

Figura 4.48: Esquema ilustrativo do topo e fundo do cilindro interno.

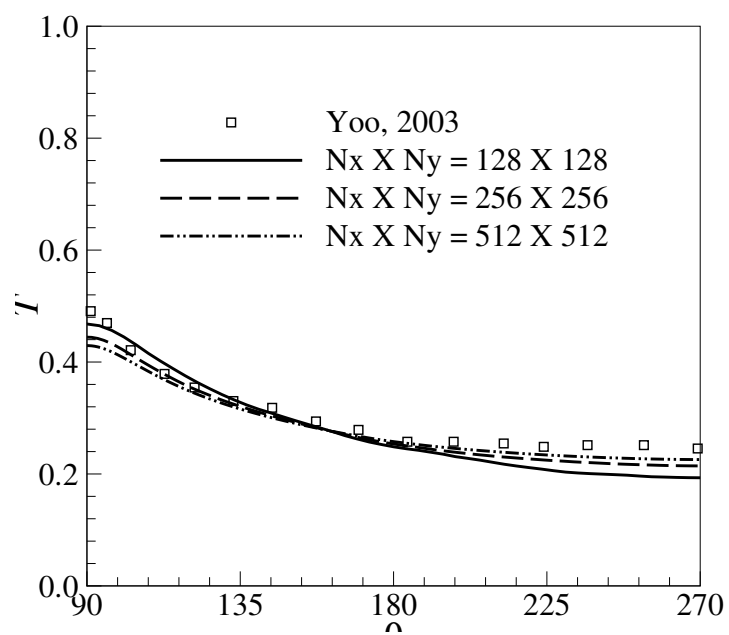


Figura 4.49: Comparação da distribuição de temperatura local na superfície do cilindro interno para $Ra = 5,0 \times 10^4$ utilizando o *Modelo 1*.

Assim, observa-se pela distribuição de temperatura no cilindro interno – Fig. 4.49 – que o presente modelo não alcança o resultado esperado, quando compara-se com a literatura. Com base neste resultado, optou-se por analisar o fluxo tangente, na busca por encontrar a causa do problema.

A fim de verificar a influência da parcela do fluxo de energia térmica tangente na modelagem matemática para a condição de contorno de Neumann com o *Modelo1*, os dados de Padilla (2013) foram utilizados. Para isso, foi necessário utilizar a distribuição de temperatura convergida que Padilla (2013) obteve, com o método de volumes finitos em coordenadas cilíndricas, e implementar na presente modelagem, como sendo o fluxo de energia térmica tangente conhecido.

Comparou-se a distribuição de temperatura local para o cilindro interno com o trabalho de Yoo (2003) como mostra a Fig. 4.50 para $Ra = 5 \times 10^4$, na região de maior interesse, compreendida entre 90 e 270 graus. Observa-se boa concordância com a literatura. Isto acontece uma vez que valores conhecidos no fluxo de energia térmica tangente foram utilizados para alimentar o modelo de segunda espécie proposto.

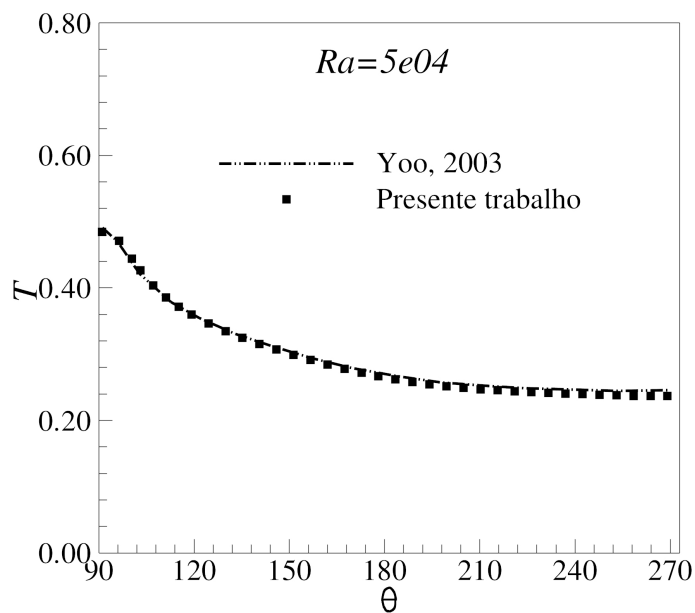


Figura 4.50: Comparação do perfil de temperatura local na superfície do cilindro interno com o trabalho de Yoo (2003), utilizando os resultados de Padilla (2013) para o fluxo tangente com o *Modelo 1*.

Portanto, é possível notar que o valor “correto” a ser utilizado para o fluxo de energia térmica tangente na modelagem proposta para a condição de contorno de Neumann é de fundamental importância, assim como observado na validação da cavidade quadrada para pontos coincidentes.

Devido às discrepâncias entre os resultados do presente trabalho com a literatura, observando que o maior problema está em ter que explicitar o fluxo tangente, já que quando se coloca valores “corretos” e “conhecidos” para a função tangente, os resultados concordam bem com a literatura, foi necessário rever a modelagem matemática para a condição de contorno de Neumann, utilizando o *Modelo 1*, levando à outras duas modelagens apresentadas na sequência.

4.4.2.2 Modelo 2

Outra alternativa para modelar a condição de contorno de Neumann foi utilizar a proposta apresentada por Kim e Choi (2004), Pacheco *et al.* (2005) e Zhang, Zheng e Eckels (2008), denominada de *Modelo 2*, apresentada na seção 3.5.2. Este modelo consiste em utilizar o fluxo constante na direção normal à fronteira imersa e, por meio de interpolações, obter a temperatura que será utilizada para impor o termo fonte que satisfaz a condição de iso-fluxo de energia térmica na fronteira imersa.

Para este *Modelo 2* optou-se por utilizar dois tipos de extrapolação, a linear e a quadrática. O esquema de ambas as extrapolações são apresentadas na Fig. 4.51. Observa-se que, para a extrapolação linear utiliza-se apenas um ponto externo à fronteira e para a extrapolação quadrática utiliza-se dois pontos externos à fronteira. Vale ressaltar que o primeiro ponto próximo à fronteira não será utilizado, a fim de evitar a influência do processo de distribuição da fronteira imersa.

O esquema para o cálculo da temperatura na superfície do cilindro interno utilizando o fluxo imposto será apresentado abaixo para ambos os esquemas de extrapolação.

•Extrapolação linear

Sabe-se que:

$$q_n'' = -k_f \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (4.31)$$

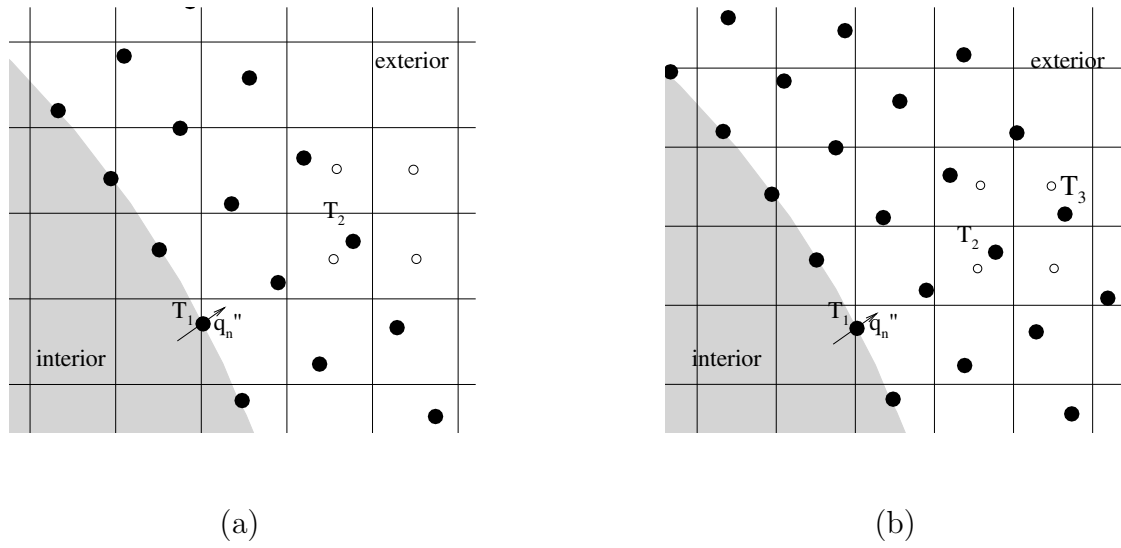


Figura 4.51: Esquemas de extrapolação utilizado para o *Modelo 2*, (a) extrapolação linear e (b) extrapolação quadrática.

Então, se:

$$T_1 = ax_1 + b, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = a \quad (4.33)$$

e

$$a = -\frac{q_n''}{k_f}. \quad (4.34)$$

Assim como,

$$T_2 = ax_2 + b. \quad (4.35)$$

Como a é conhecida, pode-se substituí-la na Eq. 4.35 e encontrar b :

$$b = T_2 + \frac{q_n''}{k_f}x_2. \quad (4.36)$$

Substituindo a e b na Eq. 4.32 tem-se:

$$T_1 = -\frac{q_n''}{k_f}x_1 + \left[T_2 + \frac{q_n''}{k_f}x_2 \right]. \quad (4.37)$$

Rearranjando a Eq. 4.37 obtém-se:

$$T_1 = T_2 + \frac{q_n''}{k_f}(x_2 - x_1) = T_2 + \frac{q_n''}{k_f}2\Delta x \quad (4.38)$$

E, então, calcula-se a força:

$$F_T(\vec{X}, t) = \rho C p \frac{T_1(\vec{X}, t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.39)$$

onde $T_1(\vec{X}, t) = T_2(\vec{X}, t) + \frac{q_n''}{k_f}2\Delta x$. Além disso, $T_2(\vec{X}, t)$ é obtido por meio de interpolação dos pontos vizinhos e $T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ é a temperatura estimada no contorno e interpolada. Obtendo-se, assim, o campo de forçagem da temperatura com fronteira imersa impondo o fluxo constante por meio de extrapolação linear.

•Extrapolação quadrática

Processo semelhante foi realizado para o processo de extrapolação quadrática como apresentado nas Eqs. 4.40 a 4.44:

$$T_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1 = 0) = b, \quad (4.41)$$

$$b = -\frac{q_n''}{k_f}. \quad (4.42)$$

Se:

$$T_2 = 4a\Delta x^2 - \frac{q_n''}{k_f}2\Delta x + c \quad (4.43)$$

e

$$T_3 = 9a\Delta x^2 - \frac{q_n''}{k_f}3\Delta x + c. \quad (4.44)$$

Assim, resolve-se os sistemas lineares e encontra-se as constantes a fim de obter a temperatura na superfície do cilindro interno dada pela Eq. 4.45:

$$T_1 = \frac{9}{5}T_2 - \frac{4}{5}T_3 + \frac{6}{5}\frac{q_n''}{k_f}\Delta x. \quad (4.45)$$

Desta maneira, calcula-se a força dada pela Eq. 4.39 utilizando a Eq. 4.45. Os resultados utilizando os dois modelos de extrapolação são apresentados na Fig. 4.52. Pode-se observar que quando utilizou-se a extrapolação quadrática os resultados aproximaram-se mais da literatura.

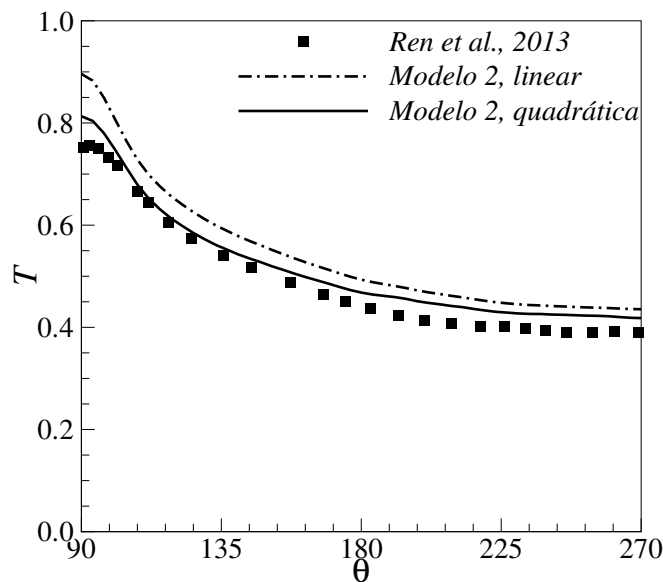


Figura 4.52: Comparação do perfil de temperatura na superfície do cilindro interno utilizando o *Modelo 2*.

Entretanto, estudos mais aprofundados de extrapolação se fazem necessários a fim de melhorar os resultados para o *Modelo 2*. Por isso, o terceiro modelo foi proposto.

4.4.2.3 Modelo 3

A terceira alternativa para a condição de contorno de Neumann foi proposta, tendo como base o modelo apresentado por Ren, Shu e Yang (2013), denominada de *Modelo 3*, a qual consiste em obter um campo de força lagrangiano em função do fluxo de energia imposto, cuja força possa ser distribuída para os pontos eulerianos e assim atualizar a temperatura. A modelagem matemática foi apresentada na seção 3.5.2.

As linhas isotérmicas e linhas de correntes são mostradas na Fig. 4.53, para dois números de Rayleigh, $Ra = 5700$ e $Ra = 1 \times 10^5$. Observa-se nas Figs. 4.53 (a) e (c) que, para $Ra = 5700$, a temperatura na pluma é maior quando comparado com $Ra = 1 \times 10^5$. Porém, pelas isotérmicas e linhas de correntes pode ser visto que, quando aumenta-se o número de Rayleigh aumenta-se o fluxo, com isso o processo convectivo aumenta, tornando a pluma mais fina na superfície superior do cilindro quando o fluxo é maior, conforme já mencionado.

O número de Nusselt local foi calculado ao longo da superfície do cilindro, utilizando a Eq. 4.46 apresentada por Padilla (2004):

$$Nu_{local} = \frac{hD}{k_f} = \frac{1}{T}, \quad (4.46)$$

onde, $T = \frac{(\bar{T}-T_\infty)k_f}{q''D}$, é a temperatura adimensionalizada em função do fluxo, calculada no pós-processamento após alcançar o regime permanente.

Além disso, pode-se calcular o número de Nusselt médio, a partir dos valores de Nusselt local, como apresentado nas Eqs. 4.26 e 4.27.

Os resultados para o número de Nusselt local no cilindro interno, são mostrados na Fig. 4.54, para três valores do número de Rayleigh. Observa-se boa concordância, para todos os casos testados, quando comparado com Padilla (2013), o qual trabalha com coordenadas cilíndricas e com o método de volumes finitos, como mencionado na seção 2.

Uma análise dos nós de colocação foi realizada e os resultados foram comparados com Padilla (2013) para $Ra = 5 \times 10^4$. Para isto, a título de comparação como pós-processamento, foi necessário transformar os pontos em coordenadas cartesianas, no presente trabalho, para

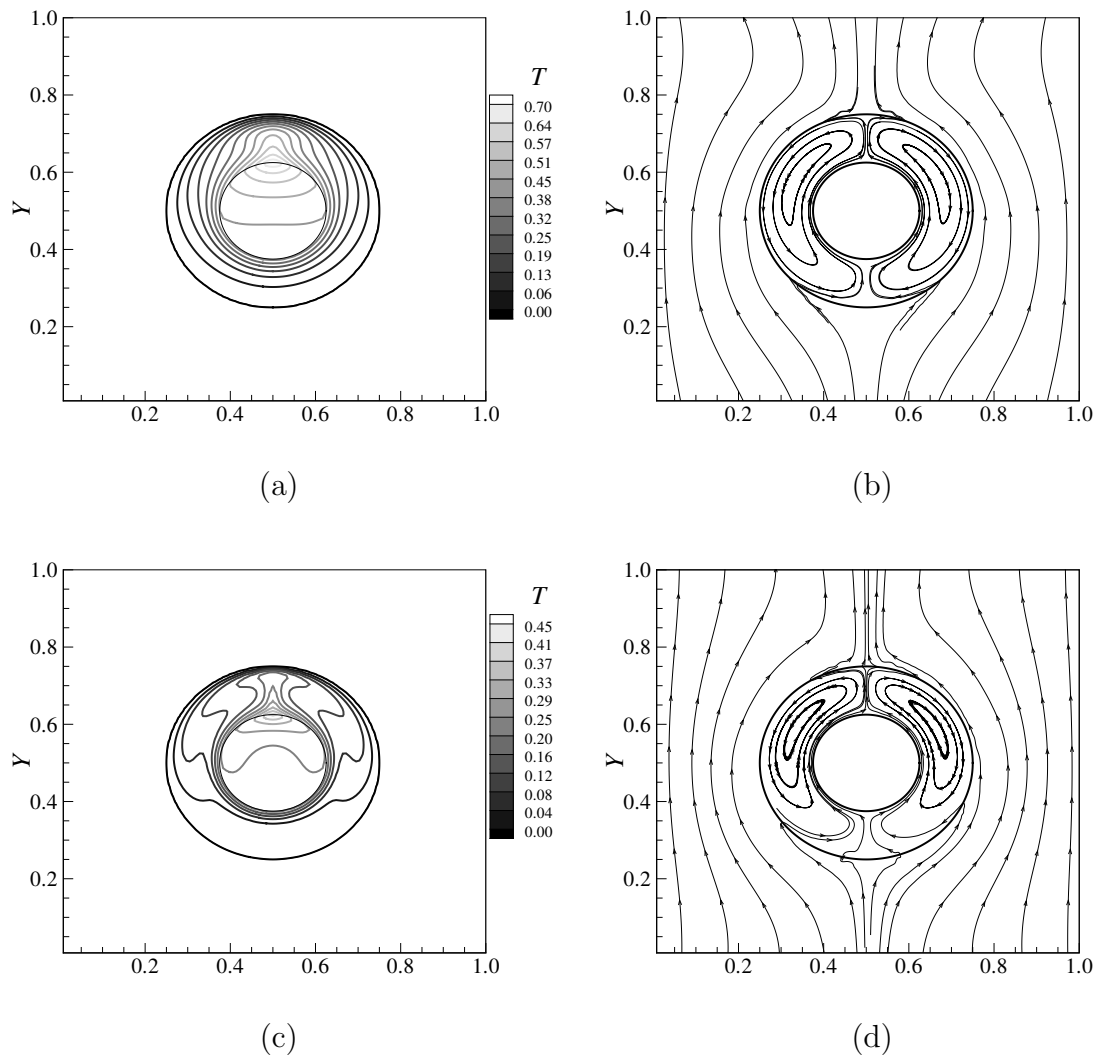


Figura 4.53: (a) Isotérmicas para $Ra = 5700$, (b) Linhas de corrente para $Ra = 5700$, (c) Isotérmicas para $Ra = 1 \times 10^5$ e (d) Linhas de corrente para $Ra = 1 \times 10^5$.

coordenadas cilíndricas. Desta forma, para uma malha cartesiana de $N_x \times N_y = 128 \times 128$ nós de colocação no domínio completo, transformando em coordenadas cilíndricas tem-se pontos nas direções, $r \times \theta = 16 \times 101$, onde para a direção θ foi considerada somente o cilindro interno, devido a comparação com Padilla (2013) em relação ao número de Nusselt local no cilindro interno. Do mesmo modo, para malha cartesiana de $N_x \times N_y = 256 \times 256$ no domínio completo utilizou-se $r \times \theta = 32 \times 202$ pontos em coordenadas cilíndricas. A Fig. 4.55 mostra que, na presente tese, o refinamento dos nós de colocação a partir de uma certa malha não modifica mais os resultados. Observa-se, ainda, que o refinamento dos nós de colocação no presente trabalho foram próximos da malha utilizada por Padilla (2013) e

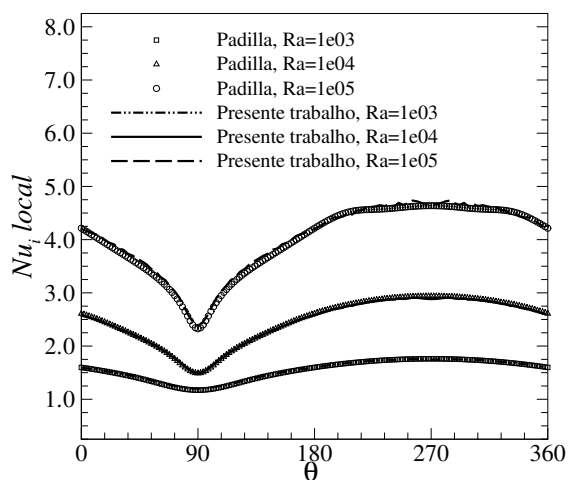


Figura 4.54: Comparação do número de Nusselt local na superfície do cilindro interno para três valores do número de Rayleigh.

os resultados mostram boa concordância a partir da malha de $N_x \times N_y = 128 \times 128$ nós de colocação, ou seja, $r \times \theta = 16 \times 101$.

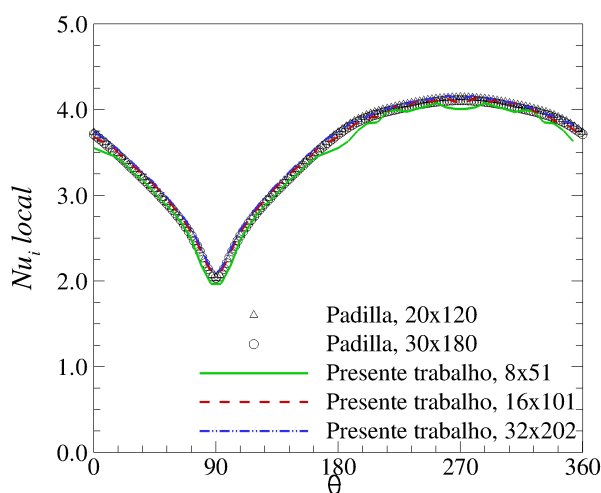


Figura 4.55: Comparação do número de Nusselt local interno para $Ra = 5 \times 10^4$ variando os nós de colocação.

A fim de validar com outros autores, o perfil de temperatura no cilindro interno é apresentado na Fig. 4.56, para $Ra = 5700$ e $Ra = 5 \times 10^4$. Observa-se boa concordância para ambos os casos testados.

Além disso, o perfil de temperatura entre os cilindros foi analisado para três ângulos:

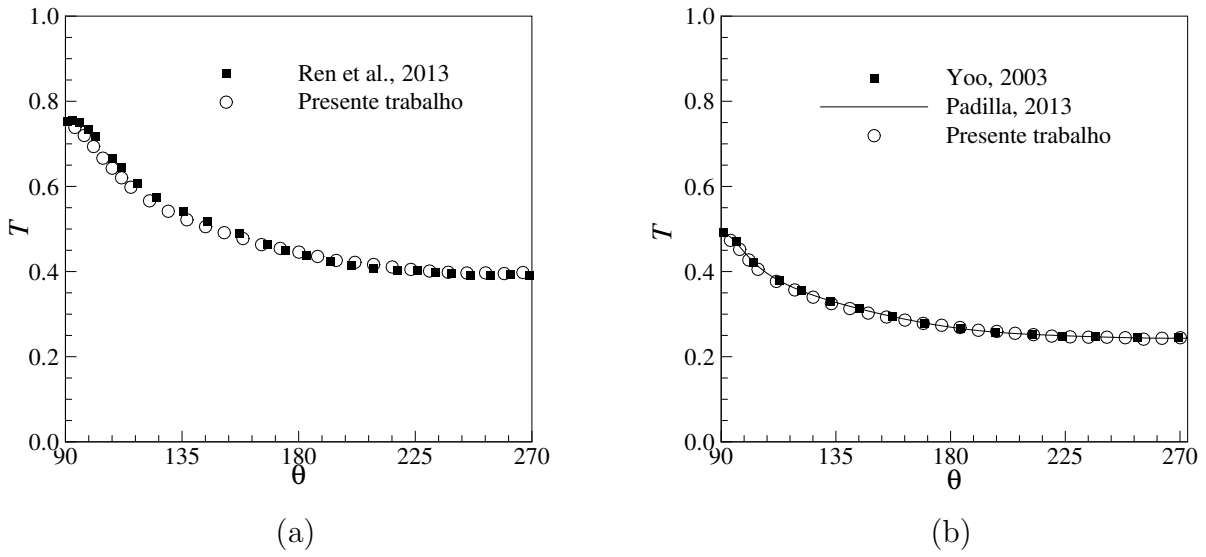


Figura 4.56: Comparação do perfil de temperatura no cilindro interno (a) $Ra = 5700$ e (b) $Ra = 5 \times 10^4$.

0° , 90° e 270° , como mostra a Fig. 4.57. Observa-se uma boa concordância com a literatura para todas as posições testadas entre os cilindros.

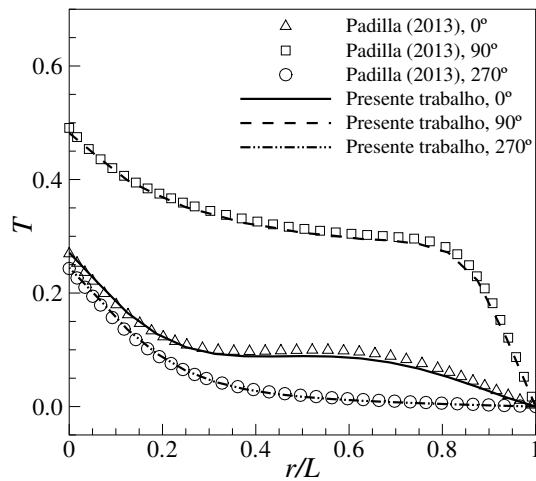


Figura 4.57: Comparação do perfil de temperatura em diversos ângulos entre os cilindros com $Ra = 5 \times 10^4$ e $N_x \times N_y = 128 \times 128$.

Por fim, o número de Nusselt médio na superfície do cilindro interno foi analisado para vários números de Rayleigh, como mostra a Fig. 4.58. Comparou-se quantitativamente a

presente metodologia com os resultados obtido por Padilla (2013), como apresentado na Tab. 4.10.

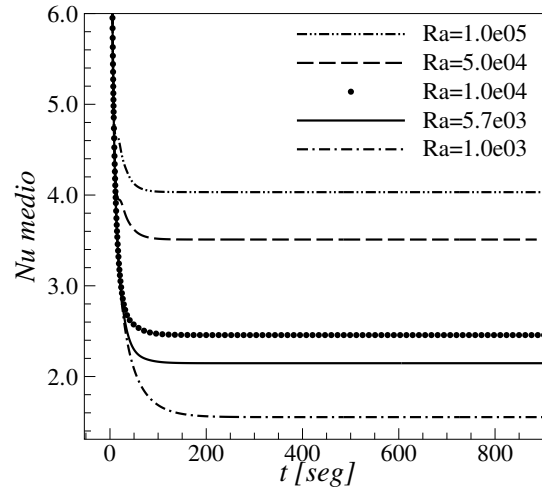


Figura 4.58: Número de Nusselt médio da parede interna em função do número de Rayleigh.

Os resultados da Tab. 4.10, mostram boa concordância do número de Nusselt médio com Padilla (2013) para todos os números de Rayleigh apresentados, com uma diferença em torno de 0,5%. Apenas para Rayleigh $1,0 \times 10^5$, a diferença foi de 1,2% quando comparado com Padilla (2013), devido ao processo de advecção que começa a aumentar a partir deste número de Rayleigh, o qual necessita de um refinamento maior dos nós de colocação, lembrando que para todos os casos apresentados foi utilizado $Nx \times Ny = 128 \times 128$ nós de colocação em todo o domínio.

Tabela 4.10: Comparação do número de Nusselt médio da parede interna em função do número de Rayleigh.

Ra	Presente Trabalho	Padilla (2013)	Diferença relativa
$1,0 \times 10^3$	1,55269	1,54498	$4,98 \times 10^{-3}$
$5,7 \times 10^3$	2,14677	2,16028	$6,25 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^4$	2,45677	2,46927	$5,06 \times 10^{-3}$
$5,0 \times 10^4$	3,50960	3,48923	$5,83 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^5$	4,03177	3,98372	$1,20 \times 10^{-2}$

Portanto, para todos os casos apresentados, a metodologia proposta utilizando o *Modelo 3* para a condição de contorno de Neumann forneceu resultados que apresentaram boa

concordância com a literatura. Vale notar que não houve a necessidade da utilização de ciclagens pois, para todos os casos apresentados, os resultados mostraram-se em boa concordância com apenas 1 ciclo.

Como conclusão, pode-se dizer que os resultados para a condição de contorno de primeira espécie (Dirichlet) e segunda espécie (Neumann) estão bem validados, já que os resultados obtidos mostraram que estão em boa concordância com a literatura.

Devido aos bons resultados obtidos com a validação de problemas para fronteira imersa não coincidentes e com a nova metodologia proposta para a condição de contorno de Neumann utilizando o *Modelo 3*, começou-se um estudo de uma nova proposta de modelagem para a condição de contorno de terceira espécie. A seguir será apresentada a validação da condição de contorno de terceira espécie ou condição de contorno de Robin.

4.5 Validação para a condição de contorno de Robin

A validação da condição de contorno de Robin foi aplicada em um problema de difusão no interior de um cilindro, a fim de avaliar a metodologia proposta em um problema com solução analítica, pois quase não encontra-se experimentos na literatura com a condição de contorno de terceira espécie.

O esquema do problema é apresentado na Fig. 4.59. O domínio a ser avaliado com a solução analítica será somente no interior do cilindro na direção radial e as condições de contorno são impostas em sua superfície, como ilustra a Fig. 4.59. Será considerado um cilindro sólido imerso em um meio fluido. A energia transferida no interior do cilindro por efeito Joule deve ser entregue para o fluido por convecção.

A modelagem matemática para a solução analítica será apresentada em regime permanente e os resultados implementados com a modelagem proposta para a condição de contorno de Robin será comparada somente quando entrar em regime permanente. Para isto, utilizou-se o seguinte modelo diferencial:

$$k_s \nabla^2 T + q''' = 0 \quad (4.47)$$

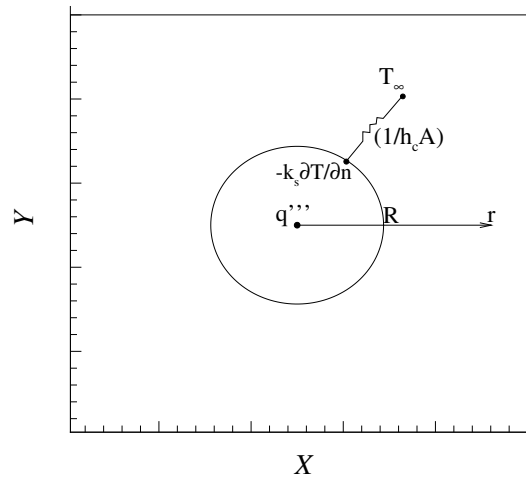


Figura 4.59: Esquema do problema para validação da condição de contorno de Robin.

onde, q''' é a transferência de energia por efeito Joule imposta no interior do sólido e k_s é a condutividade térmica do sólido. Logo,

$$\nabla^2 T = -\frac{q'''}{k_s} = -\lambda. \quad (4.48)$$

A equação diferencial simplificada, escrita em coordenadas cilíndricas é a Eq. 4.49:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\lambda. \quad (4.49)$$

E as condições de contorno são dadas pelas Eqs. 4.50 e 4.51:

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \quad (4.50)$$

e

$$k_s \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R} + h_c T \Big|_{r=R} = h_c T_\infty. \quad (4.51)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, integrando a Eq. 4.49 e assumindo que

a geração de energia é uniforme tem-se que:

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\lambda r^2}{2} + a. \quad (4.52)$$

Repetindo o mesmo procedimento, a solução geral para a distribuição de temperatura torna-se:

$$T(r) = -\frac{\lambda r^2}{4} + a \ln(r) + b. \quad (4.53)$$

Para obter as constantes de integração a e b , aplica-se as condições de contorno, dadas pelas Eqs. 4.50 e 4.51.

Aplicando a Eq. 4.50 em Eq. 4.52 tem-se $a = 0$ e a distribuição de temperatura fica:

$$T(r) = -\frac{\lambda r^2}{4} + b. \quad (4.54)$$

Da mesma maneira, aplica-se a condição de contorno dada pela Eq. 4.51 em Eq. 4.54 e obtém-se:

$$k_s \left[\frac{-2\lambda R}{4} \right] + h_c \left[-\frac{\lambda R^2}{4} + b \right] = h_c T_\infty. \quad (4.55)$$

Consequentemente:

$$b = T_\infty + \frac{\lambda R}{2} \left(\frac{k_s}{h_c} \right) + \frac{\lambda R^2}{4}. \quad (4.56)$$

Substituindo a Eq. 4.56 em Eq. 4.54, tem-se a temperatura analítica em coordenadas cilíndricas, a qual será utilizada para comparar os resultados com a metodologia proposta:

$$T(r) = T_\infty + \frac{\lambda R^2}{4} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + \frac{\lambda R}{2} \left(\frac{k_s}{h_c} \right). \quad (4.57)$$

Para a implementação da modelagem matemática com a condição de contorno de Robin, foi utilizada a equação da difusão:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q'''}{\rho C_p} + \frac{f_{T3}}{\rho C_p}, \quad (4.58)$$

onde f_{T3} é obtido pela distribuição da força imposta pela condição de contorno, $F_{T3} = T_\infty h_c - [T^* h_c + k_s \frac{\partial T^*}{\partial n}]$, apresentada com detalhes na seção 3.5.2. Além disso, q''' , como já mencionado, é a geração de energia, imposta no interior do cilindro $[W/m^3]$. Cabe ressaltar que com este modelo proposto para a condição de contorno de Robin é possível obter, simultaneamente, as condições de contorno de Dirichlet e Neumann.

Os parâmetros utilizados para a implementação da metodologia e validação com a solução analítica foram: $T_\infty = 300[K]$ e $h_c = 2,0[W/m^2K]$ que são, respectivamente, a temperatura ambiente e o coeficiente de transferência de energia térmica impostos. A condutividade térmica do sólido foi considerada como sendo $k_s = 1 [W/mK]$. A geração de energia, imposta no interior do cilindro, é dada por $q''' = 0,5[W/m^3]$. As propriedades da massa específica do fluido $[kg/m^3]$ e calor específico do fluido $[J/kgK]$ foram consideradas como sendo, respectivamente, $\rho = Cp = 1$.

A condição de contorno de Robin foi implementada na equação da difusão e o processo transiente é mostrado na Fig. 4.60. A respeito da geração de energia imposta no interior do cilindro e com a modelagem proposta para a condição de contorno na superfície do cilindro, o processo alcança o regime permanente, onde os resultados são analisados.

A fim de garantir o regime permanente, uma sonda foi introduzida no interior do cilindro e o comportamento da temperatura foi avaliada ao longo do tempo. Observa-se, pela Fig. 4.61, que o processo entra em regime permanente após 100 segundos físicos de simulação.

Com o regime permanente estabelecido, a comparação com a solução analítica foi realizada, fazendo uma análise de refinamento da malha. A título de comparação os resultados apresentados foram todos adimensionalizados.

A Fig. 4.62 (a) mostra a comparação da metodologia proposta com a condição de contorno de Robin e a solução analítica refinando os nós de colocação. Além disso, analisa-se a taxa de convergência da metodologia de acordo com a Fig. 4.62 (b), onde obtém-se

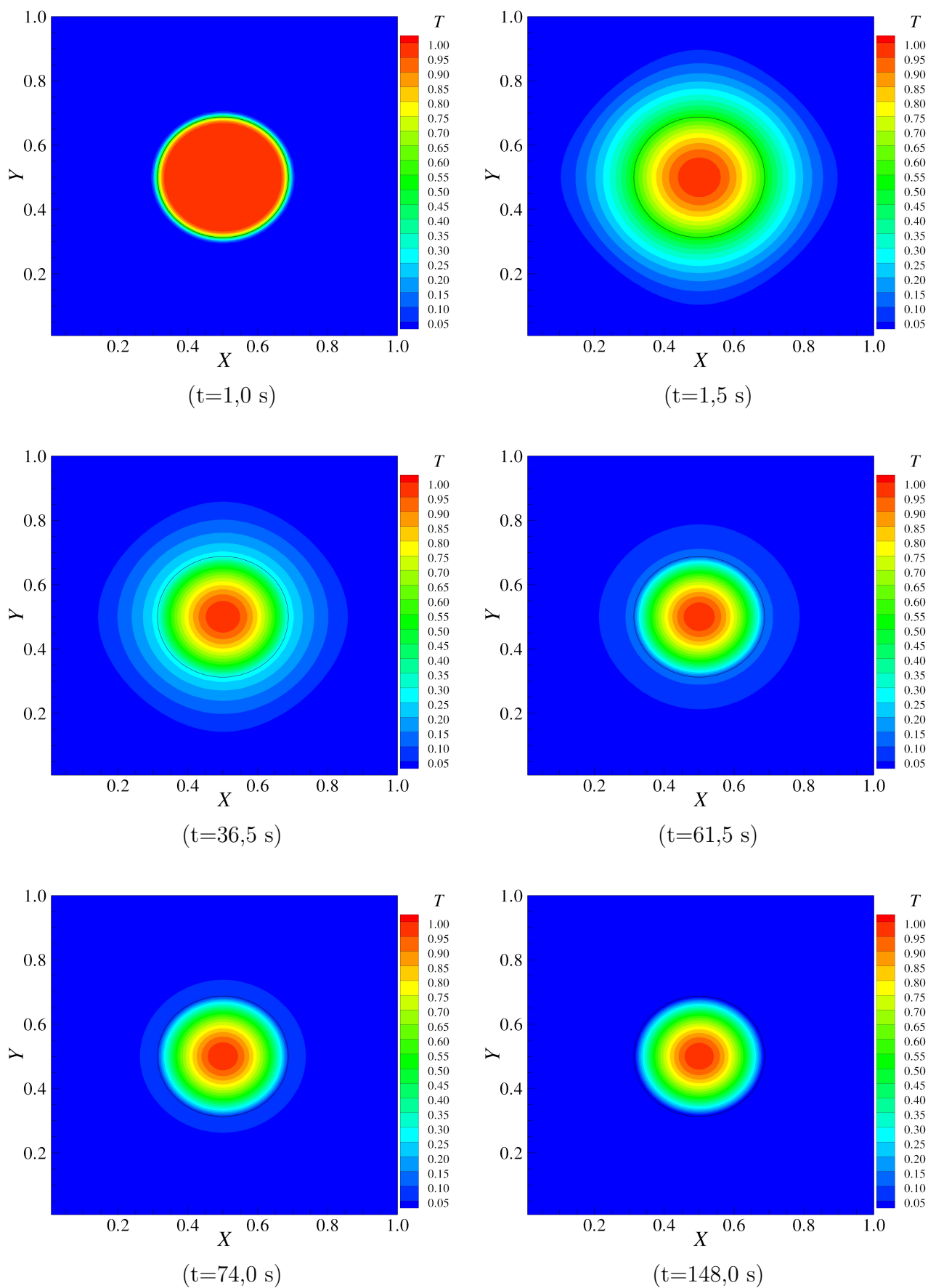


Figura 4.60: Comportamento transiente das isotérmicas com a condição de contorno de Robin.

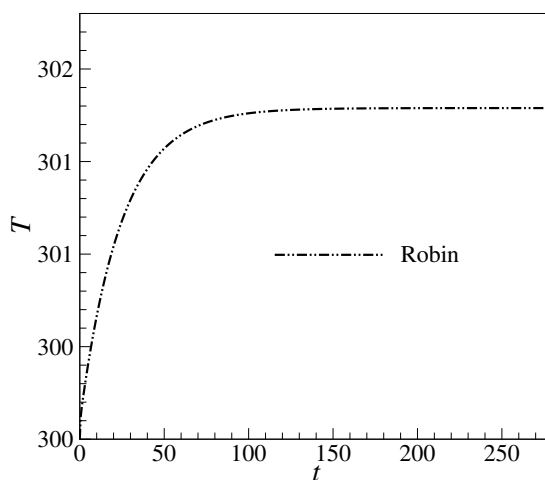


Figura 4.61: Análise transiente da temperatura com condição de contorno de Robin.

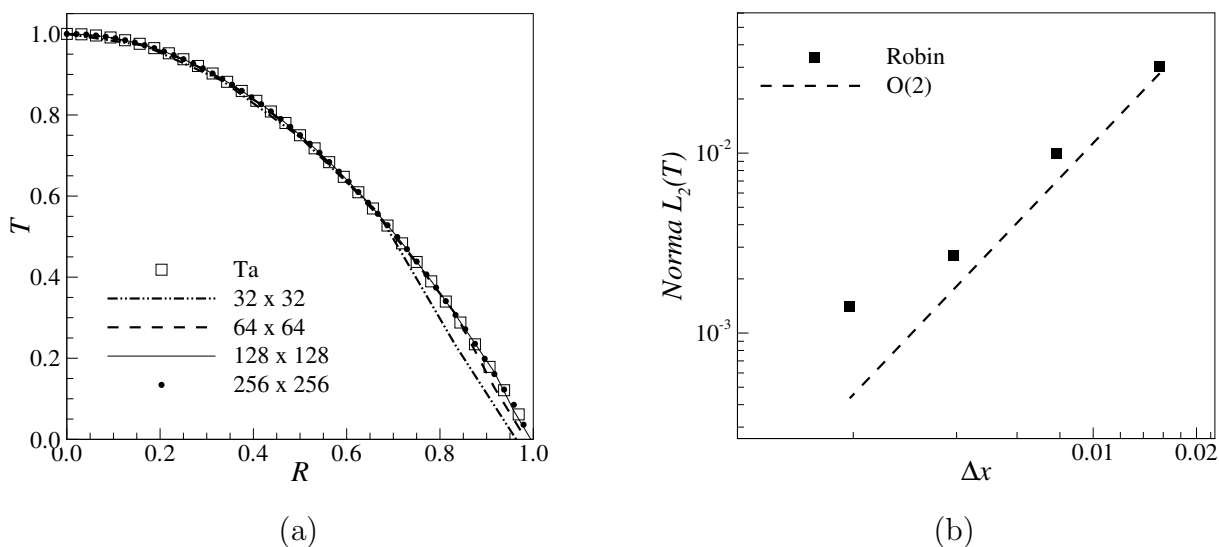


Figura 4.62: Comparação da temperatura com a solução analítica no interior cilindro utilizando a condição de contorno de Robin com (a) refinamento dos nós de colocação e (b) taxa de convergência.

aproximadamente ordem dois de decaimento do erro com o refinamento da malha. Pacheco-Vega, Pacheco e Rodić (2007) em seu trabalho apresenta aproximadamente segunda ordem de convergência para a condição de contorno de Robin, em um problema de difusão como o aqui apresentado.

Como apresentado na seção 3.5.2, com a modelagem proposta para a condição de

contorno de Robin, é possível alterar o modelo para as condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, conforme a necessidade.

Desta maneira, trabalhando com o mesmo problema de difusão e reescrevendo a solução analítica com as condições de contorno desejadas, efetuou-se a validação e implementação da metodologia modificando apenas as condições de contorno do problema, mantendo os outros parâmetros com os mesmos valores.

A Figura 4.63 apresenta o comportamento transiente para todas as condições de contorno. Observa-se que as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin alcançam o regime permanente com a modelagem proposta.

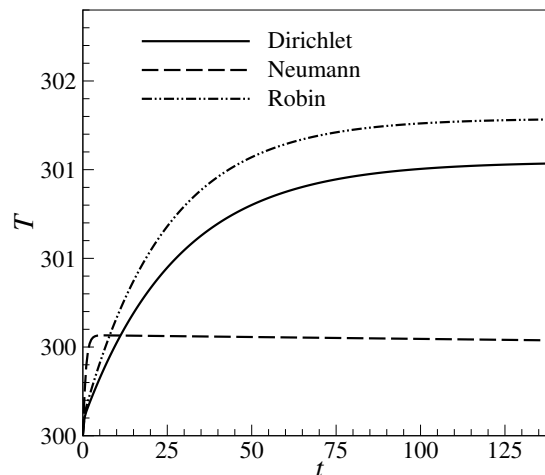
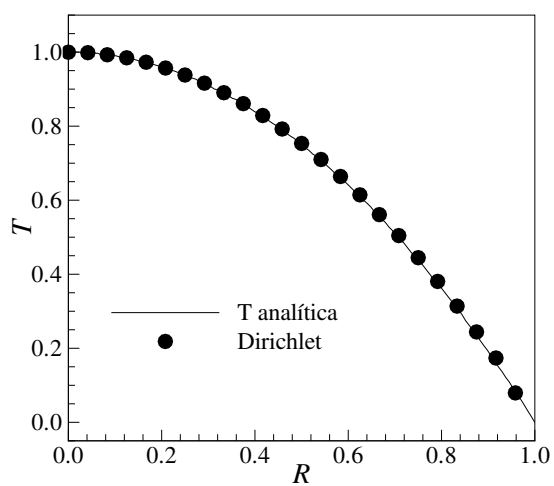


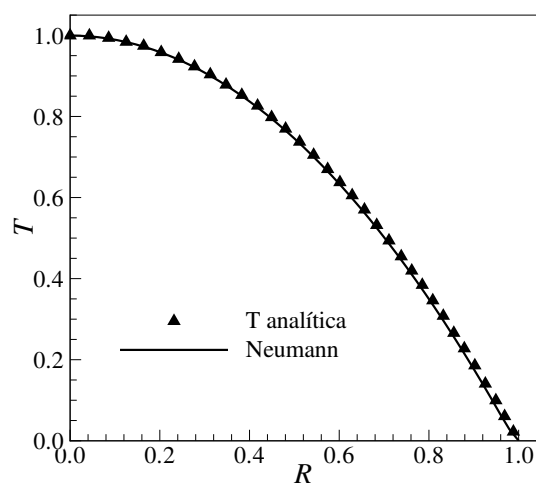
Figura 4.63: Análise transiente da temperatura com as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin.

Uma análise do perfil de temperatura com a solução analítica é apresentada na Fig. 4.64 para todas as condições de contorno. Observa-se que para todas as condições de contorno os resultados apresentam boa concordância com a solução analítica.

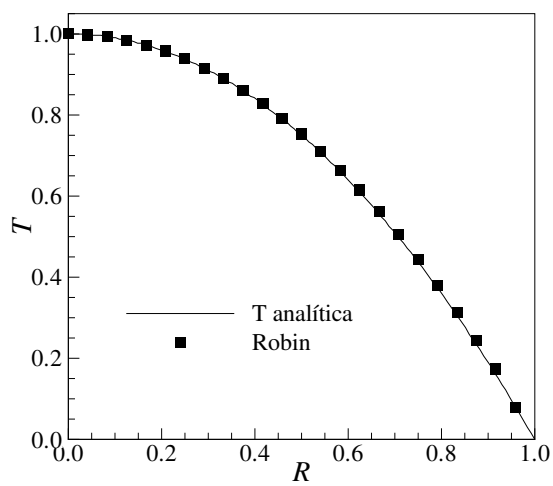
Portanto, pode-se concluir que todas as condições de contorno foram validadas com a metodologia proposta e os resultados apresentaram boa concordância com a literatura. A modelagem proposta para a condição de contorno de Robin mostrou boa concordância com a solução analítica. Assim como a metodologia proposta para a adaptatividade do modelo com as condições de contorno de Dirichlet e Neumann.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.64: Comparação da temperatura com a solução analítica no interior cilindro (a) Dirichlet, (b) Neumann e (c) Robin.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões

O presente trabalho teve por objetivo desenvolver uma metodologia para incorporar a equação da energia utilizando o IMERSPEC. Além disso, impor três tipos de condições de contorno térmicas. A modelagem matemática para os três tipos de condições de contorno foram apresentadas, incluindo três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann. A fim de verificar esta nova metodologia, a implementação numérica foi aplicada para as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin. A verificação da metodologia foi feita comparando os resultados com soluções manufaturadas e para todas as condições de contorno testadas. Os resultados apresentaram erro de arredondamento de máquina, como esperado, para pontos coincidentes. Para a verificação da metodologia com pontos não coincidentes, na solução sintetizada, os resultados apresentaram erro de ordem quatro, devido ao fato de ter interpolação e distribuição dessa ordem. Após a verificação da metodologia, passou-se para a fase de validação, com o objetivo de comparar os resultados da metodologia aplicada à solução de problemas físicos. O primeiro problema foi uma cavidade adiabática onde as condições de contorno e Dirichlet e os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann foram avaliados. Houve boa concordância quando comparado com os resultados da literatura. Em seguida, a fim de validar pontos não coincidentes, a metodologia foi aplicada para o problema de uma cavidade anular para a condição de contorno de

Dirichlet e Neumann com todos os modelos propostos. Os resultados apresentados para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann utilizando o *Modelo 3* mostraram boa concordância com a literatura. Por fim, para validar a metodologia proposta com a condição de contorno de Robin, foi proposto um problema de difusão com solução analítica conhecida, onde os resultados mostraram concordância com a solução analítica. Além disso, o custo computacional mostrou-se de acordo com o esperado apresentando ordem $N \log_2 N$. A taxa de convergência da metodologia aplicada a problemas físicos foi de aproximadamente dois.

5.2 Trabalhos futuros

Devido aos resultados obtidos no presente trabalho, muitos esforços ainda são necessários a fim de melhorar a metodologia proposta, como a taxa de convergência. Para isto, lista-se os seguintes itens:

- Melhorar a metodologia da fronteira imersa, utilizando funções de interpolação e distribuição de alta ordem;
- Trabalhar com malhas não uniformes;
- Utilizar a metodologia pseudoespectral em apenas uma das direções;
- Implementar as condições de contorno para o código tridimensional paralelo;
- Aplicar as condições de contornos em outros problemas além das cavidades retangular e cilíndrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLAMPALLI, V.; HIXON, R.; NALLASAMY, M.; SAWYER, S. D. High-accuracy large-step explicit Runge-Kutta (HALE-RK) schemes for computational aeroacoustics. *J. Comput. Phys.*, v. 228, n. 10, p. 3837–3850, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.02.015>.

BOTELLA, O.; PEYRET, R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids*, v. 27, n. 4, p. 421–433, 1998. ISSN 0045-7930. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793098000024>.

BOULOUMOU, O.; SERRE, E.; BONTOUX, P.; FRÖHLICH, J. A 3D pseudo-spectral low Mach-number solver for buoyancy driven flows with large temperature differences. *Computers & Fluids*, v. 66, p. 107–120, 2012. ISSN 0045-7930. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793012002150>.

BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2. ed. New York: Dover Publications, Inc., 2000. 594 p. ISBN 978-0486411835.

BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E. *The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. 450 p. ISBN 0-89871-342-0.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG Jr., T. A. *Spectral methods in fluid dynamics*. 1. ed. Berlin: Springer, 1987. 568 p. (Scientific Computation). ISBN 978-3-540-52205-8.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG JR., T. A. *Spectral methods: fundamentals in single domains*. New York: Springer, 2006. 563 p. (Scientific Computation). ISBN 978-3-540-30725-9.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG JR., T. A. *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. New York: Springer, 2007. 596 p. (Scientific Computation). ISBN 978-3-540-30727-3.

CASTREJON, A.; SPALDING, D. B. An experimental and theoretical study of transient free-convection flow between horizontal concentric cylinders. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 31, n. 2, p. 273–284, 1988. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931088900105>.

COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, American Mathematical Society, v. 19, n. 90, p. 297–301, 1965. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2003354>.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, p. 215–234, 1967.

ENRIQUES-REMIGIO, S.; SILVEIRA NETO, A. A new modeling of fluid-structure interaction problems through immersed boundary method/virtual physical model (IBM/VPM). *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, v. 19 Cd-Rom, 2007.

FAROUK, B. B.; GUCERI, S. I. Laminar and turbulent natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders. *Journal of Heat Transfer*, v. 104, n. 4, p. 631–636, 1982. Disponível em: <http://heattransfer.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1437801>.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational methods for fluid dynamics*. 2. ed. Berlin: Springer, 1996. 356 p. ISBN 3-540-59434-5.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational methods for fluid dynamics*. 3. ed. Berlin: Springer, 2002. 426 p. ISBN 3-540-42074-6.

FUSEGI, T.; HYUN, J. M.; KUWAHARA, K. A numerical study of 3D natural convection in a cube: effects of the horizontal thermal boundary conditions. *Fluid Dynamics Research*, v. 8, n. 5–6, p. 221–230, 1991. ISSN 0169-5983. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016959839190044J>.

GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, v. 105, n. 2, p. 354–366, 1993. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999183710818>.

GOTTLIEB, D.; ORSZAG, S. A. *Numerical analysis of spectral methods*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977. 166 p. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, v. 26).

HASSANI, A. V.; HOLLANDS, K. G. T.; RAITHBY, G. D. A close upper bound for the conduction shape factor of a uniform thickness, 2D layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 36, n. 12, p. 3155–3158, 1993. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931093900447>.

HENSHAW, W. D. A fourth-order accurate method for the incompressible Navier-Stokes equations on overlapping grids. *Journal of Computational Physics*, v. 113, n. 1, p. 13–25, 1994. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999184711144>.

HU, Y.; LI, D.; SHU, S.; NIU, X. Study of multiple steady solutions for the 2d natural convection in a concentric horizontal annulus with a constant heat flux wall using immersed boundary-lattice boltzmann method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 81, p. 591–6015, 2015. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931014009351>.

JEONG, H. K.; YOON, H. S.; HA, M. Y.; TSUTAHARA, M. An immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method using an equilibrium internal energy density approach for the simulation of flows with heat transfer. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 7, p. 2526–2543, 2010. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910900672X>.

KIM, J.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulation of heat transfer in complex geometries. *Journal of Mechanical Science and Technology*, The Korean Society of Mechanical Engineers, v. 18, p. 1026–1035, 2004. ISSN 1738-494X. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/q366737809274176>.

KIMURA, S.; BEJAN, A. The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side. *Journal of Heat Transfer*, v. 106, n. 1, p. 98–103, 1984. Disponível em: <http://heattransfer.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1438240>.

KIRBY, R. M.; KARNIADAKIS, G. E. De-aliasing on non-uniform grids: algorithms and applications. *Journal of Computational Physics*, v. 191, n. 1, p. 249–264, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999103003140>.

KOLOMENSKIY, D.; MOFFATT, H. Two- and three-dimensional numerical simulations of the clap-fling-sweep of hovering insects. *Journal of Fluids and Structures*, v. 27, p. 784–791, 2011.

KUEHN, T. H.; GOLDSTEIN, R. J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 74, p. 695–719, 4 1976. ISSN 1469-7645. Disponível em: http://journals.cambridge.org/article_S0022112076002012.

KUEHN, T. H.; GOLDSTEIN, R. J. An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli. *Journal of Heat Transfer*, v. 100, n. 4, p. 635–640, 1978. Disponível em: <http://heattransfer.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1436902>.

KUMAR, R. Study of natural convection in horizontal annuli. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 31, n. 6, p. 1137–1148, 1988. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931088900567>.

LEONG, W. H.; HOLLANDS, K. G. T.; BRUNGER, A. P. Experimental Nusselt numbers for a cubical-cavity benchmark problem in natural convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, n. 11, p. 1979–1989, 1998. ISSN 0017-9310. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931098002993>.

LEONG, W. H.; HOLLANDS, K. G. T.; BRUNGER, A. P. On a physically-realizable benchmark problem in internal natural convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 41, n. 23, p. 3817–3828, 1998. ISSN 0017-9310. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931098000957>.

LIMA E SILVA, A. L. F.; SILVEIRA NETO, A.; DAMASCENO, J. J. R. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, n. 2, p. 351–370, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999103002146>.

MARIANO, F. P. *Simulação de escoamentos não-periódicos utilizando as metodologias pseudo-espectral de Fourier e da fronteira imersa acopladas*. 136 p. Tese (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2007.

MARIANO, F. P. *Solução numérica de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias fronteira imersa e pseudo-espectral de Fourier*. 151 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2011.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. de Q.; SILVEIRA NETO, A.; DA SILVA, C. F. N. B.; PEREIRA, J. C. F. A new incompressible Navier-Stokes solver combining Fourier pseudo-spectral and immersed boundary method. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 59, n. 2, p. 181–216, 2010. Disponível em: <http://www.techscience.com/doi/10.3970/cmes.2010.059.181.html>.

MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, n. 1, p. 239–261, 2005. Disponível em: <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>.

NAKASHI, K.; ITO, Y.; TOGASHI, F. Some challenges of realistic flow simulations by unstructured grid CFD. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 43, n. 6–7, p. 769–783, 2003. ISSN 1097-0363. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/flid.559>.

NÓS, R. L. *Simulações de escoamentos tridimensionais bifásicos empregando métodos adaptativos e modelos de campo de fase*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.

PACCOU, A.; CHIAVASSA, G.; LIANDRAT, J.; SCHNEIDER, K. A penalization method applied to the wave equation. *Comptes Rendus Mecanique*, v. 333, p. 79–85, 2005.

PACHECO, J. R.; PACHECO-VEGA, A.; RODIĆ, T.; PECK, R. E. Numerical simulations of heat transfer and fluid flow problems using an immersed-boundary finite-volume method on nonstaggered grids. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, v. 48, n. 1, p. 1–24, 2005. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10407790590935975>.

PACHECO-VEGA, A.; PACHECO, J. R.; RODIĆ, T. A general scheme for the boundary conditions in convective and diffusive heat transfer with immersed boundary methods. *Journal of Heat Transfer*, v. 129, n. 11, p. 1506–1516, 2007. Disponível em: <http://heattransfer.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1448938>.

PADILLA, E. L. M. *Simulação de grandes escalas da transição à turbulência em sistemas rotativos com transferência de calor*. 179 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2004.

PADILLA, E. L. M. Uberlândia: [s.n.], 2013. Não publicado.

PADILLA, E. L. M.; CAMPREGHER, R.; SILVEIRA NETO, A. Numerical analysis of the natural convection in horizontal annuli at low and moderate Ra. *Engenharia Térmica (Thermal Engineering)*, v. 5, n. 2, p. 58–65, 2006. Disponível em: http://demec.ufpr.br/reterm/ed_ant/10/artigo/science02.pdf.

PAN, D. An immersed boundary method on unstructured Cartesian meshes for incompressible flows with heat transfer. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, v. 49, n. 3, p. 277–297, 2006. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10407790500290709>.

PASQUETTI, R.; BWEMBA, R.; COUSIN, L. A pseudo-penalization method for high Reynolds number unsteady flows. *Applied Numerical Mathematics*, v. 58, p. 946–954, 2008.

PATTERSON, J.; IMBERGER, J. Unsteady natural convection in a rectangular cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 100, p. 65–86, 9 1980. ISSN 1469-7645. Disponível em: http://journals.cambridge.org/article_S0022112080001012.

PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999172900654>.

PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, v. 25, n. 3, p. 220–252, 1977. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999177901000>.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in C*. USA: Cambridge university Press, 1997. 994 p.

LE QUÉRÉ, P. Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number. *Computers & Fluids*, v. 20, n. 1, p. 29–41, 1991. ISSN 0045-7930. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004579309190025D>.

REN, W.; SHU, C.; YANG, W. An efficient immersed boundary method for thermal flow problems with heat flux boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 64, n. 0, p. 694–705, 2013. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931013004109>.

ROMA, A. M. *A multi-level self adaptive version of the immersed boundary method*. 101 p. Tese (Doutorado) — New York University, 1996.

RUBEL, A.; LANDIS, F. Numerical study of natural convection in a vertical rectangular enclosure. *Physics of Fluids*, AIP, v. 12, n. 12, p. II-208–II-213, 1969. Disponível em: <http://link.aip.org/link/?PFL/12/II-208/1>.

SCHENEIDER, K.; FARGE, M. Numerical simulation of the transient flow behaviour in tube bundles using a volume penalization method. *Journal of Fluids and Structures*, v. 20, p. 555–566, 2005.

SILVEIRA NETO, A. *Turbulência nos fluidos aplicada*. Uberlândia, MG: [s.n.], 2002. Apostila da disciplina de mecânica dos fluidos do curso de pós-graduação da Universidade Federal de Uberlândia.

DE SOUZA, A. M. *Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares livres*. 180 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2005.

TAKAHASHI, D. A hybrid MPI/OpenMP implementation of a parallel 3-D FFT on SMP clusters. In: WYRZYKOWSKI, R.; DONGARRA, J.; MEYER, N.; WASNIEWSKI, J. (Ed.). *Parallel Processing and Applied Mathematics*. Springer Berlin / Heidelberg, 2006, (Lecture Notes in Computer Science, v. 3911). p. 970–977. ISBN 978-3-540-34141-3. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/11752578_117.

TAYLOR, G. I.; GREEN, A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, v. 158, n. 895, p. 499–521, 1937. Disponível em: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/158/895/499.short>.

TIAN, Y. S.; KARAYIANNIS, T. G. Low turbulence natural convection in an air filled square cavity: Part I: the thermal and fluid flow fields. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, n. 6, p. 849–866, 2000. ISSN 0017-9310. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931099001994>.

TORNBERG, A.-K.; ENGQUIST, B. Numerical approximations of singular source terms in differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 200, n. 2, p. 462–488, 2004. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999104001767>.

TREFETHEN, L. N. *Spectral methods in MATLAB*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 184 p. (Software, Environments and Tools). ISBN 978-0-89871-465-4.

VAN DE SANDE, E.; HAMER, B. J. G. Steady and transient natural convection in enclosures between horizontal circular cylinders (constant heat flux). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 22, n. 3, p. 361–370, 1979. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931079900024>.

VILLAR, M. M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. 277 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

WAN, D. C.; PATNAIK, B. S. V.; WEI, G. W. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution. *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, v. 40, n. 3, p. 199–228, 2001. Disponível em: <http://www.ingentaconnect.com/content/tandf/unhb/2001/00000040/00000003/art00001>.

WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K.; CEN, K. Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, n. 19–20, p. 4510–4518, 2009. ISSN 0017-9310. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931009002403>.

WIRASAET, D.; PAOLUCCI, S. Numerical simulations of two- and three-dimensional natural-convection flow in a differentially heated cavity using an adaptive wavelet method. In: STOFFELS, G. G. M.; MEER, V. H. van der; STEENHOVEN, A. A. van (Ed.). *Proceedings...* Enschede, NL: Universiteit Twente, 2008.

YOO, J.-S. Dual free-convective flows in a horizontal annulus with a constant heat flux wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, n. 13, p. 2499–2503, 2003. ISSN 0017-9310. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931002005392>.

YOUNG, D. L.; JAN, Y. J.; CHIU, C. L. A novel immersed boundary procedure for flow and heat simulations with moving boundary. *Computers & Fluids*, v. 38, n. 6, p. 1145–1159, 2009. ISSN 0045-7930. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793008002247>.

ZHANG, N.; ZHENG, Z. C.; ECKELS, S. Study of heat-transfer on the surface of a circular cylinder in flow using an immersed-boundary method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 29, n. 6, p. 1558–1566, 2008. ISSN 0142-727X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X08001318>.

APÊNDICE

• Taxa de Convergência

O termo “Taxa de Convergência ”da metodologia é muito utilizado no decorrer do presente trabalho. Segundo Ferziger e Perić (2002), a taxa de convergência informa qual é a ordem de convergência com que a solução numérica se aproxima da solução exata, em função do espaçamento da malha, ou seja, o quanto a diferença entre a solução exata e a solução numérica diminui com o aumento do número de nós de colocação. A taxa de convergência da metodologia, q , pode ser definida de acordo com a Eq. 5.1 (VILLAR, 2007), Eq. 5.2 (FERZIGER; PERIĆ, 2002) ou Eqs. 5.3 e 5.4 (ROMA, 1996):

$$q = \frac{\log\left(\frac{\|\phi_{2h} - \phi_e\|}{\|\phi_h - \phi_e\|}\right)}{\log(2)} \quad (5.1)$$

$$q = \frac{\log\left(\frac{\|\phi_{4h} - \phi_{2h}\|}{\|\phi_{2h} - \phi_h\|}\right)}{\log(2)} \quad (5.2)$$

$$\frac{\|\phi_{16h} - \phi_h\|}{\|\phi_{8h} - \phi_h\|} \approx \left(\frac{2^{4q} - 1}{2^{3q} - 1}\right) \quad (5.3)$$

$$\frac{\|\phi_{8h} - \phi_h\|}{\|\phi_{4h} - \phi_h\|} \approx \left(\frac{2^{3q} - 1}{2^{2q} - 1}\right) \quad (5.4)$$

onde ϕ é a solução de interesse (pressão, componentes de velocidade, temperatura) com o nível de refinamento $h, 2h, \dots, 16h$, onde h é o espaçamento da malha, ϕ_e é a solução exata. O fator $\log(2)$ aparece, nas Eqs. 5.1 e 5.2 porque dobra-se o refinamento da malha. O operador $\|\|\|$ representa a norma L_2 , ou a norma máxima do erro entre alguma variável de interesse, como pressão, componentes de velocidade, temperatura. Segundo Kirby e Karniadakis (2003), são considerados métodos de alta ordem aqueles que apresentam $q > 2$.

A Eq. 5.3 mostra que o cálculo da taxa de convergência pode ser obtido com uma solução de referência. Do mesmo modo, a estimativa é feita similarmente para as outras malhas como mostra a Eq. 5.4, lembrando que a referência (h) é fixa, e maiores detalhes desta metodologia pode ser obtido em Roma (1996).