

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Identificação da Força de Atrito Através de Análise de Sinais Não
Lineares em Ensaios Tribológicos**

Tese apresentada à Universidade Federal de Uberlândia por:

Marcelo Braga dos Santos

como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em
Engenharia Mecânica

Aprovada por:

Prof. Dr. Francisco Paulo Lépore Neto – UFU – Orientador

Prof. Dr. José Daniel Biasoli de Mello – UFU – Co-Orientador

Prof. Dr. Carlos Roberto Ribeiro - UFU

Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini – UNICAMP

Prof. Dr. Amilton Sinatora – USP

Uberlândia, 11 de março de 2005

S237i Santos, Marcelo Braga dos, 1974-
Identificação da força de atrito através de análise de sinais não lineares em ensaios tribológicos / Marcelo Braga dos Santos. - Uberlândia, 2005.
242f. : il.
Orientador: Francisco Paulo Lé-pore Neto.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Vibração - Teses. 2. Tribologia - Teses. 3. Análise de sistemas - Te-ses. 4. Teorias não-lineares - Teses. 5. Engenharia mecânica - Teses. I. Lé-pore Neto, Francisco Paulo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Pro-grama de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

621:534 (043.3)

Aos meus pais Paulo Sergio e Márcia.

Aos meus irmãos Marcio e Paula.

Agradecimentos

À minha família pelo carinho, pela atenção e incentivo durante toda minha vida.

À Débora e sua família pelo carinho e amizade.

Aos amigos Paulo Sergio de Sairre Balsamo e Cleber Caetano Thomazi pelo companheirismo, pela amizade e pelo incentivo que sempre souberam dar.

Ao grande amigo José Antonio Ferreira Borges por sua amizade e conselhos.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela inestimável contribuição à minha formação profissional.

Aos professores Valder Steffen Jr e Alberto Raslan pela amizade e contribuições a minha formação.

À todos os funcionários e professores da Faculdade de Engenharia Mecânica.

Ao Prof. José Daniel, co-orientador deste trabalho, pela amizade, pelos conselhos e contribuições no desenvolvimento desta tese.

Ao Prof. Francisco Paulo Lépre Neto, orientador deste trabalho, e sua família por terem sido uma extensão da casa de meus pais, pela amizade, pelo carinho e por tudo aquilo que não consigo expressar aqui em poucas palavras.

À todos os colegas de laboratório e da faculdade pela amizade e apoio.

Ao CNPq e a Faculdade de Engenharia Mecânica pelo apoio financeiro dado à este trabalho.

À Deus por me propiciar o convívio com pessoas tão extraordinárias.

Sumário

Resumo	xxi
Abstract.....	xxiii
Introdução.....	1
1.2 Motivação do trabalho	6
1.3 Apresentação da estrutura da tese.....	12
Mecânica do Contato : Fundamentos Teóricos e Simulação Numérica.....	15
2.1 Sistema de Coordenadas	15
2.1.1 Sistemas de coordenadas para representação do contato na laminação de produtos planos.	19
2.2 Distribuição de tensão sobre um plano semi-infinito	21
2.2.1 Força Normal Concentrada.....	25
2.2.2 Carregamento tangencial concentrado.....	27
2.2.3 Carregamento Normal sobre uma Área Elíptica	29
2.2.4 Carregamento Tangencial sobre uma Área Elíptica	35
2.3 Contato Normal entre Corpos Elásticos : Teoria de Hertz.....	35
2.3.1 O contato entre corpos elásticos esféricos	45
2.4 Elementos Finitos – Cálculo Numérico de Problemas de Mecânica do Contato.....	47
2.4.1 Métodos de Integração Numérica.....	48
2.4.2 Método Variacional	51
2.5 Simulações com modelos de Elementos Finitos	53
2.5.1 Contato nó à nó	53
2.5.2 Contato nó à superfície.....	55
2.5.3 Contato superfície à superfície	57
2.5.4 Simulação Numérica da Transferência de Calor no Contato Mecânico	58

2.5.5 Resultados das Simulações do Contato entre Cilindros – Estado Plano de Deformações.	61
2.5.6 Resultados das Simulações do Contato entre Cilindros de Comprimentos Diferentes - Modelo Tridimensional.	67
2.5.7 Simulação da distribuição de temperatura no contato cilindro-cilindro.....	77
2.5.8 Resultado de Simulações Numéricas para o Contato entre um Corpo Esférico e um Corpo Plano.....	80
2.6 Conclusões.....	87
Fundamentos de Análise de Sinais Aplicados à identificação de Sistemas Não Lineares	89
3.1 Sistema não linear sem memória	91
3.2 Sistemas não lineares com memória finita com as variáveis não lineares conhecidas ...	92
3.3 Funções densidade probabilidade para sistemas não lineares sem memória	94
3.3.1 Teorema da relação entre as funções densidade probabilidade da entrada e da saída.	96
3.3.2 Teorema da identificação de sistemas não lineares sem memória.....	96
3.4 Funções de autocorrelação e correlação cruzada para sistemas não lineares sem memória.....	97
3.5 Funções não lineares sem memória.....	99
3.5.1 Momentos estatísticos das variáveis de entrada e saída	105
3.6 Sistemas com múltiplas entradas/uma saída, diretos e inversos, aplicados à análise de sistemas não lineares.....	109
3.6.1 Métodos de análise de um sistema não linear genérico.....	112
3.6.2 Sistemas não lineares de duas entradas e uma saída.....	116
3.6.3 Erros estatísticos nos estimadores e planejamento dos experimentos	121
Sistemas Mecânicos Submetidos à Força de Atrito	125
4.1 Formulação de um sistema vibratório linear submetido a uma força não linear	126
4.2 Modelo adere e desliza ou “stick-slip” para a força de atrito	134

4.2.1 Cálculo da media para função não linear do atrito	142
4.2.2 Cálculo do desvio padrão da função não linear do atrito.....	142
4.2.3 Calculo da “Assimetria” e da “Curtose”	144
4.3 Modelo para força de interação entre duas superfícies com efeito de amortecimento viscoso.....	146
4.3.1 Modelo para a força regenerativa.....	147
4.3.2 Modelo para as forças não conservativas	148
4.3.3 Análise física e estatística da força de interação entre superfícies	149
4.4 Sistema linear submetido a força de atrito não linear.....	152
4.4.1 - Ensaio com excitação aleatória	156
4.4.2 – Ensaio com excitação harmônica	162
4.5 – Conclusões	168
Ensaio tribológico com tribômetro PLINT & PARTNERS.....	171
5.1 Características de funcionamento do tribômetro alternativo PLINT	172
5.1.1 Instrumentação adicional para aplicação da análise de sinais não linear na identificação da força de atrito real e ajustes da aquisição	175
5.1.2 Comportamento dinâmico do Tribômetro PLINT & PARTNERS	178
5.2 Ensaio de desgaste com alumínio anodizado	182
5.2.1 Ensaio preliminares.....	182
5.3 Ensaio com alumínio revestido de Teflon	197
5.4 Conclusões	204
Conclusões.....	207
6.1 Sugestões para trabalhos futuros.....	209
Referências Bibliográficas	213

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Configurações normalmente empregadas em ensaios tribológicos.....	4
Figura 1.2 – Diagrama esquemático de um sistema normalmente utilizado para se medir atrito.....	5
Figura 1.3 – Diagrama esquemático de um laminador em tandem.....	7
Figura 1.4 – Diagrama de velocidades na laminação de produtos planos.....	8
Figura 1.5 – Diagrama esquemático do tribômetro construído no projeto financiado pela FINEP.	9
Figura 1.6 – Diagrama representativo da cinemática do contato entre uma esfera e um plano com movimento de escorregamento imposto do tipo harmônico.	12
Figura 2.1 – Sistema de coordenadas para dois corpos em contato mecânico não conforme. .	16
Figura 2.2 – Definição dos esforços presentes entre dois corpos em contato.....	19
Figura 2.3 – Sistema de coordenadas para o contato entre dois cilindros.....	20
Figura 2.4 – Sistema de coordenadas para o contato entre uma esfera e um plano.....	20
Figura 2.5 – Sistemas de coordenadas e variáveis para as funções potenciais de Broussinesq.	23
Figura 2.6 – Corpos elásticos com eixos inclinados de um ângulo α	37
Figura 2.7 – Corpos elásticos em contato não conforme – Teoria de Hertz	39
Figura 2.8 – Campo de tensões no plano $y=0$ para o contato entre dois cilindros.....	44
Figura 2.9 – Exemplos de contato entre cilindros finitos.	48
Figura 2.10 – Tipos de representação discreta de um campo de pressão em problemas de contato mecânico. (Johnson, 1985).....	49
Figura 2.11 – Exemplo de aplicações dos elementos de contato nó à nó.	54
Figura 2.12 – Contato entre uma superfície côncava e outra convexa.	56
Figura 2.13 – Contato entre duas superfícies convexas.	56
Figura 2.14 – Contato entre duas superfícies irregulares.....	57

Figura 2.15 – Diagrama esquemático de uma fonte de calor móvel sobre um corpo semi-infinito.	60
Figura 2.16 – Campo de deslocamentos para dois cilindros em contato.....	63
Figura 2.17 – Campo de tensões na direção x do modelo, com apenas carga normal.	64
Figura 2.18 - Campo de tensões na direção y do modelo com apenas carga normal.....	64
Figura 2.19 - Campo de tensões no plano xy do modelo, com apenas carga normal.	64
Figura 2.20 - Campo de tensões no eixo x do modelo com aplicação de cargas normal e tangencial.	66
Figura 2.21 – Campo de tensões no eixo y do modelo com aplicação de cargas normal e tangencial.	66
Figura 2.22 - Campo de tensões no plano xy do modelo com aplicação de cargas normal e tangencial.	66
Figura 2.23 – Diagrama esquemático das regiões de malha diferenciadas no modelo.....	68
Figura 2.24 – Condições de contorno	68
Figura 2.25 – Distribuição da pressão de contato ao longo do comprimento do cilindro de maior comprimento.....	70
Figura 2.26 – Distribuição de pressão sobre a superfície de contato no cilindro de maior comprimento. Situação sem carga tangencial.....	71
Figura 2.27 - Distribuição de pressão sobre a superfície de contato no cilindro de maior comprimento. Situação com carga tangencial.....	72
Figura 2.28 – Campo de tensão principal, σ_1 , no cilindro de maior comprimento sem a aplicação de carga tangencial.	72
Figura 2.29 – Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{max} , no cilindro de maior comprimento sem a aplicação de carga tangencial.....	73
Figura 2.30 – Campo de tensão principal, σ_1 , no cilindro de menor comprimento sem a aplicação de carga tangencial.	73

Figura 2.31 – Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} , no cilindro de menor comprimento sem a aplicação de carga tangencial.....	74
Figura 2.32 – Campo de tensão principal, σ_1 , no cilindro de maior comprimento com a aplicação de carga tangencial.	75
Figura 2.33 – Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} , no cilindro de maior comprimento com a aplicação de carga tangencial.....	75
Figura 2.34 – Campo de tensão principal, σ_1 , no cilindro de menor comprimento com a aplicação de carga tangencial.	76
Figura 2.35 – Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} , no cilindro de menor comprimento com a aplicação de carga tangencial.....	76
Figura 2.36 – Modelo de elementos finitos para simulação térmica do contato mecânico entre dois cilindros.	79
Figura 2.37 – Variação temporal da temperatura no cilindro após 5 revoluções.	79
Figura 2.38 – Envelope das temperaturas na superfície do cilindro.....	80
Figura 2.39 – Modelo para simulação do contato entre uma esfera e um plano.....	82
Figura 2.40 – Campo de tensão principal, σ_1 , no bloco sem deslocamento relativo à esfera...	83
Figura 2.41 - Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} , no bloco sem deslocamento relativo à esfera.	83
Figura 2.42 – Campo de tensão principal, σ_1 , no bloco no primeiro passo de deslocamento relativo à esfera.	84
Figura 2.43 - Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} , no bloco no primeiro passo de deslocamento relativo à esfera.	84
Figura 2.44 – Campo de tensão principal, σ_1 , no bloco no último passo de deslocamento relativo à esfera.	84

Figura 2.45 - Campo de tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} , no bloco no ultimo passo de deslocamento relativo à esfera.....	85
Figura 3.1 - Diagrama esquemático de um modelo não linear sem memória.....	91
Figura 3.2 - Diagrama esquemático para sistemas não lineares com memória finita.....	92
Figura 3.3 - Modelo para um sistema não linear precedido por um sistema linear com parâmetros constantes.....	92
Figura 3.4 - Modelo para um sistema não linear antes de um sistema linear com parâmetros constantes.....	93
Figura 3.5 - Função bi-linear para $0 < kb < 1$	100
Figura 3.6 - Função bi-linear para $kb > 1$	100
Figura 3.7 - Sistema bi-linear com entrada $x(t)$ gaussiana.....	102
Figura 3.8 - Funções densidade probabilidade das variáveis x e y	103
Figura 3.9 - Funções densidade probabilidade acumulada das variáveis x e y	103
Figura 3.10 - Diagrama esquemático de aplicação do teorema do item 3.3.2.....	104
Figura 3.11 - Comparação entre o sistema linear identificado e o imposto.....	105
Figura 3.12 - Sistema não linear representado por séries de Volterra.....	110
Figura 3.13 - Sistema não linear, representação alternativa a séries de Volterra.....	110
Figura 3.14 - Sistema MISO não linear.....	111
Figura 3.15 - Sistema MISO genérico.....	111
Figura 3.16 - Sistema não linear com saídas correlacionadas.....	112
Figura 3.17 - Sistema não linear com saídas não correlacionadas.....	113
Figura 3.18 - Sistema de uma entrada e uma saída com um caminho linear em paralelo com um caminho não linear com saídas correlacionadas entre si.....	117
Figura 3.19 - Sistema de uma entrada e uma saída com um caminho linear em paralelo com um caminho não linear com saídas não correlacionadas entre si.....	117
Figura 3.20 - Sistema de duas entradas e uma saída (MISO) linear equivalente ao sistema não linear com saídas correlacionadas entre si.....	119

Figura 3.21 - Sistema de duas entradas e uma saída (MISO) linear equivalente ao sistema não linear com saídas não correlacionadas entre si.....	119
Figura 4.1 - Sistema linear com um grau de liberdade.....	126
Figura 4.2 - Diagrama de bloco direto de um sistema linear com 1 GDL.....	127
Figura 4.3 - Diagrama de bloco reverso de um sistema com 1 GDL.....	127
Figura 4.4 - Sistema não linear genérico de 1 GDL.	128
Figura 4.5 - Representação de um sistema não linear genérico através de um sistema MISO equivalente.	129
Figura 4.6 – Sistema de um grau de liberdade (GDL) com excitação linear e uma força não linear ligada a um referencial inercial.	129
Figura 4.7 – Representação por diagrama de blocos de um sistema MISO para o sistema não linear da Figura 4.6.....	130
Figura 4.8 – Sistema vibratório de n GDL com excitação não linear.....	131
Figura 4.9 - Representação por diagrama de blocos de um sistema MISO para o sistema linear de n GDL da Figura 4.8.	133
Figura 4.10 - Representação da força de atrito sobre um corpo em movimento alternativo....	134
Figura 4.11 - Modelo para força de atrito em função da velocidade e do deslocamento relativos.	135
Figura 4.12 - Gráfico da força de atrito em função do deslocamento e da velocidade.	136
Figura 4.13 – Função densidade probabilidade do deslocamento (F_1 - azul) e da força de atrito (F_2 - preto).....	137
Figura 4.14 – Sistema vibratório de um grau de liberdade com atrito excitado por deslocamento $x_2(t)$	138
Figura 4.15 – Função densidade probabilidade para a força de atrito entre dois corpos, com coeficientes de atrito cinemático variando entre 0.1 e 0.8.....	138
Figura 4.16 - Função densidade probabilidade de uma função “CLIPPED”	141

Figura 4.17 - Função densidade probabilidade de uma variável aleatória com distribuição gaussiana.	143
Figura 4.18 – Gráfico da força por velocidade para a força de interação entre duas superfícies que considera efeitos de amortecimento viscoso.	150
Figura 4.19 – Sistema não linear sem memória.	150
Figura 4.20 – Função densidade probabilidade da saída $y(t)$ e da entrada $x(t)$ do sistema apresentado na Figura 4.19.	151
Figura 4.21 – Diagrama esquemático do experimento de um sistema vibratório de 1 GDL submetido a força de atrito.	152
Figura 4.22 – Montagem experimental: Sistema vibratório de 1GDL e dispositivo de atrito Coulomb.	153
Figura 4.23 – Instrumentação do sistema vibratório.	153
Figura 4.24 – Diagrama de blocos para o sistema da Figura 4.21.	154
Figura 4.25 - Diagrama de blocos saídas não condicionadas.	154
Figura 4.26 - Diagrama de blocos saídas condicionadas.	155
Figura 4.27 – Funções transferência para o sistema de 1 GDL nas condições do ensaio C com excitação tipo ruído de banda estreita.	156
Figura 4.28 - Parcelas lineares da força para o sistema de 1 GDL nas condições do ensaio C com excitação tipo ruído de banda estreita.	157
Figura 4.29 - Parcelas não lineares da força para o sistema de 1 GDL e da força obtida pela célula de carga 02 nas condições do ensaio C com excitação tipo ruído de banda estreita.	157
Figura 4.30 – Funções coerências entre a entrada e as saídas do sistema da Figura 4.24.	158
Figura 4.31 – Funções densidade probabilidade do deslocamento da mesa e da força imposta pelo excitador.	159
Figura 4.32 – Funções densidade probabilidade da força de atrito calculada e da força medida pela célula de carga 02.	160

Figura 4.33 – Ensaio somente com a massa suspensa na célula de carga 02.....	161
Figura 4.34 – Relação entre a força da célula de carga 02 e a aceleração obtida pelo acelerômetro 01.....	162
Figura 4.35 - Parcelas não lineares da força para o sistema de 1 GDL e da força obtida pela célula de carga 02 nas condições do ensaio A com excitação harmônica de 10 Hz.	163
Figura 4.36 - Parcelas não lineares da força para o sistema de 1 GDL e da força obtida pela célula de carga 02 nas condições do ensaio B com excitação harmônica de 10 Hz.	164
Figura 4.37 - Parcelas não lineares da força para o sistema de 1 GDL e da força obtida pela célula de carga 02 nas condições do ensaio C com excitação harmônica de 10 Hz.	164
Figura 4.38 - Parcelas não lineares da força para o sistema de 1 GDL e da força obtida pela célula de carga 02 nas condições do ensaio A com excitação harmônica de 5 Hz.	165
Figura 4.39 - Parcelas não lineares da força para o sistema de 1 GDL e da força obtida pela célula de carga 02 nas condições do ensaio A com excitação harmônica de 18 Hz.	166
Figura 4.40 – Comparação entre a força de atrito calculada e a força obtida pela célula de carga 02 condições do ensaio A com excitação harmônica de 5 Hz.....	168
Figura 5.1 – Diagrama esquemático do tribômetro PLINT & PARTNERS e sua instrumentação embarcada para ensaios alternativos de desgaste esfera sobre plano.....	173
Figura 5.2 – O tribômetro PLINT & PARTNERS.	174
Figura 5.3 – Detalhe do tribômetro PLINT & PARTNERS, célula de carga para medir o atrito aparente.....	174
Figura 5.4 –Detalhe do tribômetro PLINT & PARTNERS, sistema de aplicação de carga por peso morto, corpo.e contra corpo.	174
Figura 5.5 – Detalhe do ajuste do comprimento da biela para fixar a amplitude do movimento alternativo.	175
Figura 5.6 – Diagrama esquemático da instrumentação adicionada ao tribômetro PLINT & PARTNERS.	176
Figura 5.7 – Diagrama esquemático da estratégia de aquisição ao longo dos ensaios.....	177

Figura 5.8 – Diagrama esquemático do experimento para obtenção das FRFs.	179
Figura 5.9 – $FRF_{BA} [m/sN]$, sem peso morto.	180
Figura 5.10 – $FRF_{BA} [m/sN]$, com peso morto igual a 4 Kg.	181
Figura 5.11 – – $FRF_{BA} [m/sN]$ com peso morto igual a 6 Kg.	181
Figura 5.12 – Diagrama dos ensaios preliminares para ajustes dos sensores.	183
Figura 5.13 – Diagrama de blocos do sistema não linear para a análise de sinais nos ensaios com o tribômetro PLINT & PARTNERS.	184
Figura 5.14 – Função resposta em frequência, H_o , do caminho linear obtida durante o ensaio de desgaste no tribômetro PLINT & PARTNERS.	186
Figura 5.15 – Funções auto densidade espectrais para a saída linear $S_{y_o y_o}$ do sistema MISO não linear.	187
Figura 5.16 – Funções auto densidade espectrais para a saída linear $S_{y_h y_h}$ do sistema MISO não linear.	187
Figura 5.17 – Funções auto densidade espectrais para a saídas não linear $S_{y_u y_u}$ do sistema MISO não linear.	188
Figura 5.18 – Funções auto densidade espectrais para a saída não linear $S_{y_v y_v}$ do sistema MISO não linear.	188
Figura 5.19 – Função $S_{y_v y_v}$ para o ensaio com camada anodizada remanescente.	190
Figura 5.20 – Função $S_{y_v y_v}$ para o ensaio em que a camada anodizada foi removida completamente.	190
Figura 5.21 – Fotos obtidas no MEV para a amostra sem remoção completa da camada anodizada.	191
Figura 5.22 – Micrografias mostrando trincas na superfície da tira (a) e (c) próximo a entrada em contato com o cilindro de laminação, (b) e (d) após a laminação da tira. (LE et al, 2004)	192

Figura 5.23 – Imagem de MEV obtida no centro do risco para o ensaio sem remoção completa da camada anodizada.	193
Figura 5.24 - Fotos obtidas no MEV para a amostra com remoção completa da camada anodizada.	193
Figura 5.25 – Valor RMS para a força de atrito estimada, $S_{y_v y_v}$, e para o potencial de contato ao longo do ensaio sem remoção completa da camada anodizada.	195
Figura 5.26 – Valor RMS para a força de atrito estimada, $S_{y_v y_v}$, e para o potencial de contato ao longo do ensaio com remoção completa da camada anodizada.	195
Figura 5.27 – Banda de alta frequência, para a saída $S_{y_v y_v}$, para o ensaio sem remoção completa da camada anodizada.	196
Figura 5.28 - Banda de alta frequência, para a saída $S_{y_v y_v}$, para o ensaio com remoção completa da camada anodizada.	196
Figura 5.29 – Força de atrito estimada, $S_{y_v y_v}$, e foto obtida no MEV para a condição sem danos a camada de Teflon.	198
Figura 5.30 – Força obtida pela célula de carga piezométrica e deslocamento do contra corpo esférico para os ensaios da classe I.	199
Figura 5.31 – Funções coerência ordinárias e acumulada do sistema MISO mostrado na Figura 5.13 para o ensaio da classe I.	199
Figura 5.32 - Força de atrito estimada, $S_{y_v y_v}$, e foto obtida no MEV para a condição de danos visíveis a camada de Teflon.	201
Figura 5.33 - Força de atrito estimada, $S_{y_v y_v}$, e foto obtida no MEV para a condição de remoção da camada de Teflon.	201
Figura 5.34 - Valor RMS para a força de atrito estimada, $S_{y_v y_v}$, e para o potencial de contato ao longo do ensaio sem remoção da camada de Teflon.	203

Figura 5.35 - Valor RMS para a força de atrito estimada, S_{y_v, y_v} , e para o potencial de contato ao longo do ensaio com remoção da camada de Teflon..... 203

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 Dados principais dos modelos de elementos finitos	62
Tabela 2.2 – Comparativo entre os resultados obtidos pelo modelo de elementos finitos e a teoria de Hertz.	69
Tabela 2.3 – Comparativo entre a teoria de Hertz e o modelo de elementos finitos (MEF) para o contato entre uma esfera e um plano.	86
Tabela 3.1 – Valores numéricos para os momentos estatísticos do sistema apresentado na Figura 3.7.....	108
Tabela 4.1 – Variação dos momentos estatísticos com o coeficiente de atrito cinemático.....	139
Tabela 4.2 – Valores das constantes utilizadas na análise da força de interação entre superfícies.	149
Tabela 4.3 - Erros aleatórios máximos dos estimadores para 40 médias.....	158
Tabela 4.4 – Momentos estatísticos para os ensaios com ruído de banda estreita.....	161
Tabela 4.5 - Erros dos estimadores para ensaios com excitação harmônica	167

Santos, M. B., 2005, "Identificação da Força de Atrito Através de Análise de Sinais Não Lineares em Ensaio Tribológicos", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

Quando as superfícies de dois corpos elásticos em contato apresentam movimento relativo, o sistema mecânico pode se tornar instável. Experimentos conduzidos com corpos elásticos em contato mostram que o sistema é um sistema auto excitado devido à característica não linear da força de atrito. Os objetivos principais desta tese são o estudo do campo de pressões e tensões, devido ao contato mecânico, e a estimativa da força de atrito com a análise de sinais não lineares aplicada aos sinais de vibração medidos em um tribômetro do tipo alternativo. O método de elementos finitos é apresentado detalhadamente como algoritmo de solução dos campos de pressões e tensões em corpos submetidos ao contato mecânico. Um modelo de duas entradas e uma saída é utilizado para representar um sistema dinâmico não linear. A saída total é composta da soma da parcela devida ao caminho linear da estrutura e da parcela devida ao caminho não linear. Esta última parcela possui um modelo não linear, representando a força de atrito, e outra função linear em série. Desde que a função transferência do caminho linear é identificada a partir da análise de sinais tradicional, a parcela não linear é obtida pelas relações globais entre a entrada e a saída do sistema global, sendo posteriormente correlacionada às condições superficiais das amostras. Os testes de validação são realizados em um tribômetro do tipo alternativo com contra corpo esférico e corpo prismático o qual possui um movimento harmônico imposto. A força de reação da estrutura ao atrito entre os corpos é medida simultaneamente por uma célula de carga piezométrica e por uma célula de carga piezoresistiva. As velocidades do corpo e do contra corpo são medidos por um acelerômetro e um vibrômetro laser respectivamente. Todos os sinais são digitalizados sobre a mesma base de tempo e transferidos a um micro computador. A força de atrito é estimada através da análise de sinais não linear aplicada aos sinais de vibração medidos. As variações da força de atrito estimada são então comparadas às condições superficiais das amostras mostrando a eficiência da metodologia proposta.

Palavras Chave: Análise de Sinais Não-Lineares, Contato Mecânico, Tribologia, Tribômetro, Força de Atrito.

Santos, M. B., 2005, "Non Linear Signal Analysis Applied to Friction Force Identification in Tribological Tests", PhD Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

Abstract

When the surfaces of two elastic bodies present relative motions under certain amount of contact pressure the mechanical system can be instable. Experiments conducted on elastic bodies under friction forces shown that the dynamical system is self-excited by the non-linear behavior of frictional forces. The main objectives of this thesis are the study of the pressure and stress fields, due to mechanical contact, and the estimation of friction using the vibrations signals measured on a reciprocating wear testing machine using non-linear signal analysis formulation. The finite element methodology is detailed presented to solve stress fields in contact problems. A two input and one output MISO model is proposed to represent the non-linear system dynamics. The global output is the sum of two outputs produced by one linear path associated in parallel with a non-linear path. This last path has a non-linear model that represents the friction force and another linear transfer function connected in series. Since the linear path is identified by traditional signal analysis, the non-linear function can be evaluated by the global input/output relationships, and can be correlated to wear conditions of the contact surfaces. Validation tests are conducted in a tribological system composed by a sphere in contact with a prismatic body witch has an imposed harmonic motion. The global output force is simultaneously measured by piezoresistive and piezoelectric load cells. The sphere and prismatic body vibrations are measured by accelerometers and by a laser Doppler vibrometer. All signals are digitalized with the same time base and the data is transferred to a microcomputer. The non-linear signal analysis technique uses this data to identify the friction force. The estimated friction force and the stress fields are compared to surfaces of bodies after tribological tests to show the efficiency of proposed methodology.

Keywords: Non-linear signal analysis, Contact Mechanics, Tribology, Reciprocating Tribometer, Friction Force.

Capítulo I

Introdução

Em diversos sistemas mecânicos pode-se encontrar simultaneamente a presença de fenômenos tribológicos e fenômenos relacionados a dinâmica dos elementos móveis destes sistemas. Como exemplos têm-se:

- Motores de combustão interna
- Compressores rotativos e alternativos
- Laminadores
- Mancais de rolamento e escorregamento
- Engrenagens

As pesquisas na área de tribologia estudam estes sistemas a fim de se determinar como a degradação das superfícies dos corpos em contato ocorre e para determinar sua evolução. Portanto são estudados como fatores relacionados à natureza dos materiais, as propriedades termo-físicas dos materiais, as propriedades mecânicas, as tensões decorrentes do contato e as condições de contato influem sobre os mecanismos e as taxas de desgaste dos materiais que compõem os corpos em contato mecânico.

As pesquisas na área de dinâmica de corpos rígidos e flexíveis por sua vez procuram explicar como as forças de interação entre os corpos em contato alteram seu movimento permitindo a obtenção de dados que conduzam ao correto dimensionamento destes equipamentos.

Ao se analisar tais problemas do ponto de vista da engenharia mecânica como um todo se tem que conhecer as forças de interação entre os elementos de máquinas em contato, como estas forças evoluem com o funcionamento da máquina e como estas forças alteram o funcionamento da máquina durante sua vida útil.

No entanto todas as abordagens relacionadas à dinâmica, a tribologia ou a engenharia mecânica, como ciências abrangentes, devem passar pelo cálculo dos campos de pressões, da força de atrito decorrente do contato e do campo tensões atuantes no contato entre dois elementos de máquina. Isto é, devem-se conhecer todas as forças atuantes no contato

mecânico, o trabalho realizado por estas forças e como este trabalho é transformado em calor, em deformações elásticas e plásticas dos corpos em contato e como este trabalho altera as condições superficiais dos corpos em contato com o tempo.

O primeiro modelo para as forças de interação entre corpos em contato foi proposto por Leonardo Da Vinci no século XV e posteriormente estudado por Amontons em 1699. Coulomb em 1785 reescreveu o modelo estudado por Da Vinci e Amontons postulando as definições de atrito estático e cinemático aceita até os dias atuais. Em 1866 Reynolds estudou o efeito de fluídos na interface dos corpos em contato complementando a teoria de Coulomb com a adição do conceito de atrito viscoso. (Pontes Junior, 2003)

Em 1881 Hertz apresenta um trabalho intitulado “On the contact of elastic solids” que tratava do contato não conforme de sólidos de revolução sem atrito. Posteriormente os conceitos inicialmente propostos por Hertz foram estendidos a situações mais genéricas de contato mecânico onde foram incluídos os efeitos de cargas tangenciais sobre as superfícies em contato. Tais desenvolvimentos foram fundamentados nas equações potenciais de Boussinesq que somente possuem solução para casos particulares de contato entre corpos elásticos. (Johnson, 1985)

Adicionalmente às dificuldades encontradas para o cálculo das forças que atuam sobre os corpos elásticos em contato, existem dificuldades para o equacionamento das alterações que estas forças provocam nas superfícies dos corpos em contato e como estas alterações modificam as forças decorrentes do contato em um processo iterativo. Tais dificuldades fazem com que as pesquisas na área de tribologia tenham resultados com validade restrita às condições muito próximas as quais foram realizadas as pesquisas. Em projetos de sistemas mecânicos as forças provenientes do contato entre corpos são aproximadas pela teoria de Coulomb, pela teoria de Hertz ou são soluções aproximadas das equações potenciais de Boussinesq. Para estes projetos tais forças são sempre consideradas invariantes com o uso do equipamento considerando-se que o desgaste é insignificante durante a vida útil do equipamento.

Hutchings (1992) e Willians (1994) sugerem que os estudos relacionados a tribologia devem ser caracterizados não só quais mecanismos de desgaste atuaram sobre a superfície dos corpos em contato. Tais ensaios devem ser capazes também de fornecer conhecimento básico de como tais mecanismos de desgaste atuam sobre os corpos para o desenvolvimento de materiais mais resistentes que serão aplicados ao projeto de máquinas capazes de manter suas condições de funcionamento por um tempo maior e com menor consumo de energia pela redução do desgaste e da força de atrito entre as peças móveis.

No entanto, os estudos tribológicos são complexos, seja devido às dificuldades no cálculo das forças de interação entre os corpos em contato, como já foi dito, ou ainda devido a

grande quantidade de fatores físicos que devem ser considerados durante os ensaios. Zum Gahr (1987) define que o desgaste e o atrito são correlacionados porém que tais fatores não são propriedades somente dos materiais e da geometria dos corpos, definindo desgaste e atrito como propriedades de um tribosistema. Isto é, Zum Gahr (1987) atribui ao conjunto dos corpos em contato e demais condições físicas no momento em que os corpos estão em contato o nome de tribosistema definindo assim que o atrito e o desgaste são propriedades deste tribosistema. Como tribosistema pode-se exemplificar os sistemas aos quais fazem parte os seguintes componentes mecânicos:

- Cilindro de laminação e a tira laminada
- Pistão e cilindro em motores e compressores alternativos
- Mancais hidrodinâmicos e de rolamento
- Engrenagens
- Embreagens e freios.

Devido a dificuldade e complexidade em se reproduzir exatamente um tribosistema ou ainda monitorar todas as variáveis físicas relacionadas ao tribosistema durante a operação de uma máquina real Zum Gahr (1987) e Hutchings (1992) sugerem que os tribosistemas sejam representados em ensaios de laboratório em condições controladas e que o desempenho dos materiais seja qualificado em relação aos mecanismos básicos de desgaste. Diversas são as configurações de ensaio utilizadas para que se reproduza de maneira adequada os mecanismos básicos de desgaste. Na Figura 1.1 são mostrados algumas configurações para ensaios tribológicos sugeridos por Hutchings (1992).

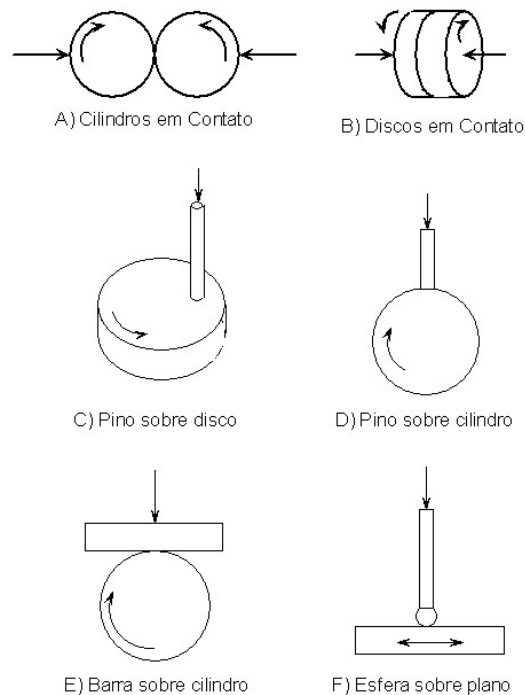


Figura 1.1 – Configurações normalmente empregadas em ensaios tribológicos.

Assim como nos tribosistemas reais nos ensaios de laboratório o desgaste e o atrito são fortemente influenciados pelas condições em que os fenômenos tribológicos ocorrem. Desta forma pode-se obter em diversas configurações de ensaio os mesmos mecanismos de desgaste encontrados em peças que formam tribosistemas em máquinas.

Willians (1994) sugere que um ponto de partida para o planejamento de um experimento que seja capaz de representar os mecanismos de desgaste deve passar pelo cálculo dos campos de tensões e pressões decorrentes do contato mecânico. Isto é, deve-se inicialmente aproximar os esforços encontrados no tribosistema que se deseja representar. Tal aproximação é feita utilizando-se as teorias desenvolvidas por Coulomb e Hertz além das teorias que foram derivadas destas duas.

Uma vez que o ensaio é capaz de aproximar os mecanismos de desgaste de um determinado tribosistema pode-se então utilizá-lo para comparar o desempenho de diversos tipos de materiais quando submetidos a este tribosistema. Em geral nestes ensaios são utilizadas como principais variáveis para qualificação do material a força de atrito e a taxa de desgaste. (Willians, 1994)

Apesar destas duas variáveis serem sempre encontradas como dados de comparação podem ser avaliadas características como topografia das superfícies antes e após o ensaio, aspectos morfológicos dos mecanismos de desgaste, presença de materiais estranhos a composição inicial das superfícies dos corpos, variação de propriedades mecânicas dos

materiais entre outros fatores que se julgarem necessários para a correta avaliação do tribosistema.

Dentre todas as grandezas enumeradas como passíveis de serem utilizadas para avaliação de um ensaio tribológico a força de atrito é aquela que apresenta maior dificuldade em ser obtida. Isto é, como esta força é a reação entre duas superfícies somente pode ser obtida indiretamente pois a colocação de sensores na interface dos corpos alteraria a grandeza a ser medida. Adicionalmente a esta dificuldade existe o fato da força de atrito ser uma força não linear que portanto não permite que sejam aplicadas as teorias de análise de sistemas lineares que são utilizadas no projeto da maioria das cadeias de instrumentação de sistemas mecânicos.

Nos ensaios tribológicos um sistema fixo em um de seus pontos à um dos corpos em contato e fixo em outro ponto a um referencial inercial por meio de uma célula de carga é normalmente utilizado para se medir a força de atrito. Uma das configurações possíveis para este sistema de instrumentação da força de atrito é aquela que emprega uma barra rotulada em um ponto intermediário as suas extremidade sendo uma extremidade fixa à um dos corpos em contato e a outra extremidade fixa a um referencial inercial por meio de uma célula de carga. Para este sistema pode-se obter uma relação unitária, uma amplificação ou uma redução entre a força de atrito e o valor percebido pela célula de carga, apesar de encontrarmos em geral uma relação unitária ou um ganho. Um diagrama esquemático é mostrado na Figura 1.2.

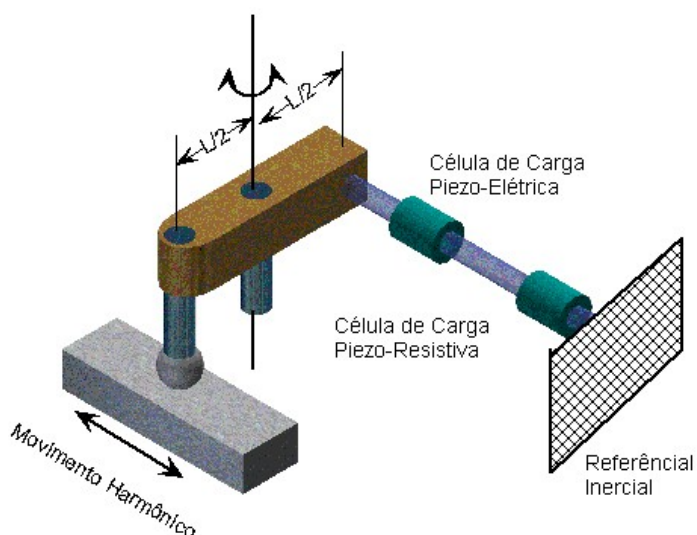


Figura 1.2 – Diagrama esquemático de um sistema normalmente utilizado para se medir atrito.

Para o sistema exemplificado na Figura 1.2 temos uma relação unitária entre o valor da força de atrito e o valor percebido pela célula de carga. Deve-se salientar no entanto que tal relação unitária é válida somente para uma força de atrito com valor invariante no tempo, para força de atrito com valores variantes com o tempo a relação entre a força de atrito e a força percebida pela célula de carga passa a depender da dinâmica do sistema de instrumentação. Deve-se considerar também a natureza não linear da força de atrito, isto é, mesmo toda a cadeia de instrumentação sendo linear a força medida será não linear e por consequência a relação entre a força de atrito e a força medida pela célula de carga.

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para a análise de sistemas mecânicos não lineares excitados por forças não lineares. É dada uma ênfase na identificação da força de atrito em ensaios tribológicos e na correlação da força de atrito identificada com a evolução do desgaste nas amostras ensaiadas.

1.2 Motivação do trabalho

Os produtos laminados à quente e à frio correspondem a aproximados 90% do peso total dos metais processados pelas usinas siderúrgicas. (Schey, 1983)

Para laminadores de produtos planos estima-se que o custo dos cilindros de laminação correspondam à 10% em média do custo total de uma tonelada de aço laminado. Deve-se salientar ainda que a venda de cilindros de laminação se dá por produtividade, isto é, a empresa que compra o cilindro está pagando por uma determinada performance deste cilindro, normalmente mensurada em milímetros de cilindro consumido por tonelada ou quilometragem de material produzido no laminador com o cilindro comprado. Portanto são comuns contratos comerciais em que a diferença de performance é ressarcida ao comprador ou ao vendedor do cilindro.

Desde que a performance comercial dos cilindros está intimamente ligada ao desgaste de sua superfície as empresas fabricantes de cilindros de laminação estão constantemente desenvolvendo novas ligas metálicas a fim de reduzir o desgaste dos cilindros aumentando o valor agregado ao seu produto.

Neste âmbito foi firmado em 1998 um projeto de cooperação científica entre a fabricante de cilindros de laminação Aços Villares S/A e a Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia. Neste projeto de pesquisa, financiado pela FINEP, era previsto a construção de uma bancada para ensaios e qualificação de materiais utilizados na fabricação de cilindros de laminação.

Tal bancada deveria ser capaz de representar em escala reduzida os fenômenos tribológicos encontrados nos cilindros em aplicações industriais. Adicionalmente através de

instrumentação adequada as grandezas físicas como força de atrito, temperatura superficial, força normal, vibrações mecânicas e velocidade relativa entre os corpos seriam monitoradas para controle do ensaio e posterior desenvolvimento de técnicas que permitissem avaliar o desgaste dos corpos de prova durante o ensaio e posteriormente dos cilindros de laminação em operação.

Com este intuito diversas configurações de bancadas foram estudadas baseando-se nos ensaios de tribosistemas normalmente utilizados, Figura 1.1, para o estudo de desgaste em outros equipamentos. Nesta abordagem inicial foi considerada principalmente a capacidade da bancada em reproduzir nos corpos de prova as tensões atuantes nos cilindros de laminação em operação, as condições de atrito e a cinemática do processo de laminação.

O primeiro esboço de um laminador que se tem registro foi feito por Leonardo Da Vinci no século XV e desde então diversas configurações vêm sendo utilizadas. No entanto todos os laminadores atuais preservam características fundamentais propostas por Da Vinci que é a aplicação de carga normal nos mancais de um cilindro, chamado cilindro de encosto, que transfere esta carga para outro cilindro, cilindro de trabalho, que por sua vez irá imprimir a forma final ao material laminado. (Milan, 2004)

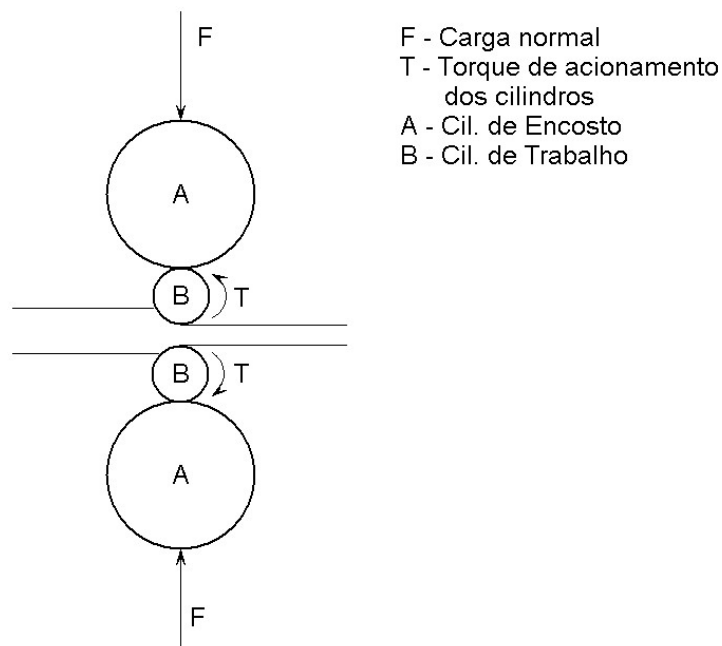


Figura 1.3 – Diagrama esquemático de um laminador em tandem.

No laminador apresentado na Figura 1.3 existem duas situações de contato mecânico envolvendo o cilindro de trabalho. Existe o contato entre o cilindro de trabalho e a tira e entre os cilindros de trabalho e encosto. O contato entre os cilindros pode ser representado por uma bancada em escala reduzida como a sugestão de ensaio de tribosistemas apresentada no item

Uma aproximação viável para representar as condições cinemáticas apresentadas na Figura 1.4 é a realização de ensaios na configuração apresentada no item A da Figura 1.1. Para cilindros com velocidades periféricas idênticas estar-se-ia representando a condição de laminação à quente e para cilindros com velocidades periféricas diferentes estar-se-ia representando a condição de laminação à frio como foi proposto por Johnson (1985).

Para o contato entre dois cilindros pode-se ainda aproximar o campo de tensões atuantes nos cilindros de ensaio ao campo de tensões encontrado nos cilindros de laminação real, conforme proposto por Johnson (1985) e apresentado por Santos, Léopore & de Mello (2001).

Portanto baseados nas condições descritas optou-se por projetar uma bancada para o ensaio de desgaste de cilindros de laminação como o diagrama esquemático da Figura 1.5. Nesta bancada as duas condições de contato encontradas na operação de laminação, contato entre cilindros e contato entre cilindro e tira, são representadas pelo contato entre o cilindro de encosto e o cilindro de trabalho e pelo cilindro de trabalho e o cilindro chapa respectivamente.

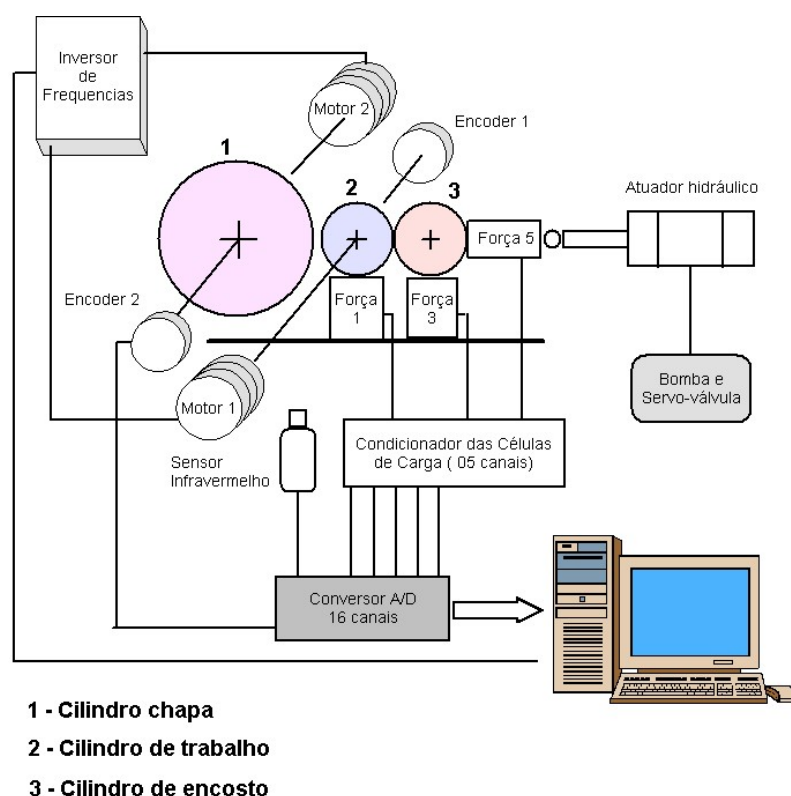


Figura 1.5 – Diagrama esquemático do tribômetro construído no projeto financiado pela FINEP.

No tribômetro construído as velocidades de rotação dos cilindros por consequência as velocidades periféricas destes são controladas por motores do tipo AC acionados por meio de

inversores de frequência. A força normal é obtida e controlada com o uso de uma célula de carga e um cilindro hidráulico acionado por uma bomba de cavidade progressiva. A força de atrito é medida por meio de células de carga piezoresistivas posicionadas sob os mancais do cilindro de trabalho e do cilindro de encosto. Deve-se notar que a célula de carga sob o cilindro de trabalho é sensível a força de atrito entre o cilindro de trabalho e o cilindro de encosto assim como a força de atrito entre o cilindro de trabalho e o cilindro chapa, porém, a célula de carga posicionada sobre o cilindro de encosto é sensível somente a força de atrito entre o cilindro de trabalho e o cilindro de encosto. Portanto para se obter a força de atrito entre o cilindro de trabalho e o cilindro chapa deve-se realizar a subtração do valor obtido pela célula de carga sob o cilindro de encosto daquele valor obtido pela célula de carga posicionada sob o cilindro de trabalho.

Após a construção do tribômetro de cilindros em contato verificou-se em ensaios iniciais de ajuste que tal bancada não seria adequada para se atingir os objetivos previstos no projeto de pesquisa. Principalmente no que se referia ao desenvolvimento de uma metodologia para avaliação da evolução do desgaste durante o ensaio através do monitoramento de sinais de vibração e da força de atrito.

Foram verificados nestes ensaios preliminares que os inversores de frequência induziam ruídos de fundo nos sensores maiores que as amplitudes da força de atrito calculada por elementos finitos e que a dinâmica do sistema atenuava por demasia as flutuações da força de atrito. Esta atenuação provinha de folgas nos mancais dos cilindros, grande inércia do sistema sobre as células de carga ou do atrito interno nos mancais dos cilindros. As amplitudes da força de atrito e de suas flutuações também se tornavam muitos menores que a força de desbalanceamento dos cilindros com a evolução do ensaio.

Como os mancais são posicionados sobre as células de carga e estas sobre guias lineares, configuração adotada para não se danificar os mancais e as células de carga durante a aplicação da carga normal, foram verificados problemas de alinhamento dos cilindros e a garantia da permanência deste alinhamento no decorrer do ensaio. Desde que o aparecimento do desalinhamento provoca momentos sobre as células de carga novamente tinha-se problemas para se medir a força de atrito.

Diante tais dificuldades verificou-se que o projeto da bancada deveria ser revisto para que os objetivos iniciais fossem atingidos principalmente o monitoramento da força de atrito para acompanhamento do desgaste. Verificou-se também através de um levantamento bibliográfico que os experimentos conduzidos em bancadas do tipo cilindro em contato cilindro não permitia uma boa aproximação para os fenômenos tribológicos encontrados nos cilindros de laminação reais.

Spuzic et al (1997) relata, que em seus experimentos com o contato entre dois cilindros, para a representação do tribosistema da laminação, os resultados obtidos apresentavam uma predominância do desgaste provocado por fadiga de contato além uma dispersão acentuada dos valores finais da taxa de desgaste. Em seus experimentos Spuzic et al (1997) conclui que somente através de um controle apurado das condições de velocidade, carga e temperatura e com a adição de um abrasivo como terceiro corpo no contato foi possível aproximar os mecanismos de desgaste de seus ensaios àqueles observados nos cilindros de laminação após uma campanha no laminador.

Zanória et al (2004) relata que observou deformações plásticas nas superfícies dos cilindros em ensaios de laboratório que não eram observadas nos cilindros de laminação reais ou nas rodas de trem, outro objeto de seus estudos.

Vergne et al (2001) utilizou a configuração pino sobre disco e a configuração de dois cilindros em contato para estudar o desgaste abrasivo e a oxidação da superfície dos cilindros na operação de laminação. O autor conclui por meio de análises de microscopia eletrônica de varredura e análise físico-química das superfícies antes e após os ensaios que a configuração pino sobre disco permitiu uma melhor aproximação dos mecanismos de desgaste e a formação de óxidos como encontrados nos cilindros de laminação à quente.

Kalin & Vizintin (2004) comentam sobre as vantagens do uso do contato esfera contra plano na simulação de fenômenos de desgaste em operações de laminação.

Milan (2004) publicou os resultados de sua pesquisa iniciada no ano de 2000. O autor estudou diversas condições de ensaios tribológicos para a reprodução dos mecanismos de desgaste em cilindros de laminação a quente. Através deste estudo Milan conclui que a melhor configuração para se obter os mesmos mecanismos de desgaste encontrados nos cilindros de laminação é a configuração de contato esfera contra plano com movimento imposto de escorregamento entre os corpos do tipo harmônico.

Na Figura 1.6 é apresentado um diagrama esquemático da cinemática do contato entre uma esfera e um plano. Pode-se notar que como o movimento é harmônico o sentido da velocidade relativa se altera aproximando-se da condição verificada na laminação e apresentada na Figura 1.4.

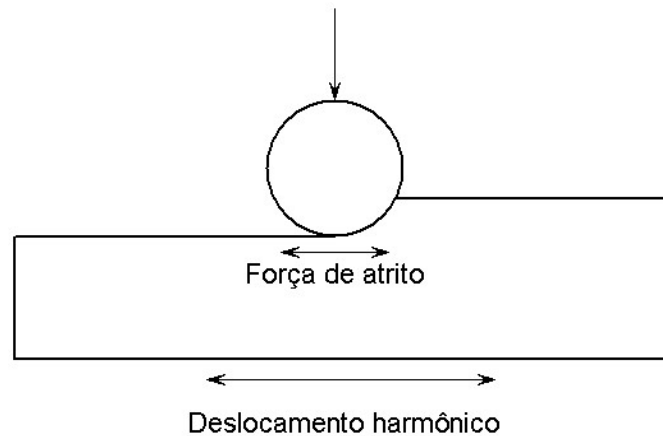


Figura 1.6 – Diagrama representativo da cinemática do contato entre uma esfera e um plano com movimento de escorregamento imposto do tipo harmônico.

Johnson (1985) relata que na teoria de Hertz o contato entre cilindros e o contato entre esferas produzem campos de pressões na interface com geometria elíptica. Johnson (1985) comenta que ambos os casos são os extremos da teoria de Hertz para o contato entre corpos elásticos de revolução, portanto geram campo de tensões semelhantes sobre os corpos em contato.

Baseando-se nas deficiências encontradas durante os testes iniciais do tribômetro de cilindros rotativos em contato, nos resultados obtidos em ensaios tribológicos obtidos pelos diversos autores citados e na análise cinemática do contato entre esfera e plano mostrado na Figura 1.6 decidiu-se pelo desenvolvimento da ferramenta de acompanhamento do desgaste através do monitoramento da força de atrito e dos sinais de vibração no tribômetro do tipo alternativo de marca PLINT disponível no Laboratório de Tribologia e Materiais da Faculdade de Engenharia Mecânica.

1.3 Apresentação da estrutura da tese

Conforme descrito anteriormente, os objetivos principais da tese são o desenvolvimento de uma metodologia que permita o projeto de ensaios tribológicos e de uma metodologia que permita através do monitoramento da força de atrito e dos sinais de vibração dos equipamentos acompanhar a evolução do desgaste durante o ensaio.

A estruturação da tese, como detalhado a seguir, consiste da fundamentação teórica por meio de equações analíticas e simulações numéricas da validade em se utilizar o contato entre esfera plano na representação do contato entre cilindros. Posteriormente a esta fundamentação é apresentada a metodologia de análise de sinais não lineares a ser aplicada

na identificação da força de atrito em ensaios tribológicos, sendo que para aplicação desta técnica são utilizados conceitos desenvolvidos por Coulomb e Hertz para a mecânica do contato. Basenado-se na teoria de análise de sinais não lineares, na mecânica do contato e na dinâmica de sistemas é apresentada uma metodologia para a formulação do problema de identificação de forças não lineares atuantes em sistemas lineares. Finalmente a metodologia desenvolvida para a identificação da força de atrito é aplicada a ensaios tribológicos controlados, o comportamento da força de atrito estimada é então comparada aos fenômenos tribológicos observados, por meio de observações das superfícies dos corpos e do campo de tensões atuante nos corpos calculado para as condições do ensaio.

No capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica para problemas relacionados a mecânica do contato. São mostrados os sistemas de referenciais utilizados, a formulação das equações potências de Boussisneq, casos especiais em que se obtêm soluções analíticas das equações potenciais e o desenvolvimento da teoria de Hertz.

Adicionalmente neste capítulo é apresentado o método de integração numérica das equações potenciais por meio de modelos de elementos finitos. São descritas as vantagens e desvantagens dos três tipos de formulações normalmente utilizadas para representar o campo de pressão entre os corpos em contato. Os parâmetros de ajuste dos algoritmos de integração são descritos e quando possível é apresentada uma metodologia para a correta escolha de seus valores. A convergência e a precisão do método são avaliadas comparando-se os resultados obtidos com os modelos de elementos finitos com os resultados obtidos para as mesmas condições de contato na teoria de Hertz.

Através de modelos de elementos finitos são estudados casos de contato mecânico entre cilindros de comprimentos diferentes. Adicionalmente é proposta uma abordagem para a solução do problema térmico do contato mecânico entre cilindros.

É estudado também o contato entre uma esfera e um plano. Ao plano é imposto um deslocamento como nos ensaio de desgaste no tribômetro PLINT. São avaliadas para este caso as alterações nos campos de pressão e tensão oriundos do contato com a presença do deslocamento imposto.

No capítulo 3 é apresentada a formulação proposta por Bendat (1992) para a análise de sinais aplicada a sistemas não lineares. São apresentados conceitos de sistemas não lineares sem o com memória temporal. Para sistemas não lineares sem memória temporal é demonstrado o método de identificação destes sistemas através das funções densidade probabilidade da entrada e da saída, tal demonstração se dá por meio de simulação numérica de um sistema não linear.

Através da formulação de um sistema de múltiplas entradas e uma saída, com representação direta e inversa, são demonstradas as soluções de problemas envolvendo

sistemas não lineares com a metodologia proposta por Bendat (1992). Adicionalmente é apresentada uma formulação para identificação de forças não lineares atuantes em sistemas lineares.

No capítulo 4 é apresentada uma formulação para a representação da força de atrito. São abordados os aspectos não lineares desta força através da teoria desenvolvida para sistemas não lineares sem memória. Posteriormente uma metodologia para a identificação da força de atrito atuando em sistemas lineares é desenvolvida e validada por meio de um ensaio experimental.

No capítulo 5 a metodologia desenvolvida para identificação da força de atrito é aplicada no acompanhamento do desgaste em ensaios do tipo esfera contra plano com movimento de deslizamento harmônico. A instrumentação utilizada no tribômetro PLINT é discutida em vistas à correlação das grandezas medidas com os parâmetros utilizados no modelo para identificação da força de atrito proposto no capítulo 4.

Os ensaios de desgaste são conduzidos em amostras de alumínio anodizado e alumínio recoberto com Teflon. As esferas utilizadas são fabricadas de aço AISI 52100. Estas amostras foram escolhidas afim de se avaliar a capacidade do método proposto em se monitorar o desgaste de recobrimentos duros em substratos macios e na condição de lubrificação sólida.

Os ensaios foram conduzidos com tempos de duração diferentes. Com esta metodologia foi possível interromper os ensaios antes de os fenômenos tribológicos acontecerem. Optou-se por fazer desta maneira desde que a parada do ensaio para análise das amostras no microscópio eletrônico de varredura com posterior continuação do ensaio na mesma posição e nas mesmas condições tribológicas em que foi interrompido é impossível.

A força de atrito estimada por meio da metodologia proposta ao longo de todo o ensaio é comparada com a análise da superfície das amostras no microscópio eletrônico de varredura permitindo a correlação entre as variações da força de atrito com os fenômenos tribológicos observados.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para o projeto de tribômetros alternativos que permitam ensaios com maior representatividade de tribosistemas reais mantendo a possibilidade de se monitorar as grandezas físicas envolvidas no ensaio durante toda sua duração.

Capítulo II

Mecânica do Contato : Fundamentos Teóricos e Simulação Numérica

A tribologia é definida como o ramo da ciência e da tecnologia que estuda a interação entre duas superfícies em movimento relativo (Oxford, 2002). De tal forma que no estudo da tribologia, o campo de pressões atuantes entre duas superfícies em contato e o campo de tensões decorrente são um dos principais fatores do comportamento mecânico dos corpos em contato.

O estudo do campo de pressões atuantes sobre duas superfícies em contato adicionado ao estudo do campo de tensões atuantes nos corpos foi inicialmente desenvolvido por Hertz em 1882. Este estudo foi dividido então em dois grupos fundamentais : Contato conforme e contato não conforme.

Contato conforme é definido como o contato entre duas superfícies que na ausência de força externa, por consequência ausência de deformação das superfícies, se dá em uma área diferente de zero. O contato não conforme é aquele em que inicialmente o contato entre as duas superfícies se dá em uma linha ou em um ponto.

Para corpos em contato não conforme é observado que a área de contato possui dimensões muito menores que as dimensões principais dos corpos em contato. Para estes casos o campo de tensões desenvolvido devido ao contato é pouco influenciado pelas dimensões dos corpos fora da área de contato. (Johnson, 1985)

2.1 Sistema de Coordenadas

Para o estudo da mecânica do contato será utilizado o sistema de coordenadas mostrado na Figura 2.1. Tal sistema de coordenadas pode ser estendido a quase todos os problemas de contato não conforme encontrados na engenharia .

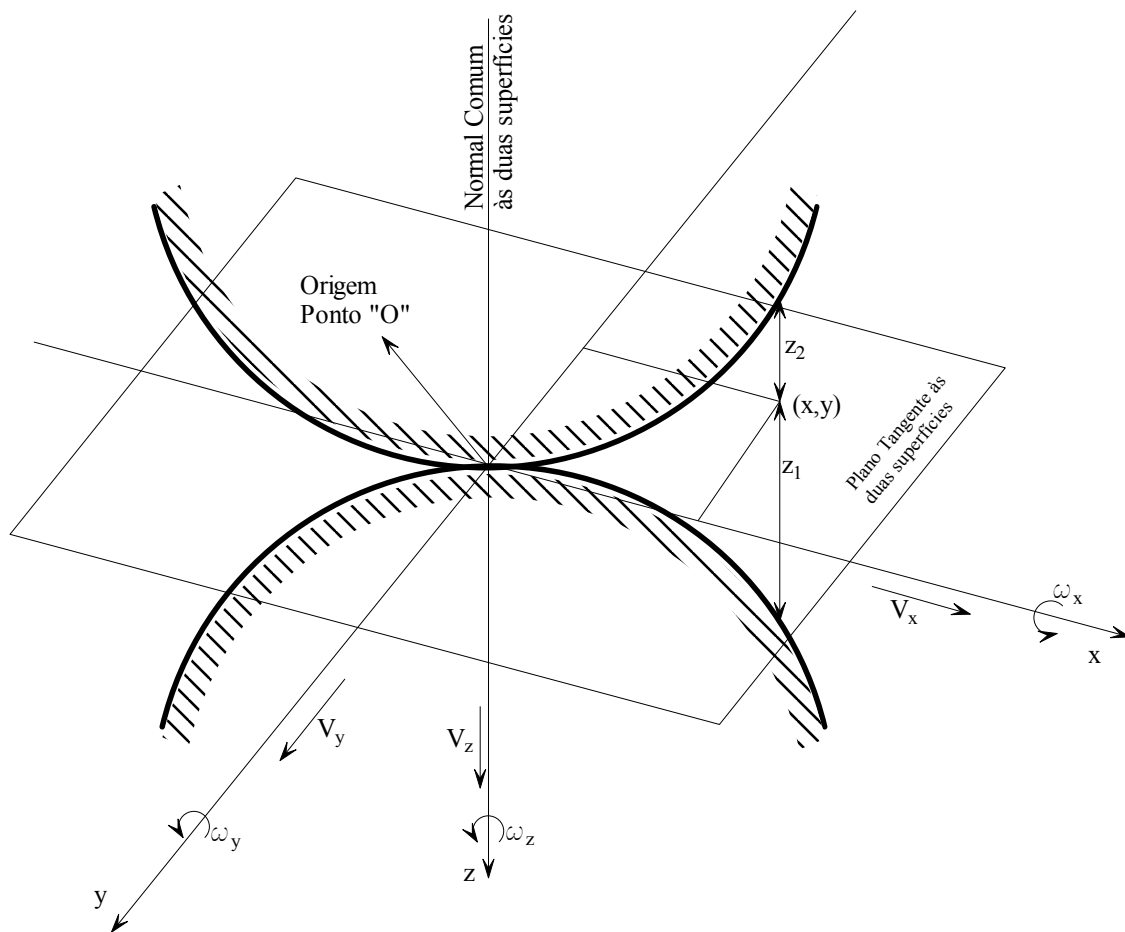


Figura 2.1 – Sistema de coordenadas para dois corpos em contato mecânico não conforme.

Na Figura 2.1 o eixo z é convencionado como tendo a direção da linha mutuamente perpendicular as duas superfícies em contato e tem sua origem no ponto de contato inicial das superfícies quando nenhuma força externa é aplicada. Os demais eixos ortogonais localizam-se sobre o plano tangente às duas superfícies no ponto de contato, ou em um plano paralelo ao plano tangente, e seus sentidos são determinados de forma a facilitar a solução do problema.

A geometria dos corpos e conseqüentemente o perfil de suas superfícies são definidos utilizando-se o sistema de coordenadas da Figura 2.1 através de uma função que define a distância de um ponto na superfície do corpo até seu ponto correspondente no plano tangente às superfícies como na equação (2.1), onde o termo h é definido como a distância entre os pontos correspondentes nas superfícies.

$$\begin{aligned}
 z_1 &= f_1(x, y) \\
 z_2 &= f_2(x, y) \\
 h &= z_1 - z_2
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

No mesmo sistema de coordenadas da Figura 2.1 são definidos ainda os movimentos dos corpos, as forças e os momentos de interação entre os corpos. A simbologia adotada determina que as letras maiúsculas são grandezas cinemáticas tomadas em relação a um referencial inercial e as letras minúsculas grandezas cinemáticas em relação ao referencial da Figura 2.1. Desta forma obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{v}_1 &= \vec{V}_1 - \vec{V}_o \\
 \vec{v}_2 &= \vec{V}_2 - \vec{V}_o
 \end{aligned} \right\} \text{Velocidades lineares}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{\omega}_1 &= \vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_o \\
 \vec{\omega}_2 &= \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_o
 \end{aligned} \right\} \text{Velocidades angulares}$$
(2.2)

Para o caso de superfícies contínuas, onde não há separação entre elas, as componentes das velocidades lineares na direção z são todas idênticas conforme descrito na equação (2.3).

$$\begin{aligned}
 V_{1z} &= V_{2z} = V_{oz} \\
 v_{1z} &= v_{2z} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Os movimentos relativos entre os corpos são classificados como escorregamento, rolamento e giro. O movimento de escorregamento é definido quando existe diferença de velocidades lineares entre os corpos segundo os eixos x ou y da Figura 2.1, o movimento de rolamento quando existe diferença nas velocidades angulares nos eixos x ou y e o giro quando existe diferença nas velocidades angulares dos corpos no eixo z. Tais relações são escritas na equação (2.4).

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \Delta v_x &= v_{1x} - v_{2x} \\ \Delta v_y &= v_{1y} - v_{2y} \end{aligned} \right\} \text{velocidades de escorregamento} \\
 \left. \begin{aligned} \Delta \omega_x &= \omega_{1x} - \omega_{2x} \\ \Delta \omega_y &= \omega_{1y} - \omega_{2y} \end{aligned} \right\} \text{velocidades de rolamento} \\
 \Delta \omega_z &= \omega_{1z} - \omega_{2z} \left. \vphantom{\Delta \omega_x} \right\} \text{velocidade de giro}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

O movimento de giro em geral é encontrado nas esferas de rolamentos, porém, nos casos dos ensaios tribológicos estudados este movimento não existe e deve ser evitado. Johnson (1985) sugere ainda que, na grande maioria dos casos de problemas relacionados à mecânica do contato, os efeitos do movimento de giro podem ser negligenciados quando comparado aos efeitos dos demais movimentos, ou ainda, o sistema de coordenadas cartesiano pode ser substituído por um outro sistema de coordenadas simplificando as equações e minimizando os efeitos desta classe de movimentos.

No mesmo sistema de coordenadas da Figura 2.1 através do qual se escreveu as equações cinemáticas para o contato mecânico pode-se escrever as equações para os esforços de interação entre dois corpos. A Figura 2.2 mostra os vetores de força e momentos presentes no contato não conforme entre dois corpos, onde destaca-se a representação dos esforços atuantes sobre uma área infinitesimal de tal forma que a integral de superfície sobre toda área de contato é capaz de determinar os valores globais dos vetores indicados com letra maiúscula.

As forças tangências que atuam sobre as superfícies na área de contato respeitam a lei de Coulomb do atrito e são escritas conforme a equação (2.5). O termo μ representa o coeficiente de atrito cinemático. (Johnson, 1985)

$$\begin{aligned}
 q_x &= \frac{\Delta v_x}{|\Delta v|} \mu p \\
 q_y &= \frac{\Delta v_y}{|\Delta v|} \mu p
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Para valores de velocidade relativa nula no eixo x ou no eixo y o atrito deixa de ser cinemático e passa a ser estático de tal forma que a equação (2.5) continua tendo validade quando se substitui o valor do coeficiente de atrito cinemático pelo estático. Tal fato é verdadeiro devido ao limite da divisão tender a um quando a velocidade tende a zero.

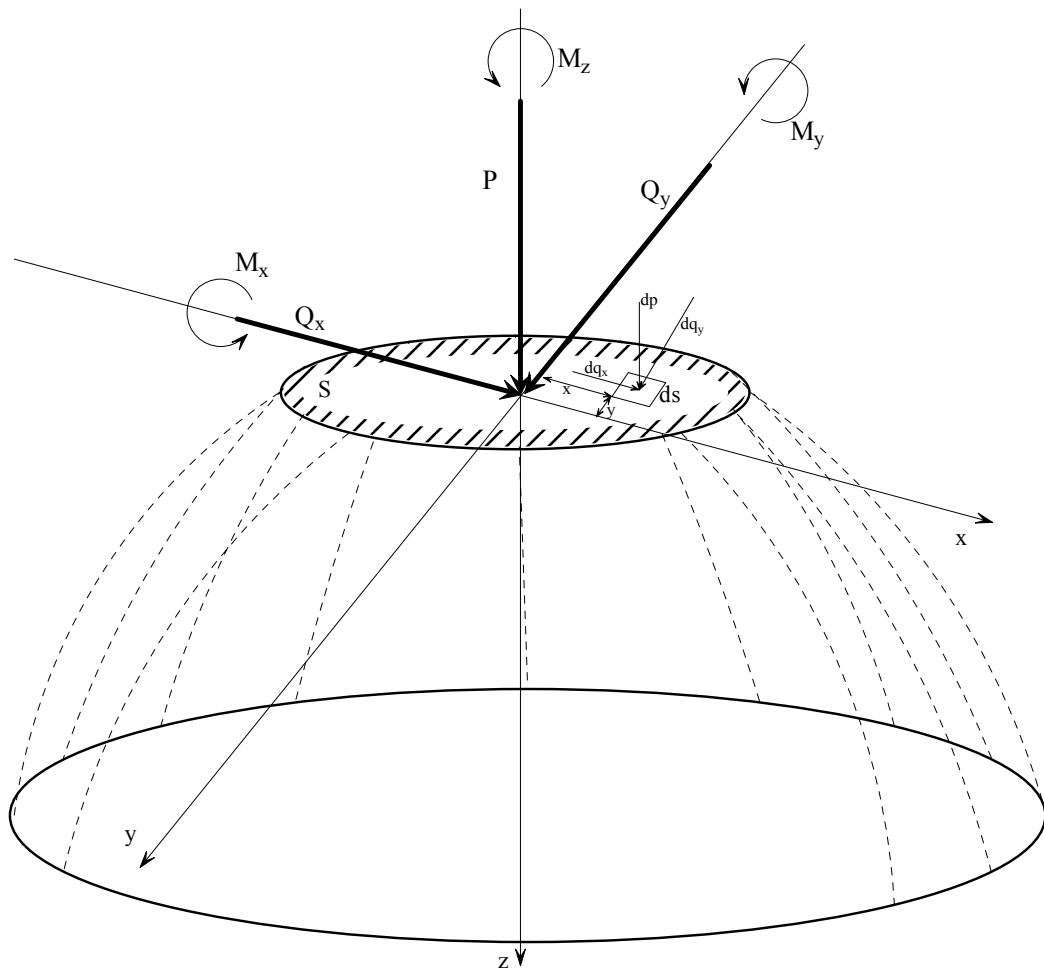


Figura 2.2 – Definição dos esforços presentes entre dois corpos em contato.

2.1.1 Sistemas de coordenadas para representação do contato na laminação de produtos planos.

Neste trabalho duas situações de contato mecânico não conforme encontradas nos ensaios tribológicos para simulação de desgaste em laminadores de produtos planos são estudadas numericamente. Para o contato entre cilindros o referencial adotado é aquele representado na Figura 2.3 e para o contato entre uma esfera e um plano o referencial é o representado na Figura 2.4.

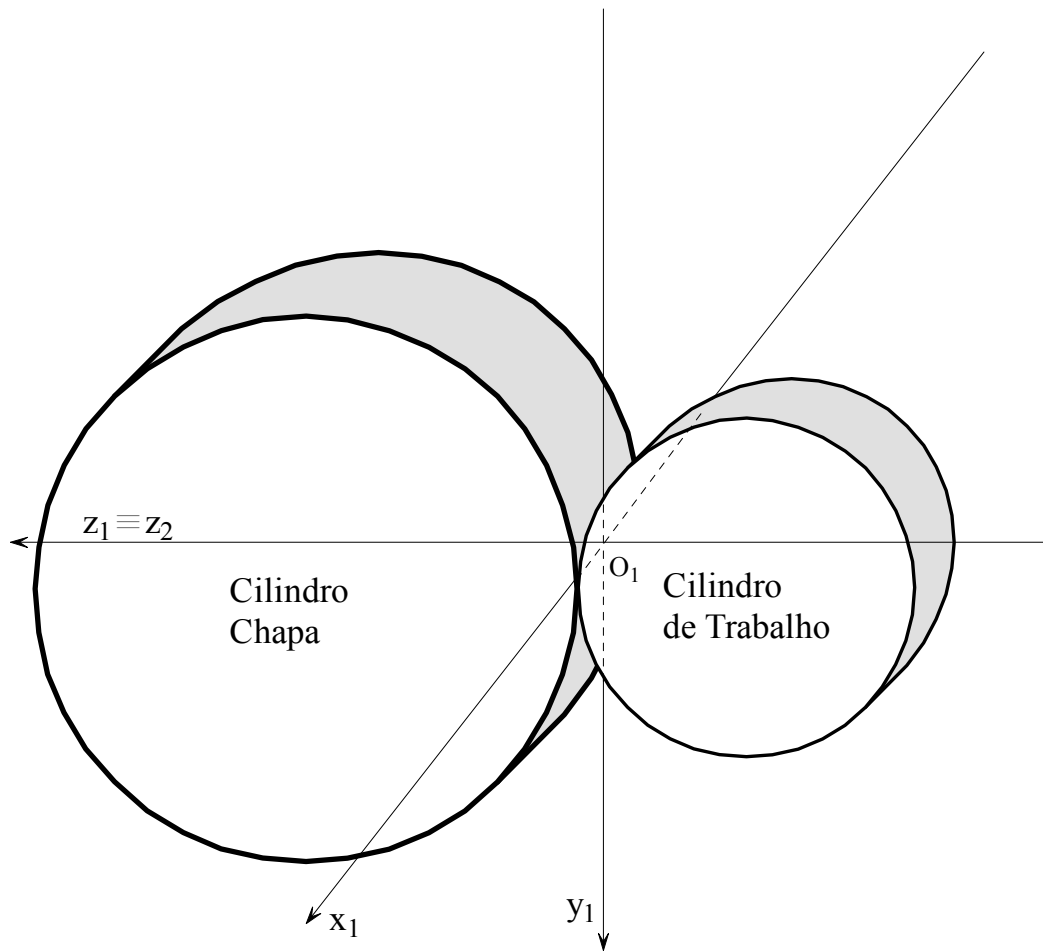


Figura 2.3 – Sistema de coordenadas para o contato entre dois cilindros.

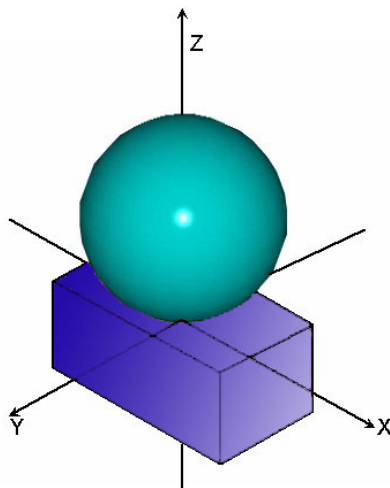


Figura 2.4 – Sistema de coordenadas para o contato entre uma esfera e um plano.

Para o contato entre dois cilindros pode-se, através do referencial mostrado na Figura 2.3, derivar as condições cinemáticas e os esforços no contato entre as duas superfícies como

na equação (2.6). Deve-se notar que os cilindros não possuem movimento de translação de seus eixos e possuem apenas movimento de rotação.

$$\begin{aligned}
 \Delta v_x &= 0 & P &= \int_S p dS & M_x &= \int_S p y dS \\
 \Delta v_y &= v_{1y} - v_{2y} & Q_x &= \int_S q_x dS & M_y &= \int_S p x dS \\
 \Delta \omega_x &= 0 & Q_y &= \int_S q_y dS & M_z &= \int_S (y q_x + x q_y) dS \\
 \Delta \omega_y &= 0 & & & & \\
 \Delta \omega_z &= 0 & & & &
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

O mesmo desenvolvimento é feito para o contato entre a esfera e o plano onde novamente são feitas restrições cinemáticas para compatibilizar as equações com os ensaios experimentais. As relações cinemáticas impostas restringem o rolamento e o giro da esfera e sua translação ou a do plano ao longo do eixo y . As relações cinemáticas e as relações que permitem o cálculo dos esforços provenientes do contato mecânico são apresentadas na equação (2.7).

$$\begin{aligned}
 \Delta v_x &= v_{1x} - v_{2x} & P &= \int_S p dS & M_x &= \int_S p y dS \\
 \Delta v_y &= 0 & Q_x &= \int_S q_x dS & M_y &= \int_S p x dS \\
 \Delta \omega_x &= 0 & Q_y &= \int_S q_y dS & M_z &= \int_S (y q_x + x q_y) dS \\
 \Delta \omega_y &= 0 & & & & \\
 \Delta \omega_z &= 0 & & & &
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2 Distribuição de tensão sobre um plano semi-infinito

Corpos elásticos em contato não conforme, cujas deformações são pequenas comparadas às dimensões dos corpos, podem ser tratados pela teoria da elasticidade desenvolvida para um plano semi-infinito. Tal hipótese acarreta que as tensões são concentradas na área de contato e que não sofrem influência da geometria dos corpos fora da região de contato. (Johnson, 1985)

Neste âmbito são desenvolvidas as equações para um carregamento linear genérico e um carregamento sobre uma área elíptica. Tais carregamentos são interessantes na formulação do problema de contato entre dois cilindros, pois, o primeiro pode ser utilizado como uma aproximação para cilindros longos e de mesmo comprimento, onde o comprimento dos cilindros é muito maior que a largura da região de contato. O segundo tipo de carregamento derivado da teoria de Hertz tem aplicação em cilindros de comprimentos

diferentes, sendo esta uma aproximação que desconsidera as deformações da borda do cilindro mais curto. (Johnson, 1985)

No caso de cilindros com comprimentos diferentes a solução do campo de tensões no contato somente pode ser obtida através de modelos numéricos, como o método de elementos finitos. Porém, os campos de pressão aplicados a uma área elíptica permitem validar o resultado obtido pelo modelo através da verificação dos valores das tensões fora da região de interferência das bordas. (Johnson, 1985)

O problema é formulado considerando-se as tensões e as deformações presentes em um plano semi-infinito com fronteira definida em $Z=0$, sob uma carga aplicada sobre uma região finita S , sendo que fora desta região as cargas são nulas. A formulação prediz que distante da região de contato as tensões tendem a zero. O carregamento considerado nesta formulação é função das coordenadas x e y , definidas conforme a simbologia a seguir :

- Carga Normal: $p(x, y)$

- Carga tangencial: $q_x(x, y)$

- Carga tangencial: $q_y(x, y)$

A principal formulação para determinar os valores das tensões atuantes sobre o sólido semi-infinito é dada pelas equações potências de Broussinesq (1885). Na Figura 2.5 são apresentadas as variáveis do problema de potencial de Broussinesq em um sistemas de coordenadas compatível com aquele apresentado para o contato não conforme.

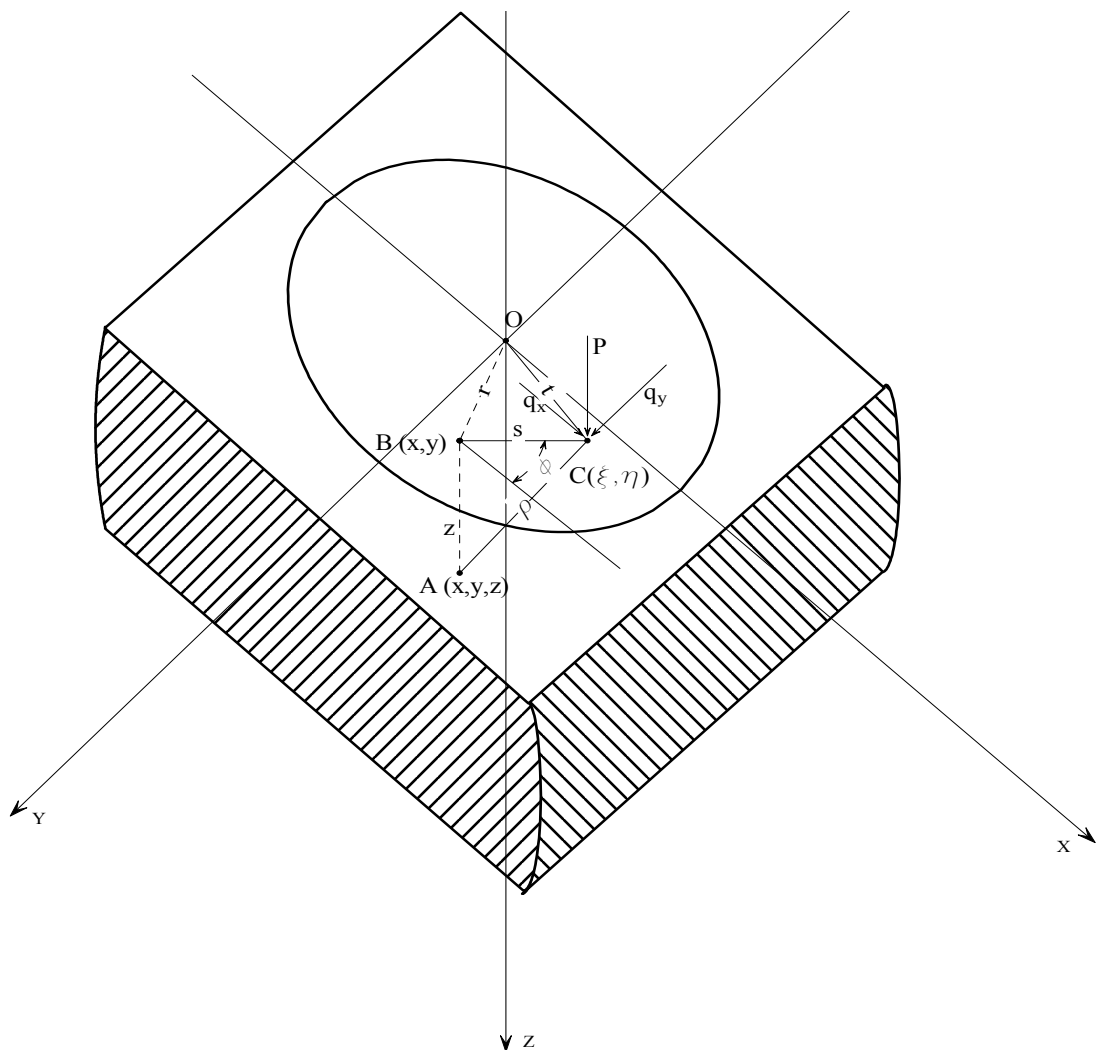


Figura 2.5 – Sistemas de coordenadas e variáveis para as funções potenciais de Broussinesq.

O ponto C é um ponto qualquer no interior da superfície onde se aplica a carga, e o ponto A é um ponto genérico posicionado no interior do sólido semi-infinito.

As funções potenciais de Broussinesq são então descritas pela equação (2.8) para o sistema de coordenadas mostradas na Figura 2.5.

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\partial F_1}{\partial z} = \iint_S q_x(\xi, n) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \\
 G &= \frac{\partial G_1}{\partial z} = \iint_S q_y(\xi, n) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \\
 H &= \frac{\partial H_1}{\partial z} = \iint_S p(\xi, n) \ln(\rho + z) d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \iint_S q_x(\xi, n)(z \ln(\rho + z) - \rho) d\xi d\eta \\
 G_1 &= \iint_S q_y(\xi, n)(z \ln(\rho + z) - \rho) d\xi d\eta \\
 H_1 &= \iint_S p(\xi, n)(z \ln(\rho + z) - \rho) d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

com os gradientes das funções F_1 , G_1 e H_1 em relação às posições espaciais definidos por:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \\
 \psi &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Love (1952) sugere que os deslocamentos de um ponto próximo à região de carregamento pode ser determinado em relação a um ponto distante desta região ($\rho \rightarrow \infty$) onde pode-se considerar que os deslocamentos são nulos, resultando:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \\
 u_y &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \\
 u_z &= \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{\partial H}{\partial z} + (1 - 2\nu)\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Johnson(1985) sugere que os deslocamentos diminuem com o aumento da variável ρ . Isto pode ser verificado matematicamente ou através da análise física do problema. Isto é, ao se afastar do ponto de aplicação de carga as deformações no corpo diminuem e por consequência o deslocamento do ponto em análise também diminui. Utilizando a lei de Hooke, Johnson (1985) , sugere que o campo de tensões pode ser calculado a partir de:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
\sigma_y &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
\sigma_z &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\
\tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Nas equações acima conhecendo-se as cargas a priori pode-se determinar todo o campo de tensões e deformações. No entanto, diversos casos de aplicações simples não possuem uma solução analítica definida, devido à complexidade das equações potenciais de Broussinesq.

Diversos autores propuseram abordagens e metodologias de cálculo adequadas ao tratamento das equações potenciais. Tais técnicas recorrem a diferentes tipos de sistemas de coordenadas, como Lur'e (1964) que utiliza um sistema de coordenadas elíptico ou ainda Rostovtzev (1953) que propõe o uso de funções complexas de tensão.

Neste trabalho utiliza-se a formulação proposta por Johnson (1985) que utiliza o princípio da superposição de efeitos para a solução dos problemas onde são envolvidos carregamentos complexos. Tal metodologia utiliza uma combinação de diversas soluções, obtidas para o caso de um carregamento pontual, como via de cálculo para a solução dos demais carregamentos.

2.2.2 Força Normal Concentrada

Para este tipo de carregamento considera-se que a área S , onde atua a força, tende a zero. Desta forma têm-se :

$$\begin{aligned}
\rho &= (x^2 + y^2 + z^2) \\
\iint_S p(\xi, \eta) d\xi d\eta &= P
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Pode-se notar que para este carregamento as funções $F=F_1=G=G_1=0$, pois a força é puramente normal. Faz-se ainda a hipótese de que a força de atrito que atua sobre uma área S também é nula. Desta forma, as equações para ψ e ψ_1 , podem ser escritas na forma :

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{P}{\rho} \\ \psi_1 &= P \ln(\rho + z)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.11), resulta:

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{P}{4\pi G} \left\{ \frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right\} \\ u_y &= \frac{P}{4\pi G} \left\{ \frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right\} \\ u_z &= \frac{P}{4\pi G} \left\{ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right\}\end{aligned}\tag{2.15}$$

Substituindo as equações (2.14) e (2.15) na equação (2.12) tem-se o campo de tensões dado por :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right\} - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right] \\ \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right\} - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right] \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{r^2} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right\} - \frac{3xyz}{\rho^5} \right] \\ \tau_{xz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5} \\ \tau_{yz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5}\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.17)$$

Timoshenko e Goodier (1951) sugerem que para representar as tensões no sistema de coordenadas polares basta fazer as seguintes substituições na equação (2.16):

- $x = r$
- $y = 0$
- $\sigma_x = \sigma_r$
- $\sigma_y = \sigma_\phi$

Desta forma obtêm-se o campo de tensões expresso em coordenadas polares conforme representado a seguir :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} \right) - \frac{3zr^2}{\rho^5} \right\} \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} - \frac{z}{\rho^3} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{\rho^5} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pode-se utilizar a equação (2.18) para determinar o campo de tensões provocado por um carga normal distribuída sobre a área S conforme mostrado na Figura 2.5. O procedimento consiste em uma mudança de variável de tal forma que a origem do sistema seja sempre um ponto qualquer sobre a área S. Desta forma as tensões atuantes podem ser obtidas da integração da equação (2.16), isto é, as tensões resultantes de um carregamento distribuído são resultantes da superposição de n carregamentos concentrados.

2.2.3 Carregamento tangencial concentrado

Analogamente ao carregamento normal pode-se desenvolver a formulação para o campo de tensões atuantes em um sólido semi-infinito com um carregamento tangencial

concentrado. Para este caso considera-se que existe carregamento apenas em um dos eixos ortogonais ao eixo z. A solução para o outro eixo é obtida fazendo-se uma rotação de 90° no sistema de coordenadas. Para carregamentos tangenciais nos dois eixos simultaneamente o procedimento é encontrar a solução para cada eixo isoladamente e posteriormente obter a solução total utilizando a superposição de efeitos.

A título de ilustração serão desenvolvidas as equações para uma força tangencial concentrada apenas na direção x, conforme o sistema de referenciais mostrados na Figura 2.5. Para tal configuração tem-se que $G_1=H_1=G=H=0$ e desta maneira obtêm-se as seguintes formulações para as equações de Broussinesq :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \psi &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z}\end{aligned}\tag{2.19}$$

Nesta formulação os termos cruzados das derivadas não são nulos, como no caso para o carregamento normal. As equações para os deslocamentos no interior do sólido semi-infinito são escritas da seguinte forma :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{Q_x}{4\pi G} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{x^2}{\rho^3} + (1-2\nu) \left\{ \frac{1}{\rho+z} - \frac{x^2}{\rho(\rho+z)^2} \right\} \right] \\ u_y &= \frac{Q_x}{4\pi G} \left[\frac{xy}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{xy}{\rho(\rho+z)^2} \right] \\ u_z &= \frac{Q_x}{4\pi G} \left[\frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right]\end{aligned}\tag{2.20}$$

com a variável ρ definida como na equação (2.13) desenvolvida para o carregamento normal. Utilizando a lei de Hooke, o campo de tensões normais é definido como:

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi\sigma_x}{Q_x} &= -\frac{3x^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left\{ \frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right\} \\
\frac{2\pi\sigma_y}{Q_x} &= -\frac{3xy^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left\{ \frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right\} \\
\frac{2\pi\sigma_z}{Q_x} &= -\frac{3xz^2}{\rho^5} \\
\frac{2\pi}{Q_x} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= \frac{-2(1+\nu)x}{\rho^3}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

e o campo de tensões cisalhantes como:

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi\tau_{xy}}{Q_x} &= -\frac{3yx^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left\{ -\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{yx^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2yx^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right\} \\
\frac{2\pi\tau_{yz}}{Q_x} &= -\frac{3xyz}{\rho^5} \\
\frac{2\pi\tau_{zx}}{Q_x} &= -\frac{3zx^2}{\rho^5}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por analogia, o princípio da superposição, explicado no item 2.2.2 para a resolução do carregamento normal distribuído a partir de um carregamento concentrado sobre uma área infinitesimal pode ser utilizado para o cálculo de um carregamento distribuído tangencial.

2.2.4 Carregamento Normal sobre uma Área Elíptica

Segundo a teoria de Hertz dois corpos não conformes em contato apresentam uma região de contato que possui a forma elíptica, de tal maneira que a solução para os campos de tensões e deformações de um sólido semi-infinito sobre a ação de uma pressão distribuída em uma área elíptica possui grande importância no estudo da mecânica do contato. (Johnson, 1985)

A formulação para carregamentos sobre uma área elíptica tem caráter geral, e para cada perfil de pressão aplicada sobre a área existe uma solução particular. Para um perfil de carregamento genérico temos que a pressão pode ser escrita da seguinte forma (Johnson, 1985) :

$$p(x, y) = p_0 \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right)^n \quad (2.23)$$

a qual é aplicada sobre a região limitada pela equação seguinte :

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad (2.24)$$

As equações potências de Broussinesq são escritas para o carregamento definido na equação (2.23) como:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \iint_s \left\{ 1 - \left(\frac{\xi}{a} \right)^2 - \left(\frac{\eta}{b} \right)^2 \right\}^n \rho^{-1} d\xi d\eta \\ \rho^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Baseando-se na equação (2.25) os deslocamentos na superfície do sólido semi-infinito são definidos como:

$$u_z(x, y) = \frac{1-\nu}{2\pi G} (\psi)_{z=0} \quad (2.26)$$

Para um ponto genérico no sólido semi-infinito Routh (1908) propõe a seguinte aproximação para a função potencial de Broussinesq :

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} p_0 ab \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+w} - \frac{y^2}{b^2+w} - \frac{z^2}{w} \right)^{n+\frac{1}{2}} \dots \\ &\dots \frac{dw}{\left\{ (a^2+w)(b^2+w)w \right\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde a letra Γ representa a função gama, e o símbolo λ_1 a raiz positiva da equação (2.28):

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1 \quad (2.28)$$

As raízes da equação (2.28) têm o significado geométrico de ser os pontos confocais da elipse em relação ao ponto no qual se quer determinar os valores dos deslocamentos.

Diversas soluções particulares são definidas para a equação (2.27) com a variação do expoente n . Para o caso de $n = -1/2$ o carregamento produz um deslocamento uniforme sobre superfície em que se aplica a carga, para $n = 1/2$ o carregamento provoca deslocamentos conforme a teoria de Hertz, para valores diferentes de n pode-se representar, por exemplo, o efeito de um punção sobre um sólido semi-infinito sem atrito. (Johnson, 1985)

Neste trabalho será apresentada apenas a solução para o carregamento que produz os mesmos resultados previstos pela teoria de Hertz, desde que o contato entre dois cilindros é um dos casos para o qual a teoria de Hertz é válida.

Para o caso do carregamento ocorrer sobre uma região elíptica e produzir um deslocamento de acordo com a teoria de Hertz, temos que o campo de pressão apresenta a seguinte forma :

$$p(x, y) = p_0 \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.29)$$

Substituindo a equação (2.29) nas equações potenciais de Broussinesq tem-se que :

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \frac{1}{2} \pi p_0 ab \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} - \frac{z^2}{w} \right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{dw}{\{(a^2 + w)(b^2 + w)w\}^{\frac{1}{2}}} \\ \psi(x, y, 0) &= \frac{1}{2} \pi p_0 ab \int_{0_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} \right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{dw}{\{(a^2 + w)(b^2 + w)w\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo-se a equação (2.30) na equação (2.11), os deslocamentos da superfície dentro da região de aplicação da carga são dados por :

$$u_z = \frac{1-\nu}{\pi E} (L - Mx^2 - Ny^2) \begin{cases} M = \frac{\pi p_0 b}{e^2 a^2} \{K(e) - E(e)\} \\ N = \frac{\pi p_0 b}{e^2 a^2} \left\{ \frac{a^2}{b^2} K(e) - E(e) \right\} \\ L = \pi p_0 b K(e) \end{cases} \quad (2.31)$$

onde $K(e)$ e $E(e)$ são integrais elípticas com o parâmetro “e” definido a seguir :

$$e = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 \quad (2.32)$$

“e” é denominado excentricidade da região elíptica onde o carregamento é aplicado. O carregamento total aplicado sobre o sólido semi-infinito é definido pela integração da equação (2.29) e escrito na forma a seguir:

$$P = \frac{2\pi abp_0}{3} \quad (2.33)$$

A obtenção de uma formulação analítica para os deslocamentos e por conseqüência as tensões presentes no plano semi-infinito não pode ser feita para todos os pontos no plano semi-infinito, no entanto Lundberg & Sjövall (1958) propõem a seguinte solução para o campo de tensão ao longo do eixo z ($x=0$ e $y=0$) :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{p_0} &= \frac{2b}{e^2 a} (\Omega_x + \nu \Omega'_x) \\ \frac{\sigma_y}{p_0} &= \frac{2b}{e^2 a} (\Omega_y + \nu \Omega'_y) \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= -\frac{b}{e^2 a} \left(\frac{1-T^2}{T} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde :

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= -\frac{1}{2}(1-T) + \zeta \{F(\phi, e) - E(\phi, e)\} \\
\Omega'_x &= -1 - \left(\frac{a^2 T}{b^2}\right) + \zeta \left\{ \left(\frac{a^2}{b^2}\right) E(\phi, e) - F(\phi, e) \right\} \\
\Omega_y &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2T}\right) - \left(T \frac{a^2}{b^2}\right) + \zeta \left\{ \left(\frac{a^2}{b^2}\right) E(\phi, e) - F(\phi, e) \right\} \\
\Omega'_y &= -1 + T + \zeta \{F(\phi, e) - E(\phi, e)\} \\
T &= \left(\frac{b^2 + z^2}{a^2 + z^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta = \frac{z}{a} = \cot \phi
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Lundberg & Sjövall (1958) propõem para as tensões ao longo do eixo x (y=0 e z=0) a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_x}{p_0} &= -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ \left(1 - \frac{b\gamma}{a}\right) - \frac{x}{ae} \tanh^{-1} \left(\frac{ex}{a+b\gamma}\right) \right\} \\
\frac{\sigma_y}{p_0} &= -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ \left(\frac{a\gamma}{b} - 1\right) + \frac{x}{ae} \tanh^{-1} \left(\frac{ex}{a+b\gamma}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

e para o eixo y (x=0 e z=0) :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_x}{p_0} &= -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ \left(1 - \frac{b\gamma}{a}\right) - \frac{y}{ae} \tanh^{-1} \left(\frac{ae\gamma}{b(b+a\gamma)}\right) \right\} \\
\frac{\sigma_y}{p_0} &= -2\nu\gamma - (1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left\{ \left(\frac{b\gamma}{a} - 1\right) + \frac{y}{ae} \tanh^{-1} \left(\frac{ae\gamma}{b(b+a\gamma)}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde :

$$\gamma = \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)^{1/2} \tag{2.38}$$

Na origem do sistema de coordenadas a solução para as equações potências é definida como :

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -2\nu - (1-2\nu)\frac{b}{a+b}$$

$$\frac{\sigma_y}{p_0} = -2\nu - (1-2\nu)\frac{a}{a+b}$$
(2.39)

Todas as soluções apresentadas para as equações potenciais de Broussinesq são válidas apenas para pontos localizados dentro da área de aplicação da carga. Para regiões na superfície e fora da área de aplicação da carga tem-se : (Johnson, 1985)

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -\frac{\sigma_y}{p_0} = -(1-2\nu)\frac{b}{ae^2} \left\{ 1 - \frac{x}{ae} \tanh^{-1}\left(\frac{ex}{a}\right) - \frac{y}{ae} \tan^{-1}\left(\frac{aey}{b^2}\right) \right\}$$
(2.40)

$$\tau_{xy} = -(1-2\nu)\frac{b}{ae^2} \left\{ \frac{y}{ae} \tanh^{-1}\left(\frac{ex}{a}\right) - \frac{x}{ae} \tan^{-1}\left(\frac{aey}{b^2}\right) \right\}$$
(2.41)

As equações (2.40) e (2.41) caracterizam um estado de cisalhamento puro.

Para os planos de simetria $y=0$ e $x=0$, Fressler & Ollerton (1957) sugerem que as tensões de cisalhamento são respectivamente :

$$\frac{\tau_{zx}}{p_0} = -\frac{b}{a} \frac{x}{a} \left(\frac{z}{a}\right)^2 \frac{\left\{ \left(1 + \frac{\lambda_1}{a^2}\right) \frac{\lambda_1}{a^2} \right\}^{-3/2} \left(\frac{b^2 + \lambda_1}{a^2}\right)^{-1/2}}{\left(\frac{ax}{a^2 + \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{az}{\lambda_1}\right)^2}$$
(2.42)

e :

$$\frac{\tau_{yz}}{p_0} = -\frac{a}{b} \frac{y}{b} \left(\frac{z}{b}\right)^2 \frac{\left\{ \left(1 - \frac{\lambda_1}{b^2}\right) \frac{\lambda_1}{b^2} \right\}^{-3/2} \left(\frac{a^2 + \lambda_1}{b^2}\right)^{-1/2}}{\left(\frac{by}{b^2 + \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{bz}{\lambda_1}\right)^2}$$
(2.43)

Para se obter as soluções para um ponto genérico no sólido semi-infinito devem-se utilizar métodos numéricos de integração das funções potências. (Johnson, 1985)

2.2.5 Carregamento Tangencial sobre uma Área Elíptica

O estudo de carga tangencial sobre uma área elíptica ainda não está completamente desenvolvido. Isto é devido à dificuldade em se encontrar uma solução analítica para as equações potências de Broussinesq no caso de um carregamento tangencial aplicado sobre uma área elíptica. Fabikant (1997) obteve uma solução para o caso do carregamento ocorrer sobre uma área circular. O carregamento circular é uma particularização do carregamento sobre uma área elíptica onde os dois semi-eixos da elipse possuem o mesmo tamanho.

Mindlin (1949) propôs uma solução para os deslocamentos provocados por uma carga tangencial aplicada sobre uma região elíptica. Esta solução parte da premissa básica de que o perfil de carga sobre a região elíptica possui a seguinte forma :

$$q_x = q_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

Definem-se os deslocamentos para este tipo de carregamento como :

$$u_x = \begin{cases} \frac{q_0 b}{G} \left[K(e) - \frac{\nu}{e^2} \{ (1-e^2) K(e) - E(e) \} \right] & , \quad a > b \\ \frac{q_0 a}{G} \left[K(e) - \frac{\nu}{e^2} \{ K(e) - E(e) \} \right] & , \quad a < b \end{cases} \quad (2.45)$$

$$u_y = 0$$

Novamente para obter os valores das tensões e dos deslocamentos atuantes em um ponto qualquer da estrutura deve-se utilizar métodos numéricos de integração das equações potências de Broussinesq.

2.3 Contato Normal entre Corpos Elásticos : Teoria de Hertz

Quando dois corpos elásticos não conformes são postos em contato inicialmente eles se tocam em um ponto ou ao longo de uma linha. Quando uma força externa é aplicada a estes corpos, de tal maneira que eles se mantenham em contato, os corpos se deformam nas vizinhanças do ponto de contato inicial, de tal maneira que o ponto de contato se torna uma área finita de contato. Para determinar a área de contato, o campo de tensões e deformações faz-se necessário o uso das equações potências de Broussinesq. (Johnson, 1985).

Antes de formular o problema de elasticidade, conforme foi descrito no item 2.2, deve-se identificar quais os perfis geométricos dos corpos em contato. A teoria de Hertz considera que as superfícies dos corpos em contato são geometricamente lisas, sem ressaltos ou reentrâncias. Respeitando esta condição pode-se representar a superfície de um corpo em contato através de uma função que tenha até sua segunda derivada contínua. Desta forma a função proposta na teoria de Hertz é :

$$z_1 = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + \dots \quad (2.46)$$

onde os termos de mais alta ordem em x e y podem ser negligenciados. Para as formas geométricas como esferas e cilindros podem-se escolher os eixos de forma que os coeficientes dos termos cruzados sejam anulados. Desta maneira a equação (2.46) é escrita como :

$$z_1 = \frac{1}{R'_1}x^2 + \frac{1}{R''_1}y^2 \quad (2.47)$$

onde R'_1 e R''_1 são os raios de curvatura da superfície referente aos eixos x e y respectivamente. Similarmente para o segundo corpo elástico em contato temos que :

$$z_2 = -\left(\frac{1}{R'_2}x^2 + \frac{1}{R''_2}y^2\right) \quad (2.48)$$

A distância entre os pontos das superfícies descritas pela equação (2.47) e (2.48) é dada pela equação (2.1), onde a substituição de valores permite escrever a distância entre dois pontos correspondentes nas superfícies como:

$$h = \frac{1}{R'_1}x^2 + \frac{1}{R''_1}y^2 = Ax^2 + By^2 \quad (2.49)$$

onde as variáveis R' e R'' são denominadas de raios de curvatura da superfície gerada quando se toma a distância entre os pontos correspondentes da superfície 1 e da superfície 2. Esta formulação proposta por Hertz é válida para quaisquer superfícies de revolução em contato não conforme. Para o caso do contato entre uma superfície de revolução e um plano Johnson (1985) sugere que os raios de curvatura de uma das funções que representam a superfície em contato devem ser considerados como tendendo ao infinito.

A formulação apresentada é para os casos onde os eixos relativos aos raios de curvatura das superfícies são paralelos. Johnson (1985) propõe uma formulação para os casos dos eixos principais de curvatura das superfícies em contato estarem inclinados entre si de um ângulo α . Esta formulação baseia-se na projeção dos eixos das superfícies sobre um terceiro eixo como na Figura 2.6. Deve-se notar que o terceiro eixo é posicionado no contato conforme as regras definidas no item 2.1.

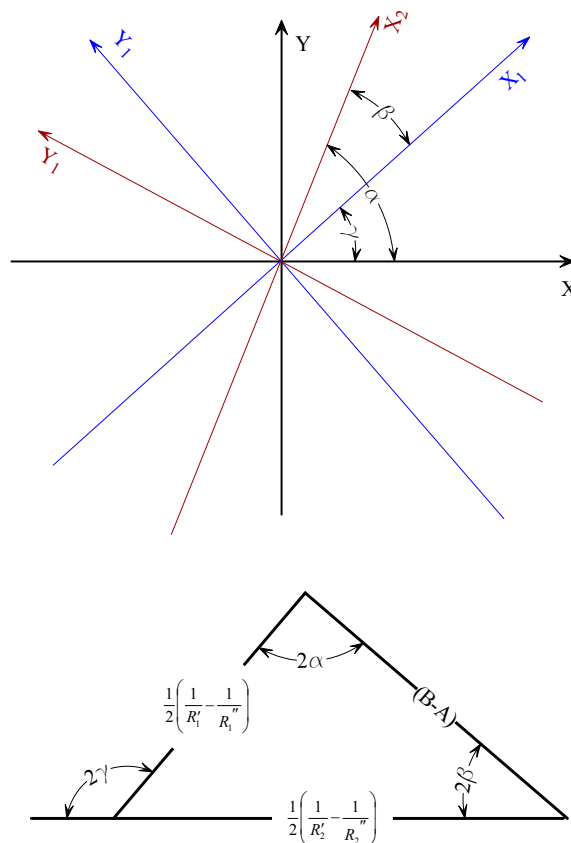


Figura 2.6 – Corpos elásticos com eixos inclinados de um ângulo α .

Utilizando a transformação de coordenadas na Figura 2.6 Johnson (1985) sugere que os fatores A e B da equação (2.49) podem ser calculados como se segue:

$$\begin{aligned}
 (A + B) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} \right) \\
 |B - A| &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''} \right) \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2''} \right) \cos 2\alpha \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

com :

$$R_e = (R'R'')^{1/2} = \frac{1}{2}(AB)^{-1/2} \quad (2.51)$$

Um caso particular desta formulação e de interesse para o estudo de problemas de mecânica do contato em grandes áreas da engenharia mecânica é o contato entre cilindros de eixos paralelos. Para este caso temos que $R'_1 = R_{cilindro1}$, $R''_1 = \infty$, $R'_2 = R_{cilindro2}$ e $R''_2 = \infty$ sendo o ângulo $\alpha = 0$. Johnson (1985) sugere que a área de contato para cilindros longos, cilindros onde o seu comprimento é muito maior que a área de contato, é limitada por duas retas paralelas e esta solução como sendo um caso especial para a teoria de Hertz onde um dos semi-eixos da elipse que forma a área de contato tende ao infinito.

Pode-se então retornar ao estudo do contato mecânico entre dois corpos elásticos com um perfil genérico conforme o esboço da Figura 2.7.e calcular o campo de tensões atuantes conforme a teoria de Hertz Inicialmente ambas as superfícies $S_1(x, y, z_1)$ e $S_2(x, y, z_2)$ têm as distâncias entre dois pontos dada pela equação (2.49), após o contato devido a simetria da função h temos que os limites da superfície de contato são equidistantes do ponto "O". Durante a aplicação da carga e a compressão dos corpos os dois pontos denominados T_1 e T_2 se movem em torno do ponto "O" sempre na direção do eixo z de uma quantidade δ_1 e δ_2 respectivamente como mostrado na Figura 2.7.

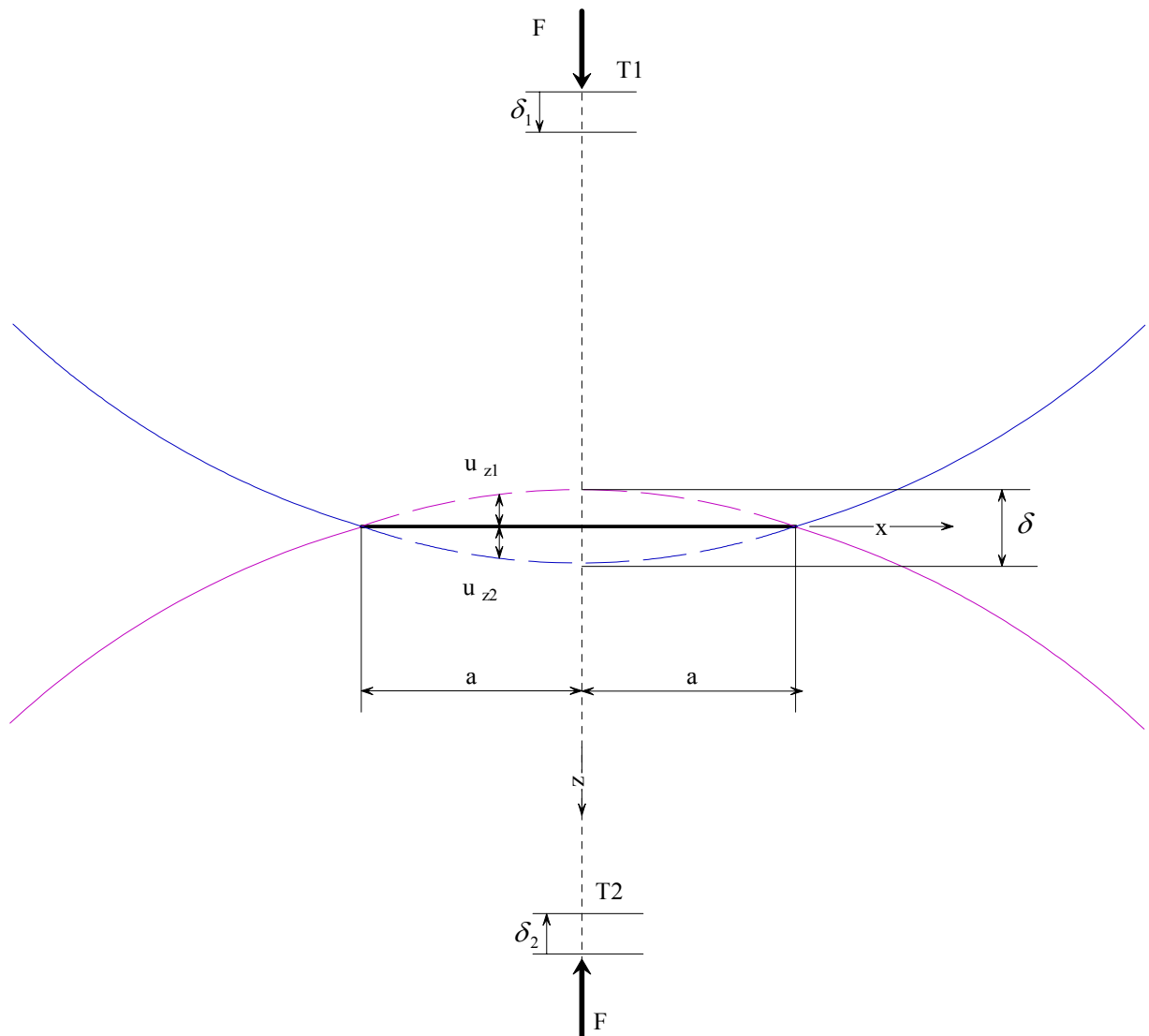


Figura 2.7 – Corpos elásticos em contato não conforme – Teoria de Hertz

Na Figura 2.7 Hertz adota as linhas pontilhadas como os perfis das superfícies sem deformação, isto é, caso o contato não existisse as superfícies se sobreporiam de uma distância δ_1 e δ_2 correspondentes aos deslocamentos dos pontos T_1 e T_2 . Devido ao contato entre os corpos a sobreposição não ocorre, os pontos correspondentes na superfície de ambos os corpos elásticos são portanto deslocados da condição de sobreposição de uma quantidade u_{z1} e u_{z2} relativa ao deslocamento entre os pontos T_1 e T_2 . Sendo S_1 e S_2 pontos coincidentes dentro da região de contato, tem-se:

$$u_{z1} + u_{z2} + h = \delta_1 + \delta_2 \quad (2.52)$$

Pode-se concluir pela análise da equação (2.52) que as deformações impostas aos corpos elásticos é equivalente ao deslocamento dos pontos T_1 e T_2 adicionada da distância de separação do sistema. Isto fica claro ao analisarmos os pontos da superfície que coincidem com o ponto “O” antes de impor os deslocamentos aos corpos, isto é, para estes pontos a distância h é nula o que iguala a soma das deformações aos deslocamentos u_{z1} e u_{z2} .

Pode-se determinar o total das deformações elásticas ocorridas nos corpos em contato a partir da substituição da equação (2.49) na equação (2.52) como se segue :

$$\begin{aligned} u_{z1} + u_{z2} &= \delta_1 + \delta_2 - h = \delta - h \\ u_{z1} + u_{z2} &= \delta - Ax^2 - By^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde x e y são os eixos coordenados de cada corpo em contato projetados sobre a superfície de contato. Para sólidos de revolução a equação (2.53) pode ser escrita sem perda de generalidade como se segue:

$$\left\{ \frac{u_{z1}(0)}{a} - \frac{u_{z1}(x)}{a} \right\} + \left\{ \frac{u_{z2}(0)}{a} - \frac{u_{z2}(x)}{a} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^2 / a \quad (2.54)$$

Tal equação é obtida para corpos cilíndricos substituindo-se os valores representados na Figura 2.7 nas equações (2.53) e (2.50) assumindo-se R_1 e R_2 como os raios de curvatura das superfícies. Por efeito de simplicidade adotou-se que um dos raios de curvatura da superfície tende ao infinito, caso de um cilindro que é orientado com o eixo coincidente ao eixo y da Figura 2.1. Johnson (1985) sugere ainda que se realize uma mudança de variável na equação (2.54) que consiste de tomar as distâncias absolutas x como relativas ao comprimento de contato “ a ” de tal forma que teremos:

$$\left\{ \frac{d_1}{a} + \frac{d_2}{a} \right\} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \begin{cases} d_1 = \frac{u_{z1}(0)}{a} - \frac{u_{z1}(a)}{a} \\ d_2 = \frac{u_{z2}(0)}{a} - \frac{u_{z2}(a)}{a} \end{cases} \quad (2.55)$$

onde d é a deformação dos corpos elásticos.

Como os raios de curvatura são sempre muito maiores que as deformações impostas, uma análise mais detalhada da equação (2.55) permite verificar que $d \ll a$, e que as

deformações são proporcionais às pressões atuantes sobre cada corpo elástico, sendo as pressões proporcionais aos deslocamentos impostos aos pontos T_1 e T_2 .

Hertz utilizou esta hipótese na formulação de sua teoria e também o formato das franjas de interferência entre duas lentes focais durante um ensaio, para dizer que a área de contato possui sempre uma forma elíptica. (Johnson, 1985)

Baseado em suas observações, Hertz propôs que o problema de elasticidade deveria ser formulado como um corpo semi-infinito carregado em uma região elíptica. Para que a proposição feita por Hertz seja verdadeira duas condições devem ser satisfeitas :

- As dimensões da área de contato devem ser muito menores que as dimensões de cada corpo elástico.
- As dimensões da área de contato devem ser muito menores que o menor raio de curvatura dos corpos elásticos em contato.

A primeira condição esta relacionada ao cálculo de todos os campos de tensões ser baseado na hipótese de um corpo semi-infinito, isto é, a região de contato deve se localizar distante das bordas dos corpos em contato para que o resultado não seja influenciado pela grande concentração de tensão provocada nas bordas dos corpos elásticos.

A segunda condição garante que as superfícies dos corpos podem ser aproximadas por um plano, condição semelhante àquela utilizada para o desenvolvimento da teoria de um sólido semi-infinito em que as deformações são suficientemente pequenas para que os conceitos de elasticidade sejam válidos.

Baseando-se na teoria de Hertz a formulação para dois cilindros em contato com eixos paralelos entre si e paralelos à direção do eixo y do sistema de coordenadas apresentado na Figura 2.7 pode-se formular o campo de tensões atuantes. Inicialmente define-se o contato como ocorrendo em uma área de comprimento infinito, condição particular da teoria de Hertz comentada anteriormente, e largura $2a$ conforme a Figura 2.7. A equação que determina as distâncias entre pontos equivalentes nas superfícies cilíndricas, variável h , é escrita da seguinte forma :

$$h = z_1 + z_2 = Ax^2 = \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{x^2}{2} \frac{1}{R} \quad (2.56)$$

Substituindo-se a equação (2.56) na equação (2.53) tem-se :

$$u_{z_1} + u_{z_2} = \delta - \frac{x^2}{2} \frac{1}{R} \quad (2.57)$$

Na teoria de Hertz é sugerido que fisicamente não se pode determinar o valor de δ considerando-se apenas as tensões localizadas na região de contato. Deve-se, adicionalmente, considerar a distribuição no interior dos corpos elásticos. Johnson (1985) sugere que tal restrição pode ser evitada diferenciando-se a equação (2.57) em relação a x e compará-la ao gradiente da pressão $p(x)$ sobre uma área retangular de largura $2a$. Desta forma pode-se escrever que :

$$-\frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{x}{R} \quad (2.58)$$

onde :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (2.59)$$

O termo E^* é comumente chamado de rigidez de contato.

Pode-se portanto reescrever a equação (2.58) da seguinte maneira :

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = \frac{x\pi E^*}{2R} \quad (2.60)$$

Utilizando a mesma solução proposta por Johnson (1985) para a integral do lado esquerdo da equação (2.60) tem-se :

$$p(x) = -\frac{\pi E^*}{2R} \frac{x^2 - a^2}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} + \frac{P}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2.61)$$

Nesta equação não é possível determinar o campo de pressões antes de determinar o valor da largura do contato.

Pode-se, no entanto, analisar a equação e notar que a condição física de pressão positiva sobre a área de contato exige que :

$$P \geq \pi a^2 E^* / 4R \quad (2.62)$$

Outra condição física que a função $p(x)$ deve respeitar é que seu valor deve ser anulado para $x = \pm a$. Calculando o limite da função $p(x)$ para $x = \pm a$ o resultado da função somente será nulo para :

$$P = \frac{\pi a^2 E^*}{4R} \quad (2.63)$$

de tal forma que :

$$a = 2 \sqrt{\frac{PR}{\pi E^*}} \quad (2.64)$$

Substituindo a equação (2.63) na equação (2.61) tem-se :

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2} \quad (2.65)$$

Tais requisitos respeitam as condições físicas da pressão ser sempre positiva na área de contato e reduzindo-se a zero nos limites do contato. Por analogia a equação (2.29) tem-se :

$$p_0 = \left(\frac{PE^*}{\pi R} \right)^{1/2} \quad (2.66)$$

Utilizando a equação (2.65) no desenvolvimento do carregamento normal aplicado sobre uma área elíptica, mostrado no item 2.2.4, resultam :

$$\sigma_x = -\frac{p_0}{a} \left\{ (a^2 + 2z^2)(a^2 + z^2)^{-1/2} - 2z \right\} \quad (2.67)$$

$$\sigma_z = -\frac{p_0}{a} (a^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\tau_{zx} = -\frac{p_0}{a} \left\{ z - z^2 (a^2 + z^2)^{-1/2} \right\} \quad (2.68)$$

Tais valores de tensões principais são independentes do coeficiente de Poisson. Da teoria sobre o estado de deformação plana tem-se :

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (2.69)$$

Pode-se notar em uma análise da equação (2.68) que o valor máximo para a tensão de cisalhamento ocorre abaixo da superfície, isto ocorre em um valor de z igual à $0.78*a$, o valor da tensão de cisalhamento máxima é de $0.3p_0$. Na Figura 2.8 são mostrados as variações de tensão representadas pelas equações (2.67) à (2.69).

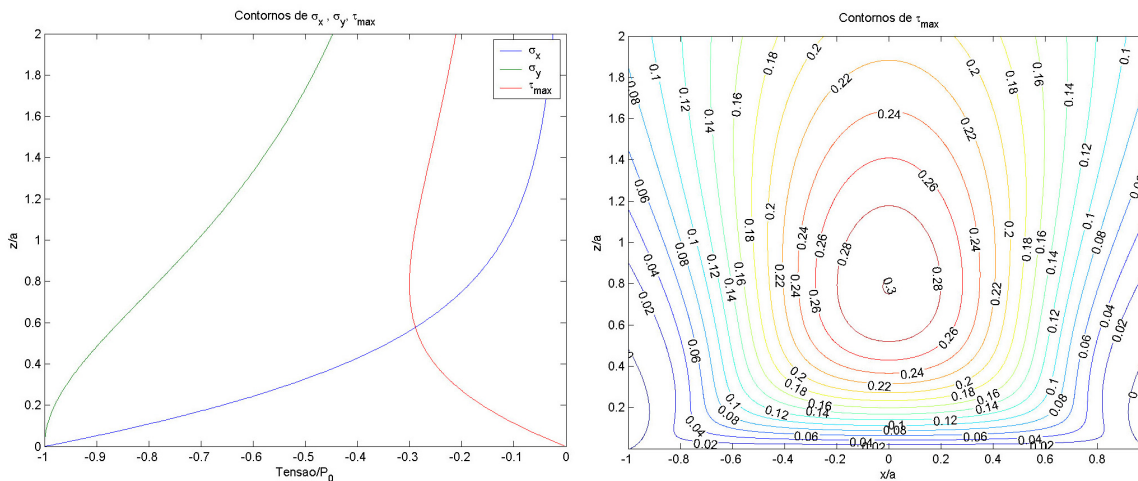


Figura 2.8 – Campo de tensões no plano $y=0$ para o contato entre dois cilindros.

Para um ponto genérico no corpo elástico podem-se utilizar as expressões seguintes obtidas por McEwen (1949) :

$$\begin{aligned}
m^2 &= \frac{1}{2} \left[\left\{ (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + (a^2 - x^2 + z^2) \right] \\
n^2 &= \frac{1}{2} \left[\left\{ (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - (a^2 - x^2 + z^2) \right] \\
\sigma_x &= -\frac{p_0}{a} \left\{ m \left(1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right\} \\
\sigma_y &= -\frac{p_0}{a} m \left(1 - \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) \\
\tau_{zx} &= -\frac{p_0}{a} n \left(\frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

2.3.2 O contato entre corpos elásticos esféricos

Outro caso particular da teoria de Hertz é o contato entre corpos elásticos esféricos, para esta classe de problemas deve-se desenvolver o mesmo raciocínio utilizado até aqui para o cálculo do contato entre cilindros que se caracterizava por ser um carregamento sobre uma área elíptica em que um dos semi-eixos tendia para o infinito, porém, para o contato entre corpos esféricos temos que os semi-eixos da região elíptica são iguais. (Johnson, 1985)

Desta forma, e com o auxílio da transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas polares pode-se reescrever a equação (2.29) :

$$p(r) = \frac{p_0 (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \tag{2.71}$$

onde o termo “a” é o raio da região circular de contato.

Johnson (1985) sugere que as equações para o campo de tensões e deslocamentos no interior dos corpos devem ser escritas em coordenadas polares a fim de permitir uma solução analítica. Desta forma o resultado da integração das equações potenciais conduz a um deslocamento para cada corpo elástico no interior do círculo de carregamento:

$$\begin{aligned}
u_z(r) &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) & r \leq a \\
u_r(r) &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \frac{a^2}{r} p_0 \left\{ 1 - \left(1 - (r/a)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} & r \leq a
\end{aligned} \tag{2.72}$$

onde o valor de “a” pode ser determinado pela equação seguinte:

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (2.73)$$

com o termo “P” dado por:

$$P = \frac{3p_0}{2\pi a^2} \quad (2.74)$$

O campo de tensões não possui solução analítica para qualquer ponto no interior dos corpos elásticos. No entanto Johnson (1985) sugere como solução para os pontos sob o círculo de carregamento situados no plano $z=0$ como a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{p_0} &= \frac{1-2\nu}{3} (a^2/r^2) \left\{ 1 - \left(1 - (r/a)^2 \right)^{3/2} \right\} - \left(1 - (r/a)^2 \right)^{1/2} \\ \frac{\sigma_\theta}{p_0} &= -\frac{1-2\nu}{3} (a^2/r^2) \left\{ 1 - \left(1 - (r/a)^2 \right)^{3/2} \right\} - 2\nu \left(1 - (r/a)^2 \right)^{1/2} \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= -\left(1 - (r/a)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.75)$$

e fora do círculo de carregamento como:

$$\frac{\sigma_r}{p_0} = -\frac{\sigma_\theta}{p_0} = (1-2\nu) \frac{a^2}{3r^2} \quad (2.76)$$

Pode-se verificar na equação (2.76) que a tensão radial é exclusivamente de tração e atinge seu valor máximo na borda da região de carregamento.

Johnson (1985) sugere ainda que a solução para o campo de tensões de pontos situados sobre o eixo z , isto é, em $x=0$ e $y=0$ como a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{p_0} = \frac{\sigma_\theta}{p_0} &= -(1+\nu) \left\{ 1 - \frac{z}{a} \tan^{-1} (a/z) \right\} + \frac{1}{2} \left(1 + z^2/a^2 \right)^{-1} \\ \frac{\sigma_z}{p_0} &= -\left(1 + z^2/a^2 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Nota-se na equação (2.77) que σ_r e σ_θ são as tensões principais nos pontos situados sobre o eixo z . Desta forma têm-se que a tensão de cisalhamento principal é dada por $\tau_1 = |\sigma_r - \sigma_\theta|/2$, com seu valor máximo ocorrendo abaixo da superfície em $z = 0.57a$.

2.4 Elementos Finitos – Cálculo Numérico de Problemas de Mecânica do Contato

Os problemas de mecânica do contato principalmente aqueles que não seguem a teoria de Hertz, como contatos conformes, e mesmo aqueles que podem ser considerados como adequados para aplicação da teoria de Hertz, possuem características que podem inviabilizar a obtenção de uma solução analítica. (Johnson, 1985)

Pode-se destacar para estes casos o contato não conforme entre peças de comprimentos diferentes, como dois cilindros de comprimento diferentes, e o contato entre a tira e o cilindro em operações de laminação. Nestes exemplos a obtenção de resultados analíticos somente é possível para regiões distantes das extremidades dos corpos em contato.

Lépre, Santos e de Mello (2001) encontraram resultados que mostram que próximo às extremidades do contato entre dois cilindros de comprimentos diferentes, ocorre uma variação brusca das tensões atuantes na superfície do cilindro de comprimento maior.

Johnson (1985) relaciona três possibilidades nas quais o contato entre cilindros não obedece a teoria de Hertz: A) Dois cilindros finitos e de mesmo tamanho; B) Um cilindro é considerado infinito em relação ao outro que possui extremidades formadas por ângulos retos; C) Um cilindro é considerado infinito em relação ao outro que possui extremidades terminando em um pequeno raio de arredondamento. Estas configurações são apresentadas na Figura 2.9.

Na teoria de Hertz é previsto que os cilindros em contato estão em uma condição de estado plano de deformações, de tal maneira que uma tensão de compressão no eixo “y” deve ter valor igual à :

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x - \sigma_z) \quad (2.78)$$

Na face dos cilindros tal tensão não respeita a condição de estado plano de deformações. Nos cilindros, mostrados na Figura 2.9, casos “A” e “B”, existe uma concentração de tensão nas bordas dos cilindros e na borda do cilindro de menor comprimento respectivamente, devido a singularidade geométrica. Para o exemplo “C” a singularidade geométrica é removida pelo raio de arredondamento de tal forma que existe um alívio gradual na tensão σ_y nesta região. No entanto, este alívio somente será notado para um raio de arredondamento muito maior que a largura do contato $2a$.

Em todos os exemplos anteriores as equações obtidas pela teoria de Hertz somente são validas em regiões distantes das faces dos cilindros. Resultados mais precisos devem ser obtidos através da integração numérica das funções potenciais de Broussinesq.

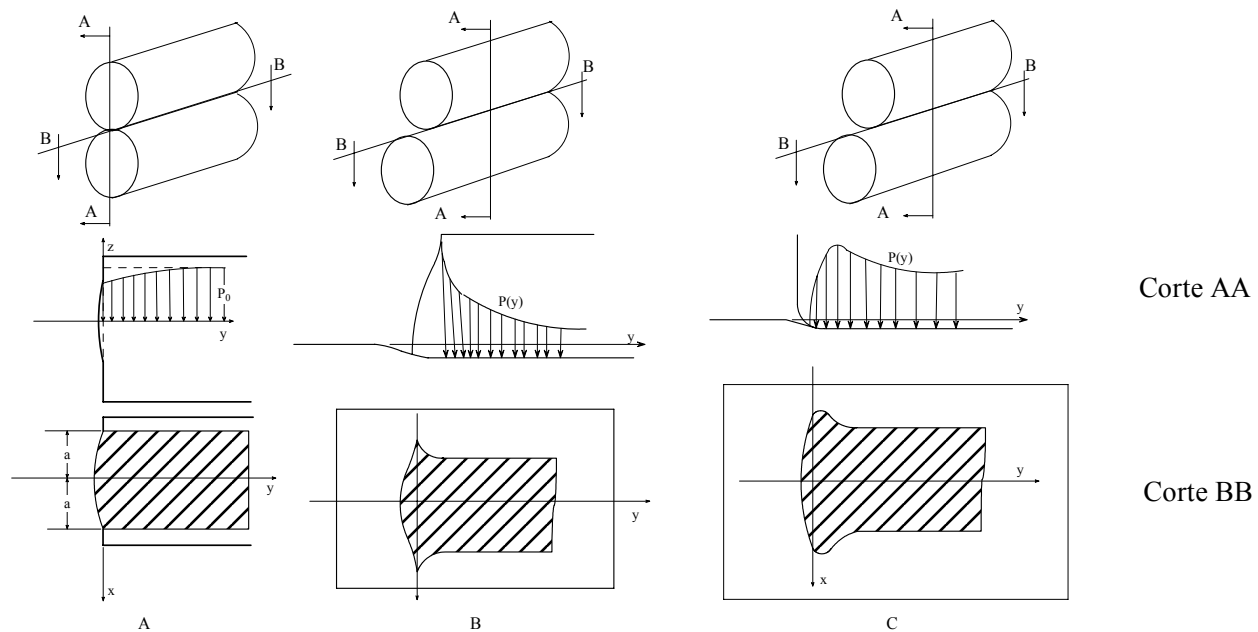


Figura 2.9 – Exemplos de contato entre cilindros finitos.

2.4.2 Métodos de Integração Numérica

Nos métodos de integração numérica o problema é caracterizado pela determinação das forças normais e tangenciais que irão satisfazer as condições de contorno do problema de contato mecânico cujas geometrias dos corpos após aplicação de carga não são conhecidas previamente.

Os métodos clássicos representam a distribuição de pressão na área de contato por uma série infinita de funções conhecidas. As séries são então truncadas, satisfazendo as condições de contorno de forma aproximada. Estes métodos são intrinsecamente mal condicionados e podem levar a erros grosseiros caso a série de funções não seja escolhida adequadamente. (Johnson, 1985)

Com o desenvolvimento de modelos de elementos finitos permitiu-se substituir a representação contínua das distribuições de pressão sobre uma superfície em contato por um número finitos de elementos onde a distribuição de pressão é representada, de tal maneira que as condições de contorno passam a ser respeitadas somente em um número discreto de pontos, melhorando o condicionamento numérico das equações que regem o problema.

A representação mais simples utilizando estes elementos é um conjunto finito de pontos onde a pressão normal e tangencial são representadas discretamente, como apresentado no item “A” da Figura 2.10. Para esta representação, um problema que pode ocorrer durante a integração numérica é a obtenção de deslocamentos infinitos na superfície sob o ponto de aplicação de carga. Este problema pode ser evitado quando se utiliza uma representação conforme o item “B” da Figura 2.10, representando o campo de pressões por um número finito de colunas de pressão. Neste tipo de representação o deslocamento é incondicionalmente finito, porém tem-se um gradiente infinito na interface entre dois elementos consecutivos. Uma terceira representação capaz de evitar os dois problemas numéricos descritos anteriormente é aquela em que existe uma superposição da área de abrangência de dois elementos consecutivos, como mostrado no item “C” da Figura 2.10. Para esta representação do campo de pressões, os deslocamentos são sempre finitos e têm gradiente finito entre dois elementos consecutivos, ou seja, os valores de deslocamentos obtidos através da integração das equações são sempre finitos e contínuos.

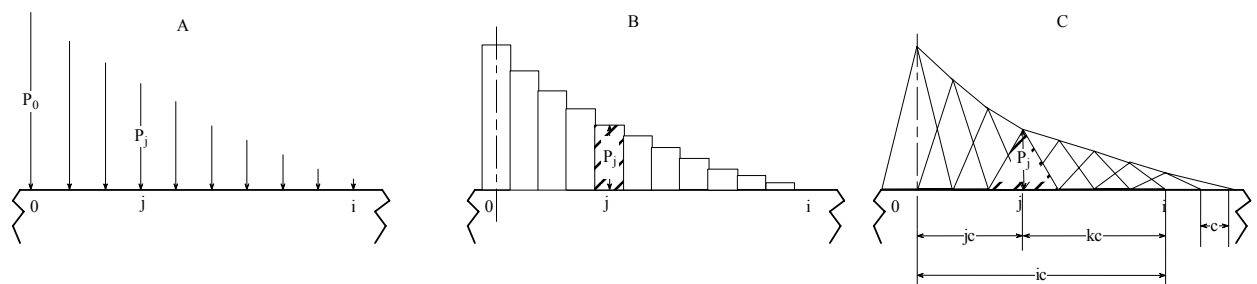


Figura 2.10 – Tipos de representação discreta de um campo de pressão em problemas de contato mecânico. (Johnson, 1985)

Para resolver o sistema de equações e encontrar os valores da pressão aplicada em cada elemento finito, dois métodos têm sido utilizados:

- Método Direto, este método se baseia na inversão de matrizes e satisfaz as condições de contorno em pontos previamente determinados;
- Método Variacional, no qual os valores da pressão aplicados em cada elemento finito são aqueles que minimizam uma função de energia apropriada.

Para descrever o método variacional pode-se considerar o contato normal de dois corpos sem a presença de atrito e com os perfis superficiais arbitrários de tal forma que estes não possam ser representados adequadamente por uma função quadrática, como descrito no

item 2.1. A função $h(x,y)$ que descreve a distância que separa dois pontos equivalentes nas duas superfícies deve ser considerada apenas contínua e finita até a segunda derivada.

A hipótese anterior segue o raciocínio desenvolvido por Hertz de continuidade das superfícies em contato, de tal forma que os deslocamentos para dois pontos equivalentes nas superfícies dos corpos em contato podem ser representados como na equação (2.79), onde são utilizados os mesmos símbolos já apresentados na Figura 2.7.

$$\bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2} + h(x,y) - \delta \begin{cases} = 0 & \text{no interior da região de contato} \\ \neq 0 & \text{fora da região de contato} \end{cases} \quad (2.79)$$

Uma vez determinado qual o tipo de elemento, dentre aqueles mostrados na Figura 2.10, pode-se então dividir a superfície de contato em um número apropriado de elementos tendo-se em conta a precisão necessária no resultado. Após definir qual o número de elementos a ser utilizado pode-se montar uma matriz de coeficientes de influência C_{ij} que será necessária para obter os deslocamentos de um ponto i da superfície devido as pressões aplicadas aos pontos adjacentes e ao próprio ponto i . O deslocamento total do ponto i é obtido então pela seguinte equação :

$$\{\bar{u}_{z_1}\}_i = -\frac{(1-\nu^2)c}{E} \sum C_{ij} P_j \quad (2.80)$$

onde “c” é o comprimento da área de contato numericamente representado pelo comprimento do elemento mostrado na Figura 2.10.

Assim como no desenvolvimento da teoria de Hertz tem-se dificuldade em se obter os deslocamentos em relação a um ponto arbitrário dos referenciais solidários aos corpos em contato para o estado plano de deformações. Esta dificuldade provém do fato de todas as soluções de deslocamento possíveis para a equação (2.80) serem linearmente dependentes entre si. Isto é todas as soluções são dependentes de uma constante que representa a outra dimensão da área de contato, como o comprimento de cilindros longos. Pode-se evitar tal problema, sem que seja necessário perder as vantagens numéricas do estado plano de deformações, tomando os deslocamentos em relação ao ponto de origem do contato, escrevendo a equação (2.80) como na equação (2.81), desde que $h(0,0) = 0$.

$$\{\bar{u}_{z_1}(0) - \bar{u}_{z_1}(x)\} + \{\bar{u}_{z_2}(0) - \bar{u}_{z_2}(x)\} - h(x) \begin{cases} = 0 & \text{no interior da região de contato} \\ \neq 0 & \text{fora da região de contato} \end{cases} \quad (2.81)$$

Com a mudança de referenciais, de um referencial solidário ao corpo para um referencial solidário ao ponto inicial de contato, a deformação δ não aparece na equação (2.81) como aparecia na equação (2.80). Isto deve-se ao fato do novo referencial, no qual escreveu-se a equação (2.81), acompanhar as deformações impostas ao corpo. Desta forma reescreve-se também a equação (2.80) como na equação (2.82).

$$\{\bar{u}_{z_1}(0) - \bar{u}_{z_1}(x)\} = -\frac{(1-\nu^2)c}{E} \sum B_{ij} p_j \quad \{B_{ij} = C_{0j} - C_{ij}\} \quad (2.82)$$

Discretizando as equações contínuas desenvolvidas para um sólido semi-infinito com distribuição de pressão poligonal, mostrada na Figura 2.10, caso C, Johnson (1985) sugere que os coeficientes de influência C_{ij} podem ser escritos conforme a equação seguinte :

$$C_{ij}(k) = \frac{1}{\pi} \left\{ (k+1)^2 \ln(k+1)^2 + (k-1)^2 \ln(k-1)^2 - 2k^2 \ln k^2 \right\} + const \quad (2.83)$$

Os valores de pressão em cada elemento finito são calculados utilizando os coeficientes de influência através do método de integração desejado. Sendo a pressão total no contato expressa por:

$$P = A * \sum p_i \quad (2.84)$$

A constante "A" é dependente da forma do elemento. Ela representa a relação entre o valor de p_i e a área do elemento, para problemas bidimensionais, ou o volume, para problemas tridimensionais.

2.4.3 Método Variacional

Uma vez determinados os coeficientes de influência através da escolha do tipo de elemento finito a ser utilizado no problema de contato o método de integração é responsável pela correlação entre os coeficientes e cada valor de pressão p_i . O método variacional tem sido aplicado a problemas de contato que não podem ser resolvidos através da teoria de Hertz devido a sua capacidade em :

- Estabelecer condições matemáticas para se determinar a forma e o tamanho da área de contato e o valor das pressões de contato;
- Permitir utilizar algoritmos de otimização para integrar as equações como o método do gradiente descendente acoplado à técnica dos multiplicadores de Lagrange, resultando em um problema numericamente melhor condicionado que o método direto.

Baseando-se no princípio do trabalho virtual Fichera (1964) e Duvault & Lions (1972) sugerem que existe uma área de contato e um campo de deslocamentos das superfícies em contato únicos, que são capazes de minimizar a energia de deformação dos corpos em contato. Kalker (1978) verificou que um melhor condicionamento numérico é obtido quando se utilizam deslocamentos conhecidos ao invés de pressões conhecidas, desta maneira o autor propõe que para determinar os deslocamentos e as pressões atuantes sobre as superfícies em contato é necessário minimizar a função de energia :

$$V^* = U_E^* + \int_S p(h - \delta) dS \quad (2.85)$$

onde S é a superfície sobre a qual atua a pressão de contato e U_E^* é a energia potencial de deformação elástica dos corpos em contato que pode ser representada como :

$$U_E^* = \frac{1}{2} \int_S p(\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2}) dS \quad (2.86)$$

Com o malha de elementos finitos definida pode-se discretizar a área de contato S e reescrever a equação (2.86) na forma :

$$U_E^* = -\frac{(1-\nu^2)cA}{2E^*} \sum (\sum C_{ij} p_j) p_i \quad (2.87)$$

A discretização pode ser aplicada também ao segundo termo da equação (2.85), conduzindo a:

$$\int_S p(h - \delta) dS = A \sum p_i (h_i - \delta) \quad (2.88)$$

Substituindo as equações (2.87) e (2.88) na equação (2.85) resulta uma função quadrática em p_i que pode ser utilizada como função objetivo de um algoritmo de otimização, sujeito as restrições de $p_i > 0$ na área de contato.

2.5 Simulações com modelos de Elementos Finitos

Para realizar simulações de contato mecânico com modelos de elementos finitos o tipo de elemento deve ser previamente definido. Nesta escolha as formas das superfícies e a magnitude da deformação dos corpos em contato são as principais características que devem ser consideradas na escolha do elemento de contato. O conhecimento prévio das regiões de contato, da rigidez de contato normal e da rigidez tangencial são fatores determinantes para limitar a um valor razoável a discretização do modelo e para reduzir o esforço computacional do cálculo. O software comercial ANSYSTM, que foi usado para as simulações, permite a seleção de três tipos básicos de elementos de contato: A) contato nó a nó; B) contato nó a superfície; C) contato superfície a superfície. A escolha de qual elemento utilizar é particular ao problema em análise e nas seções subseqüentes alguns aspectos desta escolha serão tratados.

2.5.1 Contato nó à nó

Este tipo de elemento de contato é tipicamente utilizado em problemas onde o contato pode ser caracterizado como ponto à ponto, isto é quando os pontos das superfícies que entrarão em contato são conhecidos previamente (ANSYS®, Revision Manual)

Este tipo de elemento não permite grandes escorregamentos entre as superfícies em contato e uma instabilidade numérica pode aparecer caso a malha de elementos finitos não seja muito refinada. Tal fato decorre do método numérico para resolução de problemas de contato, que como foi explicado anteriormente, deve ser capaz de respeitar as condições de contorno do problema em pontos finitos, de tal forma que grandes deslocamentos podem fazer com que um determinado nó da malha viole as condições de contorno.

O refinamento da malha é um fato relevante também para a precisão da solução final do problema, isto fica claro quando analisamos o método de integração numérica baseado na minimização da energia de deformação apresentada na equação (2.85). Como se trata de um problema de minimizar um funcional dependente das variáveis físicas do problema, a baixa discretização pode conduzir a um mínimo da função objetivo porém sem validade física. Isto ocorre principalmente quando existe uma representação matemática ruim das condições de contorno, isto é, os multiplicadores de Lagrange possuem valores insuficientes para permitir uma solução no espaço viável de otimização.

Devido a tais características este tipo de modelo é o que se assemelha mais à representação do campo de pressões por forças pontuais, como na Figura 2.10A. O problema de deslocamento infinito, relacionado por Johnson (1985), para este tipo de representação pontual do campo de pressões é solucionado com o uso de uma função de interpolação contínua até a segunda derivada para o campo de deformações calculado no modelo de elementos finitos.

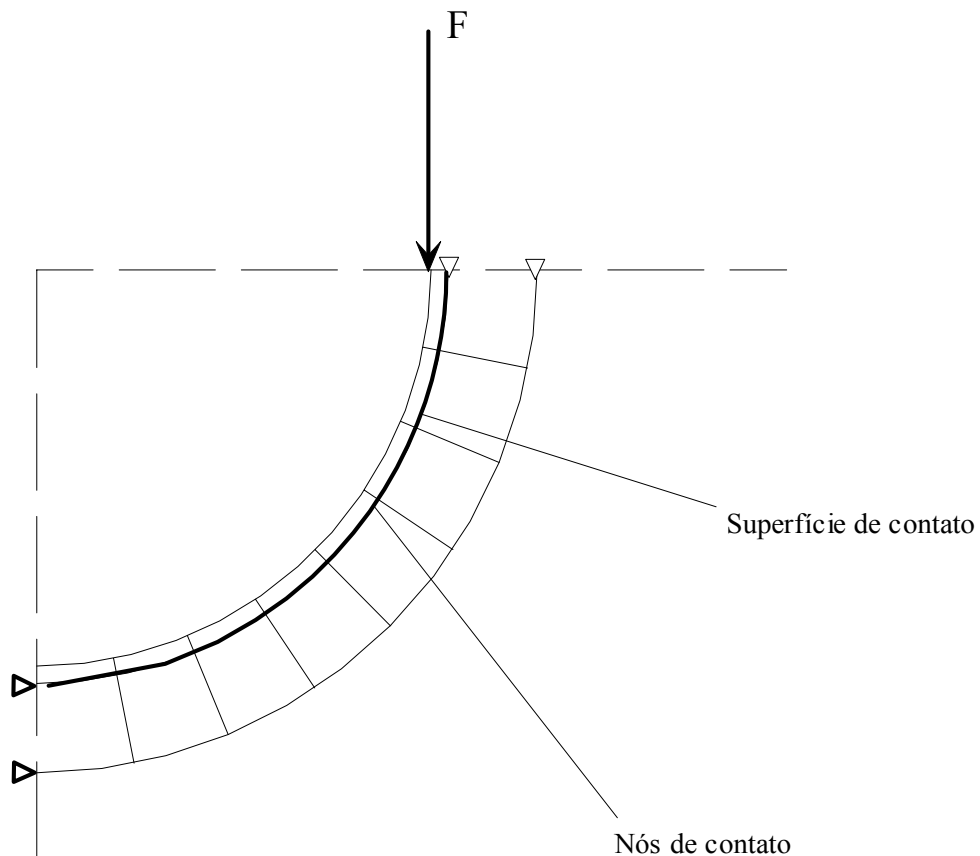


Figura 2.11 – Exemplo de aplicações dos elementos de contato nó à nó.

Na Figura 2.11 é mostrado um exemplo de aplicação desta classe de elementos de contato onde é conhecida previamente qual a geometria aproximada da superfície de contato e qual a amplitude aproximada das deformações a serem impostas aos corpos.

Para esta classe de elementos de contato pode-se definir uma interferência inicial ou uma pequena folga entre as superfícies de contato. Matematicamente isto equivale a definir um projeto inicial em um problema de otimização na região inviável do espaço de projeto e permitir que o algoritmo de otimização determine um projeto viável que minimize a função objetivo.

2.5.2 Contato nó à superfície

Este elemento é caracterizado por ter 3 nós para simulações bidimensionais e 5 nós para simulações tridimensionais, sendo equivalente ao caso “B” da Figura 2.10, com um elemento de forma triangular ou piramidal. Devido a esta característica, este elemento pode representar contato entre corpos rígidos e entre corpos flexíveis, isto é, como não é mais necessário considerar o campo de pressão como um conjunto discreto de cargas concentradas, o integrador pode tratar cada ponto de pressão de contato diretamente sem a possibilidade de se ter o cálculo de deslocamento infinitos nas superfícies de contato relacionado por Johnson (1985).

Devido a melhor estabilidade numérica, esta classe de elementos pode ser aplicada a problemas onde há grandes deformações, separação das superfícies, efeitos de “STICK-SLIP” e ainda a superposição de efeitos de transferência de calor.

Assim como nos elementos de contato nó a nó a solução do problema é obtida através de um algoritmo de otimização com as restrições escritas através de multiplicadores de Lagrange.

As superfícies em contato podem ser definidas como superfície “alvo” ou superfície “contato”, esta definição se faz necessária a fim de se determinar no integrador qual superfície estará sujeita as restrições do algoritmo de otimização, desde que uma vez determinado o campo de pressão sobre uma superfície este é aplicado sobre a outra superfície pelo princípio da ação e reação.

As escolhas de quais superfícies serão denominadas “alvo” ou “contato” deve seguir determinadas regras a fim de se obter um adequado condicionamento numérico do problema. A instrução para a escolha das superfícies “alvo” e “contato” é sempre utilizar a superfície côncava, a superfície plana ou a mesmo a superfície com menor convexidade como superfície alvo, como mostrado na Figura 2.12 e na Figura 2.13. Para casos de superfícies irregulares deve-se utilizar uma configuração redundante onde as superfícies formam simultaneamente dois pares de superfícies de contato. No primeiro par atribui-se a condição de “alvo” ou “contato” às superfícies sem um critério definido, posteriormente no segundo par as superfícies são denominadas como o inverso do primeiro par, tal procedimento é mostrado na Figura 2.14.

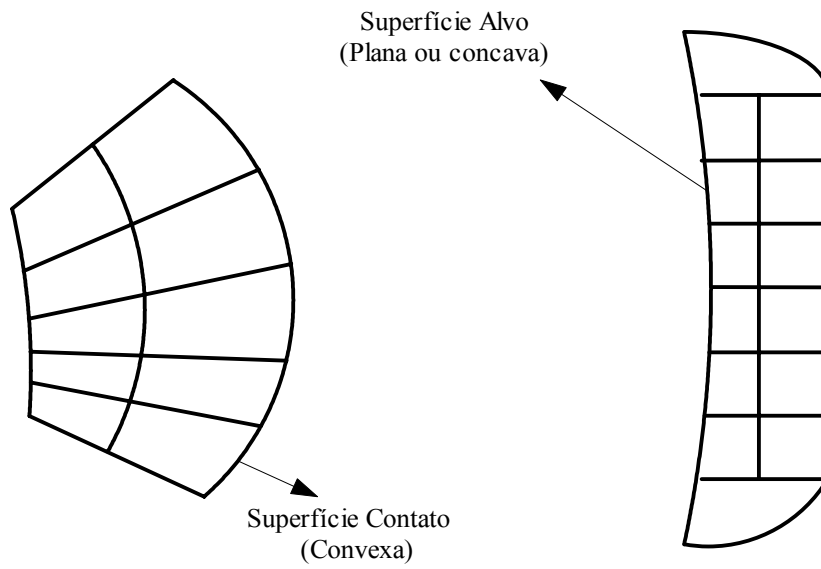


Figura 2.12 – Contato entre uma superfície côncava e outra convexa.

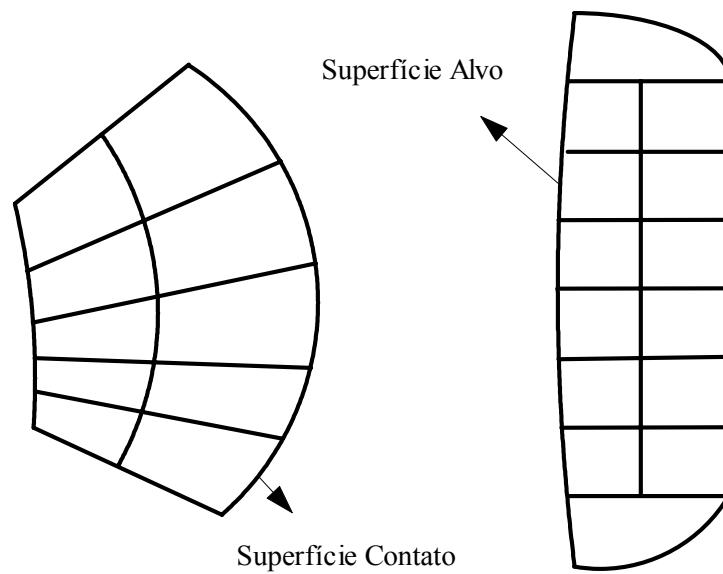


Figura 2.13 – Contato entre duas superfícies convexas.

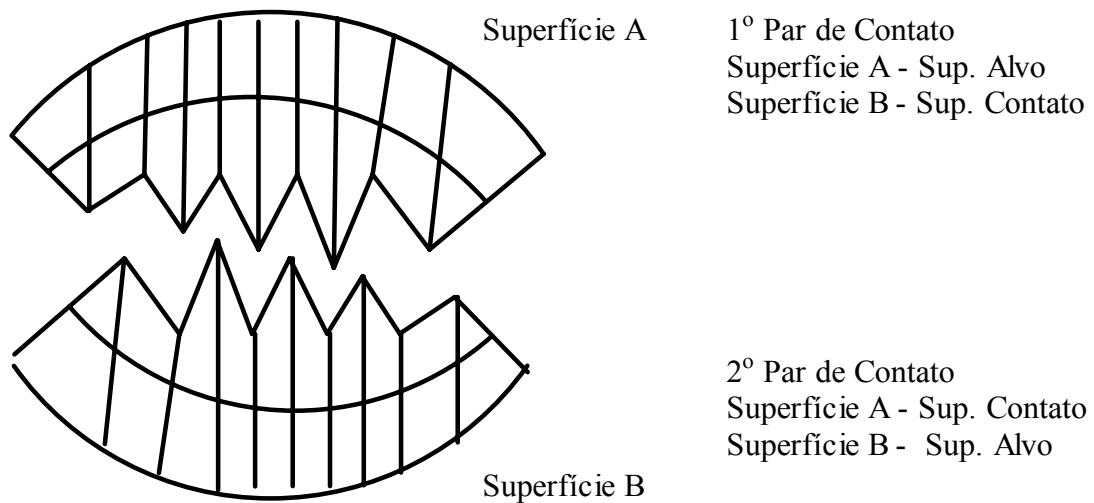


Figura 2.14 – Contato entre duas superfícies irregulares.

O procedimento sugerido para corpos em contato que tenham superfícies como aquelas representadas na Figura 2.14 deve ser evitado em sempre que possível, pois possui a característica de dobrar o número de equações de restrição. No entanto, para superfícies complexas permite reduzir o número de singularidades numéricas durante o processo de cálculo, isto é, indefinições numéricas que aparecem devido a um par de contato são eliminadas pelo par redundante.

2.5.3 Contato superfície à superfície

Este elemento utiliza o mesmo princípio descrito no caso “C” da Figura 2.10 por isto é aquele que oferece maior versatilidade nas simulações de contato entre dois corpos. Dentre estas podemos destacar :

- não há restrição geométrica para as superfícies;
- suporta grandes deformações e grandes quantidades de escorregamento;
- melhor condicionamento numérico e precisão numérica;
- representa superfícies coladas, rugosas e com penetração inicial sem aumentar a complexidade numérica do problema;
- permite usar elementos com função de forma de ordem superiores a quadrática;
- permite simular superfícies de corpos que possuam movimentos de corpo rígido;
- permite o uso de malhas pouco refinadas sem perda de precisão.

No entanto, este elemento é mais sensível aos ajustes dos parâmetros de integração numérica, principalmente aqueles que se relacionam aos multiplicadores de Lagrange. Pode-se tornar o problema de otimização instável ou conduzir a resultados errados, caso estes ajustes sejam super estimados ou sub estimados, desde que o problema de otimização da função objetivo é mais sensível à correta determinação dos espaços viáveis e inviáveis.

Outro ajuste que possui grande influência é aquele que determina quando uma superfície está na iminência do contato com outra superfície. Este ajuste torna-se mais importante quando deseja simular uma condição em que existe movimento relativo entre as duas superfícies, pois é este ajuste que determina como ocorrerá a transição do elemento de contato entre dois elementos da superfície alvo. Transições numericamente abruptas entre os valores de força de interação entre dois nós, pode aumentar o número de mínimos locais da função objetivo e conduzir a resultados insatisfatórios.

2.5.4 Simulação Numérica da Transferência de Calor no Contato Mecânico

Willians (1994) sugere que quando duas superfícies em contato têm um movimento relativo uma quantidade de calor independente da temperatura dos corpos é gerada devido a característica dissipativa da força de atrito que transforma energia em trabalho mecânico nas superfícies dos corpos em calor. Willians (1994) sugere que para calcular a quantidade de calor gerada pelo atrito entre as superfícies deve-se conhecer apenas a força de contato e as propriedades termo-físicas dos materiais.

Para uma situação em que toda energia gerada pelo atrito se transformada em calor, o valor da taxa de geração de calor devido ao escorregamento entre duas superfícies depende da pressão normal p , do coeficiente de atrito μ e da velocidade de escorregamento U , conforme a equação (2.89). (Willians, 1994)

$$\dot{h} = \mu p U \quad (2.89)$$

com U sendo a soma vetorial das velocidades de escorregamento escritas na equação (2.2).

Johnson (1985) propõe que a análise do problema termo elástico pode ser feita de acordo com os seguintes passos :

- Análise da condução de calor nos corpos em contato a fim de determinar a distribuição de temperatura nos corpos em contato;

- Análise dimensional dos corpos em contato devido a expansão ou contração térmica a fim de se obter a distorção provocada pela mudança de temperatura;
- Obtenção das novas distribuições de pressão sobre as superfícies em contato devido a distorções geométricas.

Nesta seqüência de estudo, Johnson (1985) faz a hipótese de que na maioria dos casos podem-se considerar os efeitos enumerados acima como sendo independentes, permitindo estimar um comportamento global das superfícies em contato. Assim como para o cálculo do campo de tensões em corpos elásticos em contato, o cálculo da distribuição de temperatura é feito levando-se em consideração que a superfície pode ser representada por uma função contínua até sua segunda derivada e que a geração de calor ocorre sob uma área muito menor que as dimensões globais dos corpos em contato.

Willians (1994) sugere que estimar localmente os efeitos acoplados de temperatura e pressão de corpos em contato é uma tarefa difícil de ser realizada. O motivo para isto é que pequenas regiões da superfície podem ser aquecidas acima da temperatura de fusão do material, o que reduziria momentaneamente o raio de curvatura de um pico de rugosidade da superfície, e conseqüentemente a pressão de contato se concentraria sobre uma região menor que a inicial levando a um aumento da temperatura. Como este processo não pode se repetir indefinidamente supõe-se que o desgaste provocado na superfície seja o limitador físico para este processo, de tal maneira que um equilíbrio dinâmico irá ocorrer entre o desgaste e o efeito termo elástico.

Carslaw & Jaeger (1959) propõem que, para o cálculo da distribuição de temperatura provocado por uma fonte de calor móvel sobre um corpo de dimensões muito maiores que as dimensões da fonte de calor, é mais adequado tratar a fonte de calor como estacionária e o corpo como dotado de movimento. Desta maneira pode-se utilizar a formulação proposta por Carslaw & Jaeger para analisar um problema como o da Figura 2.15.

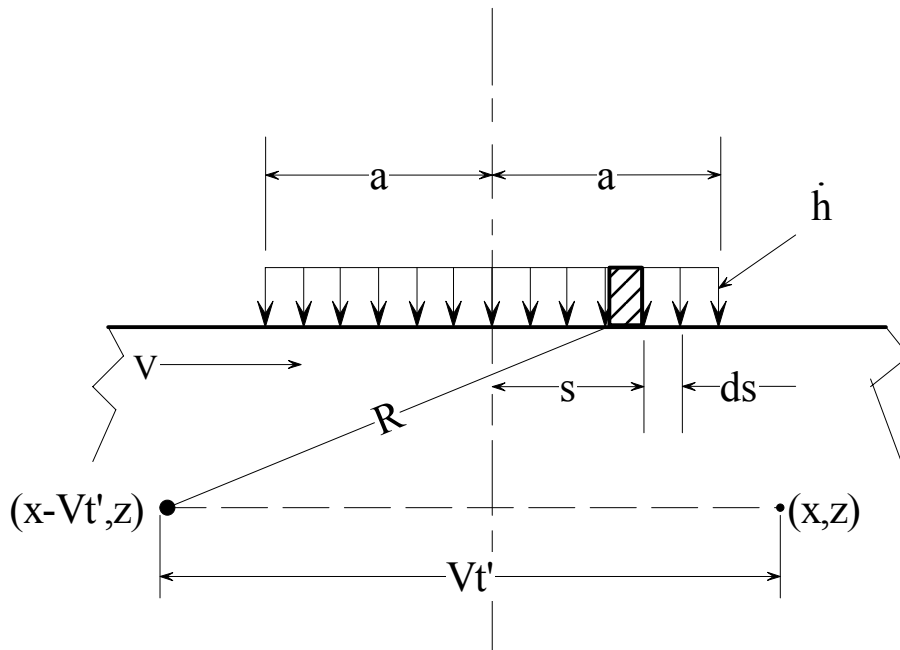


Figura 2.15 – Diagrama esquemático de uma fonte de calor móvel sobre um corpo semi-infinito.

Neste caso, a fonte de calor tem dimensão equivalente à dimensão do contato entre dois cilindros e se move com uma velocidade V que pode ser interpretada como a velocidade periférica dos cilindros. Para determinar qual a distribuição de temperatura sobre os cilindros considera-se como velocidade de deslocamento da fonte de calor a velocidade com que um ponto fixo à superfície do cilindro passa pela região de contato e para se determinar o fluxo de calor, através da equação (2.89), a diferença das velocidades periféricas dos dois cilindros.

Johnson (1985) sugere que a solução para este problema é :

$$\theta(x, z) - \theta_0 = \frac{\dot{h}}{2\pi k} \int_{-a}^a ds \int_{-\infty}^0 \left[\exp\left(-\frac{(x-s-Vt')^2 + z^2}{4\kappa t'}\right) \frac{dt'}{t'} \right] \quad (2.90)$$

onde :

$$\kappa = \frac{k}{\rho c} \begin{cases} k \rightarrow \text{condutividade térmica} \\ \rho \rightarrow \text{densidade} \\ c \rightarrow \text{calor específico} \end{cases} \quad (2.91)$$

O procedimento de cálculo da distribuição de temperatura entre dois corpos em contato através de elementos finitos utiliza a mesma metodologia mostrada na equação (2.90), porém

utilizando um modelo discreto. Neste sistema discreto a fonte de calor é representada por um fluxo de calor aplicado a uma região equivalente a área de contato, calculada pelo modelo de elementos finitos estrutural da mecânica do contato.

No modelo de elementos finitos para o cálculo da distribuição de temperatura duas discretizações são utilizadas. A primeira discretização deve ser capaz de representar o comportamento dentro da região de contato e portanto utiliza-se uma malha capaz de conter pelo menos dez pontos no interior da área de contato. A segunda discretização é feita no domínio do tempo, de modo a permitir ao menos que o intervalo de tempo da integração seja metade do tempo que um ponto fixo à superfície demora para percorrer a área de contato com uma velocidade V descrita na equação (2.90).

2.5.5 Resultados das Simulações do Contato entre Cilindros – Estado Plano de Deformações.

O cálculo de tensões em um corpo devido ao contato mecânico para casos envolvendo geometrias complexas somente pode ser avaliado numericamente. Em situações onde a hipótese de estado plano de deformações não é válida, não existem soluções analíticas para as equações que descrevem as tensões nos corpos em contato. (Johnson, 1985)

Com o intuito de simular o fenômeno tribológico de duas configurações de máquinas de teste foram idealizados dois modelos. Um considera o contato entre dois cilindros e outro considera o contato esfera plano, como formas de modelar o estado de deformações e tensões em um cilindro de laminação. Para se determinar o valor das tensões atuantes optou-se pela construção de modelos de elementos finitos no software comercial ANSYS™ devido a este ter implantado em suas rotinas de cálculo os mesmo procedimentos de integração descritos no item 2.4 e no início do item 2.5. Devido a inexistência de uma forma exata de se ajustar os parâmetros de integração e ainda a possibilidade de divergência do algoritmo de integração ou convergência a uma solução física errada, optou-se pelo desenvolvimento de duas classes de problemas em elementos finitos, como descrito abaixo:

- Modelo plano.
- Modelo tridimensional.

No modelo plano foram avaliados os parâmetros de ajuste da rigidez de contato, de controle do passo de integração das equações diferenciais e de performance do algoritmo, uma vez que o modelo plano é uma representação numérica para o estado plano de deformações em contatos entre cilindros, para as quais existem soluções analíticas e exatas. No modelo

tridimensional foram avaliadas as tensões atuantes sobre os cilindros bem como a influência da borda dos cilindros sobre o campo de tensões atuantes nos corpos, com os ajustes dos parâmetros de integração e a influência destes sobre os resultados finais conhecidos a partir dos testes com os modelos planos. A Tabela 2.1 seguinte apresenta os principais parâmetros utilizados nas simulações.

Tabela 2.1 Dados principais dos modelos de elementos finitos

MODELO	ELEMENTO SÓLIDO	ELEMENTO DE CONTATO	RIGIDEZ DE CONTATO	CARGA NORMAL	CARGA TANGÊNCIAL
Plano	Plane42	Conta48	63 MN/m	15000 N	1000 N
Tridimensional	Solid45	Par de contato: Conta173 e Targe170	Adaptativa a cada passo de iteração	15000 N	1000 N

O valor do parâmetro rigidez de contato influi basicamente no comportamento do modelo de elementos finitos, porém possui fraca relação com o termo rigidez de contato definido por Hertz, apresentado na equação (2.59). Valores diferentes adotados para a rigidez de contato no modelo de elementos finitos podem resultar no mesmo campo de tensões. Salienta-se, no entanto, que este parâmetro atua no algoritmo de solução como os multiplicadores de Lagrange nos problemas de otimização penalizando a função objetivo. Como o software ANSYS™ utiliza o método variacional, o valor da rigidez de contato penaliza a função de energia de deformação durante a integração. Adotando valores muito baixos resultam respostas incoerentes na região onde as restrições do problema de otimização assumem valores negativos, e usando valores muito altos podem ocasionar problemas de convergência. Fisicamente, o uso do parâmetro rigidez de contato muito baixo implica em uma penetração maior dos nós de um corpo sobre os do outro corpo, condição incoerente com o problema real.

Na Figura 2.16 é mostra o campo de deslocamentos obtido para dois cilindros em contato, utilizando um modelo plano de elementos finitos, para o qual é válida a hipótese de estado plano de deformações.

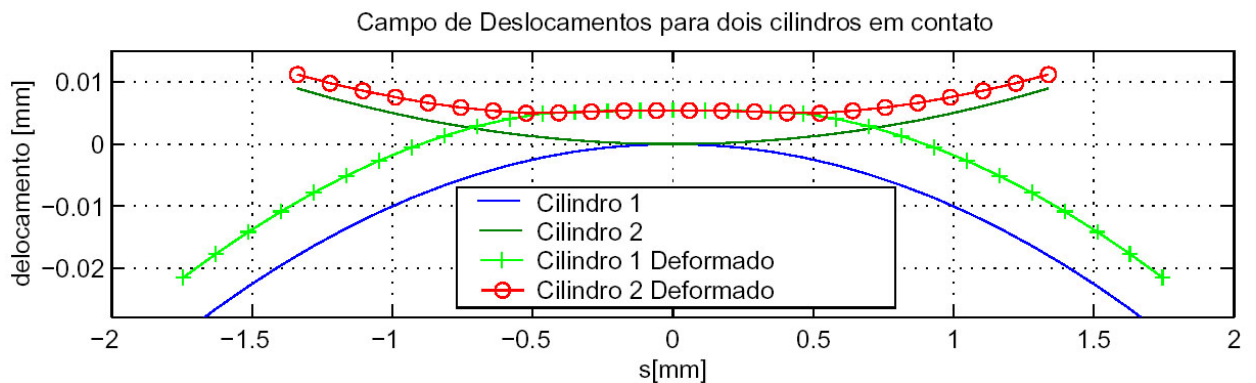


Figura 2.16 – Campo de deslocamentos para dois cilindros em contato.

O correto ajuste do valor da rigidez de contato forneceu uma solução sem penetração entre os corpos. Como a escolha do valor ideal para rigidez de contato apresenta dificuldades, sugere-se que, inicialmente seja adotado o valor calculado pela equação (2.59), permitindo que pequenos ajustes sejam feitos durante o processo de solução. As figuras seguintes apresentam os campos de tensões nos cilindros, na vizinhança da região do contato .

O campo de tensões apresentado na Figura 2.17 possui as mesmas características do campo de pressão obtido pela teoria de Hertz, isto é, possui uma natureza elíptica. O valor máximo da tensão σ_x é 6.63 MPa para a tensão de tração fora da região de contato e o valor mínimo é 599 MPa para a tensão de compressão no centro da região de contato.

As tensões mostradas na Figura 2.18 são equivalentes às tensões máximas de cisalhamento devido ao estado plano de deformações. Nota-se uma grande coerência destes valores com aqueles obtidos analiticamente, Figura 2.8. O maior valor para a tensão de cisalhamento vale 178 MPa.

Na Figura 2.19 é mostrado o campo de tensões de cisalhamento para o plano xy do modelo onde verifica-se uma condição de simetria em relação ao eixo comum aos centros do cilindro demonstrando uma coerência com os valores previstos pela teoria de Hertz.