimento do vetor de dados e a ordem do observador são suficientemente grandes tal que o erro de truncamento na Eq. (II.15) seja desprezível. Portanto, quando se reduz a ordem do sistema, o observador identificado tende a ser um filtro de Kalman e, desta forma, o  $\mathbf{G}$  calculado a partir dos parâmetros de Markov do ganho do observador fornece o ganho do filtro de Kalman, basta, para tanto, fazer a consideração abaixo:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{G} \quad (\text{II.22})$$

Na prática, devido à presença de fatores como distúrbios, não-linearidades, ruídos não-brancos no processo e na medida, o filtro identificado resultante não é o de Kalman. Neste caso, o filtro identificado é simplesmente um observador que é calculado a partir dos dados de entrada e de saída que minimiza o resíduo no sentido dos mínimos quadrados.