

**RUBENS CAMPREGHER JUNIOR**

**MODELAGEM MATEMÁTICA TRIDIMENSIONAL PARA PROBLEMAS  
DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA**

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto  
Co-orientador: Prof. Dr. Sérgio Said Mansur

**UBERLÂNDIA - MG**  
2005

À Ana Cláudia.

## **Agradecimentos**

Considero o período que passamos no doutorado prazeroso, pois costumamos abraçar com entusiasmo o assunto de nossa pesquisa. Entretanto, talvez pelo seu ineditismo, uma tese acaba por ser um trabalho solitário. Assim, a presença daqueles que nos são queridos acaba, naturalmente, por receber ainda mais valor.

Como não poderia deixar de ser, meus principais agradecimentos vão para a minha esposa Ana Cláudia que, com enorme paciência e compreensão, tem me ajudado por todos estes anos. Infelizmente, meu treinamento em ciências exatas não ajuda a externar, usando palavras, toda a minha gratidão e apreço.

Mesmo residindo longe, meus pais e irmãos nunca deixaram de me apoiar e de se interessar pelo meu trabalho, por mais enigmático que o mesmo lhes parecesse. Recebam, por favor, os meus agradecimentos.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, o professor Aristeu da Silveira Neto. Impossível não considerá-lo um cientista entusiasmado, educador competente e um caráter exemplar.

Ao professor Sérgio Mansur que vem acompanhando, durante todos estes anos, meus primeiros passos na carreira científica.

Obrigado também aos colegas do LTCM. Alguns de vocês forneceram valiosas sugestões durante o desenvolvimento deste trabalho. Todos, porém, proporcionaram inestimáveis momentos de amizade.

Ao Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), por financiar minha estadia em Uberlândia.

## Sumário

Sumário	ix
Lista de Símbolos	xi
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xxii
Resumo	xxiii
Abstract	xxiv
Capítulo I: Introdução	1
Capítulo II: Revisão Bibliográfica	3
2.1 Discretização do Domínio Computacional	3
2.2 Acoplamento Pressão-Velocidade	6
2.3 Arranjo co-localizado	8
2.4 Método da Fronteira Imersa	10
2.5 Interação Fluido-Estrutura	14
Capítulo III: Modelo Matemático e Método Numérico	19
3.1 Modelo Matemático	19
3.1.1 Formulação para o Domínio Euleriano	20
3.1.2 Formulação para o Domínio Lagrangiano	23
3.2 Método Numérico	26
3.2.1 Discretização do Domínio Euleriano	26
3.2.2 O Algoritmo SIMPLEC	31
3.2.3 Interpolação de Rhie-Chow	34
3.2.4 Discretização do Domínio Lagrangiano	36
Capítulo IV: Resultados e Discussão – escoamento sobre uma esfera parada	43
4.1 Validação do código numérico de base cartesiana	43
4.1.1 Camada de Mistura	44
4.1.2 escoamento sobre um degrau descendente	48
4.2 Simulações com a metodologia de fronteira imersa	59
4.2.1 escoamentos sobre uma esfera estática	63
Capítulo V: Resultados e Discussão – Interação Fluido-Estrutura	95
Capítulo VII: Conclusões	127
Perspectivas	129
Capítulo VIII: Bibliografia	131

Anexo I: Processamento Paralelo	139
A1.1 Clusters de Computadores Pessoais	142
A1.2 Cluster <i>Beowulf</i>	144
A1.3 Metodologias de Paralelização	145
A1.4 Paralelização do Presente Problema	151
A1.5 Bibliotecas de paralelização	153
Anexo II: Equação da energia	157

## Lista de Símbolos

### Letras Latinas

- $A$  : área superficial do domínio computacional;  
 $A_N$  : área superficial do subdomínio particionado;  
 $b$  : vetor força de corpo;  
 $c_P$  : calor específico;  
 $C_D$  : coeficiente de arrasto;  
 $C_L$  : coeficiente de sustentação;  
 $C_P$  : coeficiente de pressão;  
 $C_S$  : constante de Smagorinsky, coeficiente lateral;  
 $d$  : distância entre os centros dos volumes;  
 $dS$  : área diferencial;  
 $D$  : diâmetro da esfera;  
 $D_m$  : função distribuição;  
 $E$  : eficiência do processamento paralelo, energia total do sistema;  
 $i$  : nº de células em cada aresta do domínio computacional;  
 $f$  : vetor força por unidade de volume, freqüência;  
 $F$  : vetor força no interior do sistema, força interfacial, fluxo nas faces do volume;  
 $h$  : entalpia, altura do degrau;  
 $H$  : altura do degrau;  
 $i$  : direção cartesiana;  
 $I$  : tensor unitário;  
 $k$  : índice do ponto lagrangiano, constante das molas;  
 $m$  : massa do sistema;  
 $n$  : vetor normal;  
 $N$  : nº de subdomínios;  
 $p$  : pressão;  
 $p_k$  : pressão no ponto lagrangiano  $k$ ;  
 $q$  : termo fonte;

- $q_e$  : termo fonte da equação da energia;  
 $q_\phi$  : termo fonte associado à variável genérica  $\phi$  ;  
 $Q$  : calor que atravessa a fronteira do sistema;  
 $r$  : raio da esfera;  
 $Re_D$  : número de *Reynolds* ( $= \rho U_0 D / \mu$ , baseado no diâmetro da esfera);  
 $Re_h$  : número de *Reynolds* ( $= \rho U_0 h / \mu$ , baseado na altura  $h$  do degrau);  
 $Re_H$  : número de *Reynolds* ( $= \rho U_0 H / \mu$ , baseado na altura  $H$  do degrau);  
 $S$  : *speedup*, parte viscosa do tensor tensão, área superficial do volume de controle;  
 $St_D$  : número de *Strouhal* ( $= fD / U_0$ , baseado no diâmetro da esfera);  
 $St_H$  : número de *Strouhal* ( $= fD / H$ , baseado na altura  $H$  do degrau);  
 $t$  : tempo;  
 $T$  : temperatura, tensor tensão;  
 $T_S$  : tempo de processamento serial;  
 $T_N$  : tempo de processamento em N processadores;  
 $u$  : velocidade na direção  $x$ ;  
 $v$  : velocidade na direção  $y$ ;  
 $w$  : velocidade na direção  $z$ ;  
 $\mathbf{v}_b$  : vetor velocidade da interface;  
 $V$  : volume total do domínio computacional;  
 $V_k$  : velocidade do ponto lagrangiano;  
 $V_N$  : volume do subdomínio particionado;  
 $W$  : trabalho realizado sobre o sistema;  
 $x$  : vetor posição do volume elementar;  
 $x_k$  : vetor posição do ponto lagrangiano  $k$ ;  
 $X_S$  : comprimento da bolha de recirculação;

### Letras Gregas

- $\alpha$  : coeficiente de interpolação;  
 $\beta$  : coeficiente de expansão volumétrica, compressibilidade artificial;

- $\delta$  : função delta de Dirac;  
 $\delta_i$  : distância entre os centróides dos volumes adjacentes;  
 $\Delta$  : largura do volume elementar;  
 $\phi$  : variável genérica, propriedade intensiva;  
 $\Phi$  : propriedade extensiva;  
 $\gamma$  : fator peso;  
 $\Gamma^\phi$  : coeficiente de difusão para a variável  $\phi$ ;  
 $\kappa$  : condutividade térmica;  
 $\mu$  : viscosidade dinâmica;  
 $\mu_{eff}$  : viscosidade efetiva;  
 $\lambda$  : segunda viscosidade, coeficiente de *blending*;  
 $\nu$  : viscosidade cinemática;  
 $\psi$  : propriedade de transporte;  
 $\rho$  : densidade;  
 $\tau_{ij}$  : tensor de Reynolds;  
 $\omega$  : vorticidade;  
 $\Omega$  : volume ocupado por uma porção de massa, tensor vorticidade;  
 $\Omega_k$  : volume elementar em torno do ponto lagrangiano  $k$ ;

### Operadores

- $D$ : derivada material;  
 $\Delta$  : variação;  
 $\partial$  : derivada parcial;  
 $\nabla$  : nabra;  
 $\int$  : integral;  
 $\sum$  : somatória;  
 $\prod$  : produtória;  
 $\bar{\phantom{x}}$  : interpolação na interface;



## Índices

- $a$ : advectivo;
- $d$ : difusivo;
- $P$ : centro do volume de controle;
- $N, n$ : ponto central e face norte do volume de controle;
- $S, s$ : ponto central e face sul do volume de controle;
- $E, e$ : ponto central e face leste do volume de controle;
- $W, w$ : ponto central e face oeste do volume de controle;
- $T, t$ : ponto central e face superior do volume de controle;
- $B, b$ : ponto central e face inferior do volume de controle;
- $i, j$ : ponto central da malha ou componente de um tensor;
- $t$ : variável turbulenta;
- $k$ : ponto lagrangiano;
- $\infty$ : corrente livre;
- $0$ : entrada do domínio;

## Superíndices

- $*$ : grandezas adimensionais, estimativa da propriedade;
- $'$ : diferença entre valores reais e aproximados;
- H: alta ordem de interpolação;
- L: baixa ordem de interpolação;
- $n$ : iteração;
- $t$ : tempo atual;

## Lista de Figuras

Figura	Descrição	Página
Figura 2.1	Domínio discretizado por malhas de (a) pontos nodais; (b) elementos triangulares e (c) volumes cartesianos.	4
Figura 2.2	Distribuição dos métodos mais comumente usados na discretização de domínios contínuos.	5
Figura 2.3	Malhas construídas com nós centrados (a) e com faces centradas (b).	6
Figura 2.4	Arranjos de variáveis: a) desencontrado e b) co-localizado.	9
Figura 2.5	Maquete de uma aeronave em túnel de vento sofrendo os efeitos do <i>flutter</i> .	15
Figura 2.6	Famoso caso da ponte <i>Tacoma Narrows</i> , onde o efeito de ventos constantes provocou a sua destruição em 1940.	16
Figura 2.7	Evolução da solução particionada de um esquema de interação fluido-estrutura.	16
Figura 2.8	Iteração (I) entre os domínios de fluido e estrutura, em cada passo de tempo, buscando maior acurácia.	18
Figura 3.1	Desenho esquemático mostrando o ponto lagrangiano $k$ localizado em $\vec{X}_k$ e elemento de fluido posicionado em $\vec{x}$ .	24
Figura 3.2	Interpolação dos instantes de tempo $t^{n-2}$ , $t^{n-1}$ e $t^n$ por meio de uma parábola.	28
Figura 3.3	Volume de controle elementar, com a variável $\phi$ localizada no centróide.	30
Figura 3.4	Posição do ponto lagrangiano $\vec{X}_k$ no sistema de coordenadas euleriano e vista detalhada dos pontos auxiliares $p_1$ a $p_6$ .	37
Figura 3.5	Pontos auxiliares $p_1$ a $p_6$ empregados no cálculo das derivadas espaciais da Eq. (3.17)	40
Figura 3.6	Elemento triangular e suas propriedades geométricas.	40
Figura 3.7	Valores da função distribuição $D_m$ em um domínio tridimensional.	42
Figura 4.1	Campo inflexional de base para o desenvolvimento de uma camada de mistura temporal.	44

Figura 4.2	Evolução da camada de cisalhamento, formando as instabilidades de <i>Kelvin-Helmholtz</i> .	45
Figura 4.3	Tamanho do domínio computacional (em metros) e densidade de malhas empregadas na simulação da camada de mistura espacial.	46
Figura 4.4	Instabilidades de <i>Kelvin-Helmholtz</i> e vórtices secundários longitudinais na camada de mistura espacial. Apresenta-se a vorticidade $ \omega  = 1,0$ .	47
Figura 4.5	Detalhe dos vórtices longitudinais contra-rotativos na camada de mistura. Visualiza-se as vorticidades $- \omega  = 0,4$ (azul) e $+ \omega  = 0,4$ (vermelho).	47
Figura 4.6	Desenho esquemático do domínio de cálculo: degrau descendente.	49
Figura 4.7	Isosuperfícies do módulo da vorticidade $ \omega  = 1,5U_0/h$ no tempo $t = 40h/U_0$ coloridos pela pressão; $Re_h = 5.100$ .	52
Figura 4.8	Perfis de velocidade média longitudinal após o degrau; $Re_h = 5.100$ .	52
Figura 4.9	Perfis de intensidades da turbulência longitudinais e transversais da velocidade – (a) e (b), respectivamente - e da componente da tensão de Reynolds (c); $Re_h = 5.100$	53
Figura 4.10	Coeficiente de pressão na direção longitudinal do degrau; $Re_h = 5.100$ .	54
Figura 4.11	Desenho esquemático do domínio utilizado na simulação do degrau a $Re_H = 38.000$ .	55
Figura 4.12	Perfis de velocidade média em duas estações diferentes, em $x/H = 8$ (a) e $x/H = 10$ (b); $Re_H = 38.000$ .	56
Figura 4.13	Sinal da sonda no domínio da frequência (esq.) e cascata de energia (dir.).	57
Figura 4.14	Isovalores da vorticidade $\omega_y = 1,2U_0/H$ no sentido transversal ao escoamento ( <i>spanwise</i> ); $Re_H = 38.000$ .	57
Figura 4.15	Vista em corte da componente $\omega_y$ vorticidade no plano $y = W/2$ ; $Re_H = 38.000$ .	58
Figura 4.16	Componente longitudinal da vorticidade $\omega_x$ num corte no plano $z = H$ ; $Re_H = 38.000$ .	58
Figura 4.17	Esfera construída a partir de elementos triangulares, usada na simulação.	59
Figura 4.18	Domínio euleriano, discretizado por volumes finitos, no qual a esfera foi inserida.	60

Figura 4.19	Malha de volumes finitos vista em perspectiva.	61
Figura 4.20	Vista expandida do domínio original euleriano particionado em subdomínios durante o processamento paralelo.	62
Figura 4.21	Linhas de corrente a $Re = 100$ vistas do plano $xy$ (esq.) e do plano $yz$ (b).	64
Figura 4.22	Comportamento das linhas de corrente a $Re = 100$ visto no plano $xz$ .	65
Figura 4.23	Vista em corte do campo da componente $u$ da velocidade a $Re = 100$	65
Figura 4.24	Vista em corte da componente $w$ da velocidade a $Re = 100$	66
Figura 4.25	Evolução temporal da norma $l_2$ avaliada para $Re = 200$ .	68
Figura 4.26	Comprimentos das bolhas de recirculação à jusante da esfera (componente $u$ da velocidade em função da coordenada horizontal $x$ ) para (a) $Re = 100$ e (b) $Re = 200$ .	69
Figura 4.27	Bolhas de recirculação simétricas vistas em corte pelo equador da esfera a $Re = 200$ .	70
Figura 4.28	Isosuperfícies de $ \omega $ em corte. Os valores correspondem a $2,0 [s^{-1}]$ (azul), $5,0 [s^{-1}]$ (verde) e $7,0 [s^{-1}]$ (amarelo).	71
Figura 4.29	Comportamento dos perfis das componentes $u$ ao longo do eixo $x$ (a) e ao longo do eixo $z$ (b) e dos perfis das componentes $v$ (c) e $w$ (d) da velocidade em corte a $Re = 200$ .	72
Figura 4.30	Campo da componente $u$ da velocidade visto em corte pelo equador da esfera a $Re = 200$ .	73
Figura 4.31	Vista em corte do campo da componente $w$ da velocidade a $Re = 200$ .	73
Figura 4.32	Módulo da vorticidade total $ \omega $ , visto em corte, para $Re = 200$ .	74
Figura 4.33	Campos de pressão para escoamento a $Re = 200$ vistos no plano $xy$ (a) e no plano $xz$ (b).	74
Figura 4.34	Vista detalhada das componentes da força na direção $x$ (a), na direção $y$ (b) e na direção $z$ (c)	75
Figura 4.35	Coeficiente de pressão ( $C_p$ ) avaliado ao longo da superfície da esfera comparados com os resultados extraídos de Fornberg (1988) para $Re = 100$ (a) e $Re = 200$ (b).	75
Figura 4.36	Corte transversal mostrando a componente $u$ da velocidade para escoamentos a $Re = 300$ .	76
Figura 4.37	Detalhe do campo da componente $w$ da velocidade, visto a partir de um corte transversal pelo equador da esfera a $Re = 300$ .	76
Figura 4.38	Módulo da vorticidade visto em corte transversal a $Re = 300$ .	77

Figura 4.39	Vista em corte do escoamento em $x = 0,42m$ , mostrando a simetria planar na esteira a $Re = 400$ .	77
Figura 4.40	Linhas de corrente à jusante da esfera a $Re = 300$ , evidenciando a tridimensionalização da esteira.	78
Figura 4.41	Esteira dupla ( <i>double thread wake</i> ) evidenciada a $Re = 300$ .	79
Figura 4.42	Vista detalhada do vórtice toroidal à jusante da esfera para escoamentos a $Re = 300$ .	80
Figura 4.43	Seqüência de quadros mostrando o processo de emissão de estruturas turbilhonares. A figura (a) refere ao tempo $t^* = 140$ e o intervalo de tempo entre as demais figuras é $\Delta t^* = 1$ .	81
Figura 4.44	Estruturas turbilhonares do tipo grampo de cabelo à jusante de uma esfera imersa num escoamento a $Re = 300$ , retirado de <i>Gilmanov et al. (2003)</i> .	83
Figura 4.45	Estruturas turbilhonares do tipo grampo de cabelo presentes no escoamento ao redor de uma esfera a $Re = 400$ vistos dos planos $xz$ (esq.) e $yz$ (dir.), retirado de <i>Gushchin et al. (2002)</i> .	83
Figura 4.46	Coeficiente de sustentação ( $C_L$ ) para $Re = 400$ e $Re = 500$ .	83
Figura 4.47	Vorticidade longitudinal vista em corte à $x = 0,42m$ para $Re = 600$ .	84
Figura 4.48	Detalhe dos vórtices sobre a esfera a $Re = 1.000$ evidenciado pelo critério $Q$ .	85
Figura 4.49	Coeficiente de sustentação (a) e coeficiente lateral (b) para $Re = 1.000$ .	86
Figura 4.50	Disposição das estações de monitoração e das sondas numéricas no domínio computacional.	86
Figura 4.51	Resultados para sondas numéricas na estação A para $Re = 500$ . Estão plotados os valores dos históricos da componente $u$ da velocidade (esq.) e a <i>FFT</i> realizada sobre estes (dir.) para as sondas 1 (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d).	87
Figura 4.52	Resultados das sondas para componente $w$ na estação A, sonda 5 (a), a componente $v$ estação A, sonda 2 (b) e componente $u$ na estação B, sonda 1 (c) e estação C, sonda 1 (d). Na coluna da esquerda têm-se os históricos das velocidades e na da direita a suas transformadas <i>FFT</i> .	88
Figura 4.53	Sinais coletados para as componentes da velocidade (a) $u$ , (b) $v$ e (c) $w$ na sonda 1 estação A do escoamento a $Re = 1.000$ .	90

Figura 4.54	Variação do número de Strouhal em função do número de Reynolds para escoamentos ao redor de uma esfera, retirado de Mittal e Najjar (1999).	91
Figura 4.55	Histórico da variação da velocidade $u$ (coluna da esquerda) para $Re = 1.000$ , $FFT$ do sinal da velocidade (coluna central) e espectro de energia associado (coluna à esquerda), para a sonda 1, posicionada na (a) estação A, (b) estação B e (c) estação C.	92
Figura 4.56	Resultados para o coeficiente de arrasto obtidos com a esfera em repouso e comparação com dados da literatura.	93
Figura 4.57	Evolução da norma $l_2$ em função do número de Reynolds.	93
Figura 5.1	Desenho esquemático representando o sistema esfera-molas que está sendo modelado	96
Figura 5.2	Posições iniciais e atuais do centróide da esfera no plano a) $xz$ e b) $yz$ .	99
Figura 5.3	Posição do centro de massa da esfera obtidos com a simulação do movimento com as forças externas impostas.	101
Figura 5.4	Malha empregada na simulação da esfera ancorada por molas.	101
Figura 5.5	Primeiro ciclo do deslocamento da esfera $2 \leq t^* \leq 22$ , $Re_D = 400$ .	103
Figura 5.6	Primeiro ciclo do deslocamento da esfera $24 \leq t^* \leq 32$ , $Re_D = 400$ .	104
Figura 5.7	Cinco primeiros ciclos de deslocamento do centro de massa da esfera no sentido do escoamento, $Re_D = 400$ .	105
Figura 5.8	Emissão de vórtices durante o intervalo de tempo $80 < t^* < 104$ , $Re_D = 400$ .	107
Figura 5.9	Emissão de vórtices durante o intervalo de tempo $108 < t^* < 120$ , $Re_D = 400$ .	108
Figura 5.10	Emissão de vórtices durante o intervalo de tempo $124 < t^* < 150$ , $Re_D = 400$ .	109
Figura 5.11	Evolução do campo de isobáricas ( $p = -0,016 \text{ kgf/cm}^2$ ) de $t^* = 80$ a $t^* = 110$ .	111
Figura 5.12	Evolução do campo de isobáricas ( $p = -0,016 \text{ kgf/cm}^2$ ) de $t^* = 120$ a $t^* = 150$ .	112
Figura 5.13	Cotas ao longo do eixo $x$ nas quais os campos da Fig. 5.14 foram extraídos.	113
Figura 5.14	Valores da propriedade $Q$ extraídos em planos $yz$ ao longo do escoamento.	114

Figura 5.15	Coordenada $x$ do centro de massa em função do tempo adimensional.	115
Figura 5.16	Evolução dos valores de aceleração ( $ax$ ), velocidade ( $vx$ ), deslocamento ( $xc$ ) do centro de massa da esfera na direção do escoamento e força total nas molas.	117
Figura 5.17	Disposição das sondas numéricas ao longo da estação fixa A e da estação móvel A*.	118
Figura 5.18	Históricos dos sinais das componentes das velocidades (esq.) e $FFT$ do sinal correspondente (dir.), para as sondas 2(a), 3(b), 4(c) e 5(d) posicionadas na estação fixa A.	120
Figura 5.19	Históricos dos sinais das componentes das velocidades (esq.) e $FFT$ do sinal correspondente (dir.), para as sondas 2(a), 3(b), 4(c) e 5(d) posicionadas na estação fixa A.	121
Figura 5.20	Resultados para a $FFT$ dos sinais de deslocamentos do centro de massa na direção do eixo $y$ (a) e do eixo $z$ (b).	122
Figura 5.21	Deslocamentos do centro de massa da esfera ao longo do plano $xz$ (a), $xy$ (b), $yz$ (c) e em perspectiva (d), para os instantes de tempo $0 < t^* < 300$ .	123
Figura 5.22	Deslocamentos do centro de massa da esfera ao longo do plano $xz$ (a), $xy$ (b), $yz$ (c) e em perspectiva (d), para os instantes de tempo $1350 < t^* < 1650$ .	124
Figura 5.23	Deslocamentos do centro de massa da esfera ao longo do plano $xz$ (a), $xy$ (b), $yz$ (c) e em perspectiva (d), para os instantes de tempo $2700 < t^* < 3000$ .	125
Figura A1.1	Arquitetura Single Instruction / Single Data (SISD)	140
Figura A1.2	Arquitetura Single Instruction / Multiple Data (SIMD)	141
Figura A1.3	Configuração Multiple Instruction / Multiple Data (MIMD)	142
Figura A1.4	Desenho esquemático representando o cluster <i>Beowulf</i> empregado no presente trabalho	145
Figura A1.5	Relação entre a diminuição do volume e da área em função do número de processadores	147
Figura A1.6	Resultados de <i>speedup</i> para três malhas de refinamentos diferentes	150
Figura A1.7	Resultados da eficiência obtidos em três malhas diferentes	150
Figura A1.8	Topologias possíveis para a troca de mensagens: a) unidimensional, b) bidimensional e c) tridimensional.	151

Figura A1.9	Relação entre a diminuição do volume computacional e da área de troca de mensagens para as três topologias possíveis de particionamento.	152
Figura A1.10	Sobreposição necessária para as aproximações espaciais de segunda ordem.	153
Figura A1.11	Comunicação entre os subdomínios usando uma topologia unidimensional de divisão.	154
Figura A1.12	Troca de mensagens durante um ciclo iterativo.	156



## Lista de Tabelas

<b>Tabela</b>	<b>Descrição</b>	<b>Página</b>
Tabela 4.1	Resultados obtidos para comprimento de recolamento; $Re_h = 5.100$ .	54
Tabela 4.2	Comprimentos das bolhas de recirculação para $Re = 100$ e $200$ .	64
Tabela 4.3	Resultados obtidos para o coeficiente de arrasto na esfera.	92

Campregher, R., 2005, “Modelagem Matemática Tridimensional para Problemas de Interação Fluido-Estrutura”, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## Resumo

A modelagem matemática e a simulação numérica de escoamentos turbulentos tridimensionais ao redor de geometrias complexas móveis constituem um dos grandes desafios da engenharia moderna. A discretização de domínios tridimensionais costuma exigir grande capacidade de armazenamento e processamento de dados que, se somados aos freqüentes refinamentos locais das malhas, torna os cálculos extremamente caros. Por sua vez, a representação de geometrias complexas empregando coordenadas generalizadas, pode gerar dificuldades matemáticas ou numéricas, além de possuírem abrangência limitada. A metodologia de Fronteira Imersa está sendo desenvolvida como uma alternativa para lidar com este problema, separando-o em dois domínios distintos: um domínio lagrangiano para representar a interface sólido/fluido e um domínio euleriano para discretizar o fluido. O presente trabalho apresenta uma extensão para problemas tridimensionais de uma metodologia de fronteira imersa, desenvolvida no LTCM, denominada Modelo Físico Virtual. O domínio euleriano foi discretizado com aproximações espaciais e temporais de segunda ordem, empregando Volumes Finitos em malhas cartesianas e com capacidade de processamento paralelo. O domínio lagrangiano foi construído com uma malha de elementos triangulares. Os testes preliminares foram feitos de forma a validar, primeiramente, o domínio de base cartesiana para, em seguida, inserir a fronteira imersa. Como primeira geometria a ser estudada, optou-se por uma esfera estacionária imersa. Apesar de sua simplicidade geométrica, o escoamento ao seu redor produz uma grande riqueza de detalhes, além de existirem resultados disponíveis na literatura para comparação. Uma vez validada a metodologia para uma geometria estacionária, procurou-se ampliar as potencialidades do método para um problema de Interação Fluido-Estrutura. O sistema dinâmico escolhido foi composto de uma esfera imersa no escoamento sustentada por molas. Foi estudado o efeito provocado pela ação do escoamento sobre a dinâmica do sistema e o conseqüente movimento da esfera sobre a geração e emissão de estruturas turbilhonares. Outra importante contribuição do presente trabalho foi o desenvolvimento, no LTCM, do conhecimento necessário para processamento paralelo de alto desempenho, o que resultou na montagem de um laboratório nesta importante área.

---

*Palavras Chave: Processamento paralelo, Métodos de Fronteira Imersa, Modelo Físico Virtual, Interação Fluido-Estrutura, Turbulência.*

Campregher, R., 2005, "Mathematical Modeling for Three-Dimensional Fluid-Structure Interaction Problems", Doctor Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## Abstract

The mathematical modeling and the three-dimensional numerical simulation of flows around complex moving geometries have been one of the greatest challenges in today engineering problems. The discretization of three-dimensional domains requires, very often, huge amount of data processing and storing which, with the frequently local mesh refinements, make the computations an extremely expensive issue. Representing complex geometries by generalized coordinates grids, may impose mathematical or numerical difficulties, hence a limited range of use. The immersed boundaries methodologies have been developed aiming to cope with this problem by separating it in two domains: a Lagrangian domain to represent the solid/fluid interface and an Eulerian domain to the flow counterpart. This work presents an extension to three-dimensional domains of the Immersed Boundary Method, developed at the LTCM, named Virtual Physical Method. The Eulerian domain was discretized using second-order time and space approximations, by Finite Volumes in a Cartesian mesh having parallel processing capabilities. The Lagrangian domain was built employing a triangular elements mesh. The initial tests were done in order to validate, firstly, the Cartesian basis domain in order to insert, later, the immersed boundary. As the first geometry studied, a stationary sphere was chosen. Despite the geometric simplicity of the spheres, the flow around them produces very rich structures, having well reported benchmarks available in the literature. Once the methodology has been validated for a stationary geometry, it was extended to a Fluid-Structure Interaction Problem. The dynamic system chosen was composed by a sphere tethered by springs immersed in the flow. The flow past the sphere-springs system was studied. Another important contribution of this work was the development, at the LTCM, of an important know-how in parallel processing, which has resulted in a laboratory in this important field of research.

---

*Keywords: Parallel Programming, Immerse Boundary Methods, Physical Virtual Model, Fluid-Structure Interaction, Turbulence.*

# CAPÍTULO I

## Introdução

Na sua incansável busca por respostas a questões de crescente complexidade, o homem desenvolve ferramentas cada vez mais poderosas, num jogo onde as primeiras sempre estão em franca vantagem. Neste contexto, a engenharia torna-se um interessante exemplo, ao empregar os conhecimentos adquiridos para desbravar novos horizontes.

A modelagem matemática e a solução numérica da ação de forças sobre corpos imersos em escoamentos, com suas possíveis deformações e deslocamentos, possuem espaço consolidado, há algum tempo, na avaliação dos problemas práticos de engenharia. Por outro lado, estudos numéricos concernentes à dinâmica dos fluidos ainda são comparativamente mais recentes, devido, principalmente, às fortes não-linearidades presentes nas equações representativas. Por fim, é interessante salientar que a união destes dois ramos importantes, ou seja, o estudo dos efeitos do escoamento de um fluido sobre corpos sólidos e o deslocamento destes, influenciando a dinâmica do escoamento, encontra-se no domínio dos problemas multidisciplinares de difícil tratamento.

Apesar do inegável avanço em várias áreas da matemática, a solução analítica de equações diferenciais parciais não-lineares, como as que representam os escoamentos, é possível apenas para problemas extremamente simples. Assim, propostas de análises de situações reais em escoamentos de fluidos, fora do campo puramente experimental, ainda esbarra em necessidades técnicas mais sofisticadas e na disponibilidade de poderosos recursos computacionais. Evidentemente, é igualmente notório o crescimento dos recursos computacionais, viabilizando a realização de simulações numéricas cada vez mais acuradas de escoamentos em domínios de topologias diversas.

Em geometrias complexas, a escolha apropriada da malha numérica depende da metodologia de discretização do domínio contínuo. Desta forma, um algoritmo desenvolvido, por exemplo, para lidar com malhas curvilíneas ortogonais, não é capaz de lidar com malhas não-ortogonais. Assim, diversas técnicas procuraram lidar com o problema, empregando malhas que se ajustam à sua topologia, quer seja acompanhando a superfície do corpo a ser estudado, quer seja se adaptando melhor ao escoamento (o caminho preferencial das linhas de corrente é uma das opções), melhorando a qualidade da solução. Entretanto, as inegáveis

qualidades deste tipo de abordagem são acompanhadas de alguns problemas, sendo que o mais delicado deles é o aumento da complexidade das funções de interpolação geométricas que, além de dificultarem demasiadamente a implementação computacional, encarecem a solução.

Escoamentos ao redor de geometrias complexas sempre representaram, e ainda representam, sérias dificuldades para os numericistas. Nas discretizações em que se procura ajustar a malha numérica ao objeto de estudo e ao domínio, o problema surge na geração da geometria, nem sempre trivial e propensa a inserir severos erros nos balanços de massa entre seus nós elementares. Nos casos de discretizações em blocos, o acoplamento entre os diversos domínios, se mal construído, pode implicar em sérias inconsistências físicas.

Paralelamente às diversas metodologias existentes, a discretização de superfícies complexas pela metodologia de Fronteira Imersa procura resolver o problema da representação geométrica ao implementar uma abordagem simples de construção do obstáculo e, por outro lado, permanecer com a discretização do domínio físico em uma malha euleriana estruturada estacionária. Esta liberdade permite mover a geometria, alterar sua forma ou, então, as duas operações ao mesmo tempo, sem a necessidade de reconstruir as malhas do domínio fluido, evitando o processo conhecido como re-malhagem (*remeshing*).

No presente trabalho, propõe-se um modelo numérico que permite simular escoamentos ao redor de geometrias arbitrárias tridimensionais e não deformáveis, capazes de se movimentar sob a ação de forças induzidas pelo próprio escoamento. Esta metodologia é uma extensão da metodologia originalmente bidimensional, proposta por Lima e Silva (2002) para representar o escoamento em torno de corpos estacionários. Porém, a dimensão adicional requer recursos computacionais elevados, dificultando demasiadamente, ou mesmo impossibilitando a solução em arquitetura de processamento serial. Devido ao alto custo de aquisição de supercomputadores vetoriais, diversas universidades, empresas e centros de pesquisas estão empregando a tecnologia de processamento paralelo baseada em clusters de computadores pessoais (PCs). Esta configuração foi, também, a escolhida para o desenvolvimento do código computacional que caracteriza o presente trabalho.

De forma a testar as potencialidades da metodologia de Fronteira Imersa, resultados preliminares foram obtidos em problemas de interação fluido-estrutura, envolvendo escoamentos ao redor de uma esfera contribuindo, assim, com uma alternativa aos métodos correntemente empregados. A metodologia é avaliada em termos de custo computacional, de confiabilidade nos resultados e de facilidade de implementação.

## CAPÍTULO II

### Revisão Bibliográfica

#### 2.1 Discretização do Domínio Computacional

Sempre que se pretende resolver numericamente um determinado problema físico, a primeira etapa a ser realizada é a discretização do domínio contínuo original. A partir deste procedimento, a forma como as equações (agora discretizadas) que representam o fenômeno são tratadas diferenciam os diversos métodos. A abordagem usada no presente trabalho promove a integração das equações diferenciais parciais em cada volume de controle elementar - visto na Fig. 2.1c - que compõe o domínio discretizado, um procedimento conhecido como Método dos Volumes Finitos (*Finite Volume Method* - FVM), bastante difundido a partir do trabalho do Prof. Suhas Patankar (Patankar, 1980). De modo alternativo ao FVM, que considera o volume circundante a cada ponto discreto do domínio, existem outras metodologias sendo algumas igualmente populares.

No Método das Diferenças Finitas (*Finite Difference Method* - FDM), o domínio contínuo é discretizado por pontos conhecidos como nós, cujo conjunto forma a malha mostrada na Fig. 2.1a. Os valores das variáveis estão alojados nestes nós e cada um dos termos da Equação Diferencial Parcial original é substituído por aproximações de Diferenças Finitas (Fortuna, 2000). Esta abordagem foi a primeira empregada nas simulações numéricas de escoamentos e possui, como grande vantagem, a relativa facilidade em se obter aproximações de ordens altas. Porém, seu emprego em malhas não-estruturadas é complexo, além de não conservar a massa e a energia.

Tendo como berço as pesquisas em mecânica dos sólidos, o Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) trabalha com funções-base locais, multiplicadas por uma função-teste e, depois, integradas. O resultado das simulações é baseado nos cálculos destas integrais. Esta metodologia apresenta importantes vantagens como a facilidade em ser aplicada a geometrias complexas (desde que sejam empregadas as funções base e teste corretas), a relativamente simples implementação de esquemas de alta ordem e aos muitos trabalhos teóricos já produzidos sobre o tema. Entretanto, o maior desafio ao se adotar esta abordagem é encontrar um conjunto de equações que represente bem o conjunto de equações

originais e que seja estável, ou seja, os erros decorrentes da aproximação não sejam acumulativos ao longo do processo de solução. Um exemplo de malha não-estruturada, composta por elementos triangulares e freqüentemente empregada em FEM pode ser visto na Fig. 2.1b.

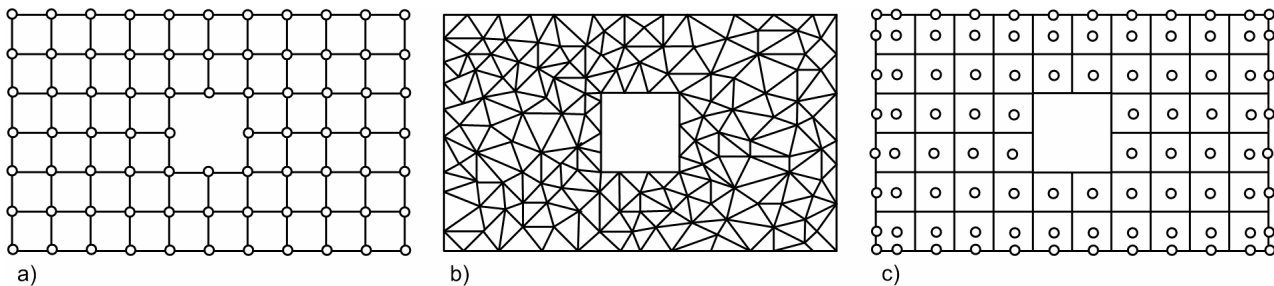


Figura 2.1 – Domínio discretizado por malhas de (a) pontos nodais; (b) elementos triangulares e (c) volumes cartesianos.

De emprego um tanto mais complexo que as técnicas anteriores, os Métodos Espectrais (*Spectral Methods*) empregam discretizações espaciais das derivadas que são transformadas para o espaço de Fourier (espectral). A maior vantagem deste tipo de método é que a convergência acontece de forma mais rápida do que qualquer outro método espacial de ordem  $n$ , para  $n < \infty$ . Entretanto, a dificuldade em lidar com domínios complexos e condições de contorno, além de requerer passos de tempo muito menores (por questão de estabilidade), impede sua disseminação em simulações de problemas reais de engenharia. Uma recente aplicação do Método Espectral pode ser encontrada em Souza (2005). A Fig. 2.2 apresenta um gráfico onde é possível visualizar as diferentes possibilidades de se discretizar um domínio contínuo para aplicações em simulação numérica.

Cabe acrescentar, ainda, que o Método dos Volumes Finitos permite duas variações importantes na posição dos nós em relação à malha: os nós centrados no volume (Fig. 2.3a) e faces centradas (Fig. 2.3b). A diferença fundamental é que os nós centrados nos volumes são inseridos após a construção da malha, enquanto que os nós centrados nas faces são postos primeiro e, em seguida, as faces dos VC são colocadas à meia distância entre eles. A implicação desta escolha, porém, é mais complexa. Os nós centrados nos volumes permitem uma representação mais fidedigna do valor médio da variável em seu interior, ao passo que as faces centradas permitem que aproximações por diferenças centrais das propriedades nas faces sejam mais acuradas. Pelo fato da abordagem dos nós centrados ser mais popular, o que significa mais facilidade em se obter literatura e resultados comparativos, foi a escolha efetuada na construção do código do presente trabalho.

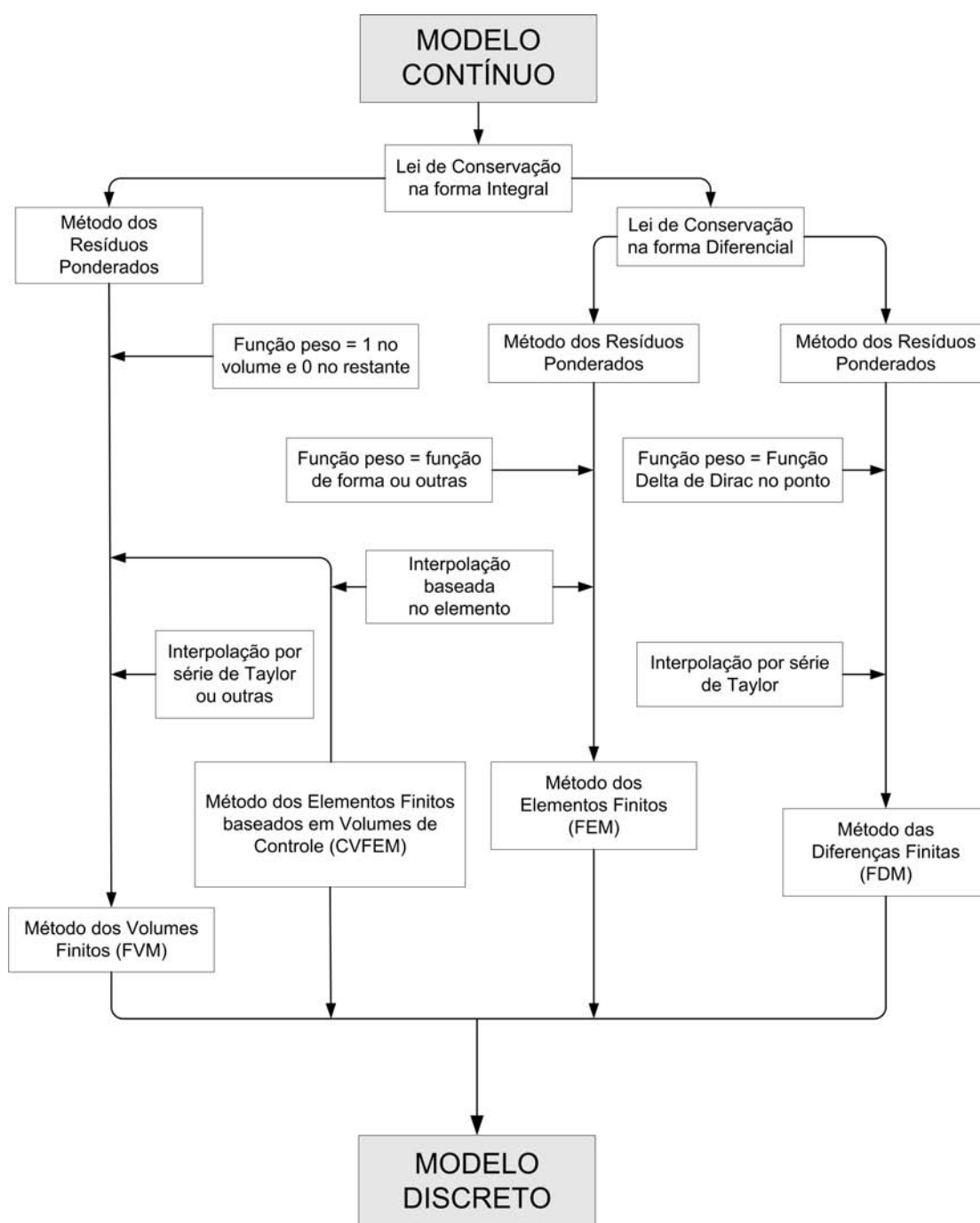


Figura 2.2 – Distribuição dos métodos mais comumente usados na discretização de domínios contínuos.

Por fim, é possível encontrar propostas mistas para a discretização dos domínios, ou seja, o emprego de técnicas que visam aproveitar o que as metodologias anteriormente citadas apresentam de melhor. Um exemplo que vem ganhando destaque recentemente é o Método dos Elementos Finitos baseado no Volume de Controle (Control Volume Finite Element Method - CVFEM), mostrado na Fig. 2.2. Neste método, os volumes podem ser construídos, por



exemplo, a partir da mesma malha empregada em FEM e, em seguida, a equação diferencial parcial (em sua forma divergente) é integrada em seu interior. Este procedimento constrói uma equação de balanço para a propriedade analisada, aos moldes do que é realizado em FVM, ver Bathe e Zang (2002).

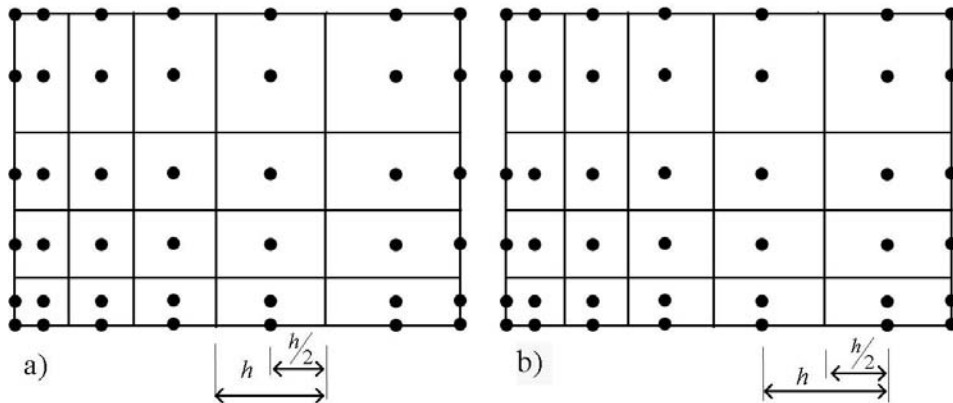


Figura 2.3 – Malhas construídas com nós centrados (a) e com faces centradas (b).

## 2.2 Acoplamento Pressão-Velocidade

No presente trabalho serão simulados apenas escoamentos incompressíveis. Assim, o código computacional foi desenvolvido de forma a contemplar esta característica que, como será visto a seguir, necessita de uma abordagem completamente diferente da empregada nos códigos compressíveis.

Numa primeira análise, resolver um problema de escoamento compressível significa determinar, a cada instante de tempo, as três componentes da velocidade, a pressão e a temperatura, que podem ser obtidas a partir das equações de balanço da quantidade de movimento, conservação da massa, equação da energia e a equação de estado (que relaciona massa específica e pressão). Com efeito, uma vez resolvidas as componentes do campo de velocidade, emprega-se a equação da continuidade para se determinar a massa específica e, em seguida, a equação de estado para se obter a pressão, que será a força motriz do próximo instante de tempo e, assim, sucessivamente.

Entretanto, para escoamentos incompressíveis ou a baixos números de Mach, a equação de estado não é uma ferramenta útil, pois o campo de massa específica varia muito pouco com a pressão e qualquer erro no cálculo da primeira, implica em valores igualmente errôneos na avaliação da segunda. Uma situação como esta tende a provocar, ao longo da simulação, a divergência do método numérico. Assim, a dificuldade que surge é a obtenção de

um campo de pressão (ou melhor, um campo de gradientes de pressão) tal que a equação da continuidade seja satisfeita. Na busca da solução para este problema, diversas abordagens foram desenvolvidas desde a década de 60 e, dentre as mais conhecidas, pode-se destacar:

- Métodos de vorticidade ( $\omega$ )-função corrente ( $\psi$ );
- Métodos de passo fracionado;
- Métodos de correção de pressão;
- Método da Compressibilidade Artificial.

A primeira metodologia possui uma variante possível que é a formulação em termos de velocidade-vorticidade e foi bastante empregada até a década de 80. Suas principais vantagens residem no fato de que a pressão é eliminada das equações da quantidade de movimento e, além disso, a equação da continuidade é automaticamente satisfeita pelo campo de velocidades. Entretanto, o fornecimento de condições de contorno para a vorticidade não é trivial devido à dificuldade na interpretação da sua natureza física, que se agrava para geometrias complexas. Uma outra dificuldade é a extensão da técnica para domínios tridimensionais, pois tanto a vorticidade quanto a função corrente, agora componentes de vetores tridimensionais, compõem-se de seis incógnitas necessitando de uma equação adicional (pressão-velocidade) para o fechamento.

Os métodos de passo fracionado constituem uma família de possíveis tratamentos para o acoplamento pressão-velocidade onde a integração das equações de Navier-Stokes é feita de uma forma não-iterativa (Armfield e Street, 2004). Nesta abordagem, o avanço em um dado intervalo de tempo é feito a sub-intervalos menores e são mais comumente empregados em problemas advectivos dominantes (Karlsen *et al.*, 2001). Cada sub-intervalo (ou passo) transporta a contribuição de um ou mais termos (advectivo, difusivo e gradiente de pressão) da equação. O campo de velocidade estimado não satisfaz, em geral, a equação da conservação da massa, sendo, então, necessária a solução de uma equação de Poisson para a pressão, onde o termo fonte é montado com as velocidades intermediárias. De posse do novo campo de pressão, as velocidades são atualizadas produzindo, agora, um campo de divergente nulo.

De modo alternativo, o sistema de equações pode ser montado mantendo as velocidades e a pressão do instante anterior. Evidentemente, esta abordagem implícita traz o inconveniente de que não se dispõe, ainda, dos valores das velocidades no tempo  $n$ , requerendo um processo iterativo para a convergência. Assim, surge um sistema linear para cada uma das componentes do vetor velocidade, cujos coeficientes dependem fortemente dos tipos de aproximações espaciais e temporais empregadas na sua discretização.

Ao se optar por avanços temporais explícitos, a estabilidade da solução fica atrelada ao tamanho do passo de tempo empregado via critérios de estabilidade, como, por exemplo, o critério de *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL). Tal limitante não é imposta às discretizações implícitas que são, em tese, incondicionalmente estáveis (Maliska, 1995). Assim, é possível avançar a solução, rumo ao regime permanente, empregando passos de tempo muito maiores que os permitidos pela abordagem explícita. Esta característica faz com que os métodos explícitos sejam preferidos quando se deseja capturar o transiente real do fenômeno. Porém, não se configura regra geral, sendo perfeitamente possível seguir a evolução temporal empregando-se métodos implícitos, bastando, para isso, ajustar corretamente o passo de tempo. Neste caso, cada passo de tempo é tratado como uma solução em regime permanente e, assim que a convergência é atingida, avança-se no tempo e o processo sofre um novo reinício. Com efeito, se bem empregada, a discretização implícita permite simular escoamentos transientes com acurácia, além de consumir tempos computacionais que são, na maioria das situações, bem menores que a explícita. A exceção à esta observação repousa em problemas onde o passo de tempo explícito, avaliado pelo critério CFL, é bem maior que o passo de tempo implícito. Entretanto, isto se torna menos provável à medida que são simulados, por exemplo, escoamentos complexos com a presença de elevados gradientes de velocidade.

Os métodos de correção de pressão tem como importante representante o algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), que foi amplamente divulgado em Patankar, (1980). Este algoritmo deu origem a uma grande família de métodos derivados e, no presente trabalho, foi empregada uma conhecida variação do mesmo: o SIMPLER (*SIMPLE-Consistent*), proposto por Van Doormal e Raithby (1984). Pode-se dizer que todos os membros da família SIMPLE comportam-se como métodos *predictor-corrector*, onde um campo de velocidade estimado é corrigido com a equação da continuidade, de forma a garantir a conservação da massa.

As equações que tratam escoamentos compressíveis possuem natureza hiperbólica enquanto as que lidam com escoamentos incompressíveis são de características parabólico-elípticas (Versteeg e Malalasekera, 1995). O Método da Compressibilidade Artificial baseia-se na idéia de alterar matematicamente as equações para regimes compressíveis, para que possam ser usadas em escoamentos incompressíveis (Chorin, 1967). Uma breve demonstração do emprego deste método pode ser visto no Capítulo 3.

### 2.3 Arranjo co-localizado

Em uma malha composta por volumes finitos, como mostrada na Fig. 2.1c, existem várias possibilidades de se distribuir as variáveis relativas a um escoamento. Entretanto,

podem-se separar as opções em dois grandes grupos: os arranjos desencontrados (conhecidos como *staggered grids*), onde as componentes do vetor velocidade e a pressão são armazenadas em locais diferentes (Harlow e Welsh, 1965) e os arranjos co-localizados (*colocated grids*), no qual todas as variáveis, vetoriais ou escalares, encontram-se no mesmo ponto, como pode ser visto na Fig. 2.4.

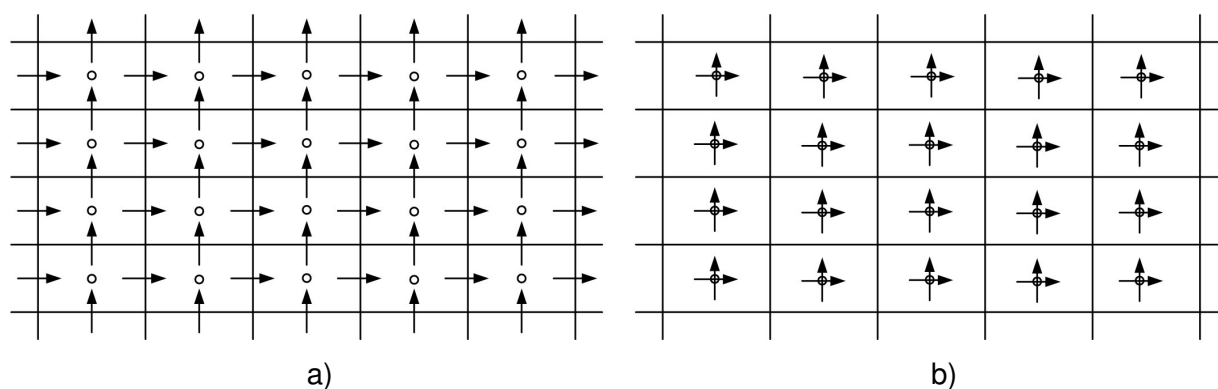


Figura 2.4 – Arranjos de variáveis: a) desencontrado e b) co-localizado.

Durante muito tempo, especialmente após o trabalho de Patankar (Patankar, 1980), o arranjo co-localizado sofreu uma certa discriminação por grande parte da comunidade científica mundial. Neste livro, o autor justifica o uso do arranjo desencontrado devido à impossibilidade de realizar as simulações com o arranjo co-localizado, pois campos oscilatórios de pressão poderiam destruir a estabilidade dos cálculos e, além disso, existiriam erros mais grosseiros na avaliação do gradiente de pressão. Entretanto, em um artigo interessante, M. Perić e colaboradores (Perić *et al.*, 1988) mostraram que para escoamentos em cavidades fechadas, degraus e contrações não existem diferenças entre os dois métodos e, sendo assim, o arranjo co-localizado seria vantajoso devido às suas facilidades de implementação. Recentemente, diversos artigos foram publicados contestando a acurácia do arranjo co-localizado, principalmente com respeito à sua capacidade de conservação da energia. Em Kravchenko e Moin (1997), foi demonstrada a instabilidade de arranjos co-localizados quando empregado, conjuntamente, com a forma divergente dos termos não-lineares da equação da conservação da quantidade de movimento. De certa forma, ainda não existe consenso em meio à comunidade científica a respeito da superioridade de um dos métodos.

Dentre as vantagens de se empregar o arranjo desencontrado, podem ser citadas como mais importantes o forte acoplamento entre pressão e velocidade, pois os gradientes da primeira propriedade coincidem com a posição da segunda, sendo que estas já estão armazenadas nas faces do VC. Uma outra (importante) qualidade apontada por alguns pesquisadores é a capacidade de conservação total da energia cinética, tanto em malhas uniformes quanto em não-uniformes (Piller e Stalio, 2004).

As primeiras simulações bem sucedidas empregando malhas co-localizadas não ortogonais foram realizadas em 1981 (Perić *et al.*, 1988). No entanto, estes trabalhos não receberam o reconhecimento necessário para mudar o consenso, quase que generalizado, acerca da impossibilidade de serem feitas. Ao longo dos anos, diversos autores realizaram experimentos numéricos empregando arranjos co-localizados abrangendo vários temas de pesquisa. As linhas de trabalho vão de escoamentos turbulentos (Benhamadouche *et al.*, 2002), (Silva Lopes e Palma, 2002), discretizações de altas ordens (Lilek e Perić, 1995), malhas não estruturadas (Perron *et al.*, 2004) e transferência de calor (Avancha e Pletcher, 2002 e Mahmud *et al.*, 2002).

Algumas características importantes dos arranjos co-localizados são evidentes, como facilitar a implementação do algoritmo de discretização, ao usar os mesmos termos advectivos para todas as propriedades do escoamento e por permitir armazená-las no mesmo local (o centróide do elemento). Porém, existem vantagens adicionais, como no emprego de metodologias *multigrid*, pois uma mesma operação de transferência entre os níveis pode ser utilizada para todas as variáveis e também a maior facilidade no manuseio de domínios computacionais complexos. No âmbito do presente trabalho, uma importante qualidade pode ser notada: a maior praticidade ao se escrever programas paralelos, nos quais o particionamento do domínio é utilizado.

Por fim, cabe ressaltar que todas as propostas acima descritas para o tratamento pressão-velocidade são necessárias ao se trabalhar com soluções segregadas das equações de Navier-Stokes e da Continuidade. É possível montar um sistema linear contendo todas as componentes dos vetores velocidade e seus respectivos coeficientes, além da equação da conservação da massa. Este sistema invariavelmente possui elevada ordem e grande índice de esparsidade. Porém, sua solução fornece, instantaneamente, todas as informações pertinentes ao escoamento, ou seja, as componentes do vetor velocidade e a pressão. Talvez pelo seu alto custo de armazenamento e de operação, esta abordagem não ganhou popularidade entre os pesquisadores ao longo dos anos.

## 2.4 Método da Fronteira Imersa

Como mencionado no capítulo introdutório, para a simulação de escoamentos sobre corpos imersos em um escoamento, podem-se utilizar duas abordagens básicas: malhas que se adaptam ao corpo (*body-fitted meshes*) e malhas que não se adaptam ao corpo. Os exemplos mais conhecidos do primeiro grupo são as malhas não-estruturadas. Com relação à outra abordagem possível, a técnica mais utilizada é se empregar domínios fictícios (*Fictitious Domains* - FD), como descrito em Yu (2005). A estratégia de se adotar *Fictitious Domains* para

a solução de Equações Diferenciais Parciais é empregada há mais de 30 anos, tendo sido primeiramente desenvolvida por pesquisadores soviéticos (Glowinski *et al.*, 1998).

Uma subdivisão da técnica FD pode ser feita por: i) modelos que não se baseiam em forças de corpo, ii) modelos que empregam forças de corpo e usam Multiplicadores de Lagrange Distribuídos (*Distributed Lagrangian Multipliers* - DLM) para obter uma pseudo-força de corpo (muito utilizado em simulação de partículas imersas em fluido) e, por fim, iii) modelos que usam forças de corpo e não usam DLM, onde se encaixam os métodos de fronteira imersa.

Nos métodos de fronteira imersa, a presença de uma interface fluido-sólido, ou mesmo uma interface fluido-fluido, pode ser simulada pela adição de um termo de força (que alguns autores denominam termo forçante) às equações do movimento do fluido. Dessa forma, o escoamento "percebe" a presença de um objeto imerso, por exemplo, apenas pela ação de um "campo de força". A forma como este campo de força é calculado diferencia as metodologias atualmente empregadas. Cabe salientar que tais forças são formadas a partir de efeitos diversos agindo ao mesmo tempo no fluido, em decorrência de cisalhamentos e deformações, variações na quantidade de movimento e gradientes de pressão.

Assim, como a metodologia baseia-se na ação de forças "externas", é possível que o domínio de cálculo do escoamento possa ser representado por malhas extremamente simples utilizando, por exemplo, coordenadas cartesianas e discretizado por Volumes Finitos ou Diferenças Finitas. Enquanto isso, a representação do corpo imerso pode ser feita por um conjunto de pontos discretos qualquer, que pode assumir as mais diversas posições, no espaço e no tempo, dentro do domínio do escoamento. De forma geral, costuma-se posicionar o domínio do escoamento por um sistema de coordenadas euleriano (em que o material que está sendo estudado se move através do domínio computacional) e o objeto em estudo por um sistema lagrangiano (em que o domínio computacional se move com o material em estudo). Esta flexibilidade constitui a principal vantagem do método, permitindo que o objeto se mova com grande liberdade e/ou se deforme, de uma forma induzida ou não pelo escoamento, num fenômeno conhecido como interação fluido-estrutura.

O desenvolvimento desta metodologia deveu-se à Charles Peskin e colaboradores, os quais tinham por motivação simular o escoamento, em domínios bidimensionais, do sangue por válvulas cardíacas. De acordo com o seus trabalhos (Peskin, 1972 e Peskin, 1977), a natureza do termo de força adicional era proveniente da taxa de deformação da fronteira, na qual seus pontos constitutivos eram unidos por forças elásticas. O autor também apresentou uma função de interpolação, baseada em senos, para lidar com a transferência da força lagrangiana para o domínio euleriano. No trabalho de Lai (1998), o Método da Fronteira Imersa foi melhorado, empregando discretizações de ordem mais alta, que propiciou melhor estabilidade numérica em relação ao passo de tempo. Mais tarde, Roma *et al.*, (1999) reformularam o modelo

apresentado originalmente, introduzindo malhas adaptativas e uma nova função de interpolação.

Unverdi e Tryggvason (1992) aplicaram a metodologia da fronteira imersa em escoamentos bifásicos, onde a força inserida no termo-fonte era simulada com base na tensão superficial presente na interface entre os dois fluidos. Com essa metodologia, os autores realizaram simulações de bolhas em domínios bi e tridimensionais, onde uma linha reta unindo os pontos nos problemas 2D é substituída por um elemento triangular nos casos 3D, nos moldes das formulações em Elementos Finitos. O escoamento foi discretizado usando diferenças finitas em uma malha desencontrada, empregando segunda ordem no espaço e primeira ordem no tempo (Euler). Algumas simulações bidimensionais foram discretizadas no tempo usando *Adams-Bashforth* (segunda ordem). Uma importante contribuição apresentada pelos autores é o uso de uma função indicadora para localizar as regiões ocupadas pela interface entre os diferentes fluidos.

Posteriormente, Goldstein *et al.* (1993) propuseram uma função capaz de relacionar o termo de força à velocidade do fluido da interface e a velocidade da própria interface, na qual intervêm constantes *ad hoc*. Uma das constantes produz uma frequência de oscilação natural, enquanto que a outra amortece as oscilações da resposta. Os autores se referenciam à metodologia como *feedback forcing method*, devido ao fato de que as constantes são ajustadas baseando-se no resultado obtido no campo do escoamento, à medida que um termo de força é aplicado. Entretanto, em regimes mais complexos de escoamentos, aumenta-se a dependência de passos de tempo menores, encarecendo o método. Os autores não usaram nenhuma função de interpolação entre os pontos correspondentes à geometria e os pontos da malha do escoamento (no caso empregou-se diferenças finitas), de forma que os pontos de ambos os domínios deveriam ser coincidentes. Simulações tridimensionais empregando este procedimento podem ser encontradas em Goldstein *et al.* (1995).

Os problemas inerentes à metodologia de *feedback forcing method* de Goldstein foram minimizados no trabalho posterior de Saiki e Biringen (1996), ao serem empregadas discretizações de ordem mais alta, visando eliminar as oscilações do método espectral original. Além disso, os autores simularam escoamentos ao redor de cilindros estacionários, rotativos e oscilatórios a números de Reynolds menores que 400.

Mohd-Yusof (1997) propôs que o cálculo da força lagrangiana fosse realizado com base na equação da quantidade de movimento do fluido na interface, sem o emprego de constantes que necessitem de ajuste. Este método foi chamado de *direct forcing method*. Entretanto, requer algoritmos complexos, de modo a localizar a geometria no interior do domínio, além de interpolar os valores das propriedades nas partículas de fluido adjacentes usando *B-splines*, o que encarece a proposta.

Em um trabalho posterior, Fadlun *et al.* (2000), comparando os métodos propostos por Goldstein e Mohd-Yusof, concluíram que este último levava grande vantagem sobre o primeiro, especialmente em domínios tridimensionais, devido ao menor consumo de tempo. Esta diferença permanecia, mesmo quando o modelo de Goldstein era alterado visando maior economia de tempo. Como os autores empregaram um algoritmo preditor-corretor na solução das equações da quantidade de movimento, experimentaram aumentar o número de iterações em cada passo de tempo visando melhorar o campo de escoamento ao redor dos obstáculos, o que se mostrou desnecessário.

Kim *et al.* (2001) realizaram experimentos com a metodologia de Mohd-Yusof em domínios discretizados por Volumes Finitos. Porém, procuraram empregar interpolações lineares e bilineares para a velocidade na avaliação do campo de força. Os autores incluíram, na equação da continuidade, termos fonte ou sumidouro de massa na tentativa de melhorar a acurácia do método e obter soluções fisicamente mais consistentes. Cabe salientar que estes termos eram incluídos apenas nos volumes coincidentes com a superfície do corpo e/ou no seu interior. Uma grande vantagem deste procedimento é a maior independência do número de pontos na geometria e de suas distâncias relativas aos volumes de fluidos circundantes.

Geometrias tridimensionais, geradas por malhas de elementos triangulares e inseridas em malhas cartesianas, foram propostas por Gilmanov *et al.* (2003). Entretanto, nesta metodologia os termos de força são avaliados em relação à normal ao corpo e, depois, várias decomposições e interpolações são necessárias para que o termo final seja introduzido nas equações de Navier-Stokes. Os autores demonstraram sua técnica apresentando resultados de escoamentos ao redor de esferas a números de Reynolds menores que 300.

Recentemente, Lima e Silva *et al.* (2003) propuseram um modelo que, embora também calculando a força a partir do balanço da quantidade de movimento aos modos do trabalho de Mohd-Yusof, o faz sobre a partícula de fluido na superfície do corpo, enquanto que o último o realiza sobre uma célula vizinha. Além disso, o trabalho de Lima e Silva *et al.* (2003) adota funções de interpolação mais simplificadas, tornando o método mais barato computacionalmente. Devido ao fato de empregar, como mencionado, a própria equação da quantidade de movimento aplicada à partícula de fluido, e modelar de forma indireta a condição de não-deslizamento do fluido sobre a interface, além de não fazer uso de constantes, a proposta foi batizada de Modelo Físico Virtual (MFV).

Este modelo foi testado em domínios bidimensionais, para diversos problemas práticos de engenharia, além de problemas clássicos em mecânica dos fluidos. Escoamentos ao redor de obstáculos a altos números de Reynolds podem ser encontrados em Oliveira *et al.* (2004b), escoamentos ao redor de geometrias complexas em Lima e Silva *et al.* (2005), escoamentos ao redor de obstáculos móveis, objetos em queda livre (constituindo um excelente teste de



interação fluido-estrutura) podem ser vistos em Vilaça *et al.* (2004) e, ainda, escoamentos sobre cilindros de diâmetro variável em Oliveira *et al.* (2004a). Escoamentos forçados em condutos e cavidades de fundo móvel podem ser encontrados em Arruda (2004) e Arruda *et al.* (2004).

## 2.5 Interação Fluido-Estrutura

Durante a segunda guerra mundial, as bombas V-2 alemães cruzavam os céus da Inglaterra a velocidades supersônicas, levando destruição e morte. Sabe-se hoje que, ao passar de um regime transônico para supersônico, o escoamento produzia vibrações sobre a estrutura (feita de chapas finas) impondo, às aletas do dispositivo, um regime conhecido como *flutter*. Este fenômeno, evitado a todo custo nos projetos das aeronaves modernas, pode ter salvo diversas vidas naquela época, fazendo com que cerca de 70 artefatos fossem destruídos ou perdessem o rumo durante os vôos.

O *flutter* é apenas um dentre os diversos exemplos de interação fluido-estrutura que desafiam a engenharia atual. A título de curiosidade, as asas de uma aeronave podem enfrentar, em condições de operação, uma pressão de até 280 kgf/cm<sup>2</sup>. Forças desta magnitude exigem um constante estudo, buscando novos materiais, novas geometrias e configurações que torne os aparelhos mais seguros e eficientes. Na Fig. 2.5 é possível ver o efeito do *flutter* sobre a maquete de uma aeronave em túnel de vento.

Existe um crescente interesse da comunidade científica mundial para soluções cada vez mais acuradas dos problemas de interação fluido-estrutura. Alguns setores da engenharia civil têm-se preocupado, por exemplo, com os efeitos dos ventos sobre edifícios altos e pontes (ver Fig. 2.6), ou com os terremotos em usinas hidroelétricas e nucleares, ou mesmo com ondas de choque provenientes de explosões sobre construções. Especialistas em metalurgia gostariam de simular processos de injeção e seus efeitos sobre os moldes. Podem-se ainda citar os fenômenos de expansão, contração e mudança de fase que ocorrem durante as soldagens. Além destes fenômenos, podem ser incluídos estudos de aquaplanagem em pneus de automóveis (interações entre as superfícies do pneu e do solo com a água), análises de vasos de pressão e estruturas de aeronaves em vôo, escoamento do sangue nas veias e artérias, através de válvulas e no interior do coração.

É importante salientar que os princípios físicos, como tensões/deformações e as leis de Newton, são exatamente as mesmas tanto para fluidos como para estruturas. Porém, uma das maiores dificuldades encontradas na solução de problemas em interação fluido-estrutura reside nas características bastante diferentes das equações discretizadas que representam o escoamento e as que descrevem o movimento da estrutura. Uma das formas de lidar com este problema é torná-lo mais simples, considerando o fluido invíscido (cujo escoamento é bem

caracterizado pela equação de Euler) ou restringir a magnitude e a velocidade do deslocamento da estrutura (o que torna os processos de remalhagem mais baratos). Entretanto, estas abordagens não ajudam na solução da maioria dos problemas práticos de engenharia.

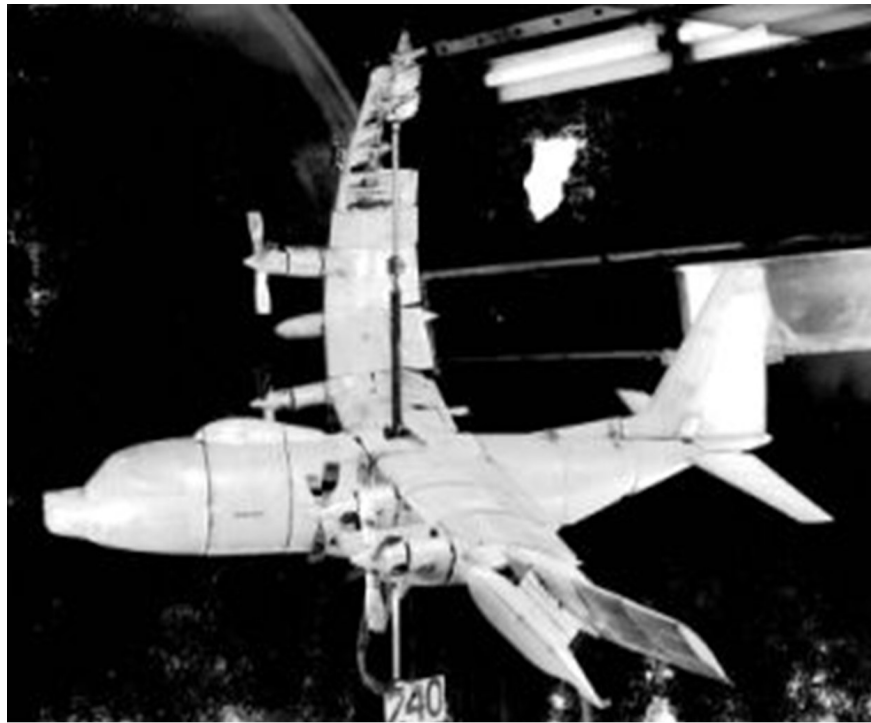


Figura 2.5 – Maquete de uma aeronave em túnel de vento sofrendo os efeitos do flutter.

Adicionalmente, a discretização conjunta dos dois sistemas de equações resulta num sistema linear grande, complexo e de alto índice de esparsidade, cujo tratamento nem sempre é fácil. Esta abordagem é conhecida como Simultânea ou Monolítica (*Monolithic*) e sua característica principal é que todos os domínios avançam ao mesmo tempo (Farhat *et al.*, 1998). De outra maneira, procura-se empregar domínios diferentes (com soluções diferentes) para o problema de dinâmica dos fluidos e para a mecânica dos sólidos efetuando-se, conjuntamente, o acoplamento entre eles. O tratamento do problema dessa forma é conhecido como Particionado (*Partitioned*). É possível encontrar, na literatura, o termo "métodos diretos" para as abordagens monolíticas e "métodos iterativos" para as abordagens particionadas. A Fig. 2.7 apresenta a evolução de um sistema de interação fluido-estrutura segundo a abordagem particionada. Pode-se perceber que as informações obtidas com a solução de um dos sistemas, servem como dados de entrada para a solução do outro. Além disso, o avanço temporal só é realizado a partir do instante em que as duas soluções são obtidas.



Figura 2.6 – Famoso caso da ponte *Tacoma Narrows*, onde o efeito de ventos constantes provocou a sua destruição em 1940.

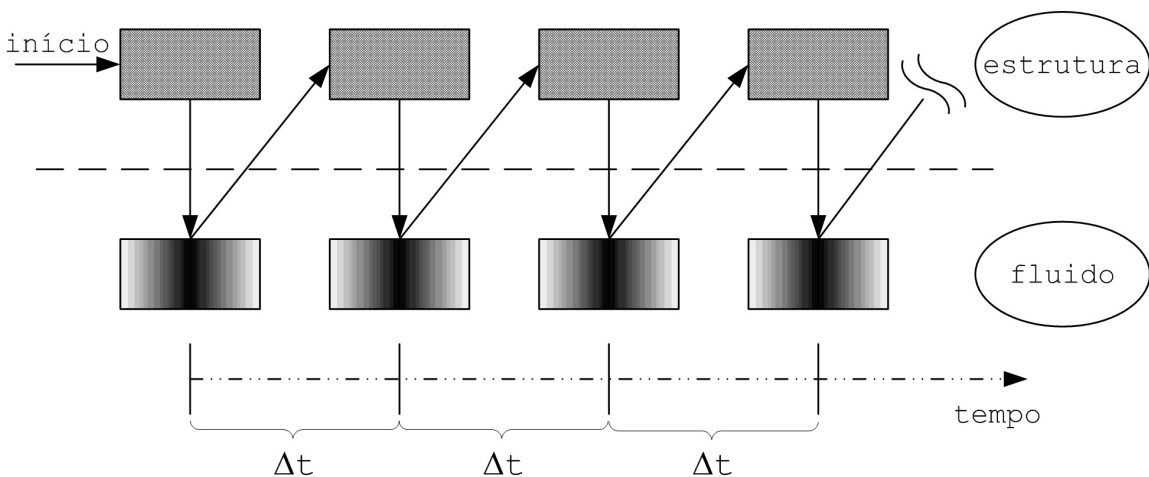


Figura 2.7 – Evolução da solução particionada de um esquema de interação fluido-estrutura.

As vantagens com relação ao sistema particionado (que foi o utilizado no presente trabalho), estão concentradas, principalmente, na maior liberdade de manuseio dos códigos computacionais, pois se trabalha apenas com os específicos para cada necessidade. É possível, ainda, reutilizar códigos empregados em outras atividades, sejam eles abertos ou

comerciais, uma vez que o interesse está na solução separada de cada domínio. Uma outra vantagem fundamental no tratamento particionado é o emprego de malhas diferentes para a discretização do domínio fluido e para o sólido.

Entretanto, o sistema particionado possui, em geral, problemas com estabilidade e acurácia da solução. Com relação à estabilidade, a solução mais simples adotada é diminuir o passo de tempo empregado e a acurácia pode ser melhorada, impondo-se um processo iterativo entre os domínios até que a precisão pretendida seja atendida. Por outro lado, um número maior de iterações entre os domínios, tende a ser mais caro em comparação com a diminuição do passo de tempo.

Como uma observação final em relação aos sistemas particionados, pode-se dizer que estes são, em geral, acumuladores de energia (devido aos prováveis erros ao se transitar entre um domínio e outro) e, desta forma, tendem a ser instáveis. Assim, na prática, estes modelos induzem ao emprego de passos de tempo bastante reduzidos. Um desenho esquemático, representando as iterações entre os domínios dentro de cada passo de tempo, indicadas pela letra "I", pode ser visto na Fig. 2.8. Podem-se resumir os procedimentos adotados na solução de um problema de interação fluido-estrutura, usando o método particionado, da seguinte maneira:

1. Transferir o movimento da estrutura para o fluido;
2. Atualizar a posição da malha no fluido;
3. Avançar o fluido no tempo e recalcular a pressão;
4. Converter a nova pressão do fluido em um carregamento estrutural;
5. Avançar o sistema estrutural no tempo, conforme o carregamento aplicado.

Deve-se dizer, por outro lado, que o maior responsável pela qualidade da solução obtida num problema de interação fluido-estrutura, cuja solução foi obtida numa abordagem particionada, reside no algoritmo empregado na transferência das informações entre um domínio e outro. A operação de transferência realizada por alguns programas avalia, por exemplo, o campo de pressões no fluido, inserindo-o no termo de força no modelo da estrutura (e desprezando as forças de outra natureza). Caso a força resultante da pressão do fluido sobre os pontos da malha que caracterizam a estrutura seja maior que a sua rigidez, estes são deslocados no interior do domínio.

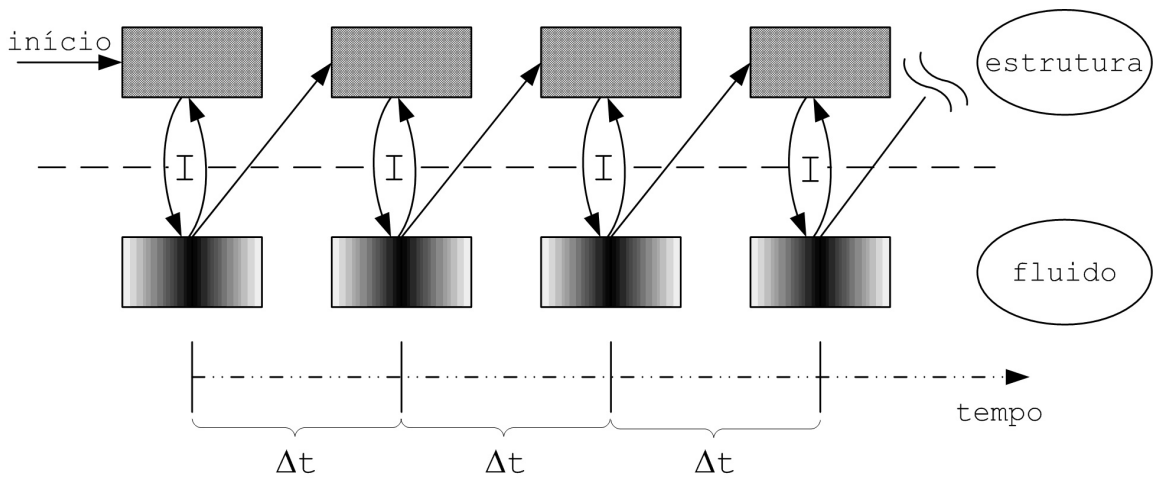


Figura 2.8 – Iteração (I) entre os domínios de fluido e estrutura, em cada passo de tempo, buscando maior acurácia.

## CAPÍTULO III

### Modelo Matemático e Método Numérico

Neste capítulo, serão apresentados os passos seguidos na discretização dos dois domínios de interesse, o domínio euleriano e o domínio lagrangiano, bem como a obtenção de todas as propriedades requeridas pelo Modelo Físico Virtual, quando aplicado à domínios tridimensionais.

Em primeiro lugar, cabe salientar que a escolha pela discretização do domínio euleriano por volumes finitos foi uma escolha particular do autor, assim como a aproximação de segunda ordem para os operadores diferenciais temporais e espaciais, e não um requisito da metodologia de fronteira imersa empregada. A discretização da equação do balanço da quantidade de movimento, aplicada aos pontos lagrangianos, foi efetuada com a ajuda de operadores de diferenças finitas, com aproximações de segunda ordem no espaço e no tempo. Os motivos para esta escolha serão dados, em maiores detalhes, nas seções específicas.

#### 3.1 Modelo Matemático

A formulação euleriana é empregada para descrever o comportamento do escoamento em todo o seu domínio de interesse, enquanto que a superfície imersa é caracterizada por uma formulação lagrangiana. É também estabelecida uma forma de interação entre o fluido e a interface imersa nele, ou seja, as duas formulações são acopladas. Os modelos de fronteira imersa buscam avaliar este acoplamento pela inserção de um termo de força às equações para o domínio fluido. Escoamentos ao redor de geometrias complexas sempre representaram, e ainda representam, sérias dificuldades para os numericistas. Nas discretizações em que se procura ajustar a malha numérica ao objeto de estudo e ao domínio, o problema surge na geração da geometria, nem sempre trivial e propensa a inserir severos erros nos balanços de massa entre seus nós elementares. Nos casos de discretizações em blocos, o acoplamento entre os diversos domínios, se mal construído, pode implicar em sérias inconsistências físicas.

Uma das grandes vantagens atribuídas ao método da fronteira imersa é a possibilidade de se simular escoamentos ao redor de geometrias complexas utilizando-se formulações de sistemas eulerianos para o fluido e sistemas lagrangianos para a interface fluido-corpo imerso.

No presente trabalho, foram empregadas malhas cartesianas para o fluido, o que resultou num código extremamente simplificado e, por este motivo, menos suscetível a erros de implementação, além de manutenção mais simples e de menor custo computacional.

### 3.1.1 Formulação para o Domínio Euleriano

A formulação baseada em sistemas de controle funciona melhor para sólidos do que para fluidos, pois é difícil acompanhar uma porção de massa que se distorce e se move constantemente. Dessa forma, torna-se mais interessante analisar uma porção de volume (ao invés de uma porção de massa) de fluido. No entanto, o teorema de transporte de Reynolds permite estabelecer uma relação entre o sistema e o volume de controle, o que será utilizado no presente trabalho. A relação entre a formulação por sistemas e suas propriedades extensivas (como, por exemplo, a propriedade  $\Phi$ ), e a formulação baseada em volumes de controle e suas propriedades intensivas ( $\phi$ ) é realizada por meio da equação:

$$\Phi_{sistema} = \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega, \quad (3.1)$$

onde  $\Omega$  é o volume ocupado pela porção de massa e  $\rho$  é a sua massa específica. De fato, o teorema de transporte de Reynolds permite estabelecer uma relação direta entre a taxa de variação total de  $\Phi$  no interior do sistema com a taxa da variação de  $\phi$  no volume de controle e, ainda, com o fluxo líquido de  $\phi$  sobre a superfície do volume de controle. Assim:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + \int_S \rho \phi (\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.2)$$

onde  $\phi = \frac{d\Phi}{dm}$ ,  $\mathbf{v}_b$  é a velocidade de um ponto b sobre a superfície de controle,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície e  $dS$  é a área diferencial.

Fazendo-se  $\Phi = m$  ( $m$  = massa) na Eq. (3.2), resultando em  $\frac{d\Phi}{dm} = 1$ , obtém-se uma equação que exprime um princípio extremamente importante nos estudos dos fenômenos físicos: a conservação da massa. Segundo este princípio, na ausência de fontes ou sumidouros, toda a massa que entra em um volume de controle deve sair e/ou acumular no

seu interior. Ao se realizar a substituição mencionada acima, considerando  $\mathbf{v}_b = 0$ , a equação da conservação torna-se, então:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (3.3)$$

que é conhecida como equação da continuidade.

Para facilitar a demonstração da metodologia de fronteira imersa, a ser vista em breve, apresentar-se-á a equação para o balanço da quantidade de movimento sob um panorama mais generalizado. Assim, seja uma porção qualquer de matéria fluida em escoamento, possuindo uma quantidade  $m$  de massa. O balanço da quantidade de movimento linear associado a esta porção, também conhecido como sistema, é modelado pela segunda lei de Newton:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade e  $\mathbf{F}$  são as forças de superfície e de corpo agindo sobre a massa contida no sistema. Com a Eq. (3.4) afirma-se que a taxa de variação temporal da quantidade de movimento de um sistema é igual à resultante das forças externas agindo sobre este sistema. Substituindo a variável  $\phi$  pela quantidade de movimento linear  $m\mathbf{v}$  nas Eqs. (3.1) e (3.2) e inserindo-as na Eq. (3.4), e considerando  $\mathbf{v}_b = 0$ , tem-se a equação para o balanço da quantidade de movimento linear para um volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \sum \mathbf{f}, \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{m}$  são as forças que agem no interior do volume de controle e podem ser compostas de forças externas do tipo de superfície (forças de pressão, forças normais, forças de cisalhamento e tensões superficiais) e também por forças de corpo (gravitacionais, eletromagnéticas, Coriolis, centrífugas e interfaciais). As forças de corpo, por unidade de massa, serão agrupadas no vetor  $\mathbf{b}$ , enquanto que as forças de pressão, normais e de cisalhamento são representadas, para escoamentos incompressíveis, pelo tensor tensão  $\mathbf{T}$ :



$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T), \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor unitário,  $p$  é a pressão e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica.

Pode-se escrever a Eq. (3.5) numa forma mais detalhada como sendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega, \quad (3.7)$$

sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal à superfície de controle. A  $i_{esima}$  componente cartesiana, associada à Eq. (3.7) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u_i d\Omega + \int_S \rho u_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_i dS + \int_{\Omega} \rho b_i d\Omega, \quad (3.8)$$

onde  $b_i$  é a  $i_{esima}$  componente das forças de corpo. A primeira componente do lado esquerdo da Eq. (3.8) é conhecida como termo transiente e a segunda componente como termo advectivo. A componente interfacial da força que surge, por exemplo, na presença de uma interface sólida num meio fluido é a parcela a ser modelada com a metodologia de fronteira imersa.

Seguindo-se os mesmos procedimentos adotados anteriormente, pode-se obter a equação de balanço, na forma integral, para uma propriedade  $\phi$  qualquer, como sendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + \int_S \rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} q_{\phi} d\Omega \quad (3.9)$$

onde  $q_{\phi}$  é o termo de geração ou destruição de  $\phi$  e  $\Gamma$  é a difusividade desta propriedade.

As duas equações de balanço acima, ou seja, a equação da conservação da massa (Eq. 3.3) a equação para o balanço da quantidade de movimento (Eq. 3.8), juntamente com a equação da conservação da energia (a ser vista no Anexo II), são popularmente conhecidas como Equações de Navier-Stokes embora, rigorosamente falando, esta denominação é restrita apenas à equação de balanço da quantidade de movimento linear.

### 3.1.2 Formulação para o Domínio Lagrangiano

Analisar o movimento de uma partícula do ponto de vista lagrangiano, significa posicionar um sistema de eixos coordenados sobre ela e acompanhá-la individualmente. Em outras palavras, o sistema desloca-se pelo escoamento, acompanhando o movimento da partícula. Assim, a cada instante de tempo, a partícula poderá se deslocar com seu sistema de eixos em relação a um sistema qualquer global. No Modelo Físico Virtual, procura-se descrever a geometria a qual queremos simular por meio de pontos lagrangianos. Esta metodologia permite usufruir todas as benesses intrínsecas às implementações da aproximação lagrangiana.

Como mencionado no capítulo anterior, a principal característica da metodologia de fronteira imersa é simular a presença de uma interface sólida ou fluida no meio do escoamento via inserção de um termo de força  $\vec{f}$ , nas equações de Navier-Stokes para o fluido. Na Fig. 3.1, estão representados um ponto lagrangiano  $k$  de coordenadas  $\vec{X}_k$  e um volume elementar de fluido, com coordenadas  $\vec{x}$ . A forma como  $\vec{f}$  é avaliado, determina as diferentes versões das metodologias existentes na atualidade. O termo de força interfacial  $\vec{F}$ , obtido no domínio lagrangiano (representado doravante por  $\Omega_k$ ), pode ser interpolado para o domínio euleriano (representado por  $\Omega$ ) com o auxílio da função delta de Dirac. Em um espaço  $N$  dimensional, esta interpolação pode ser definida como:

$$\int_{R^N} \delta(\vec{x} - \vec{X}_k) F(\vec{X}_k) d^N \vec{X}_k = f(\vec{x}) \quad (3.10)$$

Aplicando a Eq. (3.10) para uma região  $V$  do domínio lagrangiano tem-se:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \int_{\Omega_k} \vec{F}(\vec{X}_k) \delta(\vec{x} - \vec{X}_k) d\vec{X}_k \quad (3.11)$$

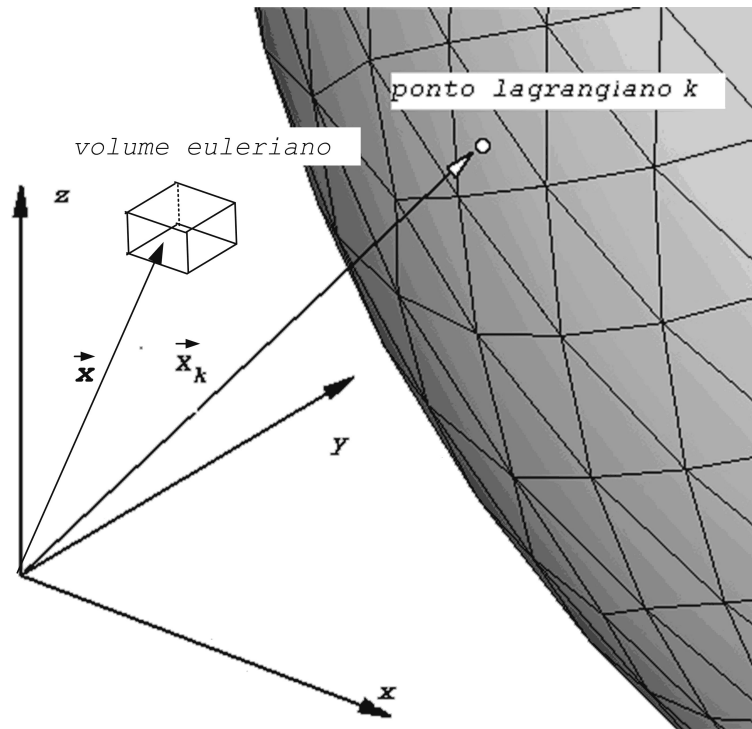


Figura 3.1 – Desenho esquemático mostrando o ponto lagrangiano  $k$  localizado em  $\vec{X}_k$  e o elemento de fluido posicionado em  $\vec{x}$ .

A função  $\delta$  possui a propriedade:

$$\int_{\Omega} \delta(\vec{x} - \vec{X}_k) d\vec{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{X}_k \in V \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $V \in \Omega$ . Esta função age como núcleo de uma transformada integral (centrada em  $\vec{X}_k$ ) que promove a transposição entre os domínios eulerianos e lagrangianos (Griffith e Peskin, 2005). É importante salientar que as posições das forças dos dois lados da Eq. (3.11) não são coincidentes. O que se pode garantir é que as densidades das forças são equivalentes, como pode ser demonstrado integrando-se ambos os lados desta equação em um domínio  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega_k} \vec{F}(\vec{X}_k) \delta(\vec{x} - \vec{X}_k) d\vec{X}_k \right] d\vec{x} \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega_k} \vec{F}(\vec{X}_k) \left[ \int_{\Omega} \delta(\vec{x} - \vec{X}_k) d\vec{x} \right] d\vec{X}_k \quad (3.14)$$

que aplicando a propriedade (3.12), torna-se:

$$\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega_k} \vec{F}(\vec{X}_k) d\vec{X}_k. \quad (3.15)$$

É possível, também, obter a transformação inversa, interpolando do domínio euleriano para o lagrangiano ao se aplicar a integral no lado esquerdo da Eq. (3.11), ou seja:

$$\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{X}_k) d\vec{x} = \vec{F}(\vec{X}_k) \quad (3.16)$$

No modelo físico virtual, a força lagrangiana é obtida fazendo-se um balanço da quantidade de movimento sobre uma partícula  $k$  localizada nas coordenadas  $\vec{X}_k$  e dotada de velocidade  $\vec{V}_k$  e pressão  $p_k$ . Assim, a força  $\vec{F}_k$  pode ser avaliada como:

$$\vec{F}_k = \frac{\partial(\rho \vec{V}_k)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}_k \vec{V}_k) - \mu \nabla^2 \vec{V}_k + \vec{\nabla} p_k \quad (3.17)$$

que pode ser interpretada como sendo a força necessária para que uma partícula de fluido, imediatamente adjacente ao ponto lagrangiano  $k$ , atinja a velocidade deste ponto, promovendo-se assim, uma condição de não-deslizamento entre o fluido e o corpo imerso.

O primeiro termo do lado direito da Eq. (3.17), o termo transiente é responsável pela força de aceleração  $\vec{F}_{acc}$ . Os demais termos, compostos por operadores diferenciais de natureza espacial, são conhecidos como termo advectivo (na sua forma conservativa), termo difusivo e gradiente de pressão e são responsáveis, respectivamente, pelas forças de inércia ( $\vec{F}_{inert}$ ), forças viscosas ( $\vec{F}_{visc}$ ) e forças de pressão ( $\vec{F}_{press}$ ), como pode ser visto em Lima e Silva (2002) e reproduzidos abaixo:

$$\vec{F}_{acc} = \frac{\partial(\rho \vec{V}_k)}{\partial t} \quad (3.18)$$

$$\vec{F}_{inert} = \nabla \cdot (\rho \vec{V}_k \vec{V}_k) \quad (3.19)$$

$$\vec{F}_{visc} = -\mu \nabla^2 \vec{V}_k \quad (3.20)$$

$$\vec{F}_{press} = \vec{\nabla} p_k \quad (3.21)$$

Uma vez avaliadas as forças interfaciais (que pertencem ao domínio lagrangiano), deve-se promover o acoplamento entre as formulações representativas do domínio fluido (realizadas no domínio euleriano). Este acoplamento é feito pelo processo de distribuição da força lagrangiana para a malha euleriana e pela interpolação das velocidades e pressão eulerianas para a malha lagrangiana.

## 3.2 Método Numérico

Tendo sido apresentadas as bases matemáticas dos problemas a serem resolvidos no presente trabalho, descrevem-se, agora, os procedimentos numéricos empregados na solução das equações. Como consequência do processo de discretização resultam sistemas lineares cuja solução leva à aplicação de *solvers* para a obtenção do valor das incógnitas. Evidentemente, a transformação de um problema originalmente proposto num domínio contínuo, para uma solução possível e baseada num domínio discreto acarreta, invariavelmente, perdas de acurácia na solução. Este fenômeno é conhecido como erro de discretização. Dessa forma, a busca por técnicas que minimizem o erro de discretização é uma atividade incessante por parte dos pesquisadores, demandando um equilíbrio entre custo computacional e acurácia desejados.

### 3.2.1 Discretização do Domínio Euleriano

A integração no tempo e no espaço da Eq. (3.9), no interior do volume elementar mostrado na Fig. 3.3, com pequenos arranjos, produz a seguinte equação:

$$\left( \frac{3\phi_P^n - 4\phi_P^{n-1} + \phi_P^{n-2}}{2\Delta t} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + (\rho_e u_e \phi_e - \rho_w u_w \phi_w)^n \Delta y \Delta z + (\rho_n u_n \phi_n - \rho_s u_s \phi_s)^n \Delta x \Delta z + (\rho_t u_t \phi_t - \rho_b u_b \phi_b)^n \Delta x \Delta y = \left[ \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right]^n \Delta y \Delta z + \quad (3.22)$$

$$\left[ \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right]^n \Delta x \Delta z + \left[ \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right]^n \Delta x \Delta y + q_\phi \Delta x \Delta y \Delta z .$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação acima representa a discretização do termo transiente pelo esquema *three-time level* (Muzaferija e Peric, 1997). Este esquema é de segunda ordem no tempo sendo, portanto, superior ao esquema Euler de primeira ordem e sem maiores complicações de implementação computacional, além da necessidade de se armazenar um conjunto extra de dados das variáveis. Porém, deve-se ressaltar que as informações no instante de tempo  $n-2$  só são obtidas a partir da 2ª iteração. A estratégia para a construção do esquema é ajustar uma parábola pelos instantes de tempo  $t^n$ ,  $t^{n-1}$  e  $t^{n-2}$  separados, entre si por intervalo de tempo  $\Delta t$ , conforme mostrado na Fig. 3.2. Cabe salientar, ainda, que se trata de uma aproximação implícita pois o valor da propriedade no tempo  $n$  é desconhecida. Assim, substituindo-se os valores dos instantes de tempo, espaçados igualmente por  $\Delta t$ , na equação geral da parábola:

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c \quad (3.23)$$

obtém-se, para  $t = t^{n-2}$ :

$$f(-2\Delta t) = \phi^{n-2} = a(-2\Delta t)^2 + b(-2\Delta t) + c \quad (3.24)$$

para  $t = t^{n-1}$ :

$$f(-\Delta t) = \phi^{n-1} = a(-\Delta t)^2 + b(-\Delta t) + c \quad (3.25)$$

e, finalmente, para  $t = t^n$ :

$$f(0) = \phi^n = a(0)^2 + b(0) + c \quad (3.26)$$

Após o cálculo dos coeficientes, empregando-se as Eqs. (3.24) a (3.26), eles são substituídos na derivada da Eq. (3.23), obtendo-se o valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  como sendo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3\phi^n - 4\phi^{n-1} + \phi^{n-2}}{2\Delta t}, \quad O(\Delta t^2). \quad (3.27)$$

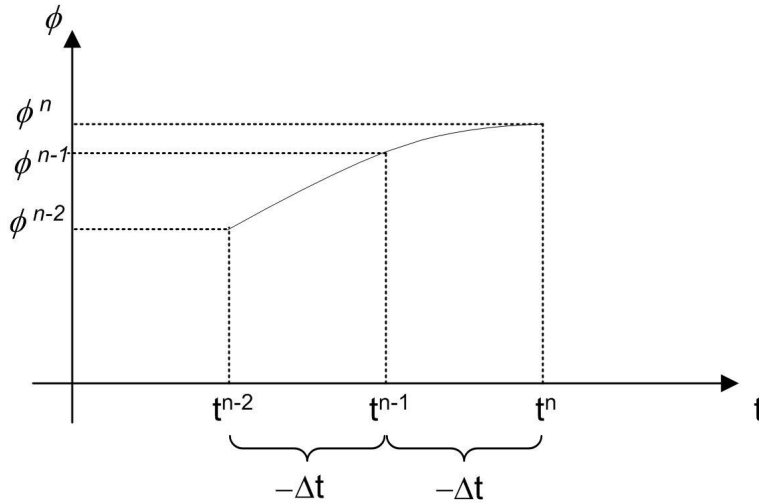


Figura 3.2 – Interpolação dos instantes de tempo  $t^{n-2}$ ,  $t^{n-1}$  e  $t^n$  por meio de uma parábola.

As aproximações numéricas para os valores do transporte de  $\phi$ , em cada uma das faces  $i$  do volume da Fig. 3.3, pelos fluxos  $F_i = F_{a,i} + F_{d,i} = \rho_i u_i \phi_i - \Gamma_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i$ , representam um papel extremamente importante na consistência e na estabilidade da simulação. Os índices  $e$  (*east*),  $w$  (*west*),  $n$  (*north*),  $s$  (*south*),  $t$  (*top*) e  $b$  (*bottom*) denotam as faces compartilhadas pelos volumes vizinhos (cujos centróides recebem índices maiúsculos) com o volume elementar central P. O termo  $F_{a,i} = \rho_i u_i \phi_i$  representa a parcela advectiva e o termo  $F_{d,i} = -\Gamma_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i$ , a parcela difusiva do fluxo da propriedade que atravessa, na direção do vetor normal, a fronteira do volume elementar. Quanto às funções de interpolação para as derivadas de primeira ordem, é suficiente o emprego de diferenças centradas (Schneider e Maliska, 2002). Entretanto, os valores de  $\phi$  nas faces requerem uma análise mais detalhada do método a ser empregado pois, ao se tratar do transporte de quantidade de movimento, origina termos não-lineares responsáveis pela dificuldade matemática em se resolver, analiticamente, as Equações de Navier-Stokes.

Para realizar a tarefa de obter o valor de  $\phi$  na fronteira entre os volumes de controle, existem muitas escolhas possíveis onde cada uma delas, em maior ou menor quantidade, possuem suas qualidades e seus inconvenientes. Cabe salientar que é muito difícil obter uma

função capaz de realizar a interpolação sem erros de aproximação, salvo em casos extremamente simples, que fogem aos padrões encontrados em problemas reais de engenharia.

Nas condições idealizadas, o escoamento unidimensional em regime permanente permitiria, por exemplo, o emprego de esquemas como o FIC (Função de Interpolação Completa) e o TVD (*Total Variation Diminishing*), discutidos mais detalhadamente em Maliska (1995) e Marchi (1993), respectivamente. Assim, cabe ao numericista escolher a melhor função para o caso a ser estudado. De uma forma prática, os modelos de interpolação podem ser divididos de acordo com a ordem do erro de truncamento associado à ele. É possível utilizar modelos de primeira ordem como o *upwind* (*Upwind Difference Scheme - UDS*), esquemas de segunda ordem como o diferenças centrais (*Central Difference Scheme - CDS*), o *upwind* de segunda ordem (*Second Order Upwind - SOU*) e o ADS (*Adaptable Difference Scheme*), além de esquemas de terceira ordem como o QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*) ou mesmo esquemas de ordem superior.

Esquemas de baixa ordem, em geral, injetam uma forte difusão numérica na solução (Campregher, 2002), estabilizando-a mas, em contrapartida, podem gerar resultados fisicamente irreais. Termos de ordem mais elevada são conhecidos por gerar menos difusão numérica, mas que podem induzir oscilações numéricas, além de serem, freqüentemente, mais difíceis de se implementar que os modelos de ordem mais baixa e que requerem um estêncil maior (Marchi, 1993). Porém, o fato associado aos termos de ordem elevada é que se a malha computacional for incapaz de capturar todas as escalas de estruturas turbilhonares presentes, poderá haver acúmulo de energia na freqüência de corte, associada à malha, o que desestabilizará o código ao longo da simulação. Uma alternativa, comumente empregada, é a de se empregar modelos que buscam mesclar as características de esquemas de diferentes ordens, ponderados pelo número de *Peclet* (*Pe*) local no volume elementar. Estes modelos são conhecidos como híbridos e têm, como seu representante mais famoso, o esquema *power-law* (Patankar, 1980).

No presente trabalho, foi empregada uma estratégia conhecida como correção atrasada (*deferred-correction*) (Ferziger e Peric, 2002), que procura interpolar o fluxo advectivo em uma face  $i$  qualquer, no instante de tempo  $n$ , da forma:

$$\left(F_{a,i}^n\right) = \left(F_{a,i}^L\right)^n + \lambda \left(F_{a,i}^H - F_{a,i}^L\right)^{n-1}, \quad (3.28)$$

onde os índices  $L$  e  $H$  significam termos de baixa e alta ordem, respectivamente, e o coeficiente  $\lambda$  permite uma combinação (conhecida na literatura como *blending*) entre os



termos. Na convergência, os termos de baixa ordem se anulam, restando  $F_{a,i}^H$ . A aproximação de baixa ordem mais empregada é o *upwind* e, para a componente de alta ordem, costuma-se empregar o CDS ou QUICK (Hayase *et al.*, 1992).

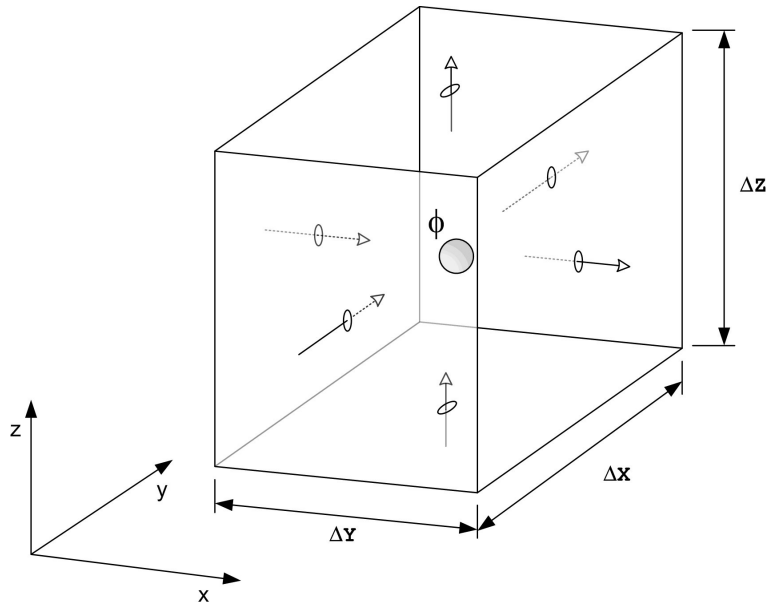


Figura 3.3 – Volume de controle elementar, com a variável  $\phi$  localizada no centróide.

Os termos entre parênteses na Eq. (3.28) são adicionados ao termo-fonte  $q_\phi$  de forma que, na convergência, os termos de baixa ordem se cancelam, restando apenas o termo de alta ordem quando  $\lambda = 1$  e, além disso, sua magnitude é pequena não acrescentando maiores dificuldades à solução do sistema linear. Da forma como foi concebida, a correção atrasada permite aproveitar-se da estabilidade dos esquemas de baixa ordem (como o *upwind*) e da maior acurácia dos esquemas de alta ordem (como o CDS), uma característica que costuma ser adotada em códigos comerciais, que a empregam como padrão, avaliando inclusive um  $\lambda$  diferente para cada célula.

Com todas as aproximações descritas acima, a equação do balanço da quantidade de movimento toma a sua forma final:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_T \phi_T + A_B \phi_B + B, \quad (3.29a)$$

onde:

$$A_I = \max(-Flux_i, 0) + Diff_i \quad I = E, N, T \quad i = e, n, t \quad (3.29b)$$

$$A_I = \max(Flux_i, 0) + Diff_i, \quad I = W, S, B \quad i = w, s, b \quad (3.29c)$$

$$Flux_i = \rho_i u_i S_i, \quad i = e, w, n, s, t, b \quad (3.29d)$$

$$Diff_i = \frac{\mu_i S_i}{\delta_i}, \quad i = e, w, n, s, t, b \quad (3.29e)$$

$$A_P = \sum_I A_I + B_P \Delta V, \quad I = E, W, N, S, T, B \quad (3.29f)$$

$$B = q_\phi \Delta V, \quad (3.29g)$$

sendo:  $S_i$  a área transversal ao escoamento,  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ,  $\delta_i$  é a distância entre os centróides adjacentes à face  $i$  e  $B_P$  contém os termos acoplados à variável  $\phi_P$ . Como estabelecido anteriormente, os índices maiúsculos referem-se aos centróides dos volumes elementares. Além disso, todos os termos que compõem os coeficientes  $A_I$  foram calculados com base nos valores obtidos no instante anterior (ou seja,  $n-1$ ). O gradiente de pressão está incluído no termo-fonte  $q_\phi$  e é calculado tomando como referência o nó central  $P$ . A Eq. (3.29a), quando aplicada a todos os volumes elementares que compõem o domínio discretizado, origina um sistema linear que, ao ser resolvido, fornece os valores atualizados para a propriedade  $\phi$ .

### 3.2.2 O Algoritmo SIMPLEC

O algoritmo SIMPLEC aqui apresentado foi proposto por van Doormal e Raithby (1984). Para ilustrar a construção do algoritmo, reescrever-se-á a Eq. (3.29a) para o transporte de uma componente  $U_i^*$  da velocidade estimada, porém separando o gradiente de pressão do termo fonte  $B$ :

$$A_P U_{i,P}^* - \sum_I A_I U_{i,I}^* = B^{n-1} - \nabla P_{i,P}^* \Delta V, \quad (3.30)$$

onde o índice  $I$  representa todos os vizinhos ao nó central  $P$ , o sobrescrito  $n-1$  denota a variável conhecida no instante de tempo anterior. O subscrito  $P$  no gradiente de pressão indica que o mesmo foi calculado com relação a este nó. O índice  $*$  serve para indicar que são aproximações, pois ainda não se sabe o valor do campo de pressão (no instante  $n$ ) que satisfaça a conservação da massa. Entretanto, se o campo correto de velocidade fosse imposto, a equação assumiria a forma:

$$A_P U_{i,P} - \sum_I A_I U_{i,I} = B^{n-1} -\nabla P_{i,P} \Delta V. \quad (3.31)$$

Subtraindo-se a Eq. (3.30) da (3.31), tem-se:

$$A_P U'_{i,P} - \sum_I A_I U'_{i,I} = -\nabla P'_{i,P} \Delta V, \quad (3.32)$$

onde  $U' = U - U^*$  e  $P' = P - P^*$  são as correções necessárias a serem aplicadas às variáveis estimadas. Até aqui, os métodos SIMPLE e SIMPLEC são equivalentes. No método SIMPLE, as correções das velocidades vizinhas ao ponto  $P$  não são consideradas, ou seja, o segundo termo do lado esquerdo da Eq. (3.32) é desprezado. Por outro lado, no SIMPLEC elas são substituídas por uma média ponderada dos valores das correções nos termos vizinhos (Ferziger e Perić, 2002), da forma:

$$U'_{i,P} = \frac{\sum_I A_I U'_{i,I}}{\sum_I A_I}, \quad (3.33)$$

que inserindo na Eq. (3.32) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$U_{i,P} = U_{i,P}^* - d_P^{U_i} \nabla P'_{i,P}, \quad (3.34)$$

sendo:

$$d_P^{U_i} = \frac{\Delta V}{A_P - \sum_I A_I}. \quad (3.35)$$

A Eq. (3.34) permite efetuar as correções nos campo de velocidade uma vez conhecido o campo de correção de pressão  $P'$ , cuja equação discretizada é obtida aplicando as condições de conservação da massa às componentes de  $U_{i,P}$ , resultando em:

$$A_P P'_P = A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S + A_T P'_T + A_B P'_B + B, \quad (3.36a)$$

onde:

$$A_P = \sum A_I, \quad (3.36b)$$

$$A_I = \frac{\rho d_I^{U_i} S_i}{\delta_i}, \quad I = E, W, N, S, T, B \quad i = e, w, n, s, t, b \quad (3.36c)$$

$$B = \Delta V^*, \quad (3.36d)$$

onde  $\delta_i$  é a distância, no sentido de  $i$ , entre o centróide do volume central  $P$  e o do seu vizinho  $I$ .

A título informativo, já que não foi empregado no presente trabalho, segue uma breve demonstração de como obter uma equação evolutiva para a pressão empregando o Método da Compressibilidade Artificial comentado no Capítulo 2. Optou-se por apresentá-la devido às freqüentes confusões encontradas na literatura a respeito das origens dos algoritmos da família SIMPLE. Com efeito, como a densidade não se altera com o tempo e as derivadas temporais da velocidade já fazem parte das equações do transporte de quantidade de movimento, a alternativa foi inserir um termo  $\beta$  de variação temporal "artificial" da pressão na equação da conservação da massa:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\delta(\rho u_i)}{\delta x_i} = 0 \quad (3.37)$$

Pode-se perceber que, quanto maior o valor de  $\beta$ , mais o comportamento das equações se aproximará daquelas para escoamento incompressível. Conseqüentemente, a dificuldade na solução do sistema se aproximará das já comentadas para escoamentos incompressíveis. Aproximando o termo temporal da Eq. (3.37) usando Euler, tem-se:

$$\frac{p_P^n - p_P^{n-1}}{\beta \Delta t} + \left[ \frac{\delta(\rho u_i)}{\delta x_i} \right]_P^n = 0 \quad (3.38)$$

Expandindo-se o numerador do segundo termo da equação acima da forma:

$$(\rho u_i)^n \approx (\rho u_i^*)^n + \left[ \frac{\partial(\rho u_i^*)}{\partial p} \right]_P^n (p^n - p^{n-1}) \quad (3.39)$$

e inserido-o na Eq. (3.38), obtém-se a equação desejada para  $p$  no instante  $n$ . É possível derivar uma equação equivalente à Eq. (3.30) usando o Método da Compressibilidade Artificial (Ferziger e Peric, 2002) e o seu uso é mais restrito à problemas para os quais o regime transiente é de interesse e, além disso, requer um estudo prévio do valor de  $\beta$  mais apropriado a ser empregado.

### 3.2.3 Interpolação de Rhie-Chow

Como ressaltado anteriormente, o uso de malhas co-localizadas tende a provocar oscilações numéricas no campo de velocidades, devidas aos campos de pressão do tipo *checkerboard* (Patankar, 1980).

Os desenvolvimentos das equações de discretização do balanço da quantidade de movimento são basicamente as mesmas para arranjos deslocados ou co-localizados. Entretanto, para o arranjo co-localizado, as velocidades que são necessárias nas faces devem ser interpoladas (processo que pode ser de primeira ordem) a partir do centro dos VC. A função de interpolação mais comumente usada é a interpolação de Rhie-Chow (Rhie e Chow, 1983).

De forma a demonstrar o emprego do algoritmo, parte-se da Eq. (3.30) rearranjada:

$$A_P U_{i,P}^* + \nabla P_{i,P}^* \Delta V_P = B_P^{n-1} + \left( \sum_I A_I U_{i,I}^* \right)_P \quad (3.40)$$

Aplicando a mesma equação para o ponto nodal  $E$ , tem-se:

$$A_E U_{i,E}^* + \nabla P_{i,E}^* \Delta V_E = B_E^{n-1} + \left( \sum_I A_I U_{i,I}^* \right)_E \quad (3.41)$$

E para uma face  $e$  entre os pontos nodais  $P$  e  $E$ :

$$A_e U_{i,e}^* + \nabla P_{i,e}^* \Delta V_e = B_e^{n-1} + \left( \sum_I A_I U_{i,I}^* \right)_e \quad (3.42)$$

Considerando-se que o lado esquerdo da Eq. (3.42) pode ser aproximada, na interface  $e$ , por uma interpolação linear (termos representados por uma barra superior) a partir das Eqs. (3.40) e (3.41), segue-se que:

$$\overline{A_e U_{i,e}^* + \nabla P_{i,e}^* \Delta V_e} = \overline{B_e^{n-1} + \left( \sum_I A_I U_{i,I}^* \right)_e} = \overline{A_e U_{i,e}^*} + \overline{\nabla P_{i,e}^* \Delta V_e}. \quad (3.43)$$

Rearranjando-se a equação acima e assumindo que  $A_e \approx \overline{A_e}$ :

$$U_{i,e} = \overline{U_{i,e}^*} - d_e^{U_i} \left( \overline{\nabla P_{i,e}^*} - \nabla P_{i,e}^* \right), \quad (3.44)$$

onde:

$$\overline{U_{i,e}^*} = \alpha U_{i,P}^* + (1-\alpha) U_{i,E}^* \quad (3.45)$$

$$\overline{\nabla P_{i,e}^*} = \alpha \nabla P_{i,P}^* + (1-\alpha) \nabla P_{i,E}^* \quad (3.46)$$

$$\nabla P_{i,e}^* = \frac{(p_E - p_P)}{\delta x_e} \quad (3.47)$$

$$\nabla P_{i,P}^* = \frac{(p_E - p_W)}{\delta x_e + \delta x_w} \quad (3.48)$$

$$\nabla P_{i,E}^* = \frac{(p_{EE} - p_P)}{\delta x_{ee} + \delta x_e} \quad (3.49)$$

$$\overline{d_e^{U_i}} = \alpha d_P^{U_i} + (1-\alpha) d_E^{U_i} \quad (3.50)$$

Pode-se ver, claramente, que  $\alpha$  é um coeficiente de interpolação e costuma ser baseado na distância entre os pontos nodais envolvidos. Cabe salientar que alguns autores defendem um valor de  $\alpha = 0.5$  no cálculo para a interpolação do gradiente de pressão e um valor de ponderado pela distância para as velocidades. No presente trabalho foi usada a interpolação ponderada pela distância entre os nós para todas as variáveis.

Finalmente, os valores obtidos acima são substituídos na equação da continuidade, da mesma forma que é feita para a Eq. (3.34) para arranjos deslocados. Além disso, é importante mencionar que a velocidade na face dos VC depende, agora, dos valores das pressões nos pontos nodais adjacentes, da mesma forma como é feito para os arranjos deslocados. Assim, é possível usar os algoritmos de acoplamento pressão-velocidade vistos anteriormente.

### 3.2.4 Discretização do Domínio Lagrangiano

A discretização espacial da Eq. (3.17) foi realizada com um estêncil de diferenças finitas. Para tal, tomou-se um sistema de eixos coordenados local, tendo suas direções  $i$  coincidentes com as direções dos eixos do domínio euleriano, com origem sobre o ponto lagrangiano  $k$  e com sentido dado pelo vetor normal  $\vec{n}_k$ . Em seguida, acrescentam-se dois pontos auxiliares em cada direção, separados entre si por um comprimento característico  $\Delta S_k$  a ser definido posteriormente. Na Fig. 3.4 é possível observar um exemplo de eixos locais em um ponto lagrangiano qualquer em relação às coordenadas globais fixas à um domínio euleriano. Em destaque, os pontos auxiliares adicionais ( $p_1$  a  $p_6$ ) usados na discretização e que podem ser vistos, com mais detalhes, na Fig. 3.5.

Como descrito anteriormente, os termos da Eq. (3.17) são descritos, respectivamente como termo de aceleração ( $\vec{F}_{acc}$ ), termo advectivo ( $\vec{F}_{inert}$ ), termo difusivo ( $\vec{F}_{visc}$ ) e do gradiente de pressão ( $\vec{F}_{press}$ ). Particularmente, o termo transiente é discretizado por uma aproximação de 1ª ordem (Euler) e é responsável pela força de aceleração. Os demais termos, compostos por operadores diferenciais de natureza espacial, são discretizadas por diferenças finitas. Os termos, representados na sua forma indicial, são apresentadas a seguir:

$$(F_{acc})_i = \frac{\rho u_{ik} - \rho u_{ifk}}{\Delta t}, \quad (3.51)$$

$$(F_{inert})_i = \frac{\partial(\rho u_{jk} u_{ik})}{\partial x_{jk}}, \quad (3.52)$$

$$(F_{visc})_i = -\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_{jk}} \left( \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_{jk}} \right) \right], \quad (3.53)$$

$$(F_{press})_i = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_{ik}}. \quad (3.54)$$

Nas Eqs. (3.51) a (3.54), o índice  $k$  indica o ponto lagrangiano e os índices  $i$  e  $j$  indicam as componentes da velocidade e da força. O termo  $u_{ik}$ , presente na Eq. (3.51), é o valor da velocidade do fluido nos pontos que coincidem com a interface.

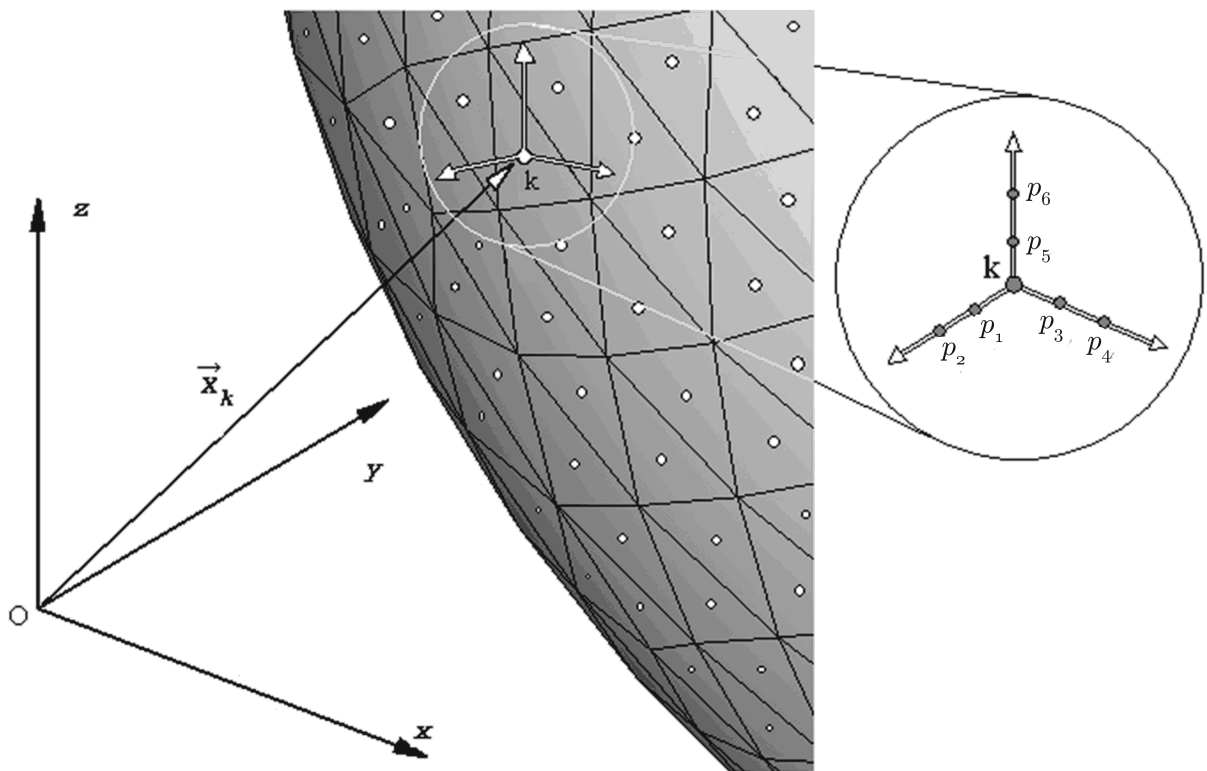


Figura 3.4 – Posição do ponto lagrangiano  $\vec{X}_k$  no sistema de coordenadas euleriano e vista detalhada dos pontos auxiliares  $p_1$  a  $p_6$ .

As propriedades físicas correspondem ao fluido e os índices  $i$  e  $j$  correspondem às direções do sistema de coordenadas lagrangiano, ou seja, aquele que tem origem no ponto lagrangiano  $k$  e onde estão contidos os pontos auxiliares comentados anteriormente. Cabe salientar aqui que todas as propriedades, tanto do fluido quanto do escoamento, empregadas nos cálculos são as disponíveis no instante de tempo anterior, o que implica afirmar que a



avaliação do termo de força é *explícito*. O processo de transferência dos valores das propriedades do escoamento, calculadas no domínio euleriano, para os pontos lagrangianos principais e secundários é feita com o auxílio da função distribuição (Eq. 3.63). Neste caso, porém, a razão entre os volumes eulerianos e lagrangianos é considerada como sendo unitária. Além disso, o processo de interpolação considera as propriedades tanto na região interna quanto na externa à interface.

A montagem das funções de interpolação e das derivadas espaciais é feita com o auxílio de polinômios de Lagrange. Para ilustrar o procedimento para um ponto  $r$  qualquer, seja  $m$  o número de pontos empregados na construção de polinômios de ordem  $m-1$  para interpolar o valor da propriedade  $\phi$  ao longo da direção  $i$ , a função de interpolação pode ser dada por:

$$\phi_i(r) = \sum_m \psi_m(r)_i \phi_m, \quad (3.55)$$

onde:

$$\psi_m(r)_i = \prod_{n, n \neq m} \left[ \frac{x_i(r) - x_i(n)}{x_i(m) - x_i(n)} \right] \quad (3.56)$$

A título de exemplo, substituindo os  $m$  pontos pelos descritos na Fig. 3.5, o valor da propriedade ao longo, por exemplo do eixo  $x$ , onde se encontram os pontos  $k$ ,  $p_1$  e  $p_2$ , pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} \phi_r = & \left[ \frac{(x_r - x_{p_1})(x_r - x_{p_2})}{(x_k - x_{p_1})(x_{p_2} - x_{p_1})} \right] \phi_k + \left[ \frac{(x_r - x_k)(x_r - x_{p_2})}{(x_{p_1} - x_k)(x_{p_1} - x_{p_2})} \right] \phi_{p_1} \\ & + \left[ \frac{(x_r - x_k)(x_r - x_{p_1})}{(x_{p_2} - x_k)(x_{p_2} - x_{p_1})} \right] \phi_{p_2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Derivando a Eq. (3.57) com relação à variável  $x$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_r}{\partial x} = & \left[ \frac{(x_r - x_{p_1}) + (x_r - x_{p_2})}{(x_k - x_{p_1})(x_r - x_{p_2})} \right] \phi_k + \left[ \frac{(x_r - x_k) + (x_r - x_{p_2})}{(x_{p_1} - x_k)(x_{p_1} - x_{p_2})} \right] \phi_{p_1} \\ & + \left[ \frac{(x_r - x_k) + (x_r - x_{p_1})}{(x_{p_2} - x_k)(x_{p_2} - x_{p_1})} \right] \phi_{p_2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

A segunda derivada torna-se, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} = & \left[ \frac{2\phi_k}{(x_k - x_{p_1})(x_r - x_{p_2})} \right] + \left[ \frac{2\phi_{p_1}}{(x_{p_1} - x_k)(x_{p_1} - x_{p_2})} \right] \\ & + \left[ \frac{2\phi_{p_2}}{(x_{p_2} - x_k)(x_{p_2} - x_{p_1})} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

No presente trabalho, a construção do conjunto de pontos lagrangianos foi realizada com a ajuda de uma malha de elementos triangulares. Como a única função desta malha é a de melhor posicionar os pontos lagrangianos, foram escolhidos elementos triangulares (de mais fácil manipulação numérica) nos quais insere-se apenas um ponto lagrangiano. Empregando-se uma malha deste tipo, acredita-se ser possível aproveitar suas facilidades na geração de geometrias complexas, o que constituiria uma importante qualidade caso se deseje aplicar a metodologia em problemas reais de engenharia. Esta característica é reforçada ao se utilizar softwares com capacidades de importar geometrias construídas a partir de programas CAD (*Computer Aided Design*).

Assim, dada uma malha composta de elementos triangulares, procurou-se decidir as regras de posicionamento dos pontos lagrangianos. Neste trabalho, optou-se por posicioná-los no centróide de cada triângulo. Nomeando os vértices de cada triângulo como  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , como mostrado na Fig. 3.6, pode-se definir as arestas como  $S_1 = \overline{P_2P_1}$ ,  $S_2 = \overline{P_3P_2}$  e  $S_3 = \overline{P_3P_1}$ . Propõe-se, ainda, uma aresta média, que será atribuída a cada ponto lagrangiano  $k$ , posicionado no triângulo, como  $\Delta S_k = (1/3)(S_1 + S_2 + S_3)$  e uma área  $\Delta A_k$  do elemento triangular, também atribuída à este ponto. O volume característico da partícula lagrangiana foi substituído, então, por um volume baseado no elemento triangular associado à ela, composto por um comprimento característico ( $\Delta S_k$ ) multiplicado por uma área ( $\Delta A_k$ ) avaliada como sendo:

$$\Delta A_k = \sqrt{S(S - S_1)(S - S_2)(S - S_3)}, \quad (3.60)$$

onde:

$$S = (1/2)(S_1 + S_2 + S_3). \quad (3.61)$$

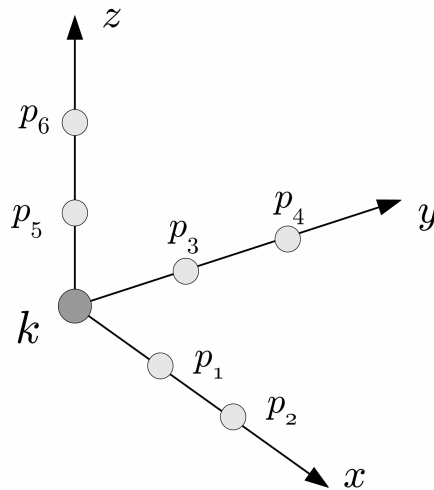


Figura 3.5 – Pontos auxiliares  $p_1$  a  $p_6$  empregados no cálculo das derivadas espaciais da Eq. (3.17).

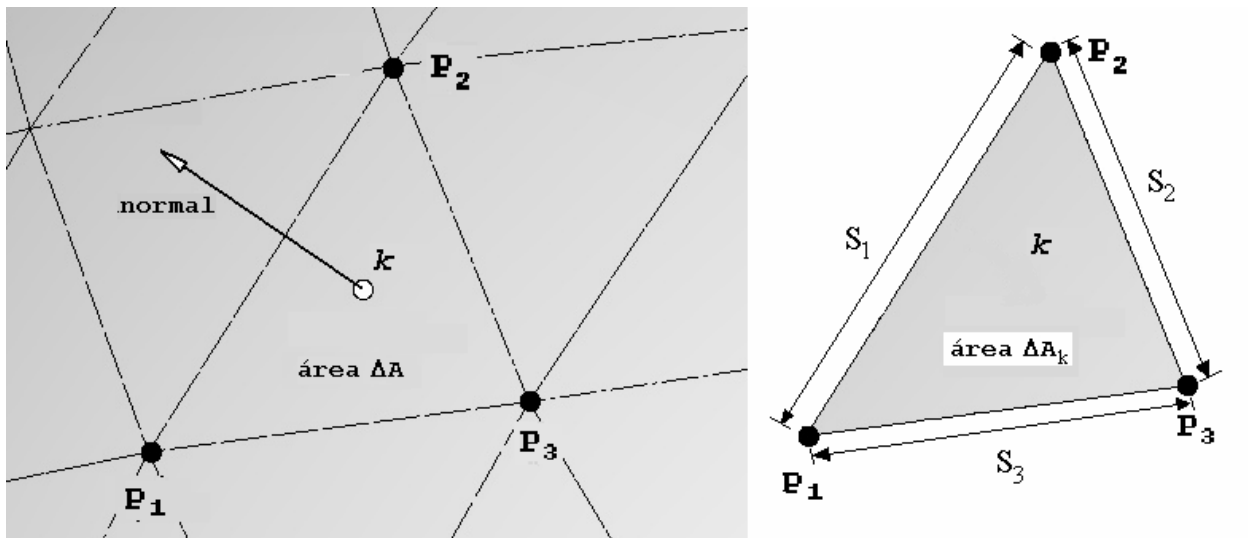


Figura 3.6 – Elemento triangular e suas propriedades geométricas.

A normal  $\vec{n}_k$  é obtida a partir do produto vetorial, seguindo a regra da mão-direita, entre dois vetores quaisquer formados pelos pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . A maioria dos softwares geradores de malhas em elementos triangulares produz seus arquivos baseando-se na regra da mão-direita para orientar a posição dos nós ao montar a lista de conectividades.

Uma vez avaliadas todas as componentes de força e, conseqüentemente, a força total que age sobre cada ponto lagrangiano, deve-se promover a sua transferência para o domínio euleriano. A função que realiza esta tarefa é conhecida como função distribuição  $D_m$  (que pertence ao espaço tridimensional, no presente trabalho) e têm, como principal característica, ponderar o valor de cada força lagrangiana em função da sua distância em relação à cada volume euleriano. A sua versão original foi apresentada por Peskin (1977) e alterada por Juric (1996). Na Fig. 3.7, é possível observar o valores de  $D_m$  num domínio tridimensional. A força total euleriana  $f_i$ , calculada para a direção  $i$ , é avaliada da seguinte forma:

$$f_i = \sum_k (F_{ik})(D_m)(\Delta A_k)(\Delta S_k) \quad (3.62)$$

onde:

$$D_m(x_k) = \prod_{m=1}^3 \left\{ \frac{\varphi[(x_k - x_m)/\Delta x_m]}{\Delta x_m} \right\}, m = 1, 2, 3 \quad (3.63)$$

e:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(r) & \text{se } \|r\| < 1 \\ \frac{1}{2} - \tilde{\varphi}(2 - \|r\|) & \text{se } 1 < \|r\| < 2, \\ 0 & \text{se } \|r\| > 2 \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\tilde{\varphi}(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 - 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8} \quad (3.65)$$

Tendo-se obtido  $f_i$ , ela é introduzida nas equações do balanço da quantidade de movimento (Eq. 3.29) via termo-fonte  $B$ . Assim, a componente, na direção  $i$ , do termo-fonte alterado pela adição da parcela de força, torna-se:

$$B_i = (q_i + f_i)\Delta V \quad (3.66)$$

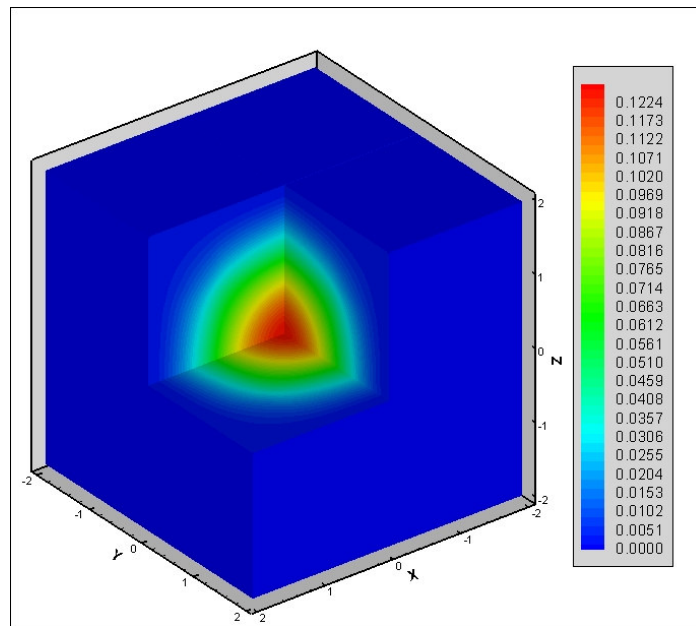


Figura 3.7 – Valores da função distribuição  $D_m$  em um domínio tridimensional.

De uma forma mais concisa, pode-se descrever o procedimento empregado no cálculo da força euleriana como:

1. Com o campo resolvido das variáveis primitivas do escoamento (quantidade de movimento e pressão), interpola-se seus valores aos pontos lagrangianos próximos ( $k, p_1.. p_6$ );
2. De posse de  $u_{ik}$  e  $p_{ik}$ , avalia-se as componentes de força lagrangiana:  $\vec{F}_{acc}$ ,  $\vec{F}_{inert}$ ,  $\vec{F}_{visc}$  e  $\vec{F}_{press}$  usando-se as Eqs. (3.51) a (3.54) e obtêm-se  $\vec{F}_k$ ;
3. Distribui-se o valor da força lagrangiana para o domínio euleriano, usando a Eq. (3.62);
4. O valor da força euleriana é inserido nas equações da quantidade de movimento usando a Eq. (3.66). Seu valor influenciará o campo do escoamento no instante de tempo seguinte;
5. Calculam-se os novos campos das propriedades do escoamento e o processo se reinicia.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### Escoamento sobre uma esfera parada

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos com o domínio euleriano durante o processo de validação do código numérico, ainda sem a implementação do método da fronteira imersa. Adicionalmente, serão analisados os primeiros resultados com a metodologia de fronteira imersa e com a extensão do Modelo Físico Virtual à terceira dimensão, modelando uma esfera imersa em escoamentos a moderados números de Reynolds. No Capítulo V, a metodologia será empregada na simulação de um problema de interação fluido-estrutura, onde uma esfera, ancorada por molas, encontra-se imersa num escoamento.

#### 4.1 Validação do código numérico de base cartesiana

O domínio euleriano foi discretizado por uma malha cartesiana e as equações de Navier-Stokes foram integradas no tempo e no espaço em volumes elementares. Com relação às equações de balanço da quantidade de movimento (equação 3.8), as condições de contorno nas fronteiras do domínio podem ser:

- parede: todas as componentes das velocidades (normais e tangenciais) possuem valor nulo;
- fronteira livre: derivadas nulas para os valores das velocidades tangenciais e velocidade nula na direção normal;
- periodicidade: os fluxos de massa e de quantidade de movimento que saem de uma superfície, entram pela superfície oposta.

No que segue, apresentam-se os resultados obtidos durante o processo de validação do código numérico na sua parte euleriana. Foram efetuadas simulações para uma camada de mistura e também sobre o degrau descendente. Os trabalhos envolvendo escoamentos sobre o

degrau foram transformados em artigos e apresentados em congressos, como podem ser vistos em Campregher *et al.* (2004), Spode *et al.* (2004) e Spode *et al.* (2005).

#### 4.1.1 Camada de Mistura

As camadas de mistura se desenvolvem devido à um campo de velocidade inflexional no interior do escoamento, como representado na Fig. 4.1. Na região cisalhante entre as duas camadas de fluido à diferentes velocidades ( $U_1$  e  $U_2$ , com  $U_1 > U_2$ ) surgem, ou são impostas, perturbações que se amplificam dando origem a instabilidades e à turbulência completamente desenvolvida (Silveira-Neto, 2003).

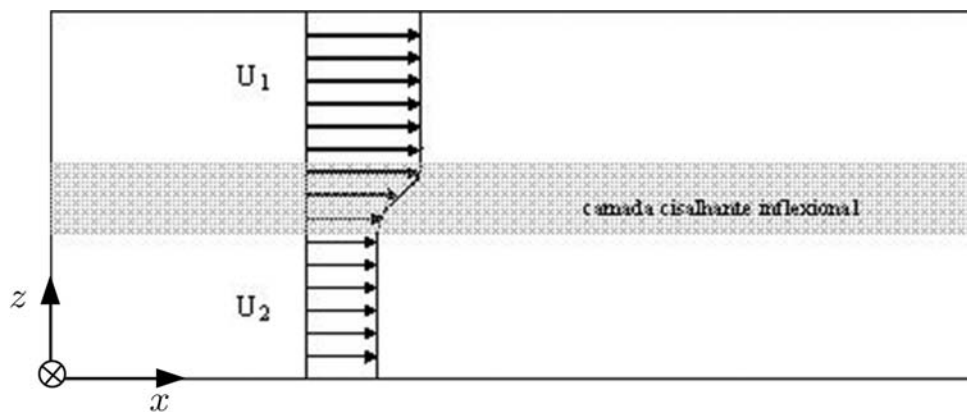


Figura 4.1 – Campo inflexional de base para o desenvolvimento de uma camada de mistura temporal.

A inflexionalidade sobre o campo de velocidade médio, se perturbada com um ruído externo, dá origem às chamadas instabilidades de *Kelvin-Helmholtz* (ver Fig. 4.2). As Figs. 4.1 e 4.2 ilustram uma camada de mistura temporal. No entanto, os cálculos e os resultados que serão apresentados no presente trabalho se referem a uma camada de mistura espacial.

As simulações foram realizadas em um domínio computacional de dimensões  $(L_x \times L_y \times L_z) = (140,0 \times 14,0 \times 28,0) \text{ m}$  contendo em cada dimensão, respectivamente,  $480 \times 48 \times 96$  volumes, conforme realizado por Comte *et al.* (1998). O perfil imposto na entrada para o campo de velocidades médio é nulo para as componentes  $v$  e  $w$ , e na forma de tangente hiperbólica para a componente  $u$ , dado por:

$$u(z) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh \frac{2z}{\delta} = U^* \left[ \frac{1}{R} + \tanh \frac{2z}{\delta} \right], \quad (4.1)$$

com  $U_1 = 3,0$  m/s e  $U_2 = 1,0$  m/s,  $U^* = \frac{U_1 - U_2}{2}$ ,  $R = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} = 0,5$  e  $\delta = 1,0$ .

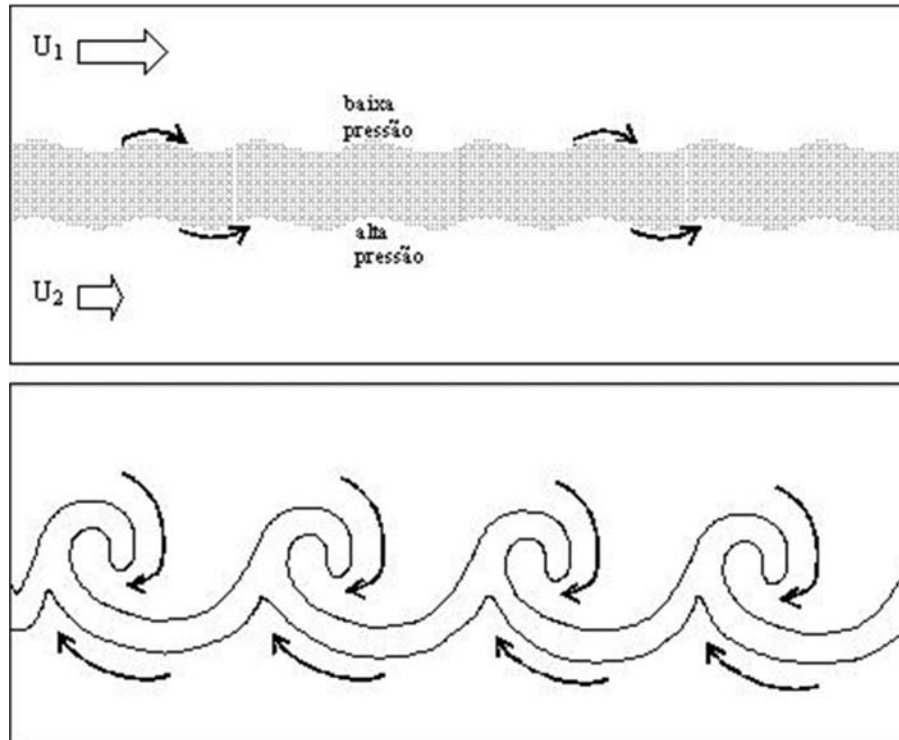


Figura 4.2 – Evolução da camada de cisalhamento, formando as instabilidades de *Kelvin-Helmholtz*.

Este perfil de velocidade imposto na entrada do domínio alimenta a formação e a manutenção de uma camada de mistura em desenvolvimento espacial. Além disso, foi necessária a adição de uma perturbação sobre a velocidade na entrada do domínio com vistas a induzir à transição ao longo do comprimento do domínio. Dessa forma, empregou-se uma perturbação com intensidade de 4% sobre o valor médio da velocidade para a componente  $u$  e 0,1% para as componentes  $v$  e  $w$ . O número de Reynolds baseado na espessura da camada de mistura (de valor unitário, no presente experimento) foi igual a 100. As condições de contorno na saída do domínio foram ajustadas como derivada nula para todas as variáveis. Na direção  $y$ , as condições foram impostas como de periodicidade, e na direção  $z$  de fronteira livre. Um esboço com as dimensões do domínio pode ser visto na Fig. 4.3, onde as variáveis  $L_i$  ( $i = x, y, z$ ) representam o comprimento das arestas do domínio (em metros) e os números em colchetes, a quantidade de volumes distribuídos ao longo desta aresta.

Não foram realizadas análises quantitativas deste experimento, apenas os campos de vorticidade foram observados e comparados com resultados da literatura. O objetivo principal



desta etapa do trabalho foi verificar o efeito da difusão numérica, que pode impedir a transição do escoamento, a coerência das estruturas turbilhonares e a existência de vórtices secundários longitudinais. Como pode ser observado na Fig. 4.4, o programa permitiu capturar a transição do escoamento, a formação das instabilidades de *Kelvin-Helmholtz* e, ainda, as estruturas longitudinais induzidas pelos vórtices primários, vistas com maiores detalhes na Fig. 4.5. Estas estruturas longitudinais são conhecidas de resultados obtidos por experimentos em laboratórios, assim como por simulação numérica de outros autores. Além disso, elas podem ser capturadas com mais detalhes dependendo da ordem de precisão dos esquemas espaciais e temporais. Para os objetivos visados no presente trabalho, os resultados aqui apresentados são adequados, pois permitem averiguar preliminarmente as implementações efetuadas. Para esta simulação, composta de 2.361.800 volumes, foram empregados quatro processadores, consumindo um tempo total de, aproximadamente, 10 horas.

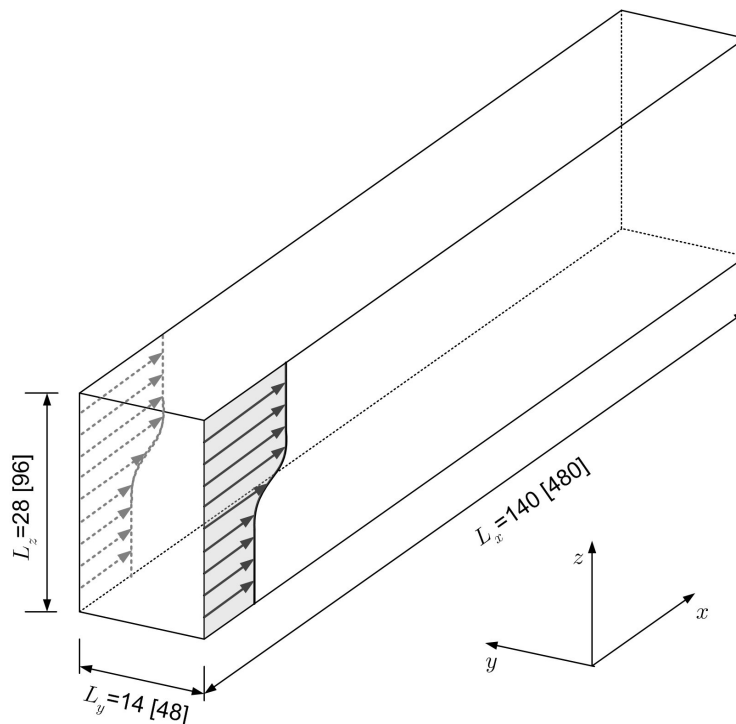


Figura 4.3 – Tamanho do domínio computacional (em metros) e densidade de malhas empregadas na simulação da camada de mistura espacial.

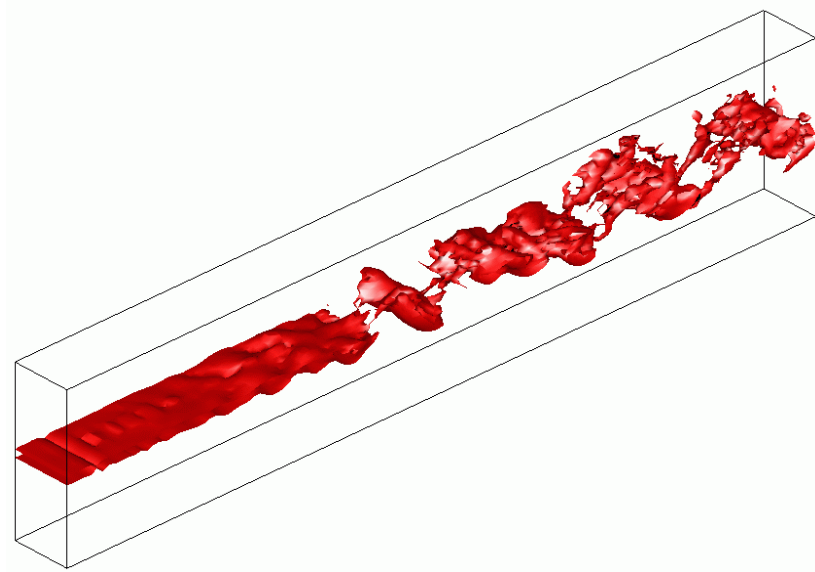


Figura 4.4 – Instabilidades de *Kelvin-Helmholtz* e vórtices secundários longitudinais na camada de mistura espacial. Apresenta-se a vorticidade  $|\omega| = 1,0$

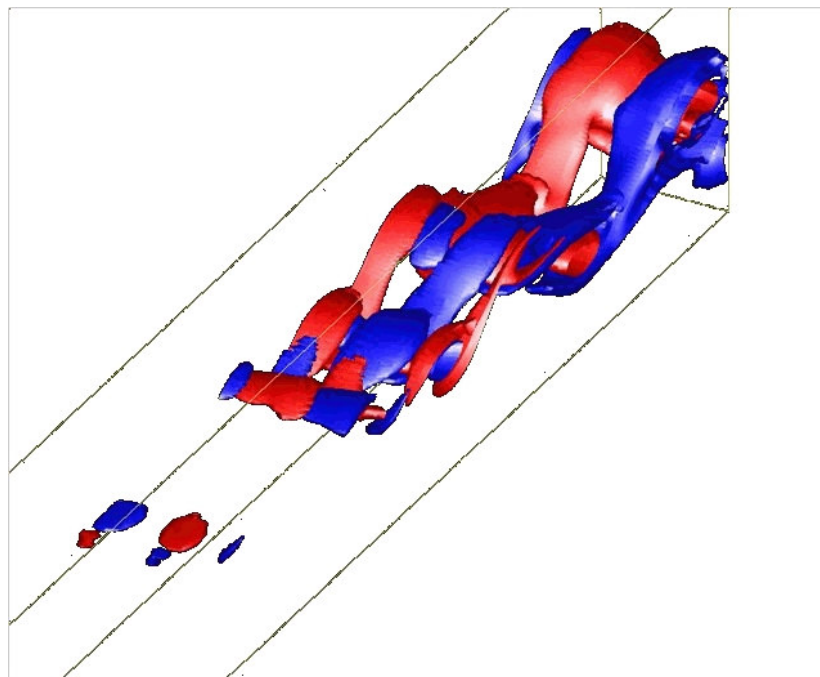


Figura 4.5 – Detalhe dos vórtices longitudinais contra-rotativos na camada de mistura. Visualiza-se as vorticidades  $-|\omega| = 0,4$  (azul) e  $+|\omega| = 0,4$  (vermelho).

### 4.1.2 Escoamento sobre um degrau descendente

Escoamentos sobre um degrau vêm sendo objeto de interesse da comunidade científica à cerca de 30 anos e, apesar de sua geometria relativamente simples, o padrão do escoamento em seu interior possui diversas similaridades com problemas físicos reais em engenharia como descolamento de camada limite no bordo de fuga de aerofólios, expansões bruscas em válvulas e sistemas de resfriamento em componentes eletrônicos. Além disso, é considerado pela comunidade científica como um dos importantes casos clássicos para validação de códigos computacionais (Barkley *et al.*, 2002).

O uso de modelos para a turbulência tem sido também bastante explorado empregando-se este tipo de geometria. Numa primeira análise, torna-se mais fácil uma comparação direta entre os diferentes modelos e, além disso, o domínio possui paredes planas, facilitando a implementação numérica de metodologias que procuram reproduzir mais fielmente a camada-limite. No presente trabalho, procurou-se realizar várias simulações de escoamentos no interior de degraus descendentes, buscando compará-los com dados disponíveis na literatura com respeito ao comprimento de recolamento, intensidades turbulentas e perfis de velocidade e vorticidade, além da topologia do escoamento. Parte dos resultados obtidos no presente trabalho foi publicada e estão disponíveis em Campregher *et al.* (2004) e Spode *et al.* (2005). Nas geometrias estudadas, o número de Reynolds em função da altura  $h$  do degrau (ver Fig. 4.6) pode ser medido por:

$$\text{Re}_h = \frac{\rho U_0 h}{\mu}, \quad (4.2)$$

onde  $U_0$  é a velocidade média na entrada do canal,  $\rho$  é a massa específica e  $\mu$  a viscosidade dinâmica.

Para todos os experimentos, o número de Reynolds simulado caracteriza um escoamento em regime turbulento, onde a transição para este tipo de problema ocorre, de acordo com a literatura, a partir de  $\text{Re}_h = 1.200$ . Assim, tornou-se necessário empregar a modelagem da turbulência e, para tanto, escolheu-se a modelagem clássica de *Smagorinsky* (Silveira - Neto, 2003).

Em Spode *et al.* (2005), utilizando o código desenvolvido no presente trabalho apresenta-se resultados, para Reynolds de  $5.100$ , com ênfase em análise de perfis de velocidade média e momentos de segunda ordem (componentes das tensões de Reynolds) para diversos valores a constantes de *Smagorinsky*. Um desenho esquemático do domínio computacional pode ser visto na Fig. 4.6. As condições de contorno empregadas foram de periodicidade nas faces ao

longo do eixo  $z$ , parede na fronteira  $y = 0$  e fronteira livre na face  $y = H$ . Além disso, foi imposto um perfil médio de velocidade na entrada do domínio obtido de Spalart (1988) sobre o qual foi adicionado um ruído de amplitude máxima 1,25%  $U_0$ . A espessura da camada limite antes do degrau é  $\delta = 1,2h$ .

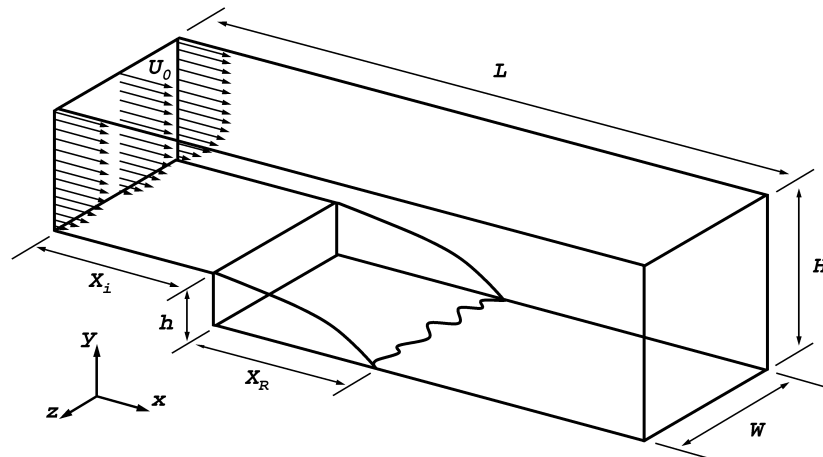


Figura 4.6 – Desenho esquemático do domínio de cálculo: degrau descendente.

Condições de contorno de Neumann para todas as componentes do momento foram usadas na saída do domínio. É desejável que todas as estruturas turbilhonares saiam do domínio, pois um possível refluxo pode desestabilizar a solução numérica. Para garantir esta condição, empregou-se uma função de amortecimento sobre a componente  $u$ , como especificado em Souza *et al.* (2002).

As dimensões do domínio foram ajustadas como  $L = 30h$  (o que inclui um comprimento de entrada  $X_i = 3h$ ), altura  $H = 6h$  e largura  $W = 4h$ . A origem do sistema de coordenadas está localizada sobre o degrau e sobre a parede inferior do domínio, de forma que o comprimento de recolamento  $X_R$  é referenciado à esta origem. Foi definida uma variável baseada na relação entre as alturas do domínio e do degrau, conhecida como razão de expansão ER (*Expansion Ratio*), como realizado em Le *et al.* (1997) sendo que, no presente trabalho,

$$ER = \frac{H}{(H-h)} = 6.$$
 Na discretização, empregou-se 384, 96 e 64 volumes nas direções  $x$ ,  $y$  e

$z$ , respectivamente. Em particular, na direção da altura do degrau ( $y$ ) foram posicionadas 36 células no trecho  $y < h$  para melhor capturar os fortes gradientes nesta região. As larguras das células na região da parede, adimensionalizadas pela tensão de cisalhamento, foram de  $\Delta x^+ \approx 17$ ,  $\Delta z^+ \approx 14$ ,  $\Delta y_{\min}^+ \approx 3$  e  $\Delta y_{\max}^+ \approx 50$ .