

**ANDREIA AOYAGUI NASCIMENTO**

**MÉTODOS PSEUDOSPECTRAL DE FOURIER E  
FRONTEIRA IMERSA APLICADOS A  
ESCOAMENTOS SIMPLIFICADOS DE  
ENGENHARIA DE PERFURAÇÃO**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
2016**

**ANDREIA AOYAGUI NASCIMENTO**

**MÉTODOS PSEUDOSPECTRAL DE FOURIER E  
FRONTEIRA IMERSA APLICADOS A ESCOAMENTOS  
SIMPLIFICADOS DE ENGENHARIA DE PERFURAÇÃO**

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Elie Luis Martinez Padilla

Co-orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

**UBERLÂNDIA - MG**

**2016**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- 
- N244m  
2016
- Nascimento, Andreia Aoyagui, 1982-  
Métodos pseudoespectral de Fourier e fronteira imersa aplicados a escoamentos simplificados de engenharia de perfuração / Andreia Aoyagui Nascimento. - 2016.  
190 f. : il.
- Orientador: Elie Luis Martínez Padilla.  
Coorientador: Aristeu da Silveira Neto.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Fluidodinâmica computacional - Teses. 3. Fourier, Análise de - Teses. 4. Petróleo - Prospeção - Teses. I. Padilla, Elie Luis Martínez. II. Silveira Neto, Aristeu da. III. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

**ANDREIA AOYAGUI NASCIMENTO**

**MÉTODOS PSEUDOSPECTRAL DE FOURIER E FRONTEIRA  
IMERSA APLICADOS A ESCOAMENTOS SIMPLIFICADOS DE  
ENGENHARIA DE PERFURAÇÃO**

Tese APROVADO pelo Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica da  
Universidade Federal de Uberlândia.  
Área de concentração: Transferência de Calor  
e Mecânica dos Fluidos.

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Elie Luis Martinez Padilla (Orientador) - UFU

---

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto (Co-Orientador) - UFU

---

Prof. Dr. Rigoberto Eleazar Melgarejo Morales - UTFPR

---

Prof. Dr. Leonardo de Queiroz Moreira - UFG

---

Prof. Dr. Francisco Paulo Lé pore Neto - UFU

---

Prof. Dr. Francisco José de Souza - UFU

Uberlândia, Fevereiro de 2016



*À minha família, que sempre está presente em todos os momentos.*



## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho não poderia ter sido concluído sem a ajuda de diversas pessoas e instituições, às quais presto minha homenagem e gratidão:

À minha mãe, Mitiko, ao meu pai, Márcio e a minha irmã, Fernanda, pelo incentivo e companhia em todos os momentos da minha vida.

Queria dedicar um obrigado especial ao meu noivo Felipe, pelo seu amor, dedicação, compreensão e incentivo na persecução deste objectivo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Elie Luis Martinez Padilla, pela oportunidade e credibilidade depositada em mim indicando os caminhos e a direção a serem seguidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, pelos ensinamentos acadêmicos e a colaboração técnica durante toda a jornada.

Aos professores do programa de pós-graduação.

À CAPES, FAPEG, FAPEMIG, CNPQ e Petrobras pelo incentivo financeiro.

À Universidade Federal de Goiás e a Universidade Federal de Uberlândia.

À todos os membros da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação.

Aos amigos; Werley, Rodrigo Bassan, Rafael Romão, Rafael Sene, Marcos Lourenço, Franco Barbi, Anderson Proença, Dálglis, Renan pela convivência durante o breve período da tese.

Agradeço também a Deus pela possibilidade de estar próximo de pessoas que tanto

me acrescentaram pessoalmente e intelectualmente, permitindo a execução e conclusão de mais uma etapa em minha vida.

NASCIMENTO, A. A., **Métodos Pseudospectral de Fourier e Fronteira Imersa Aplicado a Escoamentos Simplificados de Engenharia de Perfuração**. 2016. 190f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## RESUMO

O presente trabalho tem como propósito, aplicar a metodologia Pseudoespectral de Fourier com o Método da fronteira imersa (IBM) para problemas que envolvem interação fluido estrutura, a qual foi implementada utilizando o método pseudoespectral de Fourier acoplado com o método da fronteira imersa. Inicialmente, foram propostas análises comparativas entre dois métodos numéricos: Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método Pseudoespectral de Fourier (MPEFO), com e sem o uso do método da Fronteira Imersa (MFI). Esta análise engloba a verificação e a validação numérica de ambos códigos, a fim de constatar as vantagens e as desvantagens do MPEFO em relação ao MVF. A segunda parte consiste na implementação de um modelo de interação fluido estrutura no código IMERSPEC2D, esta implementação leva em conta o modelo de interação particionado, com uso do método de Runge-Kutta de quarta ordem otimizado tanto para o avanço temporal do fluido, quanto para a estrutura. Além disso, é realizada a adimensionalização das equações que modelam a movimentação estrutural. As implementações propostas, obteve resultados com maior acurácia e com um custo computacional menor demonstrando aplicabilidade e potencialidade da metodologia IMERSPEC. Por fim, realizou-se aplicações em problemas simplificados de perfuração de poços, ainda bidimensionais, sendo possível observar padrões de escoamento nas tubulações de extração para diferentes razões de aspecto e números de Reynolds.

*Palavras Chave:*

*Dinâmica dos Fluidos Computacional, Método Pseudoespectral de Fourier, Método da Fronteira Imersa, Interação Fluido-Estrutura.*

NASCIMENTO, A. A., **Fourier Pseudospectral and Immersed Boundary Methods applied at Simplified Flows of the Engineering Perforation**. 2016. 190f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## ABSTRACT

The present work aims to present a model of fluid-structure interaction, which was implemented in IMERSPEC2D code, that is a numerical code that solves problems of flow over immersed bodies by using the pseudospectral Fourier method coupled with the immersed boundary method. Initially, it has been proposed a comparative analysis between two numerical methods: Finite Volume Method (FVM) and Fourier Pseudospectral Method (MPEFO) with and without the use of the Immersed Boundary Method (MFI). This first analysis includes verification and validation of both numerical codes, in order to determine the advantages and disadvantages of MPEFO compared to MVF. The second part is the implementation of a fluid structure interaction model in IMERSPEC2D code, this approach takes account the partitioned interaction model, by using the fourth order optimized Runge-Kutta method in both time advanced of the fluid and of the structure. Furthermore, it is proposed to non-dimensionalization of the equations that models the structural movement. These implementations yield results with more accuracy and low computational cost, by proving the applicability and potentiality of IMERSPEC methodology. Lastly, several applications have been held in drilling and extraction oil problems. These simulations are still two-dimensional, however, it is possible to observe interesting flow patterns into extraction pipes for different aspect ratios and Reynolds numbers.

*Key- Words:*

*Computational Fluid Dynamics, Fourier Pseudospectral Method, Finite Volumes Method, Immersed Boundary Method, Fluid-Structure Interaction.*

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Condutores forçados que colapsaram na usina hidrelétrica de Oigawa, em função do golpe de Aríete, (CHAUDHRY, 1979). . . . .	2
1.2	Ponte de Tacoma, momentos antes da total destruição provocada pelo efeito de ressonância originado pelo escoamento de ar sobre a ponte (FRIEDMAN, 2014). . . . .	2
1.3	Turbina Eólica sem pás, (CARVALHO, 2016). . . . .	3
1.4	Exemplos de broca de perfuração, Thomas (2001): (a) Broca de diamantes naturais, (b) Broca tricônica de dentes de aço e (c) Broca tricônica de insertos de tungstênio. . . . .	4
1.5	Sonda de perfuração e principais componentes, (THOMAS, 2001). . . . .	5
1.6	Processo de perfuração, Braga (2009). . . . .	5
1.7	Representação de fraturas rochosas durante o processo de perfuração, (OBRZUT et al., 2015). . . . .	6
2.1	Equemas dos padrões vórtices, (WILLIAMSON; ROSHKO, 1988) . . . . .	10
3.1	Esquema dos equipamentos, <a href="http://www.geocities.ws/perfuracao/circ.htm">www.geocities.ws/perfuracao/circ.htm</a> , utilizados no processo de perfuração. . . . .	20

3.2	Esquema da ação dos estabilizadores na coluna de perfuração. . . . .	20
3.3	Esquema ilustrativo da coluna de perfuração. . . . .	21
3.4	Esquema das geometria simuladas nos dois planos em estudo, a) Esquema ilustrativo do problema físico no plano 01 b) Esquema ilustrativo do problema físico no plano 02, apresentados na Fig.3.3. . . . .	22
3.5	Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa, onde $\vec{x}$ posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano ( $\Omega$ ), $\vec{X}$ posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano ( $\Gamma$ ), $h$ é a distância entre os pontos de colocação eulerianos e $\Delta s$ distância entre os pontos lagrangianos. . . . .	23
3.6	Representação das variáveis relativas à definição de movimento de translação	34
3.7	Diagrama de corpo livre de um corpo rígido cilíndrico, sobre ação de conjunto mola-amortecedor e imerso num fluido. . . . .	36
3.8	Definição do plano $\pi$ . . . . .	43
3.9	Termos da equação de Navier-Stokes definidos em relação ao plano $\pi$ . . . .	44
3.10	Projeção do termo fonte e do termo advectivo sobre o plano $\pi$ . . . . .	46
3.11	Representação esquemática dos domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano.	54
3.12	Fluxograma do acoplamento IMERSPEC e a interação fluido-estrutura. . .	58
3.13	Entes geométricos utilizados no método de volumes finitos numa malha bidimensional. . . . .	59
3.14	Esquema de discretização temporal (a) Método explícito, (b) Método implícito e (c) Método semi-implícito. . . . .	61
4.1	Distribuição de temperatura inicial sobre a barra. . . . .	68
4.2	Convergência espacial comparando diferentes $CFL$ para o método de Euler.	69



4.3	Norma $L_2$ para ambos os métodos utilizando CFL de 0,001 e avanço temporal método Runge-Kutta de quarta ordem clássico. . . . .	69
4.4	(a) Solução da equação de Burger usando malha de 64, $t=\pi$ segundos, (b) Erro máximo das metodologias, para a solução do termo não linear anti-simétrica e CFL=0,001. . . . .	73
4.5	Representação do domínio com condições de contorno não periódicos. (a) Domínio lagrangiano e euleriano unidimensional, (b) o comprimento do domínio euleriano. . . . .	74
4.6	Solução da equação de Burger não periódico (a) campo de velocidade (b) Taxa de convergência no tempo $t=\frac{\pi}{8}$ segundos, para o MPEFO . . . . .	75
4.7	Campos de (a) velocidades na direção horizontal, (b) velocidade na direção vertical e (c) pressão para a solução de Taylor-Green, em $t=0$ [s] (condição inicial). . . . .	77
4.8	Taxa de convergência utilizando o método dos volumes finitos para a solução do problema de Taylor-Green em $t=0,3$ [s]. . . . .	79
4.9	Norma $L_2$ utilizando o método pseudoespectral de Fourier. . . . .	80
4.10	Campo inicial da solução de Taylor-Green com MFI. . . . .	80
4.11	Taxa de convergência com o uso do método da fronteira imersa, (a) MVF, (b) MPEFO. . . . .	81
4.12	Esquema ilustrativo do problema do escoamento de Couette circular. . . . .	82
4.13	Norma $L_2$ obtida para a solução do escoamento de Couette circular. . . . .	84
4.14	Esquema ilustrativo do problema do escoamento de Couette circular, com a utilização da zona de imposição. . . . .	85
4.15	Perfil de velocidade tangencial $\theta=0^\circ$ e MPEFO, (a) dois domínios lagrangianos, (b) três domínio lagrangianos. . . . .	85

4.16	Esquema do problema de fluido-estrutura com um grau de liberdade. . . .	86
4.17	Campo de vorticidade para diferentes $U_r^*$ , em escoamento sobre cilindro com um grau de liberdade. . . . .	88
4.18	Deslocamento normalizado do centro de massa do cilindro ao longo do tempo para diferentes $U_r^*$ . . . . .	89
4.19	Espectro de frequências. . . . .	90
4.20	Amplitude de pico do centro de massa do cilindro ancorado por uma mola.	91
4.21	Amplitude de pico do centro de massa do cilindro ancorado por uma mola, com refinamento para $U_r^*=5,568$ . . . . .	92
4.22	Relação entre frequências do escoamento sobre cilindro ancorado por uma mola. . . . .	92
4.23	Esquema do problema de interação fluido-estrutura com dois graus de liber- dade. . . . .	93
4.24	Campos de vorticidade para $U_r^*=4,9$ com dois métodos de avanço temporal: (a) Euler, (b) Runge-Kutta. . . . .	94
4.25	Deslocamento do centro de massa do cilindro na direção $y$ para $U_r^*=4,9$ (a) método de Euler, (b) método Runge-Kutta. . . . .	95
4.26	Posições da estrutura, (a) método de Euler, (b) método Runge-Kutta. . . .	96
4.27	Diagrama de movimentação do centro do cilindro para: (a) $U_r^*=4,5$ e (b) $U_r^*=6,5$ .	97
4.28	Deslocamento vertical máximo obtido pelo corpo rígido com o aumento da velocidade reduzida. . . . .	98
4.29	Razão da variação das frequências com o aumento da velocidade reduzida.	98
4.30	Campo da magnitude da vorticidade para diferentes velocidades reduzidas em $t^*=1020$ . . . . .	99

4.31	Evolução temporal do centróide do cilindro, nas posições a) horizontais b) verticais. . . . .	101
4.32	Evolução temporal do campo de vorticidade do escoamento para cilindros com dois graus de liberdade, $U_r^*=4,9$ . . . . .	102
5.1	Domínio de cálculo utilizado nas simulações do escoamento Couette circular com duto interno ancorado por um conjunto de mola-amortecedor na direção y. . . . .	104
5.2	Campos de velocidades para $Ta=30$ . . . . .	104
5.3	Campos de pressão e vorticidade para $Ta=30$ , duto interno com um grau de liberdade. . . . .	105
5.4	Evolução temporal para diferentes Taylor; (a) posição do duto interno para $Ta=30$ , (b) coeficiente de sustentação para $Ta=50$ . . . . .	105
5.5	Campos de vorticidade para $Ta=50$ , duto interno com um grau de liberdade. . . . .	106
5.6	Perfil velocidade horizontal ao longo do domínio para $Ta=30$ . . . . .	107
5.7	Evolução temporal do centro do duto interno (a) $Ta=30$ , (b) $Ta=50$ . . . . .	107
5.8	Couette circular com dois graus de liberdade. . . . .	108
5.9	Campos de vorticidade para $Ta=50$ duto com excentricidade em x e y. . . . .	109
5.10	Posição do cilindro interno para diferentes $Ta$ . . . . .	110
5.11	Perfis velocidades ao longo do domínio para a posição $\frac{x}{D_1} = \frac{y}{D_1} = 2,5$ . . . . .	111
5.12	Evolução do deslocamento do baricentro ao longo do tempo para diferentes números de Taylor. . . . .	112
5.13	Comportamento dos coeficientes adimensionais para o escoamento com $Ta=65$ , em função do tempo. . . . .	113
5.14	Espectro de frequência para $Ta=65$ . . . . .	114

5.15	Esquemas dos problemas proposto (a) coluna reta fixa, (b) coluna fixa com contração abrupta e (c) coluna com um grau de liberdade na direção horizontal. . . . .	115
5.16	Campos de (a) velocidade vertical e (b) vorticidade para a simulação com $Re=1000$ e com $512 \times 128$ nós de colocação. . . . .	116
5.17	Linhas de correntes no fundo do poço: a) $Re=500$ , b) $Re=1000$ e c) $Re=1500$ , com $512 \times 128$ nós de colocação. . . . .	117
5.18	Perfis velocidade vertical para as três malhas e $Re=1000$ . . . . .	118
5.19	Erro obtido pela norma $L_2$ nas paredes externas. . . . .	119
5.20	Campos de velocidade e linhas de corrente, para o escoamento com coluna com constrição; (a) $Re=500$ , (b) $Re=1000$ e (c) $Re=1500$ . . . . .	120
5.21	Campos de vorticidade para o escoamento com coluna com duto com constrição, $Re = 1500$ . . . . .	121
5.22	Perfis de velocidade vertical ao longo da direção horizontal, (a) em diferentes posições ao longo do canal para $Re=500$ (b) na posição $\frac{y}{D} = -7,0$ para diferentes números de Reynolds. . . . .	123
5.23	Perfil vertical de pressão diversos $Re$ , (a) no duto interno, posição $\frac{x}{D} = 2,0$ , (b) na posição média do canal anular $\frac{x}{D} = 1,25$ . . . . .	124
5.24	Campos de (a) velocidade vertical e (b) vorticidade. . . . .	125
5.25	Evolução temporal da parede esquerda da coluna ( $\frac{x}{D} = 1,5$ ), $Re=1000$ . . .	126
5.26	Campo de velocidade vertical sobreposto pelas linhas de corrente, $Re=1000$ .	126
5.27	Campo de vorticidade em diferentes instantes de tempo para simulação do canal ancorado por mola à $Re 1000$ . . . . .	127
5.28	Razão de aspecto estudados, (a) $\frac{L}{D} = 14$ , (b) $\frac{L}{D} = 30$ , (c) $\frac{L}{D} = 62$ e (d) $\frac{L}{D} = 126$ . . . . .	128

5.29 Perfis de velocidade vertical para diferentes posições ao longo dos dutos (a)

$\frac{L}{D} = 14$ , (b)  $\frac{L}{D} = 30$  e (c)  $\frac{L}{D} = 62$ . . . . . 129

5.30 Deslocamento e velocidade estrutural para diversas razões de aspecto. . . . 130



## LISTA DE TABELAS

3.1	Grupos adimensionais, para o modelo bidimensional no plano x-y Chern et al. (2014). . . . .	39
3.2	Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46. . . . .	53
4.1	Tempo computacional em segundos, para a solução da Eq. (4.1) com Volumes Finitos e Euler . . . . .	70
4.2	Tempo computacional em segundos, para a solução da Eq. (4.1) com Espectral de Fourier e Euler . . . . .	70
4.3	Tempo computacional em segundos, para a solução da Equação de difusão de calor com Volumes Finitos e Runge-Kutta de quarta ordem clássico. . .	71
4.4	Tempo computacional em segundos, para a solução da EDP com Espectral de Fourier Runge-Kutta . . . . .	71
4.5	Tempo computacional, em segundos, para a Equação de Burgers periódico com avanço temporal Runge-Kutta. . . . .	74
4.6	Tempo computacional, em segundos, para a equação de Burgers domínio não periódico, solução utilizando o MPEFO. . . . .	76
4.7	Parâmetros definidos para simulações. . . . .	79

4.8	Custo computacional para a solução do problema de Taylor-Green com fronteira imersa. . . . .	82
4.9	Parâmetros utilizados no escoamento de Couette circular. . . . .	83
5.1	Tempo computacional para simular 0,5 segundos físicos para obter a solução do escoamento para as quatro razões de $\frac{L_u}{D}$ . . . . .	131



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Siglas

<i>AUX</i>	- variável auxiliar do Runge-Kutta
<i>BZ</i>	- zona de amortecimento (“buffer zone”)
<i>CFD</i>	- “Computational Fluid Dynamics”
<i>DF</i>	- “Direct Forcing”, Modelo da imposição direta da força
<i>DFT</i>	- “Direct Fourier Transform”, transformada discreta de Fourier
<i>DNS</i>	- “Direct Numerical Simulation”, simulação numérica direta
<i>EDP</i>	- Equação Diferencial Parcial
<i>FEMEC</i>	- Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia
<i>FFT</i>	- “Fast Fourier Transform”, transformada rápida de Fourier
<i>FZ</i>	- zona de forçagem
<i>IMERSPEC</i>	- Metodologia da Fronteira Imersa acoplada com a metodologia pseudo-espectral de Fourier
<i>MDF</i>	- “Multi-Direct Forcing”, método da múltipla forçagem,
<i>MFI</i>	- Metodologia da Fronteira Imersa
<i>MFLab</i>	- Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia
<i>MFV</i>	- Modelo Físico Virtual
<i>MVF</i>	- Método dos Volumes Finitos
<i>MPEFO</i>	- Metodologia Pseudoespectral de Fourier
<i>PIV</i>	- “Particle Image Velocimetry”
<i>tnl</i>	- termo não linear das equações de Navier-Stokes
<i>UFU</i>	- Universidade Federal de Uberlândia
<i>UFG</i>	- Universidade Federal de Goiás
<i>EMC</i>	- Escola de Engenharias Elétrica, Mecânica e de Computação
<i>visc</i>	- termo viscoso (difusivo) das equações de Navier-Stokes

### Operadores

$\partial$	- derivada parcial
$\int$	- integral
$\max$	- máximo valor
$\min$	- mínimo valor
$\sum$	- somatória
$\wp$	- projeção

## Subscritos

$i$	- índice da notação tensorial
$j$	- índice da notação tensorial
$\infty$	- infinito
$PhD$	- “Periodical Domain”, domínio periódico
$PhD$	- “Physical Domain”, domínio físico

## Sobrescritos

$a$	- variável analítica
$it$	- iteração atual
$p$	- vetor projetado
$t$	- variável no tempo atual
$\hat{\phantom{a}}$	- variável no espaço espectral de Fourier
$*$	- variável temporária

## Letras gregas

$\alpha$	- constante da mola em $[N/m]$ ou variável auxiliar do Runge-Kutta
$\beta$	- fator de amortecimento em $[Ns/m]$ ou variável auxiliar do Runge-Kutta
$\Delta t$	- discretização do tempo em $[s]$
$\Delta s$	- discretização do comprimento do domínio lagrangiano em $[m]$
$\Delta x$	- discretização do comprimento do domínio na direção $x$ em $[m]$
$\Delta y$	- discretização do comprimento do domínio na direção $y$ em $[m]$
$\Delta z$	- discretização do comprimento do domínio na direção $z$ em $[m]$
$\delta$	- distância entre o centro do volume principal e as células vizinhas
$\varepsilon$	- resíduo das iterações do método da múltipla forçagem
$\theta$	- função filtro
$\Gamma$	- domínio lagrangiano
$\iota$	- Número imaginário, $\iota = \sqrt{-1}$
$\mu$	- viscosidade dinâmica do fluido em $[Ns/m^2]$
$\nu$	- viscosidade cinemática do fluido em $[m^2/s]$
$\pi$	- plano de divergência nula, ou número real constante $\pi = 3,14159265359$
$\rho$	- Massa específica do fluido em $[kg/m^3]$
$\phi$	- função qualquer
$\Omega$	- domínio euleriano
$\tau$	- tangente unitária
$\xi$	- razão de amortecimento estrutural

## Letras latinas

$Cd$	- Coeficiente de arrasto
$Cl$	- Coeficiente de sustentação
$D$	- núcleo de Dirac
$\vec{f}$	- campo de força euleriano em $[N/m^3]$
$\vec{F}$	- campo de força lagrangiano em $[N/m^3]$
$\vec{F}_c$	- força global que o fluido faz sobre um corpo imerso $[N/m^3]$
$freq$	- frequência em $[Hz]$
$h$	- espaçamento entre dois pontos de colocação eulerianos
$\vec{k}$	- vetor número de onda em $[m^{-1}]$
$L$	- comprimento do domínio em $[m]$ ou norma do erro
$NL$	- número de iterações
$Np$	- número de iterações
$N_x$	- número de pontos de colocação na direção $x$
$N_y$	- número de pontos de colocação na direção $y$
$N_z$	- número de pontos de colocação na direção $z$
$p$	- campo de pressão euleriano em $[N/m^2]$
$P$	- campo de pressão lagrangiano em $[N/m^2]$
$q$	- ordem de convergência numérica
$r$	- distância adimensionalizada entre um ponto lagrangiano até um ponto de colocação euleriano
$s$	- superfície lagrangiana
$\vec{r}$	- vetor distância entre o centro de massa de uma partícula até um ponto lagrangiano
$Re$	- número de Reynolds
$RHS$	- variáveis que estão do lado direito de uma equação diferencial parcial
$St$	- número de Strouhal
$t$	- tempo em $[s]$
$T$	- campo de tensão de uma fibra elástica em $[Nm]$
$\vec{u}$	- velocidade euleriana em $[m/s]$
$\vec{U}$	- velocidade lagrangiana em $[m/s]$
$\vec{x}$	- vetor posição de um ponto euleriano $[m]$
$\vec{X}$	- vetor posição de um ponto lagrangiano $[m]$
$W$	- função peso utilizada nos processos de distribuição e interpolação
$cx$	- coeficiente de amortecimento estrutural na direção horizontal
$cy$	- coeficiente de amortecimento estrutural na direção vertical
$kx$	- rigidez estrutural na direção horizontal
$ky$	- rigidez de amortecimento estrutural na direção vertical
$m_s$	- massa da estrutura
$f_n$	- frequência natural
$f'_n$	- frequência de liberação de vórtices
$t^*$	- tempo adimensional
$r_{AB}^*$	- deslocamento estrutural adimensional
$m^*$	- razão mássica
$Ur^*$	- velocidade reduzida
$f_n^*$	- frequência natural reduzida



## SUMÁRIO

Lista de Figuras . . . . .	xi
Lista de Tabelas . . . . .	xvii
Lista de símbolos . . . . .	xx
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	6
1.2 Objetivo . . . . .	7
1.3 Estrutura do trabalho . . . . .	7
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>9</b>
2.1 Métodos experimentais envolvendo interação fluido-estrutura . . . . .	9
2.2 Métodos numéricos envolvendo interação fluido-estrutura . . . . .	11
2.3 Métodos Espectrais . . . . .	16
2.4 Considerações finais . . . . .	18
<b>3 METODOLOGIA</b>	<b>19</b>
3.1 Problema Físico . . . . .	19
3.2 Modelagem Matemática . . . . .	22
3.2.1 Método da Fronteira Imersa - MFI . . . . .	22

3.2.1.1	Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano . . . . .	23
3.2.1.2	Modelagem para o fluido - domínio euleriano . . . . .	24
3.2.1.3	Modelo para o acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano . . . . .	24
3.2.1.4	Cálculo da força lagrangiana . . . . .	26
3.2.1.5	Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de imposição direta da força . . . . .	29
3.2.1.6	Múltipla imposição da força (Multi-Direct Forcing - MDF)	31
3.2.2	Modelagem Estrutural . . . . .	33
3.3	Modelagem Numérica . . . . .	41
3.3.1	Método Pseudoespectral de Fourier . . . . .	41
3.3.1.1	Transformação das equações de Navier-Stokes para o es- paço espectral de Fourier . . . . .	41
3.3.1.2	Projeção . . . . .	44
3.3.1.3	Recuperação do campo de pressão . . . . .	47
3.3.1.4	Método pseudoespectral de Fourier . . . . .	48
3.3.1.5	DFT e FFT . . . . .	49
3.3.1.6	Discretização temporal . . . . .	51
3.3.1.7	Acoplamento entre as metodologias pseudoespectral de Fourier, fronteira imersa e interação fluido-estrutura - IMER- SPEC . . . . .	53
3.3.2	Método dos Volumes Finitos - MVF . . . . .	59
3.3.2.1	Discretização com o Método dos Volumes Finitos - MVF .	60

3.3.2.2	Discretização do tempo . . . . .	61
3.3.2.3	Tratamento dos Termos Advectivos . . . . .	62
3.3.2.4	Acoplamento Pressão-Velocidade . . . . .	63
<b>4</b>	<b>VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO</b>	<b>67</b>
4.1	Análise da acurácia do método dos Volumes Finitos (MVF) e do método Espectral de Fourier (MEFO), aplicados ao modelo de condução de calor em uma barra. . . . .	67
4.2	Solução da Equação de Burgers . . . . .	72
4.3	Solução das Equações de Taylor-Green . . . . .	77
4.4	Validação do MPFEO e MVF acoplado com o MFI . . . . .	82
4.5	Validação do modelo fluido estrutural . . . . .	86
4.5.1	Cilindro com um grau de liberdade . . . . .	86
4.5.2	Cilindro com dois graus de liberdade . . . . .	93
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES DA METODOLOGIA EM ESCOAMENTO SIMPLIFICADOS DE ENGENHARIA DE PERFURAÇÃO</b>	<b>103</b>
5.1	Escoamento de Couette circular com um grau de liberdade na direção $y$ . .	103
5.2	Escoamento de Couette circular com dois graus de liberdade e deslocamento imposto . . . . .	108
5.3	Escoamento bidimensional em sistemas de perfuração coluna-poço. . . . .	114
5.3.1	Coluna de perfuração com o duto concêntrico reto e fixo . . . . .	116
5.3.2	Coluna de perfuração com duto com contração abrupta na saída do duto interno . . . . .	119
5.3.3	Coluna de perfuração com um grau de liberdade na direção $x$ . . . .	124

<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>133</b>
6.1	Trabalhos Futuros . . . . .	135
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>137</b>
	Apêndice . . . . .	147
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>149</b>
A	Equação da Energia com Termo Fonte . . . . .	149
A.1	Discretização a partir do Método Volumes Finitos - MVF . . . . .	150
A.2	Discretização a partir do Método Espectral de Fourier - MEFO . . . . .	152
	<b>APÊNDICE B</b>	<b>155</b>
B	Equação de Burgers - 1D . . . . .	155
B.1	Discretização a partir do Método dos Volumes Finitos - MVF . . . . .	155
B.2	Discretização a partir do Método Pseudoespectral de Fourier - MPEFO . . . . .	157
	<b>APÊNDICE C</b>	<b>159</b>
C	Vórtices de Taylor-Green . . . . .	159



# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

A estrutura em contato com um escoamento está submetida a uma força fluidodinâmica, a qual pode deformar ou iniciar uma movimentação da mesma. Por consequência, devido à esta movimentação ou deformação os campos de pressão e velocidade do escoamento se alteram, modificando a força sobre a estrutura. Portanto, as forças na estrutura são devido ao efeito integrado da pressão fluidodinâmica, resultando em deformação ou movimentação estrutural. Este tipo de interação é chamado de Interação Fluido-Estrutura (IFE).

Os problemas de interação fluido-estrutura (IFE) estão presentes nas mais diversas áreas de engenharia, desde obras de engenharia civil, mecânica, aeronáutica, naval e até na biomecânica, como exemplo, a circulação sanguínea (hemodinâmica).

O fenômeno de interação fluido-estrutura aparece no transporte de líquidos e gases realizados em tubulações, as quais sofrem diversos carregamentos transientes oriundo de mudanças na quantidade de movimento do fluido, causadas por diversas fontes como: fechamento de válvula, partida e parada de bombas, como por exemplo em 1950 numa hidrelétrica na cidade de Oigawa no Japão, ocorreu uma catástrofe devido ao fechamento rápido de uma válvula durante a manutenção do sistema de controle. O efeito foi uma forte

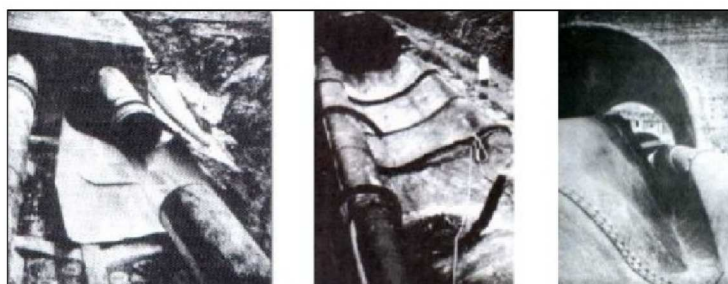


Figura 1.1: Conduitos forçados que colapsaram na usina hidrelétrica de Oigawa, em função do golpe de Aríete, (CHAUDHRY, 1979).

oscilação do campo de pressão na tubulação de água que dividiu o conduto, resultando na separação substancial da tubulação, Fig.1.1, causando grandes danos humanos e materiais (CHAUDHRY, 1979). Este fenômeno é conhecido como golpe de Aríete.



Figura 1.2: Ponte de Tacoma, momentos antes da total destruição provocada pelo efeito de ressonância originado pelo escoamento de ar sobre a ponte (FRIEDMAN, 2014).

Outro exemplo de interação entre fluido e estrutura consiste na ação do vento sobre estruturas expostas à atmosfera, por exemplo, em obras civis costumam-se considerar o efeito do vento sobre a estrutura como um carregamento estático, porém as estruturas estão sujeitas a vibrações devido ao escoamento do fluido, que podem levar a estrutura à ruína, (SANCHES; CODA, 2008). Um dos exemplos mais clássicos de ruína estrutural devido à interação fluido-estrutura é o caso da ponte de Tacoma Narrows, Fig. 1.2. A estrutura suspensa construída em Puget Sound - Washington (USA) na década de 1940,

que entrou em ressonância por não considerar o efeito dinâmico provocado pelo escoamento durante o projeto.

Em 2015 a empresa espanhola *Vortex Bladeless* desenvolveu uma turbina eólica que utiliza o efeito da ressonância, Fig.1.3. Esta turbina gera energia elétrica a partir da movimentação da sua estrutura decorrente do escoamento do vento, pois utiliza da sincronização entre a frequência de liberação de vórtices e a frequência estrutural da turbina para obter energia elétrica.



Figura 1.3: Turbina Eólica sem pás, (CARVALHO, 2016).

A extração de petróleo é um processo constantemente influenciado pelo fenômeno de interação fluido-estrutura, a técnica de perfuração mais difundida é o processo rotativo (DUTRA, 1995). Esta técnica combina o efeito cortante, provocado pelo peso da coluna de perfuração e a rotação da broca sobre a rocha, Fig.1.4, a remoção dos resíduos é realizada pelo fluido de perfuração, o qual executa uma circulação contínua.

A broca de perfuração é fixada à coluna de perfuração (*drills-tring*) que é composta de elementos tubulares, os quais são fixados à medida que avançam os dutos de perfuração (*drill-pipes*) e comandos de perfuração (*drill-collars*) são fixados próximos à broca. Esta montagem é suspensa e manipulada por uma torre Fig.1.5, (BRET-ROUZAUT; FAVEN-NEC, 2011).

O processo rotativo pode ser classificado em dois tipos: Processo rotativo com circulação inversa, ou seja, o fluido de perfuração é injetado pelo canal anular e a lama

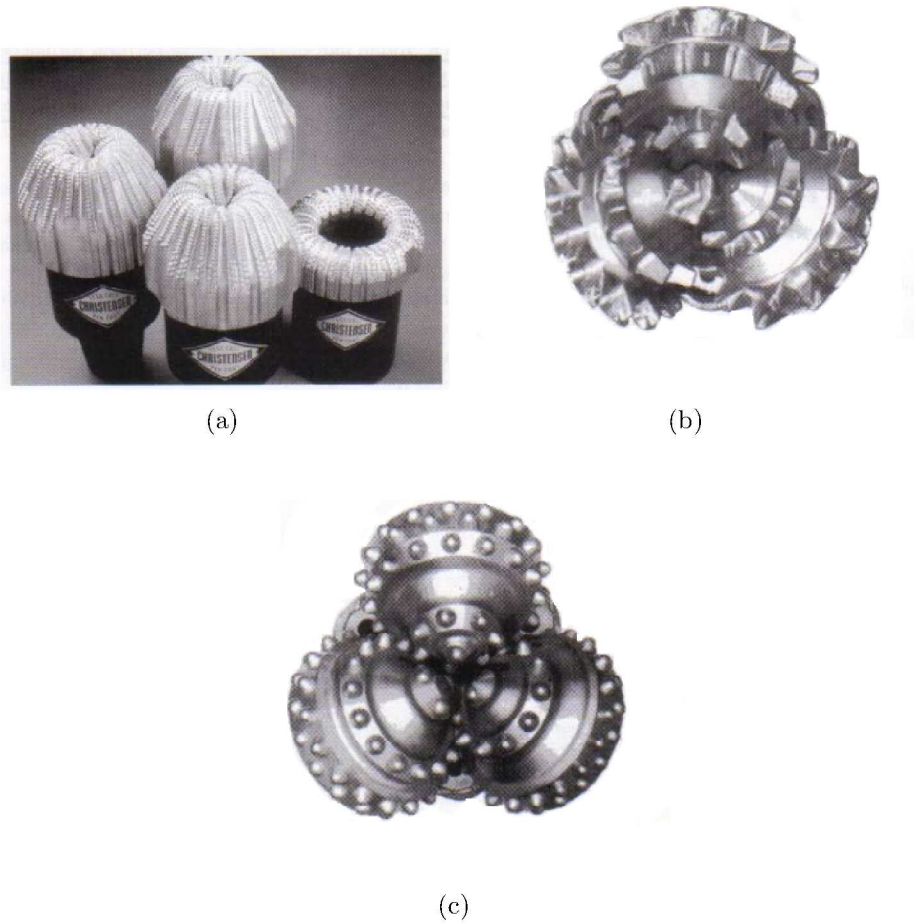


Figura 1.4: Exemplos de broca de perfuração, Thomas (2001): (a) Broca de diamantes naturais, (b) Broca tricônica de dentes de aço e (c) Broca tricônica de insertos de tungstênio.

(fluido e cascalhos) é retirada do poço por meio de aspiração através da bomba de lama ou compressores pelo canal interno. O segundo processo é denominado rotativo com circulação direta, no qual o fluido de perfuração é injetado no poço através do canal interno da coluna de perfuração e sai pelos orifícios localizados na parte inferior da broca, Fig.1.6.

O fluido injetado durante a perfuração possui propriedades físicas que permitem:

- Manter a pressão hidrostática no interior dos poços, a fim de que as paredes do poço não desmoronem,
- Impedir o influxo de fluido do reservatório (*kick*),

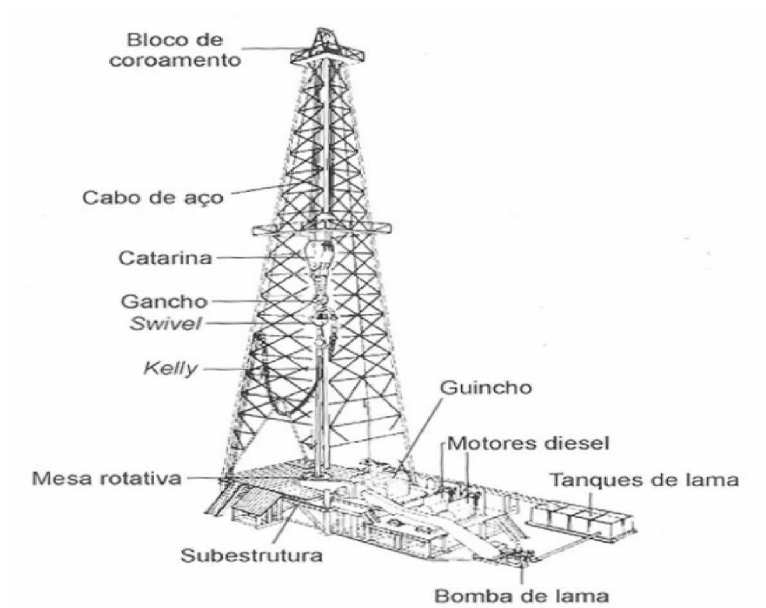


Figura 1.5: Sonda de perfuração e principais componentes, (THOMAS, 2001).

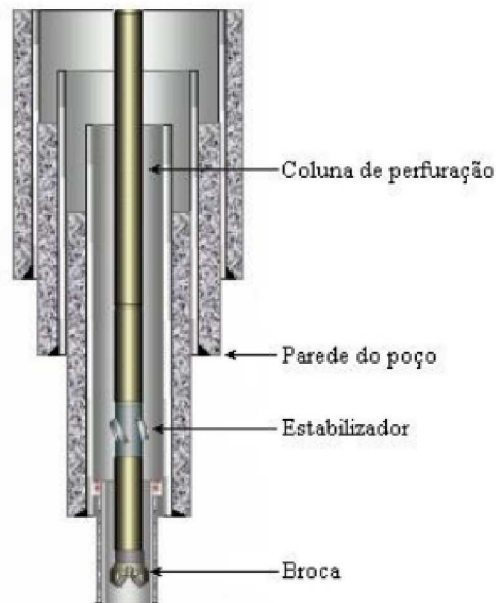


Figura 1.6: Processo de perfuração, Braga (2009).

- Garantir o bombeamento da lama à superfície onde é peneirado e a parte fluida retorna ao poço (fluido e sólidos), (JAHN et al., 2012; THOMAS, 2001).
- Resfriar e lubrificar a coluna de perfuração e a broca.

## 1.1 Motivação

No processo de perfuração de poços diversos problemas físicos podem ocorrer, como perda de circulação decorrente de porosidade na rocha ou formação de fraturas dos poços, Fig.1.7, (OBRZUT et al., 2015; SCHNEIDER et al., 2015; LIMA et al., 2015), falhas nas colunas de perfuração devido ao elevado comprimento e a movimentação rotativa, as quais podem tocar a formação rochosa surgindo, assim, trincas e fissuras nas colunas de perfuração.

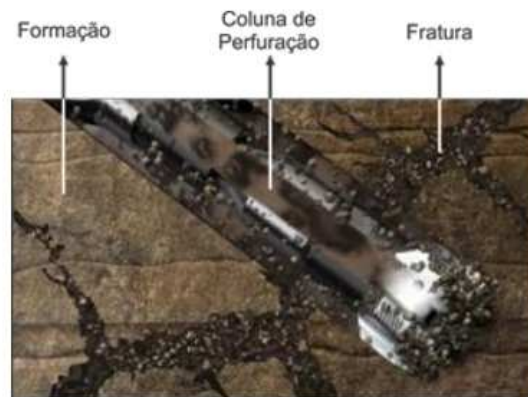


Figura 1.7: Representação de fraturas rochosas durante o processo de perfuração, (OBRZUT et al., 2015).

Contudo desde a descoberta da primeira jazida de petróleo à descoberta dos grandes campos do Pré-Sal na bacia de Santos em 2006, tecnologias apropriadas para a perfuração de poços estão sendo desenvolvidas, a fim de minimizar os impactos ambientais e elevar a produtividade.

De forma geral, pode-se dizer que existem dois métodos que são aplicados para solução deste problema. O método experimental o qual procura descobrir as leis da natureza através de experimentos e o método numérico que utiliza soluções que abordam cálculo diferencial e solução de equações diferenciais parciais para modelagem e solução do problema (HERNANDEZ, 2005; MALISKA, 1995).

Com relação a experimentação em laboratório, esta pode ocorrer em configuração real de problemas, mas por vezes torna-se muito dispendiosa, por outro lado a utilização

de métodos numéricos, estes apresentam vantagens como: a possibilidade da solução de problemas com condições de contorno e geometria complexas, custo normalmente inferior ao experimental, podendo ser utilizado a partir de algumas técnicas, por exemplo, método de diferenças finitas, método dos elementos finitos, método dos volumes finitos, métodos espectrais e combinações destas.

## **1.2 Objetivo**

O objetivo principal do presente trabalho é aplicar a metodologia pseudoespectral de Fourier acoplado ao método fronteira imersa, denominada IMERSPEC, em problemas simplificados de engenharia de perfuração, e como objetivos secundários da presente tese consiste em compreender o problema de interação fluido-estrutura, o padrão de escoamento em dutos anulares e o desenvolvimento, implementação e validação de subrotinas numéricas que resolvem problemas de interação fluido-estrutura (IFE).

## **1.3 Estrutura do trabalho**

### Capítulo I - Introdução

Neste capítulo está explicitado: a justificativa, o objetivo, contribuição e motivação para o desenvolvimento da presente tese.

### Capítulo II - Revisão bibliográfica

Neste capítulo apresenta-se uma sequência de trabalhos que abordam interação fluido-estrutura, método espectrais e métodos dos volumes finitos.

### Capítulo III - Metodologia

Neste capítulo apresenta-se a explicação do problema físico que é modelado e explicado de forma mais detalhada contemplando desde equacionamento às discretizações realizadas. Também são apresentados os métodos pseudoespectral de Fourier, método da



fronteira imersa, método dos volumes finitos e o acoplamento fluido-estrutural. Além do processo de adimensionalização das equações de movimento da estrutura.

#### No Capítulo IV - Verificação e Validação

Neste capítulo estão presentes um estudo de verificação das metodologias espectral e volumes finitos utilizando a técnicas das soluções manufaturadas (TAYLOR, 1923) com e sem fronteira imersa. Para tais resultados, foi desenvolvido um código computacional em volumes finitos de segunda ordem acoplado com o método da fronteira imersa. Com isso, foi possível, verificar a elevada acurácia da metodologia pseudoespectral comparando-a com o método dos volumes finitos de segunda ordem e validar ambas as metodologias a partir da simulação do problema Couette-Circular. Ainda neste capítulo são mostrados resultados utilizando o problema de escoamento sobre cilindros ancorados por molas, a fim de validar o código para simulações de interação fluido-estrutura, apresentando as características físicas de Vibração Induzida por Vórtices (VIV), o que permitiu o uso dos resultados na validação do modelo fluido-estrutural implementado.

#### No Capítulo V - Aplicações da Metodologia em Problemas Simplificados de Engenharia de Perfuração

Neste capítulo são apresentados uma série de problemas relacionados a extração de petróleo, podendo ser considerados estudos de caso, para avaliar o potencial da metodologia e do código numérico desenvolvido.



## CAPÍTULO II

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 Métodos experimentais envolvendo interação fluido-estrutura

Em 1828, o conceito de massa hidrodinâmica, ou massa adicionada, foi proposto pela primeira vez por Friedrich Bessel que investigou o movimento de um pêndulo em um fluido. Friedrich descobriu que um pêndulo em movimento tem “períodos de vácuo”, essa constatação fez Friedrich concluir que o fluido que envolve o pêndulo aumenta a massa efetiva do sistema. Em 1843 Stokes realizou um estudo sobre a aceleração uniforme de um cilindro infinito movendo-se em um meio fluido infinito, ele concluiu que a massa efetiva do cilindro em movimento no fluido, aumenta devido ao efeito de fluido circundante e a quantidade de massa, hidrodinamicamente, tem o mesmo valor da massa de fluido deslocado pela estrutura. Sabe-se que esta descoberta produziu o conceito de interação fluido-estrutura. Em Korotkin (2007) está apresentado uma coletânea de trabalhos envolvendo massa adicionada e descreve alguns métodos experimentais para sua determinação, para aplicações em engenharia naval, aeroespacial e estudos hidrodinâmicos.

Entre 1970 até o final de 1980, investigações sobre o tema foram realizadas englobando estudos da dinâmica de interação entre fluidos e sistemas de fachadas elásticas: tubos, vasos e cilindros co-axiais. Chen, Wambsganss e Jendrzejczyk (1976), Yeh e Chen

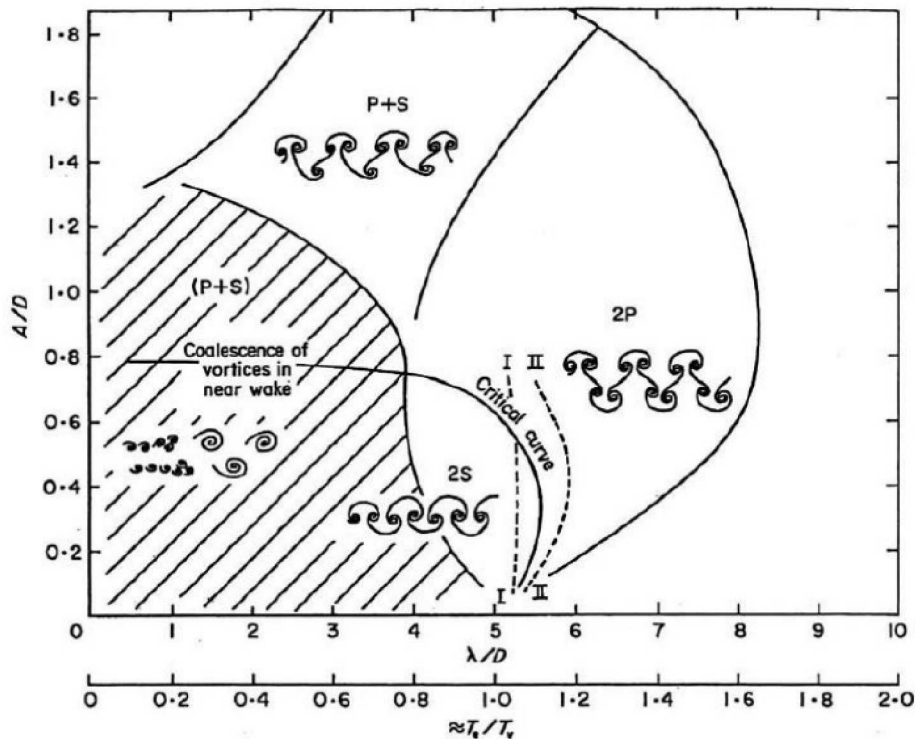


Figura 2.1: Equemas dos padrões vórtices, (WILLIAMSON; ROSHKO, 1988)

(1978), Chen (1980) e Chen (1985) realizaram estudos envolvendo escoamentos induzido por vibrações de estruturas cilíndricas circulares, enfatizando os problemas de sistemas de reatores nucleares. Nestes trabalhos é possível encontrar resultados sobre escoamentos confinados em cilindros coaxiais fazendo aparecer as vibrações induzidas, além de um amplo estudo envolvendo diferentes composições de cilindros imersos.

Williamson e Roshko (1988) expõem em seu trabalho o uso de um aparato experimental para o estudo de escoamento sobre cilindro oscilante. Neste trabalho, os autores descrevem os escoamentos detalhadamente e explicam a formação das estruturas contra-rotativas para diversos números de Reynolds, além de detalhar os modos de liberação dos pares de vórtices. Os resultados apresentados permitiram detectar as frequências de sincronização e as amplitudes experimentadas pelo cilindro, numa sequências de liberação de vórtices: 2S, 2P, S+P, Fig. 2.1, sendo que  $P$  significa um par de vórtices,  $S$  significa um único vórtice e cada padrão é definido pelo número de pares de vórtices individuais.

Khalak e Williamson (1999) mostraram através de análise experimental e compara-

ções com simulações numéricas diretas (DNS), um estudo sobre as oscilações transversais de um cilindro rígido apoiado elasticamente (GOVARDHAN; WILLIAMSON, 2001; JAUVTIS; WILLIAMSON, 2013). Todos esses trabalhos apresentam simulações que utilizam o parâmetro massa adicionada. Os resultados abrangem os deslocamentos máximos, sincronização de frequências, força de arrasto e sustentação, concluindo que a abordagem utilizada no artigo é válida somente para razão mássica (razão entre a massa da estrutura e a massa do fluido) entre 1 à 20.

Fritz e Kiss (1996) foram os pioneiros no estudo sobre interação fluido-estrutura na área de centrais elétricas. Em seu trabalho realizaram um estudo na resposta de vibração de um braço de suporte do cilindro rodeado por um fluido.

Okajima et al. (2004) mostra um estudo experimental, utilizando um túnel hidrodinâmico, sobre vibrações livres induzidas para cilindros circulares em linha. Os primeiros ensaios foram realizados com razão entre comprimento e diâmetro de 5 e 10, os demais ensaios foram realizados usando valores de 14 e 21. Os resultados como visualização das formações de instabilidades próximos ao cilindro e respostas da amplitudes de oscilação com relação aos diferentes coeficientes de amortecimento estrutural são apresentados, o que permitiu aos autores confirmarem que as amplitudes de resposta são sensíveis ao parâmetro de amortecimento da estrutura e excitação com presença de vórtices simétricos para os primeiros ensaios, enquanto a liberação de vórtices alternados são vistos nas frequências de sincronização ou *lock-in* com a oscilação do cilindro.

## 2.2 Métodos numéricos envolvendo interação fluido-estrutura

Nomura e Hughes (1992) desenvolveram um código computacional bidimensional, para resolver os problemas de movimento acoplado de um corpo rígido e um escoamento incompressível de um fluido viscoso. Neste trabalho os autores simularam dois cilindros concêntricos, sendo o cilindro interno considerado um corpo rígido e ancorado sobre uma mola elástica. O método dos elementos finitos foi utilizado para a discretização espacial do

domínio de fluido. O método é aplicado para avaliar a massa adicionada e o amortecimento adicional de um cilindro circular, bem como para simular a vibração de um cilindro circular induzido por desprendimento de vórtices, os resultados obtidos foram comparados com os resultados experimentais de Chen, Wambsganss e Jendrzejczyk (1976), apresentando valores muito próximos.

Dowell e Hall (2001) forneceram uma discussão aprofundada da modelagem dinâmica não-linear de problemas IFE, em grande parte retirados de aplicações em engenharia aeroespacial, com ênfase na construção de modelos de ordem reduzida (ROM).

Dettmer e Peric (2006) apresentam o problema de escoamento sobre cilindros: circulares, quadrangulares e retangulares. Neste trabalho a metodologia empregada foi o método dos elementos finitos acoplada com a solução da estrutura, a qual foi modelada utilizando o método Lagrangiano–Euleriano (ALE). As equações do movimento da estrutura foram implementadas sem imposição de deslocamento, ou seja, o escoamento é considerado livre e o posicionamento do centro de massa da estrutura é resultado, somente, das forças de sustentação porém fez-se uso de um sistema de mola e amortecedor. Os resultados apresentados foram bastante motivadores.

Campregher (2005) apresenta em sua tese a modelagem do problema escoamento sobre corpos imerso. O autor utiliza do método dos Volumes Finitos para solução das equações que modelam a dinâmica dos fluidos. A estrutura imersa (esfera) foi introduzida pelo método da fronteira imersa (Modelo Físico Virtual) e o acoplamento fluido-estrutural foi realizado pelo método particionado, o que permitiu a compreensão do efeito provocado na esfera pela ação do escoamento, conseqüentemente, a movimentação da esfera, bem como, a geração e emissão de estruturas turbilhonares são apresentadas e discutidas. Os resultados apresentados mostram que, o modelo utilizado apresenta resultados com boa concordância com a literatura no padrão dos escoamentos qualitativamente e resultados quantitativos como coeficiente de arrasto aproximam-se da literatura.

O uso dos métodos da diferenças finitas e do método da fronteira imersa para simulação do problema de escoamento sobre cilindros circulares, em repouso ou oscilante

com baixo número de Reynolds pode ser encontrado no trabalho de (GÓIS, 2007), onde o deslocamento e a rotação da estrutura foram impostos por equações matemáticas, no trabalho a autora mostra os resultados aproximando dos valores de outras referências.

Padilla, Martins e Silveira-Neto (2007) aplicaram a metodologia da fronteira imersa em escoamentos incompressíveis com fluido Newtoniano e monofásico. As Equações de Navier-Stokes são discretizadas com segunda ordem no tempo e no espaço empregando o método dos volumes finitos. Neste trabalho os autores aplicam a referida metodologia a problemas simplificados de escoamentos tridimensionais no interior de canais anulares com presença de instabilidades conhecidas como instabilidades de Taylor-Couette.

Shyy et al. (2007) descreveram uma variedade de métodos computacionais para problemas gerais de fronteira em movimento em dinâmica de fluidos, que também cobrem aplicações de IFE. Particularmente, algumas técnicas numéricas no âmbito da abordagem dos volumes finitos foram discutidas e demonstradas com aplicações.

Silva (2008) relata sobre problemas envolvendo escoamento incompressível sobre corpos rombudos, os quais apresentam grande aplicação prática como: escoamentos sobre cabos aéreos e subaquáticos, tubulações oceânicas, foguetes e outros. Neste trabalho, a autora faz uma combinação entre a metodologia da Fronteira Imersa (Modelo Físico Virtual) e o método de interação fluido-estrutura para escoamento incompressível, bidimensional sobre cilindros circulares, com diferentes arranjos e rotação.

Bornschlegell (2008) implementou o método dos volumes finitos e a metodologia da fronteira imersa (Modelo Físico Virtual) para validar a metodologia implementada, o autor simulou problemas como: o escoamento em torno de um cilindro estacionário e o escoamento ao redor de um cilindro em rotação. Apresentando como resultados comprimento das recirculações, perfis das componentes de velocidades e pressão, coeficientes de sustentação e arrasto também são apresentados, mostrando-se fisicamente consistentes.

A modelagem de interação fluido-estrutura tridimensional da movimentação de um pêndulo simples imerso em um fluido newtoniano pode ser encontrada em (KITATANI-

JÚNIOR, 2009). Em seu trabalho o autor utilizou um código em volumes finitos acoplado com a metodologia da fronteira imersa, no qual foi implementada a técnica da múltipla imposição da força. Resultados abordam desde convergência numérica do método implementado à movimentação do pêndulo em torno da sua posição de equilíbrio até a parada.

Lefrançois e Boufflet (2010) apresentaram vários modelos numéricos IFE, com base em um exemplo simples de um gás em uma câmara fechada com um pistão em movimento e realizaram uma análise detalhada para os prós e contras de cada modelo.

Borges (2010) apresenta um estudo tridimensional sobre a modelagem de escoamento sobre estruturas esbeltas: cabos, barras e vigas, a partir da teoria de vigas Cosserat combinada com a metodologia de Fronteira Imersa.

Almeida (2010) utilizou do método dos volumes finitos (CFX/ANSYS) para estudo de um modelo computacional tridimensional transiente do processo dinâmico de IFE, que ocorre no interior de bombas de cavidades progressivas (BCPS) metálicas e elásticas. Nas simulações foi possível avaliar, as características dinâmicas de eficiência do bombeamento por BCPS em função de informações locais e instantâneas dos campos de velocidade, pressão e deformação no seu interior.

Borges (2011) utilizou o método dos volumes finitos de segunda ordem acoplado com o método da fronteira imersa. Neste trabalho o autor realizou um estudo sobre a metodologia numérica em problemas de interação fluido-estrutura, para escoamentos transientes em cilindros concêntricos e excêntricos: Taylor-Couette, Taylor-Couette com oscilação forçada, Taylor-Couette com translação forçada, Taylor-Couette com oscilação e translação forçada, Taylor-Couette Espiral e Taylor-Couette Espiral com oscilação forçada.

Lima (2011) abordou em sua tese, estudos envolvendo escoamentos ao redor de cilindros: rígidos e flexíveis, por meio de uma comparação numérica e experimental. Nesta tese o autor utilizou o método dos Vórtices Discretos apresentando resultados próximo

dos obtidos nos casos experimentais.

Silva (2013) realizou uma investigação sobre interação fluido-estrutura através de simulações numéricas (método dos volumes finitos-CFX), o problema estudado consiste no escoamento ao redor de um cilindro livre para vibrar na direção transversal, para números de Reynolds de 200 e 10000 estão apresentados. Resultados como média do coeficiente de arrasto, a média dos desvios quadráticos do coeficiente de sustentação foram apresentados, e mostraram-se coerentes com os dados experimentais, conseguindo obter a mudança no padrão de esteiras de 2S para 2P.

Gonçalves (2013) apresenta análises numéricas (método dos elementos finitos) do fenômeno de Vibração Induzida por Vórtices (VIV) que ocorrem na interação entre escoamentos uniformes e cilindros apoiados em base elástica, para baixos números de Reynolds. Neste trabalho o autor aborda um estudo com cilindros fixos para escoamentos com número de Reynolds entre 90 à 140, foram realizando comparações de números de Strouhal, forças de arrasto e sustentação, apresentando resultados 0,167 %, 0,32 % e 0,51%. Posteriormente, é realizada a análise do cilindro apoiado em base elástica (com uma mola e um amortecedor) na direção transversal ao escoamento para os mesmos números de Reynolds. São estudados os campos de pressão e velocidade ao redor do cilindro, as forças de sustentação e arrasto e as amplitudes e frequências de vibração. Resultados como amplitude de deslocamento do centro do cilindro, sincronização entre as frequências, estão apresentados e comparados com trabalhos experimentais e numéricos.

Chern et al. (2014) apresenta uma modelagem do problema de interação fluido-estrutura, utilizando o método dos volumes finitos acoplado com o método da fronteira imersa. Este trabalho mostra que as forças hidrodinâmicas podem provocar a vibração da estrutura devido ao desprendimento de vórtices a jusante do cilindro, obtendo as frequências denominada de *lock-in*, fenômeno de sincronização entre a frequência de liberação de vórtices e frequência natural da estrutura, o que fisicamente, ocasiona o aumento da amplitude de deslocamentos. O autor mostra resultados do desprendimento de vórtices 2S e 2S-C, deslocamentos do centro do cilindro e frequência de *lock-in* para diferentes

números de Reynolds.

## 2.3 Métodos Espectrais

Os métodos espectrais são utilizados para resolver as equações diferenciais baseado no método dos resíduos ponderados (MRP), o qual consiste em aproximar a variável dependente do problema por expansão em séries conhecidas, com coeficientes a determinar, chamadas de funções tentativas. A escolha da função ponderadora define três distintas abordagens: Espectral de Galerkin, Espectral de Colocação e Espectral de Tau, o que distingue esses regimes é a função peso nela utilizada, (CANUTO et al., 2006; CANUTO et al., 1988).

Christensen e Prahm (1976) desenvolveram um modelo numérico para modelar problemas de dispersão de poluentes na atmosfera, este modelo baseou-se no método pseudoespectral. As equações incluem o efeito de advecção, difusão e dispersão, os autores visualizaram a presença do fenômeno de Gibbs, desta forma fez uso de processos de filtragem.

Pasciak (1980) realiza comparações de acurácia entre o método espectral de colocação e o método espectral de Galerkin, observando erros de *aliasing* somente para a aproximação pseudoespectral. O autor realiza simulações envolvendo expansão em série de polinômios de Chebyshev, o que permite afirmar que os erros envolvidos na aproximação espectral-colocação e espectral-Galerkin são similares quando a expansão apresenta rápida taxa de convergência.

Patera (1984) propôs o método dos elementos espectrais para resolver as equações de Navier-Stokes. Este método uniu a acurácia dos métodos espectrais com a generalidade dos elementos finitos. Para demonstrar a acurácia do método dos elementos espectrais, o autor apresenta solução da equação unidimensional de advecção e difusão (Equação de Helmholtz) mostrando vantagens do método espectral. O autor também realizou simulações de escoamento num canal bidimensional em expansão. Os resultados comprovam a



elevada acurácia da técnica espectral e mostra desvantagem desta metodologia com relação aos domínios complexos.

Moser, Moin e Leonard (1983) utilizaram do método espectral de Chebyshev para resolver a equação de Navier-Stokes em um canal entre cilindros concêntricos. O método utiliza expansões espectrais que satisfaçam as condições de contorno e a equação de continuidade. Vários testes foram realizados, desde a validação da metodologia à problemas para escoamento entre cilindros concêntricos, incluindo o escoamento de Taylor-Couette com vórtices de Taylor e vórtices axissimétricos ondulados. Em todos os casos os resultados apresentaram-se de acordo com resultados experimentais e teóricos das referências.

Yang, Zhou e Wei (2002) fazem uma comparação detalhada do desempenho entre o algoritmo com convolução direta (DSC) e o método pseudospectral de Fourier (FPS) para a solução de equações diferenciais parciais (EDP). Foram realizadas simulações com a equação do calor, a equação de onda e a equação de Navier-Stokes. A discretização temporal empregou-se o método de Crank-Nicolson e Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados foram apresentados através de duas medidas numéricas, a norma  $L_2$  e a norma  $L_\infty$ , o autor afirma que a método FPS é mais acurado do que a DSC, além do método de FPS acoplado com o algoritmo FFT, ser mais rápido do que o algoritmo de DSC.

Kolomenskiy e Schneider (2009) desenvolveram um modelo numérico baseado no método pseudoespectral de Fourier, para modelar problemas de interação fluido-estrutura. Os corpos sólidos foram modelados pelo método de volume de penalização e as equações de Navier-Stokes bidimensionais são transcritas pela formulação da vorticidade, e discretizada pelo método pseudoespectral de Fourier. O método numérico foi validado para diferentes casos: escoamento sobre cilindro, escoamento de Couette circular, sedimentação de partículas, e queda de uma folha, a qual se movimenta de forma elíptica e rotativa.

Rizales (2005) desenvolveu o método do multidomínio espectral para resolver problemas bidimensionais de escoamentos incompressíveis. Este método é uma combinação do método de colocação espectral, o método de decomposição do domínio não sobreposto e a técnica da matriz influência. O autor utilizou o método multidomínio para soluções

das equações unidimensional e bidimensional, as quais mostram a precisão espectral e eficiência do método.

Mariano (2007), Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2010), Mariano (2011) simularam problemas de escoamentos sobre geometrias complexas usando a metodologia IMER-SPEC; Moreira (2007), Moreira (2011) apresenta resultados sobre problemas de escoamentos tridimensionais turbulentos. Esses trabalhos mostram a potencialidade da metodologia que permite obter resultados mais exatos e com um custo computacional mais baixo em relação a outros métodos de alta ordem de convergência.

## **2.4 Considerações finais**

A presente tese apresenta uma modelagem matemática para o processo de interação fluido-estrutura, e dentre as técnicas existentes: método dos volumes finitos, método dos elementos finitos, método das diferenças finitas e outros, nesta tese foi utilizada o Método pseudoespectral de Fourier, devido a elevada acurácia. No âmbito dos métodos de elevada acurácia a modelagem matemática desenvolvida permitiu o uso de incrementos temporais superiores a  $10^{-9}$ , para o acoplamento da interação fluido-estrutura aumentando a velocidade de processamento.

## **CAPÍTULO III**

### **METODOLOGIA**

Neste capítulo está explanado a metodologia empregada para o desenvolvimento da presente tese, ou seja, estão relatados com maiores detalhes: o método pseudoespectral de Fourier, o método da Fronteira Imersa e a modelagem que envolve o fenômeno de interação fluido-estrutura. Ressaltando que, para o desenvolvimento deste capítulo, tomou como base as referências bibliográficas: Mariano (2007), Canuto et al. (2006) e Chern et al. (2014).

#### **3.1 Problema Físico**

No processo de perfuração rotativa, Fig. 3.1, o movimento de rotação promovido pela mesa giratória é transmitido pela coluna de perfuração até a broca e a interação entre: o fluido, coluna de perfuração, broca e as paredes do poço ocasiona a formação de vórtices no escoamento do fluido, consequentemente a modificação do campo de pressão entre a coluna de perfuração e a parede do poço implica, no surgimento de esforços fluidodinâmicos sobre a estrutura rotativa descentralizando-a. Essa descentralização da coluna de perfuração propicia contatos entre a formação rochosa e a coluna flexível de perfuração, afim de evitar este contato é utilizado estatores fixos na estrutura da coluna

de perfuração, Fig. 3.2.

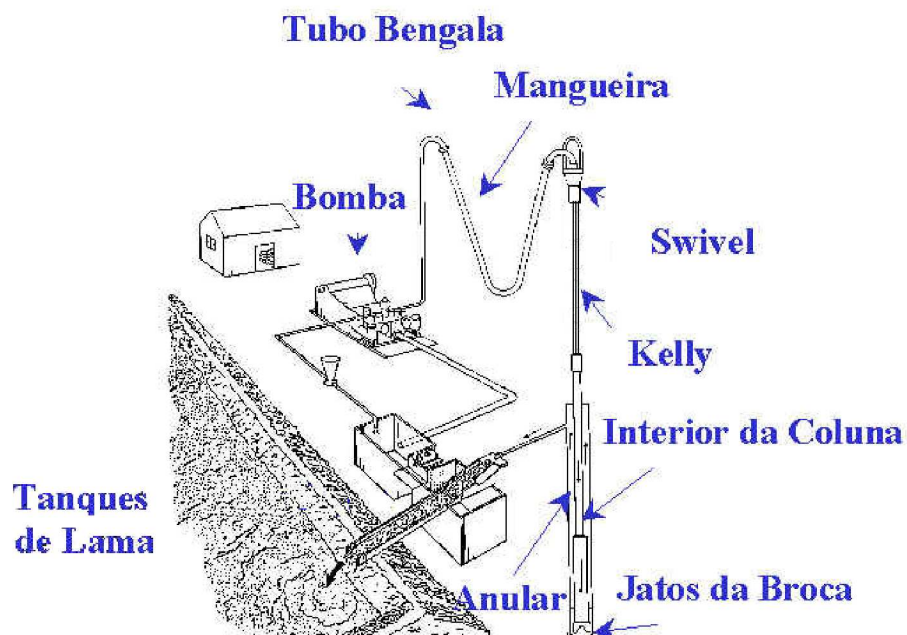


Figura 3.1: Esquema dos equipamentos, [www.geocities.ws/perfuracao/circ.htm](http://www.geocities.ws/perfuracao/circ.htm), utilizados no processo de perfuração.

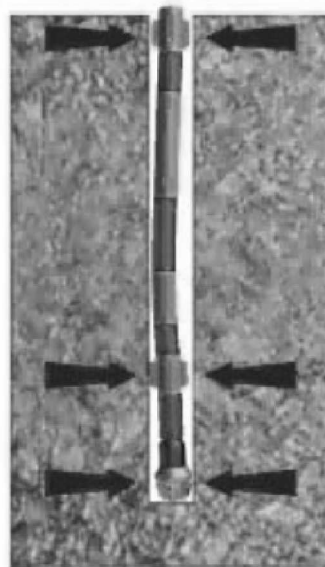


Figura 3.2: Esquema da ação dos estabilizadores na coluna de perfuração.

Devido a grande complexidade de representar o problema matematicamente, o presente trabalho apresenta uma modelagem simplificada como mostrado na Fig.3.3. Dois distintos casos foram modelados, um referente ao plano transversal à coluna de perfuração (plano 01) onde, a coluna de perfuração foi representada pelo cilindro interno e o cilindro

externo modela a parede do poço. No segundo caso, plano 02, a modelagem é realizada para analisar o escoamento no fundo do poço de perfuração com a presença da coluna de perfuração e as paredes do poço, evidência-se que nesta modelagem não foi considerada a broca.

O fluido de perfuração é um fluido não-newtoniano que possui as seguintes funções: controlar a pressão hidrostática suficiente em zonas permeáveis para evitar influxo de fluidos da formação rochosa para o poço, *kick*, além de carregar consigo os cascalhos gerados pela broca até a superfície, manter os sólidos em suspensão durante as paradas de circulação e o poço aberto estável para permitir o prosseguimento das operações de perfuração. No presente trabalho este fluido foi simplificado como fluido newtoniano.

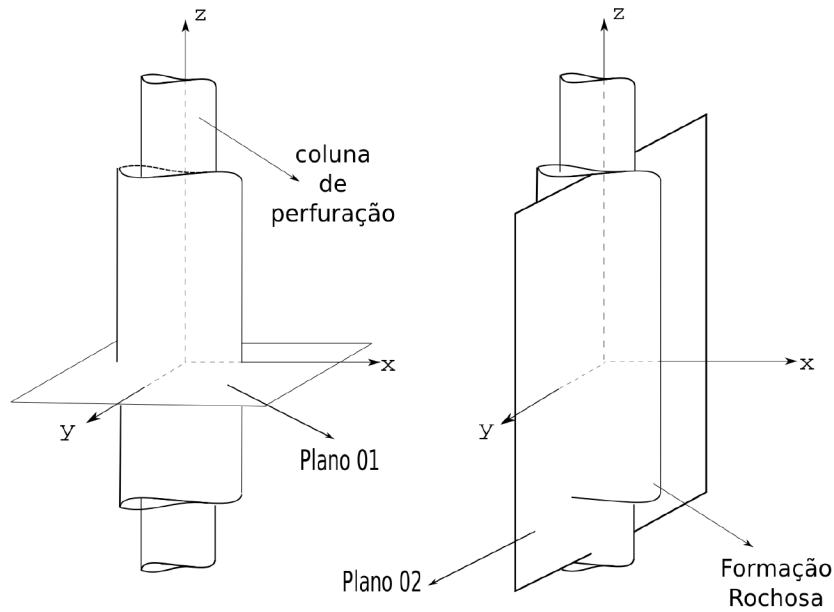


Figura 3.3: Esquema ilustrativo da coluna de perfuração.

Na Figura 3.4 a rigidez equivalente da coluna é representada por molas com constantes  $k_x$  e  $k_y$  e amortecedores viscosos  $c_x$  e  $c_y$ . O diâmetro externo,  $D_2$ , representa a rocha, e o diâmetro interno,  $D_1$ , representa o diâmetro da coluna de perfuração.  $L_y$  e  $l_y$  representam o comprimento da rocha que está sendo perfurada e o comprimento da coluna de perfuração, respectivamente. Os parâmetros relacionados à estrutura são: a massa  $m_s$  e as rigidez  $k_x$  e  $k_y$  da coluna de perfuração. Os parâmetros relevantes do fluido são: a

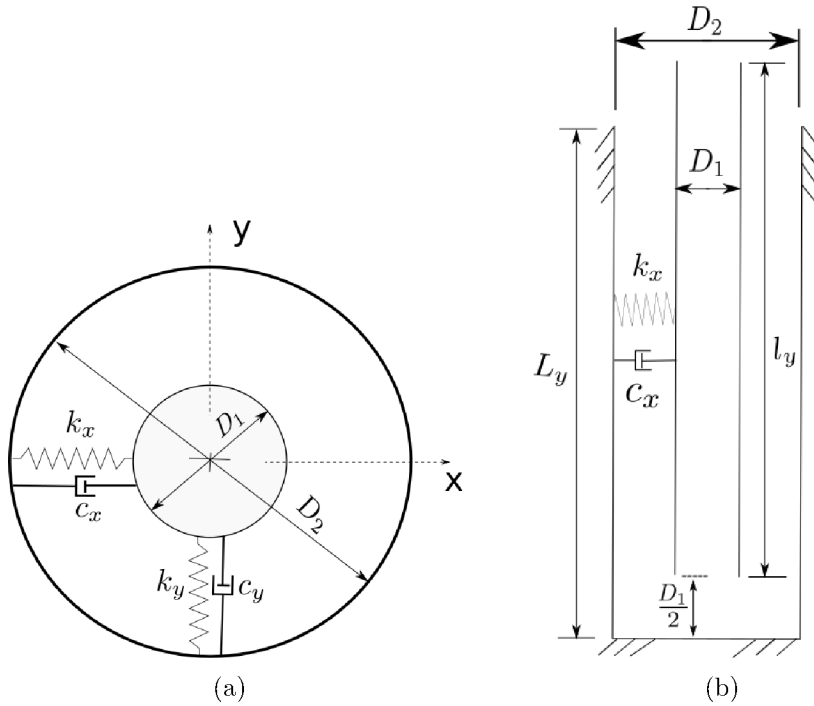


Figura 3.4: Esquema das geometria simuladas nos dois planos em estudo, a) Esquema ilustrativo do problema físico no plano 01 b) Esquema ilustrativo do problema físico no plano 02, apresentados na Fig.3.3.

massa específica,  $\rho$ , e a viscosidade dinâmica,  $\mu$ .

### 3.2 Modelagem Matemática

Esta subseção é composta pela explicação de três modelos distintos sendo: Dinâmica dos Fluidos, Fronteira Imersa e Dinâmica do Corpo Rígido.

#### 3.2.1 Método da Fronteira Imersa - MFI

A modelagem matemática via fronteira imersa, para fins didáticos, será dividida em três etapas: o tratamento dos domínios euleriano e lagrangiano, a transferência de informação entre esses domínios e, por último, o cálculo da força lagrangiana.

### 3.2.1.1 Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano

O MFI trabalha simultaneamente com dois domínios de cálculo. Um, denominado euleriano ( $\Omega$ ), cartesiano e fixo, onde são resolvidas as equações para o fluido, e o outro é denominado lagrangiano ( $\Gamma$ ), o qual representa a interface imersa no escoamento. No caso de escoamentos bidimensionais, ele é representado por uma linha e, no caso tridimensional, por uma superfície, vide Fig. 3.5. É importante notar que as equações para o fluido são resolvidas em todo o domínio euleriano ( $\Omega$ ), mesmo na sua região delimitada pelo domínio lagrangiano. O domínio lagrangiano ( $\Gamma$ ) representa uma fronteira entre dois tipos de fluidos, ou a fronteira entre um fluido e um sólido.

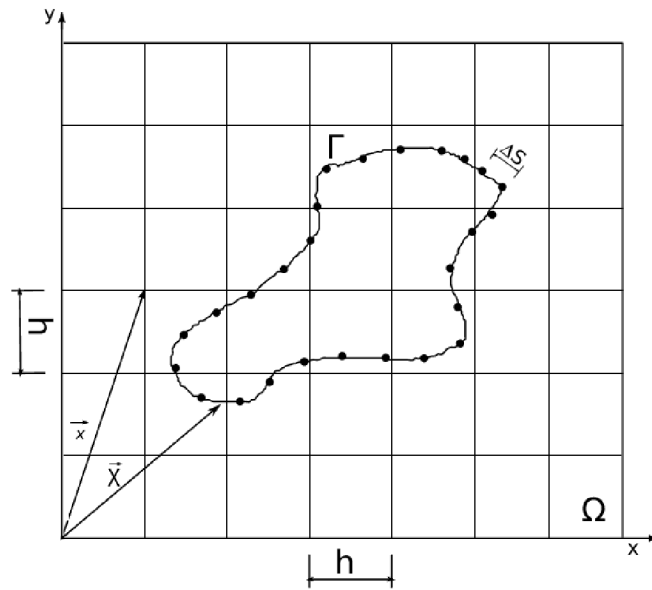


Figura 3.5: Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa, onde  $\vec{x}$  posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano ( $\Omega$ ),  $\vec{X}$  posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano ( $\Gamma$ ),  $h$  é a distância entre os pontos de colocação eulerianos e  $\Delta s$  distância entre os pontos lagrangianos.

Sendo o domínio lagrangiano independente do domínio euleriano, consegue-se modelar e simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando domínios cartesianos para o fluido. No trabalho de Vedovoto (2007), é mostrada a capacidade de importar qualquer geometria lagrangiana para o interior do domínio euleriano. Outra vantagem a ser considerada é que, no caso de problemas de interação fluido-estrutura, a malha euleri-

ana é fixa, não havendo necessidade de remalhagem. Mesmo com a estrutura se movendo, apenas a interface lagrangiana se move. O fato de trabalhar sempre com um domínio cartesiano fixo é a principal vantagem apontada pelos pesquisadores Fadlun et al. (2000), Lima-E-Silva (2002) e Mittal e Iaccarino (2005), quando comparam com metodologias que utilizam malha não-estruturada, ou metodologias que precisam remalhar o domínio fluido.

### 3.2.1.2 Modelagem para o fluido - domínio euleriano

O próximo passo a ser compreendido é como a comunicação entre os dois domínios é realizada. Para isso, são consideradas as equações de Navier-Stokes Eq.(3.1) e a equação da continuidade Eq.(3.2) válidas no domínio  $\Omega$ , da Fig. 3.5 e para  $t \geq 0$ , onde  $t$  é o tempo. São considerados apenas fluidos newtonianos, escoamentos incompressíveis, sem transferência de calor e com propriedades físicas do fluido constantes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2)$$

onde  $p = p^*/\rho + gz$ ;  $p^*$  é a pressão estática em  $[N/m^2]$ ;  $z$  é a cota vertical alinhada com o vetor gravidade  $\vec{g}$  na direção vertical e sentido positivo para cima;  $u_i$  são as componentes da velocidade em  $[m/s]$  na direção  $i = 1, 2$  para os problemas bidimensionais e  $i = 1, 2, 3$  para os problemas tridimensionais.  $f_i = \frac{f_i^*}{\rho}$ ;  $f_i^*$  é o termo fonte de força em  $[N/m^3]$ ;  $\rho$  é a massa específica em  $[kg/m^3]$ ;  $\nu$  é a viscosidade cinemática em  $[m^2/s]$ .

### 3.2.1.3 Modelo para o acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano

Na Equação (3.1) aparece o termo  $f_i$ , o qual pode ser considerado, fisicamente, como um termo que representa as forças de campo, como por exemplo, uma força eletro-



magnética e a gravidade. No caso do MFI, este termo é o responsável por representar a interface imersa no domínio euleriano ( $\Omega$ ). Matematicamente ele é representado pela Eq.(3.3) (ENRIQUES-REMIGIO; SILVEIRA-NETO, 2007):

$$f_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde  $F_i(\vec{X}, t)$  é a força lagrangiana definida no domínio  $\Gamma$ .

Esta definição leva a um campo  $f_i(\vec{x}, t)$  descontínuo, o qual pode ser resolvido numericamente apenas quando houver coincidência dos pontos que compõem a interface com algum dos pontos que compõem o domínio fluido. Caso não haja coincidência, o que, para geometrias complexas é muito frequente, deve-se distribuir a função  $F_i(\vec{x}, t)$  sobre a sua vizinhança. Para tanto, faz-se uso da função distribuição de força,  $D_h(\vec{x} - \vec{X})$ , proposta por Peskin (1972), e transcrita aqui pelas Eqs. 3.4 e 3.5.

$$f_i(\vec{x}) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_i(\vec{X}) \Delta s^2, \quad (3.4)$$

$$D_h(\vec{x} - \vec{X}) = \frac{1}{h^2} W_g(r_x) W_g(r_y), \quad (3.5)$$

onde,  $r_x = \frac{x-X}{h}$  e  $r_y = \frac{y-Y}{h}$ , sendo  $h$  o espaçamento entre os nós de colocação do domínio euleriano, quando esse é discretizado,  $\Delta s$  é o espaçamento entre os nós discretizados do domínio lagrangiano, e  $W_g$  é a função peso. Se o problema for tridimensional usa-se  $h^3$ ,  $\Delta s^3$  e  $r_z = \frac{z-Z}{h}$ .

O campo de força euleriano,  $f_i(\vec{x}, t)$ , é nulo em todo domínio, exceto quando se aproxima dos pontos lagrangianos, onde ele passa a modelar virtualmente a presença da membrana imersa, simulando a presença de um corpo ou a interface entre dois fluidos. Com isso não é necessário fazer uma adaptação da malha euleriana para localizar a interface (LIMA-E-SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003).

Uma vez calculado o campo de força lagrangiano,  $F_i(\vec{X}, t)$ , este pode ser distribuído e, assim, transmitir a informação da presença da geometria para a malha euleriana.

No presente trabalho utilizou-se duas funções peso distintas: a função cúbica,  $W_c$ , Eq.(3.6) foi proposta por Tornberg e Engquist (2004); a função chapéu (“hat”),  $W_h$ , Eq.(3.7), a qual equivale a uma interpolação bilinear, mostrada no trabalho de Su, Lai e Lin (2007),

$$W_c(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3 & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ 1 - \frac{11}{6}|r| + |r|^2 - \frac{1}{6}|r|^3 & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r| \end{cases}, \quad (3.6)$$

$$W_h(r) = \begin{cases} 1 - |r| & \text{se } 0 \leq |r| \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < |r| \end{cases} \quad (3.7)$$

A função peso  $W_c$ , Eq.(3.6), não satisfaz às propriedades matemáticas necessárias que uma função distribuição deve ter. Todavia, Griffith e Peskin (2005) mostram que, mesmo assim, ela apresenta resultados melhores que algumas funções que satisfazem todas as propriedades. As funções peso,  $W_c(r)$  e  $W_h(r)$ , são fundamentais para a acurácia e ordem de convergência numérica da metodologia, resultados que abordam a análise entre as funções peso estão apresentados nos resultados.

#### 3.2.1.4 Cálculo da força lagrangiana

No contexto da explicação da metodologia da fronteira imersa, é necessário descrever o modelo para o cálculo da força lagrangiana,  $F_i(\vec{X}, t)$ . Neste ponto também existem variações de tipos de métodos de fronteira imersa, porém o presente trabalho ficará restrito ao método da imposição direta da força (“Direct Forcing” - DF) proposto por Uhlmann

(2005) e também apresentado nos trabalhos de Shu, Liu e Chew (2007), Su, Lai e Lin (2007) e Wang, Fan e Luo (2008), entre outros. Todos esses apresentam diferentes tipos de discretização espacial e temporal das equações de Navier-Stokes, porém o conceito do modelo DF é sempre o mesmo. No presente trabalho, foi utilizado o método da multi-forçagem apresentada por Mariano (2011).

Primeiramente, determina-se o campo de força euleriano, isolando  $f_i$  na Eq.(3.1):

$$f_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.8)$$

Como a Eq. (3.8) foi desenvolvida a partir da hipótese do contínuo e o domínio  $\Gamma$  está contido em  $\Omega$ , pode-se definir a força lagrangiana através da Eq.(3.9):

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j}, \quad (3.9)$$

onde as variáveis maiúsculas dizem respeito ao domínio lagrangiano. A Eq.(3.9) representa a segunda lei de Newton aplicada às partículas de fluido que estão localizadas na interface fluido-fluido ou fluido-sólido. Discretizando a derivada temporal da Eq.(3.9) através de um esquema de Euler explícito (WANG; FAN; LUO, 2008), obtém-se:

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (3.10)$$

onde

$$RHS_i = \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j}, \quad (3.11)$$

e  $\Delta t$  é o passo de tempo.

O método “direct forcing” consiste em somar e subtrair um parâmetro temporário

$U_i^*$  no operador discretizado do tempo (WANG; FAN; LUO, 2008), ou seja:

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^* + U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + R H S_i^t. \quad (3.12)$$

O próximo passo é decompor a Eq.(3.12) em duas outras Eqs. (3.13) e (3.14), no mesmo passo de tempo:

$$\frac{U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + R H S_i^t = 0, \quad (3.13)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}. \quad (3.14)$$

A Equação (3.13) pode ser definida tanto no domínio lagrangiano, quanto no domínio euleriano. Desta forma, consegue-se obter o parâmetro temporário  $u_i^*$  resolvendo-se a Eq.(3.15),

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} + r h s_i^t = 0. \quad (3.15)$$

Fazendo uma analogia com um método preditor-corretor (CHORIN, 1968), este parâmetro temporário  $u_i^*$ , pode ser entendido como um campo de velocidade predita (estimada), ou seja, a Eq.(3.15) é a equação de Navier-Stokes Eq.(3.1) sem a influência do termo fonte  $f_i$ . Em um segundo momento, após obter o termo fonte, faz-se a “correção” do campo  $u_i^*$ , usando a Eq.(3.16), isto é, o campo de velocidade euleriano recebe a informação do campo de força:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t(f_i). \quad (3.16)$$

A Equação (3.14) requer o cálculo de  $U_i^*$ , o que vem do processo de transferência de informação do domínio euleriano para o domínio lagrangiano. Para isso, é utilizada,

ou a Eq.(3.17), quando há coincidência entre os pontos do domínio lagrangianos com os do domínio eulerianos, ou a função de interpolação, dada pela Eq.(3.18):

$$U_i^*(\vec{X}, t) = \begin{cases} u_i^*(\vec{x}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases}, \quad (3.17)$$

$$U_i^* = \sum_{\Omega} u_i^* D_h(x_i - X_i) h^2. \quad (3.18)$$

A função de interpolação pode ser entendida como um processo oposto ao de distribuição, isto é, enquanto que na operação de distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os vizinhos eulerianos, na operação de interpolação transfere-se a informação dos pontos eulerianos vizinhos para um ponto lagrangiano. Essas transferências são ponderadas pela distância entre esses pontos,  $|x_i - X_i|$ , através da função  $D_h$ , dada por uma das Eqs. (3.6) e (3.7).

O termo  $U_i^{t+\Delta t}$  que aparece na Eq.(3.14), diz respeito à velocidade da fronteira imersa no tempo  $t + \Delta t$ . Normalmente, essa velocidade é conhecida para problemas os quais é possível especificar  $U_i^{t+\Delta t}$ . Para problemas de interação fluido-fluido, ou fluido-estrutura,  $U_i^{t+\Delta t} = U_{FI}$ , onde  $U_{FI}$  deve ser obtida do modelo que rege o movimento da interface. Por exemplo, utilizando a abordagem particionada para a solução de problemas de interação fluido-estrutura (CAMPREGHER, 2005), primeiramente, resolve-se as equações que regem o movimento da estrutura, obtendo a nova posição e a velocidade estrutural. Esta velocidade é, então, passada para o cálculo da força lagrangiana.

### 3.2.1.5 Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de posição direta da força

A fim de facilitar o entendimento desta metodologia, apresenta-se um resumo das equações descritas até agora, na sequência em que elas são utilizadas no algoritmo imple-

mentado:

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.19)$$

$$U_i^*(\vec{X}, t) = \sum_{\Omega} u_i^* D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2, \quad (3.20)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_{FI} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (3.21)$$

$$f_i(\vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_i(\vec{X}, t) \Delta S^2, \quad (3.22)$$

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t(f_i). \quad (3.23)$$

A Equação(3.19) serve para calcular o parâmetro temporário,  $u_i^*$ . Para fins didáticos, a derivada temporal é discretizada através do esquema de Euler de primeira ordem. Ela pode ser discretizada de outra maneira, como, por exemplo, em Uhlmann (2005) e Wang, Fan e Luo (2008) que utilizaram um Runge-Kutta de terceira ordem de convergência temporal. Su, Lai e Lin (2007) usaram um esquema de Crank-Nicolson. No presente trabalho é utilizado um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal otimizado (ALLAMPALLI et al., 2009), o qual será explicado com mais detalhes no decorrer deste capítulo.

A Equação (3.20) modela o processo de interpolação, pelo qual a informação do domínio euleriano, neste caso  $u_i^*$ , é transmitida para o domínio lagrangiano. A Eq.(3.21) fornece a força lagrangiana,  $F_i(\vec{x}, t)$ , onde  $U_{FI}$  é a velocidade que a fronteira deve ter (imposta ou fornecida por um modelo estrutural). A Eq.(3.22) é o processo de distribuição da força  $F_i(\vec{x}, t)$ , que pertence ao domínio lagrangiano, para a obtenção de  $f_i(\vec{x}, t)$ , definida

em todo domínio euleriano.

Na Equação (3.23) é feita a atualização do campo de velocidade, ou seja, nesta etapa do algoritmo o “campo de velocidade estimado” recebe a informação da fronteira, ou seja, ele recebe a influência do campo de força euleriano ( $f_i$ ). Também nesta etapa o operador temporal foi discretizado através de um esquema de Euler de primeira ordem de convergência temporal, apenas para entendimento do algoritmo.

Cabe ressaltar, que este é um algoritmo simplificado da metodologia da fronteira imersa usando o modelo DF (“direct-forcing”). Ainda falta o cálculo do campo de pressão de forma a satisfazer a equação da continuidade Eq.(3.2). Quando se resolvem as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis no espaço físico, é necessária a resolução da equação de Poisson para a pressão (FERZIGER; PERIC, 1996). Entretanto, como no presente trabalho é utilizado o método pseudoespectral de Fourier, não é necessário calcular esta variável no processo de integração espaço-temporal. Será visto que a projeção do campo de velocidade garante o balanço de massa.

### 3.2.1.6 Múltipla imposição da força (*Multi-Direct Forcing - MDF*)

A velocidade do fluido sobre a interface imersa, teoricamente, deveria ser igual a  $U_{FI}$  (velocidade que a fronteira deve ter). Porém, devido aos processos de discretização temporal e espacial, além dos processos de interpolação e distribuição, essa condição não é absolutamente satisfeita. No trabalho de Wang, Fan e Luo (2008), é proposto um processo iterativo para o cálculo da força e da velocidade corrigida, denominado “Multi-Direct Forcing”, onde se busca melhorar a acurácia deste cálculo. Para isto, na Eq.(3.23), faz-se:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^{it}, \quad (3.24)$$

onde  $it$  é o número da iteração dentro do processo iterativo.

O campo de velocidade  $u_i^{it}$ , antes de avançar para o próximo passo de tempo, é

novamente interpolado, ou seja, a Eq.(3.20) é resolvida novamente:

$$U_i^{it} = \sum_{\Omega} u_i^{it} D_h(x_i - X_i) h^2. \quad (3.25)$$

Assim, obtém-se um novo campo de força  $f_i^{it}$ , distribuição de  $F_i^{it}$ , obtido da Eq.(3.21) do qual se obtém novamente:

$$u_i^{it+1} = u_i^{it} + \Delta t(f_i^{it}), \quad (3.26)$$

o qual se aproxima ainda mais da condição de não deslizamento. Assim, repetindo este procedimento de  $it = 1$  até  $it = NL$ , onde  $NL$  é o número total de iterações, tem-se que:

$$U_{FI} - U_i^{it+1} \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Com isso, a força lagrangiana da  $N$ -ésima iteração tende a zero. Wang, Fan e Luo (2008) utilizaram um número de iterações  $NL$  fixo. No presente trabalho, optou-se por utilizar a máxima diferença entre as velocidades lagrangianas entre duas iterações consecutivas, ou seja:

$$\max |U_i^{it+1} - U_i^{it}| \leq \varepsilon. \quad (3.28)$$

Utilizando a Eq.(3.28) o processo iterativo fica independente de  $NL$ . Uma vez que, à princípio, não se sabe qual o melhor número de iterações necessário para se obter um resultado fiel a física. Pois em determinados momentos, principalmente quando o escoamento está na fase transiente, é necessário mais iterações para representar bem a fronteira. Já na etapa em que o escoamento está em regime permanente não se precisa de tantas iterações. Por outro lado, a Eq.(3.28) fica dependente da máxima diferença entre as velocidades lagrangianas em iterações consecutivas, ou seja, quando a velocidade tender



a não se alterar mais entre duas iterações consecutivas o processo iterativo é finalizado.

Para calcular quantidades que dependem da força sobre o corpo, por exemplo, forças de arrasto e de sustentação sobre corpos imersos em escoamentos, e para problemas de interação fluido-estrutura, em que o movimento da estrutura depende da força gerada pelo fluido utiliza-se o somatório de todas as  $NL$  iterações:

$$Fc_i = - \sum_{it=1}^{NL} \int_{\Gamma} F_i(\vec{X}, t) ds. \quad (3.29)$$

A integral apresentada na Eq.(3.29), normalmente, é substituída pelo somatório da força lagrangiana Eq.(3.21), dada em cada ponto do domínio lagrangiano, isto é:

$$Fc_i = - \sum_{it=1}^{NL} \sum_{p=1}^{Np} F_i^p(\vec{X}, t) \Delta s, \quad (3.30)$$

onde  $Np$  é o número de pontos lagrangianos utilizados para a discretização da interface imersa e o índice  $p$  representa cada um dos pontos lagrangianos que compõem a interface.

### 3.2.2 Modelagem Estrutural

A análise de um sistema estrutural leva-se em conta a quantidade de graus de liberdade, podendo classificá-los em discreto (números finitos de graus de liberdade) e contínuo (infinitos graus de liberdades). Entretanto, conforme a natureza do problema podem-se utilizar modelos simples de um grau de liberdade, porém restritos em termos de aplicações físicas, modelos discretos de vários graus de liberdade, ou ainda modelos contínuos. Em geral, os modelos contínuos podem ser substituídos por modelos discretos aproximados, (BADAN, 2010; RAO, 2009).

A formulação matemática estrutural leva em conta a segunda Lei de Newton, “Um corpo rígido submetido a uma força  $\vec{F}$  experimenta uma aceleração,  $\vec{a}$  de mesma direção

e sentido de  $\vec{F}$ , com módulo proporcional à intensidade da força ", Eq.(3.31),

$$\vec{F}_i = m \frac{du_i}{dt}. \quad (3.31)$$

As equações que modelam o problema físico utilizam também as equações de cinemática, ou seja, as relações que regem o deslocamento e a velocidade de corpos rígidos. O movimento do corpo rígido pode ser classificado em três categorias: translação, rotação em torno de um referencial fixo e movimento geral. A presente tese se restringe ao estudo envolvendo a translação do corpo rígido, desta forma são apresentada nesta seção somente as equações gerais do movimento de um corpo rígido quanto a translação.

O movimento de translação de um corpo rígido pode ser definido de forma que todo segmento de reta no corpo mantém-se paralelo à sua direção original, durante todo o movimento, sendo classificado como: translação retilínea, Fig.3.6, a qual mostra um corpo contido no plano x-y:

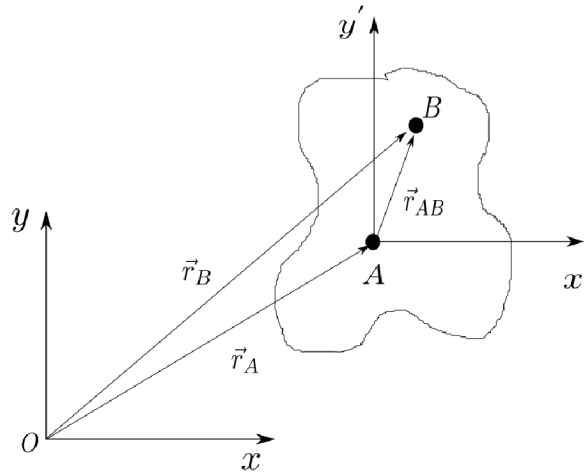


Figura 3.6: Representação das variáveis relativas à definição de movimento de translação

A Figura 3.6 mostra a existência de dois sistemas de coordenadas, o sistema de coordenadas não inerciais,  $Oxy$ , e o sistema de coordenadas inerciais,  $Ax'y'$ , fixo no corpo sendo A denominado de ponto de base. A entidade vetor posição, o qual tem sua origem no sistema de coordenadas fixo e sua extremidade no sistema de coordenadas móveis, é

representada pelos vetores  $\vec{r}_A$ , e  $\vec{r}_B$ , e o vetor posição relativo,  $\vec{r}_{AB}$ , vetor com origem em  $A$  e extremidade em  $B$ .

Assim, pode-se equacionar o vetor posição  $\vec{r}_B$  em função dos demais vetores posição como mostrado na Eq.(3.32),

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (3.32)$$

Com o uso do operador derivada, com relação à variável tempo, pode-se obter a velocidade instantânea em  $A$  e  $B$ , Eq.(3.33),

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}, \quad (3.33)$$

onde  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  referem-se à velocidade absoluta, pois esta velocidade está relacionada com o sistema de coordenadas fixo.

Considerando a hipótese de corpo rígido, o termo  $\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$  é denominado velocidade relativa do ponto  $A$  em relação ao ponto  $B$ , contido no mesmo corpo, portanto  $\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=0$ , ou seja, o módulo e a direção de  $\vec{r}_{AB}$  são constantes. Portanto, tem-se a Eq.(3.34):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A. \quad (3.34)$$

Derivando com relação ao tempo novamente, pode-se obter a aceleração Eq.(3.35),

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A, \quad (3.35)$$

observando as Eq.(3.34) e Eq.(3.35), nota-se que um corpo rígido em translação retilínea ou curvilínea, apresenta a mesma velocidade e aceleração.

A fim de aplicar o conceito geral do movimento no problema no qual um corpo está suportado por uma mola, Fig. 3.7, coloca-se o referencial inercial ( $Oxy$ ) de referência no centro do domínio e o referencial  $O'x'y'$  é o referencial não inercial, o qual está fixo no

corpo rígido e portanto desloca-se com ele.

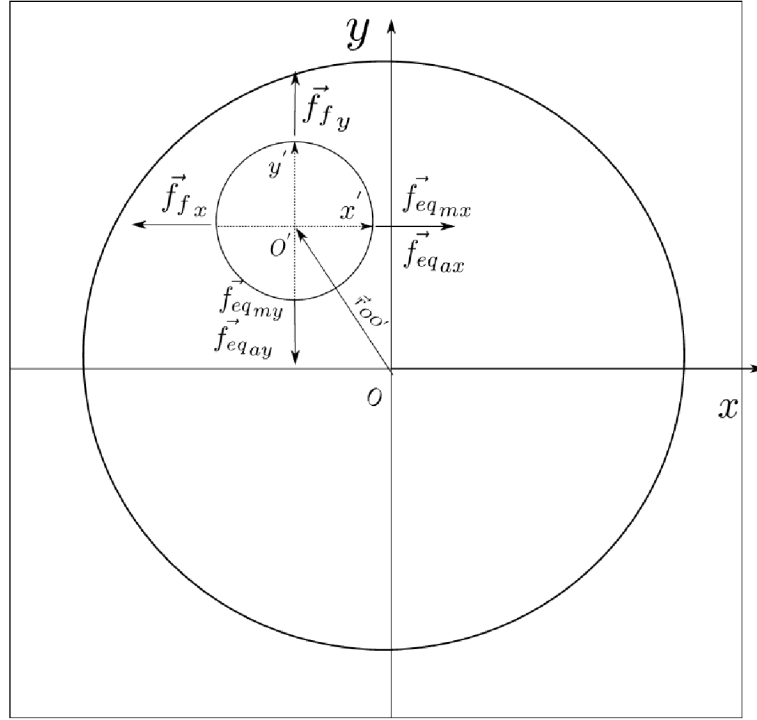


Figura 3.7: Diagrama de corpo livre de um corpo rígido cilíndrico, sobre ação de conjunto mola-amortecedor e imerso num fluido.

O corpo rígido ao se deslocar, a distância entre os centros dos referenciais origina um vetor posição  $\vec{r}_{OO'}$ , o qual está relacionado com a compressão ou tração da mola no sistema. Na Fig. 3.7 está representado o diagrama de corpo livre para o corpo rígido numa posição qualquer, nesta imagem pode ser observada as forças em ação em ambas direções no problema, são elas: forças equivalente da mola,  $\vec{f}_{eq_{mx}}$  e  $\vec{f}_{eq_{my}}$ , forças equivalente dos amortecedores,  $\vec{f}_{eq_{ax}}$  e  $\vec{f}_{eq_{ay}}$ , e as forças oriundas do escoamento,  $\vec{f}_{fx}$  e  $\vec{f}_{fy}$ .

A partir do diagrama de corpo livre e utilizando o referencial inercial como referência, obtém-se o modelo matemático do movimento da estrutura, Eq.(3.36):

$$-\vec{F}_{mola} - \vec{F}_{amort} + \vec{F}_{fluido} = m_s \frac{d^2 \vec{r}_{OO'}}{dt^2}, \quad (3.36)$$

onde  $\vec{F}_{mola}$ , representa a força elástica,  $\vec{F}_{amort}$ , a força decorrente do esforço do amortecedor,  $\vec{F}_{fluido}$ , é a força de arrasto,  $\frac{d^2 \vec{r}_{OO'}}{dt^2}$ , aceleração e  $m_s$  é a massa da estrutura.

Sabendo que a força da mola pode ser escrita usando da Lei de Hooke,

$$\vec{F}_{mola_x} = k_x \vec{r}_{OO'_i}, \quad (3.37)$$

na direção y tem-se

$$\vec{F}_{mola_y} = k_y \vec{r}_{OO'_i}, \quad (3.38)$$

onde  $\vec{r}_{OO'_i}$  é o vetor posição relacionado com o alongamento ou compressão da mola em relação à posição de equilíbrio,  $k_x$  e  $k_y$  são rigidez estrutural da estrutura. Sabendo que a força decorrente do amortecimento é dada pela Eq.3.39 para a direção horizontal

$$\vec{F}_{amort_x} = c_x \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt}, \quad (3.39)$$

na direção vertical tem-se,

$$\vec{F}_{amort_y} = c_y \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt}, \quad (3.40)$$

onde  $c_x$  e  $c_y$  são coeficientes de amortecimentos.

A rigidez nas direções cartesianas são consideradas constantes, ou seja, não foram considerados troca ou substituição de material e dos cilindros concentricos e não apresentam deformidade estrutural, portanto sendo modelado como um sistema massa-mola, (MEIROVITCH, 1989; THOMSON; DAHLEH, 1998; SILVA, 2008), e portanto  $k_x=k_y=k$  bem como,  $c_x=c_y=c$ . Para o desenvolvimento desta modelagem, foram utilizados os trabalhos desenvolvidos por Chern et al. (2014), Dettmer e Peric (2006), Singh e Mittal (2005). Desta forma as Eq.(3.37) e Eq.(3.38), pode ser reescrita como,

$$\vec{F}_{mola} = k \vec{r}_{OO'_i}, \quad (3.41)$$

para as Eq.(3.39) e Eq.(3.40), que modelam o amortecedor viscoso pode ser reescrita como,

$$\vec{F}_{amort} = c \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt}. \quad (3.42)$$

Substituindo a Eq.(3.41) e (3.42) na Eq.(3.36) tem-se,

$$-k\vec{r}_{OO'_i} - c \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} + \vec{F}_{fluido} = m_s \frac{d^2\vec{r}_{OO'_i}}{dt^2}. \quad (3.43)$$

Reescrevendo a Eq.(3.43) tem-se,

$$m_s \frac{d^2\vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + c \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} + k\vec{r}_{OO'_i} = \vec{F}_{fluido}, \quad (3.44)$$

sendo o  $\vec{F}_{fluido}$  é o somatório das forças de todos os pontos lagrangianos, Eq.(3.30) lembrando que ao utilizar o *multidirecting-forcing* (MDF), então, a força fluidodinâmica é transferida para o centro de massa da estrutura como:

$$m_s \frac{d^2\vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + c \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} + k\vec{r}_{OO'_i} = \frac{(F_{C_i})(\Delta s)(\Delta x)(\rho_f)}{\Delta t}, \quad (3.45)$$

onde  $F_{C_i}$  é a força fluido dinâmica obtida na Eq.(3.30) e  $\Delta s$  e  $\Delta x$  são os comprimentos necessários para calcular o volume de fluido relacionado com cada ponto lagrangiano, observando que o comprimento da terceira dimensão é unitário, pois o problema é bidimensional.

Como mostrado no trabalho de Chern et al. (2014) e Dettmer e Peric (2006) é importante adimensionalizar as equações que regem o movimento da estrutura, os grupos adimensionais utilizados neste processo de adimensionalização pode ser visto na Tab. 3.1,

Tabela 3.1: Grupos adimensionais, para o modelo bidimensional no plano x-y Chern et al. (2014).

Descrição	parâmetro	adimensionais
tempo	$t^*$	$\frac{tu_\infty}{D}$
deslocamento	$r_{AB_i}^*$	$\frac{r_{AB_i}}{D}$
razão mássica	$m^*$	$\frac{m_s}{\pi\rho_f D^2 L}$
velocidade reduzida	$U_r^*$	$\frac{tu_\infty}{D}$
razão de amortecimento estrutural	$\zeta$	$\frac{c}{2\sqrt{m_s k}}$
frequência natrual reduzida	$f_n^*$	$\frac{f_n D}{u_\infty}$

onde  $L$  é o comprimento unitário na direção z da estrutura,  $D$  é o dimâmetro do cilindro,  $m_s$  é a massa da estrutura e  $f_n$  é a frequência natural.

A adimensionalização da Eq.(3.45) inicia-se transformando a força de arrasto em coeficiente de arrasto:

$$\begin{aligned}
 m_s \frac{4}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + c \frac{4}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \frac{d \vec{r}_{OO'_i}}{dt} + k \frac{4}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \vec{r}_{OO'_i} \\
 = \frac{F_{C_i} \Delta s \Delta x \rho_f}{\Delta t} \frac{4}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2}.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Observando o primeiro termo da Eq.(3.46), e os parâmetros da Tab. 3.1, a Eq.(3.46) torna-se,

$$m^* \frac{1}{u_\infty^2} \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + \frac{4c}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \frac{d \vec{r}_{OO'_i}}{dt} + \frac{4k}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \vec{r}_{OO'_i} = \frac{2C_{oef}}{\pi D}. \tag{3.47}$$

onde  $C_{oef}$  representa o coeficiente de sustentação  $C_l$  ou o coeficiente de arrasto  $C_d$ , decorrente da direção em que se está analisando o escoamento.

Introduzindo  $\frac{2m_s}{2m_s}$ , ao segundo termo da Eq.(3.47),

$$m^* \frac{1}{u_\infty^2} \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + \frac{4c}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \frac{2m_s}{2m_s} \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} + \frac{4k}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \vec{r}_{OO'_i} = \frac{2Coe f}{\pi D}, \quad (3.48)$$

rearranjando a Eq.(3.48) tem-se,

$$m^* \frac{1}{u_\infty^2} \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + \frac{m^* c}{2m_s u_\infty^2} \frac{2}{u_\infty^2} \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} + \frac{4k}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \vec{r}_{OO'_i} = \frac{2Coe f}{\pi D}. \quad (3.49)$$

Sabendo que  $\frac{c}{2m_s} = \xi \omega_n$  e  $k = \omega_n^2 m_s$  a Eq.(3.49), fica:

$$m^* \frac{1}{u_\infty^2} \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + \frac{2m^* (\xi \omega_n)}{u_\infty^2} \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} + \frac{4(\omega_n^2 m_s)}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \vec{r}_{OO'_i} = \frac{2Coe f}{\pi D}, \quad (3.50)$$

substituindo  $\omega_n = 2\pi f_n$ , onde  $f_n$  é a frequência natural, e introduzindo  $\frac{D}{D}$  nos termos da Eq.(3.50). A mesma pode ser reescrita como mostrado na Eq.(3.51).

$$m^* \frac{1}{u_\infty^2} \frac{D}{D} \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} + \frac{2m^* \xi (2\pi f_n)}{u_\infty^2} \frac{D}{D} \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} + \frac{4(2\pi f_n)^2 m_s}{\rho_f \pi D^2 L u_\infty^2} \frac{D^2}{D^2} \vec{r}_{OO'_i} = \frac{2Coe f}{\pi D}. \quad (3.51)$$

Observando a Tab. 3.1 e realizando as substituições das variáveis para parâmetros adimensionais, a Eq.(3.51) pode ser apresentada como:

$$\frac{m^*}{D} \left( \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} \right)^* + \frac{4\pi m^* \xi}{U_r D} \left( \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} \right)^* + \frac{m^*}{D} \left( \frac{2\pi}{U_r} \right)^2 \vec{r}_{OO'_i}^* = \frac{2Coe f}{\pi D}, \quad (3.52)$$

reorganizando a Eq.(3.52), tem-se a Eq.(3.53):

$$\left( \frac{d^2 \vec{r}_{OO'_i}}{dt^2} \right)^* + \frac{4\pi \xi}{U_r} \left( \frac{d\vec{r}_{OO'_i}}{dt} \right)^* + \left( \frac{2\pi}{U_r} \right)^2 \vec{r}_{OO'_i}^* = \frac{2Coe f}{\pi m^*}. \quad (3.53)$$

A adimensionalização das equações de movimento da estrutura se mostrou fundamental para se conseguir passos de tempo,  $\Delta t$ , maiores no acoplamento fluido-estrutural, visto que Mariano (2011) utilizou incremento temporal de  $10^{-9}$  para solução da problema



em que envolvia queda de um corpo rígido, e no presente trabalho foi utilizado incremento temporal de  $10^{-3}$ . Permitindo assim, simulações mais eficientes computacionalmente.

### 3.3 Modelagem Numérica

Nesta seção será apresentada os métodos numéricos utilizados para o desenvolvimento do presente trabalho: método pseudoespectral de Fourier (MPEFO) e o método dos volumes finitos (MVF). A fim de realizar o estudo de interação fluido-estrutura realizou-se o acoplamento de ambos com o método da fronteira imersa.

#### 3.3.1 Método Pseudoespectral de Fourier

##### 3.3.1.1 Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier

Nesta subseção é apresentado o método pseudoespectral de Fourier (CANUTO et al., 2006), em que é feita a transformação dos campos das variáveis primitivas (velocidade e pressão) para o espaço espectral de Fourier.

As variáveis de interesse passam por um processo de transformação linear, chamado de transformada de Fourier (BRINGGS; HENSON, 1995). As transformadas direta e inversa de Fourier são dadas, respectivamente, pelas Eqs. (3.54) e (3.55):

$$\widehat{\phi}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}, t) e^{-\iota 2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}, \quad (3.54)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\vec{k}, t) e^{\iota 2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k}, \quad (3.55)$$

nestas equações  $\widehat{\phi}(\vec{k}, t)$  é a função transformada e  $\vec{k}$  é o vetor número de onda, parâmetro de transformação espacial de Fourier e  $\iota = \sqrt{-1}$  é o número imaginário. O campo transformado,  $\widehat{\phi}(\vec{k}, t)$ , está no chamado espaço de Fourier ou espaço espectral. Em contrapartida, o campo não transformado está no espaço físico.

A grande vantagem dessa transformação é que algumas operações matemáticas são simplificadas no domínio espectral, por exemplo, a operação de derivada. Outra vantagem é que, normalmente, uma equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária. Por outro lado, outras operações tornam-se mais complicadas, como o produto entre duas funções. No livro de Briggs e Henson (1995), essas propriedades são apresentadas com mais detalhes.

Partindo para a transformação do modelo diferencial Eqs.(3.1) e (3.2) para o espaço espectral, primeiramente, aplica-se a transformada de Fourier sobre a equação da continuidade Eq.(3.2):

$$\widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0. \quad (3.56)$$

Então, aplicando a propriedade das transformadas de Fourier sobre a derivada da Eq.(3.56), obtém-se:

$$\iota k_j \hat{u}_j = 0. \quad (3.57)$$

Do cálculo vetorial sabe-se que, se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então eles devem ser ortogonais entre si. Portanto, observando a Eq.(3.57), tem-se que o vetor número de onda,  $\vec{k}$ , é ortogonal ao campo de velocidade transformada  $\hat{u}_i(\vec{k}, t)$ . Define-se, então, um plano perpendicular ao vetor número de onda, denominado plano  $\pi$ , no qual está contido o campo de velocidade transformado de divergente nulo. Portanto, o vetor velocidade transformado,  $\hat{u}_i(\vec{k}, t)$ , está contido no plano  $\pi$ , conforme ilustrado na Fig. 3.8.

Transformando a Eq. (3.1) para o espaço de Fourier, tem-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \iota k_j \widehat{(u_i u_j)} = -\iota k_i \hat{p} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{f}_i, \quad (3.58)$$

onde  $k^2$  é a norma ao quadrado do vetor número de onda,  $\vec{k}$ , ou seja,  $k^2 = k_j k_j$ .

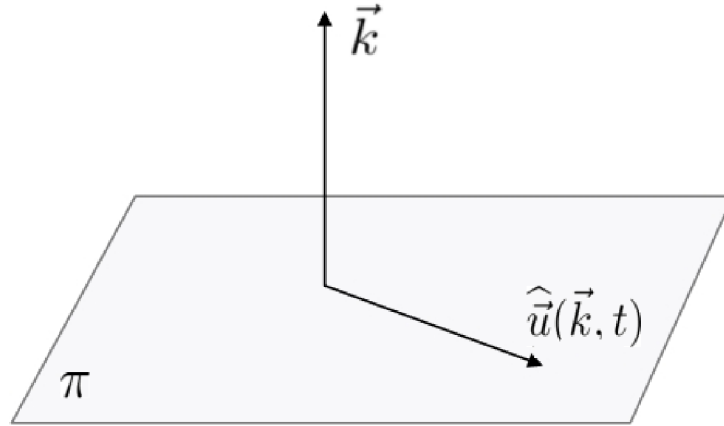


Figura 3.8: Definição do plano  $\pi$ .

Deve ficar claro que a transformada de Fourier é aplicada sobre as funções espaciais, ou seja, as Eqs. (3.57) e (3.58) passam a ser definidas no domínio dos números de onda,  $\vec{k}$ , diferenciando de problemas relacionados a análise de sinais, em que a transformada, normalmente, é aplicada sobre o tempo, recaindo no domínio da frequência.

A Equação (3.58) pode ser manipulada matematicamente, a fim de desacoplar o campo de pressão do campo de velocidade. Para entender esse procedimento, cada um dos termos transformados são relacionados com o plano  $\pi$  e, posteriormente, é aplicado o operador projeção sobre esses termos.

Tanto o termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear,  $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}$ , quanto o termo de difusão,  $\nu k^2 \hat{u}_i$ , pertencem ao plano  $\pi$ . O gradiente de pressão,  $\iota k_i \hat{p}$ , é colinear ao vetor número de onda,  $\vec{k}$ , sendo, portanto ortogonal ao plano  $\pi$ . Os termos transformados das equações de Navier-Stokes são relacionados com o plano  $\pi$  de acordo com a Fig.3.9.

No termo advectivo,  $\iota k_j \widehat{(u_i u_j)}$ , tem-se a transformada do produto entre duas funções,  $\widehat{(u_i u_j)}$ , aparecendo uma integral de convolução, definida na Eq.(3.59):

$$\iota k_j \widehat{(u_i u_j)}(\vec{k}) = \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_i(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}, \quad (3.59)$$

onde  $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$ , fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda  $\vec{k}$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ . Dessa forma, não se sabe qual é a posição do termo advectivo em relação ao plano  $\pi$ ,

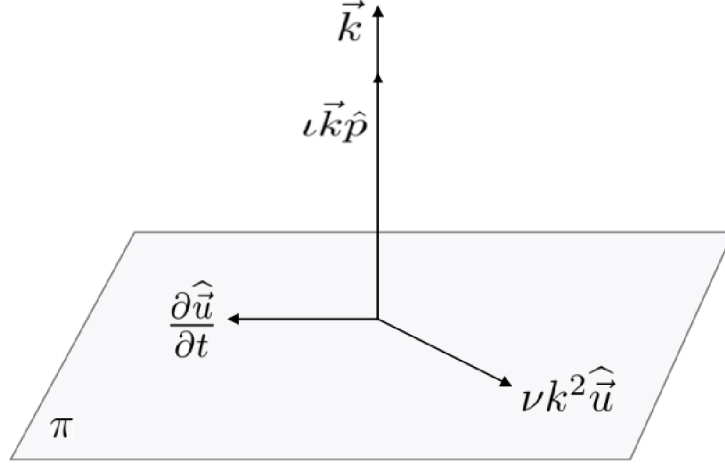


Figura 3.9: Termos da equação de Navier-Stokes definidos em relação ao plano  $\pi$ .

além disso, também não se pode afirmar nada sobre a posição do termo fonte,  $\hat{f}_i$ .

### 3.3.1.2 Projeção

Nesta etapa, procura-se mostrar o procedimento para que o campo de pressão seja desacoplado do campo de velocidade. Primeiramente, separam-se os termos que pertencem ao plano  $\pi$  dos demais:

$$\underbrace{\left[ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i \right]}_{\in \pi} + \left[ \iota k_j (\widehat{u_i u_j}) - \hat{f}_i + \iota k_i \hat{p} \right] = 0. \quad (3.60)$$

Observando a Eq.(3.60) e sabendo-se que a soma do termo transiente com o termo difusivo pertence ao plano  $\pi$ , então, tem-se que a soma vetorial do termo não-linear com o gradiente de pressão e o termo fonte também deve pertencer ao plano  $\pi$ , pois a soma de todos os termos é nula. Isto se deve ao fato que, se a soma de dois vetores é nula, então os dois vetores devem ser colineares.

O próximo passo é definir o tensor projeção:

$$\wp_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (3.61)$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.62)$$

O tensor projeção,  $\wp_{ij}$ , projeta qualquer vetor,  $a_i$ , sobre o plano  $\pi$  (SILVEIRA-NETO, 2002). Para verificar esta propriedade, toma-se um vetor  $\vec{a}$  qualquer, e faz-se a projeção dele, obtendo-se o seguinte:

$$\bar{\wp} \cdot \vec{a} = \wp_{ij} a_j = a_j \delta_{ij} - a_j \frac{k_i k_j}{k^2} = a_i - a_j k_j \frac{k_i}{k^2} = a_i^p. \quad (3.63)$$

onde  $a_i^p$  é o vetor  $a_i$  projetado por  $\bar{\wp}$ . Fazendo-se o produto escalar da projeção,  $a_i^p$ , pelo vetor número de onda,  $k_i$ , tem-se:

$$a_i^p k_i = a_i k_i - a_j k_j \frac{k_i k_i}{k^2} = 0, \quad (3.64)$$

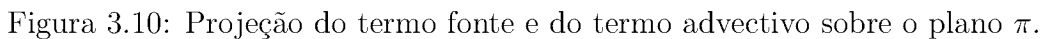
logo, verifica-se que o tensor  $\wp_{ij}$  projeta um vetor  $a_i$  qualquer sobre o plano  $\pi$ . De posse da definição do tensor projeção, destaca-se, novamente, na Eq.(3.60), especificamente o segundo colchete apresentado nesta equação:

$$\left[ \iota k_j \widehat{(u_i u_j)} - \hat{f}_i + \iota k_i \hat{p} \right] \in \pi, \quad (3.65)$$

conclui-se que a soma dos termos apresentados na Eq.(3.65) está contida no plano  $\pi$  e, sabendo-se que o termo  $\iota k_i \hat{p}$  é ortogonal a  $\pi$ , pode-se afirmar que:

$$\left[ \iota k_j \widehat{(u_i u_j)} + \iota k_i \hat{p} - \hat{f}_i \right] = \wp_{im} \left[ \iota k_j \widehat{(u_m u_j)} - \hat{f}_m \right]. \quad (3.66)$$

Nota-se na Equação (3.66), que o termo referente ao gradiente de pressão no espaço de Fourier,  $\iota k_i \hat{p}$ , desaparece no lado direito do sinal de igualdade, pois a projeção, sobre um dado plano, de um vetor ortogonal a esse plano é nula. Este resultado é ilustrado


$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right] \hat{u}_i(\vec{k}, t) = \mathcal{S}_{im} \left[ \hat{f}_m(\vec{k}, t) - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}, t) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}, t) d\vec{r} \right]. \quad (3.67)$$

Uma segunda observação é a presença de uma integral de convolução, que rigorosa-

mente, deve ser resolvida através de algum esquema de integração numérica. Caso isso seja feito, provavelmente, o ganho computacional obtido pela operação de projeção seria perdido na resolução dessa integral. Todavia, como será visto posteriormente, essa integral de convolução é substituída pelo método pseudoespectral, tornando-se a resolução da Eq.(3.67) muito atrativa quando comparada com os métodos clássicos.

### 3.3.1.3 Recuperação do campo de pressão

Apesar do campo de pressão não aparecer nas equações de Navier-Stokes transformadas Eq.(3.67), ele pode ser recuperado por meio de um pós-processamento a partir da Eq.(3.66). Isolando-se o termo referente ao gradiente de pressão, tem-se que:

$$\iota k_i \hat{p}(\vec{k}) = \wp_{im} \left[ \iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}) - \hat{f}_m(\vec{k}) \right] - I_{im} \left[ \iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}) - \hat{f}_m(\vec{k}) \right], \quad (3.68)$$

Observa-se que o tensor identidade,  $I_{im}$ , foi introduzido por conveniência, sem alterar a Eq.(3.68). Colocando-se em evidência os termos entre colchetes:

$$\iota k_i \hat{p}(\vec{k}) = (\wp_{im} - I_{im}) \left[ -\hat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (3.69)$$

Fazendo o produto escalar da Eq.(3.69) pelo vetor número de onda  $k_i$ , tem-se:

$$\iota k^2 \hat{p}(\vec{k}) = (\wp_{im} - I_{im}) k_i \left[ -\hat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (3.70)$$

Observando-se que:

$$(\wp_{im} - I_{im}) k_i = \left( \delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} - I_{im} \right) k_i = -k_m, \quad (3.71)$$

então substituindo a equação Eq.(3.71) na Eq.(3.70) obtém-se:

$$\iota k^2 \widehat{p}(\vec{k}) = -k_m \left[ -\widehat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (3.72)$$

Assim, o campo de pressão pode ser obtido usando a Eq.(3.73):

$$\widehat{p}(\vec{k}) = \frac{\iota k_m}{k^2} \left[ -\widehat{f}_m(\vec{k}) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right], \quad (3.73)$$

aplicando a operação transformada inversa, Eq.(3.55), sobre  $\widehat{p}(\vec{k}, t)$ , obtém-se o campo de pressão no espaço físico.

#### 3.3.1.4 Método pseudoespectral de Fourier

O método pseudoespectral de Fourier consiste em realizar o produto de duas funções no espaço físico e transformar o produto já realizado, ao invés de transformar as duas funções separadamente e resolver a integral de convolução no espaço de Fourier. A vantagem desse processo é não ter que resolver a integral de convolução, sem, no entanto, perder a precisão do método espectral. A manutenção da alta precisão do método espectral de Fourier se dá pela possibilidade de se fazer os produtos no espaço físico e de se fazer o cálculo das derivadas no espaço espectral. A desvantagem do método pseudoespectral é ter que fazer as transformadas direta e inversa de Fourier a cada passo de tempo. Dadas duas funções  $g(\vec{x}, t)$  e  $h(\vec{x}, t)$ , define-se a função produto  $b(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)h(\vec{x}, t)$ . Logo,

$$\widehat{gh}(\vec{k}, t) = \widehat{b}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} b(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad (3.74)$$

assim, o termo não-linear, das equações de Navier-Stokes, passa a ser tratado de forma pseudoespectral como descrito acima.

Outro detalhe importante na formulação apresentada no presente trabalho é a forma



pela qual o termo não-linear é tratado. A forma anti-simétrica, proposta por Canuto et al. (2007), como sendo a mais estável, foi utilizada no presente trabalho. Ela consiste em fazer uma média aritmética do termo não-linear escrito na forma conservativa e na forma não-conservativa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i. \quad (3.75)$$

Quando se trata de escoamentos incompressíveis, observa-se que as Eqs. (3.1) e (3.75) são matematicamente idênticas, uma vez que o divergente de velocidade é nulo. No entanto, quando as Eqs.(3.1) e (3.75) são discretizadas, geram níveis de estabilidade numérica e de custo computacional diferentes. As transformadas de Fourier das Eqs.(3.1) e (3.75) fornecem:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \widehat{u}_i(\vec{k}, t) = \wp_{im} \left[ -\iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}, t) + \widehat{f_m}(\vec{k}, t) \right], \quad (3.76)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \widehat{u}_i(\vec{k}, t) = \wp_{im} \left[ -\frac{1}{2} \left( \iota k_j \widehat{u_m u_j} + u_j \widehat{\frac{\partial u_m}{\partial x_j}} \right) (\vec{k}, t) + \widehat{f_m}(\vec{k}, t) \right]. \quad (3.77)$$

Observa-se que, na Eq.(3.77), o termo  $\widehat{u_j \frac{\partial u_m}{\partial x_j}}$  requer a derivada  $\frac{\partial u_m}{\partial x_j}$ , a qual deve ser realizada no espaço de Fourier. Uma vez realizada essa derivada, faz-se a sua transformada inversa e, só então, se realiza o produto, o qual é novamente transformado para o espaço de Fourier. Resolvendo a Eq.(3.77) obtém-se uma maior estabilidade numérica quando se compara com a solução da Eq.(3.76) (CANUTO et al., 2007).

### 3.3.1.5 DFT e FFT

Para finalizar a compreensão sobre o método pseudoespectral de Fourier alguns detalhes numéricos devem ser comentados. A versão discreta da transformada de Fourier é denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT), e é definida na Eq.(3.78) (BRINGGS;

HENSON, 1995):

$$\hat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}, \quad (3.78)$$

onde  $\phi_n$  é o campo de velocidade discretizado com  $N$  nós de colocação, os quais representam os nós da malha;  $n$  fornece a posição  $x_n$  dos nós de colocação,  $x_n = n\Delta x$ ;  $\Delta x$  é o espaçamento entre dois nós de colocação; e  $k$  é o número de onda Eq.(3.80).

A Equação (3.78) é a aproximação numérica da transformada de Fourier, a qual é aplicada sobre os nós de colocação de um domínio discretizado. Deve-se notar que, para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada necessariamente deve ser periódica, ou seja:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + \vec{L}, t), \quad (3.79)$$

onde  $\vec{L}$  é o comprimento do domínio na direção considerada. As rotinas DFT impõem automaticamente a condição de periodicidade. Esta propriedade é a grande restrição da metodologia pseudoespectral de Fourier limitando o seu uso a problemas com condições de contorno periódicas. Entretanto, com a fusão da metodologia da fronteira-imersa com a MPEF, busca-se contornar esta restrição.

Em termos de programação, para se resolver a Eq.(3.78), utiliza-se o algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1965), denominado transformada rápida de Fourier - FFT. Pode-se encontrar disponíveis várias sub-rotinas que calculam a FFT.

No site [http : //www.fftw.org/benchfft/ffts.html](http://www.fftw.org/benchfft/ffts.html) são disponibilizados vários pacotes, os quais levam em conta diversos parâmetros a serem escolhidos, como por exemplo, trabalhar com dados reais ou complexos; precisão simples ou dupla; FFTs unidimensionais, bidimensionais, ou tridimensionais; programação em serial ou paralelo; números de nós de colocação de potência 2, 3, 5, 7, 11 e 13; diversas linguagens de programação (Fortran, C e C++).

Especificamente, no presente trabalho, foi utilizada a versão 4.0 da sub-rotina FFTE de Takahashi (2006), que pode ser encontrada em [http : //www.ffte.jp](http://www.ffte.jp). É uma sub-rotina escrita no padrão FORTRAN 77, com dupla precisão. Seu melhor desempenho ocorre para  $2^N$  nós de colocação, onde  $N$  é um número inteiro. Foi utilizada a versão bidimensional com variáveis complexas.

Um último detalhe a ser comentado, quanto à implementação do método pseudoespectral, é o cálculo dos números de onda, Eq.(3.80), que são usados na resolução das equações transformadas. Para utilizar a FFTE, os vetores número de onda são calculados da seguinte forma:

$$k_i(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_i}(n-1) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_i}(n-1-N) & \frac{N}{2} + 2 \leq n \leq N \end{cases} . \quad (3.80)$$

onde  $k_i$  é a componente  $i$  do vetor número de onda;  $N$  é o número de nós de colocação numa dada direção;  $L$  é o comprimento físico do domínio nessa dada direção e  $n$  é a posição no vetor em uma dada direção do domínio.

### 3.3.1.6 Discretização temporal

A metodologia IMERSPEC consiste em resolver a Eq.(3.19) no espaço de Fourier. Isso é feito transformando cada um dos termos dessa equação para o espaço espectral de Fourier, como mostrado anteriormente:

$$\frac{\hat{u}_i^* - \hat{u}_i^t}{\Delta t} = -\nu k^2 \hat{u}_i^t - \wp_{im} \left( \widehat{tnl_m^t} \right) \quad (3.81)$$

onde  $\widehat{tnl}$  é a transformada do termo não-linear, resolvida de forma pseudoespectral, seção 3.3.1.4. É possível observar que a Eq.(3.81) é a discretização temporal da Eq.(3.77) sem o termo  $\widehat{f}_i(\vec{k}, t)$ .

Resolvendo-se a Eq.(3.81), obtém-se o parâmetro temporário no espaço espectral,  $\hat{u}_i^*(\vec{k}, t)$ . Para fins didáticos, a discretização temporal utilizada foi de primeira ordem

de convergência (Euler). Nos trabalhos de Mariano (2007) e Souza (2005) foi mostrado que quando um método com alta acurácia e com alta ordem de convergência é usado na discretização espacial também deve-se utilizar um método compatível na discretização do tempo. Portanto, na presente tese optou-se pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência, com seis passos (RK46), otimizado no espaço espectral, com redução do custo de armazenamento de variáveis, baixa dispersão e baixa dissipação numérica. Para maiores detalhes sobre este método ver o trabalho de Allampalli et al. (2009). O algoritmo RK46 é mostrado abaixo, aplicado à Eq.(3.81):

$$\begin{cases} AUX_i^l = \alpha^l AUX_i^{l-1} + \Delta t \left[ - \left( \nu k^2 \widehat{u}_i^* \right)^l - \wp_{im} \left( \widehat{tn}_m^* \right)^l \right] \\ \left( \widehat{u}_i^* \right)^{l+1} = \left( \widehat{u}_i^* \right)^l + \beta^l AUX_i^l \end{cases} \quad (3.82)$$

onde  $l = 1, 2, \dots, 6$  é o passo do Runge-Kutta;  $AUX$  é uma variável auxiliar,  $\alpha^l$  e  $\beta^l$  são constantes dadas na Tab. 3.2.

Além disso, foi utilizado passo de tempo variável, baseado no critério  $CFL$ , proposto por Courant, Friedrichs e Lewy (1967):

$$\Delta t = CFL \cdot \min \left[ \min \left[ \frac{\Delta x}{\max[|u|]}; \frac{\Delta y}{\max[|v|]} \right]; \frac{2}{\nu} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} \right], \quad (3.83)$$

onde  $CFL$ , normalmente, é um número entre 0 e 1, o qual depende do esquema de integração temporal e do próprio escoamento que se está analisando.

Fazendo as seis iterações propostas na Eq.(3.82), obtém-se o parâmetro temporário no espaço de Fourier,  $\widehat{u}_i^*$ .

Tabela 3.2: Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46.

$it$	$\alpha$	$\beta$
1	0,0	0,122
2	-0,691750960670	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381941220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

O próximo passo é obter a transformada inversa de  $\widehat{u}_i^*$ , isto é,  $u_i^* = TIF[\widehat{u}_i^*]$ . Então interpola-se o campo de velocidade  $u_i^*$  para o domínio lagrangiano através da Eq.(3.17) ou da Eq.(3.18). Após isso calcula-se a força lagrangiana com a Eq.(3.21). Segue-se com o cálculo do campo de força euleriano usando a Eq.(3.3) ou distribuindo-o através da Eq.(3.22). Nota-se que esses três passos são realizados com as variáveis no espaço físico.

Leva-se o campo de força euleriano,  $f_i$ , para o espaço espectral e projeta-o sobre o plano  $\pi$ . Após isso, resolve-se a Eq.(3.23) no espaço espectral, ou seja:

$$\frac{\widehat{u}_i^{t+\Delta t} - \widehat{u}_i^*}{\Delta t} = \wp_{im}(\widehat{f}_m). \quad (3.84)$$

O processo iterativo para o cálculo da força pode ser utilizado da mesma forma como já comentado.

### 3.3.1.7 Acoplamento entre as metodologias pseudoespectral de Fourier, fronteira imersa e interação fluido-estrutura - IMERSPEC

Com os fundamentos básicos das metodologias da fronteira-imersa, pseudoespectral e cinemática do corpo rígido comentados nas seções anteriores, nesta etapa é desenvolvida

a metodologia proposta no presente trabalho.

A última característica importante da metodologia é a ideia de se utilizar um domínio complementar. As definições dos domínios são apresentadas na Fig. 3.11. O domínio físico  $\Omega_{PhD}$ , dito euleriano, é delimitado pela fronteira imersa  $\Gamma_{PhD}$ , a qual também é considerada como um domínio lagrangiano. No interior de  $\Omega_{PhD}$  ocorre toda a fenomenologia física pela qual se interessa modelar e simular. Nesse domínio, pode-se inserir um ou mais subdomínios delimitados pelas fronteiras imersas  $\Gamma_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Sobre a fronteira imersa  $\Gamma_{PhD}$  pode-se modelar quaisquer condições de contorno, mesmo que sejam não periódicas.

O domínio complementar euleriano  $\Omega_{PeD}$  é delimitado pela fronteira  $\Gamma_{PeD}$ , e serve para se impor as condições de contorno periódicas diretamente, para a solução das equações de Navier-Stokes transformadas, Eq.(3.67). Esse domínio,  $\Omega_{PeD}$ , é complementar ao domínio  $\Omega_{PhD}$  e possibilita estender a solução do problema não periódico até a fronteira periódica  $\Gamma_{PeD}$ . As condições de contorno periódicas são impostas diretamente sobre  $\Gamma_{PeD}$  através da FFT. Por outro lado, as condições de contorno não periódicas são impostas sobre a fronteira imersa  $\Gamma_{PhD}$ , de forma indireta, através do campo de força euleriano  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ . Na Fig. 3.11 o vetor  $\vec{x}$  define qualquer ponto pertencente ao domínio euleriano, enquanto o vetor  $\vec{X}$  define qualquer ponto pertencente a uma interface lagrangiana.

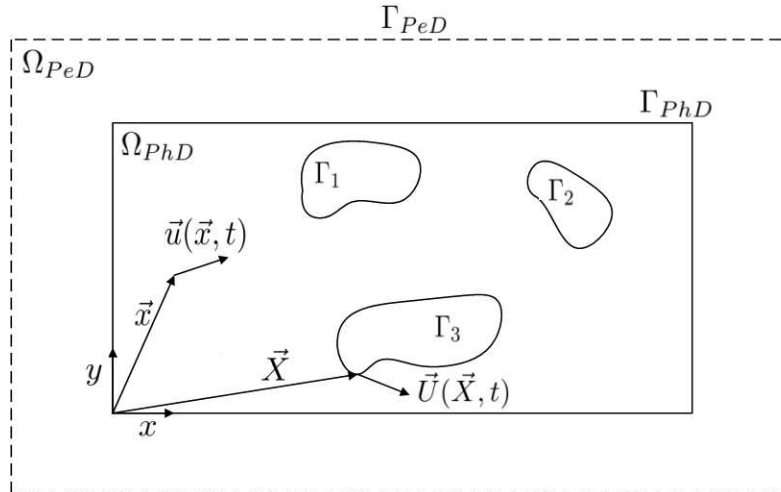


Figura 3.11: Representação esquemática dos domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano.

Para finalizar, o algoritmo da metodologia IMERSPEC é apresentado abaixo:

1. Inicia-se o campo de velocidade no espaço físico, no tempo  $t$ ,  $u_i^t$ ;
2. Aplica-se a FFT, Eq.(3.78) sobre o campo de velocidade,  $u_i^t$ , obtendo-se o campo transformado,  $\widehat{u}_i^t$ ;
3. A fim de garantir a equação da continuidade, aplica-se a o tensor projeção sobre o campo de velocidade, obtendo:  $\widehat{u}_{i\pi}^t = \wp_{ij}(\widehat{u}_i^t)$ ;
4. Calculam-se os termos do lado direito, necessários para resolver a Eq.(3.77):
  - Termo difusivo:  $\widehat{visc}_i^t = \nu k^2 \widehat{u}_{i\pi}^t$
  - Termo advectivo na forma “anti-simétrica”, este é o método pseudoespectral:
    - (a) Calcula-se o produto:  $(Pu)_i^t = u_{i\pi}^t u_{j\pi}^t$  no espaço físico;
    - (b) Transforma-se o produto  $(Pu)_i^t$  para o espaço espectral usando a FFT, Eq.(3.78), obtendo-se  $(\widehat{Pu})_i^t$ ;
    - (c) Calcula-se as derivadas no espaço espectral,  $(\widehat{Du})_i^t = \iota k_i \widehat{u}_{i\pi}^t$ ;
    - (d) Aplica-se a transformada inversa de Fourier sobre as derivadas,  $(\widehat{Du})_i^t$ , obtendo  $(Du)_i^t$ ;
    - (e) Calcula-se o produto das velocidades no espaço físico, com as derivadas, também no espaço físico,  $(PDu)_i^t = u_{i\pi}^t (Du)_i^t$ ;
    - (f) Transforma-se o produto das velocidades com as derivadas para o espaço de Fourier, obtendo  $(\widehat{PDu})_i^t$ ;
    - (g) Calcula-se o termo advectivo, (termo não-linear):  $\widehat{tnl}_i^t = \frac{1}{2} [(\widehat{Pu})_i^t + (\widehat{PDu})_i^t]$ ;
    - (h) Projeta-se o termo não-linear usando o tensor projeção, Eq.(3.63):
 
$$\widehat{tnl}_{i\pi}^t = \wp_{ij}(\widehat{tnl}_j^t);$$
5. Aplica-se o esquema de Runge-Kutta, dado pela Eq.(3.82) e, após os seis passos, obtém-se o parâmetro temporário,  $\widehat{u}_i^*$ ;

6. Aplica-se a transformada inversa de Fourier em  $\widehat{u}_i^*$ , obtendo o parâmetro temporário no espaço físico,  $u_i^*$ ;
7. Se os pontos lagrangianos coincidem com os eulerianos, usa-se a Eq.(3.17). Caso contrário, interpola-se o parâmetro temporário no espaço físico, usando a Eq.(3.18), obtendo-se a velocidade sobre os pontos lagrangianos,  $U_i^*$ ;
8. Calcula-se a força lagrangiana,  $F_i$ , através da Eq.(3.14), onde  $U_i^{t+\Delta t} = U_{FIi}$ , isto é, a velocidade que a fronteira imersa deve ter;
9. Calcula-se a força euleriana,  $f_i$ , usando a Eq.(3.3), quando os pontos lagrangianos coincidem com os nós de colocação eulerianos, ou utiliza-se o processo de distribuição, dado pela Eq.(3.4), quando não existe coincidência;
10. Transforma-se o campo de força euleriano,  $f_i$ , para o espaço espectral e aplica-se o tensor projeção  $\wp_{ij}$ , obtendo:  $\widehat{f}_{i\pi} = \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j \right)$ ;
11. Com o parâmetro temporário obtido no passo 5 e a força euleriana projetada no passo 10, resolve-se a Eq.(3.84), ou seja, atualiza-se o campo de velocidade;
12. Até o passo 11 têm-se o método da imposição direta da força, isto é, após o campo de velocidade receber a informação do campo de força euleriano e, conseqüentemente, receber as informações das condições de contorno. A próxima etapa é retornar ao passo inicial;
13. Caso o método da múltipla imposição da força seja utilizado, entra-se no processo de ciclagem. Então, faz-se  $\widehat{u}_i^{*it+1} = \widehat{u}_i^{t+\Delta t}$ , atualizando o parâmetro temporário da seguinte maneira:  $\widehat{u}_i^{*it+1} = \widehat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it} \right)$ ;
14. Com  $\widehat{u}_i^{*it+1}$  calculado, retorna-se ao passo 6, obtendo  $u_i^* = u_i^{*it+1}$ ;
15. Repete-se os passos 6 até 11 até satisfazer um dos critérios de parada, seja a Eq.(3.28) ou o número máximo de iterações,  $NL$ ;
16. Após o critério de parada ser satisfeito, retorna-se ao passo 1.



Note que, no processo de ciclagem, atualiza-se a velocidade com o campo de força projetado no plano  $\pi$ , o qual leva a propagação da informação das condições de contorno da seguinte maneira:

$$\widehat{u}_i^{*it+1} = \widehat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it} \right). \quad (3.85)$$

Na próxima iteração, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*it+2} = \widehat{u}_i^{*it+1} + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it+1} \right). \quad (3.86)$$

Substituindo a Eq.(3.85) na Eq.(3.86), tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*it+2} = \widehat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it} + \widehat{f}_j^{it+1} \right). \quad (3.87)$$

Generalizando, ao final das  $NL$  iterações e colocando o tensor projeção em evidência, obtém-se:

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^* + \Delta t \sum_{it=1}^{NL} \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it} \right) = \widehat{u}_i^* + \Delta t \wp_{ij} \sum_{it=1}^{NL} \left( \widehat{f}_j^{it} \right). \quad (3.88)$$

Define-se a força total:

$$\widehat{f}_i^{total} = \sum_{it=1}^{NL} \widehat{f}_i^{it}. \quad (3.89)$$

Logo, no espaço físico, tem-se:

$$f_i^{total} = \sum_{it=1}^{NL} f_i^{it}. \quad (3.90)$$

Se essa força total fosse conhecida à priori, a velocidade poderia ser determinada

sem o processo iterativo, ou seja:

$$\widehat{u}_i^* = \widehat{u}_i^t + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{RHS}_j \right), \quad (3.91)$$

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^* + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{total} \right). \quad (3.92)$$

Somando-se as Eq.(3.91) e (3.92), tem-se que:

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^t + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{RHS}_j \right) + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{total} \right). \quad (3.93)$$

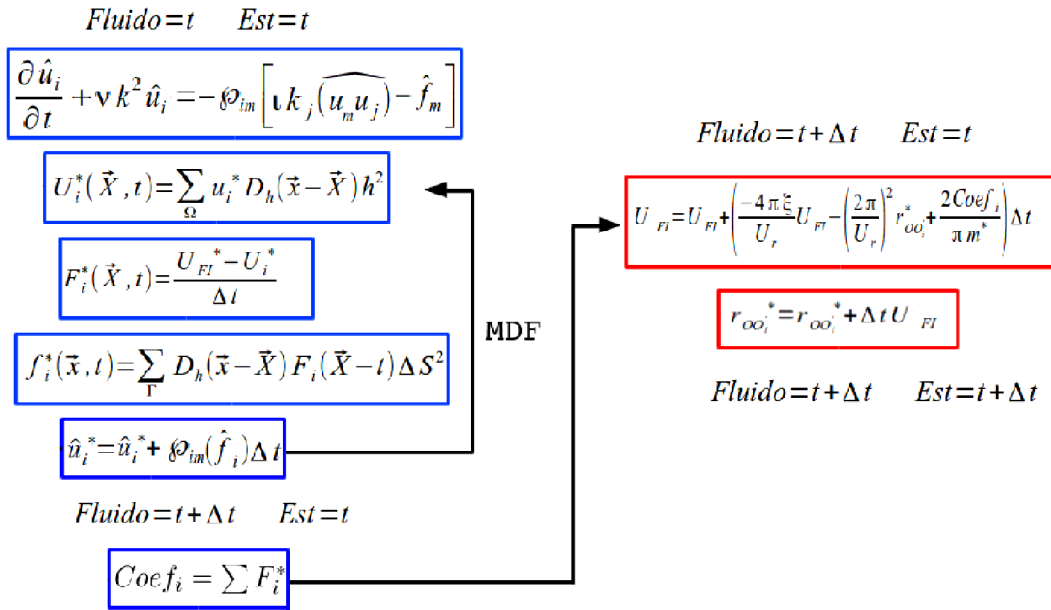


Figura 3.12: Fluxograma do acoplamento IMERSPEC e a interação fluido-estrutura.

Assim, fica demonstrado que o campo de velocidade determinado ao final do processo iterativo, dado pelos passos 1 ao 16, satisfaz simultaneamente as equações da continuidade e de Navier-Stokes. A fim de facilitar a compreensão é mostrado na Fig. 3.12, o fluxograma do acoplamento IMERSPEC e a interação fluido-estrutura.

### 3.3.2 Método dos Volumes Finitos - MVF

A discretização numérica baseado no MVF utiliza a integração das equações diferenciais parciais (EDP) em cada volume de controle elementar. O seu desenvolvimento está ligado ao conceito de fluxo,  $\phi$ , que atravessa uma fronteira, (PATANKAR, 1980; FORTUNA, 2000). A aplicação da técnica dos volumes finitos faz uso dos entes geométricos, apresentados na Fig. 3.13, onde  $P$  é o centro do volume principal,  $W$ ,  $E$ ,  $N$  e  $S$  são os centros dos volumes vizinhos localizadas a oeste, leste, norte e sul, respectivamente,  $e$ ,  $w$ ,  $n$  e  $s$  são posições que discriminam as faces do volume principal,  $\delta$  são as distâncias do centro dos volumes vizinhos com relação ao centro do volume principal, e  $\Delta$  é o comprimento elementar de cada volume discreto. Este entes são utilizados para discretização das equações de conservação da massa e da quantidade do movimento linear.

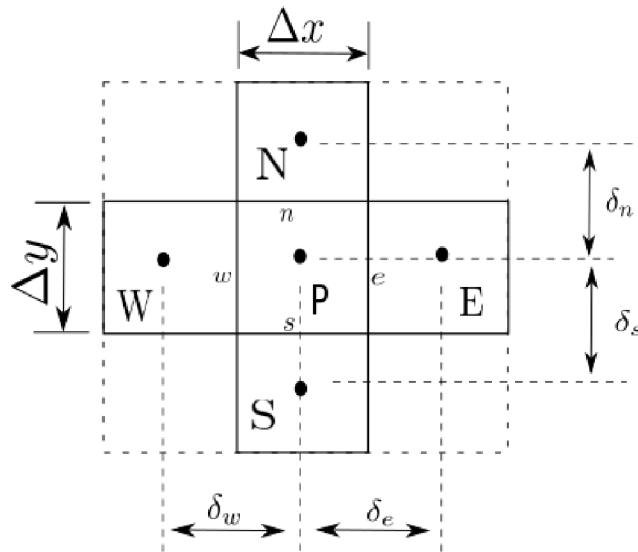


Figura 3.13: Entes geométricos utilizados no método de volumes finitos numa malha bidimensional.

A formulação das equações pelo MVF está relacionada com o modo de avaliação da variável, pressão e o sentido do fluxo das velocidades nas malhas. Assim, caso todas variáveis estejam avaliadas no centro dos volumes, a configuração é conhecida como malha co-localizada, por outro lado, malha deslocada é aquela na qual a pressão é avaliada no centro dos volumes e as componentes de velocidade passam a ser avaliadas nas faces dos

volumes.

As equações diferenciais que representam a dinâmica dos fluidos são integradas no volume elementar. A partir desse processo, surge a necessidade de representar as variáveis e suas derivadas. Nas interfaces são usadas funções de interpolação, que representam uma relação algébrica do volume elementar com seus vizinhos. Considerando o processo para todos os volumes, as equações discretas tem-se a forma:

$$A_P \phi_P = \sum A_{nb} \phi_{nb} + (B_u + B_P \phi_P), \quad (3.94)$$

onde  $\sum$  indica o somatório de todos os valores dos volumes vizinhos  $nb$ ,  $A_{nb}$  são os coeficientes dos volumes vizinhos, ou seja,  $A_W$ ,  $A_E$ ,  $A_S$  e  $A_N$ . A variável  $\phi$  representa o valor das propriedades dos volumes da vizinhança e  $B_u + B_P \phi_P$  é a linearização do termo fonte.

### 3.3.2.1 Discretização com o Método dos Volumes Finitos - MVF

Integrando as equações de Navier-Stokes Eq.(3.1), sobre o volume elementar, numa malha deslocada e num dado tempo e espaço, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{\partial u}{\partial t} dt d\forall &= - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{\partial(uu)}{\partial x} dt d\forall - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{\partial(uv)}{\partial y} dt d\forall + \\ &- \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dt d\forall - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dt d\forall, \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{\partial v}{\partial t} dt d\forall &= - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{\partial(uv)}{\partial x} dt d\forall + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{\partial(vv)}{\partial y} dt d\forall - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} dt d\forall + \\ &- \int_t^{t+\Delta t} \int_{\forall} \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dt d\forall, \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde  $\int_V$  é  $\int_e^w \int_n^s$  e  $dV$  é  $dx dy$ .

### 3.3.2.2 Discretização do tempo

Em problemas transientes a solução em volumes finitos utiliza a função interpolação da Eq.(3.97) para descrever o comportamento da propriedade  $\phi$ , em um intervalo de tempo de  $t$  a  $t + \Delta t$  (MALISKA, 1995; PATANKAR, 1980).

$$\phi^{t+\Delta t} = \theta \phi + (1 - \theta) \phi^t, \quad (3.97)$$

onde o termo  $\phi^{t+\Delta t}$ , representa a propriedade no tempo atual. Os valores assumidos para  $\theta$ , que definem se a discretização será: Explícita  $\theta = 0$ , Implícita  $\theta = 1$  ou Semi-Implícita  $0 < \theta < 1$ .

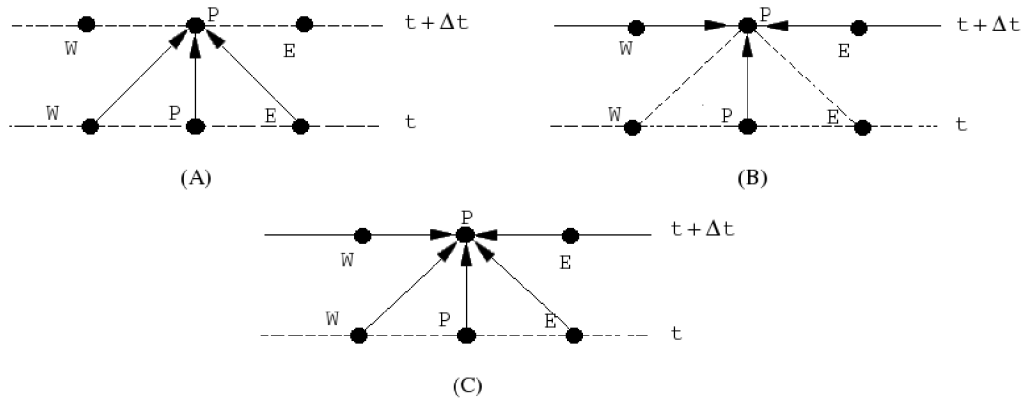


Figura 3.14: Esquema de discretização temporal (a) Método explícito, (b) Método implícito e (c) Método semi-implícito.

Na Figura 3.14 estão representados os esquemas de discretização temporal, onde para Fig. 3.14(a), método explícito, a variável no ponto que se quer determinar em  $t + \Delta t$  é avaliado em relação a todos os pontos vizinhos a  $P$  no tempo  $t$ , estes valores são conhecidos gerando um conjunto de equações não acopladas; necessitando de incrementos temporais pequenos. O segundo esquema método implícito, Fig. 3.14(b) gera um sistema acoplado, no qual a variável determinada em  $t + \Delta t$  é avaliada em relação a todos os pontos vizinhos a  $P$  em  $t$  e aos vizinhos leste e oeste em  $t + \Delta t$ . O terceiro esquema

método semi-implícito Fig. 3.14(c) requer a avaliação da propriedade no ponto  $P$  e  $t + \Delta t$  em relação a todos os pontos vizinhos, tanto em  $t$  quanto em  $t + \Delta t$ . Neste esquema, quando usado  $\theta = 0,5$  tem-se o esquema Crank-Nicolson.

### 3.3.2.3 Tratamento dos Termos Advectivos

A solução dos termos advectivos constitui um dos procedimentos que influenciam na solução das equações de Navier-Stokes. A fim de obter a magnitude das derivadas nas faces do volume de controle empregam-se as funções de interpolação, utilizando os valores do centro dos volumes. Consequentemente, os esquemas de interpolação sofrem influência da malha computacional, caso os volumes de controle sejam menores, ou seja, malha refinada, os esquemas tendem a produzir resultados muito semelhantes entre si. No presente trabalho resultados utilizando os esquemas upwind e diferenças centradas são apresentados.

O esquema *Upwind* leva em conta o sentido da advecção da propriedade  $\phi$ , assim para fluxo da propriedade  $\phi$  da esquerda para a direita ( $u > 0$ ), vide Fig. 3.13, a propriedade  $\phi$  na face leste ( $\phi_e$ ) da célula  $P$ , assume o valor do volume a montante. As avaliações das faces na direção horizontal para ambas as direções são apresentadas na Eq. (3.98) e Eq.(3.99),

$$u > 0 = \begin{cases} \phi_w &= \phi_W \\ \phi_e &= \phi_P, \end{cases} \quad (3.98)$$

$$u < 0 = \begin{cases} \phi_w &= \phi_P \\ \phi_e &= \phi_E. \end{cases} \quad (3.99)$$

Esquema diferenças centrais (Central Difference Scheme - CDS), de segunda ordem de convergência espacial -  $O(\Delta x^2)$ , surgiu como uma das primeiras tentativas de se encon-

trar o valor da variável nas faces do volume de controle. Este método possui estabilidade numérica dependente do  $\Delta$  e toma a forma de média aritmética para malhas uniformes.

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}, \quad \phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2}, \quad (3.100)$$

#### 3.3.2.4 Acoplamento Pressão-Velocidade

No presente trabalho serão tratado apenas escoamentos incompressíveis, a dificuldade que surge é a obtenção de um campo de gradientes de pressão que satisfaça a equação da continuidade. Em vista disto, a presente tese utiliza o método do passo-fracionado (KIM; MOIN, 1985), que consite na segmentação da equação de Navier-Stokes em dois termos: preditor, Eq.(3.101), e corretor, Eq.(3.102), onde  $ADV$  e  $DIF$  representam o termo advectivo e o termo difusivo, respectivamente e o  $*$  simboliza que a variável é estimada.

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^t - ADV^t + DIF^t, \quad (3.101)$$

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right). \quad (3.102)$$

A fim de realizar a correção do campo de velocidade é necessário conhecer o campo e a flutuação da pressão  $P'$ , para isso utiliza-se a Eq.(3.103), equação de Poisson, deduzida a partir da Eq.(3.102)

$$-\frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) = \left( \frac{\partial^2 P'}{\partial x_i^2} \right). \quad (3.103)$$

A sequência para a solução utilizando o método do passo-fracionado segue:

- 1- Estimar o campo de velocidades  $u^*, v^*$  com a Eq.(3.101);
- 2- Calcular  $P'$  com a Eq.(3.103);
- 3- Atualizar o termo de pressão,  $P^{t+\Delta t} = P^t + P'$ ;
- 4- Corrigir os campos de velocidades  $u, v$  com a Eq.(3.102);
- 5- Verificar se a equação da continuidade é satisfeita em todo o domínio;
- 6- Avançar no tempo e retornar ao passo 1.

Especificamente, no presente trabalho, para se resolver o sistema linear gerado a partir da equação de Poisson, foi usado o método de Gauss Sidel.

As equações para estimar os campos de velocidades, Eq.(3.104) e Eq.(3.105), segundo o método do passo fracionado com o uso do esquema de diferenças centradas no termo difusivo.

$$\begin{aligned} \frac{u^* - u^t}{\Delta t} = & \frac{P_e^t - P_w^t}{\Delta x} - \frac{F_e u_e^t - F_w u_w^t}{\Delta x} - \frac{F_s u_s^t - F_n u_n^t}{\Delta y} + \\ & + \nu \left[ \left( \frac{u_E - u_P}{\delta_{xe}} - \frac{u_P - u_W}{\delta_{xw}} \right)^t \frac{1}{\Delta x} + \left( \frac{u_N - u_P}{\delta_{yn}} - \frac{u_P - u_S}{\delta_{ys}} \right)^t \frac{1}{\Delta y} \right], \quad (3.104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v^* - v^t}{\Delta t} = & \frac{P_n^t - P_s^t}{\Delta y} - \frac{F_e v_e^t - F_w v_w^t}{\Delta y} - \frac{F_n v_n^t - F_s v_s^t}{\Delta x} + \\ & + \nu \left[ \left( \frac{v_E - v_P}{\delta_{xe}} - \frac{v_P - v_W}{\delta_{xw}} \right)^t \frac{1}{\Delta x} + \left( \frac{v_N - u_P}{\delta_{yn}} - \frac{v_P - v_S}{\delta_{ys}} \right)^t \frac{1}{\Delta y} \right], \quad (3.105) \end{aligned}$$

onde  $F$  são os fluxos nas faces do volume elementar, sendo que as velocidades do termo advectivo são avaliadas usando esquemas de diferenças centradas ou *Upwind*. Assim as



equações discretas para realizar a correção dos campos de velocidades são:

$$u^{t+\Delta t} = u^* - \Delta t \left( \frac{P'_e - P'_w}{\rho \Delta x} \right), \quad (3.106)$$

$$v^{t+\Delta t} = v^* - \Delta t \left( \frac{P'_n - P'_s}{\rho \Delta y} \right). \quad (3.107)$$



## CAPÍTULO IV

### VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

No presente capítulo são apresentados os resultados unidimensionais e bidimensionais, referentes a verificação e validação dos métodos dos volumes finitos e pseudoespectral de Fourier.

#### 4.1 Análise da acurácia do método dos Volumes Finitos (MVF) e do método Espectral de Fourier (MEFO), aplicados ao modelo de condução de calor em uma barra.

A fim de compreender e verificar a acurácia do método espectral (MEFO), foi proposto no presente trabalho, a comparação de acurácia entre o MEFO e o MVF, a partir da solução da equação de difusão para energia. Para isso utilizou-se uma geometria unidimensional semelhante à barra (NASCIMENTO; MARIANO; PADILLA, 2011) de comprimento  $L=2,0 \pi$  [m], e difusividade térmica  $\alpha = 1,0$  [m<sup>2</sup>/s]. Para a condição inicial,  $t = 0s$ , é proposta uma distribuição de temperatura, a qual representa uma barra feita de material sólido de  $T=\sin(x)$ , Fig.4.1, com a amplitude máxima em  $T_{(x=\pi/2)} = 1,0$  [°C] e mínima em  $T_{(x=3\pi/2)} = -1,0$  [°C].

O modelo matemático é baseado na equação da difusão térmica, apresentado na

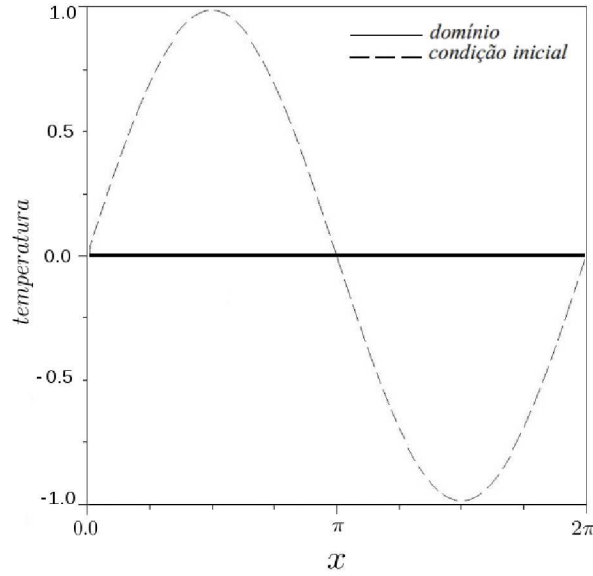


Figura 4.1: Distribuição de temperatura inicial sobre a barra.

forma adimensional,

$$\frac{dT^*}{d\tau} = \frac{d^2T^*}{dx^{2*}} + B, \quad (4.1)$$

onde o  $T^* = \frac{T-T_0}{T_1-T_0}$ ,  $x^* = \frac{x}{L}$  e  $\tau = \frac{t\alpha}{L^2}$ ,  $T_0 = 1,0$  [°C] e  $T_1 = -1,0$  [°C] são as temperaturas de referência, dado pelos valores máximos e mínimos da condição inicial e B é o termo fonte da solução manufaturada.

As simulações foram realizadas usando 32, 64, 128 e 256 pontos, quatro valores do número de Currant 1,0; 0,1; 0,01 e 0,001 e dois métodos de avanço temporal distintos: método Euler explícito e o método Runge-Kutta de quarta ordem clássico (FERZIGER; PERIC, 1996). A norma  $L_2$ , foi obtida pela expressão geral,

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum(\phi_{calc} - \phi_{teor})^2}{N}}, \quad (4.2)$$

onde  $\phi_{calc}$  é a temperatura calculada,  $\phi_{teor}$  é a temperatura obtida pela solução exata proposta, Apêndice A Eq.A-3 e  $N$ , é o número de pontos de discretização do domínio.

Na Figura 4.2 têm-se os resultados da taxa de convergência para ambos os métodos em estudo: MEFO e o MVF, e avanço temporal de primeira ordem. Na Fig.4.2(a) são

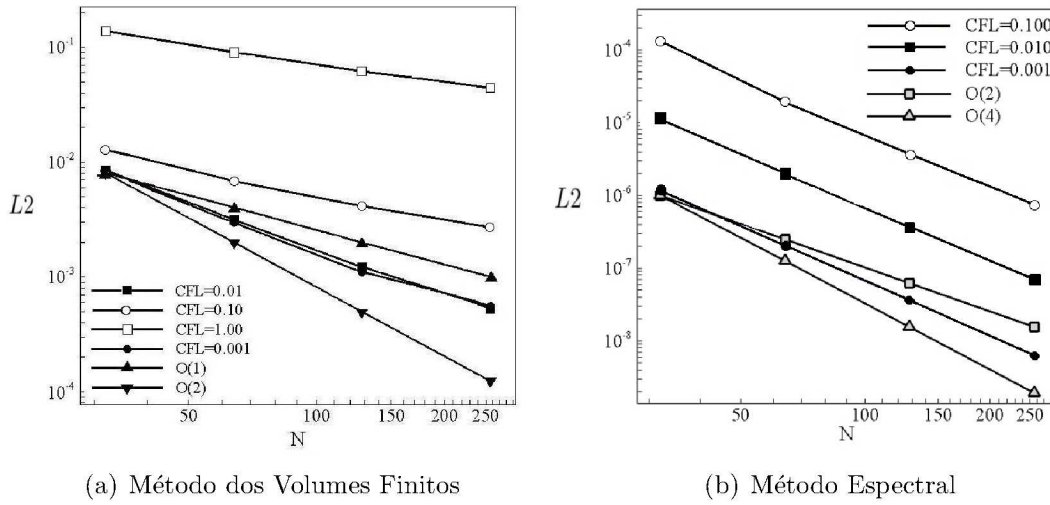


Figura 4.2: Convergência espacial comparando diferentes  $CFL$  para o método de Euler.

apresentas os resultados referente ao erro do método dos volumes finitos, onde ao reduzir o valor do  $CFL$  a taxa de convergência tende à primeira ordem  $O(1)$ . Com relação ao MEFO a taxa de convergência, na Fig.4.2(b), apresenta tendência à segunda ordem  $O(2)$ . Além disso, na Fig.4.2(b), destaca-se a ausência da curva da norma  $L_2$  para o  $CFL=1,0$  pois a solução, neste caso, divergiu. Isto ocorreu pois foi utilizado um valor que ultrapassa os limites de estabilidade do método.

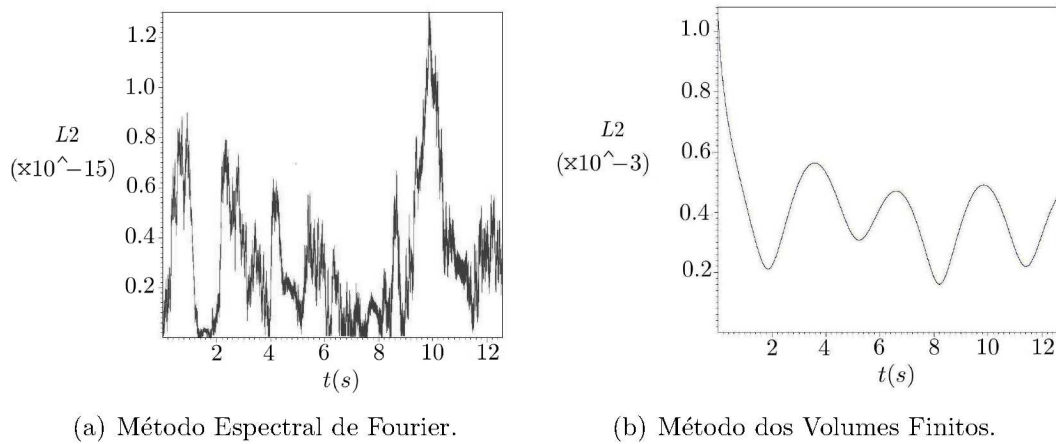


Figura 4.3: Norma  $L_2$  para ambos os métodos utilizando  $CFL$  de 0,001 e avanço temporal método Runge-Kutta de quarta ordem clássico.

A Figura 4.3 mostra a evolução temporal da norma  $L_2$ , Eq.(4.2). Nesta figura os

resultados correspondem a  $N = 256$ ,  $CFL$  de 0,001 e com avanço temporal Runge-Kutta de quarta ordem clássico. Assim, atenta-se para a melhor aproximação da solução do problema com o uso do método espectral de Fourier, Fig.4.3(a), o qual exibe valores da ordem de  $10^{-15}$ , ou seja, obtém-se erro de máquina, quando se utiliza dupla precisão. Enquanto que a solução do problema com o método dos volumes finitos de segunda ordem, Fig.4.3(b), apresentou valores entre  $1,010^{-3}$  e  $0,210^{-3}$ , ou seja, o método dos volumes finitos possui erros maiores nos cálculos das derivadas espaciais, muito mais relevantes do que os erro devido às aproximações do avanço temporal.

Os custos computacionais para ambos os métodos e avanço temporal Euler são mostrados nas Tab.(4.1) e Tab.(4.2). Comparando ambas as tabelas observa-se que o método espectral de Fourier exibe um custo computacional mais elevado, fato devido ao processo de transformar as variáveis para o domínio espectral.

Tabela 4.1: Tempo computacional em segundos, para a solução da Eq. (4.1) com Volumes Finitos e Euler

CFL	N= 32	N=64	N= 128	N= 256
1,0	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	0,107
0,1	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	0,134	1,304
0,01	$2,6 \cdot 10^{-2}$	0,185	1,376	10,673
0,001	0,249	1,836	13,543	104,840

Tabela 4.2: Tempo computacional em segundos, para a solução da Eq. (4.1) com Espectral de Fourier e Euler

CFL	N= 32	N=64	N= 128	N= 256
0,1	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	0,354	2,170
0,01	$4,1 \cdot 10^{-2}$	0,309	3,480	21,447
0,001	0,366	2,925	34,910	216,913

Alterando o avanço temporal para Runge-Kutta de quarta ordem, ocorreu o aumento no custo computacional para ambos os métodos, Tab.(4.3) e Tab.(4.4). Observando a Tab.(4.1) e a Tab.(4.3), percebe-se o aumento de aproximadamente quatro vezes o valor do tempo de processamento. Com relação às Tab.(4.2) e Tab.(4.4), verifica-se também a elevação do custo computacional, na mesma amplitude de quatro vezes. Este aumento no tempo era esperado pois o método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico resolve quatro vezes mais operações de cálculo do que o método de Euler.

Tabela 4.3: Tempo computacional em segundos, para a solução da Equação de difusão de calor com Volumes Finitos e Runge-Kutta de quarta ordem clássico.

CFL	N= 32	N=64	N= 128	N= 256
0,1	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-2}$	0,650	4,517
0,01	0,107	0,766	5,866	45,440
0,001	1,066	7,620	58,104	448,789

Tabela 4.4: Tempo computacional em segundos, para a solução da EDP com Espectral de Fourier Runge-Kutta

CFL	N= 32	N=64	N= 128	N= 256
0,1	0,167	0,164	1,379	14,961
0,01	1,618	1,689	13,566	148,825
0,001	16,760	16,911	135,229	1480,53

As tabelas de custo computacional apresentados em Tab.(4.1) - Tab.(4.4), foram realizadas utilizando uma máquina com processador Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q8400 com velocidade de clock 2.66GHz, e as soluções de problemas periódicos sem descontinuidades, utilizando o método espectral de Fourier e avanço temporal Runge-Kutta de quarta ordem clássico, apresentaram elevada acurácia (erro de máquina).

## 4.2 Solução da Equação de Burgers

Burgers (1948) propôs uma equação diferencial parcial (EDP) não linear, Eq.(4.3). Esta equação tem uma grande utilidade pois exibe um balanço entre os termos de advecção e difusão, Eq.(4.3). Assim, tem uma grande importância no tratamento de problemas aplicados tanto na matemática como na engenharia, onde tem sido empregada como um modelo qualitativo de uma variedade de fenômenos físicos, incluindo ondas de densidade de carga, linhas de vórtices em supercondutores de alta temperatura a formação de grandes estruturas cosmológicas (Feigelman 1980, Blatter et al. 1994, Shandarin e Zeldovich 1989 e Vergassola et al.1994 apud Canuto et al. (2006)). Além disso, é possível obter uma solução analítica para esta EDP, Eq.(4.5), detalhes sobre a discretização da Equação de Burgers vide Apêndice B.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad em \quad \Omega, \quad \forall t > 0, \quad (4.3)$$

onde  $u$  é a velocidade,  $\nu$  é uma constante positiva e  $\Omega$  é o domínio espacial. A Eq.(4.3) torna-se completa com a seguinte condição inicial,

$$u(x, 0) = c + u_b(x, 0). \quad (4.4)$$

A solução analítica proposta por Canuto et al. (1988) é apresentada a seguir:

$$u_b(x, 0) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, 1)}{\phi(x, 1)}, \quad (4.5)$$

$$\phi(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[x - (2n+1)\pi]^2}{4\nu 0}}, \quad (4.6)$$

onde  $c$  é a velocidade de fase ( $c=4,0$  m/s),  $x$  é a posição no eixo das abcissas  $[-\pi:\pi]$ ,  $t$  é o tempo e  $n$  é o contador do somatório.



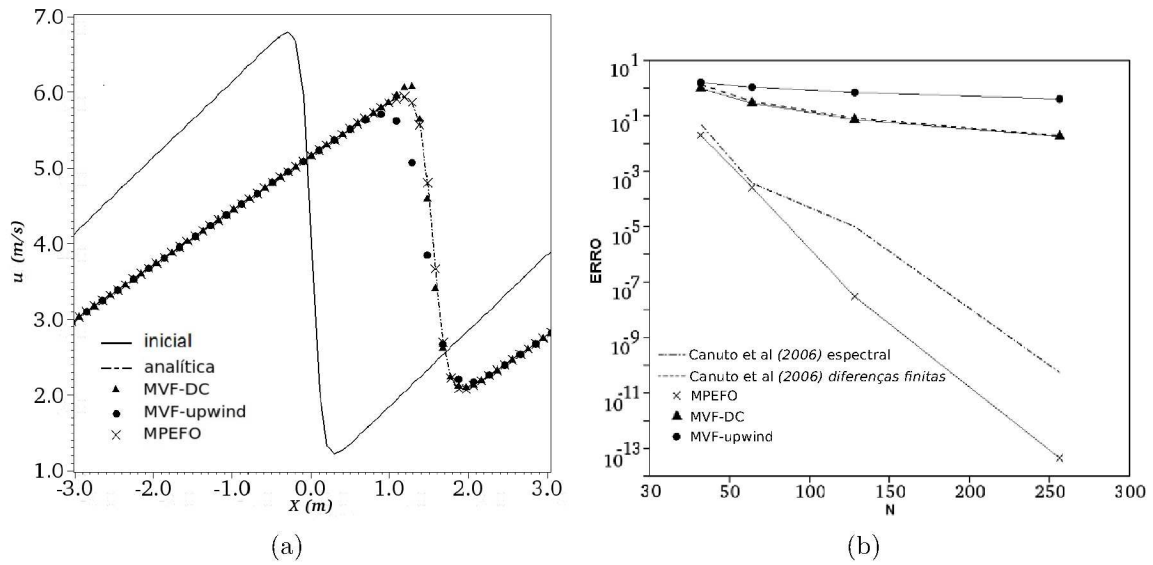


Figura 4.4: (a) Solução da equação de Burger usando malha de 64,  $t=\pi$  segundos, (b) Erro máximo das metodologias, para a solução do termo não linear anti-simétrica e  $CFL=0,001$ .

Na Figura 4.4(a) são comparadas as soluções analítica e numérica obtidas, a abordagem utilizando o método dos volumes finitos com discretização upwind para o termo advectivo (MVF-UP) apresenta resultados com maior difusão numérica e usando o método dos volumes finitos com o termo advectivo sendo discretizado por diferenças centradas (MVF-DC) observa-se resultados mais próximos da solução analítica, porém com uma sobreposição na região da descontinuidade. O método pseudoespectral de Fourier (MPEFO) mostrou maior acurácia do que o MVF como pode ser observado no gráfico da convergência espacial da Fig.4.4(b), o qual também apresenta os dados de Canuto et al. (2006) utilizando os métodos de diferenças finitas e espectral. Nesta imagem pode-se observar que o MVF-DC aproxima-se com melhor exatidão do resultado apresentado por Canuto et al. (2006), porém ocorre um distanciamento do resultado da referência quando alterado o esquema de interpolação para Upwind. Os resultados do erro máximo para o MPEFO mostrou-se com maior acurácia do que o apresentado por Canuto et al. (2006), provavelmente devido aos métodos de avanço temporal utilizado, o qual foi um método de Runge-Kutta clássico.

A análise de custo computacional para a solução da Equação de Burgers utilizando o MPEFO e o MVF-UP e MVF-DC estão apresentados na Tab.(4.5), com o avanço temporal

Runge-Kutta quarto ordem clássico. O custo computacional das soluções utilizando o MVF tem pouca diferença, porém o MPEFO apresenta valores maiores. O tempo de simulação da solução com o MPEFO é mais alto quando comparado com o MVF e pode ser explicado pelo número de vezes que a transformada de Fourier (FFT) é solicitada. Apesar do elevado tempo de simulação, o MPEFO possui acurácia maior do que MVF, como apresentado na Fig. 4.4(b). A máquina utilizada possui processador Core Due de 2.66 Ghz.

Tabela 4.5: Tempo computacional, em segundos, para a Equação de Burgers periódico com avanço temporal Runge-Kutta.

N	MVF-Upwind	MVF- DC	MPEFO
32	$2,399.10^{-2}$	$2,500.10^{-2}$	$9,099.10^{-2}$
64	$8,899.10^{-2}$	$8,998.10^{-2}$	0,329
128	0,704	0,718	2,581
256	5,530	5,747	20,739

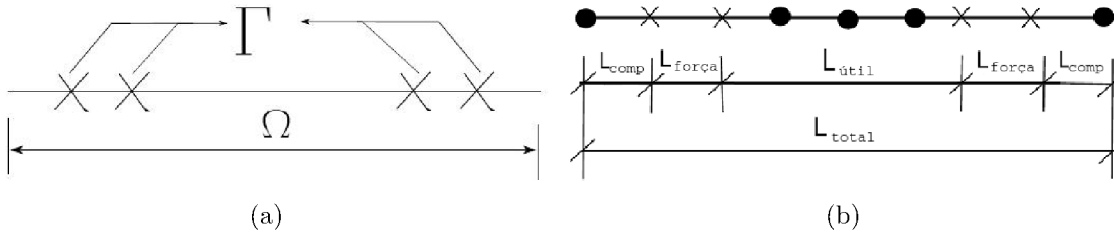
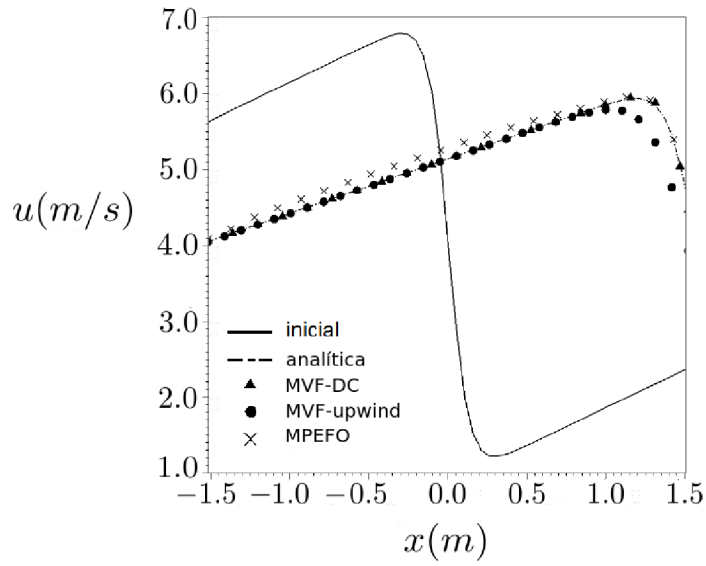


Figura 4.5: Representação do domínio com condições de contorno não periódicas. (a) Domínio lagrangiano e euleriano unidimensional, (b) o comprimento do domínio euleriano.

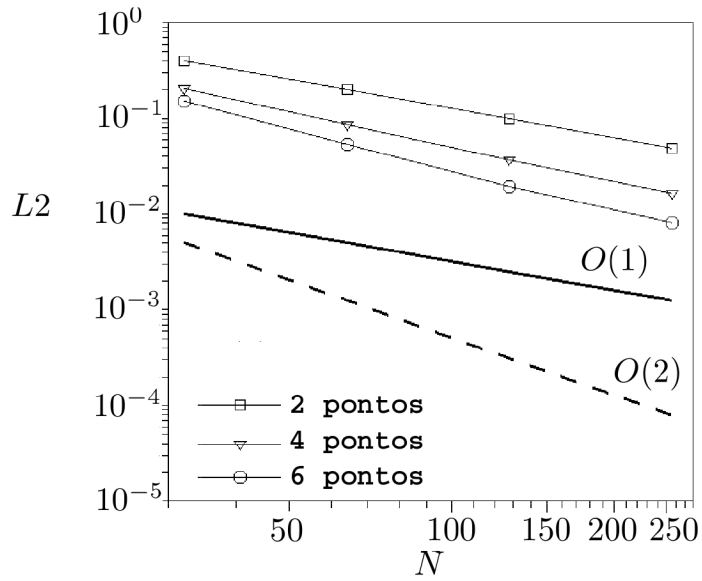
A solução da Equação de Burgers para condições de contorno não periódicas utilizando código pseudoespectral, (NASCIMENTO et al., 2014), requer o método da fronteira imersa (MFI) para impôr as condições de contorno físicas do problema, pois o método pseudoespectral de Fourier usa condições de contorno periódicas. Dessa forma, defini-se um domínio com pontos uniformemente distribuídos chamado domínio Euleriano,  $\Omega$ . Em seguida, defini-se o seu domínio Lagrangiano,  $\Gamma$ , onde o termo fonte da fronteira imersa

atua. Os pontos de ambos os domínios são coincidentes como mostrado na Fig. 4.5(a). Na Fig. 4.5(b), o comprimento do domínio euleriano,  $L_{total}$ , é composto por:  $L_{forca}$ , domínio de imposição da força;  $L_{util}$ , domínio útil e  $L_{comp}$ , o domínio complementar.

As simulações utilizaram o método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico e o esquema antisimétrico para resolver o termo não linear da Eq.(4.3).



(a)



(b)

Figura 4.6: Solução da equação de Burger não periódico (a) campo de velocidade (b)Taxa de convergência no tempo  $t=\frac{\pi}{8}$  segundos, para o MPEFO .

A Figura 4.6(a) mostra o domínio útil da solução da equação de Burgers para o MVF-DC, MVF-upwind, MPEFO, condição inicial e para a solução analítica em um domínio euleriano com  $N = 64$  pontos de colocação/volumes. Observa-se que o MVF-DC e o MPEFO apresentam resultados bem próximos da solução analítica, em contrapartida, a solução MVF-upwind se afasta na região de máximo, devido a difusão numérica inerente a este método.

Resultados da taxa de convergência para o método pseudoespectral espectral de Fourier, são mostrados na Fig. 4.6(b). Nesta imagem é relacionada o erro obtido pela norma  $L_2$  com malhas de 32, 64, 128, e 256, no tempo  $t = \frac{\pi}{8}$  segundos. Nota-se que a medida que aumenta o número de pontos na região de forçagem a curva de convergência, apresenta-se com tendência à segunda ordem de convergência. Os resultados para o MVF confirmam a primeira ordem para o esquema upwind e a segunda ordem para o esquema diferenças centradas, (NASCIMENTO et al., 2014).

O tempo computacioal para resolver o problema proposto com acoplamento do MPEFO com o MFI ,Tab.(4.6), é elevado em aproximadamente cinco vezes maior, quando comparado com o tempo computacional para MPEFO com domínio periódico Tab.(4.5). Comparando o tempo computacional com relação ao números de pontos de forçagem, observa-se que ao usar três pontos de cada lado na região de forçagem, o tempo computacional aumenta em aproximadamente 1,0%, quando comparado com apenas um ponto.

Tabela 4.6: Tempo computacional, em segundos, para a equação de Burgers domínio não periódico, solução utilizando o MPEFO.

N	1 ponto	2 pontos	3 pontos
32	0,200	0,207	0,204
64	2,379	1,382	1,392
128	1,379	12,09	12,15
256	100,64	101,26	101,6

O MPEFO apresenta elevada ordem de convergência, apenas em problemas com condições de contorno periódicas e quando inserido o método da fronteira imersa, a acurácia do MPEFO é comprometida apresentando redução na ordem de convergência.

### 4.3 Solução das Equações de Taylor-Green

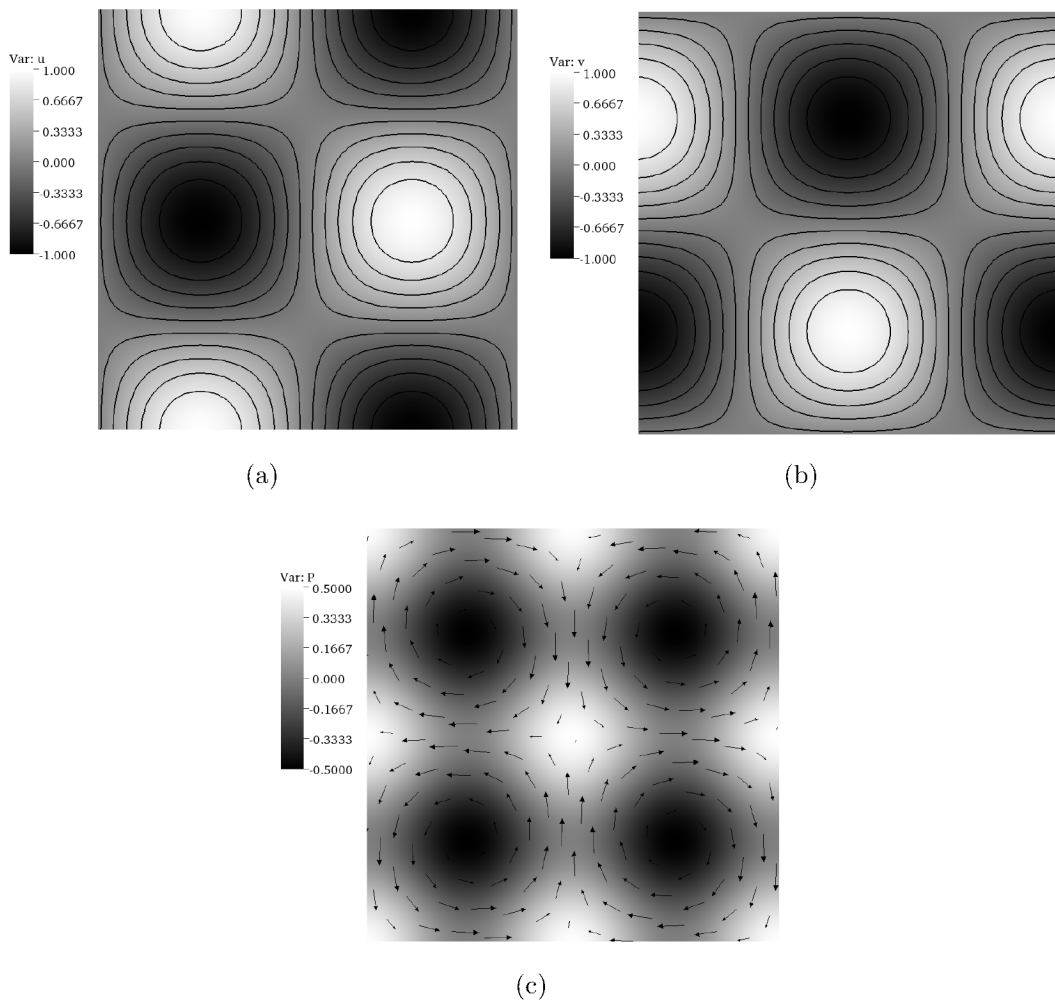


Figura 4.7: Campos de (a) velocidades na direção horizontal, (b) velocidade na direção vertical e (c) pressão para a solução de Taylor-Green, em  $t=0$  [s] (condição inicial).

O processo de verificação dos códigos numéricos MVF e MPEFO foi realizado utilizando as técnicas das soluções manufaturadas, que consiste em usar a própria solução teórica para resolver os problemas usando as equações de Navier-Stokes (MARIANO, 2011). Para isso, utilizou-se as equações analíticas de pressão e velocidades propostas por

Taylor e Green (1937),

$$u^a = -u_0 \cos\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{L}\right) e^{\frac{-2\nu t}{L^2}}, \quad (4.7)$$

$$v^a = u_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) e^{\frac{-2\nu t}{L^2}}, \quad (4.8)$$

$$p^a = -\frac{u_0^2 \rho}{4} \left[ \cos\left(\frac{2x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L}\right) \right] e^{\frac{-2\nu t}{L^2}}, \quad (4.9)$$

onde,  $u^a$ ,  $v^a$  e  $p^a$  são os campos analíticos de velocidades horizontal e vertical e pressão respectivamente, como apresentado na Fig.4.7 para domínio adimensional de  $x/L$  por  $y/L$ , com  $L = \pi$ .

As equações para verificação devem obedecer à equação da continuidade, Eq.(4.10), os termos fontes introduzidos nas equações de Navier-Stokes são dadas pelas Eqs.(4.11) e (4.12),

$$\frac{\partial u^a}{\partial x} + \frac{\partial v^a}{\partial y} = 0, \quad (4.10)$$

$$f_x^a = \frac{\partial u^a}{\partial t} + \frac{\partial u^a u^a}{\partial x} + \frac{\partial u^a v^a}{\partial y} + \frac{\partial p^a}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^a}{\partial y^2} \right), \quad (4.11)$$

$$f_y^a = \frac{\partial v^a}{\partial t} + \frac{\partial u^a v^a}{\partial x} + \frac{\partial v^a v^a}{\partial y} + \frac{\partial p^a}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^a}{\partial y^2} \right). \quad (4.12)$$

Substituindo as Eqs.(4.7) à (4.9) nas Eqs.(4.11) à (4.12) obtém-se,  $f_x^a = 0$ ,  $f_y^a = 0$ , ou seja, as soluções analíticas propostas por Taylor e Green (1937) produzem termos fonte nulos, nas equações de Navier-Stokes (detalhes do modo como foi obtido o termo fonte nulo, pode ser encontrado no Apêndice C). As condições de contorno de periodicidade foram utilizadas nesta etapa.

Os parâmetros utilizados para a solução das Equações de Taylor-Green estão pre-

sentes na Tab.(4.7). Observando que o número de Reynolds,  $Re$ , foi baseado na velocidade máxima do campo inicial e no comprimento de uma recirculação,  $L = \pi$ .

Tabela 4.7: Parâmetros definidos para simulações.

descrição	simbolos	valores
dimensões do domínio	$x/L; y/L$	2
velocidade máxima	$u_0$	1,0[m/s]
massa específica	$\rho$	1,0[Kg/m <sup>3</sup> ]
Número de Reynolds	$Re$	100
Número de pontos (x,y)	$N,M$	32, 64, 128, 256
Número de Curret	$CFL$	0,001
Tempo final adimensional	$\frac{tU_\infty}{L}$	0,3
dimensão do vórtice	$L$	$\pi$

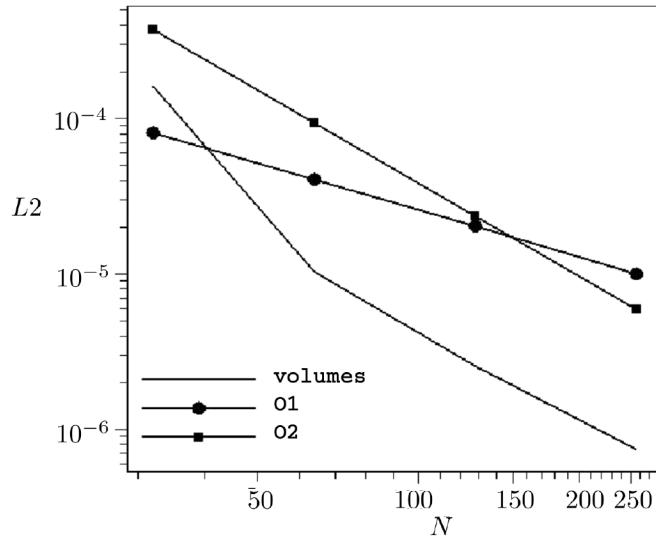


Figura 4.8: Taxa de convergência utilizando o método dos volumes finitos para a solução do problema de Taylor-Green em  $t=0,3$  [s].

A Figura 4.8 representa a taxa de convergência em relação ao número de volumes para o MVF. Nota-se que, ao realizar o refinamento, a curva numérica apresenta uma queda, praticamente, exponencial tendendo à segunda ordem de convergência. A evolução temporal da norma  $L_2$  é apresentada na Fig.4.9, para o MPEFO e  $N=32$ , onde observa-se

que os erros obtidos são na ordem de erro de máquina.

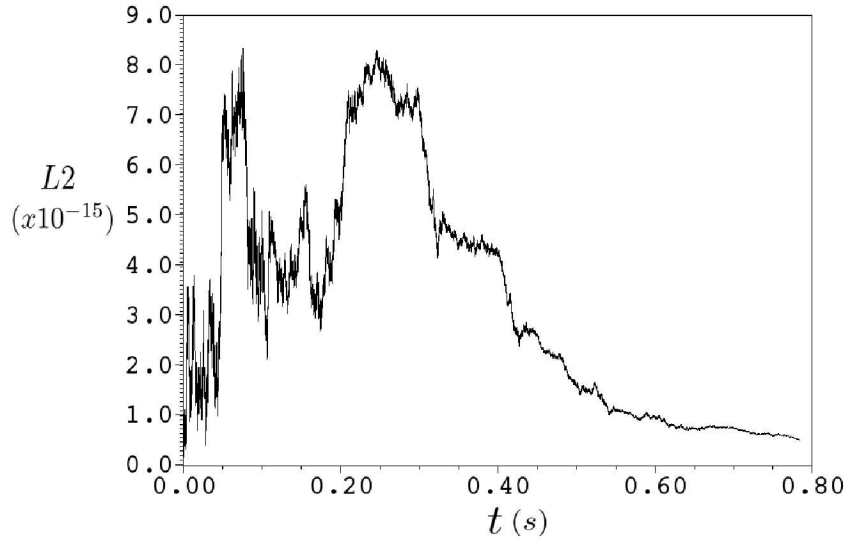


Figura 4.9: Norma L2 utilizando o método pseudoespectral de Fourier.

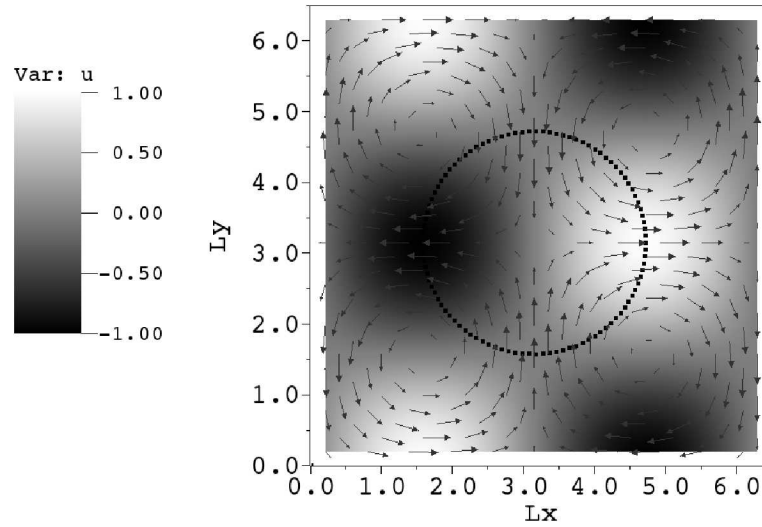


Figura 4.10: Campo inicial da solução de Taylor-Green com MFI.

Após realizada a verificação dos códigos é necessário verificar também o acoplamento com o método da fronteira imersa em ambos. Para isso, foi utilizado o mesmo domínio quadrado e introduzido neste uma geometria circular, Fig.4.10. A solução manufaturada utilizada foi a mesma, ou seja, solução das Equações de Taylor-Green (NASCIMENTO; MARIANO; PADILLA, 2012; NASCIMENTO et al., 2013). A divisão do domínio euleri-



ano e lagrangiana foi realizada de forma a manter o espaçamento praticamente idêntico, ou seja,  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ .

A verificação com fronteira imersa foi realizada para as funções distribuição: chapéu, Eq.(3.7) e cúbica Eq.(3.6), conservando os mesmos parâmetros do domínio euleriano anteriormente verificado, Tab.(4.7), e o domínio lagrangiano possui diâmetro  $\pi$  [m].

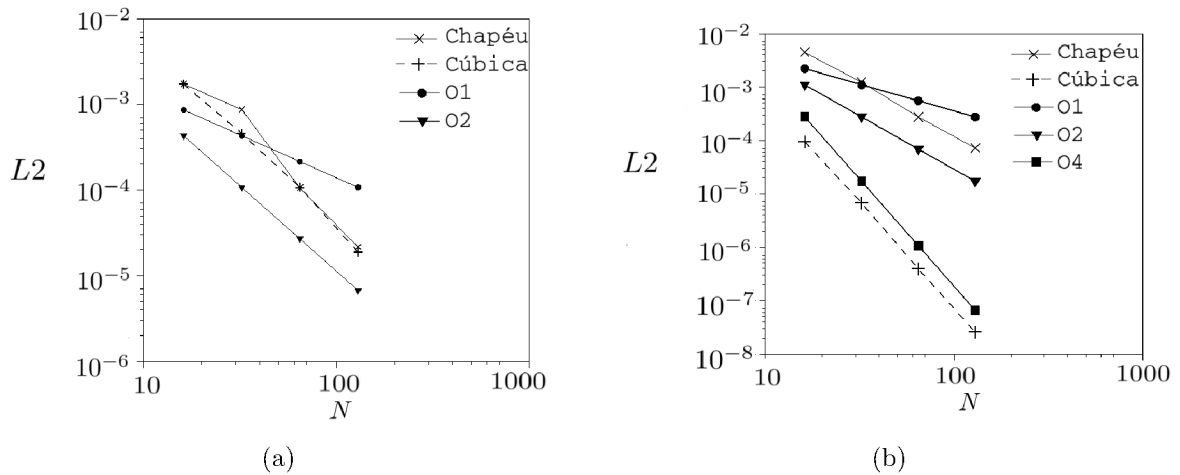


Figura 4.11: Taxa de convergência com o uso do método da fronteira imersa, (a) MVF, (b) MPEFO.

A taxa de convergência apresentada na Fig. 4.11, para o MVF e função chapéu, Fig. 4.11(a), mostra que a solução tende a segunda ordem de convergência, similar à solução utilizando a função cúbica. Isto permite afirmar que, com o uso do MVF, os erros obtidos independem das funções interpolação e distribuição, porém, o MPEFO com função chapéu, Fig. 4.11(b), mostra que, a solução se aproxima da segunda ordem de convergência, o que difere quando usado a função cúbica, na qual, a curva de convergência tende à quarta ordem. Embora o MPEFO tenha alta ordem de convergência, quando acoplado com a metodologia da fronteira imersa ocorre redução em sua acurácia, apresentando valores de erro da ordem de  $10^{-7}$  e  $10^{-8}$ .

Em relação ao custo computacional, Tab.(4.8), o MVF apresentou maiores valores comparados com o MPEFO, diferente das soluções unidimensionais, isto pode ser justificado, pois, no MVF o campo de pressão é resolvido por meio de um sistema linear, enquanto que no MPEFO o sistema linear é substituído pela operação de projeção.

Observa-se que nos problemas unidimensionais, apresentados nas seções anteriores, não existia o campo de pressão, logo, o tempo computacional do MPEFO é superior ao MVF.

Tabela 4.8: Custo computacional para a solução do problema de Taylor-Green com fronteira imersa.

N=M	MPEFO	MVF
32	0,604909	0,604909
64	40,39186	25,506124
128	798,185658	3056,209385
256	14916,528343	160585,739258

#### 4.4 Validação do MPFEO e MVF acoplado com o MFI

A validação do MPEFO e do MVF foi possível com problema do escoamento de Couette circular, ou seja, escoamento confinado entre cilindros concêntricos. Sendo que o cilindro de menor raio ( $R_1$ ) gira, em torno do seu centro, com uma velocidade angular constante ( $\omega$ ), Fig.4.12.

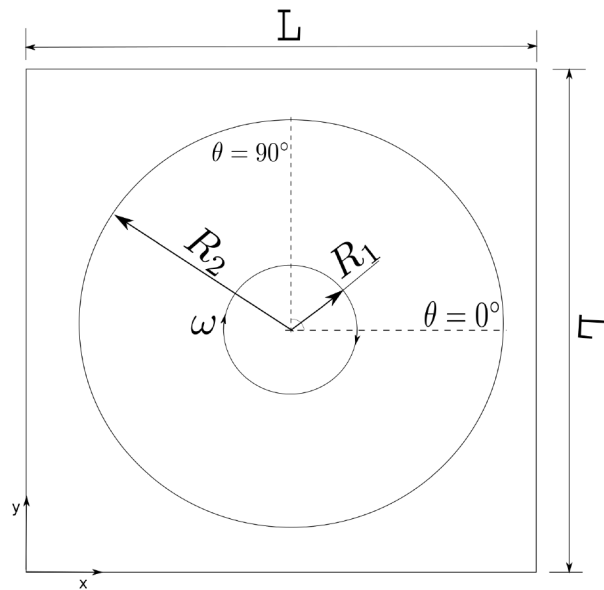


Figura 4.12: Esquema ilustrativo do problema do escoamento de Couette circular.

Neste escoamento, o movimento do fluido é circular quando atinge o regime estacionário, a solução analítica é dada pelas Eqs. (4.13) a (4.15) (ÇENGEL; CIMBALA,

2012).

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r^2}, \quad (4.13)$$

$$A = \frac{w_2 R_2^2 - w_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (4.14)$$

$$B = \frac{(w_1 - w_2)(R_1^2 R_2^2)}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (4.15)$$

onde  $R_2$  e  $\omega_2$  são o raio e a velocidade do cilindro externo, respectivamente. O número adimensional representativo deste tipo de escoamento é o número de Taylor (CHANDRASEKHAR, 1960):

$$Ta = \frac{2R_1^2 G^4}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{w}{\mu} \right)^2. \quad (4.16)$$

onde  $G = R_2 - R_1$ , também denominado *gap*, e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica.

Tabela 4.9: Parâmetros utilizados no escoamento de Couette circular.

descrição	simbolos	valores
dimensões do domínio	L	5.0 $\pi$ [m]
massa específica	$\rho$	1,0[Kg/m <sup>3</sup> ]
viscosidade dinâmica	$\mu$	1,0[Pa.s]
Número de Taylor	Ta	20
volumes/ pontos de colocação	N,M	32, 64, 128, 256
Número de Curret	CFL	0,1
diâmetro cilindro interno	$D_1$	$\pi$ [m]
diâmetro cilindro externo	$D_2$	3,0 $D_1$ [m]
Velocidade angular	$\omega_1 = \omega$	1,0 [rad/s]

Para as simulações deste problema, fez uso do método da fronteira imersa com a função cúbica, para malha de 32x32 à 256x256 e parâmetros listados na Tab.(4.9). O erro

foi obtido com base na norma  $L_2$ , apenas no domínio de interesse, *i.e.*, entre os raios  $R_1$  e  $R_2$ .

A Figura 4.13 apresenta a taxa de ordem de convergência para ambos os métodos em estudo. Nesta imagem pode-se notar que ambos os métodos apresentaram tendência de decaimento à primeira ordem de convergência. Na curva que representa o MVF nota-se a presença de uma descontinuidade entre as malhas de  $64 \times 64$  e  $128 \times 128$ . Isto ocorre pois, neste trabalho foi utilizado o MVF com discretização de segunda ordem, desta maneira para obter o campo de velocidade faz necessário o cálculo das derivadas da mesmas, a qual foi feita utilizando os valores próximo à célula principal, porém no MPEFO o cálculo das derivadas das velocidades utilizam de todos os pontos de colocação do domínio, fazendo com que este erro seja minimizado.

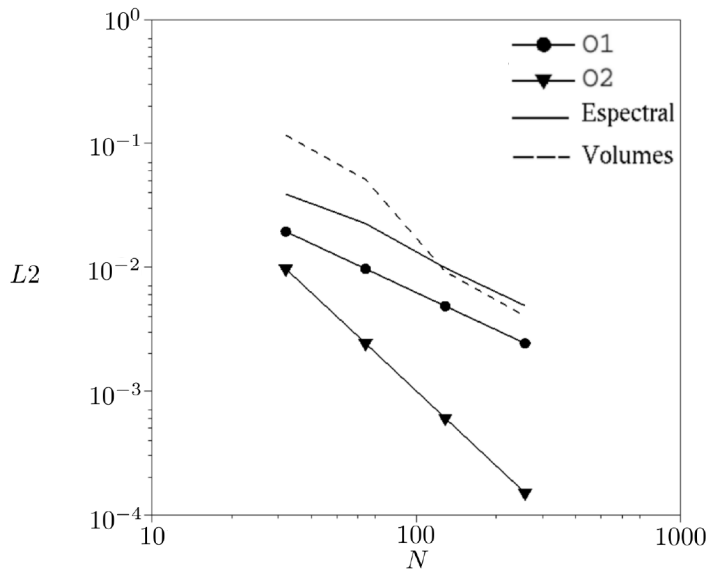


Figura 4.13: Norma  $L_2$  obtida para a solução do escoamento de Couette circular.

A validação foi realizada para duas configurações, sendo a primeira utilizando apenas dois domínios lagrangianos circulares,  $R_1$  e  $R_2$  (Fig. 4.12). A segunda configuração foi realizada com três domínios lagrangianos circulares, onde utilizou-se da mesma configuração onde o terceiro domínio lagrangiano foi inserido no interior da geometria com raio  $R_1$ , vide Fig. 4.14, definindo assim uma zona de imposição de força com as mesmas velocidade e direção de rotação.

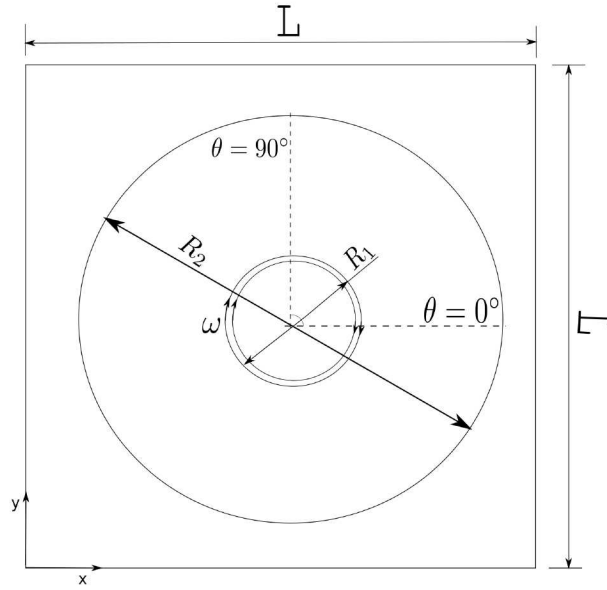


Figura 4.14: Esquema ilustrativo do problema do escoamento de Couette circular, com a utilização da zona de imposição.

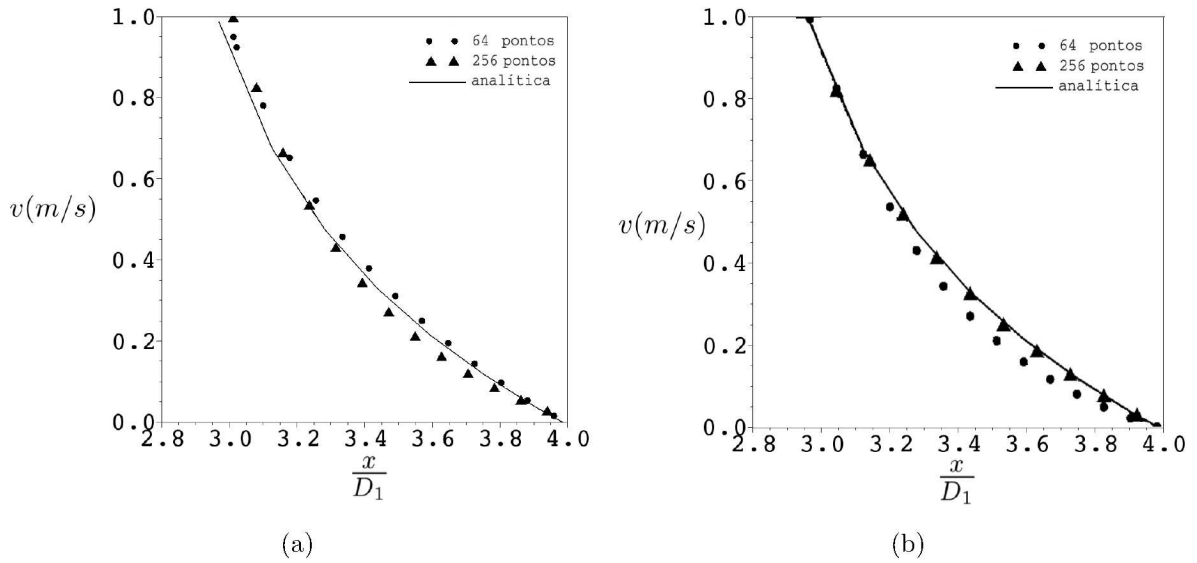


Figura 4.15: Perfil de velocidade tangencial  $\theta=0^\circ$  e MPEFO, (a) dois domínios lagrangianos, (b) três domínios lagrangianos.

O efeito destas estratégias é notada sobre o perfil velocidade tangencial na posição  $\theta = 0^\circ$ , Fig.4.15. Na simulação com apenas um domínio lagrangiana circular rotativo, Fig.4.15(a), os perfis mantêm a diferenças ao longo da região de interesse,  $\frac{x}{D_1} = 3$  à  $\frac{x}{D_1} = 4$ , mesmo para 256x256 nós de colocação no domínio euleriano. Por outro lado, o

uso de uma zona de imposição de força, como mostrado na Fig. 4.14, melhora a solução conseguindo um perfil com concordância mais próxima da solução analítica.

## 4.5 Validação do modelo fluido estrutural

Devido a elevada acurácia e o baixo custo computacional do MPEFO em relação ao MVF, o modelo de interação fluido-estrutura foi implementado para o MPEFO.

### 4.5.1 Cilindro com um grau de liberdade

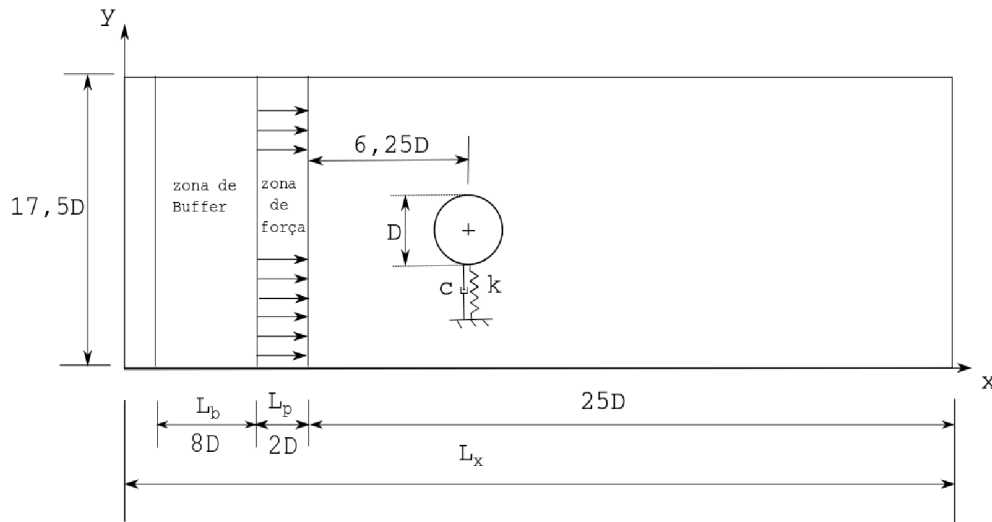


Figura 4.16: Esquema do problema de fluido-estrutura com um grau de liberdade.

O problema trata do escoamento sobre um cilindro rígido de diâmetro  $D$ , ancorado por um sistema mola-amortecedor, Fig.4.16, onde a estrutura é composta pelo conjunto cilindro-mola-amortecedor. O domínio de  $25 D \times 17,5 D$  está composto por três subdomínios: a zona de buffer  $L_b=8,0 D$ , que possibilita amortecer os vórtices injetados devido ao uso da condição periodicidade, próprio do MPEFO (MARIANO, 2011; MOREIRA, 2011); a zona de imposição de força  $L_p= 2,0 D$ , onde é imposta a condição de fluxo uniforme através de um campo de força, definido  $U_\infty$ , finalmente, o domínio útil  $L_x$ .

As simulações foram realizadas usando o MPEFO com Runge-Kutta de quarta ordem otimizado com seis passos (ALLAMPALLI et al., 2009), e 256x128 nós de colocação. Os fenômenos associados foram definidos segundo as referências Dettmer e Peric (2006), Singh e Mittal (2005): velocidades reduzidas,  $U_r = \frac{u_\infty}{f_n D}$ , de  $U_r^*=4,45$  à  $U_r^*=7,238$ ; razão mássica  $m^*=149,1$ ;  $f_n=7,016$  hz, diâmetro do cilindro de 0,0016 m; razão de amortecimento estrutural  $\xi=0,0012$  e incremento temporal  $\Delta t= 10^{-3}$ .

O fluido ao passar por um corpo imerso nota esta presença isto é observado com a desaceleração do fluido nas proximidades da estrutura sólida, e ao elevar a velocidade do escoamento uma região de baixa pressão a jusante do corpo é formada, succionando uma parcela de fluido formando assim estruturas contra-rotativas, denominada de vórtice de Von Kármán, Fig.4.17. O processo de liberar uma estrutura contra-rotativa fornece a transmissão da força fluido dinâmica para o conjunto mola-amortecedor, portanto deslocando o cilindro em movimento harmônico na direção da mola.

Os campos de vorticidade são apresentados na Fig. 4.17, em  $t^*=1,4 \cdot 10^3$ , onde é possível notar que a esteira de vórtices gerada apresenta a configuração 2S em todos os casos, ou seja, dois vórtices únicos contra rotativos alinhados vide Fig.2.1. A liberação dos vórtices à jusante do corpo imerso gera as forças de arrasto e sustentação, sendo que esta última é responsável por deslocar o cilindro na direção perpendicular ao fluxo da condição de contorno a jusante do cilindro.

Ainda na Figura 4.17 nota-se que as condições de contorno do método numérico utilizado, ocorre a reinjeção das vorticidades no início do domínio, além disso, fica visível a presença da zona de buffer amortecendo todo o valor das instabilidades e da zona de imposição de forças, introduzindo a condição de entrada do escoamento.

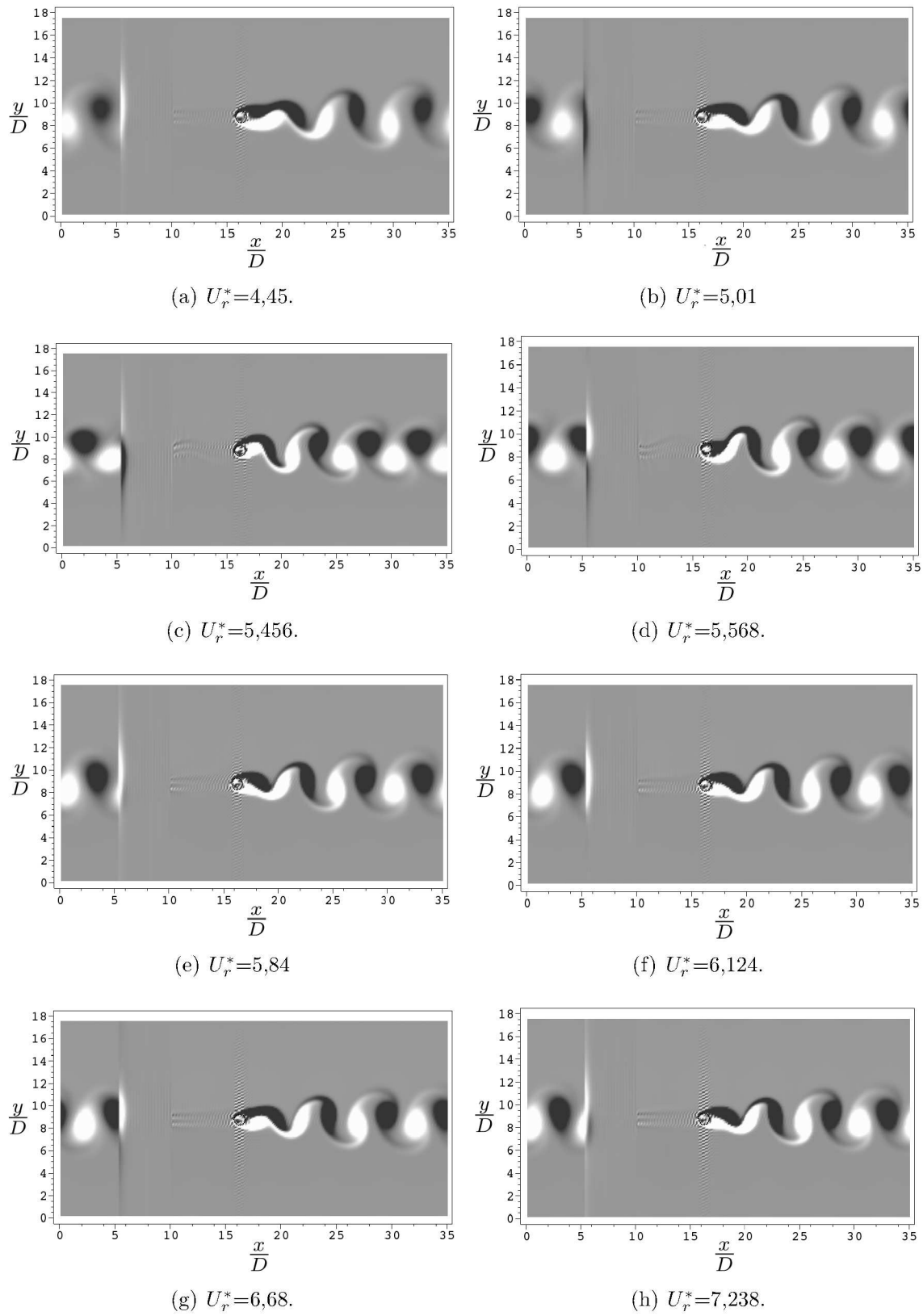


Figura 4.17: Campo de vorticidade para diferentes  $U_r^*$ , em escoamento sobre cilindro com um grau de liberdade.



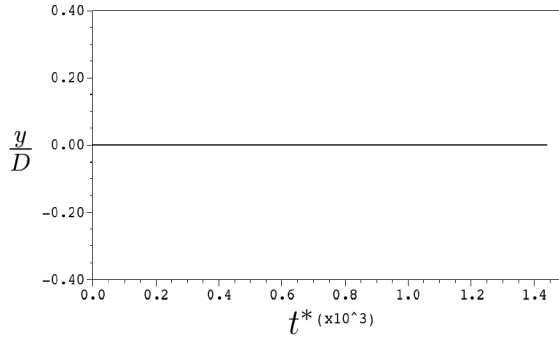
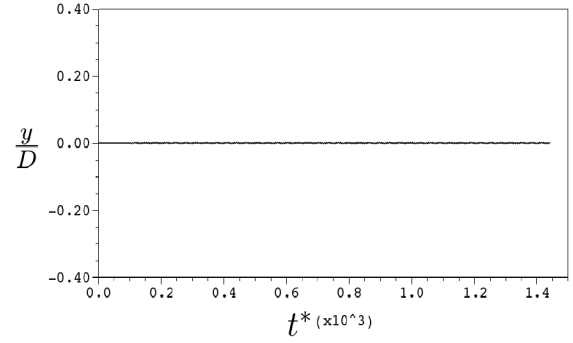
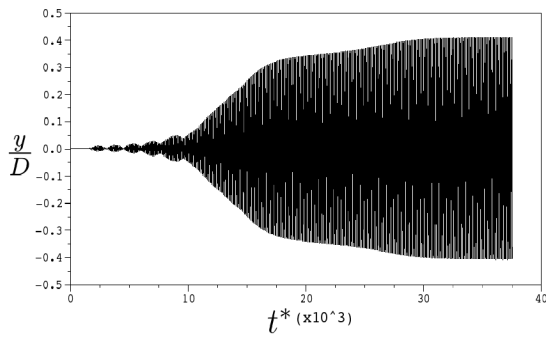
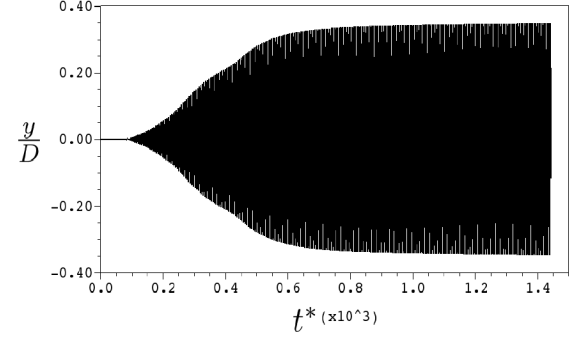
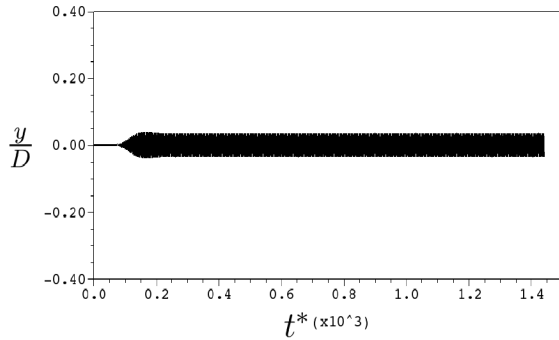
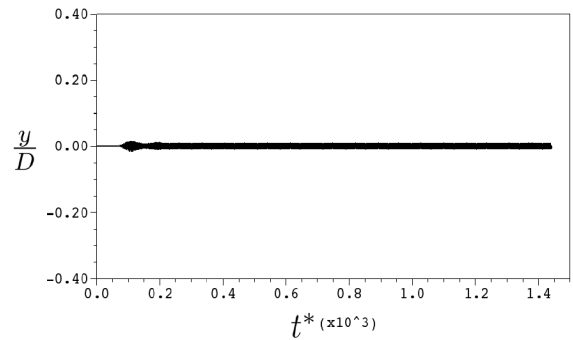
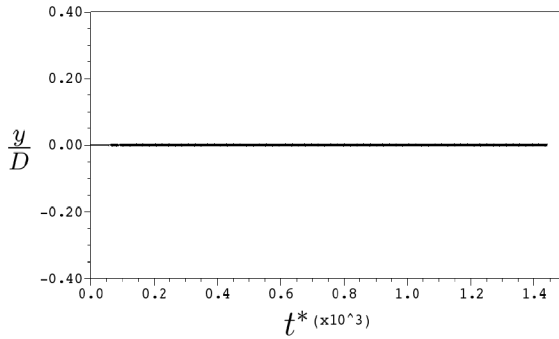
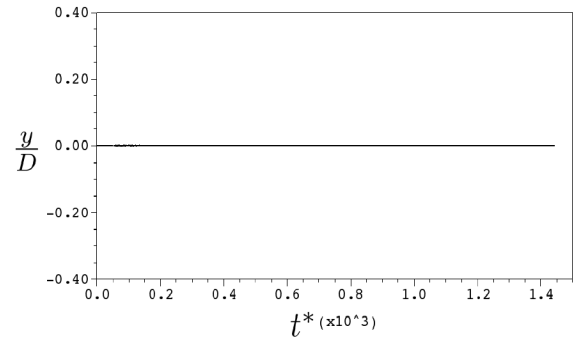
(a)  $U_r^*=4,45$ .(b)  $U_r^*=5,01$ (c)  $U_r^*=5,456$ .(d)  $U_r^*=5,568$ .(e)  $U_r^*=5,84$ (f)  $U_r^*=6,124$ .(g)  $U_r^*=6,68$ .(h)  $U_r^*=7,238$ .

Figura 4.18: Deslocamento normalizado do centro de massa do cilindro ao longo do tempo para diferentes  $U_r^*$ .

As evoluções dos deslocamentos adimensionalizado do centro de massa do cilindro para as várias simulações são expostas na Fig. 4.18 para diferentes velocidades reduzidas, na qual nota-se que, para as frequência de *lock-in*, que ocorre quando a frequência de excitação coincide com a frequência estrutural, o fenômeno de Vibrações Induzidas por Vórtices - VIV, induz um aumento no deslocamento da estrutura, observado em  $U_r^*=5,456$  à  $U_r^*=5,568$  e posteriormente com a elevação da velocidade reduzida ( $U_r^*=6,12$  à  $U_r^*=7,238$ ), percebe-se a redução da amplitude do deslocamento.

Para a velocidade reduzida  $U_r=5,456$ , Fig.4.18(c), percebe-se a existência do fenômeno de batimento do tempo de  $t^*=0$  à  $t^*=10^4$ , fisicamente significa que a frequência de liberação de vórtices, nesse período de tempo, está próxima à frequência natural da estrutura. Posteriormente para  $t^*$  superior a  $20 \cdot 10^3$ , nota-se o aumento da amplitude de deslocamento do baricentro da estrutura, isto permite concluir que o problema encontra-se em ressonância, e que a amplitude de deslocamento é limitada pelo amortecimento viscoso implementado na equação estrutural.

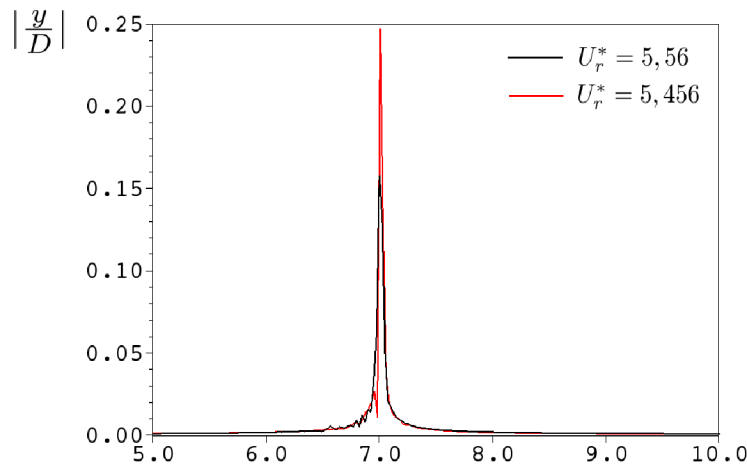


Figura 4.19: Espectro de frequências.

Na Figura 4.19 está mostrado o espectro de frequências para as velocidade reduzidas,  $U_r^*=5,456$  e  $U_r^*=5,56$ . Para a obter tal imagem, foi utilizados todas as frequências existentes desde a fase transiente ao regime permanente. Nota-se que para  $U_r^*=5,456$  o maior valor de amplitude ocorre para frequência próximo à 7 hz, o mesmo pode ser visto

para a  $U_r^*=5,56$  porém também é notada a presença de outras frequências com valores de amplitude menores, ou seja, a frequência de deslcoamento da estrutura é a mesma da frequência natural, *i.e.* 7,016 hz, confirmando que as amplitudes máximas observada na Fig.4.18(c) e (d) são decorrente da ressonância.

Com relação à amplitude do espectro de frequências, Fig. 4.19, pode-se notar que apresenta o valor aproximadamente 37,5% inferior ao valor da amplitude de deslocamento mostrado na Fig.4.18, isto é decorrente da maneira como foi realizada a transformada, o que acarreta em uma média das amplitudes de todas as frequências do espectro.

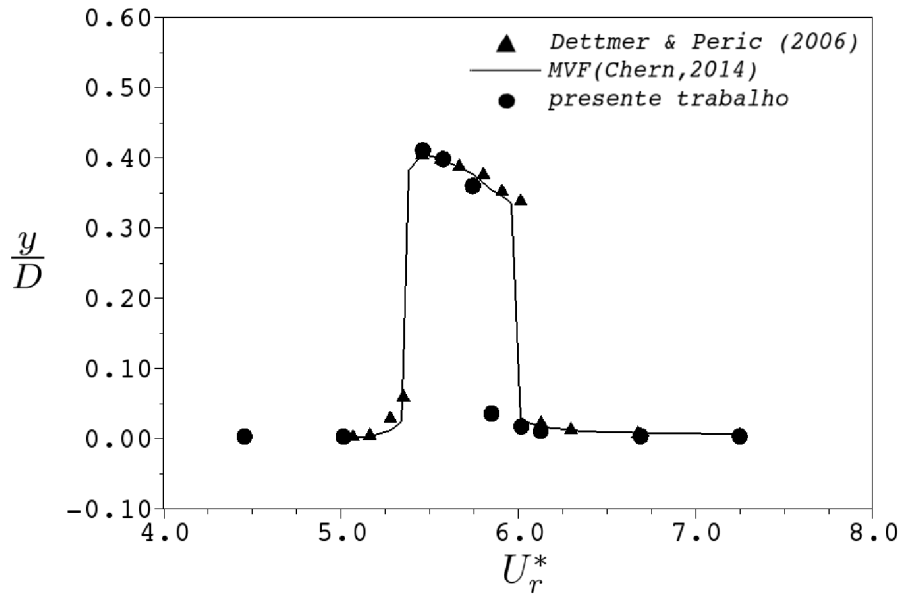


Figura 4.20: Amplitude de pico do centro de massa do cilindro ancorado por uma mola.

As posições máximas do baricentro da estrutura em relação às velocidades reduzidas estão indicadas na Fig. 4.20. Nesta imagem os resultados são comparados aos resultados de Chern et al. (2014), apresentando pequenas discordâncias dos valores próximos às frequências de *lock-in*. Em concordância com a Fig. 4.18 as oscilações provocam grandes deslocamentos para valores de  $U_r^*$  entre 5,456 e 6,0, sendo que próximo do segundo valor a redução da amplitude também é acentuada e apresenta diferença com os dados de Chern et al. (2014). Portanto, foi realizado um aumento no número de pontos para 1024x512 pontos de colocação no domínio euleriano especificamente para a simulação com  $U_r^*=5,568$ . Na

Fig.4.21, observou-se que a amplitude de pico atingiu mesmo resultado obtido por Dettmer e Peric (2006) e Chern et al. (2014).

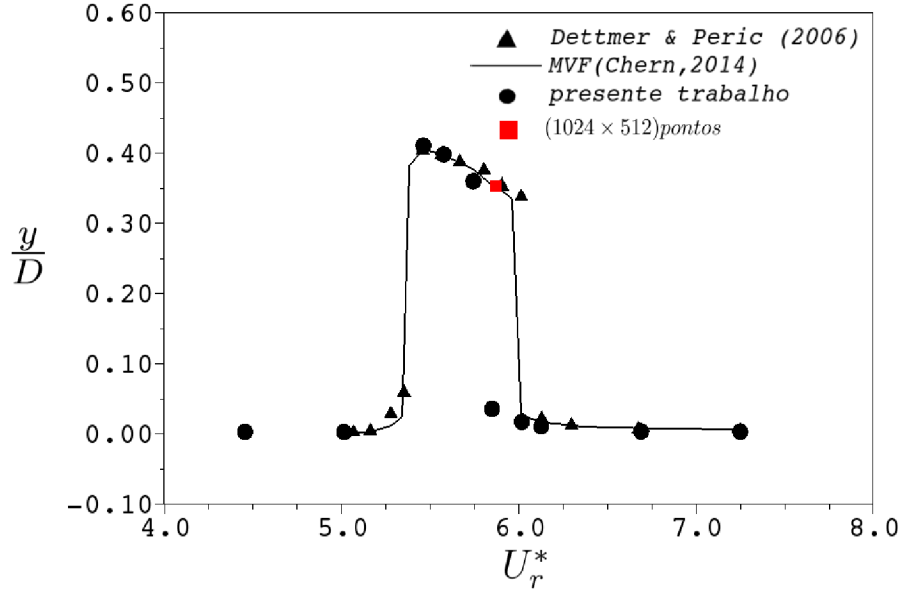


Figura 4.21: Amplitude de pico do centro de massa do cilindro ancorado por uma mola, com refinamento para  $U_r^*=5,568$ .

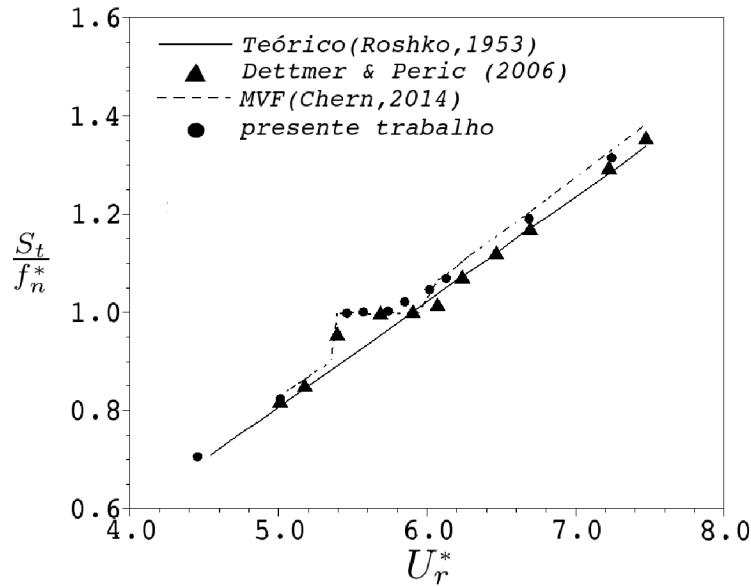


Figura 4.22: Relação entre frequências do escoamento sobre cilindro ancorado por uma mola.

A Figura 4.22 mostra a curva da relação entre Número de Strouhal, Eq.(4.17), (WILLIAMSON; ROSHKO, 1988) e a frequência natural reduzida  $f_n^*$  da estrutura, (vide

Tab.3.1) em função de velocidade reduzida. Os resultados obtidos com o MPEFO mostram a mesma tendência da curva teórica (ROSHKO, 1953). Os casos de grandes deslocamentos, apresentam valores da relação de frequência  $\frac{St}{f_n^*}$  próximo de um, com boa concordância em relação aos dados de Chern et al. (2014).

$$St = \frac{Df'_n}{U_\infty} \quad (4.17)$$

#### 4.5.2 Cilindro com dois graus de liberdade

O problema é o mesmo descrito anteriormente, porém o cilindro é ancorado por mais um conjunto mola-amortecedor na direção horizontal. A Fig.4.23 apresenta as características do problema.

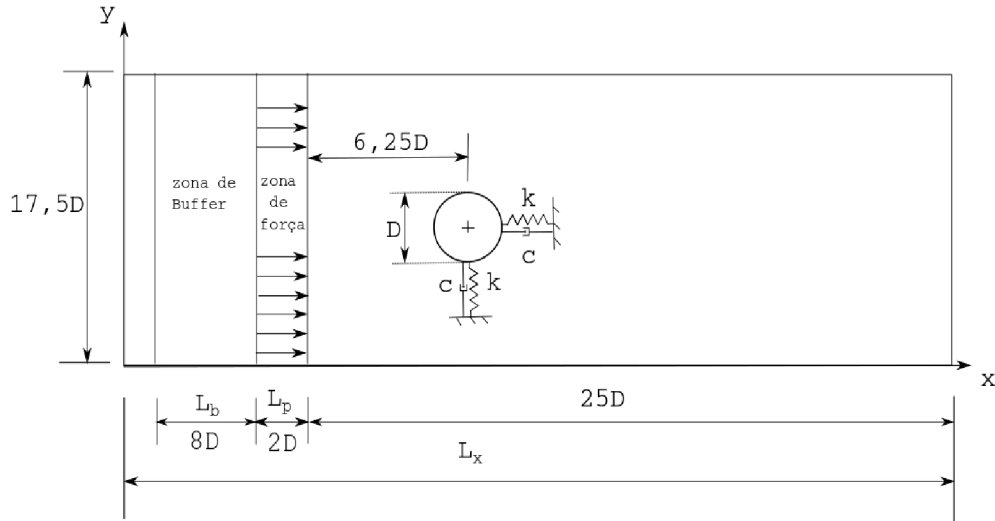
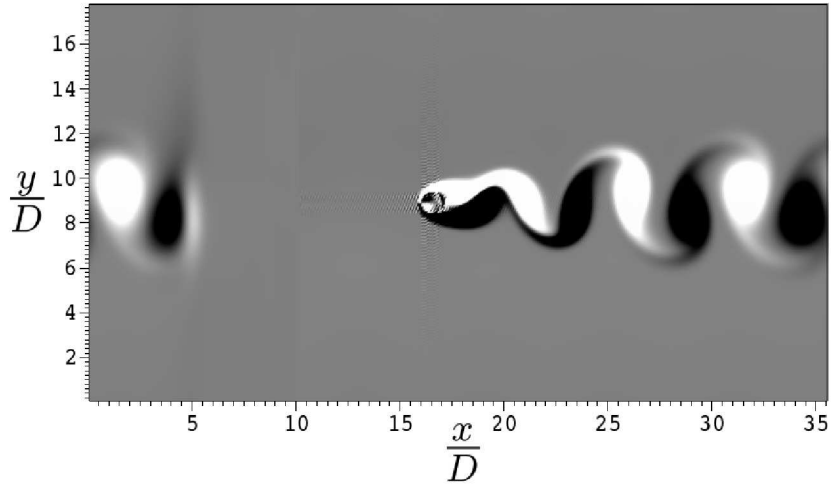


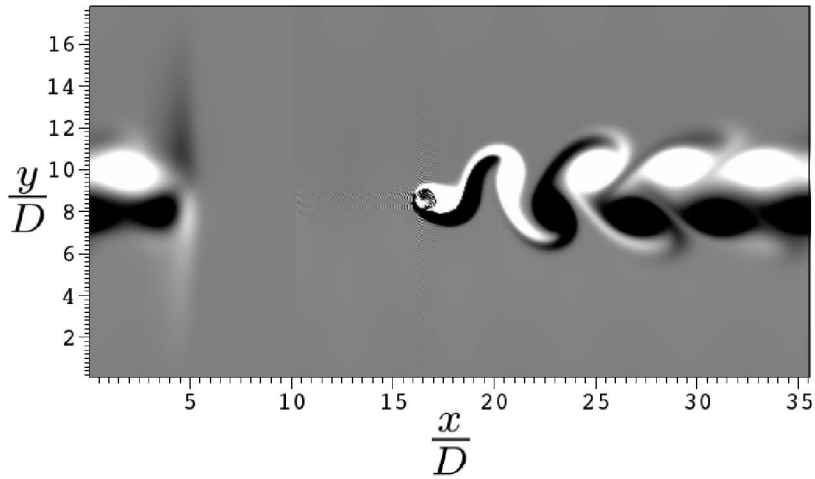
Figura 4.23: Esquema do problema de interação fluido-estrutura com dois graus de liberdade.

A validação das simulações basearam-se nos parâmetros dos trabalhos Chern et al. (2014), Singh e Mittal (2005): razão mássica  $m^*=10$ , a razão de amortecimento  $\xi=0$ , velocidade reduzida  $U_r^*=4,0$  à  $8,5$ , número de Reynolds 100, frequência natural  $f_{nx}=f_{ny}$ , o número de pontos de colocação  $512 \times 256$  e o incremento do tempo  $\Delta t = 10^{-4}$  [s]. A priori, foi realizado testes numéricos com dois métodos de avanço temporal distintos: método

de Euler explícito e o método Runge-Kutta de seis passos (ALLAMPALLI et al., 2009), neste caso a velocidade reduzida utilizada foi de  $U_r^*=4,9$ .



(a)



(b)

Figura 4.24: Campos de vorticidade para  $U_r^*=4,9$  com dois métodos de avanço temporal: (a) Euler, (b) Runge-Kutta.

A Figura 4.24 mostra o campo de vorticidade para o problema de VIV proposto, onde a coloração branca representa valores positivos e a coloração preta valores negativos de vorticidade, para o  $t^*=1563$ . Pode-se notar que, com o uso do método de Euler ( $\Delta t=10^{-5}$ ) o campo de vorticidade apresenta configuração 2S, por outro lado, com o uso do método de Runge Kutta ( $\Delta t=10^{-3}$ ), a configuração passa a C2S, como exposto por Williamson e Roshko (1988).

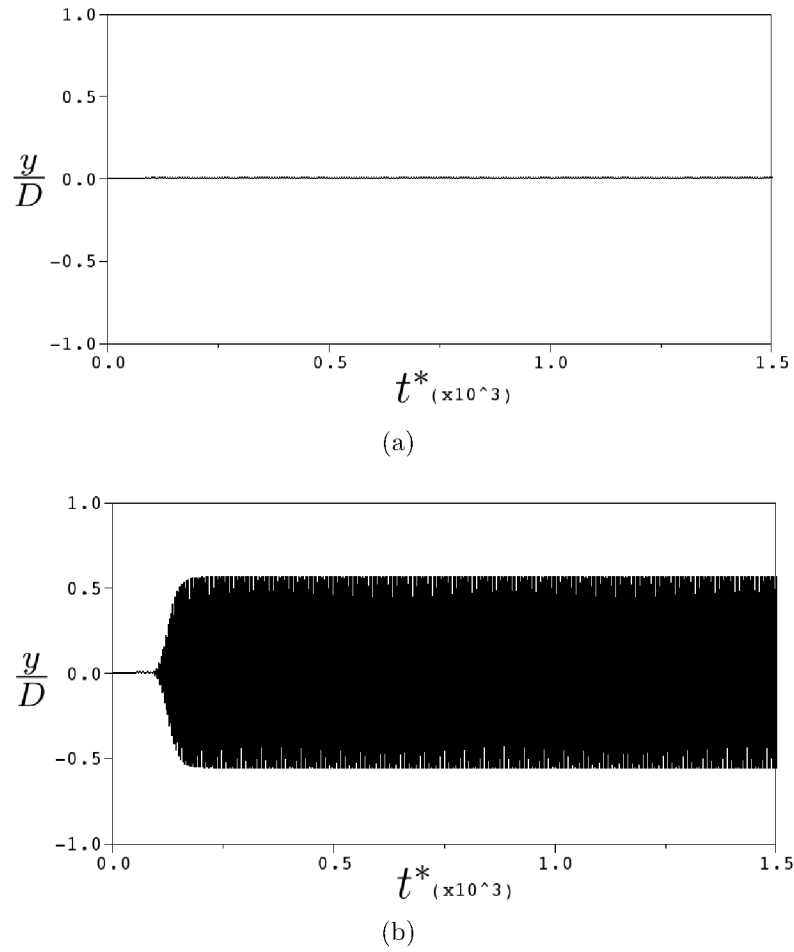
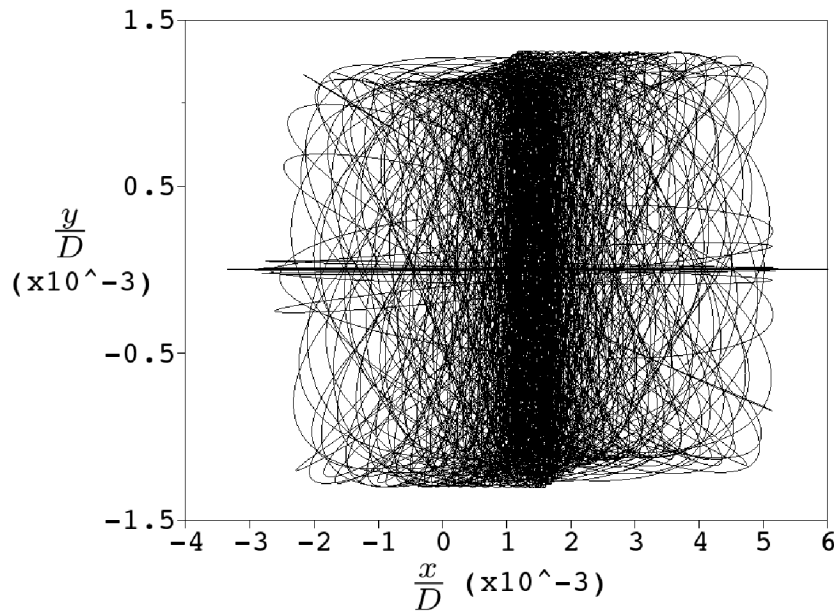
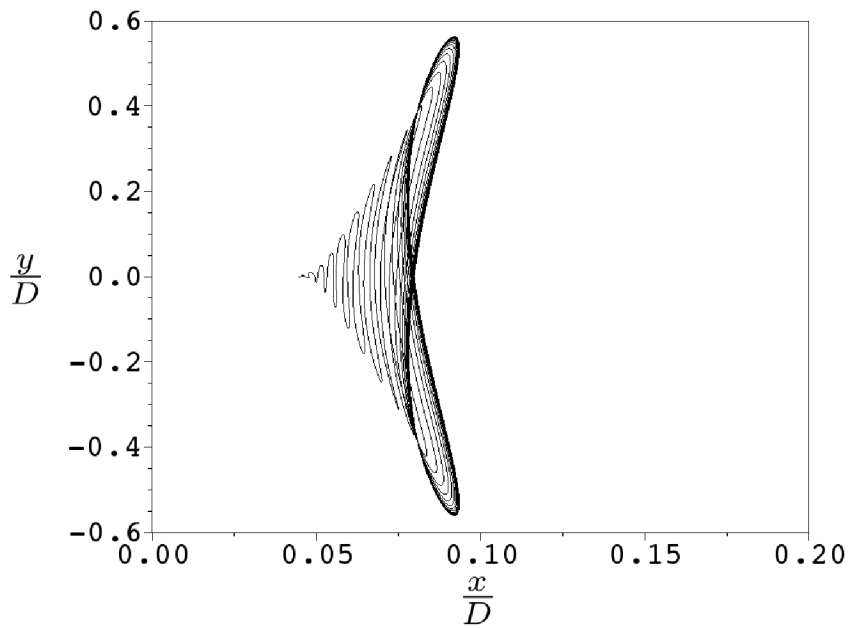


Figura 4.25: Deslocamento do centro de massa do cilindro na direção  $y$  para  $U_r^*=4,9$  (a) método de Euler, (b) método Runge-Kutta.

A amplitude das oscilações usando o método Runge-Kutta atinge valores de  $\frac{y}{D}=0,5$ , Fig. 4.25(b), enquanto para o método Euler são muito menores. Esta deficiência do método Euler em reproduzir a correta dinâmica do escoamento também é apresentada no plano espacial na Fig. 4.26. Além da baixa ordem de grandeza dos deslocamentos em ambas as direções, é difícil encontrar um padrão de movimento, diferente do outro caso Fig. 4.26(b), onde o escoamento padrão estabelecido descreve a forma de um 8 ligeiramente centrado à direita, como é esperado quando comparado com Chern et al. (2014).



(a)



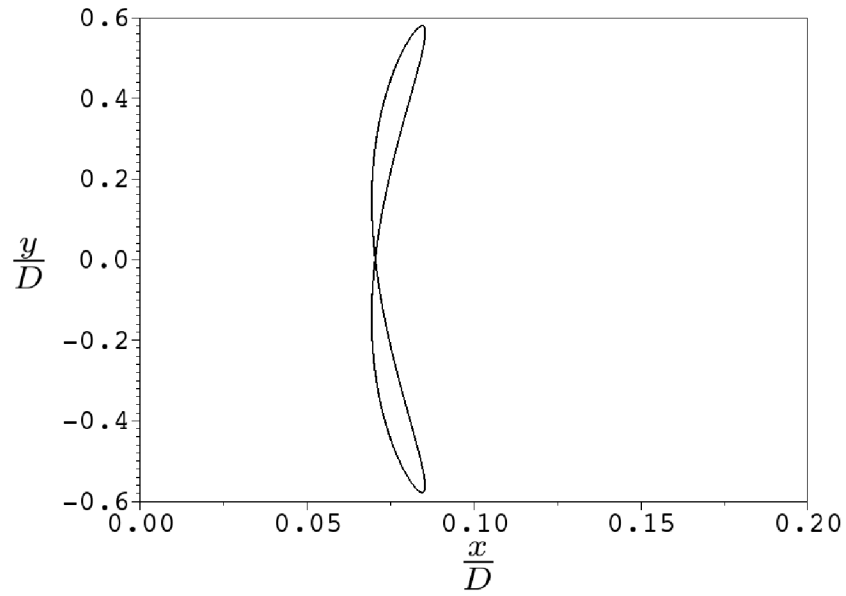
(b)

Figura 4.26: Posições da estrutura, (a) método de Euler, (b) método Runge-Kutta.

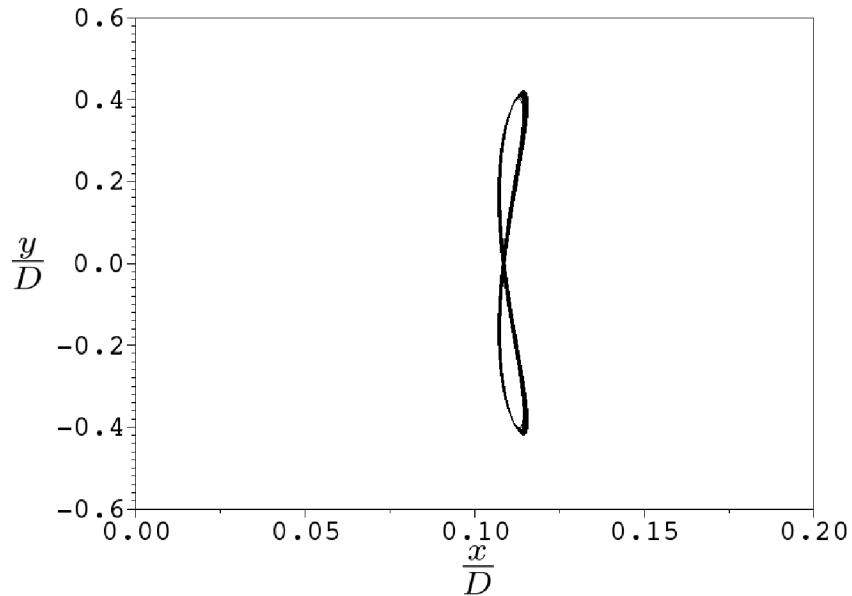
O diagrama da movimentação do centro de massa do corpo rígido, Fig.4.27, e deslocamento vertical máximo do centro de massa para todos os casos está na Fig. 4.28, o qual mostra as amplitudes máximas atingidas pela oscilação da estrutura em função de  $U_r^*$ . Na primeira, Fig.4.27, pode-se observar a amplitude com valores aproximados de  $0,6D$  e  $0,4D$  que correspondem aos valores de  $U_r^*=4,5$  e  $U_r^*=6,5$ , respectivamente. Por outro lado, o



movimento espacial e periódico tem padrão único, conforme descrito anteriormente, vide Fig.4.26(b). A segunda figura indica que o fenômeno de sincronização é atingido rapidamente e uma vez atingida as amplitudes máximas, elas diminuem gradualmente à medida que a velocidade reduzida aumenta. O deslocamento máximo dos casos concordam com a tendência obtida por Chern et al. (2014), com diferença média de 3,57%



(a)  $U_r^*=4,5$ .



(b)  $U_r^*=6,5$ .

Figura 4.27: Diagrama de movimentação do centro do cilindro para: (a)  $U_r^*=4,5$  e (b)  $U_r^*=6,5$ .

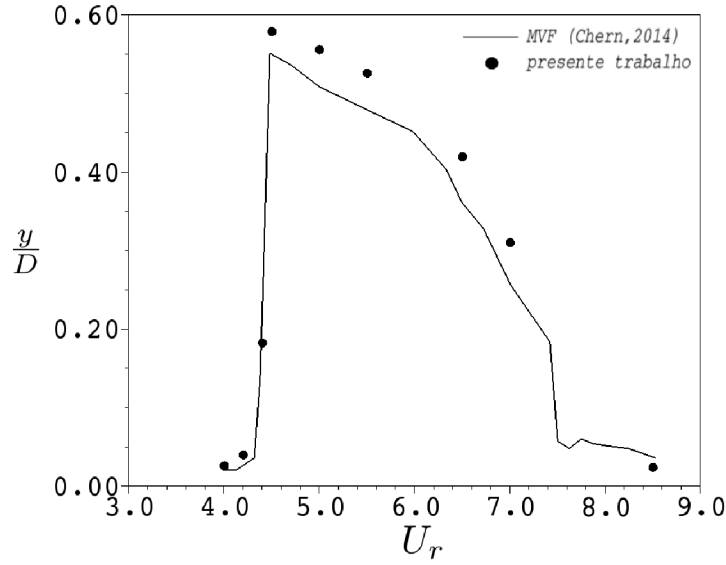


Figura 4.28: Deslocamento vertical máximo obtido pelo corpo rígido com o aumento da velocidade reduzida.

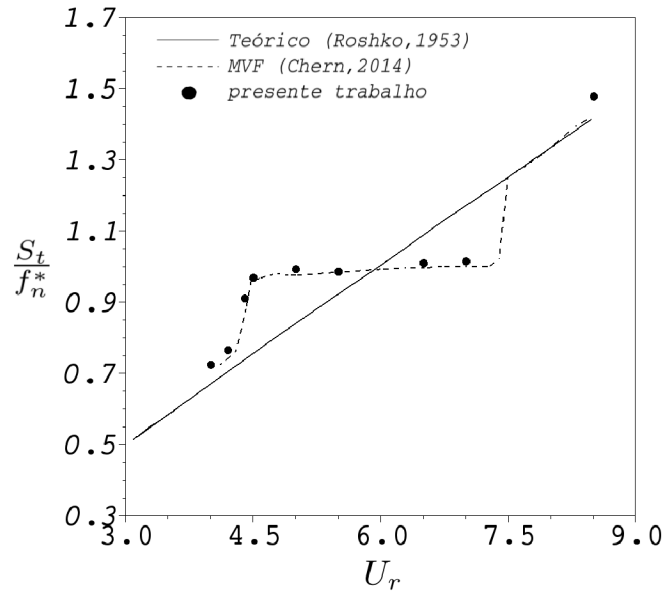


Figura 4.29: Razão da variação das frequências com o aumento da velocidade reduzida.

A Figura 4.29 apresenta a relação entre a razão de frequência e o aumento da velocidade reduzida, pode-se notar que os valores obtidos no presente trabalho apresentam a mesma tendência descrita por Roshko (1953), aproximando-se dos valores apresentados em Chern et al. (2014), com uma diferença ligeiramente elevada para a velocidade reduzida de 8,5, acredita-se que com um refinamento do domínio esta diferença pode ser reduzida.

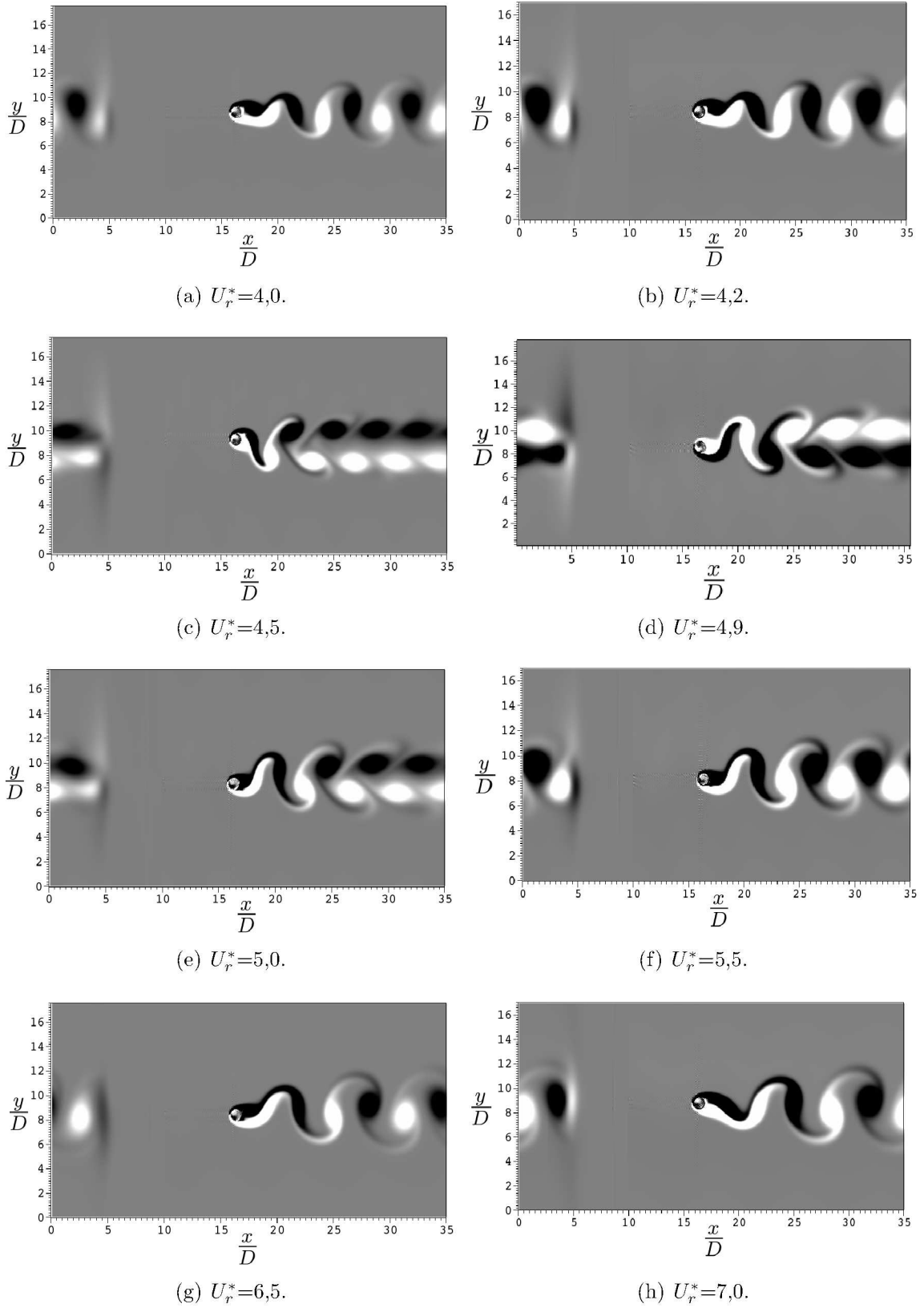


Figura 4.30: Campo da magnitude da vorticidade para diferentes velocidades reduzidas em  $t^*=1020$ .

A Figura 4.30 apresenta os campo da magnitude da vorticidade, para simulações com velocidades reduzidas:  $U_r^*=4,0$  à  $6,5$  é possível notar que a esteira de vórtices gerada, apresenta a configuração 2S, ou seja, dois vórtices únicos contra rotativos alinhados (WILLIAMSON; ROSHKO, 1988). Porém nas Fig. 4.30(c) à (e), observa a formação da esteira C2S, conforme relatado por Singh e Mittal (2005), Chern et al. (2014), sendo obtido para os valores de velocidade reduzida entre  $4,5$  à  $5,0$ .

Na Figura 4.31 mostra-se as trajetórias do centro da estrutura ao longo do tempo, nestas podem-se perceber que os deslocamentos transversais ao escoamento, possuem valores maiores do que os deslocamento em linha com diferença de uma ordem de grandeza. Nota-se também que as maiores amplitude de oscilação ocorrem para  $U_r^*$  entre  $4,5$  e  $6,5$ , ou seja, para as frequências de sincronização. Para  $U_r^*=4,4$  tem-se o fenômeno de batimento, no qual observa-se períodos em que a amplitude muda com o tempo.

A Figura 4.32 mostra a evolução temporal do campo de vorticidade para o escoamento com velocidade reduzida de  $4,9$ . Em  $\frac{tu_\infty}{D}=0$  mostra o fluido na condição inicial, no tempo de  $\frac{tu_\infty}{D}=59$ , nota-se a presença de duas recirculações, para  $\frac{tu_\infty}{D}=82$  o escoamento começa a se desestabilizar gerando oscilações que pode ser notado com o início da movimentação do cilindro ainda com baixa amplitude de deslocamento. Em  $\frac{tu_\infty}{D}=97$ , é observado que a desestabilização do escoamento permite a formação de escoamento reverso originando recirculações e posteriormente o desprendimento das mesmas, em  $\frac{tu_\infty}{D}=141$  nota-se a formação as esteiras de vórtices, onde os pares de vórtices se reorganizam e a partir de  $\frac{tu_\infty}{D}=152$  pode-se notar que o escoamento torna-se desenvolvido, com a presença de estruturas turbilhonares desprendidas de forma pareada num padrão C2S e por consequência o desprendimento das recirculações ocasiona a transmissão da força fluidodinâmica ao conjunto massa-amortecedor acarretando a movimentação do baricentro do cilindro.

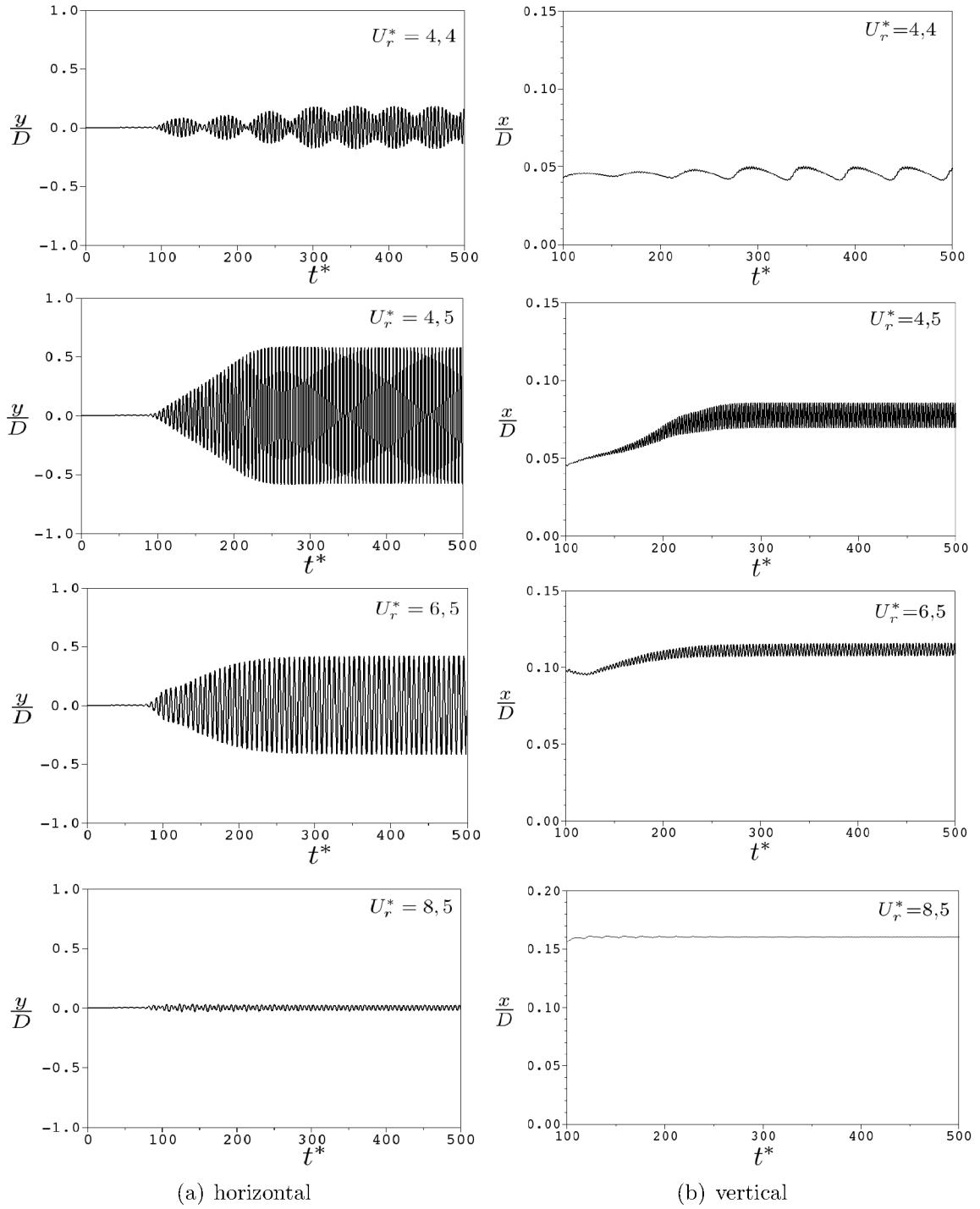


Figura 4.31: Evolução temporal do centróide do cilindro, nas posições a) horizontais b) verticais.

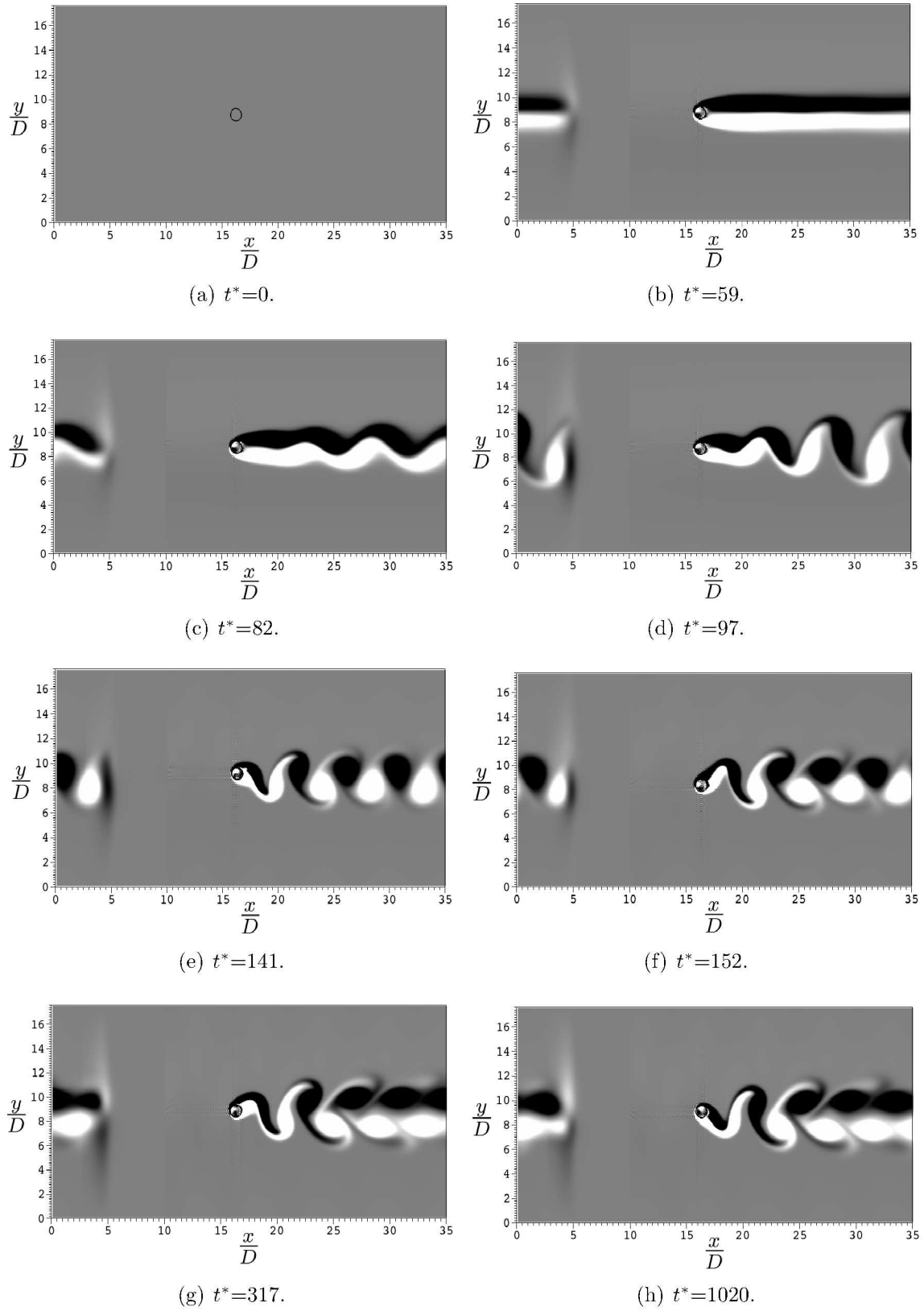


Figura 4.32: Evolução temporal do campo de vorticidade do escoamento para cilindros com dois graus de liberdade,  $U_r^* = 4.9$ .

## CAPÍTULO V

### APLICAÇÕES DA METODOLOGIA EM ESCOAMENTO SIMPLIFICADOS DE ENGENHARIA DE PERFURAÇÃO

Nesta seção são mostradas aplicações do método pseudoespectral de Fourier e fronteira imersa em problemas simplificados de engenharia de perfuração.

#### 5.1 escoamento de Couette circular com um grau de liberdade na direção y

O problema proposto baseia-se no escoamento de Couette circular, onde o duto interno está sob ação de uma velocidade de rotação constante no sentido horário e ancorado por um conjunto mola-amortecedor na direção vertical, Fig.5.1. O diâmetro interno,  $D_1$ , é de  $0,1610^{-2}$  m; a razão entre diâmetros  $\eta = \frac{D_2}{D_1}$  é 3 e os parâmetros estruturais utilizados são: razão mássica  $m^* = 148,16$ , frequência natural  $f_n = 7,016$  Hz e coeficiente de amortecimento  $\xi = 1,237 \times 10^{-3}$ . Nas simulações foram considerada quatro valores de número de Taylor,  $Ta = \frac{\omega_1 D_1 (D_2 - D_1)}{4\nu}$ , entre 20 à 50 com domínio de 256x256 pontos colocação.

Na Figura 5.2 apresentam-se campos de velocidades: horizontal e vertical e na Fig. 5.3 (a) está o campo de pressão e o campo de vorticidade do escoamento é apresentado na Fig. 5.3 (b), para o tempo adimensional  $t^* = 18,6$ . Pode-se notar que o efeito de

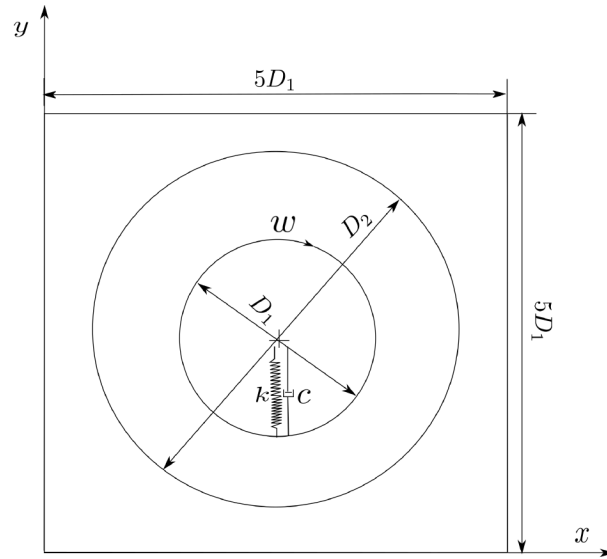


Figura 5.1: Domínio de cálculo utilizado nas simulações do escoamento Couette circular com duto interno ancorado por um conjunto de mola-amortecedor na direção  $y$ .

rotação do duto interno não gera instabilidades no escoamento confinado, ou seja, não há diferença de pressão azimuthal. Isto acontece porque, o duto rotativo é simétrico e está balanceado em relação aos eixos vertical e horizontal. Isto também pode ser notado na Fig. 5.4, a qual mostra a evolução da temporal do centro do duto interno, Fig. 5.4(a), e o valor do coeficiente de sustentação, Fig. 5.4(b), não mostrando sinais de movimentação.

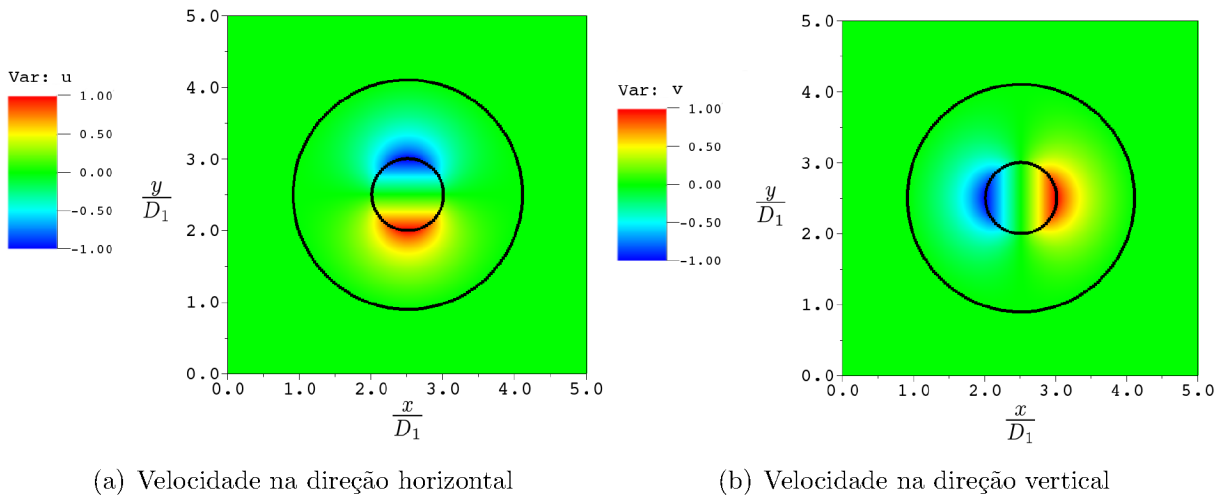


Figura 5.2: Campos de velocidades para  $Ta=30$ .



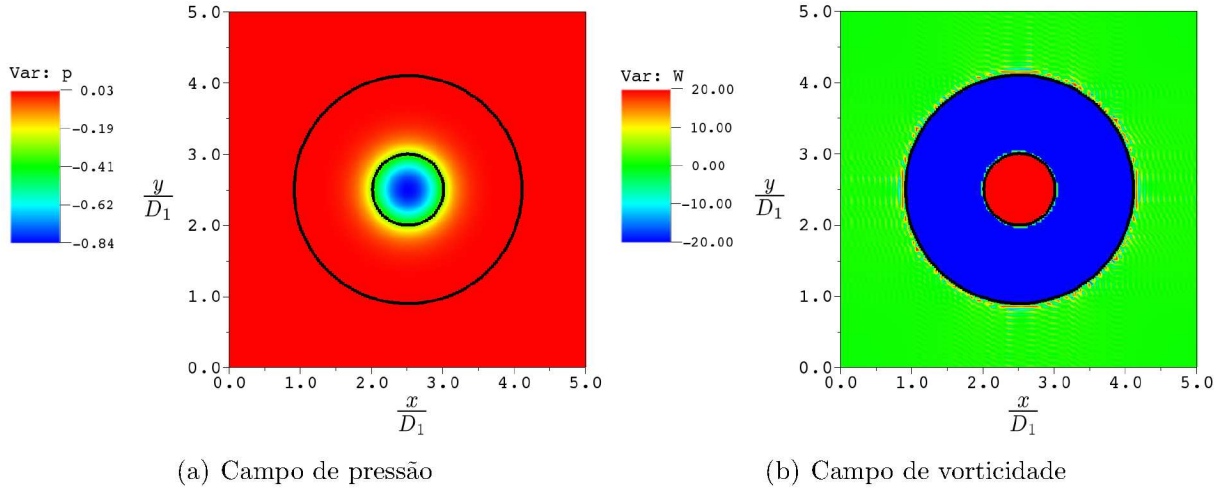


Figura 5.3: Campos de pressão e vorticidade para  $Ta=30$ , duto interno com um grau de liberdade.

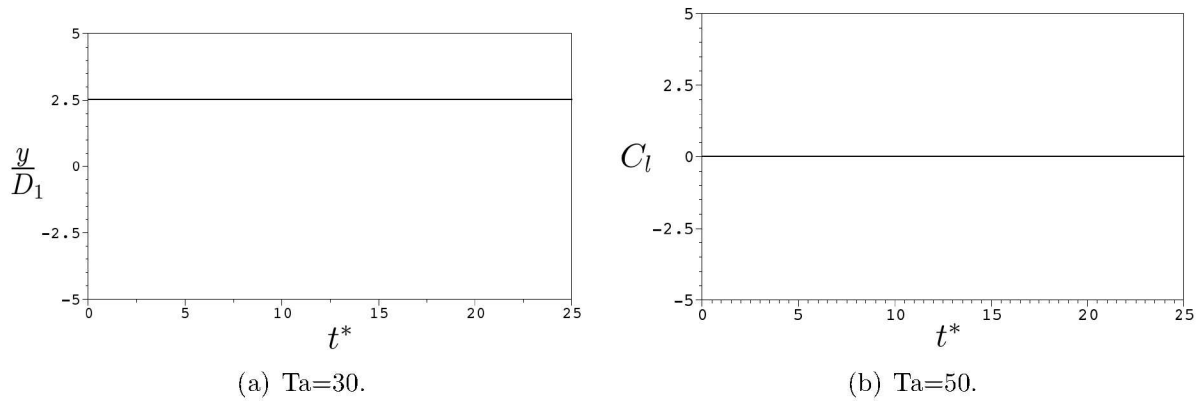


Figura 5.4: Evolução temporal para diferentes Taylor; (a) posição do duto interno para  $Ta=30$ , (b) coeficiente de sustentação para  $Ta=50$ .

O cilindro interno rotativo foi deslocado para a posição  $(2,5D_1, 3,125D_1)$ , como mostrado na Fig.5.5. O deslocamento inicial insere uma energia potencial elástica ao cilindro interno rotativo, que ao longo do tempo acarreta no movimento de translação na direção vertical do mesmo em relação ao ponto de equilíbrio. Essa energia é dissipada para o fluido devido a sua viscosidade até cessar seu movimento de translação restando somente a rotação posicionado no ponto de equilíbrio.

A sequência dos campos de vorticidade da Fig. 5.5 mostram a dinâmica do sistema e sua influência sobre o escoamento em diversos instantes, em (b) e (c) o duto movimenta-

se para parte inferior do confinamento formando uma recirculação a jusante da estrutura. As Fig.5.5 (d) e (e) mostram o duto interno retornando para a posição superior passando pelo centro do domínio e na Fig. 5.5 (f) o duto apresenta somente o movimento rotativo e se encontra na posição de equilíbrio em  $\frac{x}{D_1} = \frac{y}{D_1} = 2,5$ .

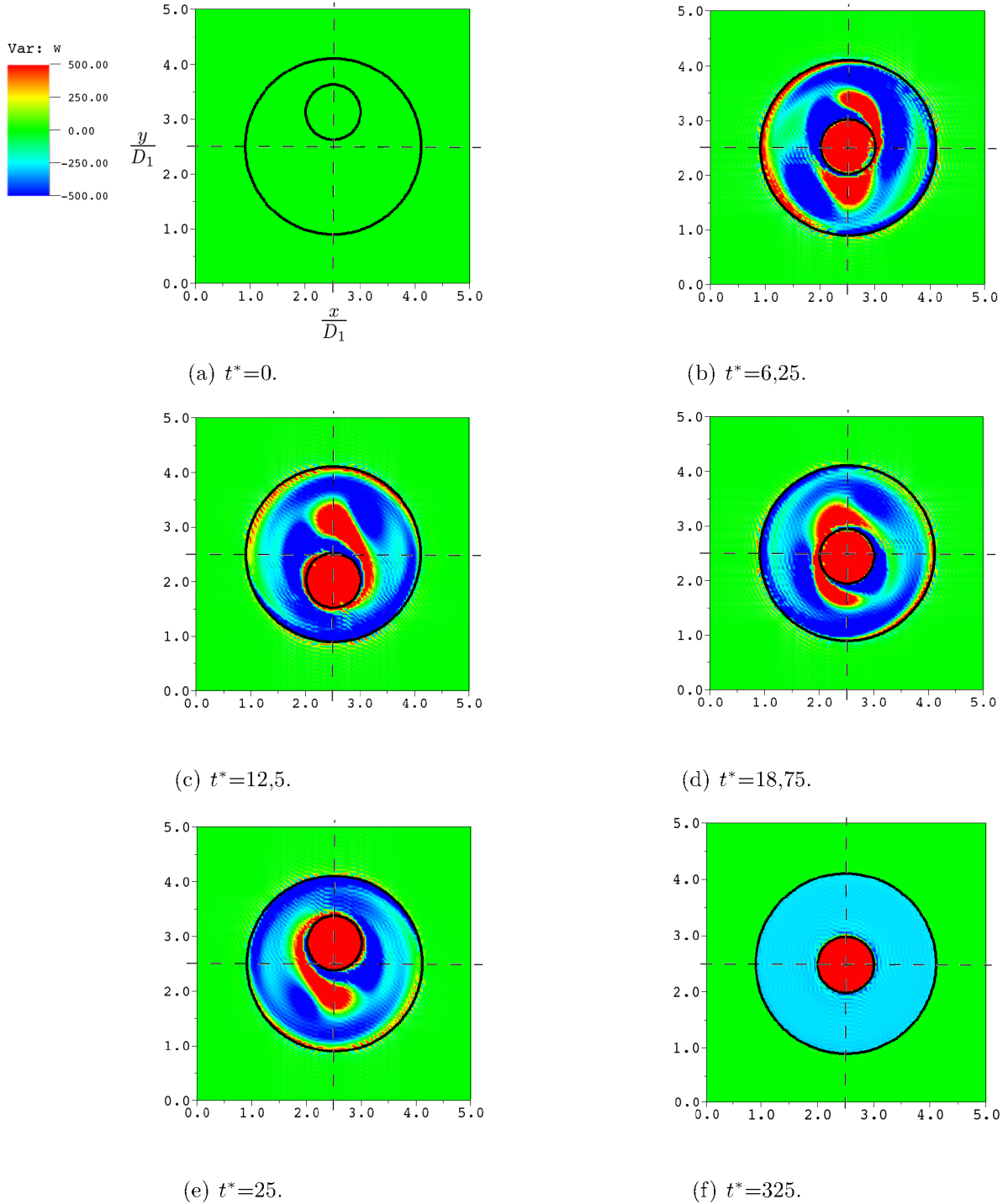


Figura 5.5: Campos de vorticidade para  $Ta=50$ , duto interno com um grau de liberdade.

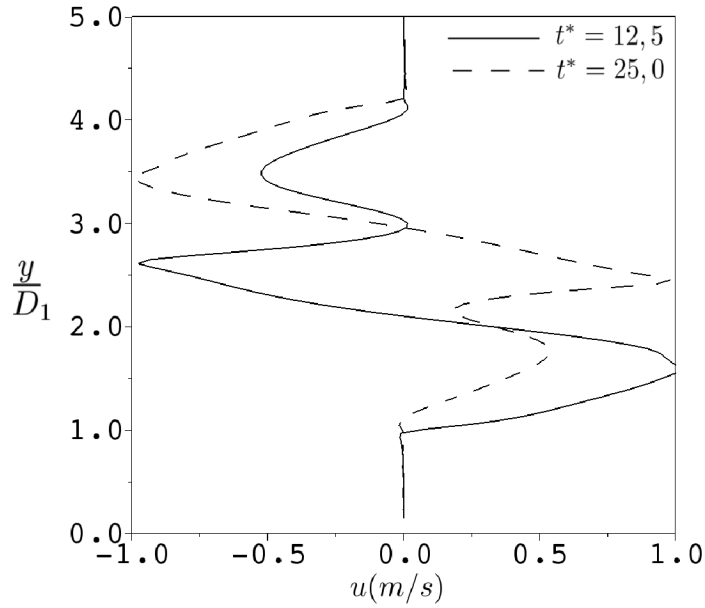


Figura 5.6: Perfil velocidade horizontal ao longo do domínio para  $Ta=30$ .

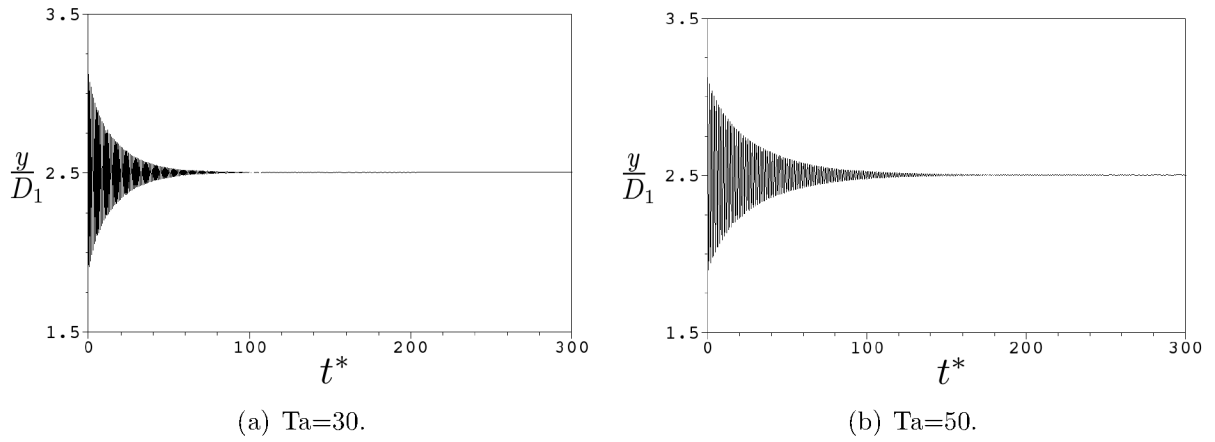


Figura 5.7: Evolução temporal do centro do duto interno (a)  $Ta=30$ , (b)  $Ta=50$ .

Pode-se notar na Fig. 5.6 os perfis de velocidade horizontal, os quais foram obtidos na posição  $\frac{x}{D_1} = 2,5$ , a presença de dois valores de velocidade tangencial máximos com magnitude de  $1,0 \text{ m/s}$ , correspondentes à velocidade tangencial imposta. Observando o perfil para o tempo adimensional  $t^* = 12,5$  (linha contínua) nota-se um segundo ponto de máximo, o qual é decorrente da formação de uma recirculação a qual pode ser visualizada na Fig. 5.5(c). Da mesma maneira, no perfil do tempo adimensional  $t^* = 25$  (linha tracejada) encontra-se um segundo ponto de mínimo, o qual também corresponde à formação

de outra recirculação, vide Fig.5.5(e).

A posição do baricentro do duto interno pode ser vista na Fig.5.7, para dois valores de  $Ta$ . A estrutura descreve o movimento harmônico e amortecido, sendo que para  $Ta=30$ , a força fluidodinâmica rotativa é maior, ocasionando a redução da amplitude de deslocamento da estrutura e a redução do tempo para atingir a posição de equilíbrio.

## 5.2 Escoamento de Couette circular com dois graus de liberdade e deslocamento imposto

Outro estudo de caso utilizando o escoamento de Couette circular consiste em fixar o cilindro interno por duas molas de mesma rigidez,  $k$ , e excêntrico com posição inicial,  $e_x=1,875 D_1$  e  $e_y=3,125 D_1$ , como mostrado na Fig.5.8. Estas simulações foram realizadas para números de Taylor, de 2 a 65, razão entre diâmetros  $\frac{D_2}{D_1} = 3,0$  e a viscosidade do fluido foi mantida constante  $\nu = 1.010^{-5} m^2 s^{-1}$ .

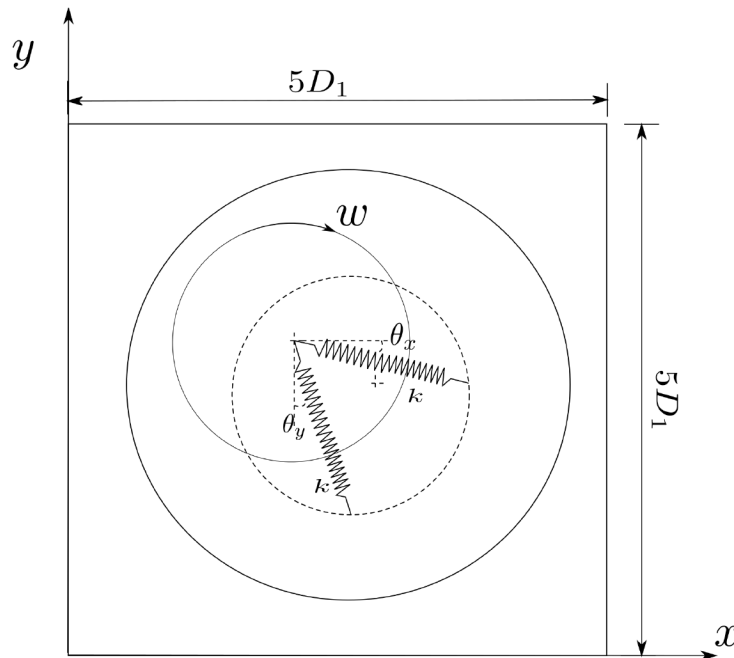


Figura 5.8: Couette circular com dois graus de liberdade.

O cálculo das forças elásticas foram obtidas de acordo com Borges (2011), o autor projeta as forças elásticas nos eixos horizontal e vertical, tomando como orientação o

ângulo formado entre as molas e os eixos cartesianos.

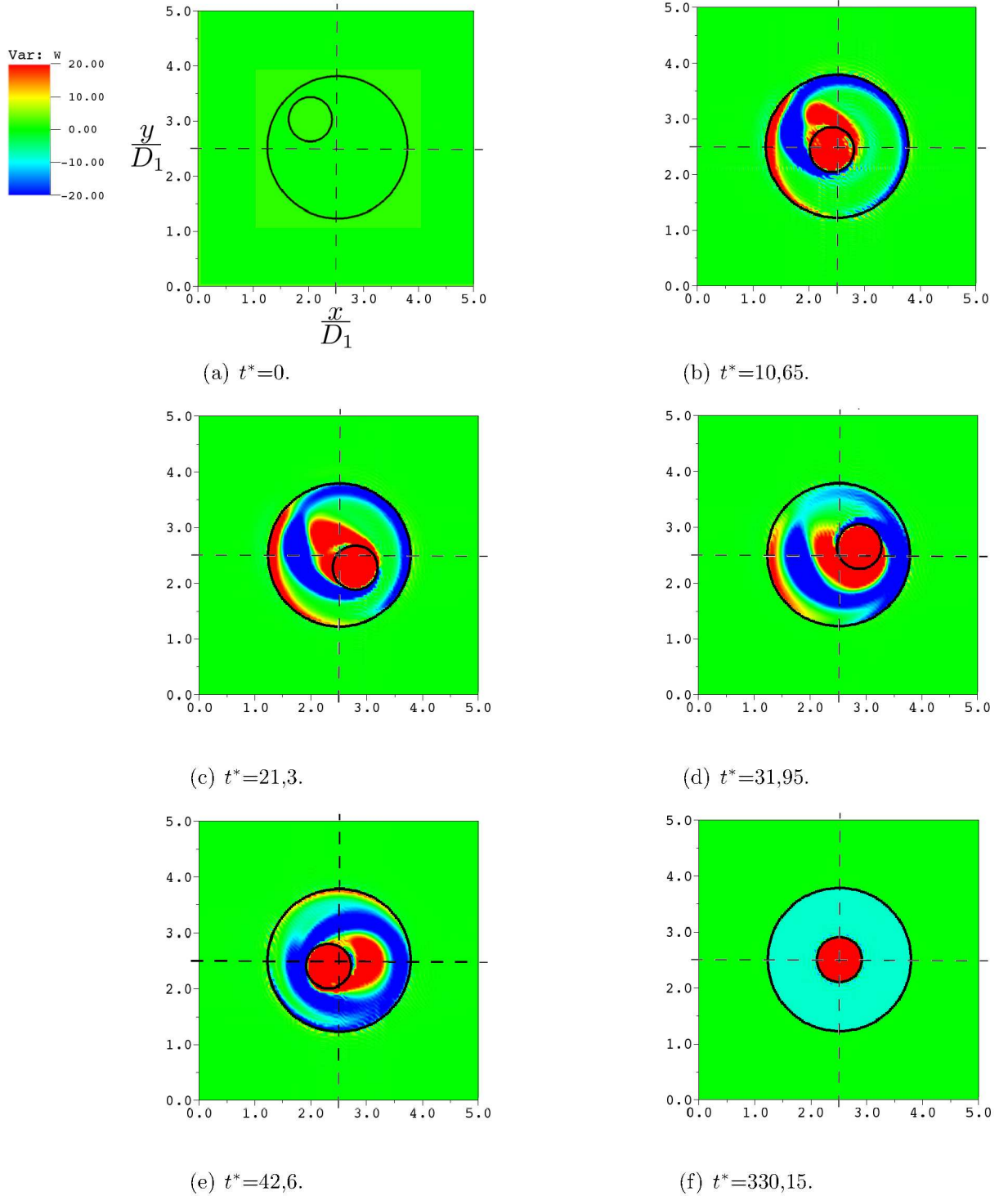


Figura 5.9: Campos de vorticidade para  $Ta=50$  duto com excentricidade em  $x$  e  $y$ .

O cilindro interno rotativo é então deslocado para uma posição  $(1,875D_1, 3,125D_1)$ , ou seja, é inserido uma energia potencial elástica referente ao deslocamento das molas

na direção horizontal e vertical. Esta energia elástica é parte transformada em energia cinética, com a translação do cilindro interno no interior do confinamento, e parte é dissipada para o fluido. Essa dissipação reduz a amplitude de movimentação da estrutura gradativamente até a mesma cessar a translação restando somente o efeito rotativo e o cilindro atingindo a posição de equilíbrio  $(2,5D_1, 2,5D_1)$ .

Na Figura 5.9 está apresentada os campos de vorticidade em diferentes tempos no escoamento confinado para  $Ta=50$ , percebe-se que o duto dissipa a energia potencial elástica para o fluido até atingir o regime permanente, quando o duto interno se mantém na posição central do domínio euleriano. A posição descrita pelo baricentro do duto interno é apresentada na Fig. 5.10 até  $t^*=35,48$ , figura que também mostra o movimento do baricentro para  $Ta=2$ , Fig.5.10(a).

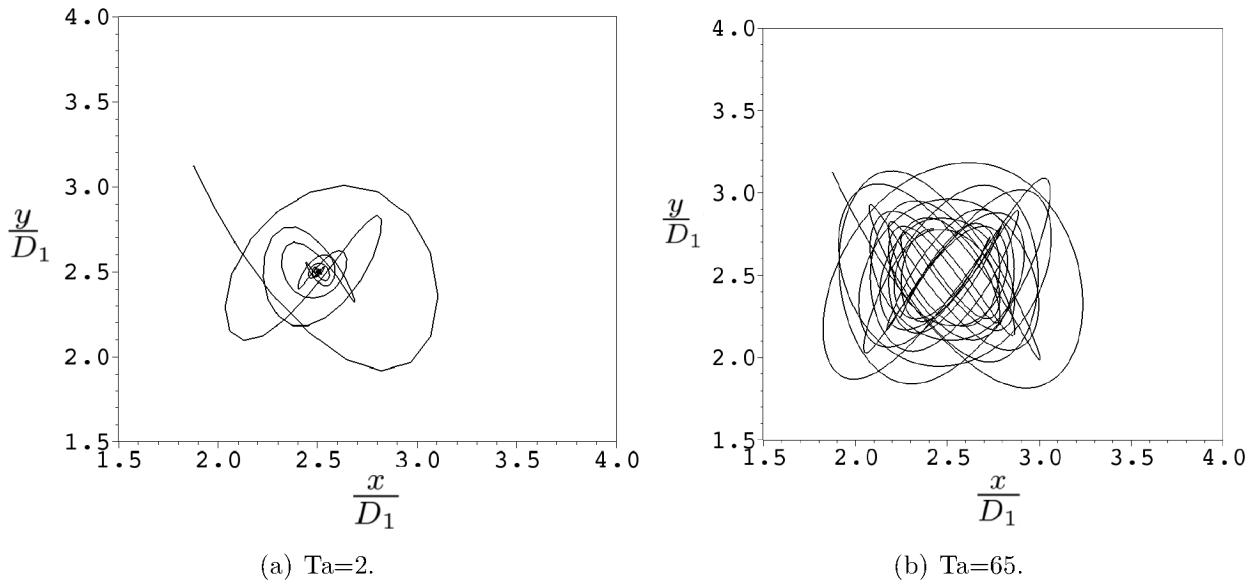
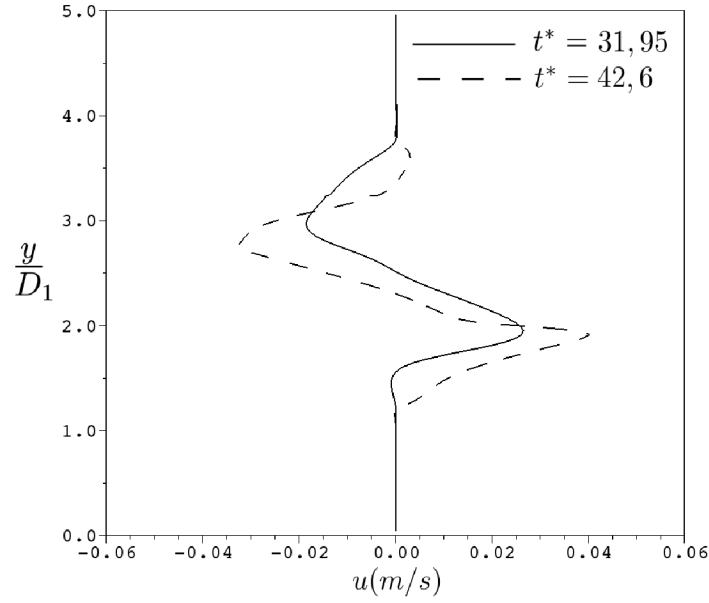
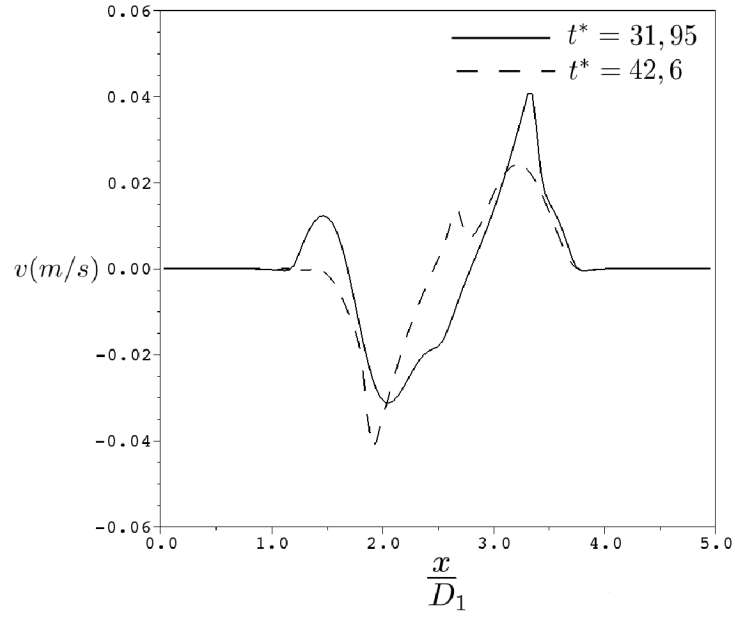


Figura 5.10: Posição do cilindro interno para diferentes  $Ta$ .

Na Figura 5.11 está presente os perfis de velocidade em dois tempos, destaca-se na Fig.5.11(a) o gráfico referente ao tempo  $t^* = 42,6$ , onde é possível notar a presença de duas posições em que apresentam valores de máximo, sendo em  $\frac{y}{D_1} = 1,90$  o perfil de velocidade mostra valor  $u = 0,04 \text{ m/s}$  e em  $\frac{y}{D_1} = 3,51$  com valor de  $u = 0,002 \text{ m/s}$ . O primeiro ponto está relacionado com a velocidade oriunda da interação fluido-estrutural, a qual é uma combinação entre a velocidade tangencial e a velocidade de translação da



(a) Velocidade horizontal.



(b) Velocidade vertical.

Figura 5.11: Perfis velocidades ao longo do domínio para a posição  $\frac{x}{D_1} = \frac{y}{D_1} = 2,5$ .

estrutura, isto também justifica o ponto de mínimo observado na posição  $\frac{y}{D_1} = 2,76$  com valor de  $u = 0,032 \text{ m/s}$ . O segundo ponto máximo está relacionada com a presença de um vórtice, o qual pode ser visto na Fig.5.9(e).

Na Figura 5.11(b) no tempo  $t^* = 31,95$  (linha continua) na posição  $\frac{x}{D_1} = 1,25$ ,

observa-se um ponto de máximo no perfil da velocidade vertical, com valor de  $v = 0,012$   $m/s$ , este é devido à existência de uma recirculação que pode ser vista na Fig. 5.9(d). O segundo ponto de máximo tem valor  $v = 0,04$   $m/s$ , em  $\frac{x}{D_1} = 3,3$  e um ponto de mínimo que ocorre em  $\frac{x}{D_1} = 2,05$ , com valor de  $v = -0,031$   $m/s$ , estes valores são decorrentes da soma vetorial da velocidade tangencial com a velocidade de translação da estrutura. Nesta mesma imagem também é apresentado o perfil de velocidade para  $t^* = 42,6$  (linha tracejada), onde destacam-se os dois pontos de máximo, sendo que em  $\frac{x}{D_1} = 2,67$  corresponde a velocidade imposta na fronteira e em  $\frac{x}{D_1} = 3,18$  a velocidade máxima da formação de uma recirculação, a qual pode ser vista na Fig. 5.9(e).

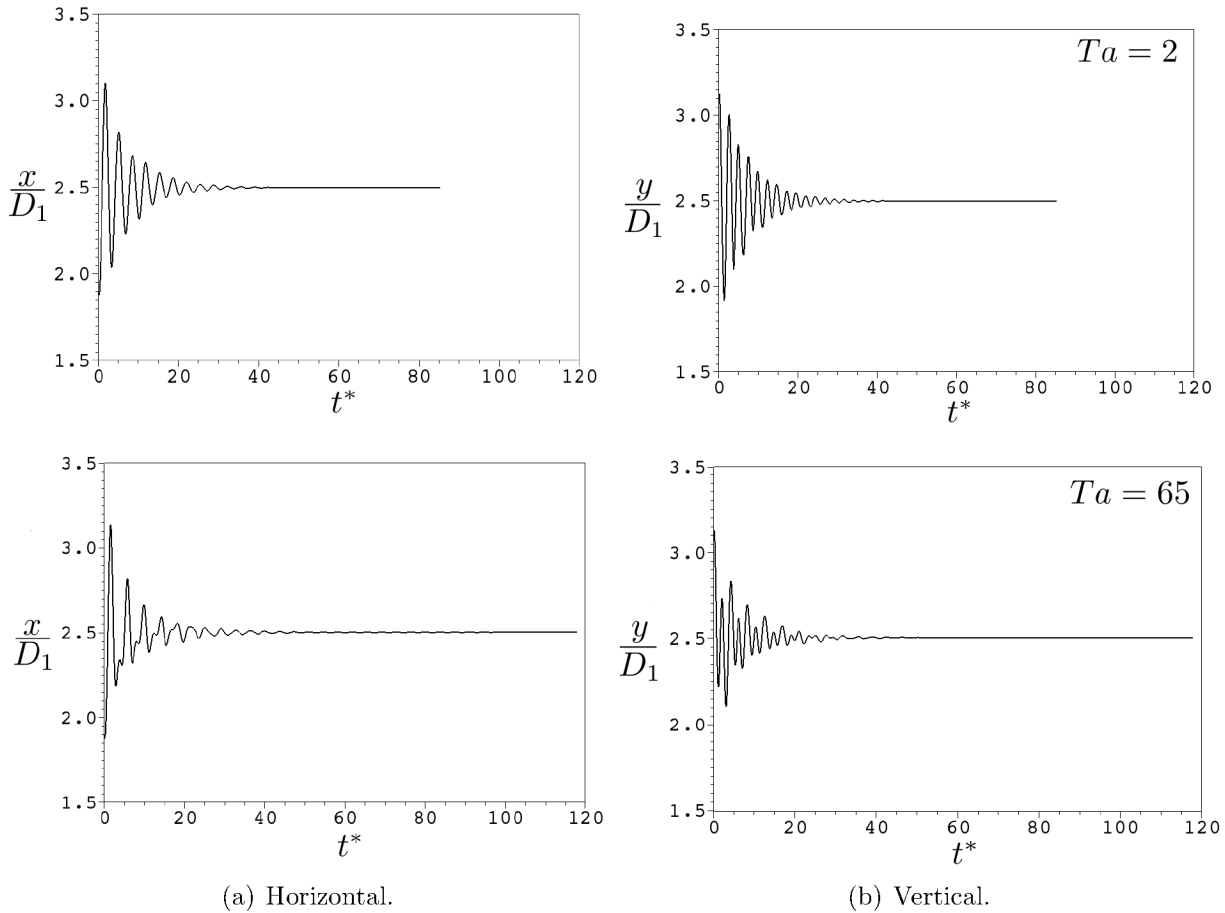
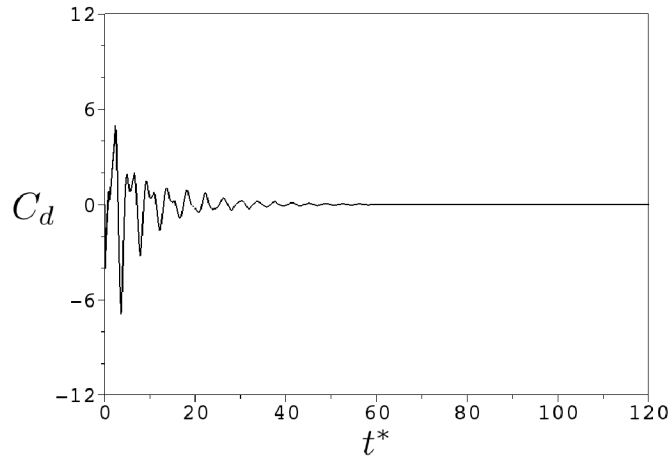


Figura 5.12: Evolução do deslocamento do baricentro ao longo do tempo para diferentes números de Taylor.

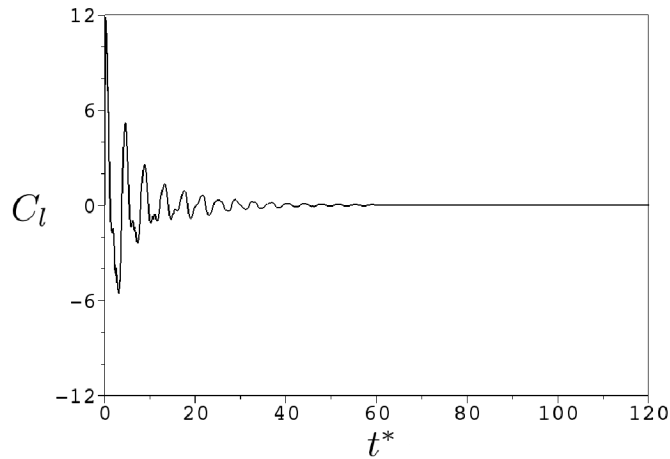
A evolução da posição na direção horizontal e vertical descrita pelo duto interno é mostrado na Fig. 5.12 para  $Ta=2$  e  $65$ . Com relação a  $Ta=2$ , nota-se que a movimentação



do duto interno se assemelha à uma função harmônica amortecida com as maiores amplitudes ocorrendo logo no início. E em aproximadamente,  $t^*=45$  o duto situa-se na posição de equilíbrio,  $\frac{x}{D_1}=2,5$ . Com  $Ta=65$  nota-se que os efeitos não lineares ficam mais evidentes e, a medida que o duto interno se desloca, ocorre a formação de vórtices. Estes vórtices chocam-se com o duto interno, esta interação pode ser notada com uma combinação de frequências, as quais estão mostradas na evolução temporal da posição do baricentro, Fig.5.12(a), e dos coeficientes adimensionais do escoamento, Fig.5.13.



(a) Coeficiente de arrasto.



(b) Coeficiente de sustentação.

Figura 5.13: Comportamento dos coeficientes adimensionais para o escoamento com  $Ta=65$ , em função do tempo.

As imagens apresentadas na Fig. 5.12 e Fig. 5.13 revelam a presença de uma com-

binação de frequências em  $Ta=65$ , as quais podem ser comprovadas com o espectro de frequências apresentadas na Fig.5.14. Esta imagem mostra a existência de duas frequências com a primeira próxima a 5 hz, com amplitude de  $0.02 \left| \frac{x}{D} \right|$  e  $0.012 \left| \frac{y}{D} \right|$ , e o segundo pico ocorre próximo a 10 hz com amplitude  $0.023 \left| \frac{y}{D} \right|$  e  $0.013 \left| \frac{x}{D} \right|$ . Estas amplitudes distintas para as posições  $\left| \frac{x}{D} \right|$  e  $\left| \frac{y}{D} \right|$  são decorrentes da movimentação da massa, ou seja, em um dado instante o cilindro interno ao se deslocar no interior do confinamento, a maior parcela de sua massa contribui para a ocorrência da frequência natural de 5 hz na posição  $\left| \frac{x}{D} \right|$ , em outro instante o mesmo ocorre para a frequência 10 hz para a posição  $\left| \frac{y}{D} \right|$ . A presença de duas frequências são esperadas devido a existência de duas molas perpendiculares entre si,

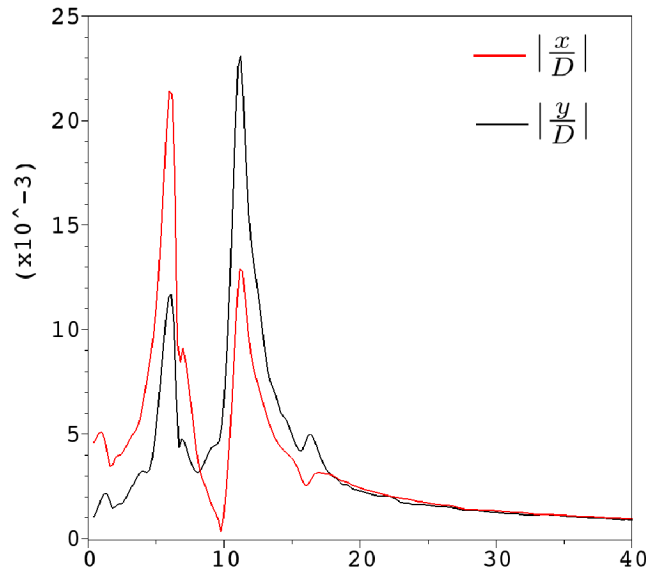


Figura 5.14: Espectro de frequência para  $Ta=65$ .

### 5.3 Escoamento bidimensional em sistemas de perfuração coluna-poço.

Na presente seção são abordados problemas simplificados que representam escoamentos no interior de colunas de perfuração, no fundo de poço e no retorno através do canal anular, sem efeitos de rotação. As três configurações propostas, apresentadas na Fig.5.15, são compostas por um duto interno de diâmetro  $D$ , e um duto externo com

diâmetro  $2D$ , fechado na parte inferior, cujo o domínio total é definido por  $L_x \times L_y$ . Perfil de velocidade parabólico foi imposto no duto interno por meio de um campo de força na zona  $L_p$  (ver Fig.5.15c). O número de Reynolds foi definido baseado na velocidade máxima do perfil parabólico e no diâmetro do duto interno.

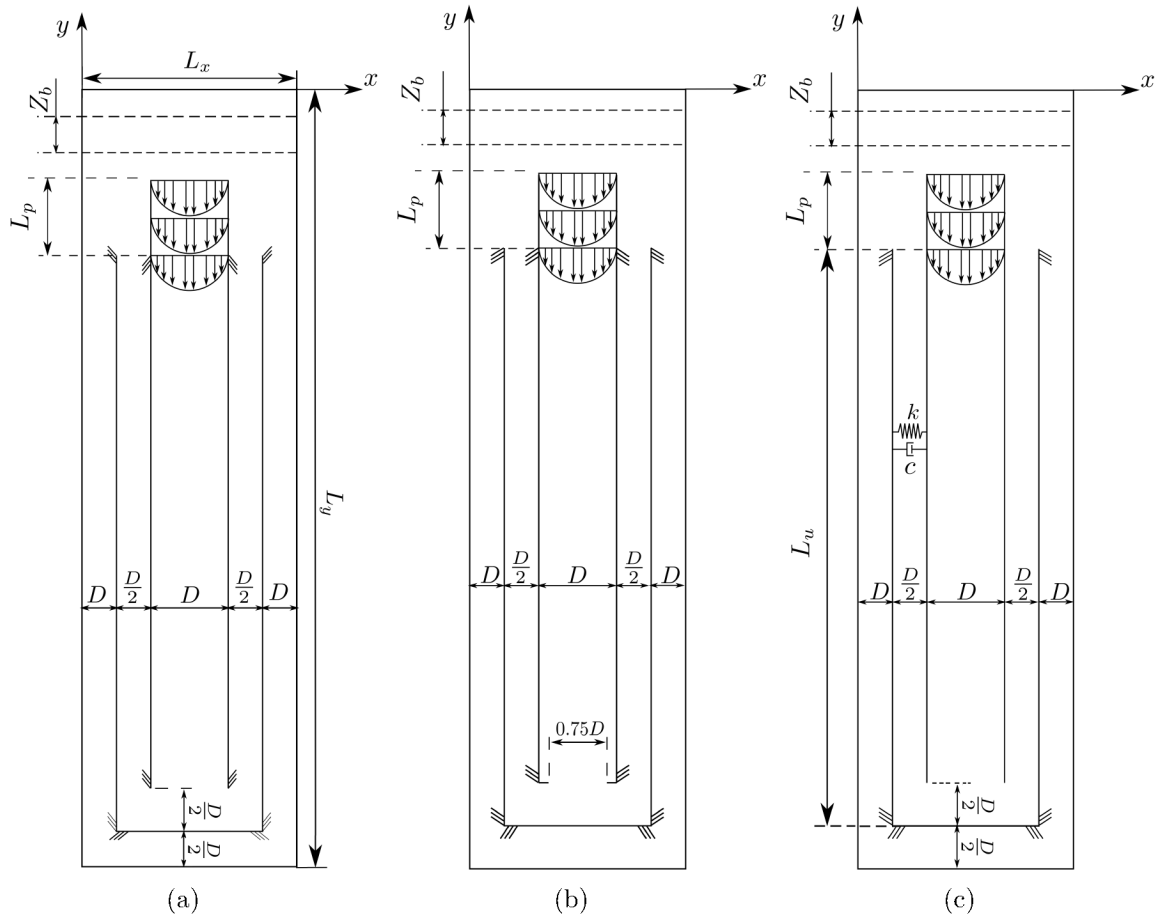


Figura 5.15: Esquemas dos problemas proposto (a) coluna reta fixa, (b) coluna fixa com contração abrupta e (c) coluna com um grau de liberdade na direção horizontal.

As três configurações diferem-se na coluna de perfuração: a) definida como duto reto concêntrico, b) definida como duto concêntrico com contração abrupta (saída de  $0,75D$ ) no fundo do poço, c) duto reto ancorado ao duto externo pelo conjunto mola-amortecedor na direção horizontal. Em todas as configurações foram considerados dutos rígidos com distâncias entre a coluna de perfuração e o fundo do poço igual a  $\frac{D}{2}$ .

### 5.3.1 Coluna de perfuração com o duto concêntrico reto e fixo

Nesta configuração, as simulações foram realizadas para valores de  $Re=500$ ,  $1000$  e  $1500$  e três densidades de domínio:  $256 \times 64$ ,  $512 \times 128$  e  $1024 \times 256$  pontos de colocação. O domínio total corresponde total corresponde a  $4D \times 16D$ , que resulta com um valor de razão entre comprimento e o diâmetro  $\frac{L_u}{D} = 14$ .

O fluido escoar no interior da coluna de perfuração reta e fixa, ao chegar na parte final da mesma o fluido atinge o fundo do poço, e retorna pelo canal anular. O retorno do fluido pelo canal anular apresenta uma aceleração, devido a redução da área o que é decorrente da formação de recirculação próximo a parede da coluna de perfuração.

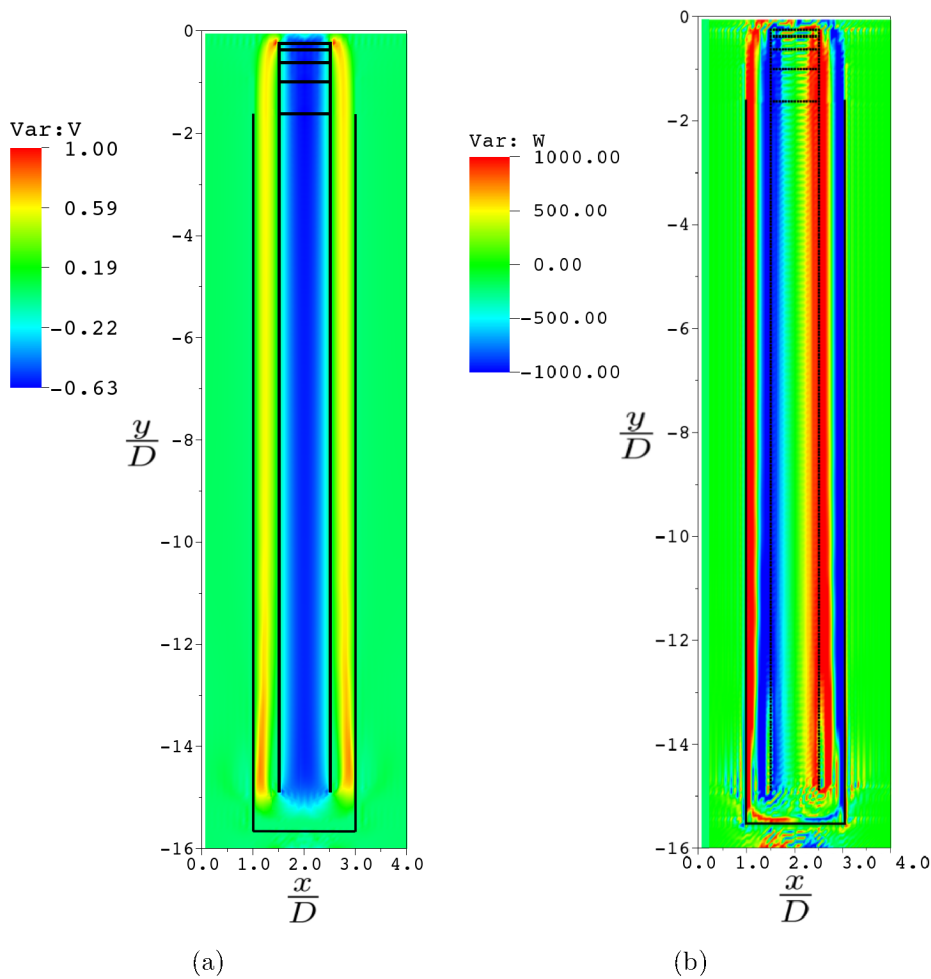


Figura 5.16: Campos de (a) velocidade vertical e (b) vorticidade para a simulação com  $Re=1000$  e com  $512 \times 128$  nós de colocação.

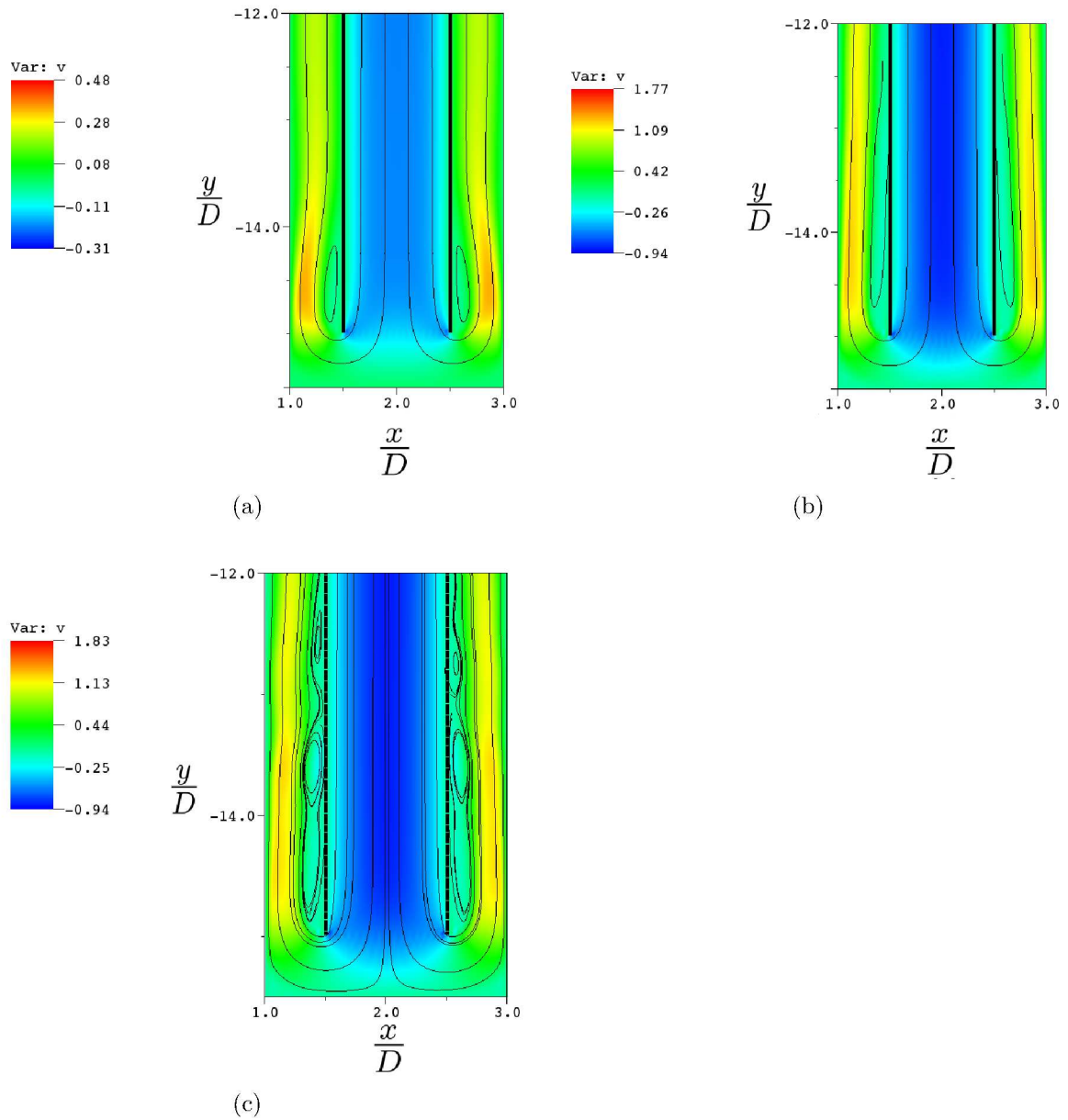
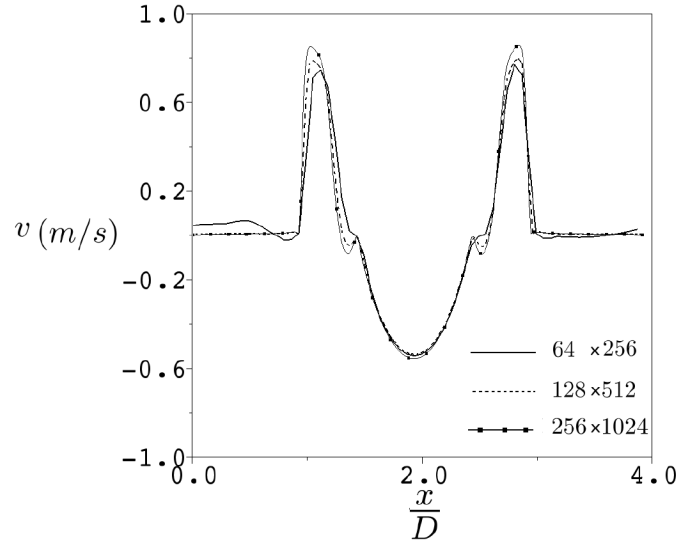


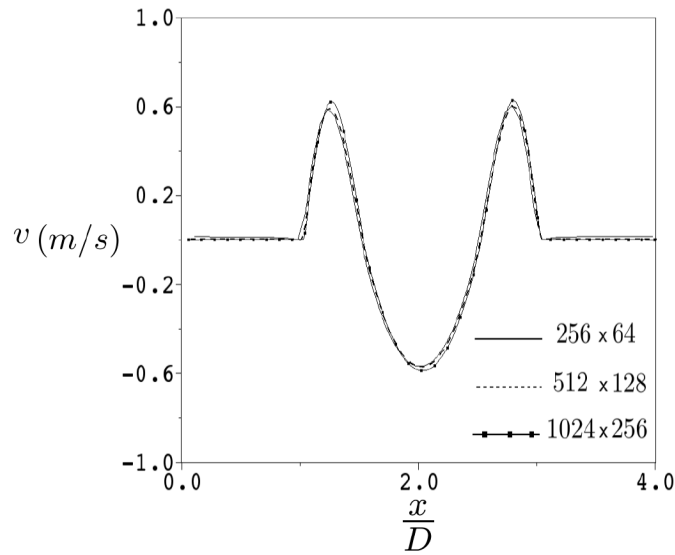
Figura 5.17: Linhas de correntes no fundo do poço: a)  $Re = 500$ , b)  $Re = 1000$  e c)  $Re = 1500$ , com 512x128 nós de colocação.

A Figura 5.16(a) mostra o campo de velocidade vertical para  $Re = 1000$ , onde pode-se notar a coerência do escoamento, com velocidades negativas no interior do duto interno e positivas no canal anular, o que representa o retorno do fluido. Na Fig. 5.16 (b) está apresentado o campo de vorticidade, observa-se que para o número de Reynolds 1000 o escoamento é comportado e simétrico com relação a vertical, formando recirculações na saída do duto interno. Esse detalhe da dinâmica do escoamento próximo ao fundo

do poço é exposto na Fig. 5.17, para três valores de  $Re$ . Tais formações incrementão o comprimento da recirculação à medida que o  $Re$  aumenta, sendo que para  $Re=1500$  formam-se três vórtices alinhados.



(a)  $\frac{y}{D} = -14$



(b)  $\frac{y}{D} = -8$

Figura 5.18: Perfis velocidade vertical para as três malhas e  $Re=1000$ .

A Figura 5.18(a) apresenta os perfis velocidade vertical na extremidade inferior do conjunto, utilizando três domínios previamente definidos. Os perfis de velocidade apresentam reversão no canal anular, próximo à localização da parede do duto interno

( $\frac{X}{D} = 1,5D$  e  $2,5D$ ), decorrente da presença da recirculação no local, exceto para a simulação com domínio  $256 \times 64$  pontos de colocação, pois a presença das recirculações gera também incremento nos valores da velocidade no canal anular, com o aumento do número de pontos de colocação o gradiente são melhores calculados. Na Fig. 5.18(b) são mostradas os perfis velocidade vertical na posição  $\frac{y}{D} = -8 D$ , nota-se que o escoamento não apresenta recirculações para as três malhas utilizadas. É importante ressaltar que o número de pontos do perfil no canal anular corresponde a  $\frac{L_x}{8}$ , que resulta em 6, 16 e 32 pontos respectivamente.

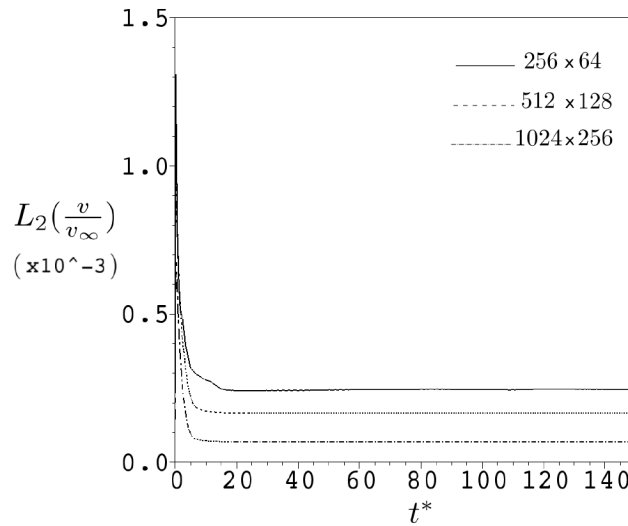


Figura 5.19: Erro obtido pela norma  $L_2$  nas paredes externas.

A norma  $L_2$  em função do tempo nas paredes do duto externo é apresentada na, Fig. 5.19, a qual evidencia valores da ordem de  $10^{-4}$ . O resultado mostra que é possível reduzir o erro, obtido pela Norma  $L_2$ , realizando o aumento do número de pontos de colocação. Entretanto, este fato acarreta o aumento do custo computacional.

### 5.3.2 Coluna de perfuração com duto com contração abrupta na saída do duto interno

As simulações consideram três números de Reynolds 500, 1000 e 1500 com domínio  $512 \times 128$  pontos de colocação e comprimento de  $4,0D \times 8,0D$ .

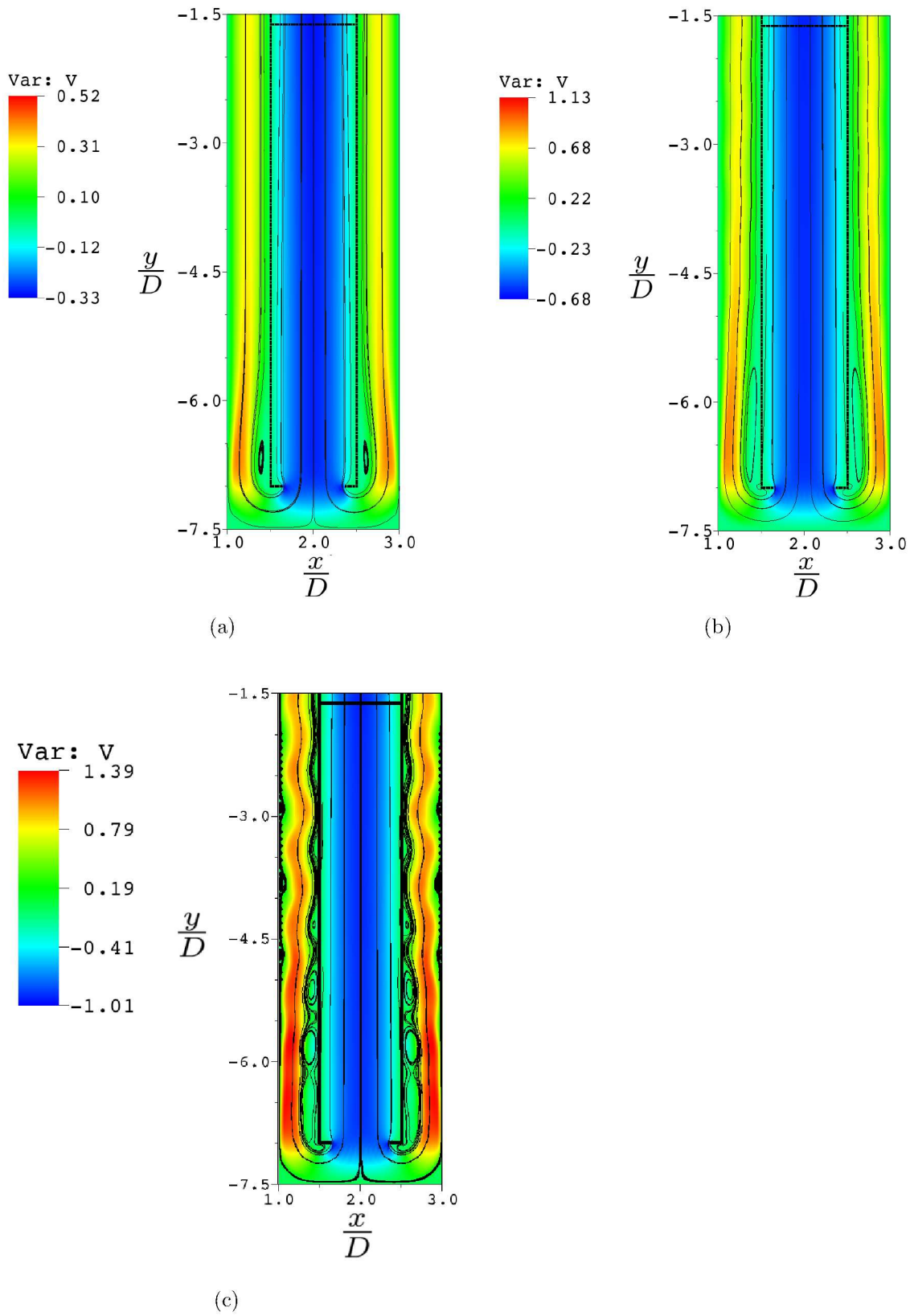


Figura 5.20: Campos de velocidade e linhas de corrente, para o escoamento com coluna com constrição; (a)  $Re=500$ , (b)  $Re=1000$  e (c)  $Re=1500$ .



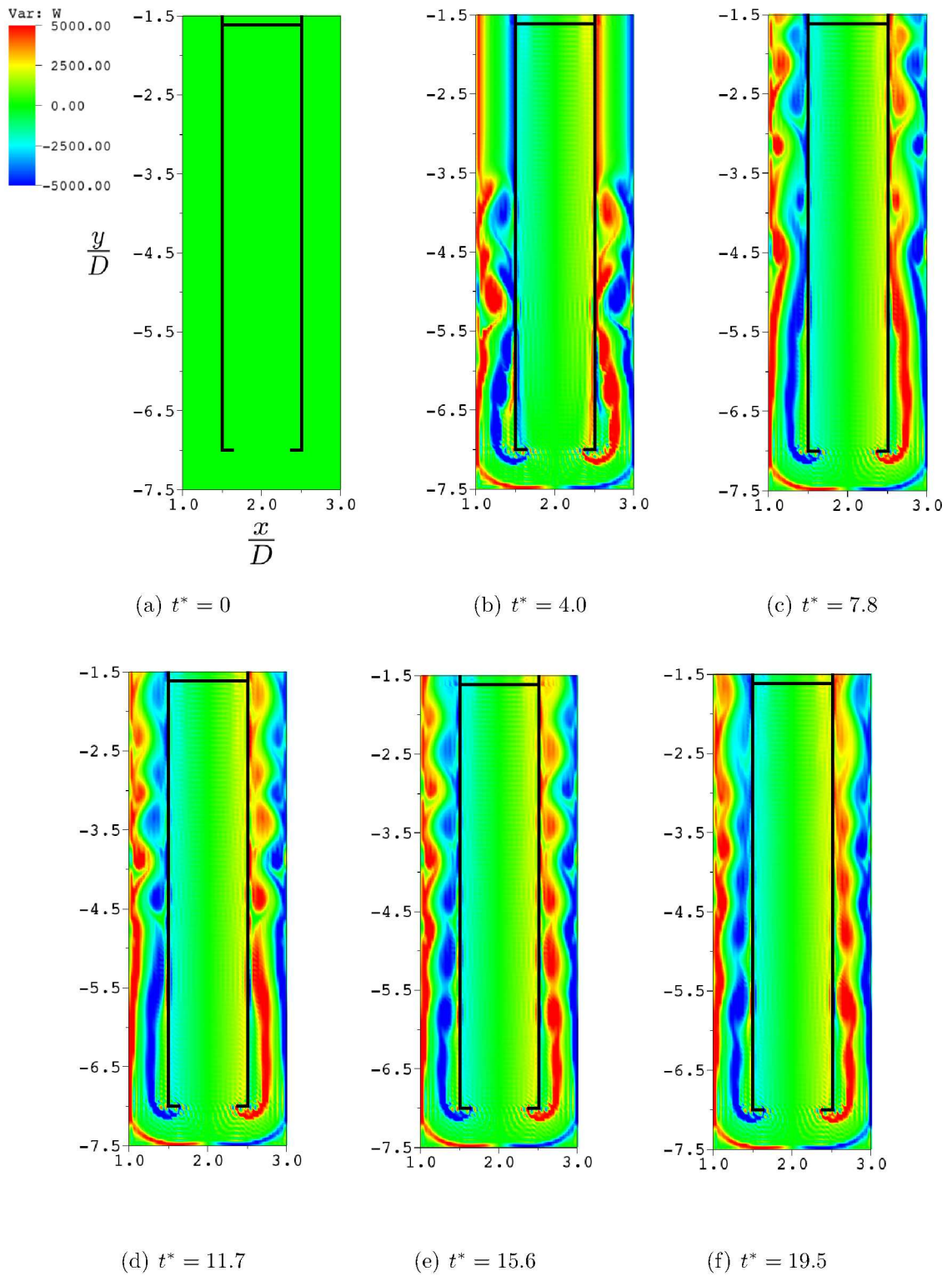


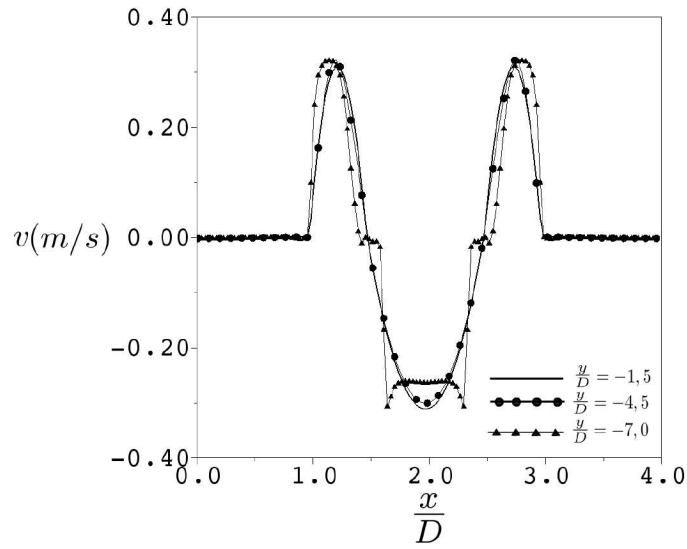
Figura 5.21: Campos de vorticidade para o escoamento com coluna com duto com constricção,  $Re = 1500$ .

Na Figura 5.20 está apresentado somente o domínio útil para o campo de velocidade

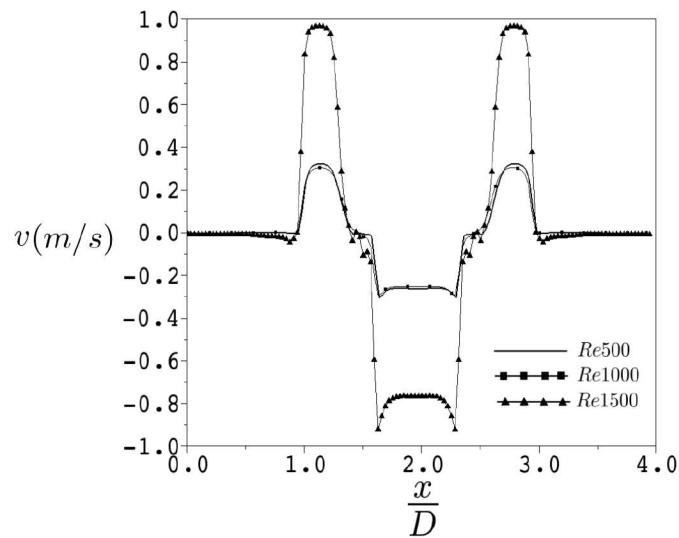
vertical sobreposto pela linhas de corrente. Na Fig. 5.20(a) nota-se a presença de recirculações nas extremidades próxima ao fundo do poço de forma simétrica. Elevando o número de Reynolds do escoamento para 1000, Fig. 5.20(b), ocorre o aumento no comprimento das recirculações simétricas, próximas às paredes do duto interno, porém não observa-se a formação das instabilidades entre a rocha e a coluna de perfuração. Na Fig.5.20(c) observa-se a formação de várias recirculações ao longo do canal anular para  $Re=1500$ , as quais diminuem o tamanho à medida que o escoamento avança no canal anular, definindo as ondulações no escoamento principal.

O campo de vorticidade para o escoamento com número de Reynolds de 1500 está apresentado na Fig. 5.21. Na Fig. 5.21(a) tem-se o campo inicial do escoamento, posteriormente o fluido escoar com um perfil parabólico pelo interior da coluna de perfuração. Ao chegar à extremidade de saída da coluna de perfuração o fluido sofre a presença da restrição na área, esta restrição causa a aceleração do fluido, o qual é desacelerado bruscamente quando em contato com o fundo do poço. O retorno do fluido pelo canal anular acarreta o surgimento de instabilidades Fig. 5.21(b), estas são propagadas de forma simétrica ao longo do comprimento do duto, Fig. 5.21(c) à Fig. 5.21(f).

Os perfis de velocidade vertical mostrados na Fig. 5.22(a) são para  $Re=500$  e estão nas posições  $\frac{y}{D} = -1,5$ ,  $-4,5$  e  $-7,0$ . Observando que a posição  $\frac{y}{D} = -7,0$  coincide com a contração abrupta. Na Fig.5.22(b) apresentam-se os perfis de velocidades para a posição  $\frac{y}{D} = -7,0$ . Nestas imagens fica evidente a localização da constrição onde as velocidades possuem valores nulos e pode-se observar que os perfis na posição  $\frac{y}{D} = -7,0$  apresentam desaceleração do escoamento, devido a presença do fundo do poço, região com maiores pressões como pode ser visto na Fig. 5.23.



(a)

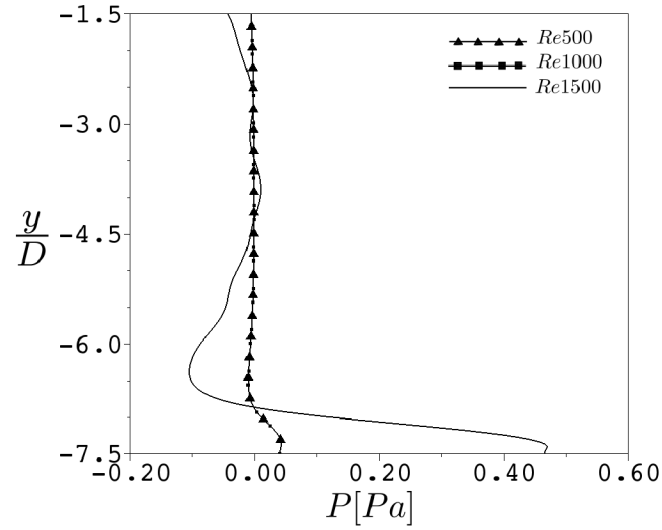


(b)

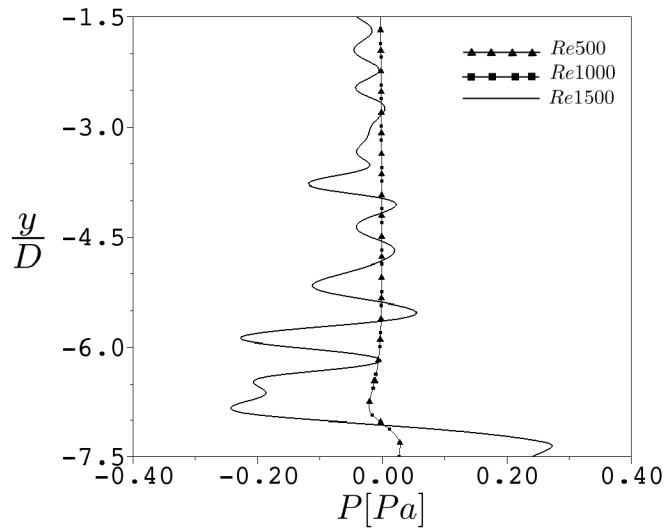
Figura 5.22: Perfis de velocidade vertical ao longo da direção horizontal, (a) em diferentes posições ao longo do canal para  $Re=500$  (b) na posição  $\frac{y}{D} = -7,0$  para diferentes números de Reynolds.

Observando as Figuras 5.20 e 5.23, pode-se concluir que o escoamento pode ser considerado laminar estável para  $Re=500$  e  $Re=1000$ , com a presença de recirculações estáveis. Porém, conforme eleva o número de Reynolds para  $Re=1500$  há o desprendimento das recirculações na região anular. Os perfis de pressão apresentados na Fig. 5.23, mostram a coerência com o padrão de escoamento, na medida em que mostra-se linear

em todo comprimento do duto, ocorrendo alteração significativa em seu valor na região entre a constrição e o fundo do poço e ao longo do canal anular.



(a)



(b)

Figura 5.23: Perfil vertical de pressão diversos  $Re$ , (a) no duto interno, posição  $\frac{x}{D} = 2,0$ , (b) na posição média do canal anular  $\frac{x}{D} = 1,25$ .

### 5.3.3 Coluna de perfuração com um grau de liberdade na direção $x$

Nesta seção são apresentados os resultados do escoamento no interior de um sistema de perfuração simplificado com um grau de liberdade na direção horizontal, Fig. 5.15(c),

duas propostas são consideradas: a) coluna com duto reto e paredes iguais e b) coluna com duto reto com paredes de comprimentos diferentes. Nesta a parede da esquerda possui um aumento no comprimento enquanto a parede da direita é mantida constante. Este incremento na parede da esquerda foi de 1,33 %  $\frac{L}{D}$ , 0,625%  $\frac{L}{D}$ , 0,30%  $\frac{L}{D}$  e 0,148%  $\frac{L}{D}$  para a razão de comprimento: 14, 30, 62 e 126 respectivamente. Isto acarreta numa variação na saída do escoamento do fluido do duto interno.

Em ambas as situações as simulações foram realizadas para  $Re=1000$ , em um domínio de  $512 \times 128$  pontos de colocação e razão de aspecto  $\frac{L}{D} = 14$  e com os seguintes parâmetros estruturais razão mássica de 93750, rigidez de  $0,17 \text{ N.m}^{-1}$ , frequência natural de 7,016 Hz e coeficiente de amortecimento de  $1,237 \cdot 10^{-3}$ .

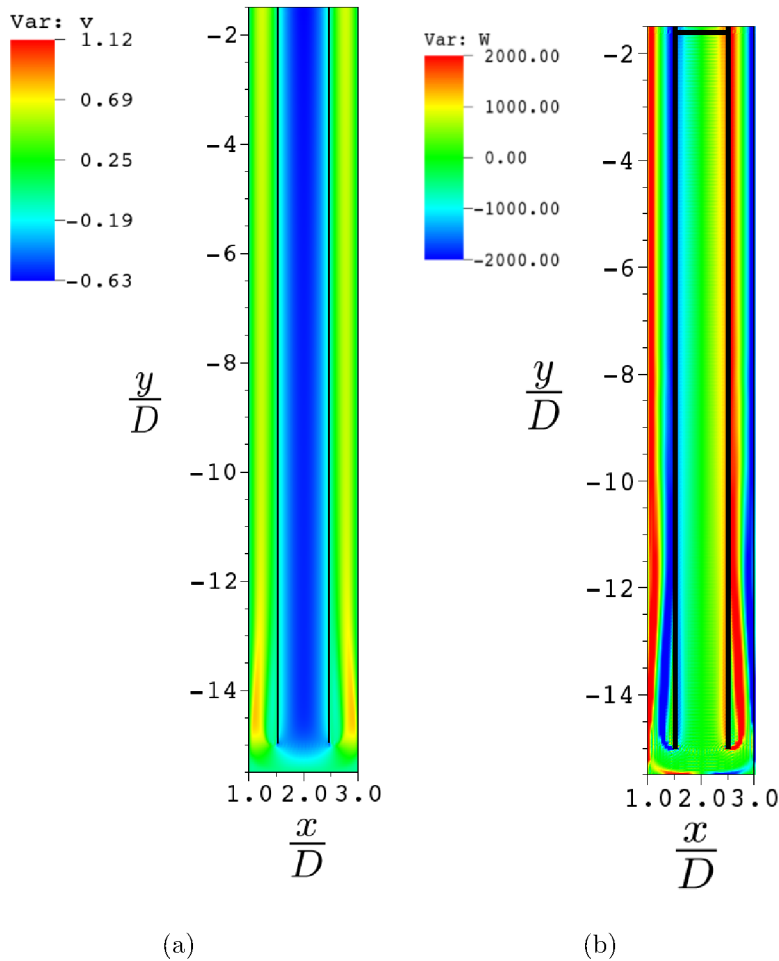


Figura 5.24: Campos de (a) velocidade vertical e (b) vorticidade.

Os campos de velocidade vertical e vorticidade, apresentados na Fig. 5.24, mostram mesmo padrão da configuração do item 5.3.1, toda vez em que não ocorre movimentação como indicado na Fig. 5.25. A simetria geométrica do problema a todo instante assim como a assimetria do escoamento não altera a posição da coluna.

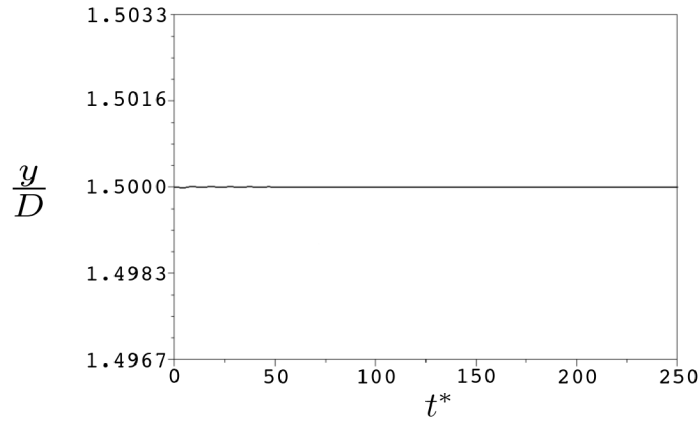


Figura 5.25: Evolução temporal da parede esquerda da coluna ( $\frac{x}{D} = 1,5$ ),  $Re=1000$ .

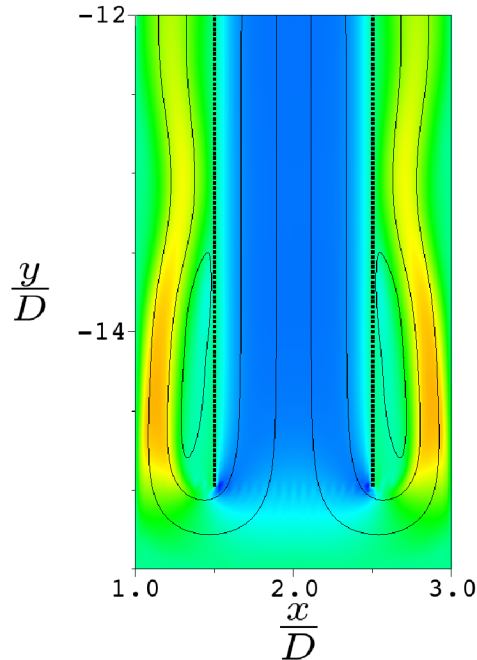


Figura 5.26: Campo de velocidade vertical sobreposto pelas linhas de corrente,  $Re=1000$ .

Na Figura 5.27 tem-se o campo de vorticidade para diversos instantes do desenvolvimento do escoamento. Na Fig. 5.27(a) está o campo vorticidade inicial para o tempo

adimensional  $t^* = 0$ , na Fig. 5.27(b) o campo de vorticidade apresenta a formação de duas recirculações no anular próxima parede da geometria interna, a qual fica melhor visualizada através das linhas de corrente na Fig.5.26. Nas Figs. 5.27(c) e 5.27(d) nota-se que o escoamento já entrou em regime permanente, a partir de  $t^*=23,44$ .

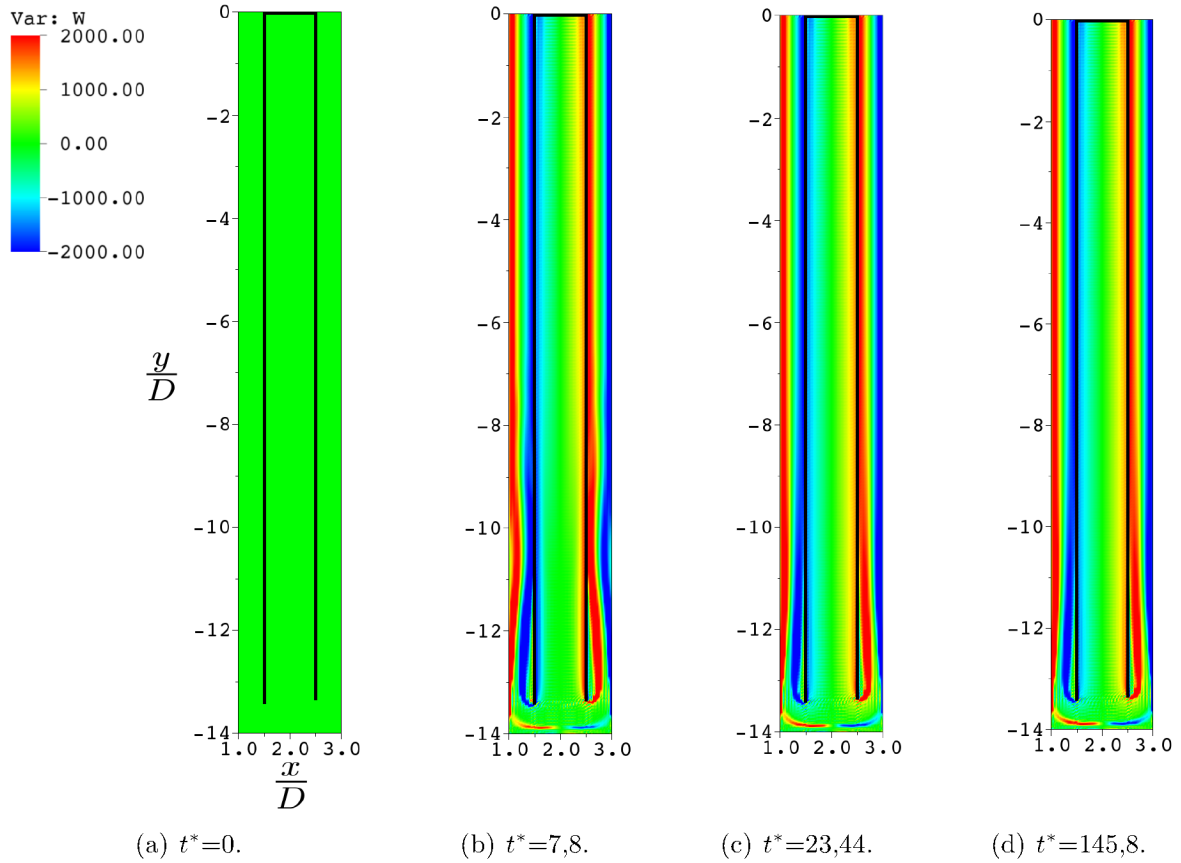


Figura 5.27: Campo de vorticidade em diferentes instantes de tempo para simulação do canal ancorado por mola à  $Re$  1000.

O fluido escoando no interior do duto de perfuração com um perfil parabólico ao atingir a extremidade final deste duto, o qual possui comprimentos das paredes distintas, causa uma assimetria no movimentação do escoamento, *i.e.* o fluido retorna primeiro pelo canal anular da direita, o qual possui comprimento menor, e assim desloca a coluna de perfuração para o lado esquerdo, isso ocasiona a aceleração do fluido devido a redução da área no canal anular esquerdo. Devido ao incremento do comprimento da parede ser pequeno, isto implica num deslocamento estrutural e aceleração do fluido também com

valores pequenos.

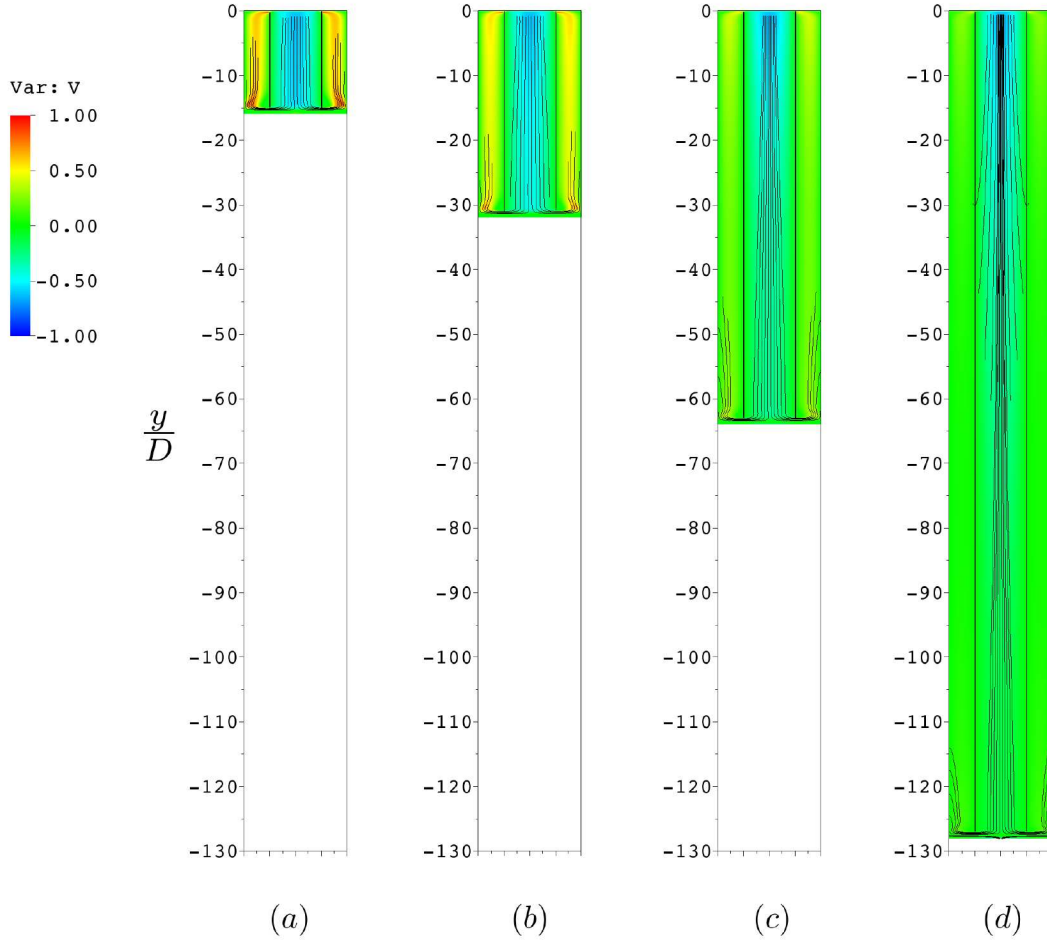
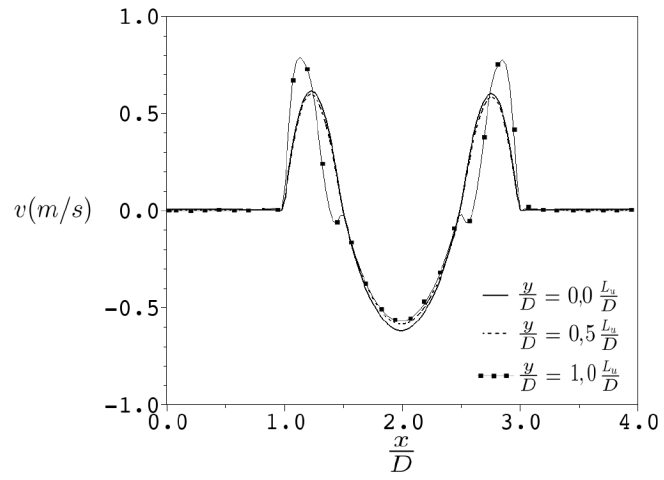


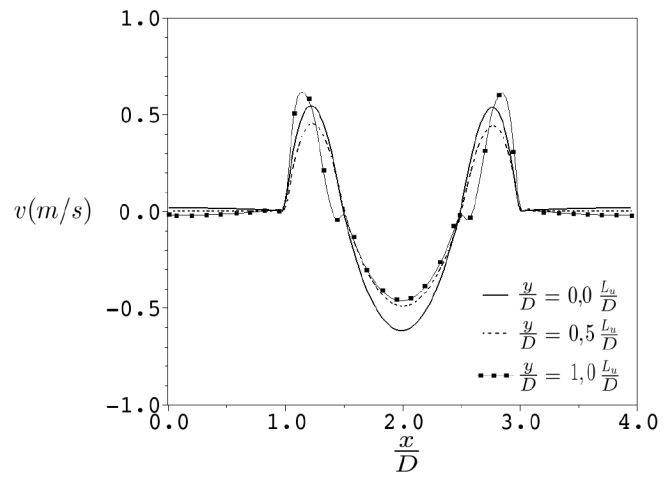
Figura 5.28: Razão de aspecto estudados, (a)  $\frac{L}{D} = 14$ , (b)  $\frac{L}{D} = 30$ , (c)  $\frac{L}{D} = 62$  e (d)  $\frac{L}{D} = 126$ .

Na segunda situação, foram realizadas simulações para razões de aspecto entre 14 e 126, Fig. 5.28, utilizando domínio de  $128 \times 512$ ,  $128 \times 1024$ ,  $128 \times 2048$  e  $128 \times 4096$  pontos de colocação, de forma a manter a mesma densidade de pontos em relação ao aumento do comprimento do duto. Todas as simulações foram executadas para  $Re=1000$  e para os mesmos parâmetros estruturais. Esta proposta permite analisar a reposta da estrutura ocasionada pela modificação na saída do duto interno, além de informar sobre o custo computacional em função da razão de aspecto.

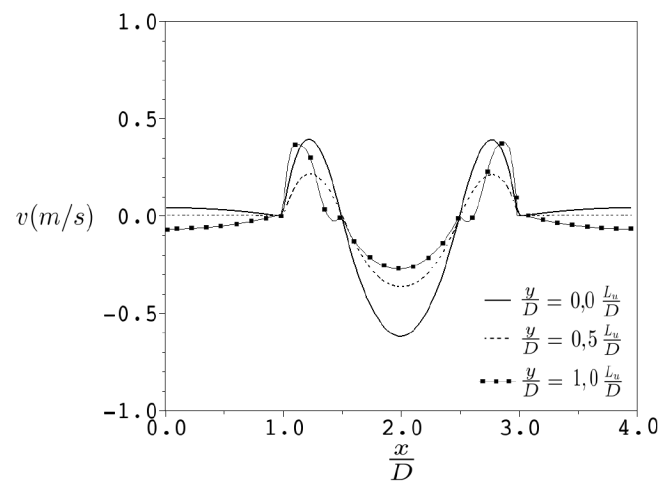




(a)



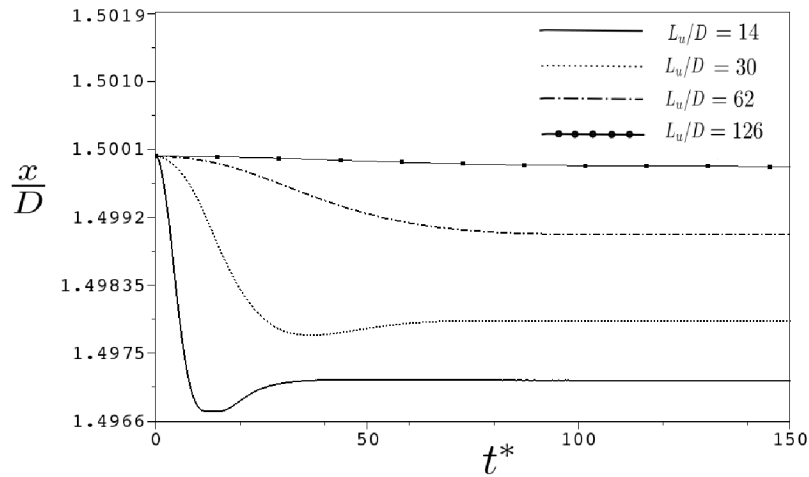
(b)



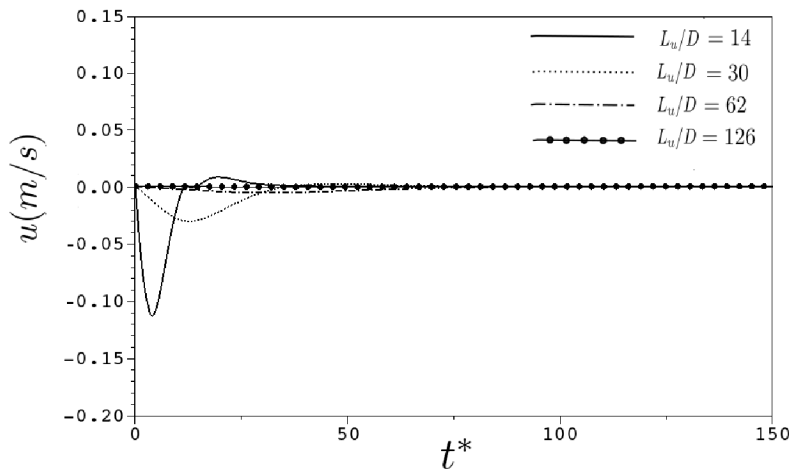
(c)

Figura 5.29: Perfis de velocidade vertical para diferentes posições ao longo dos dutos (a)  $\frac{L}{D} = 14$ , (b)  $\frac{L}{D} = 30$  e (c)  $\frac{L}{D} = 62$ .

Os perfis velocidade para três diferentes razões de aspecto estão apresentadas na Fig. 5.29, na qual pode-se notar que o escoamento no duto com razão de aspecto 30, Fig. 5.29(a), o perfil na posição central do duto,  $0,5L_u$ , mostra-se quase idêntico com o perfil de entrada a  $0,0L_u$ . Nota-se também que na posição próxima ao fundo do poço ocorre aceleração do escoamento na região do anular. Nas Fig. 5.29 (b) e (c), são apresentados os perfis velocidades para as razões de aspecto 30 e 62 respectivamente, percebe-se que o escoamento não se encontra completamente desenvolvido, pois os perfis nas posições intermediária e final, ainda não atingiram a velocidade do perfil da condição de entrada.



(a) Deslocamento a estrutura.



(b) Velocidade a estrutura.

Figura 5.30: Deslocamento e velocidade estrutural para diversas razões de aspecto.

O deslocamento realizado pela estrutura ancorada por mola está apresentada na Fig.5.30(a), na qual a posição mostrada refere-se a parede esquerda do duto. Analisando-

a simultaneamente com a Fig. 5.30(b), a qual mostra a evolução temporal da velocidade de movimentação da estrutura, é possível observar a coerência dos resultados numéricos, pois ao aumentar a razão de aspecto do duto interno há um aumento na massa da estrutura e por consequência o aumento na rigidez, uma vez que a frequência natural é imposta, promovendo menor deslocamento. O tempo para atingir a posição final da coluna é maior à medida que  $\frac{L_u}{D}$  aumenta.

Os custos computacionais para as três razões de aspecto são mostrados na Tab. (5.1). Observa-se que ao dobrar o número de pontos de colocação da malha o tempo de simulação eleva-se. Analisando a Tab.(5.1) observa-se que a tendência do tempo computacional é função de  $N\log(N)$ , sendo  $N$  o número total de pontos utilizados, o qual que é a mesma tendência da FFT. A máquina utilizada para realizar as simulações possui um processador Intel(R) Core(TM)i7-3770 CPU com velocidade de clock 3.40 GHz.

Tabela 5.1: Tempo computacional para simular 0,5 segundos físicos para obter a solução do escoamento para as quatro razões de  $\frac{L_u}{D}$ .

razão de aspecto	malha	tempo computacional [s]
14	128x512	11526,72
30	128x1024	21168,14
64	128x2048	33415,55
126	128x4096	70128,85



## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho foi proposta aplicar a fusão dos métodos pseudoespectral de Fourier e fronteira imersa, denominado de metodologia IMERSPEC, a problemas simplificados presentes em engenharia de perfuração de poços de petróleo e gás. Inicialmente, foram desenvolvidos códigos computacionais usando a metodologia IMERSPEC e a metodologia dos volumes finitos, para fins comparativos. Na sequência, os processos de verificação e validação foram aplicados para ambos. As aplicações de interação fluido-estrutura foram realizadas exclusivamente usando a metodologia IMERSPEC.

Resultados com relação a verificação de ambos códigos com o acoplamento da fronteira imersa (MFI) mostram que o uso do MFI acarreta a queda da ordem de convergência de ambas as metodologias, vide Fig. 4.9. Com os resultados obtidos é possível concluir que, para o método pseudoespectral de Fourier, as funções de interpolação e distribuição influenciam na acurácia e na ordem de convergência das soluções. Além disso, o método pseudoespectral de Fourier (MPEFO) obteve quarta ordem de convergência com o custo computacional inferior ao método dos volumes finitos (MVF), devido a não necessidade de resolver o sistema linear do acoplamento pressão-velocidade, o qual é exigido no MVF.

A validação dos códigos computacionais foi realizada com a solução do escoamento

de Couette-Circular. Os resultados referentes à validação estão apresentados na seção (4.4) e permite concluir que a utilização de zonas de forçagem influencia na ordem de convergência do MPEFO. Quanto maior a espessura da zona de forçagem maior é a ordem de convergência obtida.

O modelo de interação fluido-estrutural foi implementado no MPEFO, especificamente, no código IMERSPEC2D desenvolvido por Mariano (2011), o qual se encontra verificado e validado. No presente trabalho foi realizada a validação do modelo fluido-estrutural utilizando o problema de escoamentos sobre cilindro com um e dois graus de liberdade. Observou-se que utilizar a equação do movimento estrutural adimensionalizada é de grande importância, pois, a partir desta implementação, foi possível obter incrementos temporais maiores, desta forma reduzir o tempo de simulação. Além disso, a implementação do método de Runge-Kutta de quarta ordem otimizado (ALLAMPALLI et al., 2009) nas equações de movimento da estrutura sólida conseguiu-se obter os deslocamentos do centro de massa do cilindro e os padrões de escoamentos, de modo mais realista (CHERN et al., 2014; WILLIAMSON; ROSHKO, 1988).

O MFI com múltipla imposição da força dispensa o uso da massa adicionada, diferentemente de outros trabalhos da literatura (CHEN; WAMBSGANSS; JENDRZEJCZYK, 1976; NOMURA; HUGHES, 1992). Isso permite concluir que não é preciso utilizar parâmetros empíricos na modelagem de problemas com interação fluido-estrutural.

Também realizou-se uma série de implementações de problemas de perfuração como: escoamento de Couette-circular concêntrico e excêntrico, e escoamentos em canais anulares: fixos, com constrição na extremidade e canal ancorado por uma mola. Nessas simulações o IMERSPEC2D conseguiu aproximar os resultados da física dos problemas apresentando os padrões de escoamento para alguns números de Reynolds. Além de possibilitar simulações com altas razões entre o comprimento e o diâmetro dos tubos,  $\frac{L}{D} = 126$ , o tempo computacional aumenta de acordo com a relação  $N \cdot \log(N)$ , mantendo a característica das transformadas rápidas de Fourier.

## 6.1 Trabalhos Futuros

Com base no trabalho desenvolvido o método pseudoespectral de Fourier apresentou-se promissor para problemas que envolvem a interação fluido-estrutural. Devido a isto pode ser sugeridos os seguintes trabalhos futuros, a fim de complementar os estudos aqui apresentados:

- Realização de experimentos que envolvam os problemas de aplicação da metodologia de interação fluido-estrutura, a fim de compara-los com os resultados numéricos do Capítulo 5,
- Implementação do modelo de interação fluido-estrutura no código IMERSPEC3D (MOREIRA, 2011) levando em conta a utilização de computação paralela: Com simulações experimentais e numéricas tridimensionais espera-se conseguir resultados mais próximos dos problemas propostos.
- Implementação de um modelo que permita verificar a deformação dos dutos: Com essa implementação o modelo estrutural deixa de ser um corpo rígido e novos fenômenos característicos de escoamentos sobre corpos deformáveis puderam ser analisados.





## CAPÍTULO VII

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLAMPALLI, V. et al. High-accuracy large-step explicit runge - kutta (*hale – rk*) schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, v. 228, p. 3837–3850, 2009.

ALMEIDA, R. F. C. de. *Simulação computacional da Interação Fluido-Estrutura em Bombas de Cavidade Progressivas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN - Brazil, 2010.

BADAN, M. A. B. C. *Caracterização Experimental e Modelagem do Comportamento Vibratório de Estruturas Submersas*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU, Uberlândia, MG, Brazil, 2010.

BORGES, A. S. *Desenvolvimento de Procedimentos de Modelagem de Interação Fluido-Estrutura Combinando a Teoria de Vigas de Cosserat e a Metodologia de Fronteira Imersa*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, 2010.

BORGES, J. E. *Modelagem Matemática e Simulação de Escoamentos em Canais Anulares com interação Fluido-Estrutura*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de

Engenharia Mecânica - FEMEC, Uberlândia, MG, Brazil, 2011.

BORNSCHLEGELL, A. S. *Implementação e Teste do Método da Fronteira Imersa para Simulação do Escoamento em Torno de Cilindros Estacionários e Rotativos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de São Paulo- UNESP, Ilha Solteira, SP, Brasil, 2008.

BRAGA, E. R. *Estudo Do Escoamento de Fluido de Perfuração em Dutos e em Regiões Anulares*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - Instituto de Tecnologia, Seropédica, RJ, Brazil, 2009.

BRET-ROUZAUT, N.; FAVENNEC, J.-P. *Petróleo & Gás Natural: como produzir e a que custo*. Rio de Janeiro, RJ: Synergia Editora, 2011.

BRINGGS, W.; HENSON, V. *THE DFT: an Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*. New York: Ed.SIAM, 1995.

CAMPREGHER, R. *Modelagem Matemática Tridimensional para Problemas de Interação Fluido-Estrutura*. Tese (Doutorado), Ubelândia, MG, 2005.

CANUTO, C. et al. *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. New York: Spriger Verlag, 2007.

CANUTO, C. et al. *Spectral Methods in Fluid Dynamics 2nd*. New York: Springer-Verlag, 1988.

CANUTO, C. et al. *Spectral Methods-Fundamentals in Single Domains*. New York: Springer, 2006.

CARVALHO, B. *Revista Ecológica*. 2016. <http://www.revistaecologica.com/energia-eolica-revolucionada-geradores-sem-helices>. Acessado: 03 março 2016.

CHANDRASEKHAR, S. Experiments on the stability of spiral flow between rotating cylinders. *Proc. N. A. S.*, Vol. 46,s, p. 1150 – 1154, 1960.

CHAUDHRY, M. H. *Applied Hydraulic Transientes*. New York, USA: Van Nostrand Reinhold Company, 1979.

CHEN, S.; WAMBSGANSS, M. W.; JENDRZEJCZYK, J. Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids. *J. Appl. Mechanical*, v. 98, p. 325–329, 1976.

CHEN, S. S. Flow-induced vibration of circular cylindrical structures. *Nuclear Engineering and Design*, v. 63, p. 81–100, 1980.

CHEN, S.-S. *Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structure*. Dissertação (Mestrado) — University of Chicago, Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois, 1985.

CHERN, M.-J. et al. Direct-forcing immersed boundary modeling of vortex-induced vibration of a circular cylinder. *Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, v. 134, p. 109–121, 2014.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968.

CHRISTENSEN, O.; PRAHM, L. P. A pseudospectral model for dispersion of atmospheric pollutants. *Journal of Applied Meteorology*, Vol.15, p. 1284–1294, 1976.

COOLEY, T. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, v. 19, p. 297–301, 1965.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal*, v. 1, p. 215–234, 1967.

DETTMER, W.; PERIC, D. A computational framework for fluid-rigid body interaction: Finite element formulation and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 195, p. 1633–1666, 2006.

DOWELL, E. H.; HALL, K. C. Modeling of fluid-structure interaction. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 33, p. 445–490, 2001.

DUTRA, L. E. D. O petróleo no início do século xx: Alguns elementos hitóricos. *Revista Brasileira de Energia*, p. Vol.4, n°1, 1995.

ENRIQUES-REMIGIO, S.; SILVEIRA-NETO, A. A new modeling of fluid-structure interaction problems through immersed boundary method/virtual psysical model (ibm/vpm). In: *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 19*. Brasília: ABCM, 2007. 1 CD-ROM.

FADLUN, E. A. et al. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 161, p. 35–60, 2000.

FERZIGER, J.; PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. New York: Springer, 1996.

FORTUNA, A. de O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos, conceito básicos e aplicações*. São Paulo, SP: Universidade de São Paulo, 2000.

FRIEDMAN, J. *Tacoma Narrows Bridge Collapse*. 2014.

<http://www.youtube.com/watch?v=nkXl8JJBH7E>. Acessado: 25-12-2014.

FRITZ, R.; KISS, E. The vibration response of a cantilevered cylinder surrounded by an annular fluid. *Knolls Atomic Power Laboratory - KAPLM-6539*, 1996.

GÓIS, E. R. C. *Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro utilizando o Método das Fronteiras Imersas*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE de São Paulo - USP – São Carlos, São Carlos, SP, Brazil, 2007.

GONÇALVES, R. A. *Análise Numérica da Interação entre Escoamentos Abaixos Números de Reynolds e Cilindros Apoiados em Base Elástica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande, RS, Brazil, 2013.

GOVARDHAN, R.; WILLIAMSON, C. H. K. Mean and fluctuating velocity fields in the wake of a freely-vibrating cylinder. *Journal of Fluids and Structure*, v. 15, p. 489–501, 2001.

- GRIFFITH, B. E.; PESKIN, C. S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *Journal of Computational Physics*, v. 208, p. 75–105, 2005.
- HERNANDEZ, J. *Aplicação de um Esquema Convectivo de Baixa Difusão Numérica em Escoamentos com Alta Recirculação*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Uberlândia, MG, Brazil, 2005.
- JAHN, F. et al. *Introdução à Exploração e Produção de hidrocarbonetos*. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2012.
- JAUVTIS, N.; WILLIAMSON, C. Vortex-induced vibration of a cylinder with two degrees of freedom. *Journal of Fluids and Structures*, v. 17, p. 1035–1042, 2013.
- KHALAK, A.; WILLIAMSON, C. H. K. Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures*, v. 13, p. 813–851, 1999.
- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional step method to incompressible navier-stokes equation. *Journal of Computational Physics*, p. v.59, pages 308–323, 1985.
- KITATANI-JÚNIOR, S. *Modelagem Matemática e Simulação Numérica para Solução de Problemas de Interação Fluido-Estrutura Utilizando Metodologia de Fronteira Imersa*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG - Brasil, 2009.
- KOLOMENSKIY, D.; SCHNEIDER, K. A fourier spectral method for the navier–stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles. *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, p. 5687–5709, 2009.
- KOROTKIN, A. I. *Added Masses of Ship Structure*. ISBN-13 978-981-4299-32-9, USA: Springer, 2007.
- LEFRANÇOIS, E.; BOUFFLET, J. P. An introduction to fluid-structure interaction: Application to the piston problem. *SIAM Review*, v. 52, p. 747–767, 2010.

LIMA, A. A. *Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros flexíveis*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo - Escola Politécnica, São Paulo, SP - Brasil, 2011.

LIMA-E-SILVA, A.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, p. 351–370, 2003.

LIMA-E-SILVA, A. L. F. de. *Desenvolvimento e Implementação de uma Nova Metodologia para Modelagem de Escoamentos sobre Geometrias Complexas: Método da Fronteira Imersa como Modelo Físico Virtual*. 162 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002.

LIMA, G. H. de et al. Simulação numérica do escoamento particulado em um canal parcialmente poroso homogêneo. In: . [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–8.

MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. Brasil: Livros Técnicos e Científicos Editoras S.A. - LTC, 1995.

MARIANO, F. P. *Simulação de Escoamentos não ao Periódicos Utilizando a Metodologia Pseudo-Espectral de Fourier Acoplado com o Método da Fronteira Imersa*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC, Uberlândia, MG, Brazil, 2007.

MARIANO, F. P. *Soluções Numéricas de Navier-Stokes Utilizando uma Hibridação das Metodologias Fronteira Imersa e Pseudospectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC, Uberlândia, MG, Brazil, 2011.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A. A new incompressible navier-stokes solver combining fourier pseudo-spectral and immersed boundary methods. *Computer Modeling in Engineering Science*, p. Vol.59, N° 2, pp181–216, 2010.

MEIROVITCH, L. *Dynamics and Control of Structures*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1989.

- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, p. v.37, pages 239–261, 2005.
- MOREIRA, L. Q. *Simulação de Grandes Escalas de Jatos Periódicos Temporais Utilizando a Metodologia Psedo-Espectral de Fourier*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC, Uberlândia, MG, Brazil, 2007.
- MOREIRA, L. Q. *Modelagem Matemática de Jatos em Desenvolvimento Espacial Usando a Metodologia Pseudospectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC, Uberlândia, MG, Brasil, 2011.
- MOSER, R. D.; MOIN, P.; LEONARD, A. Spectral numerical method for the navier-stokes equations with application to taylor-couette flow. *Journal of Computational Physics*, Vol.52, p. 542–544, 1983.
- NASCIMENTO, A. A.; MARIANO, F. P.; PADILLA, E. L. M. Solução manufaturada de um problema de difusão utilizando os métodos dos volumes finitos e espectral de fourier. In: *Anais do Simpósio do Programa de Pós-Graduação - 21º POSMEC*. Uberlândia, Brasil: [s.n.], 2011.
- NASCIMENTO, A. A.; MARIANO, F. P.; PADILLA, E. L. M. Solução numérica das equações de navier-stokes utilizando o método dos volumes finitos e o método pseudospectral de fourier. In: *Anais do Simpósio do Programa de Pós-Graduação - 22º POSMEC*. Uberlândia, Brasil: [s.n.], 2012.
- NASCIMENTO, A. A. et al. Comparison of the convergence rates between fourier pseudospectral and finite volume methods using taylor-green vortex problem. In: *Proceedings of the 22nd International Congress of Mechanical Engineering - COBEM2013*. Ribeirão Preto, Brazil: [s.n.], 2013.
- NASCIMENTO, A. A. et al. A comparison of fourier pseudospectral method and finite volume method used to solve the burgers equations. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 32, p. 737–742, 2014.

- NOMURA, T.; HUGHES, T. J. R. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, p. 115–138, 1992.
- OBRZUT, L. Q. et al. Análise experimental de escoamentos particulado para o controle de fuga de fluido em canal fraturado. In: . [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–8.
- OKAJIMA, A. et al. Flow-induced in-line oscillation of a circular cylinder. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol.23, p. 115–125, 2004.
- PADILLA, E. L. M.; MARTINS, A. L.; SILVEIRA-NETO, A. Experimentação numérica sobre escoamentos em canais anulares. In: *Anais do 4<sup>o</sup> PDPETRO*. Campinas, SP - Brasil: [s.n.], 2007.
- PASCIAK, J. E. Spectral and pseudo spectral methods for advection equations. *Mathematics of Computation*, Vol.35, p. 1081–1092, 1980.
- PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. USA: Taylor e Francis Book LTD, 1980.
- PATERA, A. T. A spectral element method for fluid dynamics laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, Vol.54, p. 468–488, 1984.
- PESKIN, C. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of Computational Physics*, p. v.10, pages 252–271, 1972.
- RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.
- RIZALES, J. de J. M. *Aplicação de um Método Multidomínio Espectral na Simulação de Escoamentos Viscosos Incompressíveis*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio De Janeiro, RJ - Brasil, 2005.
- ROSHKO, A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. In: . [S.l.: s.n.], 1953. v. 152, p. TN 2913.



- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura. *Caderno de Engenharia de Estruturas*, ISSN 1809-5860, v. 10, p. 33–54, 2008.
- SCHNEIDER, C. L. et al. Estudo experimental do preenchimento de fraturas com escoamento particulado em canal fraturado. In: . [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–8.
- SHU, C.; LIU, N.; CHEW, Y. T. A novel immersed boundary velocity correction-lattice Boltzmann method and its application to simulate flow past a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, v. 226, p. 1607–1622, 2007.
- SHYY, W. et al. Computational fluid dynamics with moving boundary. In: . [S.l.: s.n.], 2007.
- SILVA, A. R. da. *Modelagem Matemática de Interação Fluido-Estrutura Utilizando o Método da Fronteira Imersa*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, 2008.
- SILVA, V. G. *Estudo Numérico da Vibração Induzida por Vórtices em um Corpo Cilíndrico*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - USP, São Paulo, SP, Brasil, 2013.
- SILVEIRA-NETO, A. *Turbulência nos fluidos aplicada*. Uberlândia, 2002. Apostila da Disciplina Mecânica dos Fluidos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Uberlândia.
- SINGH, S.; MITTAL, S. Vortex-induced oscillations at low reynolds numbers: Hysteresis and vortex-shedding modes. *Journal of Fluids and Structures*, v. 20, p. 1085–1104, 2005.
- SOUZA, A. M. *Análise Numérica da Transição à Turbulência em Escoamentos de Jatos Circulares Livre*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC, Uberlândia, MG, Brazil, 2005.
- SU, S.; LAI, M.; LIN, C. An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary. *Computers and Fluids*, v. 36, p. 313–324, 2007.

TAKAHASHI, D. A hybrid MPI/OpenMP implementation of a parallel 3-D FFT on SMP clusters. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 3911, p. 970–977, 2006.

TAYLOR, G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A* 223, p. 289–343, 1923.

TAYLOR, G. I.; GREEN, A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones. In: . [S.l.: s.n.], 1937. v. 152, p. 499–521.

THOMAS, J. E. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, PETROBRAS, 2001.

THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. D. *Theory of vibration with applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 524 p.

TORNBERG, A.; ENGQUIST, B. Numerical approximations of singular source terms in differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 200, p. 462–488, 2004.

UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, v. 209, p. 448–476, 2005.

VEDOVOTO, J. M. *Modelagem matemática de simulação numérica de escoamentos incompressíveis sobre geometrias complexas tridimensionais utilizando o método da fronteira imersa*. 125 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 34, p. 283–302, 2008.

WILLIAMSON, C. H. K.; ROSHKO, A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, v. 2, p. 355–381, 1988.

YANG, S. Y.; ZHOU, Y.; WEI, G. Comparison of the discrete singular convolution algorithm and the fourier pseudospectral method for solving partial differential equations. *Journal Physics Communications*, Vol. 143, p. 113–135, 2002.

YEH, T. T.; CHEN, S. S. The effect of fluid viscosity on coupled tube/fluid vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 59, p. 453–467, 1978.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos fundamentos e aplicações*. New York: The McGraw-Hill Global Education Holdings, 2012.



## APÊNDICE A

Neste anexo será apresentado a discretização para os problemas unidimensionais desenvolvidos no presente trabalho.

### A Equação da Energia com Termo Fonte

Nesta seção é apresentada a modelagem numérica para a Eq. (A-1), com a finalidade de realizar um estudo relacionado com a acurácia de ambos os métodos.

$$\frac{dT^*}{d\tau} = \frac{d^2T^*}{dx^{*2}} + B, \quad (\text{A-1})$$

onde  $T^*$  é a temperatura adimensional,  $\tau$  é a variável tempo adimensional,  $x^*$  é a variável espacial adimensional e  $B$  é o termo-fonte.

Nas simulações foram utilizadas malhas uniformes com: 32, 64, 128 e 256 pontos, e para o intervalo de tempo  $\Delta t$  obtido com os números de Courant-Friedrich-Lewy,  $CFL$  de 1,0; 0,1; 0,01 e 0,001.

$$\Delta t = \frac{CFL(\Delta x^2)}{\alpha}. \quad (\text{A-2})$$

Inicialmente foi proposta uma solução analítica Eq.(A-3), na qual a temperatura é dependente o tempo e do espaço,

$$T^* = \sin(x^*)\cos(\tau). \quad (\text{A-3})$$

A fim de obter o termo fonte,  $B$ , da Eq. (A-1) determina-se: a derivada no tempo e a derivada no espaço da Eq.(A-3) como mostrada nas Eq.(A-4) à Eq.(A-6):

$$T_t^{*'} = -\sin(x^*)\sin(\tau), \quad (\text{A-4})$$

$$T_x^{*'} = \cos(x^*)\cos(\tau), \quad (\text{A-5})$$

$$T_x^{*''} = -\sin(x^*)\cos(\tau). \quad (\text{A-6})$$

Substituindo as derivadas na Eq.(A-1), têm-se

$$-\sin(x^*)\sin(\tau) = -\sin(x^*)\cos(\tau) + B, \quad (\text{A-7})$$

rearranjando obtém-se o termo-fonte,

$$B = \sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)]. \quad (\text{A-8})$$

Reescrevendo a Eq.(A-1) com o valor obtido para o termo-fonte, a equação da energia fica como apresentada na Eq.(A-9):

$$\frac{dT^*}{d\tau} = \frac{d^2T^*}{dx^{*2}} + \sin(x^*)[\sin(\tau) + \cos(\tau)]. \quad (\text{A-9})$$

#### A.1 Discretização a partir do Método Volumes Finitos - MVF

A solução pelo método dos Volumes Finitos da Eq.(A-9), é obtida por integrações num volume elementar, tanto no tempo quanto no espaço. Assim a Eq. (A-9) ser expressa

como mostradado na Eq. (A-10)

$$\int_{\forall} \int_{\tau} \frac{dT^*}{d\tau} d\forall d\tau = \int_{\forall} \int_t \left( \frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} + \sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)] \right) (d\forall)(d\tau), \quad (\text{A-10})$$

onde  $\forall$  representa as dimensões do volume elementar,  $\forall = \Delta x \Delta y \Delta z$ .

A discretização do termo da direita da Eq. (A-10), é apresentado separadamente como termo difusivo, Eq.(A-11), e o termo fonte-fonte, Eq.(A-12).

$$\int_{\forall} \int_{\tau} \left( \frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} \right) (d\forall)(d\tau) = \frac{T_E^* - T_P^*}{\delta_{xe}} - \frac{T_P^* - T_W^*}{\delta_{xw}}, \quad (\text{A-11})$$

$$\int_{\forall} \int_{\tau} \sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)](d\forall)(d\tau) = \sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)](\Delta\forall). \quad (\text{A-12})$$

A integração do termo da esquerda da Eq. (A-10), no tempo e no espaço é mostrada pela Eq.(A-13):

$$\int_v \int_{\tau} \frac{dT^*}{d\tau} (d\forall)(d\tau) = T_P^{*\tau+\Delta\tau} - T_P^{*\tau}(\Delta x)(\Delta y)(\Delta z). \quad (\text{A-13})$$

Assim substituindo na Eq.(A-8) as Eqs. (A-11) à (A-13), têm-se a Eq.(A-14);

$$\begin{aligned} (T_P^{\tau+1} - T_P^{\tau})\Delta x \Delta y \Delta z &= \left[ \frac{T_E^{*\tau} - T_P^{*\tau}}{\delta_{xe}} - \frac{T_P^{*\tau} - T_W^{*\tau}}{\delta_{xw}} \right] \Delta y \Delta z \Delta \tau + \\ &+ \sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)](\Delta x)(\Delta y)(\Delta z)(\Delta \tau), \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

dividindo pela  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta \tau$ , tem -se a Eq.(A-15) que está discretizada em um volume;

$$\frac{T_P^{\tau+1} - T_P^{\tau}}{\Delta \tau} = \left[ \frac{T_E^{*\tau} - T_P^{*\tau}}{\delta_{xe}} - \frac{T_P^{*\tau} - T_W^{*\tau}}{\delta_{xw}} \right] \frac{1,0}{\Delta x} + \sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)]. \quad (\text{A-15})$$

Os coeficientes da equação discretizada,

$$A_p T_p^{*\tau+1} = (A_e T_E + A_w T_W - A_p T_p + B) d\tau + T_p^{*\tau}, \quad (\text{A-16})$$

são mostrados nas Eqs.(A-17) à (A-20):

$$A_e = \frac{1,0}{\delta_{xe} \Delta x}. \quad (\text{A-17})$$

$$A_w = \frac{1,0}{\delta_{xw} \Delta x}. \quad (\text{A-18})$$

$$A_p = \frac{1,0}{\delta_{xe} \Delta x} + \frac{1,0}{\delta_{xw} \Delta x}. \quad (\text{A-19})$$

$$B = \sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)]. \quad (\text{A-20})$$

## A.2 Discretização a partir do Método Espectral de Fourier - MEFO

A discretização da Eq.(A-9) usando o MEFO, consiste na aplicação das propriedades da transformada de Fourier apresentada na seção 3.4, ou seja,

$$\frac{\widehat{dT^*}}{d\tau} = \frac{\widehat{d^2 T^*}}{dx^{*2}} + \sin(\widehat{x^*}) \sin(\tau) + \sin(\widehat{x^*}) \cos(\tau). \quad (\text{A-21})$$

Discretizando o termo transiente da Eq.(A-21) pelo método Espectral e utilizando



Euler explicito têm-se,

$$\frac{\widehat{dT^*}}{d\tau} = \frac{\widehat{T_P^{*\tau+1} - T_P^{*\tau}}}{\Delta\tau}. \quad (\text{A-22})$$

Os termos à direita do sinal de igualdade pode ser apresentado como termo difusivo e termo fonte respectivamente,

$$\frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} = \iota^2 k^2 \widehat{T^{*\tau}}, \quad (\text{A-23})$$

$$\sin(x^*)[-\sin(\tau) + \cos(\tau)] \longrightarrow \widehat{\sin(x^*)}[\widehat{-\sin(\tau) + \cos(\tau)}], \quad (\text{A-24})$$

Assim a equação discretizada com o uso do método Espectral de Fourier pode ser expressa como mostrado na Eq.(A-25) e Eq. (A-26)

$$\frac{\widehat{T_P^{*\tau+1} - T_P^{*\tau}}}{\Delta\tau} = \iota^2 k^2 \widehat{T^{*\tau}} + \widehat{\sin(x^*)}[\widehat{-\sin(\tau) + \cos(\tau)}], \quad (\text{A-25})$$

$$\widehat{T_P^{*\tau+1}} = \{\iota^2 k^2 \widehat{T^{*\tau}} + \widehat{\sin(x^*)}[\widehat{-\sin(\tau) + \cos(\tau)}]\}(\Delta\tau) + \widehat{T_P^{*\tau}}. \quad (\text{A-26})$$



## APÊNDICE B

Neste anexo será apresentado a discretização para os problemas unidimensionais desenvolvidos no presente trabalho.

### B Equação de Burgers - 1D

Nesta subseção será descrita a discretização da solução da Equação de Burgers para ambos os métodos em estudo.

#### B.1 Discretização a partir do Método dos Volumes Finitos - MVF

Dado a equação de Burgers, Eq.(4.3), a discretização com o uso do método dos volumes finitos, inicia-se aplicando a integral no tempo e no espaço como mostrado nas Eq.(B-1 - B-2),

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = - \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e TNL dt dx + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt dx, \quad (B-1)$$

onde  $TNL = u \frac{\partial u}{\partial x}$ .

$$(u^{t+\Delta t} - u^t) \Delta x = - \int_w^e TNL \Delta t + \nu \left. \frac{du}{dx} \right|_w^e \Delta t. \quad (B-2)$$

A equação de Burgers utilizando o MVF pode ser escrita como, mostrado na Eq.(B-

3):

$$\frac{(u^{t+\Delta t} - u^t)}{\Delta t} = - \int_w^e \frac{TNL}{\Delta x} + \nu \left( \frac{u_E - u_P}{\delta x_e} - \frac{u_P - u_W}{\delta x_w} \right) \frac{1}{\Delta x}, \quad (\text{B-3})$$

considerando a distâncias  $\delta = \Delta$ , pode-se escrever a Eq.(B-3), como mostrado na Eq.(B-4),

$$\frac{(u^{t+\Delta t} - u^t)}{\Delta t} = - \int_w^e \frac{TNL}{\Delta x} + \nu \left( \frac{u_E - u_P}{\Delta x} - \frac{u_P - u_W}{\Delta x^2} \right) \frac{1}{\Delta x}. \quad (\text{B-4})$$

Separando o termo difusivo nos coeficientes  $A_E$ ,  $A_W$  e  $A_P$ , tem-se as Eq.(B-5 - B-7),

$$A_E = \frac{\nu}{\Delta x^2}, \quad (\text{B-5})$$

$$A_W = \frac{\nu}{\Delta x^2}, \quad (\text{B-6})$$

$$A_P = A_E - A_W. \quad (\text{B-7})$$

O termo advectivo da Eq.(B-4), integrado no espaço e no tempo é mostrado na Eq.(B-8),

$$\int_w^e \frac{TNL}{\Delta x} \mapsto \frac{F_e u_e}{\Delta x} - \frac{F_w u_w}{\Delta x}, \quad (\text{B-8})$$

onde  $F_e$  é a propriedade obtida por:

$$F_e = \frac{u_P + u_E}{2}, \quad F_w = \frac{u_P + u_W}{2}. \quad (\text{B-9})$$

As velocidades da face  $u_e$  e  $u_w$  são também obtidas pelos esquemas de interpolação apresentados na seção 3.3.2.3. Portanto a equação discretizada em volumes finitos é mostrada na Eq.(B-10).

$$u^{t+\Delta t} = \left( Ae(u_E) + Aw(u_W) + Ap(u_P) - \frac{F_e(u_e) - F_w(u_w)}{\Delta x} \right) \Delta t + u^t. \quad (\text{B-10})$$

## B.2 Discretização a partir do Método Pseudoespectral de Fourier - MPEFO

Transformando a equação de Burgers, Eq.(4.3), para o espaço espectral tem-se,

$$\frac{\hat{u}^{t+\Delta t} - \hat{u}^t}{\Delta t} = -ik\hat{u} * \hat{u} + (ik)^2\hat{u}. \quad (\text{B-11})$$

Observando a Equação (B-11) nota-se que ao transformar a equação para o domínio espectral, o termo não linear resulta em uma integral de convolução, o que eleva o custo computacional. Canuto et al. (2006) propõe o uso do método pseudoespectral a fim de evitar a solução da integral de convolução, podendo ser desenvolvido de três maneiras distintas: advectiva, divergente e anti-simétrica a qual é descrita na seção 3.3.1.7.

O uso do método pseudoespectral em problemas não periódicos, pode ser feita a partir do uso da metodologia da fronteira imersa, na qual é inserido um termo fonte, Eq.(B-12). No presente trabalho foi utilizado o método do *direct-forcing*, como mostrado na sequência das Eq.(B-13) à Eq.(B-15).

$$\frac{\hat{u}^{t+\Delta t} - \hat{u}^t}{\Delta t} = RHS + \hat{f}, \quad (\text{B-12})$$

onde  $RHS$  representa o termo advectivo e o termo difusivo, na equação de origem. Resolvendo a Eq.(B-12) com o auxílio do método *Direct-forcing*,

$$\frac{\hat{u}^{t+\Delta t} + \hat{u}^* - \hat{u}^* - \hat{u}^t}{\Delta t} = RHS + \hat{f}, \quad (\text{B-13})$$

$$\frac{\hat{u}^* - \hat{u}^t}{\Delta t} = RHS, \quad (B-14)$$

$$\frac{\hat{u}^{t+\Delta t} - \hat{u}^*}{\Delta t} = \hat{f}, \quad (B-15)$$

onde  $u^{t+\Delta t}$  é obtida pela solução da equação analítica. O incremento temporal está relacionado com o número de Curret,  $CFL$ , como mostrado pela Eq.(B-16),

$$\Delta t = CFL \left[ \min \left( \frac{\Delta x^2}{\nu}; \frac{\Delta x}{c} \right) \right], \quad (B-16)$$

onde CFL, teve valores 1,0; 0,1; 0,01; 0,001.

O cálculo do erro máximo foi realizado pela equação do erro absoluto, dada pela Eq.(B-17),

$$Erro_{abs} = \max |u_{analitico} - u_{numerico}|. \quad (B-17)$$

## APÊNDICE C

### C Vórtices de Taylor-Green

Nesta seção é demonstrada o valor nulo do termo-fonte, para a equação de Green-Taylor. Para a coordenada  $x$ , visto que para  $y$  aquele apresenta o mesmo valor.

Seja a equação de Navier-Stokes dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + Bx \quad (\text{C-1})$$

E as equações para velocidade e pressão dada em, Eq.(4.7), Eq.(4.8) e Eq.(4.9). Assim, primeiramente realiza-se a derivada temporal na função velocidade  $u$ ; assim o termo transiente fica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\cos(x)\sin(y)2\nu e^{-2\nu t} \quad (\text{C-2})$$

Os termos advectivo, difusivo e pressão ficam: para o termo advectivo na direção horizontal,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x)\sin(y)e^{-2\nu t} \quad (\text{C-3})$$

para o termo advectivo na direção vertical,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x)\cos(y)e^{-2\nu t} \quad (\text{C-4})$$

para o termo difusivo na direção horizontal,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t} \quad (\text{C-5})$$

para o termo difusivo na direção vertical,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t} \quad (\text{C-6})$$

O termo de pressão se apresenta como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{4}\sin(2x)2e^{-4\nu t} \quad (\text{C-7})$$

Substituindo Eq.(C-3), Eq.(C-4), na parcela advectiva da equação de Navier-Stokes tem:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t}(-\sin(x)\sin(y)e^{-2\nu t}) + (-\sin(x)\cos(y)e^{-2\nu t})\cos(x)\cos(y)e^{-2\nu t}$$

portanto o termo advectivo se reduz à:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x)\sin(x)e^{-4\nu t}(\sin(y)^2 + \cos(y)^2) \quad (\text{C-8})$$

Para o termo difusivo, tem-se:

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -2\nu\cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t} \quad (\text{C-9})$$

Substituindo das equações: Eq. C-2, Eq. C-8, Eq. C-9 e Eq. C-7 na equação de Navier-Stokes tem-se:

$$-2\nu\cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t} - \cos(x)\sin(x)e^{-4\nu t} = \frac{1}{\rho}\sin(x)\cos(x)e^{-4\nu t} - 2\nu\cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t} + Bx$$



Portanto,  $Bx=0$  e por conseguinte  $By=0$