

Figura 4.33: Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para  $Ra = 10^5$  e  $\eta = 2, 0$ .

para os pontos lagrangianos que definem a geometria dos cilindros. Esse cálculo é feito apenas como pós-processamento após um certo tempo de simulação, quando foi considerado que o escoamento alcançou o regime permanente.

Além disso, o número de Nusselt médio também foi avaliado e é dado pelas Eqs. 4.26 e 4.27 para o cilindro interno e externo, respectivamente.

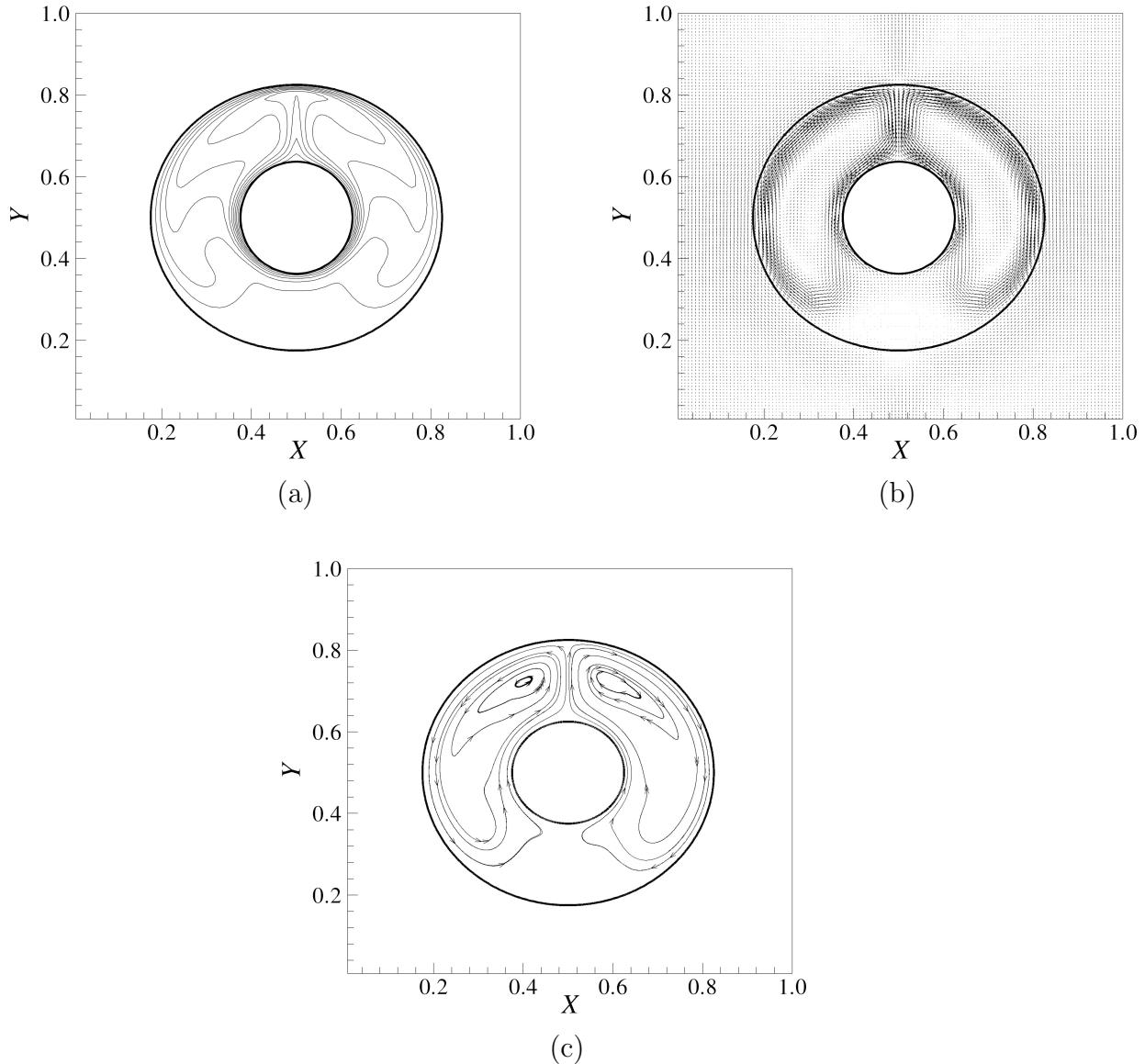


Figura 4.34: Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para  $Ra = 10^5$  e  $\eta = 2, 6$ .

$$Nu_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu_{ilocal} d\theta \quad (4.26)$$

e

$$Nu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu_{0local} d\theta, \quad (4.27)$$

onde a integral é resolvida calculando o somatório de todos os pontos obtidos pelo Nusselt local dividindo pelo número de pontos lagrangianos.

A Fig. 4.35, apresenta os resultados para o número de Nusselt local na parede do cilindro interno e externo para  $Ra = 10^5$  e relação de raio  $\eta = 2,6$ . Os resultados comparados com Padilla, Campregher e Silveira Neto (2006) mostraram-se com boa concordância.

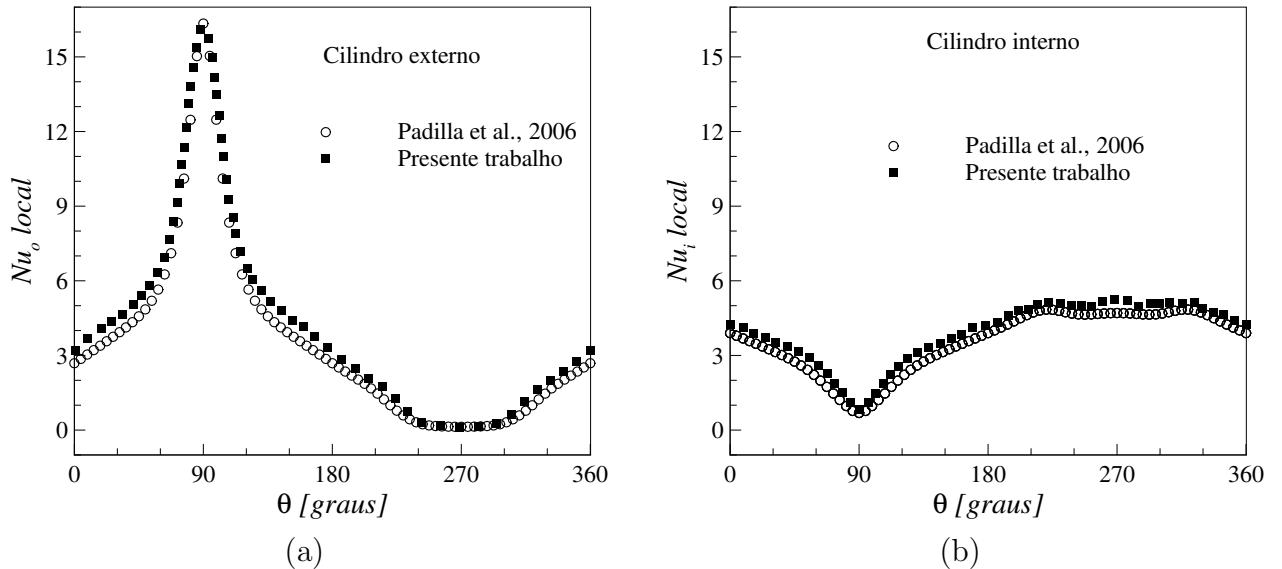


Figura 4.35: Distribuição do número de Nusselt local para  $Ra = 10^5$  e  $\eta = 2,6$  (a) cilindro externo e (b) cilindro interno.

A distribuição de temperatura radial em vários ângulos entre os cilindros foi apresentada. A Fig. 4.36, mostra a comparação dos perfis de temperatura com os dados experimentais de Kuehn e Goldstein (1976) e numéricos de Padilla, Campregher e Silveira Neto (2006). Quantitativamente, os resultados do presente trabalho aproximam-se de ambas literaturas de referência.

O número de Nusselt local interno e externo foi avaliado para  $Ra = 4,7 \times 10^4$  e  $\eta = 2,6$ , esta comparação pode ser vista na Fig. 4.37. Observava-se boa concordância tanto para o número de Nusselt interno quanto para o externo.

A Fig. 4.38 mostra a taxa de convergência nos cilindros concêntricos. A taxa de convergência foi calculada em todo o domínio, da mesma maneira que Wang *et al.* (2009), ou seja, a fronteira imersa e domínio periódico foram incluídos nos cálculos, onde no presente

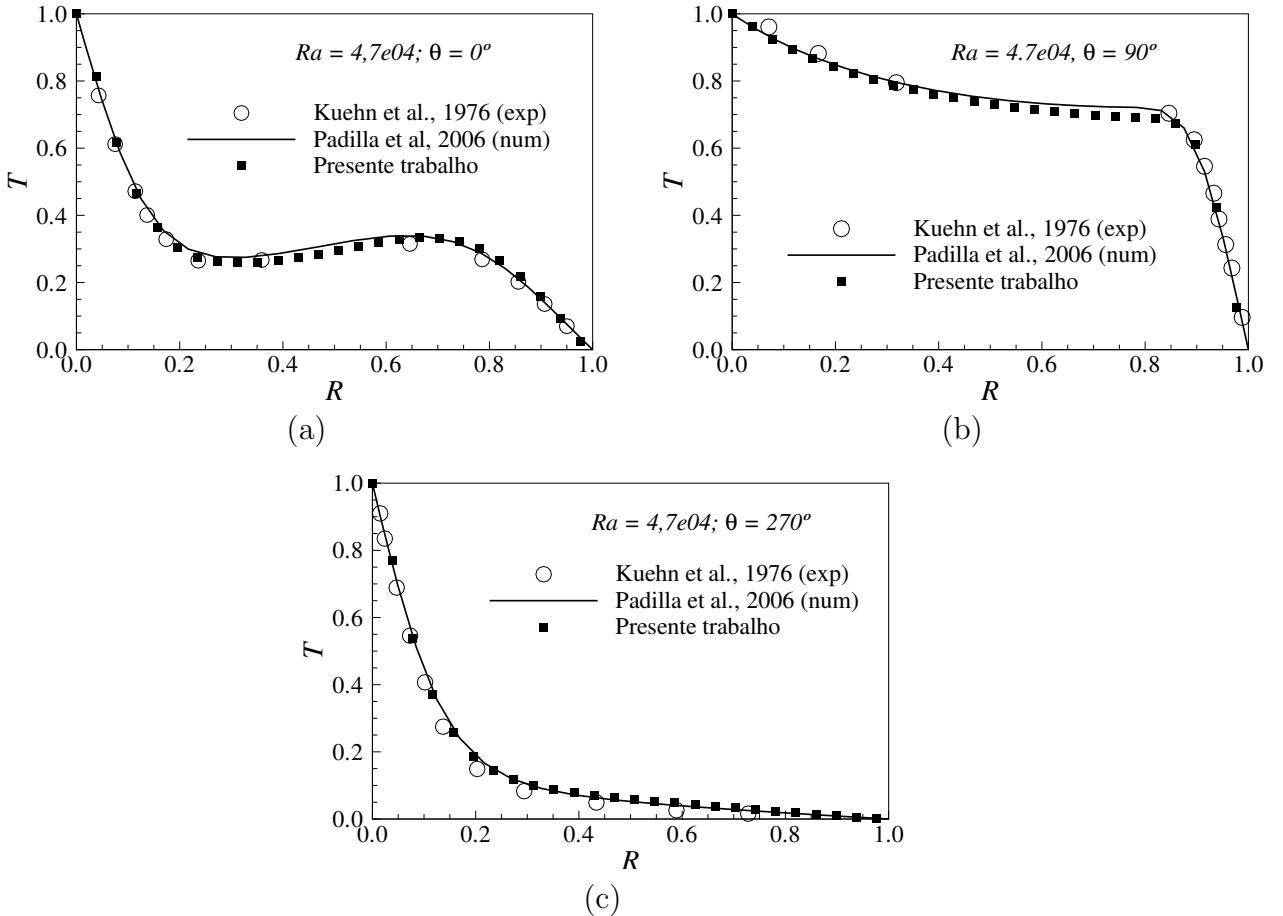


Figura 4.36: Comparação da distribuição radial de temperatura para três posições entre os cilindros com  $Ra = 4,7 \times 10^4$  e  $\eta = 2,6$ : (a)  $0^\circ$ , (b)  $90^\circ$  e (c)  $270^\circ$ .

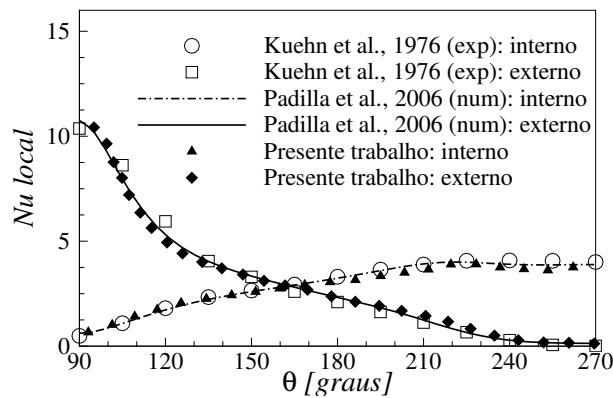


Figura 4.37: Comparação dos perfis de Nusselt local para  $Ra = 4,7 \times 10^4$  e  $\eta = 2,6$ .

trabalho as malhas utilizadas foram:  $\Delta x = \frac{L}{32}, \frac{L}{64}, \frac{L}{128}, \frac{L}{256}$  e  $\frac{L}{512}$ . Os resultados mostram que a norma  $L_2(T)$  decai com aproximadamente ordem um, a medida que se refina a malha, o que corresponde primeira ordem de convergência para o campo de temperatura. Wang *et al.*

(2009) obtiveram segunda ordem de convergência no campo de temperatura.

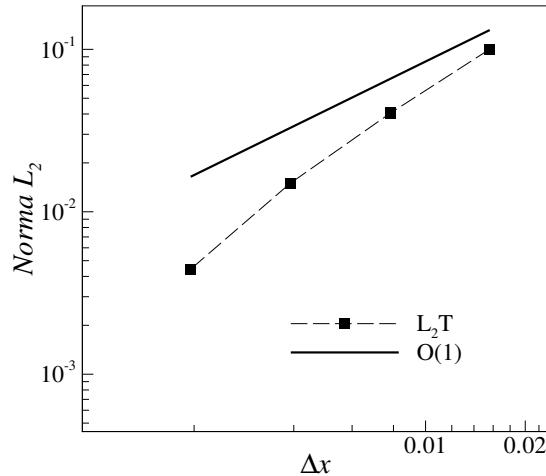


Figura 4.38: Convergência da norma  $L_2$  de temperatura com refinamento da malha.

O cálculo da taxa de convergência em todo o domínio acarreta certa desvantagem devido ao fato de obter informações da fronteira imersa e do domínio periódico. A fim de eliminar a influência da fronteira imersa, foi calculada a taxa de convergência somente no interior dos cilindros, longe das fronteiras.

A Fig. 4.39 mostra o domínio completo e o limite utilizado para calcular a taxa de convergência. Observa-se que o limite está longe das fronteiras entre os cilindros concêntricos a fim de evitar a influência do MFI.

A acurácia espacial foi investigada e a Fig. 4.40 mostra o erro obtido pela norma  $L_2$  com o refinamento da malha, para quatro diferentes malhas uniformes:  $\Delta x = \frac{L}{32}, \frac{L}{64}, \frac{L}{128}$  e  $\frac{L}{256}$ , respectivamente. Segunda ordem foi alcançada para pontos lagrangianos e eulerianos não coincidentes.

Além disso, analisou-se os resultados em cooperação com o trabalho de Padilla (2013), o qual gentilmente calculou a taxa de convergência pelo método de volumes finitos, a fim de comparar os resultados com o método pseudoespectral de Fourier. Os resultados são mostrados nas Fig. 4.41 e observa-se um comportamento parecido na taxa de decaimento utilizando ambas as metodologias.

Para finalizar, avaliou-se o tempo de processamento do MPEF como mostra a Fig. 4.42. Observa-se que o método mantém o tempo de processamento teórico, com o refinamento dos

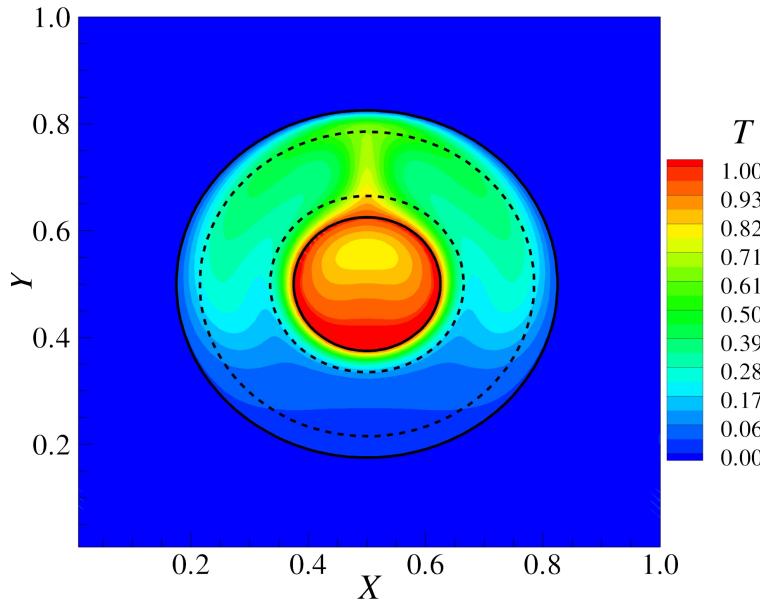


Figura 4.39: Domínio completo com os limites (---) para calcular a acurácia espacial.

nós de colocação, com a ordem de  $O(N \log_2 N)$ , onde  $N$  é o número de pontos na discretização da malha ( $N = N_x \times N_y$ ). A Fig. 4.42 mostra que, para este caso de validação, a metodologia mantém o tempo de processamento da transformada rápida de Fourier (FFT).

#### 4.4.2 Validação do Caso 2

A capacidade da metodologia proposta para a condição de contorno de Neumann é agora testada para o problema com fluxo de energia constante imposto no cilindro interno. Este caso se difere do caso 1 devido ao fato que naquele problema foi utilizada condição de contorno de Dirichlet no cilindro interno.

O comportamento do escoamento para este problema é caracterizado pelo fluxo na direção normal, o qual foi mantido uniforme, obtido a partir do número de Rayleigh com fluxo de energia térmica,  $Ra = \frac{q_n'' g \beta L^4}{\alpha \nu k_f}$ . A condição de contorno para o cilindro externo foi de Dirichlet, mantido com temperatura constante  $T_c = T_r$ . Neste caso, a temperatura adimensionalizada é dada pela Eq. 4.28 para todos os modelos:

$$T = \frac{\bar{T} - T_c}{q_n'' L / k_f}, \quad (4.28)$$

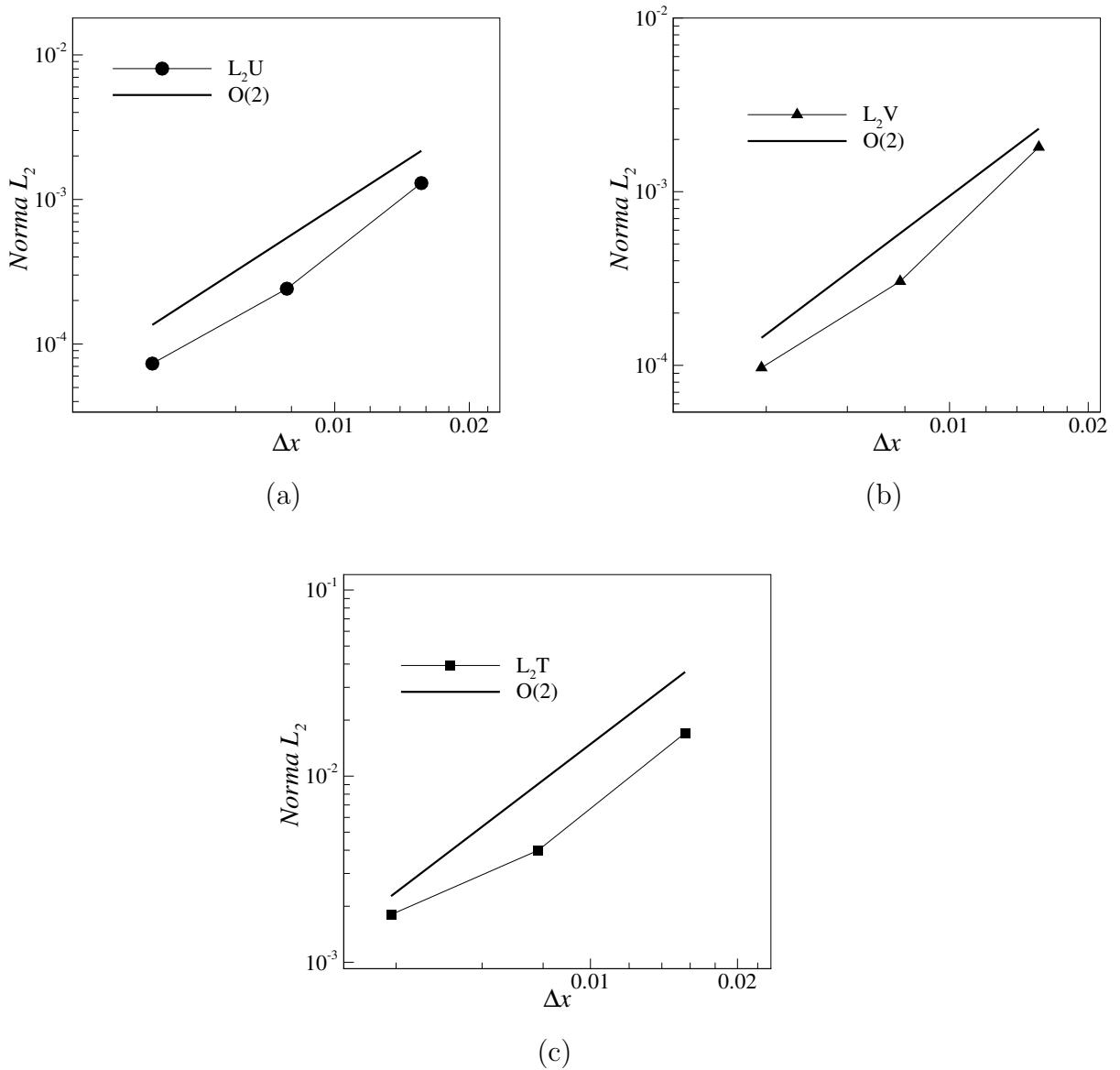


Figura 4.40: Taxa de convergência pela norma  $L_2$  com refinamento da malha (a) Velocidade  $U$ , (b) Velocidade  $V$  and (c) Temperatura  $T$ .

onde  $\bar{T}$  é a temperatura dimensional.

Além disso, para este caso 2, foram utilizadas as mesmas propriedades físicas do caso 1, porém, os números de Rayleigh testados foram:  $Ra = 1,0 \times 10^3; 5,7 \times 10^3; 1,0 \times 10^4; 5,0 \times 10^4$  e  $1,0 \times 10^5$ . Os resultados numéricos das linhas de corrente, isotérmicas e distribuição de temperatura local foram comparados com os trabalhos de Yoo (2003), Ren, Shu e Yang (2013) e Padilla (2013), que utilizaram  $Pr = 0,7$  e relação de raios  $R_0 = 2R_i$ .

Os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann no cilindro interno

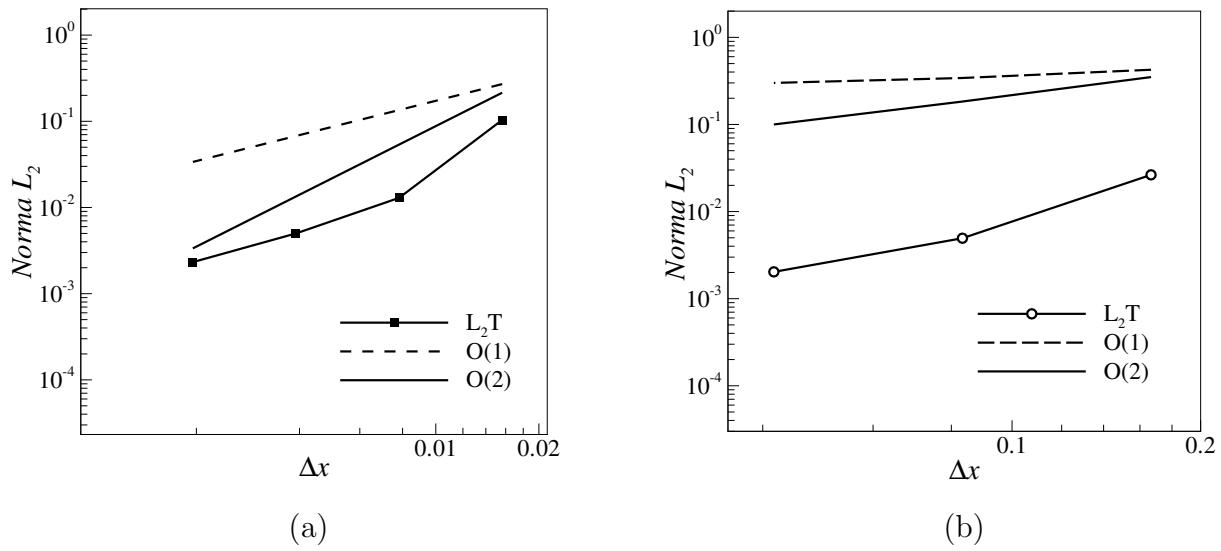


Figura 4.41: Comparação da taxa de convergência com a norma  $L_2$  de temperatura e o refinamento da malha com (a) presente trabalho e (b) método de volumes finitos, Padilla (2013).

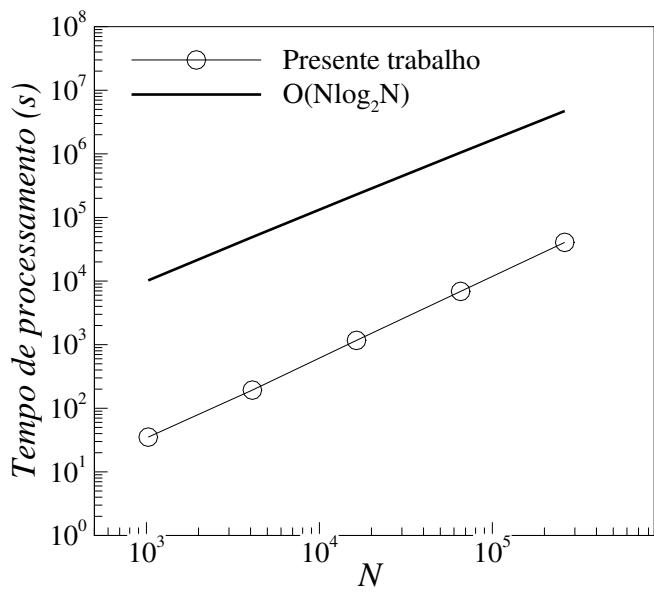


Figura 4.42: Análise do tempo de processamento com o refinamento dos nós de colocação.

também foram analisados: *Modelo 1*, *Modelo 2* e *Modelo 3*. Os resultados serão apresentados separadamente para cada modelo devido às suas particularidades obtidas para a validação deste problema e aos processos de interpolação e distribuição necessários para este caso.

#### 4.4.2.1 Modelo 1

Para este problema, a condição de contorno de Neumann utilizando o *Modelo 1* foi imposta no cilindro interno, a qual requer a imposição do fluxo de energia térmica ou do gradiente de temperatura. Desta maneira, a fim de validar esta metodologia com a literatura, foi utilizado fluxo de energia térmica constante na direção normal ( $q_n''$ ).

Porém, para o *Modelo 1* proposto, a modelagem matemática necessita das suas componentes nas direções  $x$  e  $y$ . Assim, obtém-se a projeção de  $q_n''$  com as direções:  $q_x''$  e  $q_y''$ , em todo o domínio lagrangiano do cilindro interno, como ilustra a Fig. 4.43. Além disso, utiliza-se a direção tangente para completar o modelo, como apresentado na seção 3.5.2.

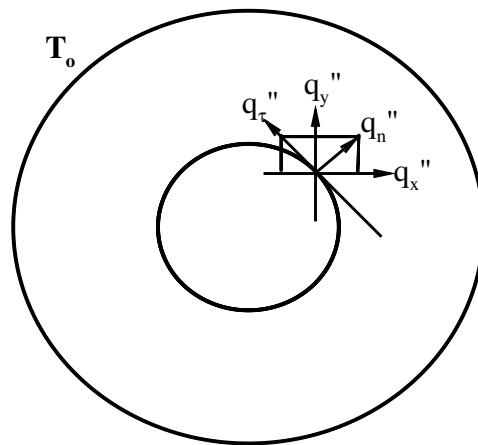


Figura 4.43: Esquema da projeção do fluxo normal ( $q_n''$ ) e fluxo tangente ( $q_\tau''$ ) nas direções horizontal e vertical.

Sabe-se que para este modelo, têm-se:

$$\vec{\nabla}T(\vec{X}, t + \Delta t) = -\frac{q''(X, t + \vec{\Delta}t)}{k_f}. \quad (4.29)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} F_T(\vec{X}, t) &= \frac{\rho C p}{\Delta t} \left[ \vec{\nabla} T(\vec{X}, t + \Delta t) - \vec{\nabla} T^*(\vec{X}, t + \Delta t) \right] = \\
&= -\frac{\rho C p}{\Delta t} \left[ \left( \frac{q_x''(\vec{X}, t + \Delta t)}{k_f}, \frac{q_y''(\vec{X}, t + \Delta t)}{k_f} \right) + \left( \frac{\partial T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\partial x}, \frac{\partial T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\partial y} \right) \right], 
\end{aligned} \tag{4.30}$$

onde os fluxos projetados nas direções  $x$  e  $y$  são obtidos pelas Eqs. 3.33 e 3.34, apresentados na seção 3.5.2, assim como o fluxo na direção tangente, dada pela Eq. 3.35.

Cabe ressaltar que, para o cálculo do fluxo na direção tangente,  $q_\tau''(\vec{X}, t)$ , foi necessário o uso da temperatura explícita, advinda do passo temporal precedente. Além disso, para o cálculo do  $\vec{\nabla} T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$  foi utilizada a temperatura estimada, vinda do termo  $RHS_T$ , apresentado na modelagem matemática.

A Fig. 4.44 mostra o domínio completo da distribuição de temperatura com convecção natural entre cilindros concêntricos, utilizando  $Ra = 5,0 \times 10^4$ . É possível observar os cilindros concêntricos inseridos no domínio periódico retangular, como no caso 1. Além disso, pode-se notar que há escoamento no interior do cilindro interno, devido ao fato de se utilizar o método da fronteira imersa. Porém, o resultado do escoamento no interior do cilindro interno não tem efeito físico, assim como no lado de fora ao cilindro externo. Vale notar que as linhas isotérmicas próximas ao cilindro interno não se mantêm concêntricas ao cilindro interno como no caso 1, devido ao fato da condição de contorno ser de fluxo de energia.

As isotérmicas, os campos velocidades e as linhas de corrente são apresentadas nas Figs. 4.45, 4.46 e 4.47 para diferentes números de Rayleigh. Qualitativamente, os resultados apresentam-se similares ao trabalho de Ren, Shu e Yang (2013) e observa-se um comportamento parecido quando aumenta-se o número de Rayleigh. Além disso, vale notar que para baixo número de Rayleigh ( $Ra = 10^3$ ) os efeitos da condução são predominantes sobre a advecção.

Segundo Ren, Shu e Yang (2013), a medida que se aumenta o número de Rayleigh ( $Ra = 5,7 \times 10^3$  e  $5,0 \times 10^4$ ) o empuxo passa a ter maior influência sobre o peso das partículas e a camada limite térmica no fundo da superfície do cilindro interno torna-se mais

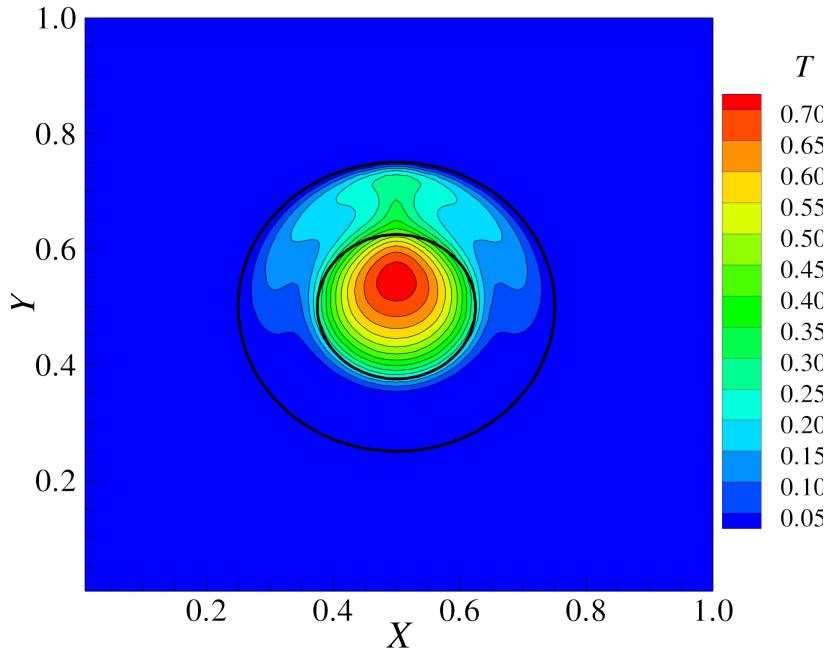


Figura 4.44: Domínio completo da distribuição de temperatura para o Caso 2 com  $Ra = 5 \times 10^4$ .

fina do que no topo desta superfície, ver esquema Fig. 4.48. Consequentemente, uma forte convecção induz a formação de uma pluma na parte superior do cilindro interno. Além disso, observa-se que com o aumento do número de Rayleigh, a pluma torna-se maior e impulsiona o escoamento para o topo do cilindro externo, acarretando à uma camada limite térmica mais fina e um gradiente isotérmico maior em torno da superfície do cilindro interno e no topo da parede do cilindro externo. Como consequência, a transferência de energia nestas regiões, aumenta como no caso 1.

Uma análise da distribuição de temperatura local, na superfície do cilindro interno, é apresentada na Fig. 4.49 para  $Ra = 5,0 \times 10^4$ . Os resultados foram comparados com o trabalho de Yoo (2003), variando os nós de colocação. Vale notar que, com o refinamento da malha, o perfil de temperatura se aproxima mais dos resultados da literatura na região inferior do cilindro, enquanto que na parte superior (onde acontece a formação da pluma) a temperatura tende a distanciar da referência. Além disso, a temperatura varia em torno do cilindro interno, como esperado para condição de fluxo imposto, ou seja, a parede do cilindro interno não é isotérmica.

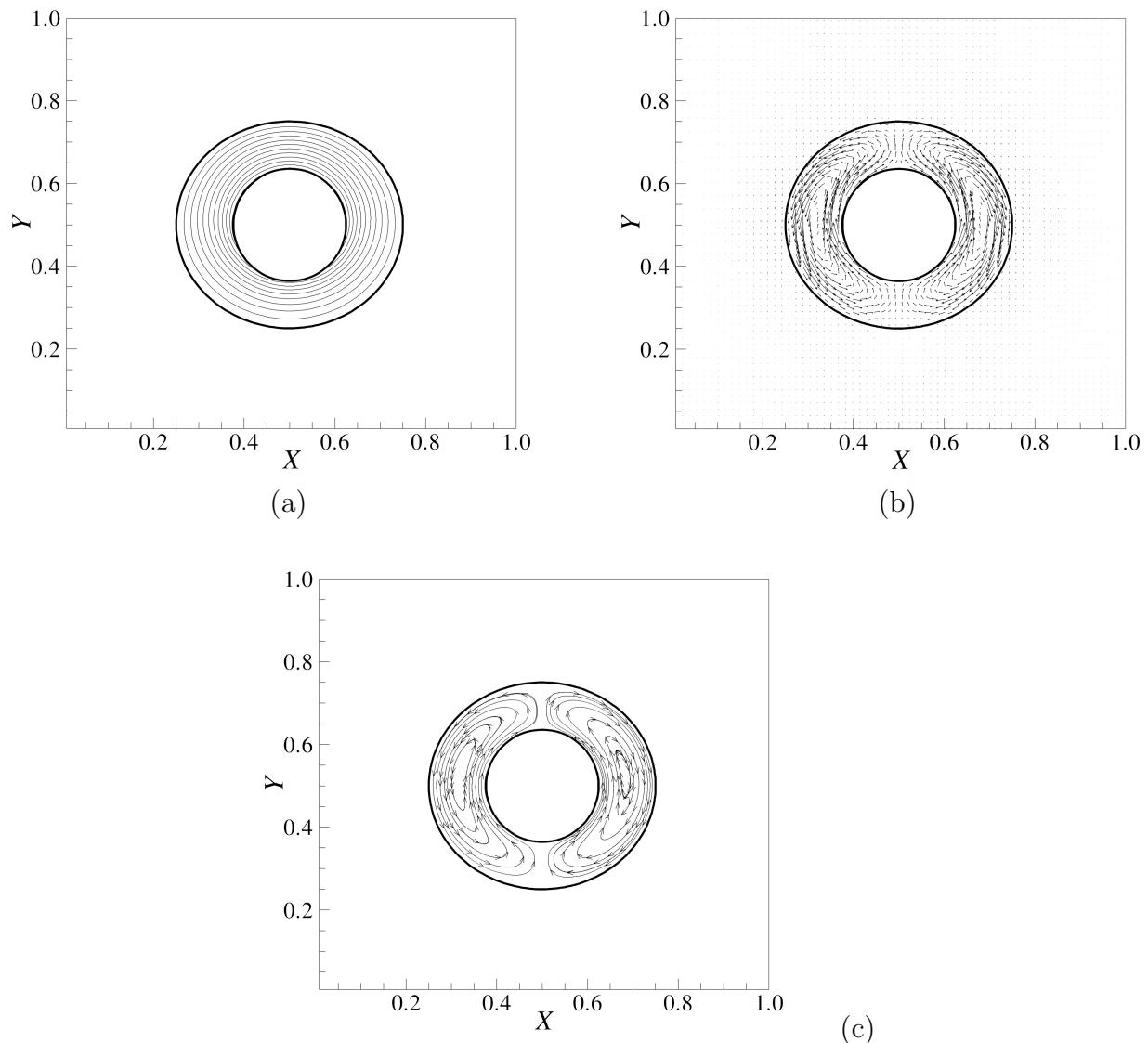


Figura 4.45: Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para número de Rayleigh  $Ra = 1,0 \times 10^3$ .

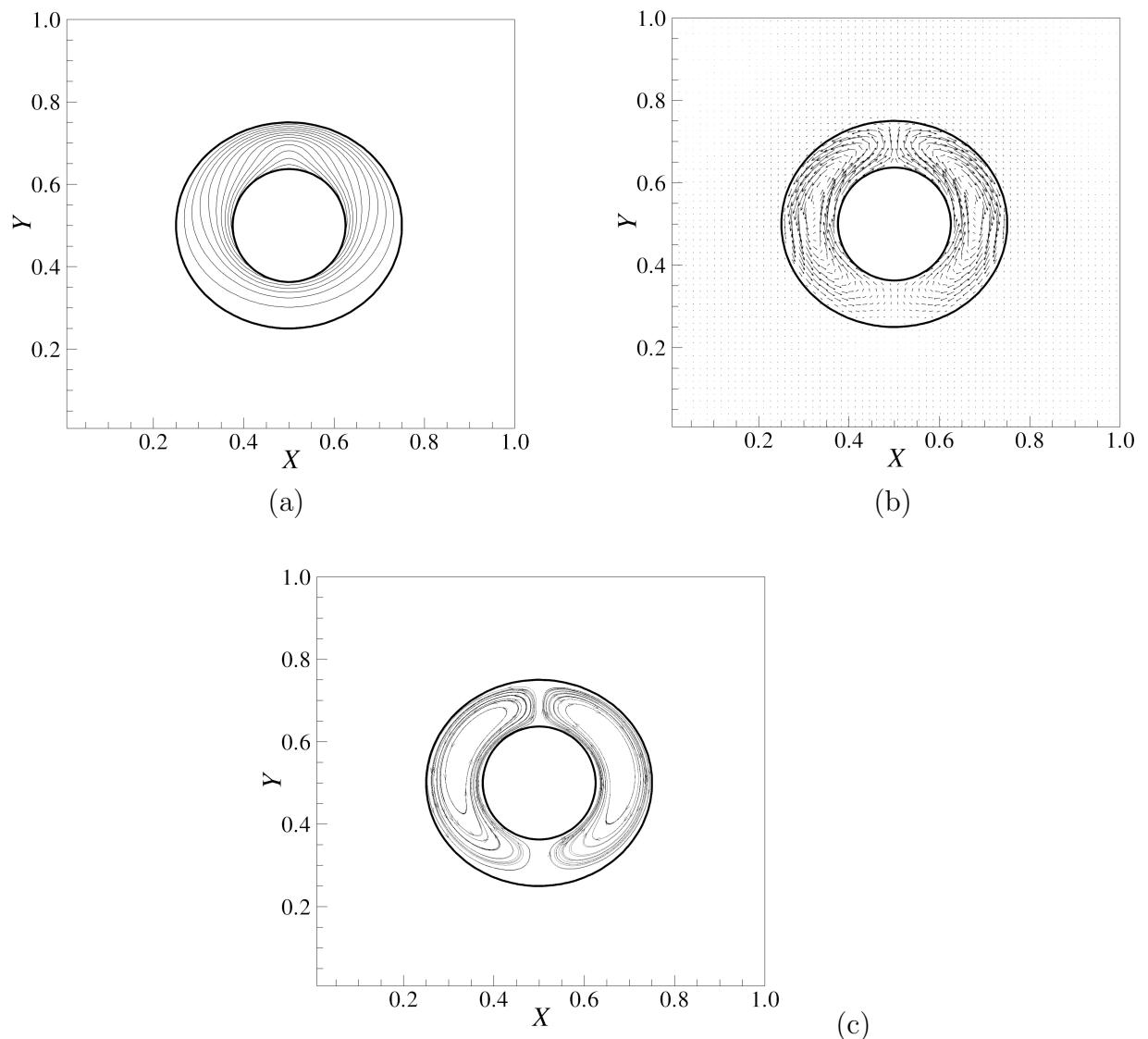


Figura 4.46: Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para número de Rayleigh  $5,7 \times 10^3$ .

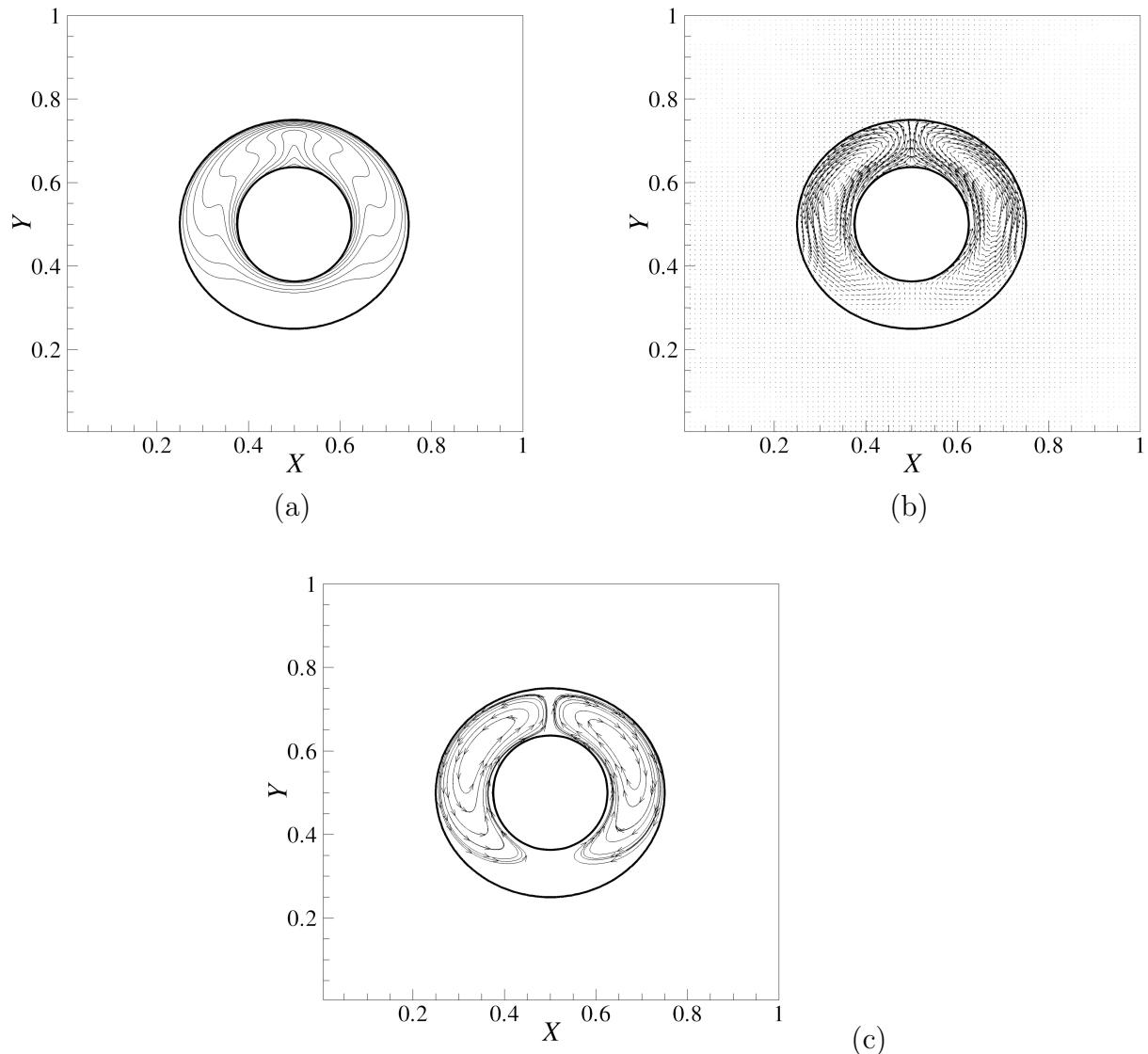


Figura 4.47: Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para número de Rayleigh  $5,0 \times 10^4$ .