

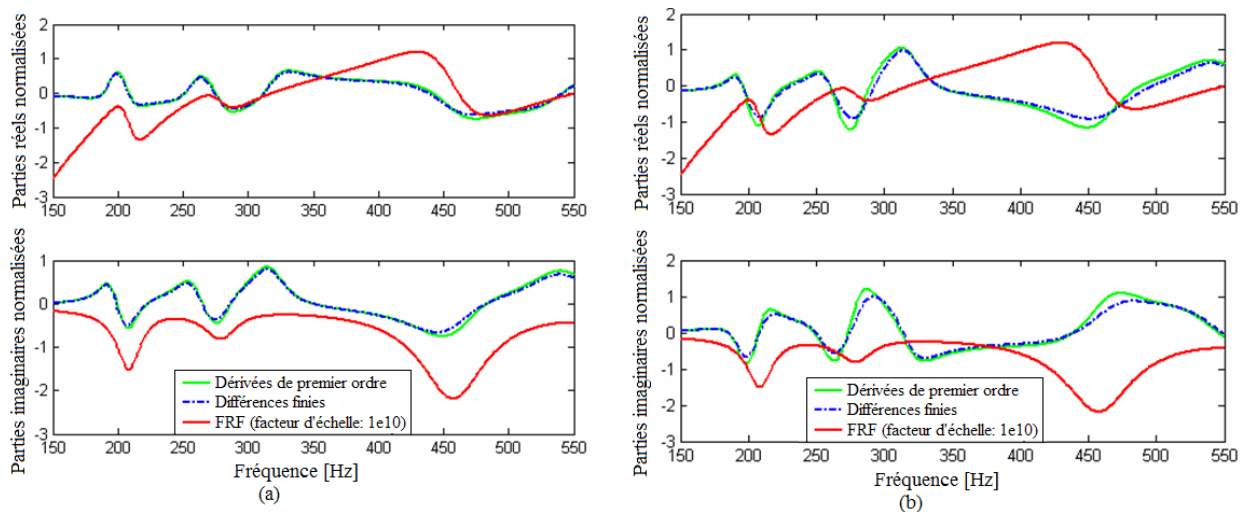
Figure 6.1 – Illustration du modèle EF de plaque totalement traitée par couche contrainte

Tableau 6.1 – Propriétés physiques et géométriques du modèle EF de plaque à 3 couches

couche	Épaisseur [m]	Module d'Young [N/m <sup>2</sup> ]	Poisson	Densité [Kg/m <sup>3</sup> ]
contrainte	$0,5 \times 10^{-3}$	$70 \times 10^9$	0,34	2750
viscoélastique	$0,0254 \times 10^{-3}$	Eqs. (2.11) et (2.12)	0,49	1099,5
structure	$3,0 \times 10^{-3}$	$70 \times 10^9$	0,34	2750

### • Sensibilités de FRF par rapport aux épaisseurs de couches

Dans cet exemple, les épaisseurs de la couche contrainte et de la couche viscoélastique sont considérées comme variables de conception dans le calcul des sensibilités de  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$ . Les parties réelles et imaginaires des fonctions de sensibilités complexes obtenues en employant les dérivées de premier ordre selon l'expression (6.17) sont montrées en Figure 6.2. Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus par différences finies (selon l'expression (6.15)) pour une variation de 20% sur les valeurs nominales des épaisseurs de couches viscoélastique et contrainte, donnés en Tableau 6.1. Dans les mêmes figures, on note que les parties réelle et imaginaire de  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$  sont multipliées par un facteur d'échelle.


 Figure 6.2 – Sensibilités de  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$  par rapport à l'épaisseur de la couche viscoélastique (a) et à la couche contrainte (b).

On remarque que les fonctions de sensibilité, dénotées par  $S_{FRF}^N(\omega, T, p)$  sont normalisées selon l'expressions suivante :

$$S_{FRF}^N(\omega, T, p) = \frac{\partial \mathbf{H}_{II}(\omega, T, p^0)}{\partial p} \bigg|_{(\omega, T, p^0)} \frac{p_0}{\mathbf{H}(\omega, T, p^0)} \quad (6.22)$$

La Figure 6.2 permet d'évaluer l'efficacité des dérivés de premier ordre pour prévoir les sensibilités, à travers la comparaison avec les résultats obtenus par la méthode des différences finies. De plus, en se basant sur les amplitudes et les signes des fonctions de sensibilités, on peut évaluer les degrés d'influence des variables de conception sur les amplitudes des FRFs dans la bande de fréquence considérée.

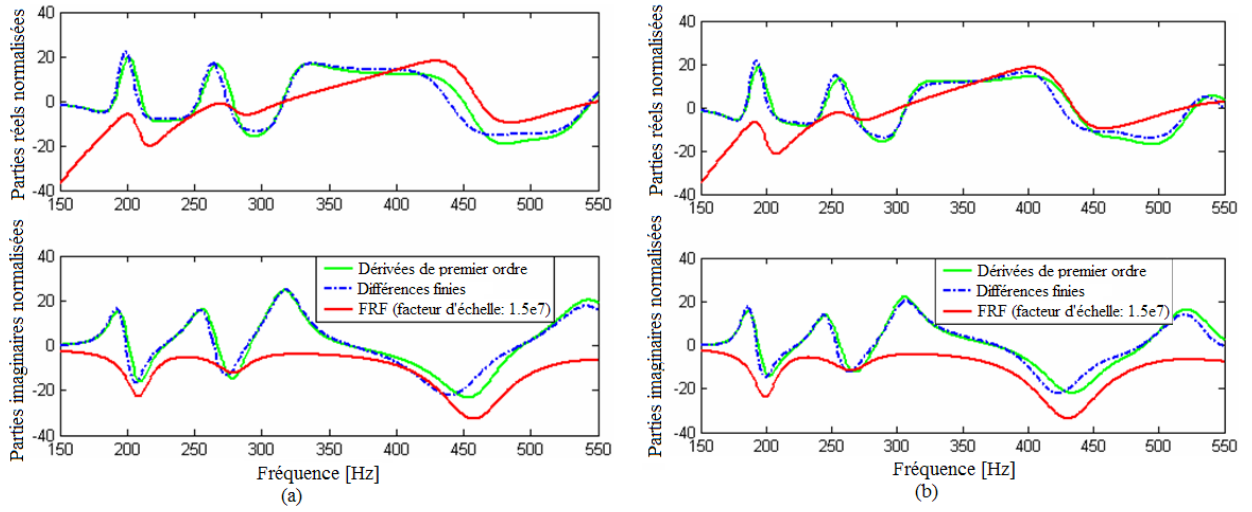
- **Sensibilités de FRF par rapport à la température du matériau.**

Pour le calcul des dérivées des FRFs par rapport à la température du matériau viscoélastique selon l'équation (6.20), les dérivées de (6.21) sont calculées en dérivant les expression (2.11) et (2.12) par rapport à  $\omega_r$  et  $T$ , ce qui mènent aux expressions suivantes :

$$\frac{\partial G}{\partial \omega_r} = \frac{B_2 B_3^{B_6} \left( B_5 B_6 e^{-\frac{iB_6\pi}{2} \left( \frac{1}{\omega_r} \right)^{B_6+1}} + B_4 e^{-\frac{iB_4\pi}{2} \left( \frac{1}{\omega_r} \right)^{B_4+1}} \right)}{\left( 1 + B_5 e^{-\frac{iB_6\pi}{2} \left( \frac{B_3}{\omega_r} \right)^{B_6}} + e^{-\frac{iB_4\pi}{2} \left( \frac{B_3}{\omega_r} \right)^{B_4}} \right)^2} \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \alpha_T}{\partial T} = \alpha_T \left( -\frac{a}{T^2} + 2.303 \left( \frac{2a}{T_0} - b \right) \frac{\log e}{T} + \frac{b}{T_0} - \frac{a}{T_0^2} - S_{AZ} \right) \ln 10 \quad (6.24)$$

La Figure 6.3 montre les parties réelles et imaginaires normalisées des fonctions de sensibilité de la FRF  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$  par rapport à la température, pour deux valeurs différentes de la température nominale  $T^0$ , comparées aux calculs par différences finies, en utilisant des variations de 2% autour des valeurs nominales de la température. De la même façon que pour le cas précédent, les parties réels et imaginaires de  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$  sont multipliées par un facteur d'échelle.


 Figure 6.3 – Sensibilités de  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$  par rapport à la température pour

$$T^0 = 298 K \text{ et } T^0 = 308 K .$$

On note que les résultats issus des dérivées de premier ordre et ceux obtenus par les différences finies sont très proches, permettant d'évaluer les degrés d'influence des variations de la température dans la bande de fréquence d'analyse.

Pour illustrer l'intérêt de la méthode de sensibilité au premier ordre pour l'analyse des structures modifiées, la FRF  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$  du modèle EF de plaque sandwich à trois couches selon les étapes successives suivantes : dans la première étape, une fois donné un ensemble de valeurs nominales des variables de conception (épaisseurs de couches viscoélastique et contrainte données en Tableau 6.1, à température de  $T^0 = 298 K$ ), des variations sont volontairement appliquées à ces valeurs nominales (15% pour les épaisseurs de couches et 1,5% pour la température). Puis, les FRFs exactes du système perturbé sont calculées ; dans la deuxième étape, les FRFs du système perturbé sont estimées à partir des FRFs du système nominal en employant les dérivées d'ordre un calculées selon la formulation présentée dans les sections précédentes, comme suit:

$$\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p^0 + \Delta p) \cong \mathbf{H}_{II}(\omega, T, p^0) + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)}{\partial p} \right|_{(p=p^0)} \Delta p \quad (6.25)$$

$$\mathbf{H}_{II}(\omega, T^0 + \Delta T, p) \cong \mathbf{H}_{II}(\omega, T^0, p) + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)}{\partial T} \right|_{(T=T^0)} \Delta T \quad (6.26)$$

La Figure 6.4 montre que les FRFs calculées par les expansions en série de Taylor au premier ordre sont comparables aux FRFs exactes. Néanmoins, les résultats sont moins satisfaisants pour les variations de la température du matériau, ce qui mène à conclure que les approximations basées sur les développements en série de Taylor au premier ordre ne sont pas assez précises pour prévoir les variations du comportement dynamique des systèmes viscoélastiques associés à plus grandes variations de la température. Néanmoins, la méthode d'ordre 1 donne la bonne tendance de changements de paramètres, et cela constitue une

information importante pour une étape amont de l'optimisation et/ou de l'évaluation des incertitudes, qui permet de retenir les paramètres les plus influents. Dans ce cas, les résultats peuvent être améliorés en employant les expansions en série de Taylor au second ordre, ce qui exige la connaissance des dérivés de premier ordre et de second ordre, successivement.

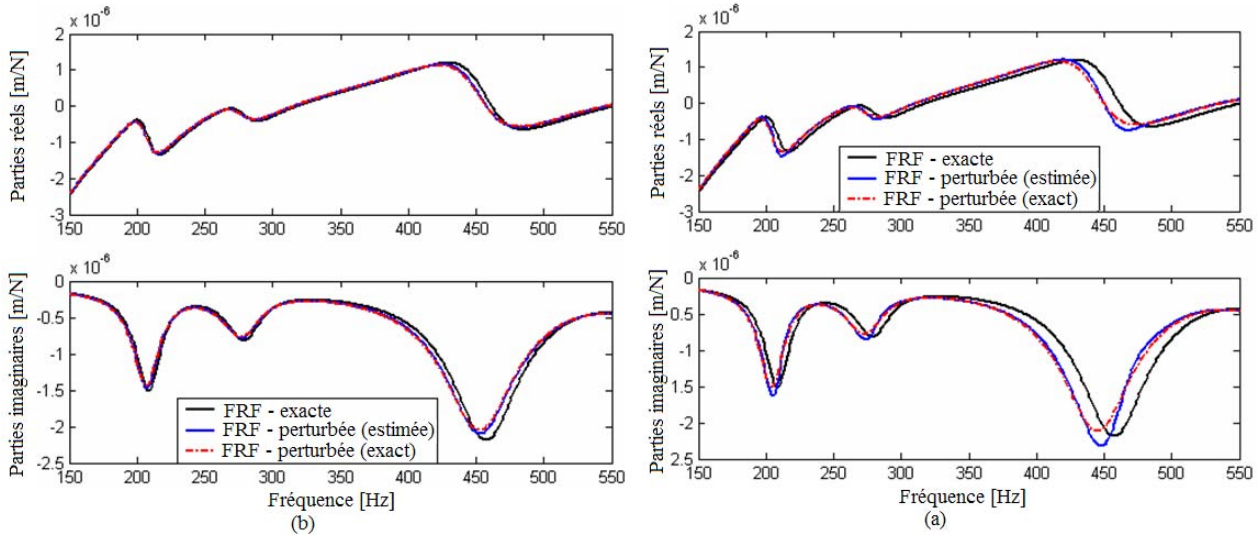


Figure 6.4 – Evaluation exacte et perturbée (exacte et estimée) de  $H_{II}(\omega, T, p)$  par rapport aux épaisseurs de couches (a), et par rapport à la température pour  $T^0 = 298 K$ .

### 6.5.2 Éléments finis viscoélastiques stochastiques

Pour vérifier la stratégie d'introduction des incertitudes dans les modèles aux éléments finis de systèmes viscoélastiques, on utilise la même structure abordée en Section 4.3.1, au Chapitre 4, en considérant les mêmes propriétés physiques et mécaniques (valeurs nominales), et les mêmes positions de patches (Figure 6.5.a). La Figure 6.5.b présente les réponses fréquentielles (FRFs) de la plaque renforcée sans et avec traitement viscoélastique par couche contrainte pour les valeurs nominales des paramètres de conception.

On considère la structure avec deux niveaux d'incertitudes sur les paramètres de la solution amortissante : (cas 1 :  $\delta_{h_2} = 15\%$ ,  $\delta_{h_3} = 15\%$ ) à température du matériau de  $25^\circ C$  ; et (cas 2 :  $\delta_{h_2} = 15\%$ ,  $\delta_{h_3} = 15\%$ ,  $\delta_T = 10\%$ ). Les paramètres  $\delta_{h_2}$ ,  $\delta_{h_3}$  et  $\delta_T$  sont les dispersions sur les épaisseurs de la couche viscoélastique et la couche contrainte, et sur la température du matériau viscoélastique, respectivement.

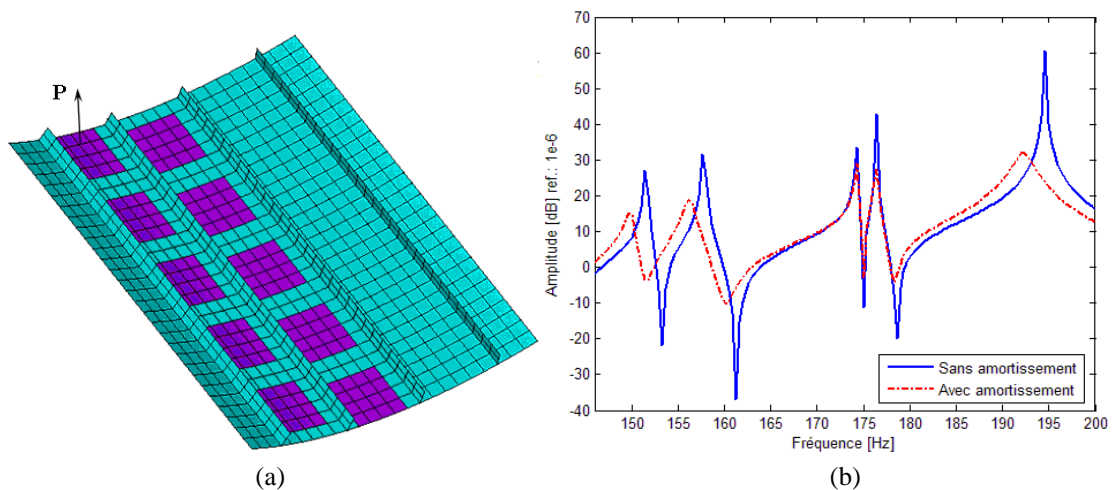


Figure 6.5 – Modèle EF de la plaque renforcée traitée par 10 patches viscoélastiques (a) ; réponses fréquentielles (FRFs) du système sans et avec traitement (b).

La Figure 6.6 représente trois *boxplots* représentant les dispersions des variables de conception pour les deux niveaux d'incertitudes introduits. La « boxplot » ou « boîte à moustache » est une façon visuelle très intéressante de représenter une distribution. Les « moustaches » vont de la valeur minimale au premier quartile à la valeur maximale au troisième quartile. Le quartile en rouge représente la moyenne. De cette façon, la « boîte » ou cadre est définie par le premier quartile, la médiane et le troisième quartile. L'intérêt de ces *boxplots* est de déterminer l'intervalle de balayage des dispersions des variables ou de réponses physiques de systèmes en fonction des niveaux d'incertitudes des paramètres de conception, qu'on peut utiliser comme intervalle de confiance pour tracer les enveloppes maximales et minimales des réponses aléatoires.

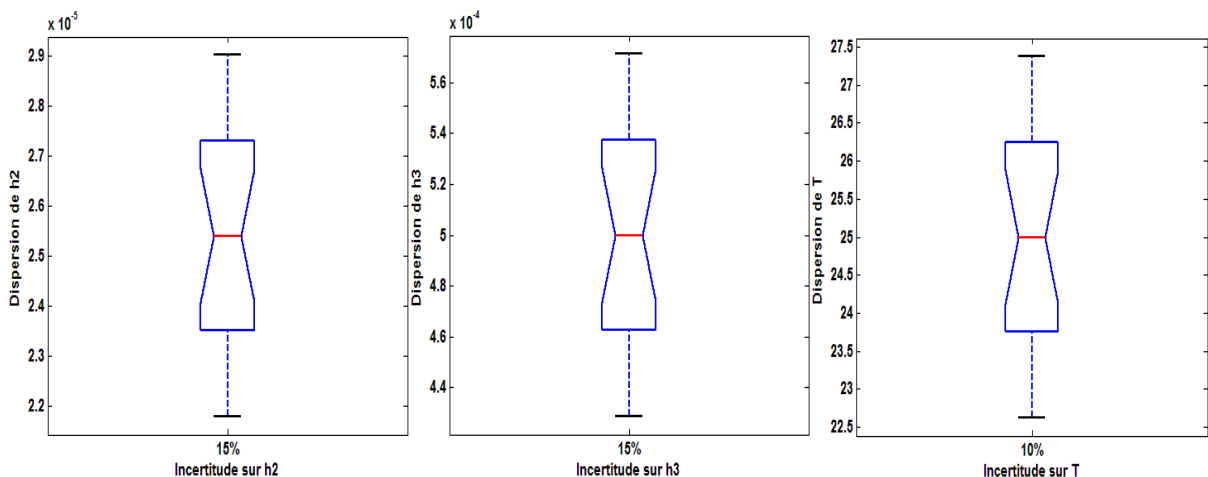


Figure 6.6 – Dispersion des paramètres de conception pour les deux niveaux d'incertitudes.

La figure 6.7 illustre la variabilité de la réponse aléatoire représentant, respectivement, les moyennes et les statistiques extrêmes pour les deux cas d'incertitudes étudiés. Si on compare les deux figures, on peut constater sans difficulté l'influence très significative de la température sur les réponses aléatoires du système amorti, comme prévu par l'analyse de sensibilité paramétrique.

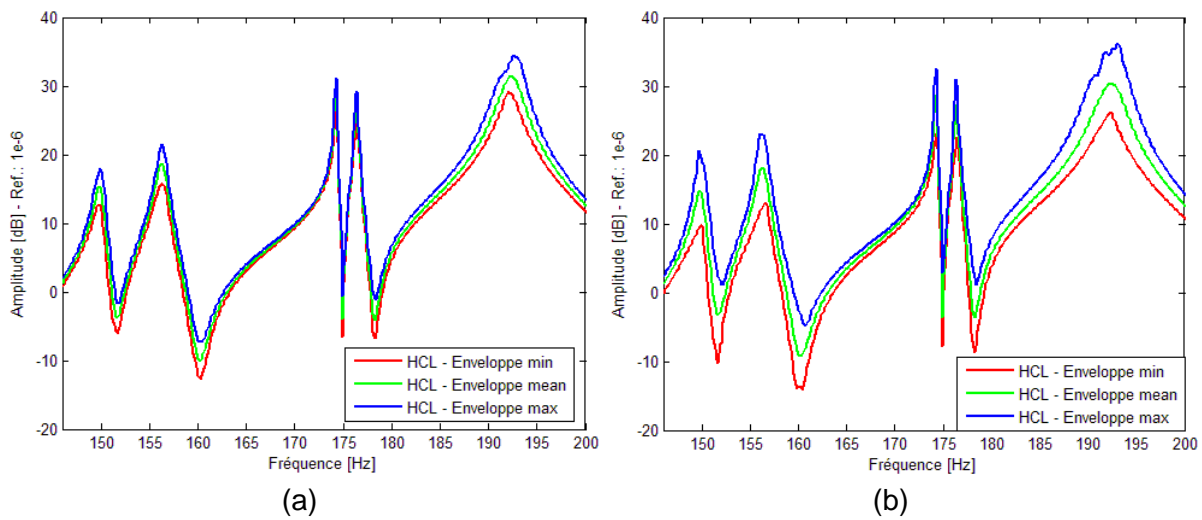


Figure 6.7 – Moyenne et statistiques extrêmes de la réponse aléatoire : cas 1 (a) ; cas 2 (b).

Les Figures 6.8 et 6.9 représentent les variabilités en *boxplot* des amplitudes de vibration aléatoires pour les modes M10, M11 et M14, respectivement, pour les deux cas d'incertitudes sur les paramètres du traitement viscoélastique. On remarque les variabilités des amplitudes de vibration et des fréquences modales pour les deux cas d'incertitudes.

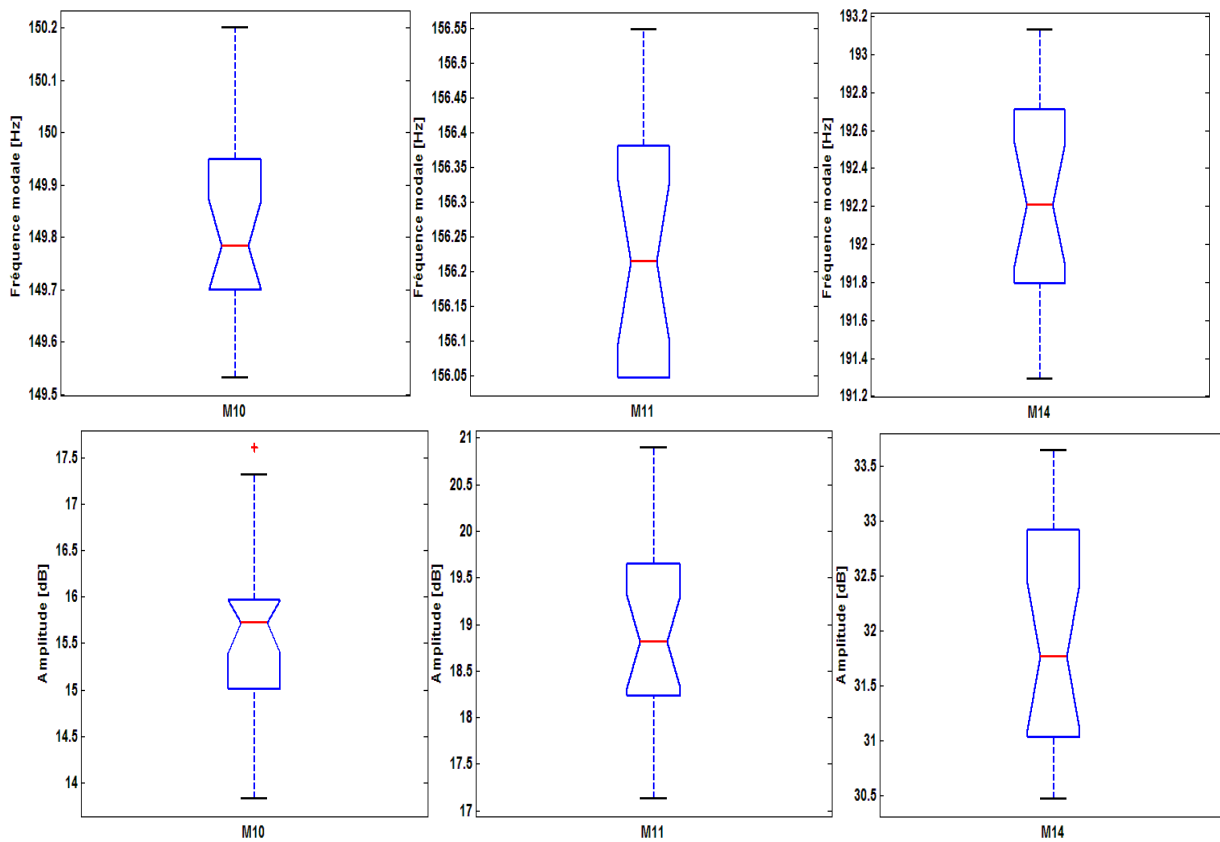


Figure 6.8 – Variabilité des fréquences modales et les amplitudes de vibration pour le cas 1.

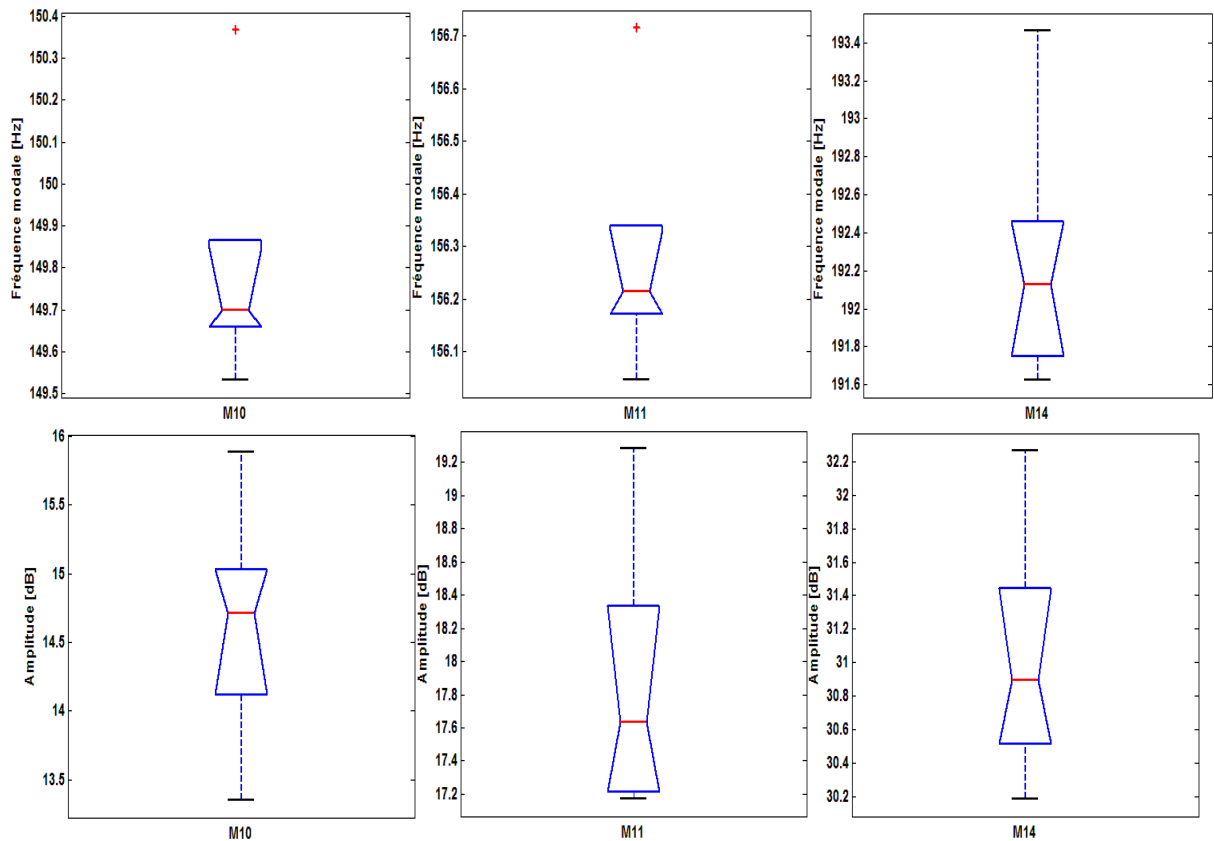


Figure 6.9 – Variabilité des fréquences modales et les amplitudes de vibration pour le cas 2.

## 6.6 Conclusions

Dans cette partie du mémoire, après avoir mis en évidence les concepts fondamentaux de l'origine et de la propagation des incertitudes dans les modèles et les principales méthodes pour résoudre les systèmes stochastiques résultants, on propose un modèle de propagation des incertitudes dans les modèles aux éléments finis de plaques sandwich de façon originale sous une forme paramétrée, à travers la création directe des matrices stochastiques élémentaires du modèle éléments finis de plaque sandwich. Pour cela, on a utilisé la technique de discrétisation des champs aléatoires fondée sur un développement de Karhunen-Loève pour les problèmes bidimensionnels.

Dans le but de prendre en compte un nombre restreint de paramètres incertains, la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL) est alors retenue pour évaluer les réponses aléatoires du modèle aux éléments finis stochastique du système viscoélastique. Pour réduire les coûts numériques induits par la taille des modèles et les calculs itératifs HCL issus des incertitudes, on utilise le modèle paramétrisé de plaque sandwich à trois couches, proposé en Section 3.9, ainsi que la méthode de condensation robuste, capable de réduire davantage le temps de calcul. Après les développements théoriques, on montre les enveloppes des réponses dynamiques dues aux dispersions des caractéristiques vibratoires sur un exemple académique constitué par une plaque courbe renforcée par des raidisseurs, partiellement traitées par couche contrainte. Ces enveloppes constituent une aide à la conception et à l'optimisation de

structures en présence d'éléments viscoélastiques à paramètres incertains, où on peut quantifier les influences des paramètres sur la performance du traitement viscoélastique.

Pour les traitements viscoélastiques par couches contraintes, on remarque à travers l'analyse de sensibilité des réponses fréquentielles que les paramètres qui influent plus fortement la performance des composantes amortissantes sont les épaisseurs des couches viscoélastique et contrainte, et la température du matériau viscoélastique. Pour l'analyse de sensibilité des systèmes amortis par couche contrainte, une formulation originale a été développée pour le calcul des dérivés de premier ordre des réponses fréquentielles (FRFs) par rapport à deux types de paramètres, à savoir : les paramètres structuraux physiques et/ou géométriques qui apparaissent explicitement dans les matrices éléments finis des couches, et la température du matériau viscoélastique. Comme illustré dans l'application numérique présentée, les sensibilités des FRFs donnent des informations utiles sur l'influence des paramètres de conception sur le comportement dynamique du système amorti, s'avérant également un outil très important pour la conception, analyse et exécution dans une phase d'avant projet des systèmes viscoélastiques.

Les travaux en perspective à cette étude concernent l'approfondissement de la méthode des éléments finis viscoélastiques stochastiques et notamment le couplage de la méthode de condensation robuste vis-à-vis des incertitudes et la méthode de perturbation modale. L'extension de ces travaux aux structures viscoélastiques complexes dont les modèles sont de grande taille est également une voie de recherche en cours d'investigation. L'ensemble des ces travaux fait l'objet actuellement d'une collaboration scientifique tripartite FEMEC (UFU, Uberlândia, Brésil) - LMARC (UFC, Besançon, France) et IPEIN (Nabeul, Tunisie).