

ANTONIO MARCOS GONÇALVES DE LIMA

**Modélisation et Optimisation Robuste de
Systèmes Mécaniques en Présence
d'Amortissement Viscoélastique**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2007

ANTONIO MARCOS GONÇALVES DE LIMA

**Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas
Mecânicos em Presença de Amortecimento
Viscoelástico**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade.

Co-Orientador: Prof. Dr. Nouredine Bouhaddi.

UBERLÂNDIA – MG

2007

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L732c Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, 1975-
 Modelagem e otimização robusta de sistemas mecânicos em presença de
 amortecimento viscoelástico / Antônio Marcos Gonçalves de Lima. - 2007.

175 f. : il.

Orientador: Domingos Alves Rade.
Co-orientador: Noureddine Bouhaddi.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia.

1. Vibração - Teses. 2. Otimização estrutural - Teses. 3. Viscoelasticidade - Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. Bouhaddi, Noureddine. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621:534

Elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
Av. João Naves de Ávila, 2121 - 38400-902 Fone: 0XX(34)32394149 Ramal 42
FAX: 0XX(34)32394282 - Campus Santa Mônica - Uberlândia MG



STUDENT: Antônio Marcos Gonçalves de Lima

REGISTRATION NUMBER: 5031911

RESEARCH FIELD: Solid Mechanics and Vibrations

**POSTGRADUATION IN MECHANICAL ENGINEERING: DOCTORATE
LEVEL**

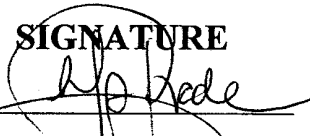
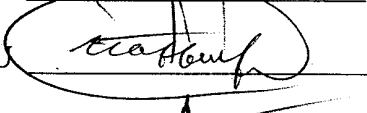
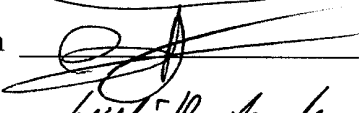
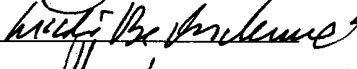
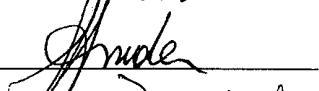
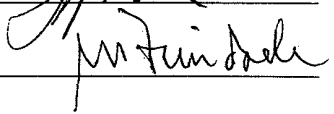
TITLE OF THE THESIS:

**“Modeling and Robust Optimization of Mechanical
Systems in Presence of Viscoelastic Damping”**

SUPERVISORS: Prof. Dr. Domingos Alves Rade – Brazil

Prof. Dr. Nouredine Bouhaddi - France

The thesis was **APPROVED** in public defense, held at the Lecture Hall
of Building 1X, Santa Mônica Campus, on 28th June, 2007, at 2:00 pm,
with the following Examination Board:

NAME	SIGNATURE
Prof. Dr. Domingos Alves Rade	UFU 
Prof. Dr. Valder Steffen Júnior	UFU 
Prof. Dr. Nouredine Bouhaddi	LMARC - Besançon 
Prof. Dr. Nicolò Bachschmid	Milan Polytechnique 
Prof. Dr. José Roberto de F. Arruda	UNICAMP 
Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade	EESC - USP 

Uberlândia, 28th June, 2007.

*Je dédie ce mémoire de thèse :
À ma femme ALICE
À ma petite fille NICOLE
À toute ma famille*

Remerciements

La thèse rapportée dans ce Mémoire résulte d'une collaboration scientifique entre le Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat (LMARC) de l'Université de Franche-Comté à Besançon, France, et le Laboratoire de Mécanique des Structures (LMEst), de la Faculté de Génie Mécanique de l'Université Fédérale d'Uberlândia, au Brésil, sous la co-direction de **M. Domingos Alves RADE** et **M. Noureddine BOUHADDI**, dans le cadre du Projet CAPES-COFECUB 462/04.

Je suis profondément reconnaissant envers **M. Domingos Alves RADE** qui m'a suivi et encadré pendant trois ans d'initiation scientifique, deux ans de Master et ces quatre années de thèse. En dépit des difficultés rencontrées, il a su mettre en place les conditions propices au bon déroulement et à l'aboutissement de mes travaux de recherche. J'ai apprécié les conseils qu'il m'a prodigués tant en matière d'enseignement que de recherche.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance à **M. Noureddine BOUHADDI** pour m'avoir accueilli en France dans son groupe de thésards, où j'ai pu travailler pendant quatorze mois sur les sujets abordés dans ce mémoire et sur d'autres sujets passionnants, et pour avoir suivi une partie très significative de mes travaux.

Je remercie cordialement **M. Scott COGAN**, chercheur au CNRS, pour son aide indispensable dans les développements des outils informatiques utilisés durant mes travaux de recherche. L'extension des applications des traitements viscoélastiques par couche contrainte au domaine industriel n'aurait pas été possible sans le concours de Scott Cogan. Je remercie Scott COGAN également pour avoir accepté d'être membre du jury.

Je remercie vivement **M. Valder STEFFEN Jr.** pour avoir accepté de présider mon jury de thèse, et pour ses conseils et son aide amicale à tout moment.

Je suis très reconnaissant à **M. Abdelkhalak EL HAMI** et **M. José Roberto DE FRANÇA ARRUDA** pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire de thèse, ainsi qu'à **M. Marcelo AREIAS TRINDADE**, pour avoir accepté d'être membre du jury.

Je tiens à remercier chacun des membres des laboratoires LMEst et LMARC, qui d'une manière ou une autre, ont contribué à ce que ces années aient été aussi agréables qu'enrichissantes. Parmi ceux que je n'ai pas encore cités : Jesiel Cunha, Raquel Santini Leandro Rade, Vicente Lopes, Romes Antônio Borges, Cleves Mesquita Vaz, Danuza Cristina, Rodrigo de França Marques, Albert William Faria, Emmanuel Foltête, Morvan Ouisse, Hichem Hanuira, Petr David, Bendali et Tran Wang.

Je tiens à remercier la Fondation CAPES (Coordination de Perfectionnement du Personnel de Niveau Supérieur) du Ministère de l'Evaluation de la Coopération avec les Universités Brésiliennes) pour le financement qui m'a permis de réaliser mon stage de recherche au LMARC, ainsi que le CNPq (Conseil National de Développement Scientifique et Technologique) du Ministère de la Science et Technologie du Brésil pour m'avoir accordé une bourse de doctorat pendant trente-quatre mois.

Je suis reconnaissant envers le Projet Européen **ALFA II-VICON DIA**, coordonné par Mm. Nicolò Bachschmid et Valder Steffen Jr., pour la bourse d'études qui m'a permis de réaliser un stage de recherche de trois mois à la Technische Universität Darmstadt (TUD) en Allemagne.

Enfin, il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma femme et l'affection dont elle a su m'entourer depuis toujours.

LIMA, A.M.G., **Modelagem e otimização robusta de sistemas mecânicos em presença de amortecimento viscoelástico**, 2007. Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

Nos últimos anos, os materiais viscoelásticos têm sido amplamente utilizados para reduzir os níveis de vibração e de ruído no domínio da dinâmica de estruturas, em virtude de sua capacidade inerente de absorver uma parte da energia vibratória dos sistemas mecânicos e de dissipá-la sob a forma de calor. Esses materiais são aplicados com frequência seja sob a forma de tratamentos discretos como juntas viscoelásticas rotacionais ou apoios viscoelásticos translacionais, seja sob a forma de tratamentos superficiais. Para estes últimos, a eficiência do material viscoelástico pode ser significativamente aumentada pela utilização de uma configuração chamada de camada restrita passiva que consiste em dispor uma camada de material viscoelástico entre a camada da estrutura base e uma fina camada metálica. Este tipo de configuração permite aumentar enormemente as deformações cisalhantes na camada viscoelástica e, como consequência, um aumento na dissipação de energia vibratória. Neste trabalho de tese, é apresentada a modelagem por elementos finitos de elementos retangulares de placas multicamadas considerando-se duas configurações básicas: uma configuração assimétrica composta por três camadas; e uma configuração simétrica formada por cinco camadas. Estes elementos são combinados com modelos de elementos finitos de sistemas de geometria complexa modelados via código de elementos finitos ANSYS, o que permite expandir o domínio de aplicação desses materiais ao domínio industrial. Para considerar a dependência em frequência e em temperatura das propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos, optou-se por utilizar o modelo frequencial módulo complexo, bem adaptado para o cálculo da resposta dinâmica de sistemas amortecidos viscoelasticamente. Uma extensão natural da modelagem de sistemas viscoelásticos durante a fase de projeto é o uso de técnicas de otimização numérica dos dispositivos viscoelásticos visando a redução do custo e do tempo de execução dos projetos, e o aumento da eficiência, em termos de amortecimento, desses materiais. Na busca pela otimização de sistemas complexos de engenharia tratados com materiais viscoelásticos, optou-se por utilizar o método *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*. Em vista do grande número de avaliações exatas das funções objetivo associadas a ao procedimento numérico de otimização, propõem-se o acoplamento desse algoritmo multiobjetivo com estratégias de condensação robusta adaptada para sistemas viscoelásticos, e metamodelos, tais como o uso das redes neurais artificiais e de superfícies de resposta clássicas e adaptativas. O objetivo é reduzir com vantagem o tempo de cálculo das soluções ótimas-robustas. Propõem-se igualmente metodologias de propagação de incertezas e avaliação da sensibilidade paramétrica de sistemas viscoelásticos. Com relação à sensibilidade, ela é calculada através das funções resposta em frequência dos sistemas amortecidos por camada restrita passiva através do cálculo de derivadas de primeira ordem das matrizes fatoradas do modelo de elementos finitos multicamadas parametrizado. Com relação às incertezas, optou-se por utilizar a técnica de discretização de campos aleatórios fundada no desenvolvimento de Karhunen-Loève para sistemas unidimensionais e bidimensionais, respectivamente. Através de vários exemplos de simulações numéricas e de ensaios experimentais com sistemas de engenharia razoavelmente complexos tratados com materiais viscoelásticos, pode-se ilustrar os desenvolvimentos abordados ao longo deste trabalho.

Palavras-chave : *modelagem por elementos finitos, camada restrita, otimização multiobjetivo, elementos finitos estocásticos, sensibilidade paramétrica, metamodelagem, amortecimento viscoelástico.*

LIMA, A.M.G., **Modélisation et Optimisation robuste de systèmes mécaniques en présence d'amortissement viscoélastique**, 2007. Thèse de doctorat. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Résumé

Dans ces dernières décennies, les matériaux viscoélastiques ont été intensivement utilisés pour réduire les niveaux de vibration et bruit dans le domaine de la dynamique des structures, due à leur capacité d'absorber une partie de l'énergie vibratoire des systèmes structuraux et la dissiper sous la forme de chaleur. Ces matériaux sont souvent appliqués soit sous une forme discrète par des appuis de translation ou des joints de rotation, soit sous la forme de traitements de surface. Pour ce dernier cas, l'efficacité du matériau viscoélastique peut être significativement augmentée par l'utilisation de la configuration appelée « couche contrainte », qui consiste à disposer la couche viscoélastique entre la structure base et une couche métallique mince. Ce fait permet d'augmenter énormément les déformations par cisaillement de la couche viscoélastique, et par conséquent, la dissipation de l'énergie vibratoire. Dans ce mémoire de thèse, on présente la modélisation aux éléments finis en utilisant des éléments rectangulaires de plaque sandwichs, en considérant deux configurations d'éléments : une configuration asymétrique à trois couches ; et une configuration symétrique à cinq couches. Ces éléments sont intégrés dans des modèles EF de systèmes de géométrie complexes modélisés par le code ANSYS, ce qui permet d'élargir le domaine d'application de ces matériaux au domaine industriel. Pour prendre en compte la dépendance en fréquence et en température des propriétés des matériaux viscoélastiques, on utilise l'approche module complexe, bien adapté pour le calcul de réponses dynamiques de systèmes amortis. Une extension naturelle de la modélisation des systèmes viscoélastiques est l'utilisation des techniques d'optimisation paramétrique des dispositifs amortissants visant la réduction du coût et/ou du délai d'exécution des projets. À la recherche de l'optimisation multiobjectif des systèmes viscoélastiques de grande taille, on utilise la méthode NSGA (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*). En vu du grand nombre d'évaluations des fonctions coût impliquées dans cette procédure d'optimisation, on propose le couplage de cet algorithme multiobjectif avec des stratégies de condensation robuste adaptées pour des systèmes viscoélastiques, et les métamodèles, tels que les réseaux de neurones artificielles (ANNs) et les méthodologies de surfaces de réponses classiques (RSM) et adaptatives (ARSM), dans le but de réduire davantage le temps de calcul des solutions optimales. On propose également une méthodologie de propagation des incertitudes et d'évaluation des sensibilités paramétriques qui sont liées aux systèmes amortis par matériaux viscoélastiques. En ce qui concerne les sensibilités, elles sont calculés par rapport aux réponses forcées (FRFs) des systèmes amortis par couche contrainte, à travers le calcul des dérivées de premier ordre des matrices factorisées du modèle élément finis de plaque sandwich paramétrisé. Pour les incertitudes, on s'intéresse à la technique de discrétisation des champs aléatoires fondée sur un développement de Karhunen-Loève pour des systèmes bidimensionnels. A travers nombreuses simulations numériques et des essais expérimentaux avec des systèmes moyennement complexes, on illustre les développements abordés tout au long du mémoire.

Mots clés : *modélisation élément finis, couche contrainte, optimisation multiobjectif, éléments finis stochastiques, sensibilité paramétrique, métamodélisation, amortissement viscoélastique*

Liste de Figures

Figure 1.1 – Vue d’une caisse de voiture soumise à traitements viscoélastiques (figure empruntée à la référence Rao (2001))	2
Figure 1.2 – Application des amortisseurs viscoélastiques dans des structures de génie civil (figure empruntée à la référence Samali et Kwok (1995))	2
Figure 1.3 – Vue d’un fuselage d’avion avec traitement viscoélastique (figure empruntée à la référence Rao (2001))	3
Figure 1.4 – Géométries des amortisseurs viscoélastiques : traitement de surface par couche contrainte passive et active (a), et par joints de translation (b) et rotation (c)	4
Figure 1.5 – Structure primaire avec neutralisateurs dynamique (gauche) ; Neutralisateur dynamique (droite). (figure adaptée de la référence (Espíndola et al, 2005))	7
Figure 1.6 – Amortisseur viscoélastique discret synchronisé (TVD) (figure empruntée à la référence Rao (2001))	10
Figure 1.7 – Amortisseur viscoélastique appliqué au <i>Columbia SeaFirst Building</i> (figure empruntée à la référence Samali et Kwok (1995))	11
Figure 1.8 – Modélisation mathématique des amortisseurs viscoélastiques discrets	11
Figure 1.9 – Conception robuste des systèmes amortis par matériaux viscoélastiques	16
Figure 2.1 – Structure moléculaire d’un matériau polymère (a) et d’un matériau vitreux (b) (figure empruntée à la référence Nashif et al (1985))	19
Figure 2.2 – Déformation d’un matériau soumis à un chargement constant sur un intervalle de temps fixé : (a) chargement ; (b) comportement élastique d’un solide ; (c) visqueux d’un fluide ; (d) viscoélastique d’un solide (figure empruntée de la référence (Merlette, 2005))	21
Figure 2.3 – Réarrangements successifs de la structure d’une mousse viscoélastique Soumise à un essai de cisaillement (figure adaptée de la référence (Merlette, 2005))	21
Figure 2.4 – Courbe de fluage (a) et de relaxation (b)	22
Figure 2.5 – Cycle contrainte-déformation elliptique pour un matériau viscoélastique linéaire	24
Figure 2.6 – Spectre en fréquence et en température d’une poutre traitée par matériau viscoélastique (figure adaptée de la référence (Nashif et al, 1985))	25
Figure 2.7 – Variation de E' et η d’un matériau viscoélastique quelconque en Fonction de la température à fréquence constante	26
Figure 2.8 – Illustration des variations de E' et η par rapport à la fréquence à température constante (figure adaptée de la référence Nashif et al, 1985)	27

Figure 2.9 – Illustration du Principe de Superposition Fréquence-Température (PSFT)	28
Figure 2.10 – Illustration d'un abaque ou nomogramme en fréquence réduite	29
Figure 2.11 – Abaque représentant les propriétés du matériau viscoélastique ISD112	30
Figure 2.12 – Modèle d'amortissement simples : (a) Modèle de Maxwell ; (b) Modèle de Kelvin-Voigt ; (c) Amortissement hystérétique ; (d) Modèle de Zener.	32
Figure 2.13 – Fonctions de fluage (a) et relaxation des modèles rhéologiques simples (figure empruntée à la référence Wang (2001))	32
Figure 2.14 – Modèles généralisés : (a) Kelvin-Voigt ;(b) Maxwell	33
Figure 3.1 – Élément fini de plaque sandwich	41
Figure 3.2 – Cinématique de la déformation	41
Figure 3.3 – Élément fini de plaque sandwich à trois couches	48
Figure 4.1 – Cycle de réanalyse approchée par condensation robuste	60
Figure 4.2 – Définition des sous-structures : d.d.l. internes i et d.d.l. de jonction j	61
Figure 4.3 – Schéma bloc représentant un phénomène physique quelconque	63
Figure 4.4 – Illustration d'un neurone (a) et d'un réseau de neurones (b) (figure empruntée à la référence Tertois (2003))	65
Figure 4.5 – Notation des poids et des sorties des couches pour les réseaux de neurones (figure empruntée à la référence Tertois (2003))	66
Figure 4.6 – Stratégie de construction des réseaux de neurones	68
Figure 4.7 – Entraînement et validation de RSM	72
Figure 4.8 – Le domaine Ω discrétisé	73
Figure 4.9 – Normalisation du domaine d'étude de la fonction à approcher	74
Figure 4.10 – Domaine discrétisé initial avec enlèvement du point central	75
Figure 4.11 – Premier processus d'enrichissement du domaine discrétisé	75
Figure 4.12 – Deuxième processus d'enrichissement du domaine discrétisé	75
Figure 4.13 – Fonction de pondération de Hérault	76
Figure 4.14 – Modèle EF ANSYS de la plaque renforcée traitée par couche contrainte	77
Figure 4.15 – FRFs des systèmes de référence et réduits – bases T_{θ_1} (a), T_{θ_2} (b) et T_{θ_3} (c)	78
Figure 4.16 – Erreur relative entre les réponses réduites et les réponses exactes	78
Figure 4.17 – FRFs pour les systèmes nominaux et perturbés : (a) SCAs ; (b) amorti	79
Figure 4.18 – Matrice des MAC entre les vecteurs propres des systèmes nominal et perturbé	80
Figure 4.19 –FRFs (a) et l'erreur relative pour les modèles perturbés nominal et réduit	81
Figure 4.20 – Modèle EF de la plaque renforcée – définition des sous-structures	81
Figure 4.21 – FRFs des systèmes de référence et réduit (a) et les erreurs relatives (b)	82
Figure 4.22 – FRFs des systèmes perturbés de référence et réduit (a) et l'erreur relative (b)	83
Figure 4.23 – Comparaison entre les FRFs exactes et celles approchées par les configurations PMC1 (a) et PMC2 (b)	84

Figure 4.24 – Variation de la réponse exacte en fonction de la réponse estimée pour les deux configurations de réseaux : PMC1 (a) et PMC2 (b)	84
Figure 4.25 – Erreur quadratique moyenne pour PMC1 (a) et PMC2 (b)	85
Figure 4.26 – Réponses exactes en fonction des estimées par RSM pour les deux fonctions	86
Figure 4.27 – Réponses exactes en fonction des estimées par ARSM pour les deux fonctions	87
Figure 5.1 – Notion de dominance (figure empruntée à la référence (Ait Brik, 2005))	90
Figure 5.2 – Espace convexe (a) et non convexe (b) (figure adaptée de la référence Das et al (1997))	91
Figure 5.3 – Classification des solutions par rang d'un PMO	92
Figure 5.4 – Stratégie NSGA (figure empruntée à la référence (Ait Brik, 2005))	93
Figure 5.5 – Solutions optimales robustes (figure adaptée de (Lee et Park, 2001))	95
Figure 5.6 – Méthodologie d'optimisation multiobjectif robuste (figure empruntée à la référence (Ait Brik, 2005))	96
Figure 5.7 – Analyse de données avec le SOM (figure adaptée de la référence (Ait Brik, 2005))	97
Figure 5.8 – Visualisation et regroupement des 12 clusters dans l'espace des fonctions coût	97
Figure 5.9 – SOM en post-traitement de données	98
Figure 5.10 – Corrélation entre les paramètres de conception – Les U-matrices	98
Figure 5.11 – Front de Pareto de l'optimisation à 8 et 4 paramètres de conception	99
Figure 5.12 – FRF non amortie de la plaque courbe renforcée	100
Figure 5.13 – Solutions NSGA et NSGA-CR (a); Premiers Fronts de Pareto (b)	101
Figure 5.14 – Solutions NSGA et NSGA-PMC (a); Fronts de Pareto (b)	103
Figure 5.15 – FRFs pour le point A	104
Figure 5.16 – FRFs pour le point C	105
Figure 5.17 – FRFs pour le point B	105
Figure 5.18 – Positions optimales de patches viscoélastiques (point B)	105
Figure 5.19 – Solutions NSGA et NSGA-RSM (a), et NSGA et NSGA-ARSM (b)	107
Figure 5.20 – Fronts de Pareto pour NSGA-RSM (a), et NSGA-ARSM (b)	107
Figure 5.21 – Fonctions coût et leurs vulnérabilités	109
Figure 5.22 – Comparaison entre les solutions robustes NSGA et NSGA-PMC	109
Figure 5.23 – Comparaison entre les solutions déterministes et les solutions robustes	110
Figure 5.24 – Comparaison entre les solutions robustes (a) et déterministes (b)	110
Figure 6.1 – Illustration du modèle EF de plaque totalement traitée par couche contrainte	121

Figure 6.2 – Sensibilités de $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$ par rapport à l'épaisseur de la couche viscoélastique (a) et à la couche contrainte (b)	122
Figure 6.3 – Sensibilités de $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$ par rapport à la température pour $T^0 = 298K$ et $T^0 = 308K$	123
Figure 6.4 – Evaluation exacte et perturbés (exacte et estimée) de $\mathbf{H}_{II}(\omega, T, p)$ par rapport aux épaisseurs de couches (a), et par rapport à la température pour $T^0 = 298K$	124
Figure 6.5 –Modèle EF de la plaque renforcée traitée par 10 patches viscoélastiques (a); réponses fréquentielles (FRFs)du système sans et avec traitement(b)	125
Figure 6.6 – Dispersion des paramètres de conception pour les deux niveaux d'incertitudes	125
Figure 6.7 – Moyenne et statistiques extrêmes de la réponse aléatoire : cas 1 (a); cas 2 (b)	126
Figure 6.8 – Variabilité des fréquences modales et les amplitudes de vibration pour le cas 1	126
Figure 6.9 – Variabilité des fréquences modales et les amplitudes de vibration pour le cas 2	127
Figure 7.1 – Modèle aux éléments finis de la plaque plane	129
Figure 7.2 – Montage du dispositif de mesure expérimentale de vibration	130
Figure 7.3 – FRFs expérimentale (Exp) et analytique (EF) de la plaque non-amorti	131
Figure 7.4 – FRF expérimentale et numérique de la plaque recalé	132
Figure 7.5 – Solutions NSGA robustes (a) ; Front de Pareto (b) pour les deux fonctions coût	133
Figure 7.6 – Amplitude au mode M1 – Vulnérabilité (a); Amplitude au mode M2 – Vulnérabilité (b)	134
Figure 7.7 – Positions optimales des traitements pour les points A (a), B (b) et C (c)	135
Figure 7.8 – FRFs expérimentale et analytique du système amorti – point A	136
Figure 7.9 – FRFs expérimentale et analytique du système amorti – point B	136
Figure 7.10 – FRFs expérimentale et analytique du système amorti – point C	136
Figure 7.11 – Dispersion des FRFs analytiques du système amorti – point A	138
Figure 7.12 – Dispersion des FRFs analytiques du système amorti – point B	139
Figure 7.13 – Dispersion des FRFs analytiques du système amorti – point C	139
Figure 7.14 –Modèle EF du compresseur (a); FRF normalisée du système non-amorti	140
Figure 7.15 – FRFs calculées du système amorti, représentant l'influence de la couche	141
Figure 7.16 – Détail des FRFs calculées du système amorti	142

Figure 7.17 – Montage expérimentale avec la carcasse du compresseur	142
Figure 7.18–Structure instrumentée et points d'identification des FRFs expérimentales	143
Figure 7.19 – FRFs expérimentales du système amorti, représentant l'influence de l'épaisseur de la couche contrainte sur la performance du traitement viscoélastique	143
Figure A.1 – Élément fini de plaque sandwich à cinq couches	162
Figure B.1 – Définitions du domaine de corrélation pour l'élément fini de plaque sandwich	170
Figure C.1 – Stratégie d'interfaçage/remplacement entre MATLAB® et ANSYS®	172
Figure C.2 – Modèle EF ANSYS de la plaque traité par couche contrainte	173
Figure C.3 – Distance en forme pour les modèles ANSYS® et MATLAB®	174
Figure C.4 – Comparaison entre les FRFs des modèles ANSYS® et MATLAB®	175

Liste de Tableaux

Tableau 4.1 – Matrice des effets pour trois paramètres à deux niveaux	69
Tableau 4.2 – Comparaison entre les valeurs/vecteurs propres (systèmes nominal et perturbé)	80
Tableau 4.3 – Définition des variables d'entrée pour les surfaces de réponses	85
Tableau 4.4 – Temps de calcul pour les stratégies RSM/ARSM	88
Tableau 5.1 – Définition de l'espace de conception (NSGA-CR)	100
Tableau 5.2 – Paramètres de NSGA-CR	100
Tableau 5.3 – Distances de Mahalanobis (NSGA-CR)	101
Tableau 5.4 – Temps de calcul (NSGA-CR)	102
Tableau 5.5 – Définition de l'espace de conception (NSGA-PMC)	102
Tableau 5.6 – Paramètres de NSGA-PMC	103
Tableau 5.7 – Distances de Mahalanobis (NSGA-PMC)	103
Tableau 5.8 – Temps de calcul (NSGA-PMC)	104
Tableau 5.9 – Valeurs optimales des épaisseurs de chaque patch (point B)	106
Tableau 5.10 – Temps de calcul (NSGA-RSM, NSGA-ARSM)	107
Tableau 5.11 – Définition de l'espace de conception (optimisation robuste)	108
Tableau 5.12 – Temps de calcul (NSGA-PMC)	109
Tableau 6.1 – Propriétés physiques et géométriques du modèle EF de plaque à trois coches	121
Tableau 7.1 – Fréquences modales calculées et mesurées du système non-amorti	131
Tableau 7.2 – Définition de l'espace de conception - plaque plane	133
Tableau 7.3 – Paramètres de NSGA-PMC	133
Tableau 7.4 – Temps de calcul (NSGA-PMC)	135
Tableau 7.5 – Valeurs optimales des épaisseurs de chaque patch (points A, B, C)	135
Tableau 7.6 – Fréquences modales calculées et mesurées du système amorti–point A	137
Tableau 7.7 – Fréquences modales calculées et mesurées du système amorti–point B	137
Tableau 7.8 – Fréquences modales calculées et mesurées du système amorti–point C	137
Tableau 7.9 – Définition de l'espace de conception - compresseur	141
Tableau C.1 – Comparaison entre les valeurs propres (modèles ANSYS® et MATLAB®)	174

Liste de Notations

$\sigma(t), \tau(t)$: contraintes de traction-compression et de cisaillement
$\varepsilon(t), \gamma(t)$: déformations longitudinal et cisaillement.
E, G	: module d'Young et module de cisaillement
μ	: caractérise la viscosité.
$F(\sigma_0, t)$: fonction de fluage
$R(\varepsilon_0, t)$: fonction de relaxation
$H(s)$: fonction de dissipation.
$G(\omega)$: module complexe
$G'(\omega)$: partie real du module complexe.
$G''(\omega)$: patie imaginaire du module complexe.
E_p, E_d	: énergies potentielle et dissipée du matériau
η	: factor de perte
α_T	: factor de décalage en fréquence
ω_r	: fréquence réduite
T	: température en Kelvin.
T_0	: température de référence.
M, K	: matrice de masse et matrice de rigidité.
$q(t), f(t)$: vecteur de déplacements et vecteur de forces externes
$u(t)$: vecteur réduit des forces externes
$y(t)$: vecteur des réponses
$K_e, K_v(\omega, T)$: matrices de rigidité de la sous-structure élastique et da sous-structure viscoélastique complexe
T	: base de réduction robuste
$K_v(\theta) = G_0 \bar{K}_v$: comportement conservatif associé (CCA)
R	: résidu statique de premier ordre associés aux chargements imposés
R_Δ^0	: résidus sont associés aux effets viscoélastiques
T_0	: base de reduction nominal
R_Δ	: matrice de résidus
T_{cb}	: base de reduction de Craig-Bampton nominal
T_{cbe}	: base de reduction de Craig-Bampton enrichie robuste
P	: matrice des effets contenant la base polynomiale
a	: matrice contenant les coefficients du polynôme
$J(a)$: l'erreur quadratique pondérée
W	: matrice de pondération
$F(x)$: vecteur des critères ou fonctions objectif
$C \subset R^k$: l'ensemble réalisable (espace de conception)
$g_j(x)$: contraintes d'égalité ou d'inégalité
$sh(d(x_i, x_j))$: fonction de Sharing

σ	: constante fixée
$d(x_i, x_j)$: distance euclidienne entre deux individus
$H(x, \theta)$: champ aléatoire
$\Omega \in R^d$: ensemble ouvert décrivant la géométrie du système
$\{\xi_r, i = 1, \dots, n\}$: variables aléatoires gaussiennes
$\{H_r(x), r = 1, \dots, n\}$: fonctions déterministes
x, θ	: position du champ et variable des événements aléatoires
$C(x_1, x_2)$: fonction de covariance
(λ_r, f_r)	: valeurs propres et les fonctions propres de $C(x_1, x_2)$
r, p	: vecteurs de réponses et paramètres de conception

Table des matières

Resumo	i
Résumé	ii
Liste de Figures	iii
Liste de Tableaux	viii
Liste de Notations	ix
CHAPITRE 1	1
INTRODUCTION GÉNÉRALE	
1.1 Contexte de l'étude	1
1.2 État de l'art	5
1.2.1 <i>Les modèles rhéologiques simples</i>	5
1.2.2 <i>Les modèles viscoélastiques modernes</i>	6
1.2.3 <i>Applications des matériaux viscoélastiques</i>	10
1.2.4 <i>Optimisation de structures complexes amorties par matériaux viscoélastiques</i>	12
1.2.5 <i>Prise en compte des incertitudes dans le projet et optimisation de structures viscoélastiques</i>	13
1.3 Description des travaux	14
1.4 Contenu du mémoire	16
CHAPITRE 2	19
AMORTISSEMENT VISCOÉLASTIQUE	
2.1 Comportement des matériaux viscoélastiques	19
2.1.1 <i>Comportements élastiques des solides et visqueux des fluides</i>	20
2.1.2 <i>Comportement viscoélastique dans le domaine temporel</i>	22
2.2 Approche du module complexe	23
2.3 Facteurs environnementaux	25
2.3.1 <i>Influence de la température</i>	26
2.3.2 <i>Influence de la fréquence. Notion de fréquence réduite</i>	27
2.3.3 <i>Formes paramétriques de la fréquence réduite en température</i>	29
2.4 Représentation du module complexe	30
2.4.1 <i>Formes tabulées</i>	31
2.4.2 <i>Formes paramétriques</i>	31
2.5 Lissage des paramètres des modèles viscoélastiques	35
2.5.1 <i>Propriétés asymptotiques du lissage</i>	36

2.6 Incorporation du comportement viscoélastique dans les modèles EF	37
2.7 Conclusions	39
<hr/>	
CHAPITRE 3	40
MODELISATION DES ELEMENTS DE PLAQUES MULTICOUCHES	40
<hr/>	
3.1 Relations cinématiques	40
3.2 Relations contraintes-déformations	42
3.3 Discrétisation par éléments finis	45
3.4 Matrices élémentaires de raideur et de masse d'un élément de plaque multicouche	46
3.5 Plaque sandwich à trois couches	48
3.5.1 Introduction de l'amortissement viscoélastique	51
3.5.2 Paramétrisation du modèle EF de plaque sandwich	51
3.6 Conclusions	53
<hr/>	
CHAPITRE 4	54
CONDENSATION ROBUSTE ET METAMODELISATION ADAPTEES AUX SYSTEMES VISCOELASTIQUES COMPLEXES	54
<hr/>	
4.1 Méthode de condensation robuste de modèles viscoélastiques	54
4.1.1 Base des forces associées aux modifications paramétriques	58
4.1.2 Base des déplacements associés aux modifications paramétriques	58
4.1.3 Condensation par sous-structuration dynamique (synthèse modale)	61
4.2 Approximation des réponses par des métamodèles	63
4.2.1 Principe général	63
4.2.2 Réseaux de neurones artificiels (ANNs)	65
4.2.2.1 Le perceptron multicouche (PMC)	65
4.2.3 Méthodologies de surface de réponses	68
4.2.3.1 Plans d'expériences factoriels complets (PFC)	69
4.2.3.2 Les surfaces de réponse classiques (RSM)	70
4.2.3.3 Les surfaces de réponse adaptatives (ARSM)	72
4.3 Exemples numériques	77
4.3.1 Condensation robuste de systèmes viscoélastiques	77
4.3.2 Approximation des FRFs par les ANNs	83
4.3.3 Approximation des FRFs par les surfaces de réponses	85
4.4 Conclusions	88
<hr/>	
<hr/>	

CHAPITRE 5	89
METHODOLOGIE D'OPTIMISATION MULTIOBJECTIF ROBUSTE	89
5.1 Optimisation multiobjectif déterministe	89
5.1.1 Définition d'un problème multiobjectif et notion de dominance	89
5.1.2 Choix d'une méthode d'optimisation multiobjectif	91
5.1.3 Algorithmes évolutionnaires (EAs)	92
5.2 Optimisation multiobjectif robuste	93
5.2.1 Prise en compte de la robustesse dans la recherche d'un optimum	94
5.2.2 Critère de robustesse en optimisation multiobjectif	94
5.3 Analyse des données <i>a posteriori</i> – la méthode SOM	96
5.3.1 SOM : outil d'aide à la décision dans les problèmes d'optimisation multiobjectif	98
5.4 Exemples numériques	99
5.4.1 Couplage NSGA-Condensation robuste (NSGA-CR)	99
5.4.2 Couplage NSGA-réseaux de neurones (NSGA-PMC)	102
5.4.3 Couplage NSGA-RSM et NSGA-ARSM	106
5.4.4 Exemple d'optimisation robuste	108
5.5 Conclusions	111
CHAPITRE 6	
ELEMENTS FINIS STOCHASTIQUES ET ANALYSE DE SENSIBILITE POUR LA CONCEPTION ROBUSTE DE SYSTEMES VISCOELASTIQUES	112
6.1 Quelques concepts fondamentaux	112
6.1.1 Techniques pour résoudre le problème stochastique	113
6.2 Formulation général du modèle EF viscoélastique stochastique	114
6.2.1 Discrétisation des champs aléatoires	114
6.2.2 Modèle éléments finis stochastique de plaque sandwich	115
6.3 Calcul des réponses stochastiques	116
6.3.1 La méthode d'Hyper Cube Latin (HCL)	117
6.4 Sensibilité paramétrique des systèmes traités par couche contrainte	117
6.4.1 Définition de la sensibilité paramétrique – Evaluation par différences finies	117
6.4.2 Sensibilité des réponses fréquentielles par rapport aux paramètres structuraux et par rapport à la température	119
6.5 Applications numériques	120
6.5.1 Sensibilité paramétrique	120

6.5.2 <i>Elément finis viscoélastiques stochastiques</i>	124
6.6 Conclusions	127
CHAPITRE 7	
VALIDATION EXPERIMENTALE DU MODELE DE PLAQUE SANDWICH ET APPLICATION INDUSTRIELLE	129
7.1 Plaque plane traitée par couche contrainte	129
7.1.1 <i>Evaluation expérimentale du système non-amorti</i>	130
7.1.2 <i>Optimisation multiobjectif robuste</i>	132
7.1.3 <i>Vérification expérimentale des solutions optimales robustes</i>	135
7.1.4 <i>Discussion des résultats</i>	137
7.2 Application industrielle : Compresseur de réfrigérateurs	139
7.2.1 <i>Essai expérimentale avec le compresseur</i>	142
7.3 Conclusions	144
CHAPITRE 8	
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	145
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	149
ANNEXE A	160
A.1 Matrices élémentaires de raideur et de masse d'un élément fini de plaque sandwich	160
A.2 Plaque sandwich à cinq couches	162
A.2.1 <i>Paramétrisation du modèle sandwich de plaque à cinq couches</i>	168
ANNEXE B	169
B.1 Matrices viscoélastiques stochastiques	169
ANNEXE C	172
C.1 Procédure d'interfaçage entre MATLAB® et ANSYS®	172

CHAPITRE I

Introduction Générale

1.1 – Contexte de l'étude

L'étude présentée dans ce mémoire de thèse s'inscrit dans une thématique de recherche commune des équipes de recherche du Laboratoire de Mécanique des Structures (LMEst), de la Faculté de Génie Mécanique (FEMEC), Université Fédérale de Uberlândia (UFU), et du Laboratoire de Mécanique Appliquée Raymond Chaléat (LMARC), Université de Franche-Comté (UFC), qui concerne **la conception optimale** de structures mécaniques complexes avec **amortissement viscoélastique**.

La concurrence sur le marché international pousse la modernisation des processus et des produits industriels qui doivent se conformer aux conditions de confort et de sécurité des opérateurs et des utilisateurs. De plus, les normes environnementales tendent à imposer des restrictions plus sévères aux niveaux admissibles des vibrations et du bruit des équipements industriels. Dans ce contexte, la maîtrise des phénomènes vibratoires est un point essentiel dans la conception de systèmes mécaniques complexes. Les vibrations peuvent engendrer des perturbations dans l'environnement (instabilités aérodynamiques, perturbations de la visée optique, etc.) et occasionner des gênes importantes (niveau de rayonnement acoustique, accélérations perçues par les passagers d'un véhicule, etc.), sans compter les risques de rupture dues à la fatigue vibratoire (aubes de moteurs d'avion, fissures dans les fuselages, etc.) (Kergourlay, 2004).

En conséquence, dans les deux dernières décennies, plusieurs travaux de recherches ont été consacrés à la réduction des niveaux de vibration et de bruit des systèmes mécaniques. Comme exemple de techniques passives, on peut citer l'utilisation des matériaux absorbants (Nashif et al., 1985), des amortisseurs dynamiques de vibration (ADV) (Korenev et Reznikov, 1993), ou encore les matériaux piézoélectriques combinés avec les circuits électriques passifs, appelés « *Shunted piezoceramics* » (Banks, 1996). Comme exemple de technique active, on peut utiliser les matériaux piézoélectriques comme capteurs et/ou comme actionneurs (Fuller et al, 1996).

On remarque qu'il n'existe pas une méthode qui peut être considérée comme absolument supérieure aux autres, et le choix de la méthode la plus appropriée doit être fait tenant compte des caractéristiques spécifiques du problème étudié, en termes de coût d'application, d'efficacité du traitement choisi, de la bande fréquentielle utile, des dimensions physiques et des conditions environnementales (Nashif et al., 1985). Néanmoins, par rapport aux approches actives, les procédures passives d'atténuation des vibrations par l'utilisation des matériaux viscoélastiques présentent des avantages importants : ils assurent la stabilité ; ils

sont efficaces dans les bandes de fréquence larges ; ils présentent des coûts modérés d'installation et d'entretien ; et leur fonctionnement n'exige aucune consommation d'énergie externe. Cependant, il y a certains inconvénients inhérents tels que l'augmentation du poids du système original et le fait que son efficacité dépend fortement des conditions opérationnelles et environnementales (Nashif et al., 1985).

Aujourd'hui, il est connu qu'un grand nombre de problèmes de vibrations peut être résolu par une augmentation du niveau de dissipation dans la structure par l'ajout d'un traitement amortissant passif, dans le but d'amortir les amplitudes de vibration d'un maximum de résonances sur une large bande fréquentielle. Dans ce cadre, l'utilisation de matériaux viscoélastiques dans les structures industrielles, en vue de réduire leur niveau vibratoire et acoustique, devient un procédé de plus en plus utilisé et relativement peu coûteux (Rao, 2001 ; Samali et Kwok, 1995). A titre d'exemple, on peut décrire les applications suivantes :

- *Applications automobiles* : l'objectif est la réduction des niveaux de vibration et de bruit dans l'habitacle, engendrés par le moteur et les irrégularités de la route, dans le but d'améliorer le confort des occupants. Comme exemple, en Figure 1.1 on illustre quelques zones d'une caisse de véhicule, où les traitements viscoélastiques sont normalement appliqués.

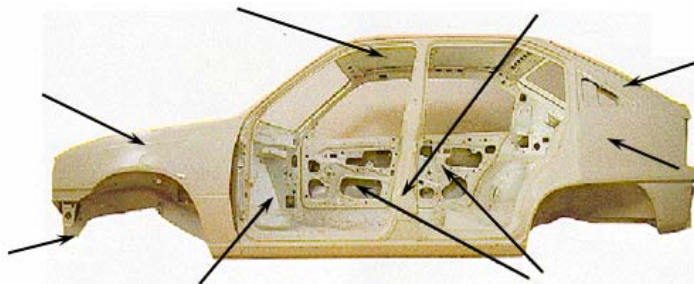


Figure 1.1 – Vue d'une caisse de voiture soumise à traitements viscoélastiques (figure empruntée à la référence Rao (2001)).

- *Applications en génie civil* : pour atténuer les niveaux des vibrations dans les ouvrages causées principalement par des mouvements sismiques et des équipements en fonctionnement, comme réfrigérateurs, appareils de climatisation, ascenseurs, etc., comme illustré en Figure 1.2.

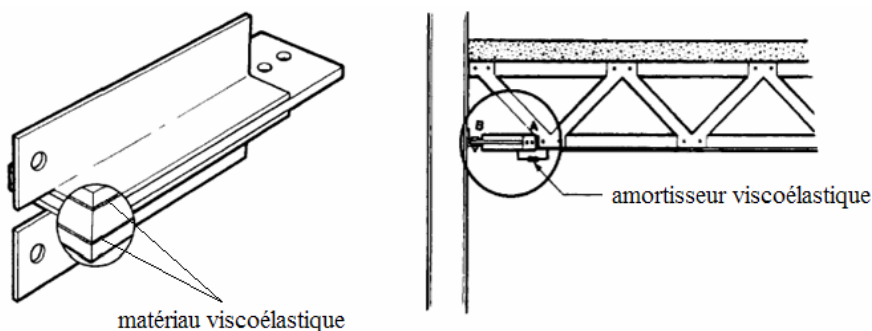


Figure 1.2 – Application des amortisseurs viscoélastique dans des structures de génie civil (figure empruntée à la référence Samali et Kwok (1995)).

- *Applications aéronautiques* : les matériaux viscoélastiques sont employés dans la réduction du bruit interne causé principalement par la circulation d'air autour de l'avion, par le système de contrôle de l'environnement à l'intérieur de l'avion et par le fonctionnement des moteurs. Ces sources engendrent les vibrations des parties du fuselage, occasionnant les vibrations structurales. Les principales applications portent sur l'utilisation des matériaux viscoélastiques entre le fuselage et une couche contrainte sur forme de sandwichs. La Figure 1.3 montre certains endroits d'un fuselage d'avion, où les traitements viscoélastiques sont appliqués.

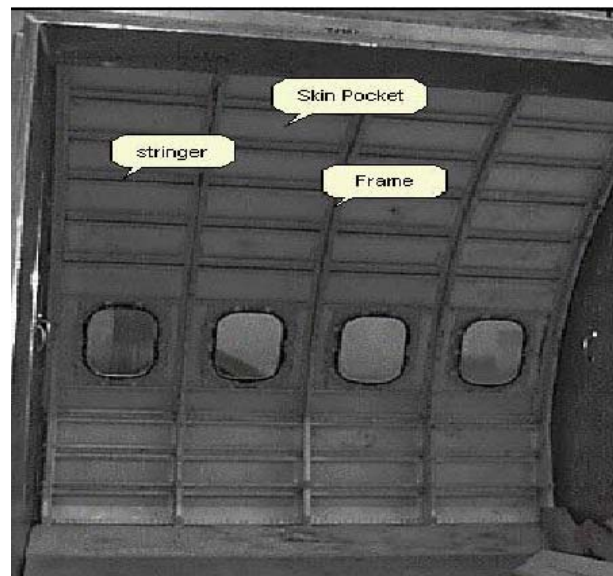


Figure 1.3 – Vue d'un fuselage d'avion avec traitement viscoélastique (figure empruntée à la référence Rao (2001)).

Actuellement, une importante voie de recherche liée à l'utilisation des matériaux viscoélastiques pour le contrôle de vibrations est dédiée à la modélisation analytique et numérique des systèmes mécaniques contenant de tels matériaux. Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, les matériaux viscoélastiques sont caractérisés par un module complexe dépendant de la fréquence et d'autres facteurs tels que la température et la précontrainte (Nashif et al. 1985 ; Christensen, 1982), ce qui conduit à une raideur qui dépend de ces facteurs. Ce fait pose une difficulté supplémentaire pour le calcul des réponses dynamiques (réponses temporelles, réponses forcées et solutions propres) des structures contenant ce type d'amortissement. Néanmoins, on a recours à la simulation numérique par la méthode des éléments finis (EF) pour dimensionner des structures complexes contenant différents types d'amortisseurs viscoélastiques, comme les traitements de surface – où on peut par exemple, insérer une fine couche de polymère entre deux parements métalliques (*Passive Constrained Layer Damping – PCLD*) ou piézoélectrique (*Active Constrained Layer Damping – ACLD*), – ou encore des éléments discretes, comme les joints de translation ou rotation (Nashif et al., 1985 ; Lima et Rade, 2005b), comme illustré en Figure 1.4.

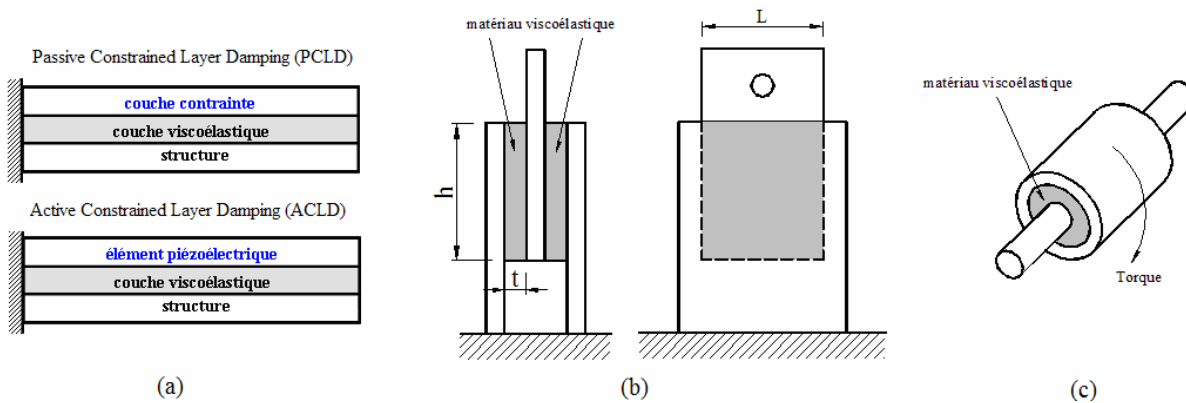


Figure 1.4 – Géométries des amortisseurs viscoélastiques : traitement de surface par couche contrainte passive et active (a), et par joints de translation (b) et rotation (c).

Les modèles mathématiques doivent être capables de représenter convenablement la géométrie et les conditions aux limites des structures tout en tenant compte du comportement viscoélastique qui dépend de plusieurs facteurs, dont les plus importants sont la température et la fréquence d'excitation. En plus, on a l'intérêt d'utiliser ces modèles pour décider sur le meilleur emplacement des amortisseurs et optimiser son utilisation (Lima et al., 2006c) avec le but d'extraire leur maximum d'efficacité en termes d'amortissement.

En phase de projet de conception de systèmes amortissants viscoélastiques appliqués à des structures industrielles, on se trouve confronté aux situations suivantes :

- Structures de géométries complexes nécessitant des modélisations 3D, en utilisant des codes d'éléments finis commerciaux tels que ANSYS® et NASTRAN® ;
- Modélisation du traitement viscoélastique, soit sous la forme des éléments sandwichs de poutre et plaque, soit sous la forme discrète, et leur l'introduction dans les modèles EF 3D ;
- Le besoin d'évaluation rapide du comportement dynamique de ces structures complexes amorties par matériaux viscoélastiques, dans un large ensemble de configurations paramétriques qui caractérisent le traitement ;
- L'optimisation souvent multiobjectif des systèmes viscoélastiques, pour obtenir une configuration du traitement qui soit optimale et/ou robuste au sens de petites variations (incertitudes) dans les paramètres de conception qui caractérisent le traitement amortissant ;
- L'application de méthodologies d'approximations de fonctions et leur couplage avec les algorithmes d'optimisation multiobjectif, pour accélérer le processus de convergence et d'obtention des solutions optimales ;
- L'utilisation des techniques d'évaluation à posteriori des solutions fournies par le processus d'optimisation, pour aider le concepteur à décider sur l'ensemble des solutions optimales.
- L'extension de la théorie des éléments finis stochastiques initialement développées par des éléments élastiques, pour les éléments viscoélastiques (éléments finis stochastiques viscoélastiques). Ce qui permet d'identifier les limites de la modélisation numérique.

L'étude proposée dans ce mémoire a été réalisée dans le but d'apporter des réponses aux besoins énumérés ci-dessus.

1.2 Etat de l'art

Dans ce paragraphe, on présente un état de l'art sur les développements récents en ce qui concerne la modélisation et les applications des matériaux viscoélastiques dans le domaine de la dynamique des structures. Pour cela, quelques travaux importants sur ce sujet sont cités.

1.2.1 Les modèles rhéologiques simples

Les concepts fondamentaux qui concernent l'amortissement passif par l'utilisation des matériaux viscoélastiques et les méthodes analytiques et expérimentales pour caractériser ce type d'amortissement sont bien détaillés dans l'ouvrage de Nashif et al. (1985). Les modèles mathématiques dites classiques (modèles rhéologiques simples), et les modèles modernes qui sont jusqu'à présent utilisés pour représenter le comportement des matériaux viscoélastiques linéaires sont également évoqués par ces auteurs. Ces modèles ont été proposés pour prendre en compte les variations des propriétés des matériaux viscoélastiques en fonction principalement, de la fréquence d'excitation et de la température de fonctionnement. Pour bien comprendre la dépendance des propriétés mécaniques de ces matériaux en fonction des conditions de fonctionnement et environnementales, les auteurs proposent un chapitre bien détaillé sur ce sujet. En ce qui concerne le projet des amortisseurs viscoélastiques, quelques géométries typiques qui sont fréquemment utilisées sont abordées par les auteurs, comme par exemple, les traitements de surface par l'utilisation de couches contraintes passives et actives, et les éléments discrets, comme les joints de translation et de rotation (voir Figure 1.4).

Dans le même contexte des techniques de contrôle passif de vibration et bruit par l'utilisation d'amortissement, Mead (1982) rappelle les principes de la mécanique vibratoire des structures amorties, notamment par l'emploi des modèles généraux d'amortissement visqueux (proportionnel à la vitesse), le modèle hystérétique ou structural (proportionnel au déplacement), et les modèles rhéologiques classiques pour représenter le comportement viscoélastique. On constate que les modèles visqueux et hystérétiques ne sont pas appropriés pour décrire le comportement des matériaux viscoélastiques réels (les effets de relaxation des matériaux viscoélastiques) sur des larges bandes fréquentielles. La modélisation par les méthodes analytiques des systèmes structuraux de type poutre et plaque sandwichs contenant ce type d'amortissement sont également évoqués par l'auteur. Dans un contexte plus théorique, Christensen (1982) discute en détail la théorie de la viscoélasticité linéaire et non linéaire, en mettant en évidence les principaux modèles mathématiques développés pour représenter la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques dans le domaine temporel. Parmi les modèles mathématiques étudiés par l'auteur, il y a les modèles rhéologiques simples de Kelvin-Voigt, de Maxwell, de Kelvin-Voigt et Maxwell généralisés, le modèle de Zener, et le modèle généralisé standard, qui ne sont que des combinaisons simples des éléments de ressort et d'amortissement visqueux, traduits par des expressions mathématiquement simples basées sur des dérivées d'ordre entier, utilisées pour représenter

les champs de contraintes et de déformations des matériaux viscoélastiques. Dans le même registre, Bert (1973) montre, dans une vaste révision, que le modèle de Maxwell est bien adapté pour représenter le comportement d'un liquide viscoélastique. Cependant, si on veut représenter le comportement des solides viscoélastiques, ce modèle présente l'inconvénient qu'il n'y a aucun moyen de prévoir les efforts internes de relaxation (l'historique des contraintes-déformations intérieures) des matériaux viscoélastiques réels (Lazan, 1968). Pour surmonter cette difficulté, le modèle de Kelvin-Voigt a été proposé, et c'est la première approximation mathématique du comportement réel d'un solide viscoélastique. Mais l'inconvénient issu de l'utilisation de ce modèle c'est qu'il ne peut pas représenter les réponses élastiques au cours de l'application des chargements, ce qui conduit à un fluage proche de zéro pour les longues durées des chargements (l'historique de chargements) (Lazan, 1968). L'auteur montre aussi que les modèles de Zener et généralisé standard peuvent être utilisés pour représenter les effets de fluage et relaxation des ces matériaux, mais il faut un nombre élevé des paramètres (l'ordre des dérivées entière du modèle) à identifier pour bien représenter la dépendance en fréquence du comportement des matériaux viscoélastiques réels.

1.2.2 Les modèles viscoélastiques modernes

Pour des matériaux viscoélastiques réels, dont les propriétés mécaniques sont fortement dépendantes de la fréquence, le nombre de dérivés d'ordre entier des modèles rhéologiques classiques nécessaires pour représenter le comportement viscoélastique peut être assez élevé. Ceci signifie qu'un nombre élevé des paramètres à identifier est nécessaire pour ces modèles (Bagley, 1983 ; Nashif et al, 1985 ; Lima, 2003). Par conséquent, la combinaison de ces modèles avec des modèles aux éléments finis de grande taille conduit à un système d'équations du mouvement d'ordre beaucoup plus élevé que le modèle initial, ce qui rend difficile l'utilisation des modèles rhéologiques classiques pour des systèmes industriels. Pour pallier à ces difficultés, dans des contributions récentes consacrées à la modélisation mathématique du comportement viscoélastique, Bagley et Torvik (1979 ; 1983 ; 1985) ont essayé d'améliorer les modèles de Zener et généralisé standard, par la réduction du nombre de paramètres nécessaires pour la représentation du comportement des matériaux viscoélastiques linaires, en proposant un modèle mathématique à cinq ou même quatre paramètres à identifier. Pour cela, ils ont remplacé les dérivées d'ordres entières par des dérivées d'ordre fractionnelles pour représenter les champs de contraintes et de déformations des équations constitutives. Ce modèle a été appelé *Fractional Derivative Model (FDM)*. Espíndola et al. (1988 ; 1992 ; 1997 ; 2005) ont montré que si la dépendance en fréquence des matériaux viscoélastiques n'est pas trop forte, on peut utiliser seulement trois paramètres dans le modèle FDM pour représenter le comportement viscoélastique dans une large bande fréquentielle. Pour vérifier l'efficacité du modèle, on a mesuré expérimentalement les propriétés des matériaux viscoélastiques, comme module de stockage et facteur de perte en fonction de la fréquence d'excitation pour plusieurs températures, en utilisant « un type de neutralisateur » dynamique discret d'un degré de liberté composé par une masse et une ressort viscoélastique, comme illustré en Figure 1.5. Pour cela, ils ont utilisé une chambre thermique dans le but de contrôler la température durant l'essai. Pour vérifier la méthodologie proposée, les résultats expérimentaux ont été confrontés avec des

résultats issus de simulation numérique. Par contre, l'inconvénient de la combinaison de ce modèle avec des modèles éléments finis des systèmes complexes est la dimension finale des équations plus élevée, puisqu'il conduit à un système d'équations sous une forme d'équation d'état, qui dépend des paramètres du modèle FDM (Lima, 2003).

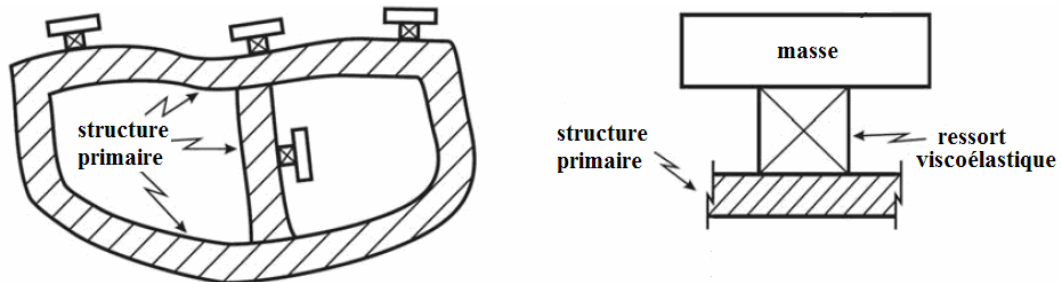


Figure 1.5 – Structure primaire avec neutralisateurs dynamiques (gauche) ; neutralisateur dynamique (droite). (figure adaptée de la référence (Espíndola et al, 2005)).

Golla, Hughes et McTavish (1985 ; 1993) ont proposé le modèle connu sous le nom GHM – *Golla-Hughes-McTavish*. L'idée consiste à représenter le module complexe des matériaux viscoélastiques par un développement en série de fractions partielles. En raison de la forme fonctionnelle qui résulte du modèle, qui ressemble aux fonctions de transfert de systèmes à un degré de liberté dans le domaine de Laplace, le modèle est aussi appelé « modèle des mini-oscillateurs ». Le modèle GHM est un modèle essentiellement du second ordre obtenu par l'introduction des variables ou coordonnées supplémentaires au système initial, qui permettent une description générale de la dépendance en fréquence des propriétés matérielles dans le domaine temporel. Plusieurs auteurs (Lima, 2003 ; Trindade, 2000) qui ont travaillé avec ce modèle, montrent qu'il représente bien la forte dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques, mais contrairement au modèle FDM, a un coût plus élevé, à cause de l'ajout d'un grand nombre des variables dissipatives non physiques (variables internes) au système initial, qui doivent être identifiées par la procédure de lissage de paramètres à travers des nomogrammes des matériaux viscoélastiques fournis par des fabricants comme 3M (3M, 2007). Par un procédé semblable, Lesieutre et Bianchini (1995 ; 1996) ont développé le modèle viscoélastique appelé *Anelastic Displacement Field (ADF)*, qui est basé sur la séparation des champs de déplacement en deux parties : une partie purement élastique et un champ anélastique qui représente la relaxation des matériaux viscoélastiques linéaires. Si on compare les modèles GHM et ADF, on remarque que le modèle GHM utilise une formulation dans le domaine de Laplace devant être transformée pour des analyses dans le domaine temporel. Par ailleurs, on aboutit à une équation du second ordre compatible avec les équations provenant des modèles EF des systèmes mécaniques, tandis que le modèle ADF conduit à des équations du premier ordre de telle façon que la compatibilité entre ces équations et celles provenant du modèle éléments finis n'est obtenue qu'à travers la construction d'un système couplé sous la forme d'équations d'état. D'autre part, même si les modèles GHM et ADF utilisent différents paramètres ayant différentes significations physiques, plusieurs auteurs montrent que les modèles aux éléments finis construits en les utilisant présentent des réponses similaires (Trindade, 2000 ; Lima, 2003).

L'utilisation des modèles FDM, GHM et ADF mène à une étape importante qui concerne l'identification des paramètres, et à ce sujet, de nombreux travaux ont été proposés. Lesieutre et Lee (1996) ont présenté le lissage du matériau ISD112, du fabricant 3M, à une température de 27°C, entre 8 et 8000 Hz en introduisant leurs modèle ADF. Ils concluent que 11 paramètres au total sont nécessaires pour représenter fidèlement le comportement du module de stockage et du facteur de perte du matériau en fonction de la fréquence. Friswell et al. (1997) ont présenté la même analyse pour le modèle GHM, avec trois ou quatre paramètres par modèle pour le matériau ISD112 à 20°C entre 2 et 4800 Hz. A travers les résultats obtenus, ils ont conclu que les modèles ADF et GHM lissent généralement bien les courbes maîtresses des matériaux viscoélastiques dont la dépendance en fréquence est forte.

Dans ce même contexte, Trindade (2000) a discuté la validité des modèles ADF et GHM en se basant sur l'identification des paramètres à partir des données expérimentales (courbes maîtresses) pour les matériaux viscoélastiques ISD112 à 27°C, et DYAD-606 à 38°C, du fabricant Sorbothane. Pour le lissage des paramètres des modèles, il a utilisé la boîte à outils d'optimisation (*Optimization Toolbox*) de Matlab®, plus particulièrement la fonction « *lsqnonlin* », qui utilise un algorithme non-linéaire (*Non Linear Least Squares*) pour minimiser l'écart entre les valeurs calculées et mesurées des parties réelles et imaginaires du module complexe. Il précise qu'il faut utiliser pour le lissage une bande fréquentielle plus large que celle considérée dans l'analyse du système mécanique, de manière à minimiser l'effet des erreurs aux bords de la bande. Ceci car l'analyse du comportement des courbes maîtresses, représentées analytiquement par les modèles ADF et GHM, en dehors de la bande utilisée pour le lissage, a montré des irrégularités concernant l'identification principalement pour le matériau viscoélastique DYAD-606, qui présente des courbes du module de stockage et du facteur de perte plus plates que celles du matériau ISD112. Une proposition de l'auteur pour surmonter ces inconvénients consiste à augmenter le nombre de paramètres (liés aux variables dissipatives des modèles) à être identifiés pour diminuer l'erreur d'identification.

Espíndola et al. (2005) ont appliqué le neutralisateur viscoélastique à des structures dynamiques dans le but d'augmenter leur durée de vie. Pour augmenter l'efficacité des neutralisateurs, ils proposent une méthodologie d'optimisation pour identifier les paramètres du traitement viscoélastique et montrent que le modèle FDM à quatre ou trois paramètres représente fidèlement le comportement viscoélastique dans une large bande fréquentielle. Les auteurs montrent que la méthodologie proposée présente une simplicité d'utilisation et de mise en œuvre numérique, et qu'elle est bien adaptée aux données expérimentales des matériaux viscoélastiques.

Dans le même contexte d'identification paramétrique, Lima (2003) dans un travail de dissertation de Master, propose des méthodologies d'identification basées sur des stratégies d'optimisation classiques, dans le but d'identifier les paramètres des modèles FDM, ADF et GHM. Les paramètres de chaque modèle sont identifiés pour plusieurs températures du matériau viscoélastique ISD112, et dans une large bande fréquentielle. L'ajustement proposé par l'auteur est basé sur l'emploi d'une méthode de moindres carrés permettant de minimiser l'écart entre les parties réelles et imaginaires des modèles viscoélastiques avec les données expérimentales des courbes maîtresses. Il montre que la forte dépendance du comportement des matériaux viscoélastiques avec les conditions de fonctionnement (fréquence de vibration)

complicque énormément l'identification paramétrique principalement pour les modèles ADF et GHM. Dans ce cas, il faut en général augmenter considérablement le nombre de paramètres pour approcher correctement les modèles aux mesures expérimentales, ce qui signifie une augmentation du coût de leur identification, et de l'application aux modèles éléments finis des systèmes structuraux. Toutefois, Espíndola et al. (2005) montrent l'avantage d'utiliser le modèle dérivatif d'ordre fractionnaire FDM, permettant de minimiser le nombre des paramètres à identifier.

D'une manière générale, à travers plusieurs travaux de recherche, il ressort que le principal inconvénient issu de l'utilisation des modèles ADF et GHM associés à une discrétisation par éléments finis, est qu'ils conduisent à des systèmes de grande taille par rapport au nombre de degrés de liberté initial, puisqu'ils ajoutent des coordonnées (ou variables) auxiliaires internes non physiques qu'on doit identifier par les procédures d'optimisation, pour tenir compte de la dépendance en fréquence des matériaux viscoélastiques (Lima, 2003). Même si on utilise des méthodes de réduction de modèles, plusieurs auteurs montrent que pour des systèmes mécaniques industriels, l'utilisation de ces modèles rend pratiquement inexploitable les analyses aux valeurs propres (Balmès, 1996a ; 1996b) et les calculs des réponses dans le domaine temporel ou bien dans le domaine fréquentiel (Salmanoff, 1997 ; Lam, 1997), en raison du coût numérique élevé pour traiter les matrices globales augmentées (Trindade, 2000 ; Lima, 2003). Dans le but de diminuer les coûts numériques, plusieurs auteurs ont montré plus récemment les avantages d'utiliser directement les données expérimentales de ces matériaux obtenus dans le domaine fréquentiel, par l'utilisation de l'approche module complexe (Balmès et Germès, 2002 ; Lima et al, 2006b ; Kergourlay, 2004) pour l'analyse des systèmes mécaniques complexes amortis par matériaux viscoélastiques. L'avantage de cette approche non paramétrique est qu'on peut représenter les comportements généraux des matériaux viscoélastiques fortement dépendants de la fréquence et de la température, sur une large bande fréquentielle. De plus, puisque les données expérimentales sont directement utilisées à travers une fonction module complexe, on peut contourner les étapes liées au choix de représentation du comportement viscoélastique par l'emploi d'un modèle paramétrique spécifique (Kelvin-Voigt, Maxwell, Zener, FDM, ADF ou GHM). On évite également l'étape d'identification des paramètres caractérisant le modèle choisi par l'utilisation des stratégies d'optimisation paramétrique. Un autre avantage présenté par le module complexe c'est qu'on peut le combiner aisément avec des systèmes mécaniques de grande taille (systèmes industriels), ce qui permet le calcul des réponses du système amorti principalement dans le domaine fréquentiel.

Par ailleurs, d'autres modèles viscoélastiques qui sont moins fréquemment utilisés ont été développés, comme les modèles proposés par Johnson et Quigley (1992) et Yiu (1993). Ceux deux modèles viscoélastiques sont semblables, puisqu'ils sont basés sur le modèle de Maxwell généralisé pour représenter le comportement viscoélastique. L'inconvénient issu de ces modèles est aussi le nombre élevé de paramètres nécessaires pour représenter le comportement viscoélastique.

1.2.3 Applications des matériaux viscoélastiques

En ce qui concerne les applications récentes des matériaux viscoélastiques dans le domaine de la dynamique des structures complexes, Rao (2001) propose un vaste travail de révision pour montrer que ces matériaux sont largement utilisés dans les industries automobiles, de génie civil, et aéronautique, par l'application de plusieurs configurations géométriques. Le but est d'atténuer les niveaux de vibration et de bruit dans les véhicules et dans les avions commerciaux. A travers des résultats expérimentaux de plusieurs structures mécaniques amorties par ces matériaux, il montre l'efficacité de quelques types de traitements viscoélastiques, comme l'utilisation des couches contraintes passives et actives pour amortir plusieurs modes simultanément dans une large bande fréquentielle, et l'application des éléments viscoélastiques discrets synchronisés (*Tuned Viscoelastic Dampers (TVD)*), dans le but d'augmenter la bande d'action de ces éléments par rapport aux amortisseurs dynamiques de vibrations classiques (*DVA – Dynamic Vibration Absorbers*). Pour cela, ils ajoutent au DVA classique l'amortissement viscoélastique, comme illustré en Figure 1.6 ci-dessous. De plus, l'auteur montre quelques courbes expérimentales qui montrent que les traitements viscoélastiques d'une manière générale, améliorent la qualité à l'intérieur des structures mécaniques par la réduction des niveaux acoustiques.

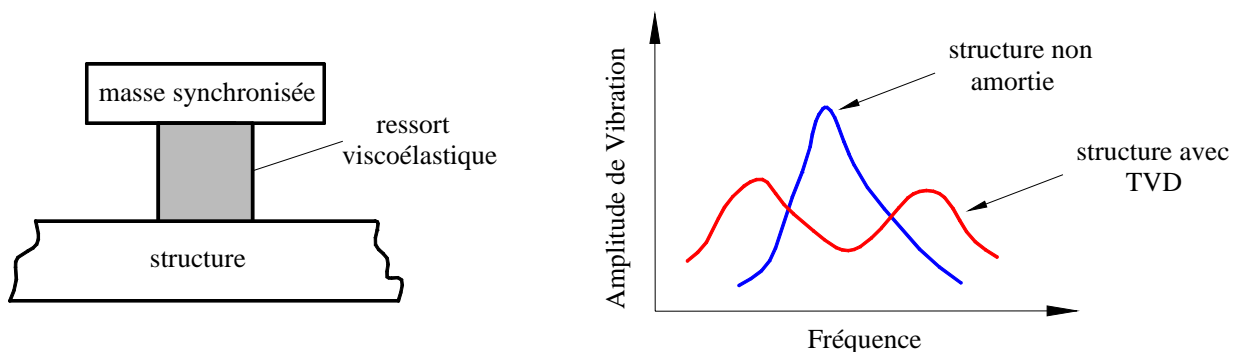


Figura 1.6 – Amortisseur viscoélastique discret synchronisé (TVD)
(figure empruntée à la référence Rao (2001)).

Samali et Kwok (1995) montrent que ces matériaux ont été appliqués à plusieurs structures complexes de génie civil, soit sous forme de couches contraintes, soit comme des éléments discrets, toujours dans le but d'atténuer les niveaux vibratoires et les niveaux de bruits intérieurs à ces structures, qui sont souvent induits par les vents et par les tremblements de terre. Ils montrent aussi quelques résultats expérimentaux de plusieurs ouvrages importants, qui ont été traités par différents types d'amortisseurs viscoélastiques comme celui illustré en Figure 1.7, qui a été appliqué à plusieurs points du bâtiment *Columbia SeaFirst Building* à Seattle, aux Etats-Unis.

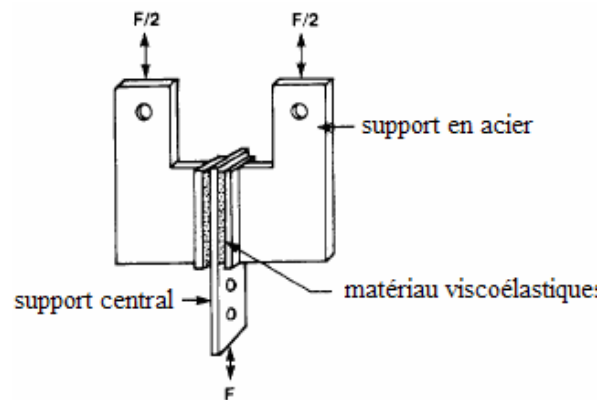


Figura 1.7 – Amortisseur viscoélastique appliqué au *Columbia SeaFirst Building* (figure empruntée à la référence Samali et Kwok (1995)).

Dans ce même contexte, Lima et al. (2003a ; 2003b ; 2005b ; 2006b ; 2006c ; 2007a ; 2007b) ont proposé plusieurs travaux de recherche qui concernent les procédures de modélisation basées sur les éléments finis comprenant les traitements de surface par des éléments multicouches de poutres et plaques, et les éléments discrets par la représentation des joints de translation et de rotation. Pour cela, ces modèles sont basés sur des éléments ressorts simples du type viscoélastiques pour lesquelles les raideurs sont complexes, comme illustré en Figure 1.8. Les auteurs ont également abordé quelques méthodes de réduction de modèles adaptées aux modèles viscoélastiques ADF et GHM dans le contexte du contrôle passif de vibrations des structures amorties par matériaux viscoélastiques. Dans d'autres travaux l'auteur (Lima, 2003) a mis en évidence les avantages et les inconvénients pour chaque modèle viscoélastique. Pour cela, il a utilisé des structures bidimensionnelles telles que des treillis et des portiques comprenant différents types d'amortisseurs viscoélastiques. Pour vérifier la procédure de modélisation des éléments multicouches, et dans le but de valider les résultats issus des simulations numériques, il a évalué expérimentalement l'efficacité des traitements viscoélastiques pour poutres et plaques traitées partiellement par couches contraintes passives.

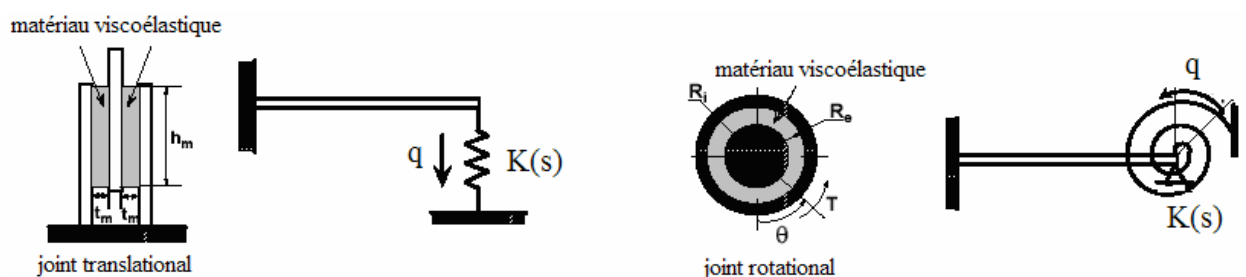


Figura 1.8 – Modélisation mathématique des amortisseurs viscoélastiques discrets.

Dans d'autres travaux, Balmès et al. (1996a ; 1996b ; 1997 ; 2002a ; 2002b ; 2005 ; 2006a ; 2006b) ont beaucoup contribué aux développements récents en ce qui concerne les techniques de modélisation des structures viscoélastiques complexes et les stratégies numériques qui peuvent être employées pour analyser et prédire le comportement des systèmes industriels traités par ces matériaux. Dans le cas d'un comportement viscoélastique fortement dépendant des conditions de fonctionnement et de la température, les auteurs

discutent sur la pertinence des modèles analytiques des éléments multicouches pour représenter la réalité physique du comportement viscoélastique. Ainsi, ils proposent (Balmès et Germès, 2002b) la modélisation des éléments multicouches qui sont utilisés jusqu'au présent par l'utilisation directe des éléments volumiques qui sont proposés par les codes éléments finis – ANSYS® et NASTRAN® spécifiquement – pour représenter plus fidèlement l'état contrainte-déformation des matériaux viscoélastiques. Les couches plus rigides que les couches viscoélastiques (structure base et couches contraintes) sont modélisées par des éléments de plaque simple. Cette méthodologie de modélisation est en réalité une approximation de la modélisation la plus fine, qui utilise également des éléments finis volumiques pour toutes les couches qui constituent un élément fini multicouche. Néanmoins, les auteurs montrent qu'elle peut conduire à des tailles de modèles prohibitives. D'autres articles abordent plus souvent des fonctions analytiques ou des données tabulées pour représenter la dépendance en fréquence et température des propriétés des matériaux viscoélastiques commerciaux. Pour des applications industrielles, Balmès et Germès (2002b) proposent des techniques de réduction des modèles viscoélastiques dans le domaine fréquentiel, basées sur l'enrichissement des bases de condensation qui sont calculées pour le comportement conservatif associé des matériaux viscoélastiques qu'on peut identifier à travers des propriétés asymptotiques du lissage.

1.2.4 Optimisation de structures complexes amorties par matériaux viscoélastiques

Comme on a pu le remarquer, le développement des systèmes et des technologies de contrôle passif par l'utilisation des amortisseurs viscoélastiques fait l'objet actuellement de plusieurs projets de recherche dans le monde. L'analyse des publications trouvées dans la littérature montre que les principaux centres d'intérêt sont : 1) la modélisation des éléments multicouches qui permettent l'introduction du comportement viscoélastique et qu'on peut également combiner avec des modèles aux éléments finis des systèmes complexes ; 2) la représentation du comportement viscoélastique par des modèles mathématiques fiables, et son introduction dans les modèles multicouches ; et 3) la proposition d'une conception du traitement viscoélastique qui soit efficace en termes d'amortissement, en déterminant ses caractéristiques géométriques, c'est-à-dire, l'identification d'une conception en avant-projet des structures amorties par des stratégies d'optimisation. Dans ce contexte, on remarque que peu des travaux ont été proposés (Espíndola et al, 2004), en raison principalement des difficultés dans la combinaison efficace des modèles viscoélastiques avec des modèles aux éléments finis des structures industriels, ou les difficultés à traiter les matrices viscoélastiques complexes dépendantes principalement de la fréquence d'excitation et de la température du matériau. De plus, le temps de calcul des réponses forcées pour des modèles aux éléments finis des systèmes amortis par matériaux viscoélastiques de grande taille (quelques centaines de milliers de degrés de liberté (d.o.f)), dans un processus itératif d'optimisation paramétrique et/ou de recalage de modèles, peut être prohibitif et inexploitable (Lima et al, 2006b).

Dans ce contexte, une voie importante de recherche faisant partie de la modélisation est l'utilisation des stratégies d'optimisation de dispositifs viscoélastiques visant la réduction du coût et du temps d'exécution, et la maximisation de la performance du traitement viscoélastique, en

cherchant les paramètres optimaux qui caractérisent l'amortissement. De plus, l'optimisation doit également constituer un outil d'investigation pour le concepteur pendant la phase d'avant-projet ou de projet des structures amorties par des matériaux viscoélastiques. Dans une procédure d'optimisation, on remarque que les concepteurs sont fréquemment confrontés à des objectifs contradictoires. Par exemple, dans la dynamique des structures on cherche simultanément une diminution de la masse totale d'une structure mécanique et une augmentation de sa rigidité (en principe la diminution de la masse totale est accompagnée d'une augmentation de la souplesse et donc des déplacements des nœuds). De telles situations sont fréquemment traitées par des approches d'optimisation multiobjectifs ou multicritères (Goldberg, 1989 ; Eschenauer et al, 1990). Dans ce contexte, principalement en ce qui concerne l'optimisation multiobjectif des systèmes dynamiques non amortis, on peut rencontrer plusieurs travaux de recherche, dont les auteurs proposent de nombreuses stratégies d'optimisation efficaces, souvent couplées avec des techniques d'approximations de fonctions, comme par exemple, l'utilisation des réseaux des neurones artificiels (Ait Brik, 2004a ; Soteris, 2004 ; Lima et al, 2006c), les méthodologies de surface de réponses (Ghanmi et Bouazzi, 2005 ; Lima et al, 2007b), ou encore, l'emploi des méthodes de réduction de modèles (Ait Brik, 2003 ; Balmès et Germès, 2002b ; Lima et al, 2006b). Ces stratégies sont souvent utilisées dans le but d'augmenter l'efficacité des algorithmes d'optimisation multiobjectifs en réduisant le temps de calcul pour obtenir les solutions optimales, puisque l'optimisation multiobjectif exige généralement un grand nombre d'évaluations des fonctions coûts. Dans des travaux récents dans ce domaine, Ait Brik (2003) propose dans sa thèse de nombreux exemples d'optimisation multiobjectifs appliquées à plusieurs problèmes de l'ingénierie mécanique académiques et industriels, comme l'optimisation d'un moteur d'un avion à plus de 64000 degrés de liberté. Il propose aussi une stratégie d'optimisation robuste en introduisant des fonctions supplémentaires pour évaluer la robustesse des solutions optimales. De plus, des techniques de fouille des données à *posteriori* et le couplage des techniques d'approximations de fonctions et condensation robuste avec les algorithmes multiobjectifs sont également abordés par l'auteur.

Balmès et Bobillot (2002) ont proposé des stratégies d'optimisation paramétrique pour des systèmes viscoélastiques, plus spécifiquement, pour une enceinte vibroacoustique, dans le but d'évaluer les changements des épaisseurs des couches viscoélastiques et contraintes, et les modifications dans la géométrie d'assemblage, par un modèle aux éléments finis de grande taille. Pour cela, ils ont proposé une méthode de condensation de modèles avec enrichissement de la base par des résidus statiques de premier ordre.

1.2.5 Prise en compte des incertitudes dans le projet et optimisation de structures viscoélastiques

Lors de la phase de conception d'une structure mécanique en présence d'amortissement viscoélastique, un aspect important à considérer qui doit répondre aux exigences de projet en ce qui concerne la flexibilité des modifications et l'évaluation de la performance du traitement viscoélastique d'une manière générale, est la prise en compte des incertitudes sur les paramètres de conception. En effet, même si on arrive aujourd'hui à traiter

des modèles éléments finis de grande taille par matériaux viscoélastiques, il est très difficile de prendre en compte les caractères incertains des informations données par les mesures et le modèle. Dans ce cas, il suffit de réaliser plusieurs expérimentations pour rendre compte des limites d'une modélisation déterministe. Par contre, à travers une méthode de propagation des incertitudes de type probabiliste comme la méthode des éléments finis stochastiques (*Stochastic Finite Element Model - SFEM*) on peut prendre en compte des incertitudes dans les modèles éléments finis de systèmes viscoélastiques, pour répondre aux différentes exigences des projets, parmi lesquels on distingue l'*analyse* et la *conception*. Récemment, plusieurs travaux ont été proposés en ce qui concerne la modélisation et l'introduction des incertitudes dans le cadre des éléments finis des systèmes non amortis. L'introduction des incertitudes dans les modèles aux éléments finis peut être faite soit à travers des incertitudes statistiques, par l'utilisation de variables aléatoires, dont on connaît la loi de probabilité, soit par des variables incertaines et bornées (Dessombz et al, 2001), qu'on modélise par des intervalles définies par la physique. Différentes techniques existent pour résoudre les problèmes stochastiques comme la méthode de simulation de Monte Carlo (MC) qui est souvent considérée comme la méthode de référence (Schinozura, 1972 ; Rubinstein, 1981 ; Papadrakakis et Kotsopoulos, 1999), mais qui a l'inconvénient d'être très coûteuse en terme de temps de calcul, et pour cela, d'autres alternatives ont été proposées comme la méthode du Latin Hyper Cube (HCL) (Iman et Conover, 1980 ; Florian, 1992 ; Mantefel et Randall, 2000), qui permet de réduire de manière significative les coûts de calcul de la simulation de Monte Carlo, tout en conservant son niveau de prédiction. Il y a aussi les méthodes de perturbation qui sont basées sur une expansion en série de Taylor (Kleiber et Hien, 1992 ; Alvin, 1998), ou bien les expansions en série de Neumann (Yamazaki et Schinozuka, 1988 ; Lei et Qiu, 2000), des réponses autour des moyennes des variables aléatoires, et les méthodes spectrales qui utilisent des fonctions de base dans l'espace de Hilbert (Ghanem et Spanos, 1991 ; Ghanem et Kruger, 1996), associées aux problèmes aléatoires. Ces fonctions peuvent être des polynômes orthogonaux d'une façon générale, et un chaos polynomial en particulier. Dans ce cas, on utilise des variables aléatoires par la discrétisation des champs aléatoires continus.

1.3 Description des travaux

Le but de ces commentaires présentés dans la section précédente est de montrer l'évolution des divers aspects en ce qui concerne la modélisation, l'application et l'évaluation de l'amortissement viscoélastique dans le domaine de la dynamique des structures. D'autre part, cette étude bibliographique est importante pour montrer les aspects qui seront abordés et approfondis dans la suite de ce travail, pour situer les contributions qu'il porte dans le domaine de l'amortissement viscoélastique.

D'une manière générale, la recherche développée concerne la maîtrise de la réponse dynamique des structures industrielles complexes amorties par matériaux viscoélastiques. Elle vise au développement des méthodes de conception et de dimensionnement, adaptées à l'optimisation multiobjectif des structures mécaniques d'architecture complexes contenant de l'amortissement viscoélastique. En particulier, on propose des procédures efficaces de calcul (comprenant le dimensionnement, l'optimisation multiobjectif et la prise en compte des

incertitudes) adaptées aux structures complexes, modélisées par des modèles aux éléments finis contenant un grand nombre de degrés de liberté (d.d.l.).

Dans le contexte de modèles 3D à grand nombre de d.d.l., les forts niveaux de variations des paramètres et la nécessité d'un grand nombre d'analyses, conduit à exploiter largement les méthodes d'approximation de fonctions : réanalyse de structures modifiées, condensation robuste de modèles, réseaux de neurones et les méthodologies de surface de réponse. On tient compte du fait qu'en ingénierie mécanique, les incertitudes sont issues de plusieurs sources : erreurs de modélisation et de modèle de comportement des phénomènes physiques, caractéristiques mécaniques des matériaux (module d'Young et masse volumique), procédés de fabrication et d'assemblage des composants mécaniques (épaisseur de tôles, raideur de jonction, etc.). La prise en compte de ces incertitudes dans les procédures d'optimisation multiobjectif des systèmes viscoélastiques nécessite l'introduction des indicateurs de robustesse des solutions vis-à-vis de ces incertitudes, afin de trouver les solutions les plus stables.

Plusieurs travaux montrent que la robustesse d'une solution optimale doit être évaluée à la fin de la procédure d'optimisation déterministe, et qu'on doit ensuite sélectionner les solutions plus stables dans l'espace des solutions robustes par des critères stochastiques. Dans ce mémoire, on s'intéresse à une autre approche car on suppose que la solution à la fois optimale et robuste n'est pas forcément une solution dans l'espace déterministe. Pour cela, la robustesse est introduite comme une fonction objectif supplémentaire à maximiser, donc le problème d'optimisation déterministe est enrichi par des fonctions de robustesses supplémentaires afin de guider le processus d'optimisation vers les régions de l'espace des solutions qui sont à la fois optimales et robustes.

La démarche générale « conception robuste des systèmes viscoélastiques » proposée est représentée par le schéma synoptique illustré en Figure 1.9 ci-dessous. Cette démarche comporte les étapes suivantes :

- Modélisation de l'amortissement viscoélastique par l'utilisation de l'approche module complexe, bien adapté au cas d'analyse de réponses dans le domaine fréquentielle (calcul des fonctions réponses fréquentielles – FRFs) ;
- Modélisation des éléments de plaque sandwichs et leur paramétrisation, dans le but de définir l'espace de conception à partir du modèle nominal, en mettant tout en évidence les paramètres de design (variables de projet) ;
- Calculs multimodèles utilisant des modèles condensés très prédictifs robustes vis-à-vis des modifications structurales et des incertitudes, selon l'approche paramétrique ;
- Optimisation multiobjectif déterministe et robuste basées sur des algorithmes évolutionnaires, et leur couplage avec de méthodes d'approximation de fonctions, comme les réseaux de neurones et les surfaces de réponses ;

- L'analyse de sensibilité paramétrique *à priori* basée sur des dérivées de première ordre des réponses fréquentielles des systèmes amortis par rapport aux épaisseurs de couches viscoélastiques et contraintes, et par rapport à la température du matériau viscoélastique ;
- Traitement et gestion des solutions optimales contenues dans un espace de dimension très large par les techniques de fouille des données (SOM) ;
- Extension de la théorie des éléments finis stochastiques (SFEM) au cas de systèmes viscoélastiques (Eléments Finis Stochastiques Viscoélastiques), dans le but de proposer un outil d'évaluation des petits changements sur les paramètres qui caractérisent le traitement viscoélastique.

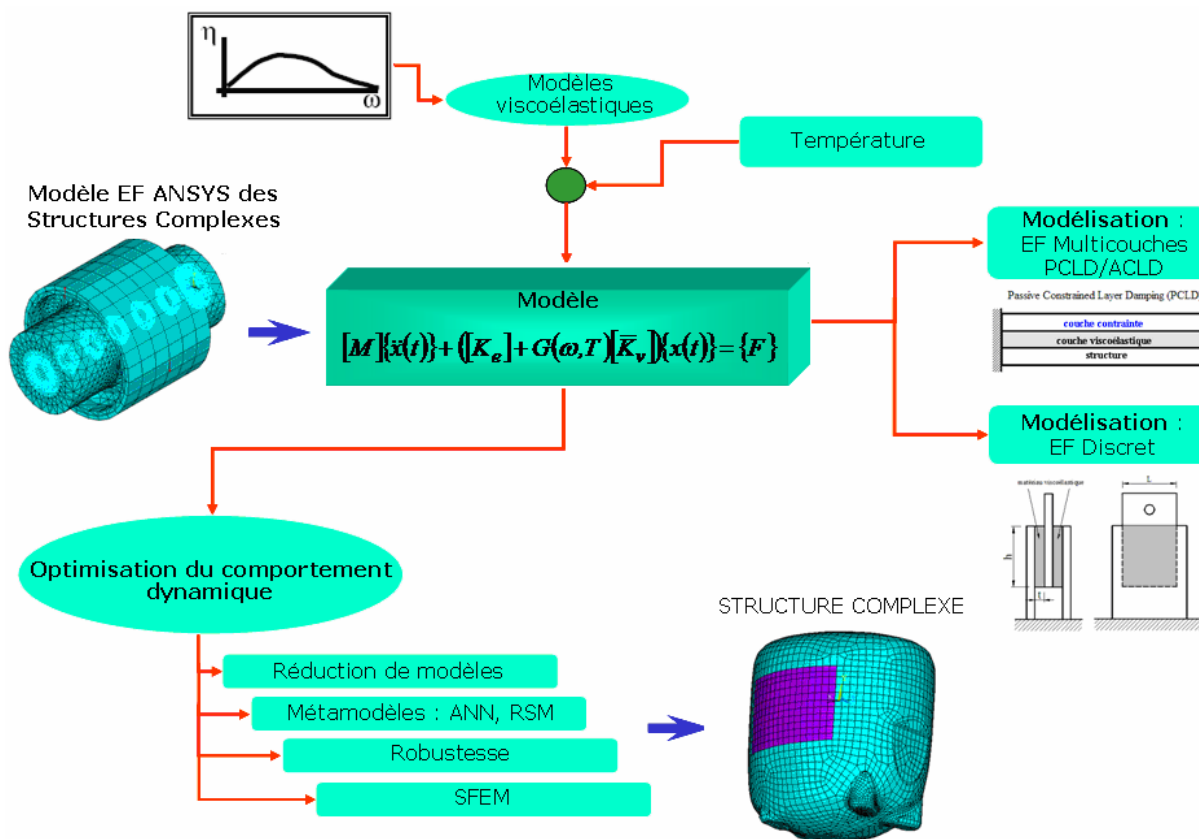


Figura 1.9 – Conception robuste des systèmes amortis par matériaux viscoélastiques.

1.4 Contenu du mémoire

Le **Chapitre 2** présente un bilan général de la connaissance actuelle en ce qui concerne la viscoélasticité linéaire, et les modèles mathématiques utilisés pour représenter ce type d'amortissement. On se place dans le cadre de la viscoélasticité linéaire appliquée aux matériaux homogènes isotropes, pour introduire l'approche module complexe. Les modélisations ainsi couramment utilisées sont montrées – modèles rhéologiques classiques, modèles à fractions rationnelles et modèles à dérivées fractionnaires. Finalement, la mise en

œuvre de l'approche module complexe combinée avec la méthode des éléments finis est discutée et on montre leur pertinence pour le calcul de réponses fréquentielles.

Dans le **Chapitre 3** on présente la modélisation aux éléments finis des éléments de plaque sandwichs (on s'intéresse aux modèles à 3 couches), basé sur le travail original de Kathua et Cheung (1978) ainsi que la paramétrisation du modèle aux éléments finis de plaque multicouche, en mettant en évidence les paramètres définissant l'espace de conception. La paramétrisation est une étape essentielle de la modélisation, facilitant l'introduction des incertitudes et/ou modifications paramétriques, et le calcul des sensibilités paramétriques, qui sont souvent utilisées dans les processus d'optimisation et/ou de recalage de modèles.

Le **Chapitre 4** est consacré à des méthodes d'approximation des réponses qui seront utilisées dans les procédures d'optimisation multiobjectif, afin d'évaluer les modifications sur les paramètres de conception au cours d'optimisation, et de calculer les réponses en présence d'incertitudes. Dans ce cas, en raison de la taille des modèles complexes traités par matériaux viscoélastiques, les réanalyses exactes ne sont pas envisageables pour des raisons évidentes de coût de calcul de la réponse fréquentielle. La réduction de modèle s'inscrit alors naturellement dans les stratégies de conception robuste, et dans ce contexte, on propose deux stratégies de réanalyse approchée :

- Une première méthode basée sur la réduction de modèles éléments finis de systèmes amortis, en utilisant les techniques de condensation directe. On montrera que ces condensations sont robustes vis-à-vis des petites modifications structurales (incertitudes), ce qui constitue aussi une contribution de ce mémoire de thèse.
- Une seconde méthode basée sur l'implémentation des techniques d'approximation de fonctions, aussi appelées métamodèles, telles que les réseaux de neurones et les surfaces de réponses classiques et adaptatives. Le but est de coupler ces techniques avec les algorithmes génétiques multiobjectif, pour accélérer la convergence et pour diminuer le coût de calcul lors de l'optimisation. L'implémentation et le couplage des surfaces de réponses adaptatives composée de plusieurs variables de conception, constituent une autre contribution apportée.

Pour vérifier les stratégies proposées, on montre quelques applications numériques en utilisant une structure moyennement complexe, d'intérêt industriel, composée par une structure de type plaque courbe renforcée par des raidisseurs partiellement traitée par des éléments multicouches développés en Chapitre 3.

Dans le **Chapitre 5** on discute la stratégie d'optimisation multiobjectif robuste adoptée dans ce mémoire pour résoudre les problèmes d'optimisation des systèmes amortis par matériaux viscoélastiques. L'optimisation multiobjectif consiste à choisir, en présence de critères multiples, une (des) alternative(s) parmi un nombre infini qui varient généralement dans un domaine continu (Ait Brik et al, 2004b). L'objectif est de proposer les principales stratégies pour le choix d'une méthode d'optimisation multiobjectif en se basant sur la nature du problème à traiter, ainsi que le choix du concepteur et ses préférences. Dans ce chapitre, on montre aussi quelques exemples de couplage entre les algorithmes génétiques et les méthodes d'approximation de fonctions, dans le but d'accélérer la convergence de l'algorithme, et

diminuer le temps pour obtenir les solutions optimales. On illustre aussi, par un exemple, la prise en compte des incertitudes sur les paramètres de conception au cours d'une procédure d'optimisation multiobjectif d'un système viscoélastique, combinant les outils montrés au chapitre précédent.

Dans le **Chapitre 6** on s'intéresse à la notion de propagation des incertitudes, et l'analyse des sensibilités paramétriques, qui sont liées aux systèmes viscoélastiques par couches contraintes. Les incertitudes sont prises en compte dans les modèles viscoélastiques multicouches selon l'approche paramétrique. Pour cela, on s'intéresse à la technique de discrétisation des champs aléatoires fondée sur un développement de Karhunen-Loève, en présentant aussi la formulation sur laquelle est basée la méthode des éléments finis stochastiques viscoélastiques, ce qui constitue une autre contribution apportée par ce mémoire. Pour résoudre les réponses fréquentielles aléatoires, on utilise dans ce mémoire la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL), souvent adoptée comme étant la référence. Dans une deuxième étape, ce chapitre présente la méthode d'évaluation des sensibilités des paramètres géométriques qui caractérisent le traitement viscoélastique, et la température du matériau, qui constitue une autre contribution apportée par ce mémoire.

Le **Chapitre 7** présente, dans un premier temps, une étude expérimentale d'une plaque plane traitée par couches contraintes. Le but est de vérifier les méthodologies de modélisation des éléments sandwichs composés par trois couches, et la méthodologie d'optimisation multiobjectif robuste, en vérifiant si les solutions calculées sont réellement optimales et robustes au sens de petites modifications des paramètres de conception de la structure réelle. Dans un deuxième temps, on montre l'étude numérique et expérimentale d'une carcasse de compresseur utilisé dans des réfrigérateurs, traitée par couches contraintes, fournie par la Société EMBRACO, au Brésil.

Dans le **Chapitre 8** on dresse le bilan et les conclusions générales ainsi que des perspectives de continuité des travaux de recherche.

CHAPITRE 2

Amortissement Viscoélastique

Dans ce chapitre on présente la caractérisation du comportement dynamique des matériaux viscoélastiques et les principaux modèles mathématiques destinés à la caractérisation du comportement de ces matériaux. Les principes fondamentaux de la viscoélasticité linéaire, les modèles rhéologiques simples et les modèles modernes qui ont été proposés pour représenter le comportement viscoélastique, sont également abordés.

2.1 Comportement des matériaux viscoélastiques

Pour sélectionner le matériau viscoélastique le mieux adapté à une application spécifique et dans le but de dimensionner et prévoir les vibrations des structures amorties par ces matériaux, il est important de connaître le comportement le mode de fonctionnement, et les spécificités des matériaux viscoélastiques. Pour cela, la compréhension des propriétés microscopiques et macroscopiques des solides viscoélastiques est primordiale. Ces propriétés induisent la transformation d'une partie de l'énergie mécanique en énergie thermique, ce qui permet en particulier la dissipation de l'énergie vibratoire traduite par l'amortissement (Nashif et al, 1985 ; Merlette, 2005).

L'amortissement viscoélastique est présent dans plusieurs polymères et matériaux vitreux. Les polymères sont composés par longs réseaux moléculaires, tels que le réseau illustré en Figure 2.1.a. Pour ces matériaux, l'amortissement résulte du processus de relaxation et de rétablissement du réseau moléculaire, après les déformations introduites. Néanmoins, il existe une forte dépendance entre les effets de la fréquence et les effets de la température, à cause de la relation directe entre la température du matériau et les mouvements moléculaires. Les matériaux vitreux, tels que le verre sont caractérisés par des courts réseaux moléculaires, comme illustré en Figure 2.1.b. Pour ces matériaux, l'amortissement résulte aussi de la relaxation et du rétablissement des réseaux moléculaires après les déformations, mais ils ne récupèrent pas la distribution originale du réseau moléculaire, mais une autre condition d'équilibre thermodynamique (Nashif et al, 1985).

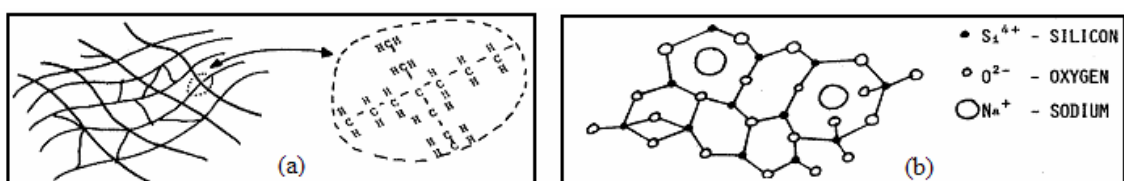


Figure 2.1 – Structure moléculaire d'un polymère (a) et d'un matériau vitreux (b)
(figure empruntée à la référence Nashif et al. (1985)).

Les polymères peuvent être fabriqués dans le but d'avoir une grande variété de propriétés mécaniques souhaitables selon l'application. Cette procédure est faite par les changements au niveau moléculaire du matériau qui caractérisent directement la propriété amortissante, la durée de vie, la résistance au fluage, la stabilité thermique, et d'autres propriétés souhaitables, pour une grande bande de fréquence et à plusieurs températures. Les mêmes procédures peuvent être appliquées pour les matériaux vitreux à températures élevées. Néanmoins, pour chaque cas, des limitations doivent être respectées, comme les limites supérieures de températures de chaque matériau, dans le but d'éviter que le processus ne devienne irréversible avec la conséquente disparition de la propriété amortissante.

2.1.1 Comportements élastiques des solides et visqueux des fluides.

Selon Persoz (1987), les matériaux viscoélastiques ont un comportement à la fois élastique et visqueux. Pour cette raison, on fait un rappel du comportement élastique, puis du comportement visqueux, avant d'aborder la viscoélasticité linéaire qui est introduite dans le domaine temporel, puis exprimée dans le domaine fréquentiel à l'aide de la notion de module complexe.

Un matériau est qualifié d'élastique si et seulement si lorsqu'on lui applique un chargement constant, sa déformation est instantanée et constante ; et lorsque l'on arrête ce chargement, son retour est instantané et complet (retour à l'état initial). Pour ces matériaux, la relation linéaire de contrainte-déformation peut être exprimée à travers la loi de Hooke pour les essais de traction-compression et de cisaillement, respectivement, comme suit :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) ; \quad \tau(t) = G\gamma(t) \quad (2.1)$$

où E et G sont le module d'Young et le module de cisaillement, respectivement. La linéarité provient du fait que l'on reste en petites déformations, et dans ce cas, la loi de comportement représentée par les expressions (2.1), est ainsi une approximation linéaire de la loi réelle de comportement du matériau.

Par ailleurs, les fluides visqueux ont une caractéristique particulière de résistance à l'écoulement, qu'on appelle viscosité. Elle résulte d'une perte d'énergie par frottement, qui est ainsi dissipée dans le fluide sous forme de chaleur. Pour ces matériaux, la contrainte est proportionnelle au taux de déformation dû au cisaillement, selon l'expression suivante :

$$\tau(t) = \mu \dot{\gamma}(t) \quad (2.2)$$

où μ caractérise la viscosité.

La Figure 2.2 compare la réponse élastique d'un solide (b), la réponse visqueuse d'un fluide (c), et la réponse viscoélastique d'un solide (d), soumis au même chargement (a). La réponse du fluide est progressive et continue tant que le chargement est maintenu. Lorsque l'on stoppe le chargement, le fluide ne retrouve pas sa position initiale.

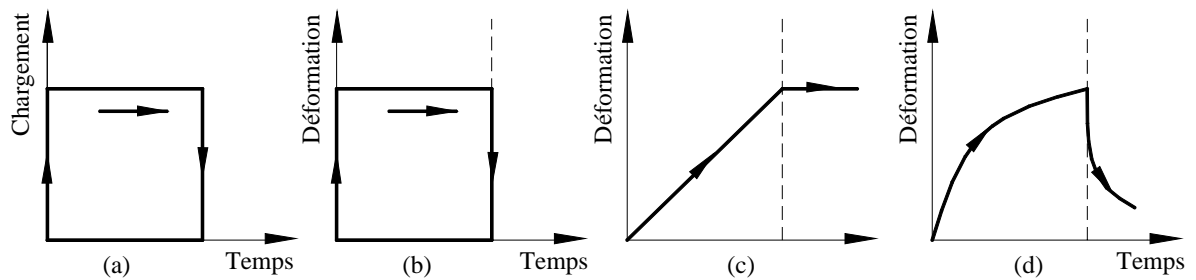


Figure 2.2 – Déformation d'un matériau soumis à un chargement constant sur un intervalle de temps fixé : (a) chargement ; (b) comportement élastique d'un solide ; (c) comportement visqueux d'un fluide ; (d) comportement viscoélastique d'un solide (figure empruntée de la référence (Merlette, 2005))

On remarque que la réponse viscoélastique (d) est un compromis entre celle d'un solide élastique et celle d'un fluide visqueux, et sa caractéristique principale est un retard par rapport à la réponse élastique. Ce retard intervient à la fois dans la phase de déformation et dans la phase de relaxation, et découle directement de la dépendance des propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques en fonction de l'historique des déformations (Christensen, 1982). Par exemple, dans le cas d'une mousse viscoélastique soumise à un essai de cisaillement statique, on observe l'histoire des déformations à travers les changements successifs de sa structure alvéolaire, comme illustré en Figure 2.3.

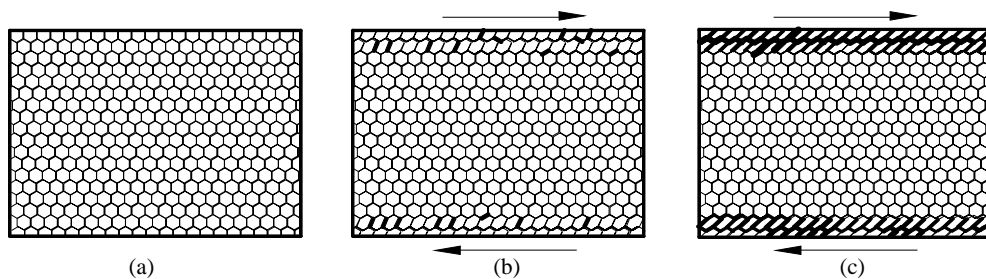


Figure 2.3 – Réarrangements successifs de la structure d'une mousse viscoélastique soumise à un essai de cisaillement (figure adaptée de la référence (Merlette, 2005)).

Cette figure montre trois états différents de la structure interne de la mousse à savoir : le premier (Figure 2.3.a) est l'état initial non déformé ; la Figure 2.3.b montre que lorsque l'amplitude de déformation est faible, les alvéoles se déforment progressivement. Lorsque la contrainte est relâchée, elles retrouvent leur état initial. Dans ce cas, la courbe de l'énergie de déformation est linéaire, ce qui correspond à un comportement élastique. Dans le cas où la déformation appliquée à la mousse augmente, toutes les alvéoles vont commencer à glisser les unes sur les autres en commençant par celles en contact avec la surface de chargement. Ce glissement s'accompagne généralement d'un phénomène de viscosité, donc une partie de l'énergie élastique est alors convertie en énergie thermique (comportement viscoélastique linéaire) ; le troisième état (voir Figure 2.3.c) montre que lorsque l'amplitude de déformation atteint une valeur critique, toutes les alvéoles se réarrangent simultanément. L'énergie élastique de la mousse augmente lorsque les alvéoles se déforment. Elle diminue très rapidement,

lorsqu'il y a un réarrangement. Le comportement de la mousse est toujours viscoélastique, mais dans ce cas, non linéaire.

2.1.2 Comportement viscoélastique dans le domaine temporel.

Le comportement d'un matériau viscoélastique dans le domaine temporel est caractérisé par deux fonctions qui représentent les réponses du matériau :

- La fonction de fluage, $F(\sigma_0, t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$, qui décrit l'évolution de la déformation du matériau soumis à une contrainte constante, σ_0 , illustré en Figure 2.4.a. Le terme écoulement désigne plus particulièrement le cas d'une déformation qui ne se résorbe pas lorsque la contrainte est annulée.
- La fonction de relaxation, $R(\varepsilon_0, t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$, qui décrit l'évolution de la contrainte supportée par le matériau à une déformation constante, ε_0 , comme illustré en Figure 2.4.b. Ce phénomène apparaît lorsque les contraintes se relâchent progressivement sous déformation constante.

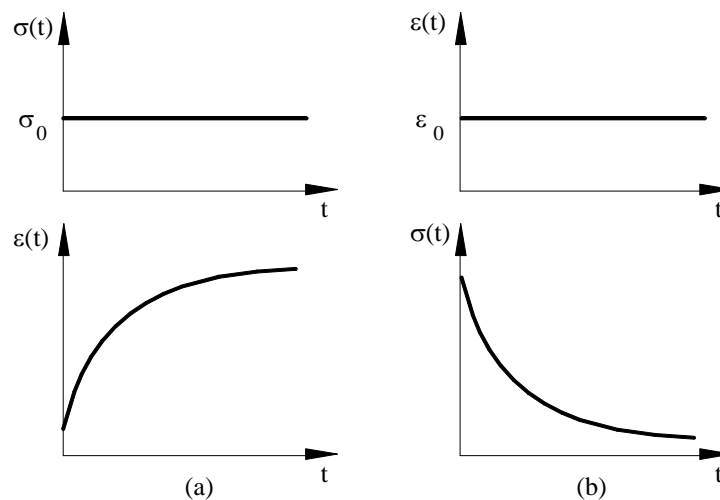


Figure 2.4 – Courbe de fluage (a) et de relaxation (b).

Les fonctions de fluage et de relaxation sont fonctions du temps, et de ce fait résulte que dans un instant quelconque, la déformation (ou la contrainte) dépend de tous les états de contraintes (ou de déformation) précédents. C'est-à-dire, que les matériaux viscoélastiques linéaires possèdent l'effet de « mémoire », caractérisés par les fonctions de fluage et de relaxation. Pour les matériaux viscoélastiques linéaires, pour lesquels la relation de contrainte-déformation dépend uniquement de l'histoire des sollicitations, comme illustré en Figure 2.3, le principe de superposition de Boltzmann est applicable (si l'on superpose deux histoires de sollicitations, la réponse est la superposition des réponses), et dans ce cas, la loi de comportement ne va donc plus relier directement et proportionnellement les contraintes et les déformations, comme dans le cas de l'élasticité linéaire représentée par les relations (2.1), mais, elle doit prendre en compte tout l'historique des contraintes et des déformations

antérieures. L'application du principe de superposition de Boltzmann conduit à une loi de comportement qui relie les histoires de contrainte et de déformation par une intégrale de convolution, exprimée sous la forme suivante, pour un essai uniaxiale :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \quad (2.3)$$

où $\sigma(t)$ et $\varepsilon(t)$ désignent, respectivement, les composants de contrainte et de déformation (normales ou de cisaillement) ; $E(t)$ est la fonction module du matériau.

L'expression (2.3) peut être étendue au cas des états multiaxiaux de contrainte-déformation par la substitution des scalaires par des tenseurs. Pour un matériau élastique linéaire, $E(t)$ devient constant, et la relation (2.3) se ramène à la première des expressions (2.1). Néanmoins, pour les matériaux viscoélastiques linéaires, le module $E(t)$ n'est pas constant, et l'intégration (2.3) doit être évaluée pour chaque pas de temps dans l'intervalle $[-\infty, t]$. Si l'on considère les restrictions physiques en admettant que n'existe pas de déformations pour les valeurs négatives de temps ($\varepsilon(t) = 0$ dans l'intervalle $[-\infty < t < 0]$), l'expression (2.3) conduit à la relation suivante :

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.4)$$

En supposant $E(t) = E_r + h(t)$, l'expression (2.4) est exprimée sous la forme :

$$\sigma(t) = E_r \varepsilon(t) + h(t)\varepsilon(0) + \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.5)$$

où encore, dans le domaine de Laplace:

$$\sigma(s) = E_r \varepsilon(s) + sh(s)\varepsilon(s) = [E_r + H(s)]\varepsilon(s) = E(s)\varepsilon(s) \quad (2.6)$$

où s est la variable complexe de Laplace ; E_r est le module de stockage (module à basse fréquence) ; $E(s) = E_r + H(s)$ est la fonction module complexe ; $H(s) = sh(s)$ est la fonction de dissipation ou fonction de relaxation, représentant le comportement dissipatif du matériau (liée à l'amortissement), et $E_r \varepsilon(s)$ représente la partie élastique du matériau viscoélastique.

2.2 Approche du module complexe

Pour les matériaux isotropes et homogènes, les propriétés complexes sont complètement décrites par un module $E(s)$ et un coefficient de Poisson $\nu(s)$ complexes. La mesure séparée de $\nu(s)$ pose cependant des problèmes expérimentaux très significatifs

(Merlette, 2005). La pratique est donc de mesurer le module $E(s)$, ou le module de cisaillement $G(s)$, et de supposer un coefficient de Poisson $\nu(s)$ constant. Très peu de données sont par ailleurs disponibles sur les variations de $\nu(s)$ avec la fréquence. On sait principalement dire qu'il diminue lorsque la fréquence augmente (Nashif et al., 1985).

Une fois évalué au long de l'axe imaginaire, $s = i\omega$, l'expression (2.6) mène à l'expression du module complexe exprimé sous la forme suivante :

$$\sigma(\omega) = E(\omega)\varepsilon(\omega) = [E'(\omega) + iE''(\omega)]\varepsilon(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]\varepsilon(\omega) \quad (2.7)$$

où $E(\omega)$ est l'expression du module complexe du matériau viscoélastique; $E'(\omega)$ est la partie réel du module dénommée module de stockage; $E''(\omega)$ est la partie imaginaire du module appelée module de perte; et $\eta(\omega) = E''(\omega)/E'(\omega)$ est le facteur de perte, caractérisant l'amortissement. D'un point de vue pratique, on peut donc résoudre les problèmes de viscoélasticité comme des cas particuliers d'élasticité où les propriétés des matériaux sont complexes et dépendent de la fréquence d'excitation. Cette propriété est connue sous le nom de *Principe d'Equivalence Elastique-Viscoélastique* (PEEV) (Nashif et al, 1985).

Si on considère une variation harmonique pour la déformation, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, à chaque pas de fréquence, la courbe représentant la relation contrainte-déformation prend une forme elliptique, comme illustré en Figure 2.5, qu'on peut donc exprimer sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \text{Re}[E(\omega)\varepsilon_0 e^{i\omega t}] = \text{Re}\{E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]\varepsilon_0 e^{i\omega t}\} = E'(\omega)\varepsilon_0 (\cos \omega t - \eta \sin \omega t) \quad (2.8)$$

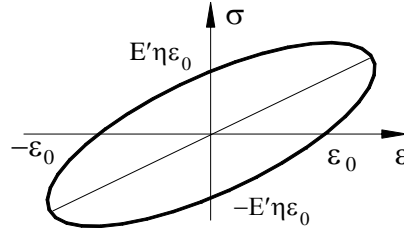


Figure 2.5 – Cycle contrainte-déformation elliptique pour un matériau viscoélastique linéaire.

Le facteur de perte traduit le rapport entre l'énergie dissipée par le matériau, E_d , et l'énergie potentielle ou élastique stockée, $E_p = E'\varepsilon_0^2/2$, sur un cycle de déformation maximale, représentée par l'expression suivante :

$$E_d = \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon} dt = E'\eta\varepsilon_0^2\omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \pi E'\eta\varepsilon_0^2 = \eta 2\pi E_p \quad (2.9)$$

On peut remarquer que la forme de l'ellipse qui décrit un cycle d'hystérésis change avec l'évolution du facteur de perte η . Plus le facteur η est grand, plus l'énergie dissipée E_d est grande et plus la surface de l'hystérésis est importante. Par exemple, un facteur de perte égale à 1 signifie que 100% de l'énergie est dissipée à la fin du cycle de vibrations. Néanmoins,

certains matériaux viscoélastiques possèdent des facteurs de perte supérieurs à 1, signifiant alors que 100% de l'énergie est dissipée avant la fin du cycle de vibrations.

En ce qui concerne le module complexe, d'une manière générale on remarque qu'il décrit la réponse du matériau viscoélastique dans le régime harmonique, et c'est une forme convenable pour caractériser directement les propriétés des matériaux viscoélastiques dans le domaine fréquentiel par des techniques expérimentales (Barkanov, 1999). Néanmoins, le grand inconvénient provenant d'utilisation de cet approche est qu'on ne peut pas obtenir les réponses transitoires des systèmes amortis en utilisant des méthodes d'intégration directe des équations du mouvement, ou encore par l'emploi de la technique de superposition modale (Mead, 1982). Dans ce cas, la réponse de la structure doit être obtenue d'abord dans le domaine de la fréquence, et par la suite une transformation dans le domaine temporel doit être faite par l'utilisation de la transformée inverse de Fourier. Cependant, comme conséquence de ce procédé, on peut avoir des réponses non causales (assumant des valeurs non nulles pour des valeurs négatives du temps), ce qui signifie des implications sérieuses de nature théorique (Nashif et al. 1985).

2.3 Facteurs environnementaux

La Figure 2.6 ci-dessous illustre un spectre expérimental en fréquence et en température d'une poutre encastrée-libre, traitée par matériau viscoélastique. Elle représente respectivement les variations des fréquences propres et des amplitudes de vibration du système amorti avec la fréquence d'excitation et la température.

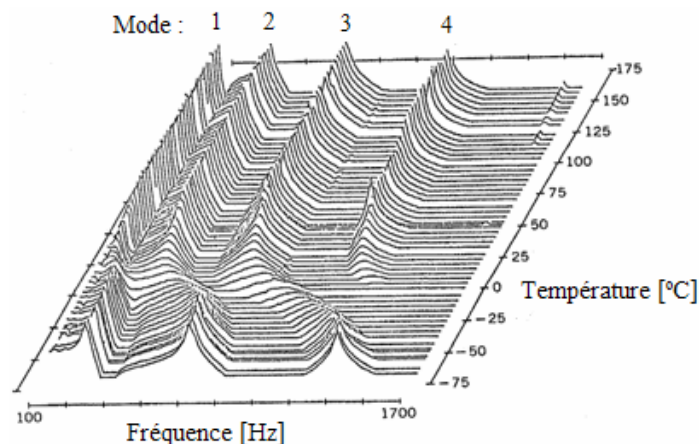


Figure 2.6 – Spectre en fréquence et en température d'une poutre traitée par matériau viscoélastique (figure adaptée de la référence Nashif et al., 1985).

A travers des changements observés pour les fréquences propres et les amplitudes de vibration du système amorti, on déduit que les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques sont fortement dépendantes de la température et de la fréquence d'excitation. De plus, des observations expérimentales montrent que les propriétés de ces matériaux dépendent non seulement de la fréquence et de la température, mais également de la

prédéformation ou précontrainte statique ε_0 , et d'autres facteurs qui font partie des conditions de fonctionnement sous lesquelles les matériaux sont appliqués.

2.3.1 Influence de la température.

La température est habituellement considérée comme le facteur environnemental le plus important qui exerce une influence sur les propriétés des matériaux viscoélastiques (Nashif et al., 1985). Selon la température, les matériaux viscoélastiques peuvent se présenter dans quatre états différents qu'on représente en Figure 2.7 : l'état vitreux (I), l'état de transition (II), l'état caoutchouteux (III) et l'état fluide (IV), correspondant chacun à une zone de température donnée. Ainsi, il devient important de tenir compte des variations de la température lors de la modélisation des systèmes structuraux contenant des éléments viscoélastiques. Néanmoins, pour les mélanges de polymères, chaque polymère peut se retrouver dans une zone différente, ce qui rend l'étude de tels matériaux plus difficile.

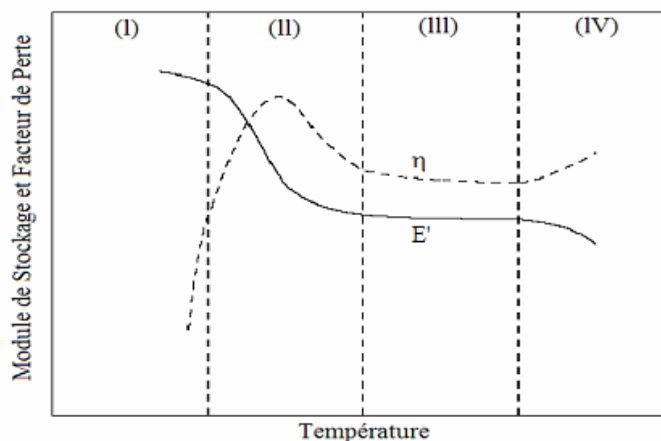


Figure 2.7 – Variation de E' et η d'un matériau viscoélastique quelconque en fonction de la température à fréquence constante.

Dans la première zone (I) associée aux températures les plus basses, le matériau est dans son état vitreux, caractérisé par un module de stockage atteignant sa valeur maximale, et variant peu avec la température. Le facteur de perte est très faible et augmente rapidement avec la température. Les déformations du matériau sont alors très faibles. La zone de transition (II) est caractérisée par un module décroissant fortement avec la température, et un facteur de perte présentant son maximum au milieu de cette zone. Dans la région caoutchouteuse (III), le module de stockage et le facteur de perte sont caractérisés par des valeurs relativement faibles variant peu avec la température. La quatrième région (IV) correspond à un état fluide du matériau. Cet état est très peu considéré dans les études de conception en raison de son instabilité. De plus, pour beaucoup de matériaux, cette région n'est pas définie.

Dans l'objectif d'amortir les vibrations, il est utile de solliciter les matériaux au voisinage de la zone de transition (II). Ce choix est motivé par les variations du facteur de perte η qui atteint son maximum dans cette zone, permettant ainsi une utilisation optimale des propriétés amortissantes du matériau viscoélastique.

2.3.2 Influence de la fréquence. Notion de fréquence réduite.

Pour une température donnée T proche de la température de transition vitreuse (dans la zone de transition (II)), la mesure des caractéristiques viscoélastiques donne le module de stockage E' et le facteur de perte η dont la variation en fréquence ressemble généralement à celle illustrée en Figure 2.8 ci-dessous.

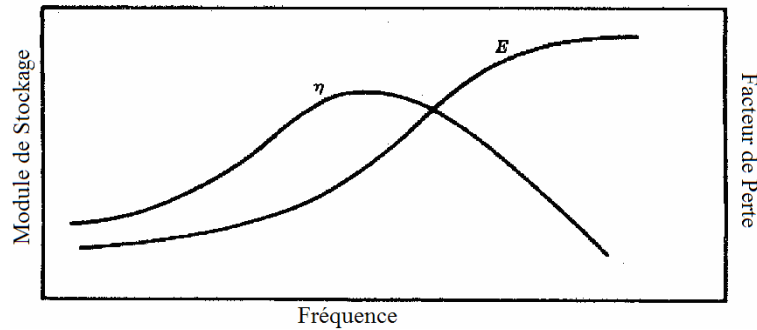


Figure 2.8 – Illustration des variations de E' et η par rapport à la fréquence à température constante (figure adaptée de la référence Nashif et al., 1985).

Par la comparaison entre les Figures 2.7 et 2.8, et à partir des observations expérimentales pour des matériaux viscoélastiques thermorhéologiques simples, on montre que l'influence exercée par la fréquence est, qualitativement, l'inverse de l'effet de la température. On note qu'une variation de la fréquence en quelques décades reflète la même influence dans le comportement d'une variation de quelques degrés dans la température (Nashif et al., 1985). Par conséquent, en décalant en fréquence les courbes donnant les propriétés du matériau (Figure 2.8) à différentes températures, elles tendent à se superposer, et à décrire une courbe continue. Ceci implique que les caractéristiques viscoélastiques aux différentes températures peuvent être reliées entre elles par des changements (ou décalages) des valeurs de la fréquence réelle d'excitation. Ce fait mène aux concepts de *facteur de décalage* et *fréquence réduite*, associés au *Principe de Superposition Fréquence-Température* – PSFT, qui s'applique à beaucoup de matériaux viscoélastiques linéaires. Symboliquement, le PSFT peut être exprimé comme suit :

$$E(\omega, T) = E(\omega_r, T_0) = E(\alpha_T \omega, T_0) ; \quad \eta(\omega_r, T) = \eta(\alpha_T \omega, T_0) \quad (2.10)$$

Le terme $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ est la fréquence réduite, ω la fréquence actuelle d'excitation, $\alpha_T(T)$ est le facteur de décalage qui dépend de la température de travail du matériau viscoélastique, et T_0 est la température de référence ; $E(\alpha_T \omega, T_0)$ et $\eta(\alpha_T \omega, T_0)$ sont normalement appelées *courbes maîtresses* et se présentent sous la forme de *nomogrammes*.

En particulier, pour les mélanges de polymères, le principe de superposition Fréquence-Température n'est pas général. Dans le cas de matériaux non homogènes, le principe ne s'applique pas forcément, même dans la zone de transition. Ceci est le cas des copolymères

(assemblage de deux polymères au niveau des liaisons chimiques, pour créer un nouveau polymère) et des polymères chargés par des éléments organiques et inorganiques, de l'ordre du micron, qui sont ajoutés au polymère. A une température donnée, les deux polymères peuvent se trouver dans deux états différents.

La Figure 2.9 illustre le principe PSFT : ayant le module de stockage et le facteur de perte d'un matériau viscoélastique arbitraire pour différentes valeurs de la température, T_{-1} , T_0 , T_1 , si des décalages horizontaux selon l'axe de la fréquence sont appliqués à chacune de ces courbes, elles peuvent être combinées dans une courbe unique. Le décalage horizontal est donné par le paramètre α_T dépendant de la température.

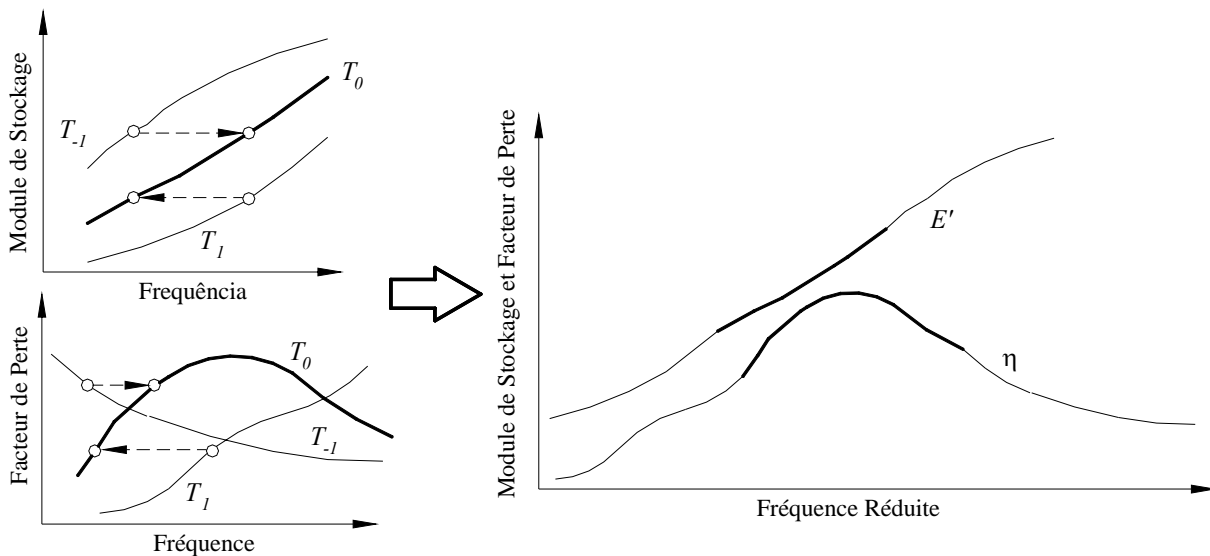


Figure 2.9 – Illustration du *Principe de Superposition Fréquence-Température* (PSFT)

Les nomogrammes simplifient l'obtention des données des propriétés des matériaux viscoélastiques en fonction de la température T et de la fréquence d'excitation ω . A chaque température correspond un facteur de décalage α_T qui définit une droite isotherme dans le plan (ω_r, ω) . On définit donc les fréquences réelles sur l'axe vertical et des droites isothermes permettant de relever graphiquement la fréquence réduite sur l'axe horizontal. Pour une fréquence d'excitation ω_i et une température T_i quelconques, la lecture de l'abaque se fait en trois étapes décrites sur la Figure 2.10, à savoir :

- Repérage du point d'intersection P de la droite horizontale ω_i et de l'isotherme oblique T_i ;
- Lecture de l'abscisse du point P qui fournit la valeur de la fréquence réduite $\omega_i \alpha_T(T_i)$;
- Lecture de E' et η sur les courbes maîtresses en fonction de $\omega_i \alpha_T(T_i)$.

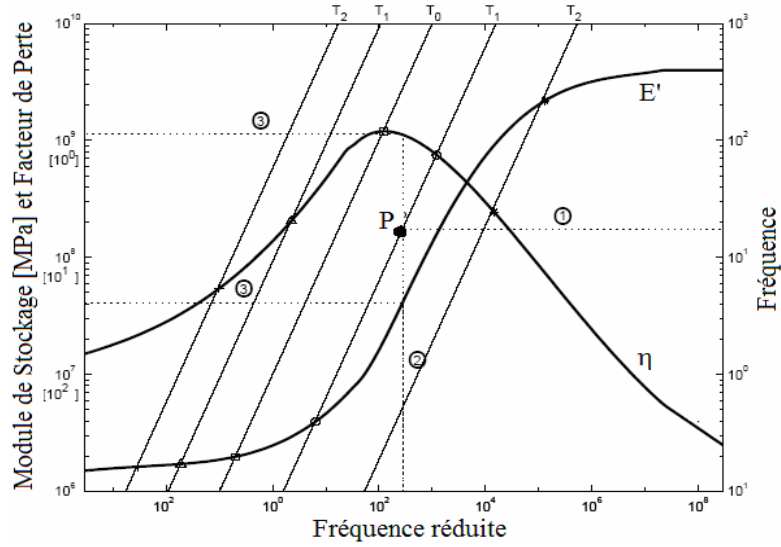


Figure 2.10 – Illustration d'un abaque ou nomogramme en fréquence réduite.

2.3.3 Formes paramétriques de la fréquence réduite en température.

D'après le paragraphe précédent, on peut utiliser une loi tabulée pour décrire la dépendance du comportement des matériaux viscoélastiques par rapport à la fréquence et à la température. Les fonctions $E(\omega_r)$ et $\alpha_T(T)$ peuvent être obtenues à partir des essais expérimentaux pour des matériaux viscoélastiques spécifiques (Nashif et al, 1985), et on peut stocker dans un tableau les parties réelles et imaginaires du module complexe en fonction de la fréquence réduite. On montre dans cette section les principales représentations paramétriques du facteur de décalage qui permettent de faire la conversion de la fréquence réduite $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ en fréquence physique ω .

Comme résultat d'un travail expérimental étendu, Drake et Soovere (1984) suggèrent des expressions analytiques, basées sur la forme de l'équation WLF (Williams-Landel-Ferry) (Williams et al., 1955), pour le module complexe et le facteur de décalage pour différents matériaux viscoélastiques disponibles dans le commerce, dans la zone de transition. Les équations suivantes représentent, respectivement, le module complexe et le facteur de décalage comme fonctions de la température et de la fréquence réduite pour le matériau viscoélastique ISD112™ produit par 3M, de la manière proposée par ces auteurs :

$$G(\omega_r) = B_1 + B_2 / (1 + B_3 (i\omega_r / B_3))^{-B_6} + (i\omega_r / B_3)^{-B_4} \quad (2.11)$$

$$\log(\alpha_T) = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right) + 2.303 \left(\frac{2a}{T_r} - b \right) \log \left(\frac{T}{T_r} \right) + \left(\frac{b}{T_r} - \frac{a}{T_r^2} - S_{AZ} \right) (T - T_r) \quad (2.12)$$

où :

$$B_1 = 0.4307 \text{ MPa}; B_2 = 1200 \text{ MPa}; B_3 = 0.1543 \text{ MPa}; B_4 = 0.6847; B_5 = 3.241; B_6 = 0.18; T_r = 290 \text{ K}; T_L = 210 \text{ K}; T_H = 360 \text{ K}; \\ S_{AZ} = 0.05956 \text{ K}^{-1}; S_{AL} = 0.1474 \text{ K}^{-1}; S_{AH} = 0.009725 \text{ K}^{-1}; C_A = (1/T_L - 1/T_r)^2; C_B = (1/T_L - 1/T_r); C_C = (S_{AL} - S_{AZ}); D_A = (1/T_H - 1/T_r)^2 \\ D_B = (1/T_H - 1/T_r); D_C = (S_{AH} - S_{AZ}); a = ((D_B C_C - C_B D_C)/D_E); b = ((D_C C_A - C_C D_A)/D_E)$$

Dans la Figure 2.11 on montre les courbes normalisées représentant les variations du module de stockage, module de perte et facteur de perte comme fonctions de la fréquence réduite, et la courbe représentant le facteur de décalage en fonction de la température pour le matériau viscoélastique ISD112™.

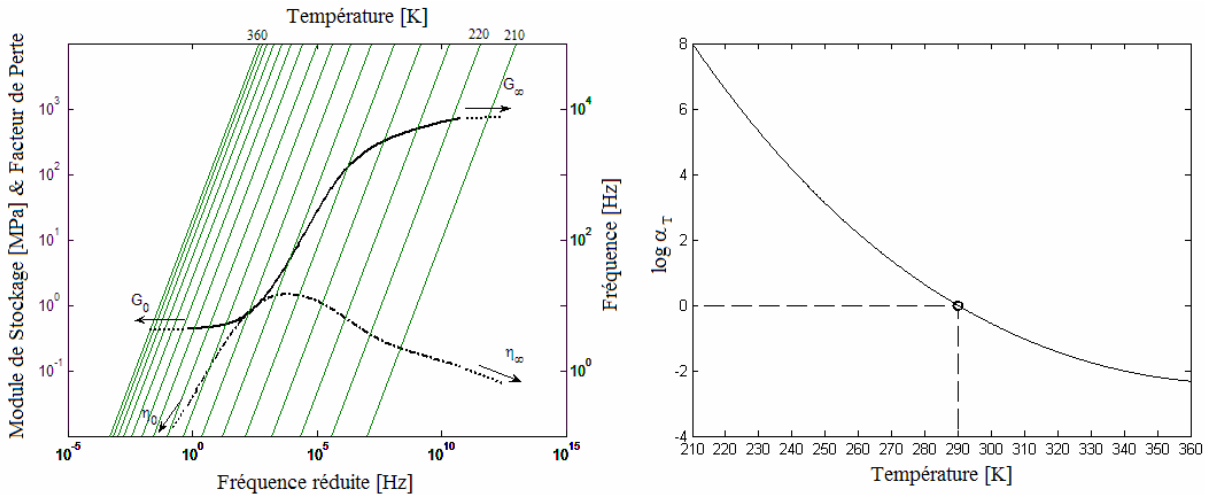


Figure 2.11 – Abaque représentant les propriétés du matériau viscoélastique ISD112™.

Il est important de souligner, toutefois, que l'utilisation des variables réduites est valable si et seulement si (Nashif et al., 1985 ; Kergourlay, 2004) :

- Le matériau viscoélastique possède un comportement linéaire ;
- Les mêmes valeurs de α_T permettent de superposer toutes les fonctions viscoélastiques (module de stockage, module de perte et facteur de perte) ;
- La structure interne du matériau reste inchangée lors d'une modification de température.

L'utilisation des variables réduites suppose que le matériau viscoélastique, est à la température de l'enceinte thermo-régulée qui permet d'imposer la température de l'essai pour trouver les courbes représentant la dépendance en fréquence-température du comportement du matériau viscoélastique étudié. En plus, cette hypothèse néglige le phénomène d'auto-échauffement des matériaux viscoélastiques.

2.4 Représentation du module complexe

Ce paragraphe présente les différentes représentations du module complexe. On peut utiliser directement les lois tabulées issues des mesures expérimentales fournies par des fabricants, ou on peut également choisir une loi paramétrique dont on identifie les paramètres à l'aide de mesures expérimentales et d'un processus d'optimisation.

2.4.1 Formes tabulées.

Un certain nombre d'essais dynamiques permettent de mesurer le module de stockage $E'(\omega)$ et le facteur de perte $\eta(\omega)$ d'un matériau en un certain nombre de points de fréquence ω sur une bande étroite. Si on mesure ces quantités à plusieurs températures, on peut envisager d'utiliser l'hypothèse de superposition fréquence-température explicitée dans les sections précédentes pour obtenir un nomogramme en fréquence réduite (comme celui illustré en Figure 2.11). On dispose alors d'une représentation sous forme de tableau (loi tabulée) du module complexe en fréquence réduite ω_r , mais également du facteur de décalage α_T aux températures T . Dans ce cas, pour connaître le module complexe en un point de fonctionnement arbitraire (ω, T) , on interpole ou extrapole les valeurs expérimentales du facteur de décalage pour trouver la fréquence réduite, puis on interpole ou extrapole le module sur la courbe maîtresse.

L'avantage d'une représentation non-paramétrique est de permettre la représentation de comportements généraux fortement dépendants de la fréquence et de la température sur une large gamme de valeurs de ces facteurs. De plus, l'utilisation directe des données dispense les étapes du choix de représentation et d'identification des paramètres pour les formes paramétriques du module complexe.

2.4.2 Formes paramétriques.

On cherche à approcher le comportement de matériaux amortissants par un modèle analytique possédant peu de paramètres. L'idée consiste à utiliser des modèles rhéologiques simples par l'association de ressorts et d'amortisseurs visqueux élémentaires, de façon à décrire d'une manière satisfaisante la relation entre contrainte-déformation. Les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt, illustrés en Figures 2.12.a et b, respectivement, sont caractérisés par des associations en série et en parallèle, des éléments de ressorts et des amortisseurs visqueux. Les relations contrainte-déformation sont (Bert, 1973; Persoz, 1983) :

$$\sigma(t) + \frac{\mu}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.13)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.14)$$

où E est le module élastique du matériau, et μ est la viscosité.

Le modèle à trois paramètres illustré en Figure 2.12.d, appelé aussi modèle de Zener, ou solide viscoélastique standard, reprend les caractéristiques principales trouvées sur les matériaux réels, à savoir les asymptotes haute et basse fréquence. L'expression suivante représente la relation contrainte-déformation pour ce modèle :

$$\sigma(t) + b \frac{d\sigma(t)}{dt} = E_r \varepsilon(t) + E_s \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.15)$$

où $b = \mu / (E_1 + E_2)$; $E_r = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$; $E_s = \mu E_2 / (E_1 + E_2)$

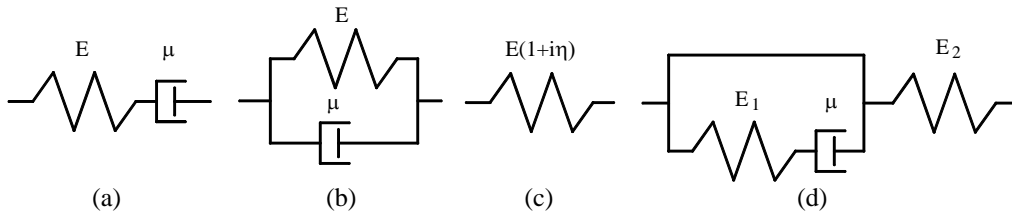


Figure 2.12 – Modèle d'amortissement simples : (a) Modèle de Maxwell ; (b) Modèle de Kelvin-Voigt ; (c) Amortissement hystérétique (structural) ; (d) Modèle de Zener.

La Figure 2.13 est une représentation graphique des fonctions de fluage et de relaxation typiques des trois modèles rhéologiques simples représentés par les expressions (2.13) à (2.14). Ces fonctions peuvent être obtenues par la résolution des équations constitutives, pour les types spécifiques de chargement : déformation constante et contrainte constante, respectivement.

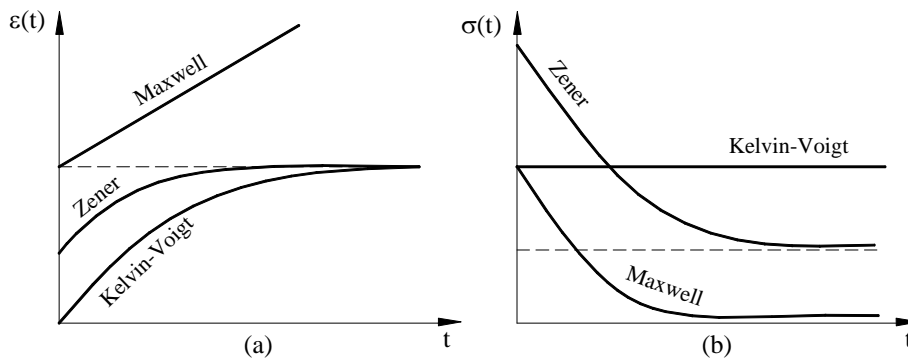


Figure 2.13 – Fonctions de fluage (a) et relaxation des modèles rhéologiques simples (figure adaptée de la référence Wang (2001))

A travers des observations expérimentales et considérations thermodynamiques des matériaux viscoélastiques, la fonction de fluage doit augmenter avec le temps vers une asymptote dans le régime permanent. Par contre, la fonction de relaxation doit diminuer avec le temps vers une asymptote horizontale (Bert, 1973 ; Persoz, 1987 ; Wang, 2001). La Figure 2.13 montre que la fonction de relaxation prévue pour le modèle de Kelvin-Voigt est constante avec le temps, et la fonction de fluage prévue pour le modèle de Maxwell augmente indéfiniment avec le temps. Pourtant, ces modèles ne correspondent pas au vrai comportement des matériaux viscoélastiques. Néanmoins, le modèle de Zener ne présente pas ces limitations, pouvant être considéré comme la première représentation du comportement réel des matériaux viscoélastiques. Si on admet une variation harmonique de la contrainte et de la déformation, $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ et $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, en substituant dans l'expression (2.15) on peut obtenir la relation entre les amplitudes suivante :

$$\sigma_0 = \left[\frac{E_r + E_l(i\omega)}{1 + b(i\omega)} \right] \varepsilon_0 = [E'(i\omega) + iE''(i\omega)] \varepsilon_0 \quad (2.16)$$

où $E'(\omega) = (E_r + E_l b \omega^2) / (1 + b^2 \omega^2)$ et $E''(\omega) = \omega(E_l - b E_r) / (1 + b^2 \omega^2)$.

On observe que les fonctions $E'(\omega)$ et $E''(\omega)$ reflètent la dépendance du comportement des matériaux viscoélastiques par rapport à la fréquence. Cependant, la variation de ces fonctions avec la fréquence, est beaucoup plus rapide que celle observé dans les matériaux viscoélastiques réels (Nashif et al, 1985). Ce fait a motivé la proposition de plusieurs modèles viscoélastiques comme les modèles généralisés de Maxwell et de Kelvin-Voigt, basés sur la combinaison multiple des modèles rhéologiques présentés en Figure 2.14, qui sont deux représentations classiques des modèles exprimés par les expressions (2.13) et (2.14). Il s'agit respectivement de mettre en parallèle le modèle de Maxwell qui est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série (Figure 2.14.b), et en série le modèle d'amortissement visqueux dit Kelvin-Voigt, constitué lui d'un ressort et d'un amortisseur en série (Figure 2.14.a).

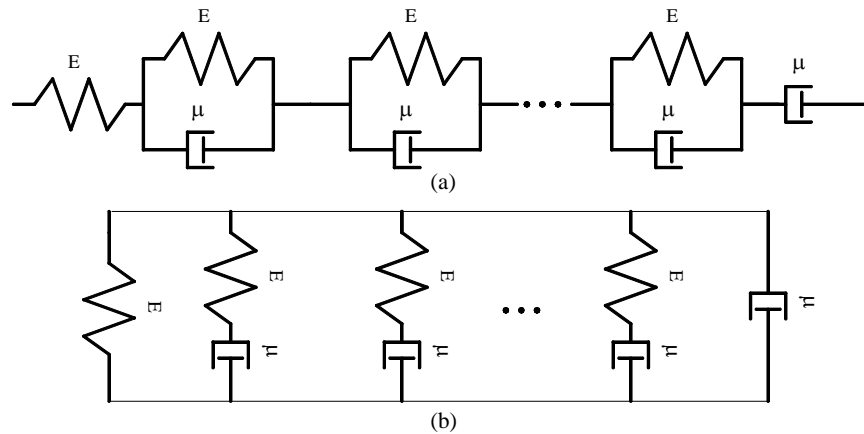


Figure 2.14 – Modèles généralisés : (a) Kelvin-Voigt ; (b) Maxwell.

Une autre approche proposée est le modèle standard généralisé, qui consiste dans l'introduction dans l'expression (2.19) des dérivées d'ordre plus élevé, dans le but de représenter les champs de contraintes et déformations en ce qui concerne le temps (Rogers, 1983), ce qui mène à la relation constitutive générale suivante :

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = E_r \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n} \quad (2.17)$$

En admettant les variations harmoniques, $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ et $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, à travers l'expression (2.17) on peut obtenir la relation des amplitudes suivante :

$$\sigma_0 = \left[\frac{E_r + \sum_{n=1}^N E_n (i\omega)^n}{1 + \sum_{m=1}^M b_m (i\omega)^m} \right] \varepsilon_0 \quad (2.18)$$

Les parties réels et imaginaires de la fonction module prévue pour ce modèle sont beaucoup plus compliquées que celles obtenues pour le modèle de Zener. Comme résultat, pour des matériaux viscoélastiques dont les propriétés mécaniques sont dépendantes de la fréquence, le nombre de dérivées par rapport au temps nécessaires pour représenter le comportement de ces matériaux dans une large bande fréquentielle peut être élevé. Par conséquent, un grand nombre de paramètres E_n et b_m à identifier sont requis pour bien représenter le comportement viscoélastique. Cela rend difficile l'utilisation de ce modèle combiné avec les modèles aux éléments finis de systèmes de grande taille. De plus, d'une manière générale, on remarque que les modèles précédents décrivent les réponses des matériaux viscoélastiques directement dans le domaine fréquentiel. Néanmoins, un autre grand inconvénient provenant de l'utilisation de ces modèles rhéologiques est la difficulté d'obtention des réponses de systèmes amortis dans le domaine temporel. Pour cela, on doit appliquer la transformée inverse de Fourier, conduisant à des réponses non causales, et des complications sérieuses de nature théorique (Nashif et al., 1985).

En vue de surmonter ces problèmes, plusieurs auteurs ont proposé des modèles viscoélastiques basés soit sur l'utilisation des dérivées d'ordre non entières, soit sur l'emploi des variables internes non physiques, dans le but de représenter le comportement viscoélastique directement dans le domaine temporel et, en même temps, bien adaptés pour être utilisés en combinaison avec les modèles aux éléments finis. Dans le but d'améliorer la précision du modèle généralisé, et réduire le nombre de paramètres requis pour représenter le comportement viscoélastique, Bagley et Torvik (1979 ; 1985) ont proposé une formulation beaucoup plus élaborée, basée sur l'introduction des dérivées d'ordre fractionnaires, appelé *Fractional Derivative Model – FDM*. Ils proposent l'utilisation de puissances non entières de $s = i\omega$, ce qui permet une représentation fréquentielle par l'utilisation d'un modèle à cinq, quatre ou même trois paramètres qui lissent mieux les courbes de mesures expérimentales du module de stockage et du facteur de perte. Ainsi, selon ce modèle, le module complexe est exprimé comme suit :

$$E(s) = (E_r + E_l s^\alpha) / (1 + b s^\beta) \quad (2.19)$$

Les paramètres requis pour représenter le comportement viscoélastique sont E_r , E_l , b , α et β . Les coefficients α et β permettent d'ajuster la fréquence du maximum de dissipation et les inclinaisons du module de stockage et du facteur de perte. Plusieurs travaux montrent qu'on peut supposer $\alpha = \beta$ (module à quatre paramètres) ou $\alpha = \beta = 1/2$ (module à trois paramètres). Le principal problème issu de l'utilisation de ce modèle combiné avec les modèles aux éléments finis est la dimension globale des matrices, puisque le problème est formulé dans l'espace d'état (Lima, 2003).

Le module complexe de cisaillement proposé par Golla-Hugues-MacTavish (1985 ; 1993), appelé modèle GHM, développé par Golla et Hughes (1985) et Golla et al. (1993), s'exprime dans le domaine de Laplace, de la manière suivante :

$$E(s) = E_r \left(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i + \omega_i^2} \right) \quad (2.20)$$

Du fait de la similitude entre chaque terme de la série dans l'expression (2.20) et la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté amorti, la fonction module complexe peut être interprétée comme une série de n oscillateurs masse-raideur-amortissement, représentés par les trois paramètres positifs $(\alpha_i, \omega_i, \zeta_i)$, qui doivent être déterminés par lissage des données expérimentales. Pour cette raison, le modèle GHM est aussi nommé modèle des mini-oscillateurs.

Le modèle développé par Lesieutre et Bianchini (1995), appelé Anelastic Displacement Field (ADF), représente le module de cisaillement complexe du matériau viscoélastique dans le domaine fréquentiel par une série de la forme suivante :

$$E(\omega) = E_r \left(1 + \sum_{i=1}^n \Delta_i \frac{\omega^2 + j\omega\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right) \quad (2.21)$$

où Δ_i et Ω_i sont déterminés par lissage des courbes mesurées de cisaillement du matériau viscoélastique utilisé. Cette méthode se base sur la séparation des champs de déformations du matériau viscoélastique en une partie élastique, instantanément proportionnelle à la contrainte, et une partie anélastique représentant la relaxation du matériau.

Ces deux modèles sont des cas particuliers de sommes de fractions rationnelles particulièrement intéressantes pour représenter le comportement viscoélastique aussi bien dans le domaine du temps que dans le domaine de la fréquence. Malheureusement, ils nécessitent un nombre élevé de paramètres pour approcher correctement les mesures expérimentales, ce qui les rend beaucoup plus coûteux que les modèles simples présentés précédemment. Quand associés à une discrétisation par éléments finis, ils conduisent à des systèmes de grandes tailles (Lima, 2003 ; Balmès et Babillot, 2002a).

2.5 Lissage des paramètres des modèles viscoélastiques

Un aspect important lié à l'utilisation des modèles viscoélastiques rhéologiques simples, FDM, GHM et ADF, est l'identification des paramètres de ces modèles à partir des courbes maîtresses des matériaux viscoélastiques. Par ce processus, les valeurs des paramètres de chaque modèle sont ajustées dans le but de réduire au minimum les différences entre les données expérimentales et les courbes ajustées. Dans ce contexte, quelques auteurs comme Trindade (2000) et Lima (2003) ont présenté des discussions en ce qui concerne le processus d'identification paramétrique de plusieurs modèles viscoélastiques, à l'aide de la boîte à outils d'optimisation (*Optimization Toolbox*) de MATLAB, plus particulièrement, la fonction « *lsqnonlin* », qui utilise un algorithme non-linéaire (*Nonlinear Least Squares*). Pour le lissage des courbes, Lima (2003) a utilisé des fonctions représentant les parties réelles et imaginaires de chaque modèle viscoélastique, où la fonction objectif utilisée pour le lissage est exprimée comme suit :

$$F_{obj} = \sum_{i=1}^{N_{freq}} \left| \frac{E'_{mod}(\omega_i) - E'_{exp}(\omega_i)}{E'_{exp}(\omega_i)} \right| + \left| \frac{E''_{mod}(\omega_i) - E''_{exp}(\omega_i)}{E''_{exp}(\omega_i)} \right| \quad (2.22)$$

où N_{freq} est le nombre de points fréquentiels utilisés pour le lissage ; $E_{mod}(\omega_i)$ et $E_{exp}(\omega_i)$ sont, respectivement, les valeurs des modules complexes des modèles viscoélastiques et des valeurs expérimentales. La bande de fréquences utilisée pour le lissage doit être plus large que celle considérée dans l'analyse du système de manière à minimiser l'effet des erreurs aux bords de la bande (Trindade, 2000). Les paramètres du modèle GHM sont composés de N_G triplets $(\alpha_i, \omega_i, \zeta_i, i = 1, \dots, N_G)$ et du module statique E_r . Le nombre de mini-oscillateurs N_G définit la dimension du système final, en même temps que la précision de l'ajustement. Pour le modèle ADF, en plus du module statique E_r , seuls N_A couples de paramètres $(\Delta_i, \Omega_i, i = 1, \dots, N_A)$ sont nécessaires. Dans ce cas, la valeur N_A a la même influence que pour le modèle GHM.

Il est connu que les modèles ADF et GHM représentent bien le comportement des matériaux viscoélastiques dont les propriétés varient assez fortement avec la fréquence. Par contre, un nombre élevé de paramètres doit être utilisé dans le lissage, ce qui constitue une difficulté supplémentaire, puisqu'on ne connaît pas *a priori* quel est le nombre optimal des paramètres N_G ou N_A . Toutefois, on sait que plus la bande fréquentielle est large, plus le nombre de paramètres doit être élevé pour bien ajuster les courbes expérimentales. Dans ce cas, d'autres méthodes, comme celle des dérivées fractionnaires, s'avère plus intéressantes, puisqu'on n'a besoin d'identifier que cinq, quatre ou paramètres (Espíndola et al, 1997).

2.5.1 Propriétés asymptotiques du lissage.

Les valeurs des paramètres identifiés ne sont souvent valables que dans la bande de fréquence utilisée pour le lissage. Or, dans des simulations, des modes situés hors de cette bande peuvent être excités et il est donc impératif de vérifier la capacité de prédiction du comportement asymptotique du modèle. La mesure brute de caractéristiques viscoélastiques à une température fixée donne le module complexe dont la variation en fréquence ressemble généralement à celle montrée en Figure 2.11 pour le matériau viscoélastique ISD112™, où dans les zones haute et basse fréquence non mesurées, on prolonge les courbes par des asymptotes. Pour l'extrapolation en basse fréquence, on se donnera une asymptote réelle G_0 et $\eta_0 = 0$, car la fonction de relaxation étant réelle, sa transformée de Fourier est paire et réelle en 0 (Crandall, 1970). Pour les hautes fréquences, on définira une asymptote complexe G_∞ et η_∞ , comme illustré en Figure 2.11.

2.6 Incorporation du comportement viscoélastique dans les modèles EF

Une fois que l'on dispose de modèles raisonnablement précis pour la représentation de la dépendance en fréquence et de la température des propriétés des matériaux viscoélastiques, il reste à savoir comment se servir de ces représentations pour le calcul des structures réelles amorties par matériaux viscoélastiques.

Dans les références (Trindade, 2000 ; Lima, 2003) on montre comme les modèles FDM, GHM et ADF peuvent être couplés avec des modèles aux éléments finis de façon à produire des équations du mouvement sous la forme d'équations d'état qui peuvent être résolues pour la prévision des solutions propres complexes, réponses forcées et réponses temporelles. Toutefois, comme souligné précédemment, ces modèles entraînent généralement une augmentation très importante de l'ordre des systèmes d'équations et, par conséquent, des coûts de calcul très élevés, très souvent prohibitifs. D'autre part, si on se limite à l'analyse de réponses forcées, on peut s'abstenir d'utiliser ces modèles et employer directement les données expérimentales sous la forme d'abaques ou tableaux, contenant les parties réelles et imaginaires du module en fonction de la fréquence et de la température. De l'étude rapporté dans ce Mémoire ce choix a été fait, tenant compte du fait que les réponses forcées sont considérées suffisantes pour les analyses et procédures d'optimisation envisagées. En plus, ces réponses peuvent être traitées par des procédures d'identification modale pour accéder aux propriétés modales des structures amorties par l'effet viscoélastique.

D'une manière générale, on définit la rigidité dynamique complexe des structures amorties par matériaux viscoélastiques, et on explicite ensuite la construction de la matrice de transfert (fonction réponse forcée) pour l'analyse des problèmes vibratoires de structures amorties.

On considère le modèle EF représenté par les équations du mouvement dans le domaine du temps d'une structure quelconque, sans amortissement externe, traité par matériaux viscoélastiques, contenant N degrés de liberté :

$$M\ddot{q}(t) + K(\omega, T)q(t) = f(t) \quad (2.23.a)$$

$$f(t) = bu(t) ; \quad y(t) = cq(t) \quad (2.23.b)$$

où $M, K(\omega, T) \in R^{N \times N}$ sont, respectivement, la matrice de masse (symétrique, définie positive) et la matrice de rigidité (symétrique, définie non négative). $q(t) \in R^N$ et $f(t) \in R^N$ sont, respectivement, le vecteur de déplacements et le vecteur de forces externes. $y(t) \in R^c$ est le vecteur des réponses, et $u(t) \in R^f$ est le vecteur réduit des forces externes. Les matrices $b \in R^{N \times f}$ et $c \in R^{c \times N}$ sont les matrices qui permettent de choisir, parmi les degrés de liberté du modèle aux éléments finis, ceux où sont appliquées les forces d'excitation, et les ceux où les réponses du système sont calculées, respectivement.

On supposera que la structure est composée par des éléments élastiques et des éléments viscoélastiques, de sorte que la matrice de rigidité globale de la structure peut être décomposée comme suit :

$$\mathbf{K}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega, T) \quad (2.24)$$

où \mathbf{K}_e est la matrice de rigidité correspondant à la sous-structure purement élastique, et $\mathbf{K}_v(\omega, T)$ est la matrice de rigidité liée à la sous-structure viscoélastique. Comme montré dans les sections précédentes, l'introduction de la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique peut être réalisée en exploitant le *Principe d'Equivalence Elastique-Viscoélastique* (PEEV) (Christensen, 1982), selon lequel, dans un premier temps, pour une température donnée, la matrice $\mathbf{K}_v(\omega, T)$ peut être générée pour des éléments finis spécifiques (barres, poutre, plaques, coques, etc.) en supposant que le module d'Young $E(\omega, T)$ et/ou le module de cisaillement $G(\omega, T)$ (selon l'état contrainte-déformation adopté) sont indépendants de la fréquence. Ensuite, après la construction de la matrice globale d'élément finis, la dépendance en fréquence de tels modules est représentée selon un modèle viscoélastique particulier adopté : soit l'approche du module complexe, soit à travers des modèles de type GHM, ADF ou FDM, comme montré dans les paragraphes précédents. En supposant que le coefficient de Poisson est indépendant de la fréquence, $E(\omega, T)$ devient proportionnel à $G(\omega, T)$ selon la relation $G(\omega, T) = E(\omega, T)/2(1 + \nu)$. Alors, un des deux modules peut être factorisé dans la matrice de rigidité pour la sous-structure viscoélastique sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v \quad (2.25)$$

Si on considère l'excitation harmonique de la forme, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{i\omega t}$, et la réponse harmonique, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}e^{i\omega t}$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}e^{i\omega t}$, les équations du mouvement dans le domaine temporel (2.23) sont transformées en équations algébriques dans le domaine fréquentiel, qu'on peut représenter sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}(\omega, T) - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (2.26.a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{b}\mathbf{U}; \quad \mathbf{Y} = \mathbf{c}\mathbf{Q} \quad (2.26.b)$$

En combinant les équations (2.30) et (2.27), on peut obtenir la rigidité dynamique complexe :

$$\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M} \quad (2.27)$$

Après avoir défini la matrice de rigidité complexe, l'étape suivante consiste à résoudre le système dans le domaine fréquentiel, ce qui peut être fait par la construction de la matrice de souplesse dynamique ou matrice de Fonctions de Réponses Fréquentielles :

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{c}\mathbf{Z}(\omega, T)^{-1}\mathbf{b} \quad (2.28)$$

Puisque notre intérêt est focalisé sur les réponses dynamiques dans le domaine fréquentiel, l'expression (2.28) peut, en principe, être directement employée pour le calcul des réponses harmoniques. Cependant, une telle procédure devient pratiquement inexploitable, en termes de temps de calcul, pour des modèles aux éléments finis de grandes tailles associés à des structures industrielles. Les calculs deviennent envisageables lorsqu'on utilise des méthodes de réduction de modèles, où encore des méthodes d'approximation des réponses par les métamodèles. Ces aspects seront abordés dans le Chapitre 4.

2.7 Conclusions

Dans ce chapitre on a fait un bilan de la connaissance actuelle en ce qui concerne les modèles mathématiques utilisés pour représenter l'amortissement viscoélastique associés aux modèles aux éléments finis de structures mécaniques. On est placé dans le cadre de la viscoélasticité linéaire appliquée aux matériaux homogènes isotropes pour introduire l'approche module complexe. Les modélisations couramment utilisées sont introduites - modèles rhéologiques classiques, modèles à fractions partielles, à dérivées d'ordre fractionnelles. On discute de leur pertinence à représenter le comportement des matériaux réels, après identification expérimentale de leurs paramètres. On a constaté que plus le nombre de paramètres est important, plus la représentativité du modèle est assurée, mais plus ils sont difficiles à manipuler. Par conséquent, on a adopté l'approche module complexe, ce choix étant justifié par l'intérêt de limiter l'étude entamée au domaine fréquentiel. Après la discussion des principaux paramètres qui influent de forme significative sur le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques, comme fréquence d'excitation et température, on montre la procédure suivie pour introduire l'amortissement viscoélastique dans les modèles aux éléments finis de systèmes mécaniques à travers du principe d'Equivalence Elastique-Viscoélastique.