

ANA PAULA FERNANDES

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ANALÍTICA
APLICADA À SOLUÇÃO DE PROBLEMA INVERSO
EM CONDUÇÃO DE CALOR



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2013

ANA PAULA FERNANDES

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ANALÍTICA
APLICADA À SOLUÇÃO DE PROBLEMA INVERSO
EM CONDUÇÃO DE CALOR

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTORADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães
Co-Orientador: Marcelo Braga dos Santos

Uberlândia
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

F363f Fernandes, Ana Paula, 1975-
2013 Função de transferência analítica aplicada à solução de problema
inverso em condução de calor / Ana Paula Fernandes. - 2013.
170 f. : il.

Orientador: Gilmar Guimarães.

Coorientador: Marcelo Braga dos Santos.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Condução - Teses. 3. Pro-
blemas inversos (Equações diferenciais) - Teses. 4. Green, Funções de -
Teses. I. Guimaraes, Gilmar. II. Santos, Marcelo Braga dos. III. Univer-
sidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenha-
ria Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

(folha de aprovação)

Agradecimentos

Ao Sócrates.

À minha família.

Aos amigos da FEMEC, docentes, técnicos-administrativos e discentes.

Especialmente, ao Gilmar.

Ao CNPq, CAPES e Fapemig.

Fernandes, A. P. **Função de transferência analítica aplicada à solução de problema inverso em condução de calor.** 2013. 170f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Esse trabalho dedica-se ao estudo da obtenção da função de transferência (ou resposta impulsiva) por meio das teorias de funções de Green e sistemas dinâmicos, para então aplicá-la à solução de problema inverso em condução de calor. Os problemas térmicos unidimensional e tridimensional, respectivamente denominados $X22$ e $X33Y33Z33$, são elegidos para a apresentação da fundamentação teórica do método proposto. O problema $1D$ trata-se de um problema clássico em condução de calor com aplicação em obtenção de propriedades termofísicas, e, o $3D$ é uma aproximação teórica equivalente a um problema de condução de calor originado por um processo de usinagem. Então, conhecendo-se o perfil de temperatura (seja hipotético ou experimental) e a função de transferência, mostra-se que a estimativa do fluxo de calor pode ser concretizada por diferentes abordagens, ou por meio da deconvolução, ou da transformada rápida de Fourier e sua inversa, e ainda por cálculos de densidades espectrais, todas equivalentes entre si. Transpõe-se a teoria matemática usada na estimativa de fluxo de calor em termos de solução computacional com o subsídio do *software* MATLAB. Apresenta-se, assim, o desempenho da técnica explorando-se vários parâmetros de configuração de um problema térmico, como o tipo de material (metal ou não-metal), a dimensão da amostra, a discretização do tempo, simulação da temperatura por diferentes formas de fluxo de calor, e, posteriormente a restauração desse fluxo de calor que a gerou. Concluindo o trabalho, a metodologia é submetida a testes onde se tem temperaturas adquiridas em um processo de usinagem, cujo objetivo é estimar a temperatura na interface peça-ferramenta, e temperaturas medidas em testes de laboratórios para a identificação de propriedades termofísicas.

Palavras-chave: problema inverso, condução de calor, funções de Green, função de transferência.

Fernandes, A. P. **An Analytic heat transfer function method to solve an inverse heat conduction problems.** 2013. 170f. D. Sc. Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This work proposes a heat transfer function identification (or impulse response) method to solve an inverse heat conduction problem. The technique is based on Green's function and on a thermal dynamical system equivalent. The inverse heat conduction problems, 1D and 3D transient, respectively, named X22 and X33Y33Z33 are selected to present the fundamentals of the method proposed. The 1D-transient case is a classic heat conduction problem used to obtain thermophysical properties and 3D-transient problem studied describes theoretically a machining process. It is shown that from the temperature profile (hypothetical or experimental temperature measured far from the heat source) and knowing the heat transfer function it is possible to estimate the heat flux by different approaches as deconvolution, spectral densities estimation or fast Fourier inverse procedure. MATLAB codes are used. The technique performance for several configuration parameters is presented. For example, parameters as different kinds of material (metal or non-metal), geometrical dimensions, sample time and different profile of the heat flux are analyzed. The work is concluded with the application of the technique in two experimental cases: i) the heat flux and temperature estimation at the interface of workpiece–tool during a machining process and: ii) the heat flux estimation from thermophysical properties experimental data tests.

Keywords: *inverse heat conduction problems, Green's function, heat transfer function, heat conduction analytical solutions, thermal dynamic systems.*

Listas de Figuras

3.1	Exemplos de problemas em condução de calor	12
3.2	Sistema dinâmico de uma entrada e uma saída	12
3.3	Problema $X22$	14
3.4	Fluxo de calor discreto	17
3.5	Diagrama de blocos para o problema inverso	21
3.6	Diagrama de blocos para o problema inverso, outra abordagem	22
3.7	Localização dos pólos de $H(x, s)$ no plano complexo s	26
3.8	Problema $X33Y33Z33$	28
3.9	Problema $X33Y33Z33$ - vista superior ($y = W$)	31
3.10	Diagrama de bloco referente a convolução dada pela Eq. (3.61)	38
3.11	$X22$, com $q_1(t)$ em $x = 0$ e $q_2(t)$ em $x = L$	41
3.12	$X22Y22Z22$, diferentes fontes de calor atuando em cada uma das faces geometria	44
4.1	Equivalência entre $X22Y22Z22$ e $X22$	48
4.2	Fluxo de calor pulso triangular	49
4.3	Posições de cálculo para as temperaturas	49
4.4	Temperaturas obtidas a partir do fluxo de calor pulso triangular	50
4.5	Resposta impulsiva para $x = 0; L/2; L$	51
4.6	Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$	54
4.7	Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$	55
4.8	Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$	56

4.9	Erro absoluto entre o fluxo de calor simulado e estimado	57
4.10	Diferença entre o fluxo de calor simulado e estimado	57
4.11	Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = 0$	58
4.12	Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = L/2$	58
4.13	Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = L$	59
4.14	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada nas posições $x = 0$, $L/2$ e L	60
4.15	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.7) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L	60
4.16	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.7) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 5 segundos	61
4.17	Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.7) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 5 segundos	62
4.18	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$ (Fig. 4.8) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 15 segundos	63
4.19	Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$ (Fig. 4.8) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 15 segundos	63
4.20	Fluxo de calor pulso triangular	65
4.21	Temperaturas obtidas a partir do fluxo de calor pulso triangular (polietileno)	65
4.22	Resposta impulsiva	66
4.23	Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$	68
4.24	Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$	69
4.25	Fluxo de calor por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$	70

4.26	Erro absoluto entre o fluxo de calor simulado e estimado	70
4.27	Diferença entre o fluxo de calor simulado e estimado	71
4.28	Comparação entre as temperaturas simulada e estimada	72
4.29	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada nas posições $x = 0$, $L/2$ e L	73
4.30	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L	73
4.31	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 30 segundos	74
4.32	Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 30 segundos	75
4.33	Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = 0$; $L/2$ e L , quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) com retrocesso de 30 segundos	76
4.34	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (Fig. 4.23) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L	77
4.35	Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (Fig. 4.23) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L	77
4.36	Indicação da posição $x = L$ para o cálculo da temperatura e função de transferência	79
4.37	Fluxo de calor estimado a partir das informações calculadas em $x = L$ (Fig. 4.36), variando-se o comprimento L de uma amostra de cobre	79
4.38	Indicação da posição $x = L/2$ para o cálculo da temperatura e função de transferência	80
4.39	Fluxo de calor estimado a partir das informações calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.38), variando-se o comprimento L de uma amostra de polietileno	80

4.40	Estimativas para o fluxo de calor, a partir das informações em $x = L$, variando-se dt	82
4.41	<i>Zoom</i> na escala de tempo da Fig. 4.40	83
4.42	Fluxo de calor estimado com $d = 100s$	83
4.43	Comparação entre as temperaturas simulada e estimada, $dt = 100s$	85
4.44	Comparação entre as temperaturas simulada e estimada (corrigida)	85
4.45	Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, com dt variável	86
4.46	Análise para fluxo de calor constante	88
4.47	Temperatura simulada <i>versus</i> estimada com fluxo constante	89
4.48	Análise para fluxo de calor <i>step</i>	90
4.49	Temperatura simulada <i>versus</i> estimada com fluxo <i>step</i>	91
4.50	Análise para fluxo de calor gaussiano	92
4.51	Temperatura simulada <i>versus</i> estimada com fluxo gaussiano	93
4.52	Análise para fluxo exponencial	94
4.53	Temperatura simulada <i>versus</i> estimada com fluxo exponencial	95
4.54	Análise para fluxo seno	96
4.55	Temperatura simulada <i>versus</i> estimada com fluxo seno	97
4.56	Fluxos de calor simulados	98
4.57	Noção gráfica da convolução para obter o fluxo triangular	99
4.58	Noção gráfica da convolução para obter o fluxo <i>step</i>	100
4.59	Comparação entre as Eqs. (3.23); (3.22); (3.24); (3.25), em $x = L$	101
4.60	Comportamento da resposta impulsiva, para as posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$	103
4.61	Equivalência entre $X33Y33Z33$ e $X22$	104
4.62	Fluxo de calor pulso retangular	105
4.63	Temperaturas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$	106
4.64	Erro percentual entre as temperaturas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$	107
4.65	Comparação entre as estimativas por $X22$ e $X33Y33Z33$	110
4.66	Fluxo de calor teórico	111
4.67	$X33Y33Z33$ com área parcial com fluxo de calor	111
4.68	Temperatura calculada para a posição 4	112

4.69 Temperatura calculada para as posições 1, 2 e 3	113
4.70 Resposta impulsiva calculada para as posições 1, 2 e 3	113
4.71 Fluxo de calor teórico q versus estimado q_1	115
4.72 Fluxo de calor teórico q versus estimado q_2	116
4.73 Fluxo de calor teórico q versus estimado q_3	116
4.74 Temperatura simulada $T_1(q)$ versus estimada $T_1(q_1)$	118
4.75 Temperatura simulada $T_2(q)$ versus estimada $T_2(q_2)$	118
4.76 Temperatura simulada $T_3(q)$ versus estimada $T_3(q_3)$	119
4.77 Erro percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas	119
4.78 Erro percentual com q_2 corrigido	120
4.79 Erro percentual quando aplica-se q_2 para estimar T_1 e T_3	120
4.80 Erro percentual quando aplica-se q_1 para estimar T_2 e T_3	121
4.81 Erro percentual quando aplica-se q_3 para estimar T_1 e T_2	121
 5.1 Temperaturas aquiridas no processo de torneamento	126
5.2 Disposição dos termopares na ferramenta (CUNHA; SILVA, 2011)	127
5.3 Indicação das coordenadas de aquisição da temperatura	128
5.4 Resposta impulsiva para as posições 1 e 2	128
5.5 Resposta impulsiva para as posições 3 e 4	129
5.6 Resposta impulsiva para as posições 5 e 6	129
5.7 Fluxo de calor estimado por dados da posição 1	130
5.8 Divergências nas estimativas quando aplica-se $H2$ a $H6$	131
5.9 Temperatura experimental (T1) x estimada por q_1	132
5.10 Erro percentual entre temperatura experimental e estimada na posição 1	132
5.11 Análise do erro percentual entre temperatura experimental e estimada na posição 1, no intervalo de 2 a 6 segundos	133
5.12 Comparação entre temperatura experimental (T2) x estimada por q_1	134
5.13 Fluxo de calor estimado, após a correção do vetor resposta impulsiva na posição 2	136
5.14 Temperatura experimental (T2) x estimada por q_2	137
5.15 Diferença absoluta entre temperatura experimental e estimada na posição 2	137

5.16	Comparação entre temperatura experimental (T3) x estimada por q_3	138
5.17	Comparação entre temperatura experimental (T4) x estimada por q_4	139
5.18	Comparação entre temperatura experimental (T5) x estimada por q_5	140
5.19	Comparação entre temperatura experimental (T6) x estimada por q_6	141
5.20	Posições para cálculo da temperatura na interface peça-ferramenta	142
5.21	Comparação entre as temperaturas na interface peça-ferramenta	143
5.22	Comparação entre a temperatura média calculada na interface <i>versus</i> método do termopar ferramenta-peça	143
5.23	Erro percentual entre temperatura média calculada na interface <i>versus</i> método do termopar ferramenta-peça	144
5.24	Temperaturas experimentais T_1 e T_2	146
5.25	Temperaturas experimentais T_1 e T_2	147
5.26	(a) Aparato experimental. (b) Esquema de montagem do elemento aquecedor resistivo em parte da amostra	148
5.27	Resposta impulsiva para as posições 1 e 2	149
5.28	Fluxo de calor estimado q_1 e q_2	149
5.29	Fluxo de calor estimado q_1 e q_2 corrigidos	150
5.30	Temperatura experimental x estimada por q_1 (posição 1)	151
5.31	Temperatura experimental x estimada por q_1 (posição 2)	151
5.32	Temperatura experimental x estimada por q_1 (posição 2)	152
5.33	Temperatura experimental x estimada por q_1 retrocedido (posição 2)	152
5.34	Diferença entre as temperaturas experimentais e estimadas por q_1	153

Lista de Tabelas

3.1	Comparação entre as soluções obtidas pelas Eqs. (3.11) e (3.12)	18
4.1	Valores calculados para $h(x, t)$	52
4.2	Comparação áreas fluxo simulado (A_1) e estimado (A_2)	55
4.3	Retrocesso aplicado ao fluxo de calor estimado (a partir de dados sintéticos calculados em $x = L/2$)	61
4.4	Retrocesso aplicado ao fluxo de calor estimado (a partir de dados sintéticos calculados em $x = L$)	62
4.5	Valores calculados para $h(x, t)$	67
4.6	Comparação áreas fluxo simulado (A_1) e estimado (A_2)	68
4.7	Retrocesso aplicado ao fluxo de calor estimado (a partir de dados sintéticos calculados em $x = L/2$)	74
4.8	Discretização do tempo \times número de amostras \times área	84
4.9	Comparação entre as temperaturas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$	106
4.10	Comparação entre os autovalores	108
4.11	Comparação entre as respostas impulsivas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$	108
4.12	Valores para a resposta impulsiva nas posições 1, 2 e 3	114
4.13	Erro médio percentual entre fluxo de calor teórico e estimado	114
4.14	Valores para os fluxos de calor: q , q_1 , q_2 e q_3	122
4.15	Erro médio percentual entre temperatura simulada e estimada	123
5.1	Posição média dos termopares na ferramenta	127
5.2	Valores calculados para as respostas impulsivas nas posições 1 a 6	135
5.3	Temperatura peça-ferramenta (T_{PF}) \times média (T_{im})	145

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3	FUNDAMENTOS	11
3.1	Problema 1D: caso particular $X22$	14
3.1.1	Solução analítica do problema direto	15
3.1.2	Solução híbrida	16
3.1.3	Função de transferência analítica	19
3.1.4	Solução do problema inverso	20
3.1.5	Problema inverso em termos de densidade espectral	22
3.1.6	Análise de estabilidade	23
3.1.6.1	Estabilidade do sistema dinâmico direto	24
3.1.6.2	Estabilidade do sistema dinâmico inverso	26
3.2	Problema 3D - caso particular $X33Y33Z33$	28
3.2.1	Solução do problema direto	31
3.2.2	Função de transferência analítica	38
3.2.3	Problema inverso	40
3.2.4	Análise de estabilidade	40
3.3	Problemas com duas ou mais fontes de calor simultâneas	41
3.3.1	Exemplo 1D - $X22$, com $q_1(t)$ em $x = 0$ e $q_2(t)$ em $x = L$	41
3.3.2	Exemplo 3D - $X22Y22Z22$, diferentes fontes de calor atuando em cada uma das faces da geometria	44

4 PROCEDIMENTOS	47
4.1 Problema 1D, $X22$, metal	47
4.1.1 Problema direto	48
4.1.2 Função de transferência	50
4.1.3 Problema inverso	52
4.2 Problema 1D, $X22$, não-metal	64
4.2.1 Problema direto	64
4.2.2 Função de transferência	64
4.2.3 Problema inverso	66
4.3 Análise de parâmetros	78
4.3.1 Comprimento L	78
4.3.2 Discretização do tempo dt	81
4.3.3 Diferentes formas de fluxo	87
4.3.4 Interpretação gráfica	98
4.3.5 Operações do MATLAB	101
4.4 Problema 3D, $X33Y33Z33$	104
4.4.1 Verificação intrínseca	104
4.4.2 Problema direto (área parcial com fluxo de calor)	109
4.4.3 Função de transferência	112
4.4.4 Problema inverso	114
5 RESULTADOS	125
5.1 Estimativa da temperatura e fluxo de calor na interface cavaco-ferramenta durante um processo de torneamento	125
5.1.1 Correção da função de transferência	135
5.1.2 Temperatura na interface cavaco-ferramenta	142
5.2 Temperaturas medidas em testes de laboratório para identificação de propriedades termofísicas	146
6 CONCLUSÃO	155
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	157

A SOLUÇÃO HÍBRIDA X_{22}	163
B FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA X_{22}	167
C PROBLEMA INVERSO	169

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Problemas inversos possuem aplicações relevantes em várias áreas de atuação humana, com especial destaque para engenharia e medicina podendo ser aplicados sob diversas formas. A principal característica deste tipo de abordagem é a obtenção da solução do problema físico de maneira indireta, como por exemplo, a determinação de campos térmicos em superfícies sem acesso, a obtenção da força aplicada em uma estrutura complexa a partir do conhecimento da resposta e da função de transferência que descreve o sistema, ou ainda, o diagnóstico de alguma doença por tomografia computadorizada. Em todos os casos, as condições de contorno destes problemas não são conhecidas ou são de difícil acesso. Diante disso, o problema pode ser resolvido a partir de informações oriundas de sensores localizados em pontos acessíveis.

Em problemas diretos de condução de calor se o fluxo de calor (a causa) é conhecido o campo de temperatura (o efeito) pode então ser determinado. Em contrapartida em um problema inverso estima-se a causa a partir do conhecimento do efeito em algum ponto de fácil acesso. Assim o uso de temperaturas experimentais permite a obtenção da solução do problema térmico que pode ser: a obtenção das propriedades térmicas, obtenção do fluxo de calor superficial, obtenção da fonte de calor interna ou ainda a obtenção da temperatura superficial numa face sem acesso direto, entre outros.

Em sistemas dinâmicos três são as variáveis a serem estudadas, a excitação, a função de transferência e a resposta do sistema, desta forma os problemas são resolvidos conhecendo-se sempre duas variáveis e estimando a terceira. Interessa-se pela classe dos problemas inversos para quais a partir do conhecimento do sistema e de sua resposta (efeito) estima-se a excitação (causa). É possível analisar problemas de condução de calor fazendo-se uma analogia aos sistemas dinâmicos.

Os problemas inversos pertencem a uma classe muito interessante e comum de problemas que são ditos matematicamente mal postos. Observa-se que um problema é considerado matematicamente bem posto se satisfizer três requisitos essenciais:

- i. Existência;
- ii. Unicidade;
- iii. Estabilidade.

A existência de uma solução para um problema inverso em condução de calor é assegurada pela física: se existe efeito então existe uma causa. Dentre suas características, os problemas inversos apresentam a possibilidade de existir mais de uma solução para o mesmo problema, o que leva a necessidade do uso de ferramentas matemáticas que baseadas em informações adicionais buscam a unicidade da solução estimada. Cita-se neste caso, como exemplo, o compromisso com a modelagem, cuja unicidade da solução para problemas inversos pode ser matematicamente provada apenas para alguns casos especiais. Além disso, o problema inverso é muito sensível aos efeitos degenerativos do ruído aditivo sobre os dados de entrada, o operador ou até mesmo as limitações impostas pelo caráter iterativo do processo computacional. Assim é necessário o uso de técnicas especiais para que a solução satisfaça o critério da estabilidade.

Existe na literatura uma variedade de soluções analíticas e numéricas para problemas inversos de condução de calor. Entretanto, a maioria delas se restringe a problemas unidimensionais. Técnicas de otimização bem como técnicas de filtros, que fazem uso da teoria de sistemas e controles, têm sido bastante usadas como alternativa na solução desse tipo de problema.

Uma boa técnica inversa deve ser aplicável a problemas reais com geometrias complexas e contornos desconhecidos e/ou de difícil acesso.

A proposta deste trabalho é apresentar uma nova técnica de solução de problemas inversos que tenha característica de robustez e baixo custo computacional. O procedimento proposto para a obtenção deste objetivo é a incorporação de soluções analíticas ao algoritmo inverso. Esta alternativa, na realidade, busca o desenvolvimento de um modelo que permita estimativas de forma a minimizar o problema da falta de unicidade em alguns problemas matemáticos mal postos e ao mesmo tempo introduzir ferramentas que aumentem a estabilidade do problema.

A abordagem de problemas 3D-transientes tem o objetivo de comprovar a generalidade do método proposto podendo ser aplicado a uma grande maioria de problemas térmicos que ocorrem devido a processos em engenharia. Por exemplo, neste trabalho a metodologia proposta é aplicada em um processo de usinagem, cujo objetivo é estimar a temperatura na interface peça-ferramenta. Outro exemplo de aplicação é a estimativa de fluxo de calor em testes de laboratórios usados originalmente para a identificação de propriedades termofísicas.

Apresenta-se no próximo capítulo uma breve revisão de algumas das técnicas mais usadas para a solução de problemas inversos em condução de calor. Percebe-se que algumas não possuem boa estabilidade quando a presença de ruídos experimentais é de grande proporção enquanto outras apresentam alta complexidade matemática de implementação, requerendo alto custo e tempo computacional.

O capítulo 3 trata-se da fundamentação teórica da metodologia, onde mostra-se de maneira detalhada as etapas de obtenção/identificação da função de transferência analítica para dois específicos problemas de condução de calor, 1D e 3D. Ressalta-se que para a compreensão do método é fundamental o estudo da solução do problema direto por meio de funções de Green.

No capítulo 4 mostra-se a aplicação da metodologia quanto aos procedimentos computacionais implementados em MATLAB. As soluções são facilmente implementadas e de baixo custo computacional, o que torna possível consolidar o desempenho da técnica explorando-se vários parâmetros de configuração de um problema térmico, como por exemplo, o tipo de material (metal ou não-metal), a dimensão da amostra, a discretização do tempo, simulação da temperatura por diferentes formas de fluxo de calor, e, posteriormente a restauração desse fluxo de calor que a gerou.

No último capítulo, de resultados efetivos, mostra-se como a metodologia comporta-se a partir de temperaturas adquiridas experimentalmente. Assim, a metodologia é submetida a testes onde se tem temperaturas provenientes de um processo de usinagem, cujo objetivo é estimar a temperatura na interface peça-ferramenta, e temperaturas medidas em testes de laboratórios para a identificação de propriedades termofísicas.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Problemas inversos em condução de calor tem sido investigados por um grande número de pesquisadores, desde as primeiras contribuições (STOLZ, 1960) até inúmeros trabalhos mais recentes. Existem, hoje, na literatura livros clássicos que procuram abranger as diversas tendências de solução e aplicação desses problemas em engenharia como os textos de Alifanov (1974), Tikhonov & Arsenin (1977), Beck, Blackwell & Clair (1985), Murio (1993), Özışık & Orlande (2000) e Aster, Borchers & Thurber (2013), apenas para citar alguns dos mais importantes.

Embora uma revisão completa de trabalhos voltados à solução de problemas inversos seja interessante para o estabelecimento do estado da arte desta linha de pesquisa, o objetivo principal desta revisão é a apresentação sucinta de várias técnicas existentes neste campo. Apresentam-se assim, tanto as técnicas clássicas como novas concepções na solução de problemas inversos em condução de calor através de contribuições mais recentes de diversos pesquisadores.

Na literatura, uma variedade de aproximações analíticas e numéricas são propostas para a solução dos problemas inversos em condução de calor. Baseando-se no método de mínimos quadrados e no teorema de Duhamel, Beck, Blackwell & Clair (1985) desenvolveram o método da função especificada seqüencial, que é, até hoje, uma das técnicas de solução de problemas inversos mais usada. A técnica consiste na minimização sucessiva do erro estimado para apenas o tempo atual e alguns passos de tempo futuros. Vários pesquisadores têm usado essa técnica de forma direta ou indireta como Keanini, Ling & Cherukuri (2005), Rech, Kusiakb & Battaglia (2004), Behbahni & Kowsary (2004), Kim & Daniel (2003), Lin, Chen & Yang (2003) ou Dowding & Beck (1999).

Alguns pesquisadores têm proposto adaptações desse método buscando a minimização dos problemas decorridos com a existência de erros de medição. O objetivo então é a obtenção de uma maior estabilidade para o algoritmo como propõem Lin, Chen & Yang (2003), Keanini, Ling & Cherukuri (2005) ou Behbahni & Kowsary (2004). Como exemplo de procedimento Keanini, Ling & Cherukuri (2005) propõem um método modificado a partir da função especificada sequencial visando estabilizar a solução para um problema inverso parabólico de condução de calor. O método usa passos computacionais de tempo que são maiores que os pequenos intervalos experimentais de amostragem, bem como passos de tempo futuros que são iguais aos intervalos de amostragem. Além das vantagens associada aos dois primeiros passos mantidos da solução original proposta por Beck, Blackwell & Clair (1985) outras podem ser observadas. Nesse sentido a técnica modificada proporciona: *i*) uma supressão mais rápida do erro, *ii*) melhora a estabilidade e precisão atuando com níveis comparáveis de dados truncados e erros nas medidas de temperatura e *iii*) se equipara à função especificada na solução de problemas não lineares.

Behbahni & Kowsary (2004) propõem um método baseado na dupla reciprocidade de elementos de contorno juntamente com o método da função especificada Seqüencial para a solução de um problema inverso de condução de calor envolvendo a estimativa de um fluxo de calor superficial variando no tempo e espaço. A eficiência do método é validada por uma série de testes simulados.

Outra técnica bastante usada é o método do gradiente conjugado com equação adjunta descrita em detalhes em Alifanov (1974) ou Özişik & Orlande (2000). Essa técnica baseia-se num processo de otimização com regularização iterativa, ou seja, os resultados da minimização da função objetivo tendem a se estabilizar em função do número de iterações. Esta metodologia pode ser empregada para a solução de problemas inversos lineares e não lineares, como também em problemas de estimativa de parâmetros. Além disso, o parâmetro a ser estimado pode ser condição do contorno (fluxo de calor ou temperatura superficial) ou propriedade térmica (condutividade ou difusividade). Em todos os casos não é necessário que se tenha conhecimento prévio sobre a forma funcional destes parâmetros. Vários autores têm empregado esse método como Colaço, Orlande & Dulikravich (2006), Loulou & Scott (2003) ou Lima *et al.* (2000).

Colaço, Orlande & Dulikravich (2006), apresentam a técnica de gradiente conjugado com equação adjunta bem como outras técnicas inversas e de otimização, tratando das similaridades e diferenças entre esses dois tipos de abordagem e suas aplicações em problemas de transferência de calor. Usando esta técnica, Lima (2001) estima a taxa de transferência de

calor na interface cavaco-ferramenta de um problema de usinagem enquanto Loulou & Scott (2003) propõem um algoritmo para a solução de problemas inversos tridimensionais instáveis e não lineares. Neste caso usam um método casado de regularização iterativa e gradiente conjugado. A técnica apresenta resultados satisfatórios para simulações com e sem adição de ruídos nas medidas de temperatura.

Existem ainda várias ferramentas numéricas de otimização que podem ser usadas para a solução de problemas inversos. Nestes casos as ferramentas são utilizadas para ajustar a resposta medida à resposta calculada tendo como variável de projeto a entrada desconhecida. A seção áurea é uma das técnicas mais populares para a estimativa de máximos, mínimos ou zero de funções de apenas uma variável (VANDERPLAATS, 1984). Algumas características particulares tornam-na muito interessante nos processos de otimização: *i*) não necessita de derivadas contínuas; *ii*) ao contrário da aproximação polinomial possui taxa de convergência conhecida e *iii*) é de fácil implementação. Citam-se Gonçalves *et al.* (2006) ou Carvalho, Ong & Guimarães (2006) como trabalhos que usam diretamente a seção áurea como ferramentas para a solução de problemas inversos.

Gonçalves *et al.* (2006) usam o método da seção áurea com um procedimento numérico para identificar a geometria da piscina de solda em um processo de soldagem enquanto Carvalho, Ong & Guimarães (2006) apresentam uma metodologia desenvolvida para a solução de problemas inversos a ser aplicada em fornos de recozimento.

Outros métodos de otimização como os métodos heurísticos são também usados na solução de problemas inversos. Citam-se nesse casos os algoritmos genéticos Goldberg (1989), Raudensk *et al.* (1995), Gonçalves *et al.* (2000) ou a técnica de recozimento simulado (simulated annealing) Gonçalves *et al.* (2006), Gonçalves, Scotti & Guimarães (2002), Saramago, Assis & Steffen (1999).

Algoritmos genéticos usam conceito de biologia como população, evolução, seleção e mutação para construção da ferramenta estatística. O otimizador parte então de uma população de projeto gerada ao acaso, e busca produzir projetos melhorados para a próxima geração. Raudensk *et al.* (1995) usa o algoritmo genético para resolver um problema inverso de condução de calor unidimensional a partir de dados gerados numericamente resolvendo o problema direto correspondente. O método apresenta resultados satisfatórios para problemas unidimensionais com e sem presença de ruídos nos dados de temperatura.

A técnica *simulated annealing* baseia-se, por sua vez, na termodinâmica do resfriamento de um material que se encontra passando da fase líquida para a fase sólida. Se o material

líquido começa a se resfriar lentamente e ainda permanece por um tempo longo o suficiente próximo à temperatura de fusão, um cristal perfeito será criado, que tem o menor grau de energia interna. De outro lado se o material líquido não permanecer por um tempo longo o suficiente próximo a temperatura de mudança de fase, ou, se o processo de resfriamento não for suficientemente lento, o cristal final terá inúmeros defeitos e um alto grau de energia interna. Pode-se dizer que métodos baseados em gradientes "resfriam muito rápido", indo rapidamente para um local ótimo que, na maioria dos casos, não é o ótimo global e sim local. Diferentemente o método *simulated annealing* pode se mover em qualquer direção, escapando de possíveis valores de mínimos ou máximos locais. Gonçalves *et al.* (2006) apresentam uma comparação entre duas técnicas usadas para estudar o fenômeno térmico que ocorre durante operações de soldagem. As técnicas propostas combinam métodos de otimização como *simulated annealing* e seção áurea e são usadas para estimar o fluxo de calor gerado pelo processo de soldagem, bem como a eficiência térmica global e a eficiência de fusão.

Mais recentemente têm-se empregado filtros para a solução de problemas inversos de transferência de calor. Citam-se neste caso os filtros de Kalman e os observadores dinâmicos de estado. Podem-se citar por exemplo os trabalhos de Chung (2005), Xingjian (2003), Kim & Daniel (2003), Tuan *et al.* (1996), Lee, Ko & Ji (2000), Park & Jung (2000), Blum & Marquardt (1997), Marquardt & Auracher (1990). Estes métodos que são baseados na teoria de sistemas dinâmicos e de controle têm sido usados na reconstrução on-line de variáveis desconhecidas do sistema, como por exemplo condições de contorno desconhecidas.

No trabalho de Tuan *et al.* (1996) encontra-se uma metodologia inversa para a solução de um problema inverso de condução de calor em tempo real. A metodologia, baseada nas técnicas de filtragem de Kalman, é desenvolvida para estimar duas distribuições de fluxo de calor distintas aplicadas a duas superfícies de contorno. Um algoritmo de mínimos quadrados em tempo real é também apresentado e fornece a relação recursiva entre o valor observado do fluxo de calor desconhecido e o valor teórico do filtro de Kalman.

Lee, Ko & Ji (2000) usa uma aproximação adaptativa propondo uma técnica que combina filtros de Kalman e Mínimos Quadrados para estimar fluxo de calor, resolvendo o problema inverso em condução a partir de dados experimentais.

Park & Jung (2000) desenvolveram um algoritmo recursivo baseado em Filtros de Kalman para resolver problemas inversos em condução de calor. Entretanto a implementação direta do algoritmo em problemas com equações diferenciais parciais multidimensionais não é indicada devido ao alto custo e tempo computacional requerido. Como solução desse problema os autores empregam o processo Karhunen-Loève Galerkin que reduz as equações diferenciais

parciais governantes a um número mínimo de equações diferenciais ordinárias, possibilitando a aplicação da técnica proposta em problemas multidimensionais.

Em seu trabalho, Kim & Daniel (2003) apresentam resultados preliminares a partir de um estimador adaptativo desenvolvido para estimar um fluxo de calor superficial em um problema unidimensional. O algoritmo de estimação requer apenas as temperaturas medidas na superfície isolada, o estimador é composto de filtros de Kalmam conectados em paralelo.

Blum & Marquardt (1997) e Marquardt & Auracher (1990) apresentam uma solução para problemas inversos de condução de calor baseada em observadores dinâmicos. Neste caso, o problema inverso de condução de calor é interpretado com um filtro passa baixa das componentes verdadeiras do verdadeiro sinal de fluxo, enquanto rejeita as componentes de alta freqüência evitando uma excessiva amplificação do efeito do ruído na estimação. O algoritmo apresenta ótimos resultados em problemas unidimensionais. Uma abordagem mais recente é apresentada por Chung (2005), que desenvolve um algoritmo baseado em observadores para resolver problemas inversos de calor uni e bidimensionais em um processo de perfuração. Xingjian (2003) compara a técnica proposta por Blum & Marquardt (1997) com várias técnicas e propõe algumas melhorias no procedimento de otimização.

Sousa, Carvalho & Guimarães (2008) desenvolveram um procedimento para o uso de observadores dinâmicos a ser aplicado na solução de problemas inversos multidimensionais em condução de calor. O novo procedimento consiste no uso de funções de Green e na definição de sistemas dinâmicos equivalentes para a obtenção da função de transferência de forma simples e direta. Tal procedimento pode ser usado indistintamente em modelos 1D, 2D ou 3D. Para avaliar a eficiência do uso da técnica de observadores baseada em funções de Green, testes simulados e experimentais foram realizados em modelos uni, bi e tridimensionais. Além disso, submeteu-se a técnica proposta a comparações com métodos já consolidados na solução de problemas inversos, como o método da função especificada seqüencial ou técnicas de otimização como o método da seção áurea. A técnica desenvolvida se mostrou eficiente, robusta, com baixo custo operacional, simples quanto a sua implementação e competitiva do ponto de vista de obtenção dos resultados.

Pode-se observar dessa breve revisão a existência de várias técnicas para a solução de problemas inversos. Cada técnica de otimização apresentada tem, por sua vez, pontos fortes e fracos a serem destacados. O algoritmo de função especificada é de fácil implementação e baixo custo computacional. Entretanto não possui boa estabilidade quando a presença de ruídos experimentais é de grande proporção (BECK; BLACKWELL; CLAIR, 1985) sofrendo a influência de mínimos locais. Uma solução para a minimização desses problemas é a

implementação de técnicas de regularização (BECK; BLACKWELL; CLAIR, 1985). Outra desvantagem desse algoritmo é a alta complexidade matemática de implementação quando se pretende a estimativa de componentes de fluxo de calor com variação espacial e temporal (BLANC; RAYNAUD; CHAU, 1998), (LIMA; GUIMARÃES, 1997), (OSMAN; DOWDING; BECK, 1997). A técnica de gradiente conjugado com equação adjunta que também apresenta instabilidades na vizinhança de mínimos locais apresenta-se como uma técnica mais adequada para a solução de problemas multidimensionais (JARNY; ÖZİŞIK; BARDON, 1991). Uma desvantagem dessa técnica está no critério de parada do processo de otimização que requer algum conhecimento prévio dos erros experimentais contidos nos dados experimentais e também ser sensível a ruídos experimentais e a mínimos locais. Outra dificuldade reside na implementação do modelo computacional e no tempo computacional uma vez que não só o problema direto mas também o problema de sensibilidade tem que ser resolvido a cada iteração.

Propõe-se neste trabalho a solução de problema inverso a partir identificação da função de transferência analítica por meio de funções de Green, trata-se de uma abordagem simples e inédita, tanto quanto ao desenvolvimento teórico e assim como implementação computacional. A metodologia consiste no estudo da solução do problema direto por meio de funções de Green, assim, determina-se a função de transferência do problema de condução de calor considerando o fluxo de calor sendo a distribuição delta de Dirac. Com a determinação da função de transferência é possível estabelecer o método de estimativa do fluxo de calor por diferentes abordagens, seja por meio da deconvolução, ou da transformada rápida de Fourier e sua inversa, e ainda por cálculos de densidades espectrais, todas equivalentes entre si. Desta forma, com conhecimento da função de transferência ($H(x, t)$) e da temperatura hipotética ou simulada ($T(x, t)$) é possível estimar o fluxo de calor ($q(t)$), considerando a teoria de sistemas dinâmicos, aplicando-se a relação $q(s) = T(x, s) \frac{1}{H(x, s)}$, dada no domínio de Laplace.

Capítulo 3

FUNDAMENTOS

Obtenção da função de transferência analítica por meio de funções de Green

As funções de Green são usadas para obter soluções de problemas lineares em condução de calor, e, também podem ser aplicadas à diferentes problemas físicos descritos por um conjunto de equações diferenciais. Trata-se, portanto, de um método de solução de equações lineares, assim como os métodos clássicos de separação de variáveis ou transformadas de Laplace (COLE *et al.*, 2010).

Apresenta-se neste capítulo a metodologia de identificação/obtenção da função de transferência analítica por meio de funções de Green, para problemas de condução de calor. Os problemas unidimensional, 1D, $X22$, e tridimensional, 3D, $X33Y33Z33$, designados desta forma por Cole *et al.* (2010), foram escolhidos para a fundamentação desta pesquisa. O primeiro caso abordado trata-se de um problema clássico em condução de calor com aplicação em obtenção de propriedades termofísicas (Fig. 3.1(a)), e o segundo exemplo trata-se um modelo tridimensional teórico que se equivale a um problema de condução de calor originado por um processo de usinagem (por corte ortogonal ou torneamento) (Fig. 3.1(b)).

Esta metodologia também aplica-se à problemas de maior complexidade, como por exemplo, em estimativas de diferentes fontes de fluxos de calor ($q_1(t), q_2(t), \dots, q_6(t)$) atuando em uma dada amostra (Fig. 3.1(c)), como desenvolvido em Malheiros (2013).

Usam-se as funções transferência para caracterizar a relação entre entrada e saída de um sistema dinâmico, respectivamente representadas por $x(t)$ e $y(t)$ na Fig. 3.2. Pode-se, portanto, traçar uma equivalência entre sistemas dinâmicos e problemas de condução de calor,

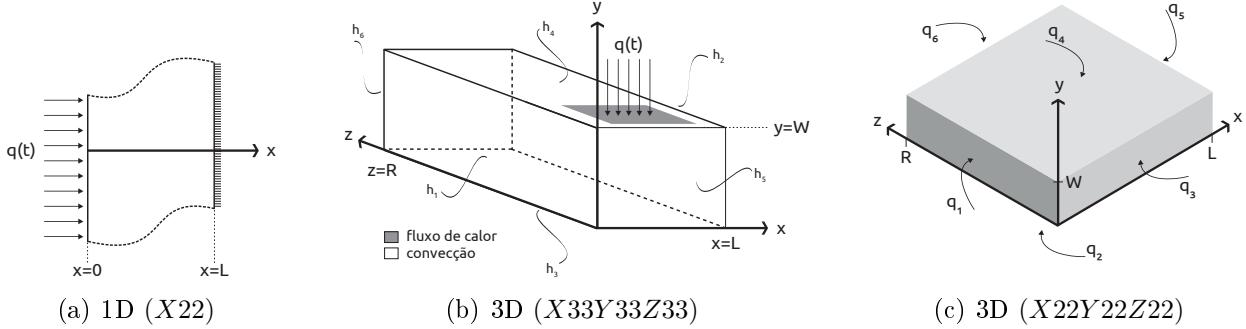


Figura 3.1: Exemplos de problemas em condução de calor

ambos descritos por um conjunto de equações diferenciais. Desta forma, o fluxo de calor é tratado como entrada (excitação) do sistema, e o campo de temperatura como a resposta (causa) a esse fluxo.

A análise de sistemas dinâmicos é facilitada pelo uso da transformada de Laplace, pois, ela fornece a relação matemática entre entrada e saída do sistema dinâmico. Sabe-se que, para um sistema dinâmico linear (Fig. 3.2), a relação entre entrada e saída no domínio da variável complexa s é dada pela multiplicação expressa na Eq. (3.1).

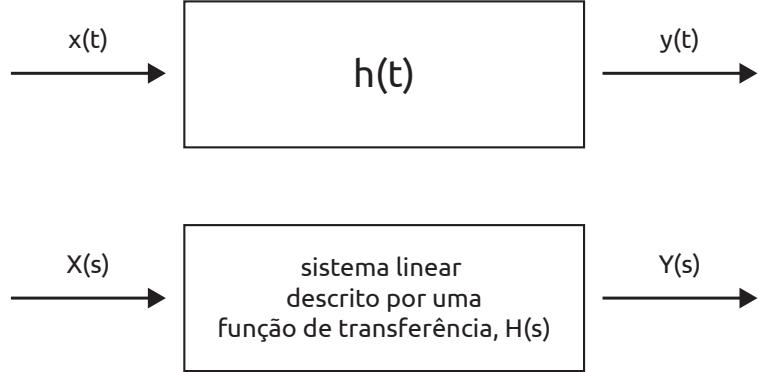


Figura 3.2: Sistema dinâmico de uma entrada e uma saída

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (3.1)$$

Aplicando-se o Teorema da Convolução à Eq. (3.1), a entrada do sistema, $y(t)$, é dada pela convolução entre $h(t)$ e $x(t)$, representada simbolicamente pelo operador $(*)$, ou seja, a integral de convolução fornece a relação entre entrada e saída no domínio do tempo, e, é

dada por

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot X(s)] = h(t) * x(t) \quad (3.2)$$

A partir das importantes relações expressas pelas Eqs. (3.1) e (3.2) apresenta-se o método de obtenção da função de transferência analítica por meio de funções de Green, e consequentemente, a proposta de solução de problema inverso em transferência de calor.

Inicialmente, apresenta-se a obtenção da distribuição de temperatura em termos de um fluxo de calor discreto, isto é, a solução do problema direto por meio de uma solução híbrida, onde a solução do problema unidimensional $X22$ é dada em termos de funções de Green.

A partir da função de Green que descreve o problema de transferência de calor, mostra-se a metodologia para se identificar/obter a função de transferência analiticamente. E, então, apresenta-se a solução do problema inverso, isto é, uma inferência para fluxo de calor, por meio da função de transferência analítica e pelo conhecimento da distribuição de temperatura (experimental ou hipotética).

Nos capítulos 4 e 5 tem-se o emprego dessa metodologia por meio dos dados simulados computacionalmente e a partir de dados experimentais, respectivamente.

3.1 Problema 1D: caso particular X22

O problema unidimensional (1D) de condução de calor definido por uma placa plana submetida a um fluxo de calor, $q(t)$ em $x = 0$, e condição de isolamento térmico à superfície oposta, $x = L$, é referenciado como X22 por Cole *et al.* (2010) (Fig. 3.3). Trata-se, neste caso, de um dos problemas clássicos em condução de calor que tem aplicação em obtenção de propriedades termofísicas.

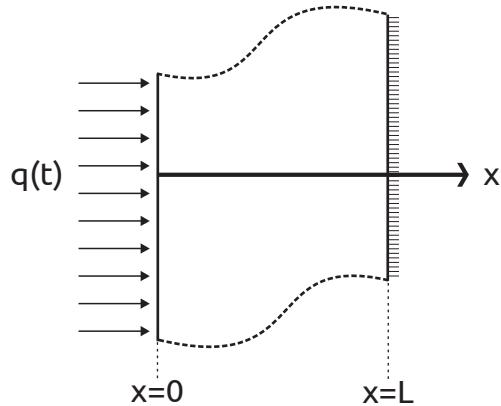


Figura 3.3: Problema X22

Descreve-se matematicamente, o problema representado pela Fig. 3.3 pela equação de difusão de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.3a)$$

Sujeita às condições de contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.3b)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (3.3c)$$

A solução do problema dado pelas Eqs. (3.3a)-(3.3c) é então obtida por funções de Green. Uma das grandes vantagens das funções de Green é a sua fácil transposição para problemas multidimensionais (2D e 3D) e a capacidade de resolver problemas com condições de contorno complexas, como fluxo de calor com variação espacial e temporal.

3.1.1 Solução analítica do problema direto

Sabe-se que a equação-solução integral baseada em funções de Green do problema unidimensional do problema $X22$ (Eqs. (3.3a)-(3.3c)) é dada por

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & \int_0^L G(x, t|x', 0)F(x')dx' \\
 & + \alpha \int_0^t \int_0^L G(x, t|x', \tau) \frac{g(x', \tau)}{k} dx' d\tau \\
 & + \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{f_1(\tau)}{k_1} d\tau \\
 & + \alpha \int_0^t G(x, t|L, \tau) \frac{f_2(\tau)}{k_2} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

O primeiro termo da solução integral na Eq. (3.4) é referente à temperatura inicial ($F(x) = T_0$), o segundo termo diz respeito a geração de calor ($g(x, t)$) e os dois últimos termos descrevem condições de contorno do segundo tipo, isto é, em $x = 0$ tem-se $f_1(t) = q(t)$ e para $x = L$ tem-se $f_2(t) = 0$. $G(x, t|x', \tau)$ representa a função de Green, α e k são difusividade e condutividade térmica, respectivamente (COLE *et al.*, 2010); (ÖZİŞIK, 1993); (FERNANDES, 2009).

Assim, resumindo as características particulares do problema, descritas nas Eqs. (3.3a)-(3.3c), tem-se que

$$F(x) = T_0; \quad g(x, t) = 0; \quad f_1(t) = q(t); \quad \text{e} \quad f_2(t) = 0 \tag{3.5}$$

E substituindo (3.5) em (3.4) obtém-se

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{q(\tau)}{k} d\tau \tag{3.6}$$

A função $G(x, t|x', \tau)$ é substituída nesta Eq. (3.6) por uma função de Green particular $G_{X22}(x, t|x', \tau)$, que é obtida por meio de tabelas em Cole *et al.* (2010) e é dada por

$$G_{X22}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \tag{3.7}$$

É importante observar que a G_{X22} é dada em termos do atraso $t - \tau$, uma vez que por

definição $G(x, t|x', \tau)$ é uma função de $t - \tau$. Isto decorre do argumento de que se pode entender a função de Green como

$$G(x, t|x', \tau) = G(\text{efeito/impulso}) = \text{função}(t - \tau)$$

onde “ x, t ” representa o “efeito”, isto é, a temperatura no meio em uma posição x e um tempo t devido a um pulso de calor numa posição x' e tempo τ (ÖZİŞIK, 1993). Além disso, $m = 1, 2, 3, \dots, M$ é o número de termos do somatório (autovalores) necessários para a convergência da série, dado um erro ϵ desejado e suficiente.

Desta forma, a solução analítica do problema em estudo é dada por

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha}{kL} \int_0^t q(\tau) d\tau + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^t e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha \tau} q(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Observa-se da Eq. (3.8) que o problema direto se estabelece caso o fluxo de calor seja conhecido, restando apenas o cálculo das integrais. Por exemplo, se $q(t)$ é constante ou uma função exponencial, $q(t) = c_1 e^{(-c_2 t)}$, com c_1 e c_2 não nulos, a solução é facilmente determinada de forma “puramente” analítica. Entretanto, em uma situação real o fluxo de calor, $q(t)$, não é descrito por uma expressão analítica, uma vez que sua natureza é discreta. Nesse caso, a solução poderia ser chamada de “híbrida”, pois a integral é necessariamente calculada a partir da discretização do fluxo de calor.

3.1.2 Solução híbrida

A solução híbrida para o problema direto é uma alternativa para o emprego de dados reais em concomitância à solução analítica. Observa-se, que o fluxo de calor experimental (dados discretos) pode ser representado como um vetor de suas componentes (Fig. 3.4), que são constantes em cada intervalo de tempo, isto é, $q(t) = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]$ sendo q_n a componente para o intervalo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, com $n = 1, 2, \dots, N - 1$.

Portanto, de forma genérica, a primeira integral que aparece na Eq. (3.8) pode ser expressa por

$$\int_0^t q(\tau) d\tau = \int_{t_1=0}^{t_2} q_1 d\tau + \int_{t_2}^{t_3} q_2 d\tau + \dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_n d\tau = \sum_{n=1}^{N-1} q_n (t_{n+1} - t_n) \quad (3.9)$$

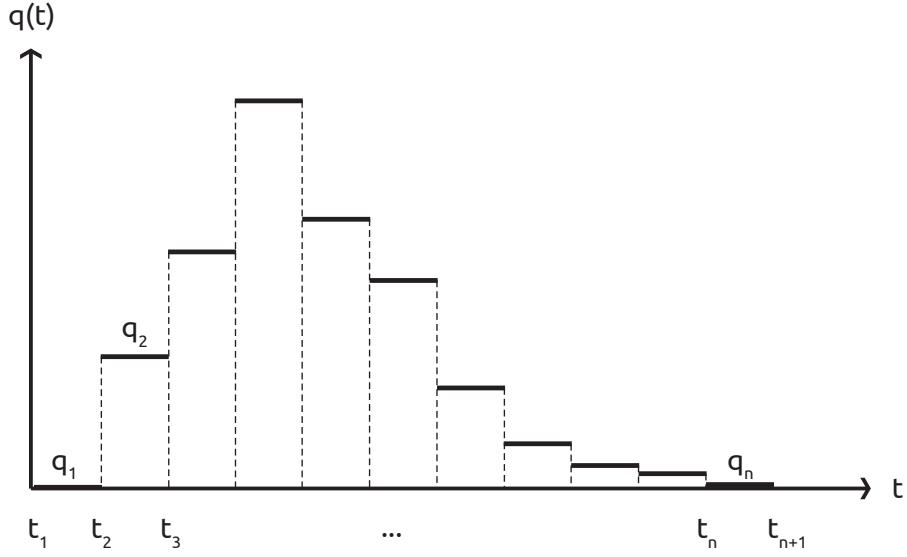


Figura 3.4: Fluxo de calor discreto

Analogamente, a segunda integral da Eq. (3.8) pode ser generalizada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha \tau} q(\tau) d\tau &= \int_{t_1=0}^{t_2} e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha \tau} q_1 d\tau + \int_{t_2}^{t_3} e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha \tau} q_2 d\tau + \dots + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha \tau} q_n d\tau \\
 &= \frac{1}{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left(e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha t_{n+1}} - e^{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha t_n} \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Então, a Eq. (3.8) pode ser re-escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= T_0 + \frac{\alpha}{kL} \sum_{n=1}^{N-1} q_n (t_{n+1} - t_n) \\
 &+ \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\frac{m\pi x}{L})}{(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha} \sum_{n=1}^{N-1} q_n \left(e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha (t-t_{n+1})} - e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha (t-t_n)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Para validar a solução híbrida (Eq. (3.11)), obtém-se a solução analítica considerando o fluxo de calor, $q(t) = c_1 e^{-c_2 t}$ em Eq. (3.8), e assim, resolvendo as integrais no tempo obtém-se

$$\begin{aligned}
T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha}{kL} \frac{c_1}{c_2} (1 - e^{-c_2 t}) \\
+ \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{c_1}{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha - c_2\right]} \left(e^{-c_2 t} - e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t}\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

As soluções dadas pelas Eqs. (3.11) e (3.12) são implementadas no MATLAB® com as seguintes características físicas e geométricas usadas, condutividade térmica, $k = 0,159$ [$W/m.K$], difusividade térmica, $\alpha = 1,57E-07$ [m^2/s]; temperatura inicial, $T_0 = 25$ [$^{\circ}C$], comprimento da placa, $L = 50E-03$ [m] e $dt = 1; 0,5; 0,1; 0,01$ [s]. Para o fluxo de calor discreto, somente aplicado à (3.12), tem-se o vetor $q_n = [0 \quad c_1 \exp(-c_2 t)]$, com $c_1 = 320$ e $c_2 = 0,002$ (FERNANDES; GUIMARÃES, 2012).

A Tabela 3.1 mostra a comparação entre as soluções puramente analítica (Eq. (3.11)) e híbrida (Eq. (3.12)). Como esperado, observa-se que quanto menor for o intervalo de discretização de tempo mais próximas as soluções estarão uma da outra. Mesmo para o passo de discretização de tempo igual um segundo ($dt = 1 s$), que é possível de ser realizado experimentalmente, as duas soluções mostram-se muito próximas.

A força da solução híbrida reside no fato que posteriormente dada a solução do problema inverso, tem-se uma estimativa para o fluxo de calor. Torna-se, portanto, necessária a sua verificação/validação, ou seja, é necessário verificar se o fluxo de calor estimado retorna o campo de temperatura esperado.

Tabela 3.1: Comparação entre as soluções obtidas pelas Eqs. (3.11) e (3.12)

$x = 0$	$dt = 1 s$		$dt = 0,5 s$		$dt = 0,1 s$		$dt = 0,01 s$	
	Eq. (3.11) $T(q(t))$	Eq. (3.12) $T(q = [q_i])$						
0,0	25,0000000	25,0000000	0,0000000	25,0000000	0,0000000	25,0000000	0,0000000	25,0000000
1,0	25,8782847	25,8794429	0,0011581	25,8788273	0,0005425	25,8783816	0,0000969	25,8782937
2,0	26,2488556	26,2504052	0,0015496	26,2495887	0,0007331	26,2489898	0,0001341	26,2488683
3,0	26,5320627	26,5339046	0,0018419	26,5329396	0,0008769	26,5322252	0,0001625	26,5320782
4,0	26,7698621	26,7719470	0,0020849	26,7708592	0,0009971	26,7700485	0,0001864	26,7698800
5,0	26,9785294	26,9808264	0,0022970	26,9796316	0,0011022	26,9787367	0,0002072	26,9785494
6,0	27,1664236	27,1689108	0,0024872	27,1676202	0,0011966	27,1666496	0,0002260	27,1664454
7,0	27,3385172	27,3411782	0,0026610	27,3398003	0,0012830	27,3387605	0,0002433	27,3385408
8,0	27,4980549	27,5008767	0,0028218	27,4994180	0,0013631	27,4983142	0,0002592	27,4980801
9,0	27,6472935	27,6502654	0,0029719	27,6487313	0,0014378	27,6475676	0,0002741	27,6473201
10,0	27,7878784	27,7909916	0,0031132	27,7893866	0,0015082	27,7881666	0,0002882	27,7879064

3.1.3 Função de transferência analítica

A metodologia proposta para a obtenção analítica da função de transferência é baseada na teoria de sistemas dinâmicos de uma entrada e uma saída. Isto é, para qualquer entrada $x(t)$, a saída $y(t)$ é dada pela integral de convolução, expressa na Eq. (3.2), representada em termos de fluxo de calor (entrada) e temperatura (resposta). Assim, pode-se escrever

$$T(x, t) = h(x, t) * q(t) = \int_0^t h(x, t - \tau)q(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

onde a função $h(x, t)$ é igual a 0 para $\tau < 0$.

A função de transferência de um sistema pode ser definida como a transformada de Laplace da resposta impulsiva do sistema, $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$. Como a função de transferência é independente do par entrada/resposta propõe-se como sinal de entrada (fluxo de calor) a função Delta de Dirac, $q(t) = \delta(t)$, ou seja

$$T(x, t) = h(x, t) * \delta(t) = \int_0^t h(x, t - \tau)\delta(\tau)d\tau = h(x, t) \quad (3.14)$$

Observa-se, da propriedade de elemento neutro da convolução que, $h * \delta = h$, assim, obtém-se a resposta impulsiva sem a necessidade de resolver a integral.

O problema de condução de calor 1D, $X22$, e a teoria de sistema dinâmico de uma entrada e uma saída podem ser relacionados a partir das Eqs. (3.6) e (3.14). Relacionando-se estas duas equações é possível identificar a resposta impulsiva, $h(x, t)$. Observa-se que a Eq. (3.6) pode ser re-escrita da seguinte forma

$$\Theta(x, t) = T(x, t) - T_0 = \alpha \int_0^t G_{X22}(x, t|0, t - \tau) \frac{q(\tau)}{k} d\tau \quad (3.15)$$

E ainda, considerando o fluxo de calor $q(t) = \delta(t)$ tem-se

$$\Theta(x, t) = \alpha \int_0^t G_{X22}(x, t|0, t - \tau) \frac{\delta(\tau)}{k} d\tau = \frac{\alpha}{k} G_{X22}(x, t|0, t) \quad (3.16)$$

Assim, comparando-se as equações (3.14) e (3.16) conclui-se que a resposta impulsiva,

para este caso particular, $X22$, é dada por

$$h(x, t) = \frac{\alpha}{k} G_{X22}(x, t|0, t) = \frac{\alpha}{kL} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.17)$$

Como a resposta impulsiva é dependente da variável x (posição),

se $x = 0$ tem-se

$$h(0, t) = \frac{\alpha}{kL} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \quad (3.18)$$

E, para $x = L$

$$h(L, t) = \frac{\alpha}{kL} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos(m\pi) \quad (3.19)$$

Pode-se ainda observar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) \rightarrow \frac{\alpha}{kL} \quad (3.20)$$

Deste fato, conclui-se que a resposta impulsiva, h , tem a unidade métrica dada por $\frac{\alpha}{kL}$ e é $\frac{m^2}{s} \frac{K}{W}$, ou ainda $\frac{K}{Js}$.

Então, identificada a função de transferência do problema de condução de calor, por meio da transformada de Laplace da resposta impulsiva, e, com o conhecimento da resposta do sistema (temperatura experimental ou hipotética) é possível obter-se uma estimativa para a excitação do sistema, ou seja, o fluxo de calor. Este é o procedimento proposto para a solução do problema inverso que será apresentado a seguir.

3.1.4 Solução do problema inverso

Já foi citado que o operador linear transformada de Laplace fornece a relação matemática entre entrada e saída do sistema dinâmico. Sabe-se que para qualquer sistema dinâmico (Fig. 3.2), a relação entre entrada e saída no domínio da variável complexa s é dada pela multiplicação expressa na Eq. (3.1), ou no domínio do tempo pela convolução. Assim, em

termos do par fluxo de calor/temperatura tem-se

$$\mathcal{L}[T(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t) * q(t)] \Rightarrow T(x, s) = H(x, s) \cdot q(s) \quad (3.21)$$

Se no domínio de Laplace a operação entre $H(x, s)$ e $q(s)$ trata-se de uma multiplicação, pode-se escrever

$$q(s) = \frac{1}{H(x, s)} \cdot T(x, s) \quad (3.22)$$

Ou, no domínio tempo, aplica-se a transformada inversa de Laplace, e obtém-se a convolução (ou o que denomina-se deconvolução, para inverter os efeitos da convolução $T(x, t) = q(t) * h(x, t)$)

$$\mathcal{L}^{-1}[q(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{H(x, s)} \cdot T(x, s)\right] \Rightarrow q(t) = \frac{1}{h(x, t)} * T(x, t) \quad (3.23)$$

Portanto, observando a Eq. (3.23), ocorre uma troca entre o par entrada/resposta, isto é, a solução do problema trata-se da estimativa da resposta do sistema, ou seja, o fluxo de calor, cuja entrada passa ser a temperatura (por exemplo, a temperatura obtida experimentalmente onde é possível ocorrer a adição de ruídos), e a função de transferência é dada por $\frac{1}{H}$, como é mostrado na Fig. 3.5.

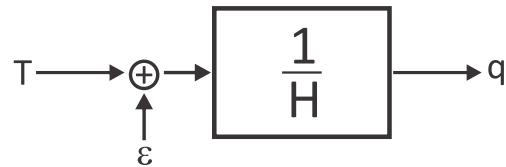


Figura 3.5: Diagrama de blocos para o problema inverso

Propõem-se, assim, a obtenção do fluxo de calor por meio da resposta impulsiva analítica e pelo conhecimento da distribuição de temperatura (experimental ou hipotética), realizando as instruções computacionais de convolução (*deconv*) ou transformada de Fourier (*fft*) e transformada inversa de Fourier (*ifft*), funções dadas pelo MATLAB®, que são equivalentes aos procedimentos matemáticos descritos pelas Eqs. (3.21), (3.22) e (3.23).

Segundo Smith (1998), o procedimento de convolução entre a entrada do sistema e a resposta impulsiva é a maneira mais rigorosa de implementar um filtro digital. Nesse caso

quando se usa a resposta impulsiva dessa maneira tem-se o o filtro digital denominado *kernel*.

Pode-se, ainda, extrapolar o uso da teoria de sistemas dinâmicos e, assim, mostrar que é possível em uma outra abordagem estimar o fluxo de calor, neste caso, em função das auto-densidades e densidades espetrais da entrada e saída do sistema.

3.1.5 Problema inverso em termos de densidade espectral

Observa-se que os sistemas dinâmicos mostrados na Fig. 3.6 satisfazem a relação de comutatividade, i.e., $T(x, s) = H(x, s) \cdot q(s) = q(s) \cdot H(x, s)$. Como $H(x, s)$ é conhecida, e, pretende-se estimar $q(s)$, então, $H(x, s)$ pode ser considerada como a entrada do sistema, e $q(s)$ assume o papel da função de transferência do sistema. $T(x, s)$ continua sendo a saída do sistema, que também é conhecida, ou hipoteticamente ou por meio de medições experimentais.

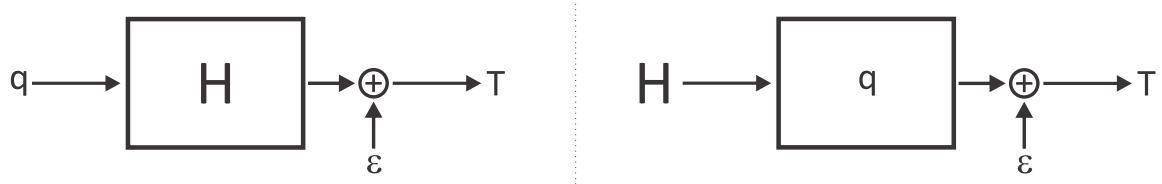


Figura 3.6: Diagrama de blocos para o problema inverso, outra abordagem

Desta forma, para a estimativa do fluxo de calor, q , o procedimento é exatamente o mesmo processo de obtenção da estimativa da função de transferência ou função resposta em frequência (RFR), bastante comum no caso de aplicações em análise de sinais (BENDAT; PIERSOL, 1996).

Então

$$S_{TT}(s) = |q(s)|^2 \cdot S_{HH}(s) \Rightarrow |q(s)|^2 = \frac{S_{TT}(s)}{S_{HH}(s)} \quad (3.24)$$

ou ainda,

$$S_{HT}(s) = q(s) \cdot S_{HH}(s) \Rightarrow q(s) = \frac{S_{HT}(s)}{S_{HH}(s)} \quad (3.25)$$

onde S_{TT} é a densidade espectral da saída, ou seja da temperatura, T ; S_{HH} é a auto-densidade

espectral da entrada, H e S_{HT} é a densidade espectral cruzada entre entrada e saída.

Desta forma, a solução do problema inverso é obtida por meio de uma das Eqs. (3.22), (3.24), (3.25), no domínio de Laplace, ou ainda, no domínio do tempo pela Eq. (3.23), os resultados destas propostas se mostraram equivalente.

3.1.6 Análise de estabilidade

A resposta impulsiva do sistema, $h(x, t)$, é independente do par entrada/saída (fluxo/-temperatura) do sistema dinâmico e, para o caso X22, ela fornece uma descrição completa das características do sistema.

A função de transferência de um sistema pode ser definida como a transformada de Laplace da resposta impulsiva do sistema, então, aplicando Laplace na Eq. (3.16), tem-se que

$$H(x, s) = \frac{\alpha}{kLs} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{s + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.26)$$

Neste ponto é importante a análise da existência ou não da transformada de Laplace da resposta impulsiva $h(x, t)$ e de sua resposta em frequência, $\mathcal{L}[h(x, t)] = H(x, s)$. Ou seja, do comportamento do sistema dinâmico (direto), representado na Fig. 3.2 e pela Eq. (3.1).

Assim como uma análise da estabilidade do sistema dinâmico (inverso) representado pela resposta impulsiva $\tilde{h}(x, t) = \frac{1}{(h(x, t))}$ e de sua resposta em frequência, $\mathcal{L}[\tilde{h}(x, t)] = \frac{1}{(H(x, s))}$ representado pela Fig. 3.5.

Observa-se que a solução do problema inverso dada por

$$\mathcal{L}^{-1}[q(s)] = q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{H(x, s)} \cdot T(x, s) \right] \quad (3.27)$$

depende fundamentalmente da estabilidade do produto de $\frac{1}{H(x, s)} \cdot T(x, s)$ sendo $\frac{1}{H(x, s)} = \mathcal{L}[\tilde{h}(x, t)]$ e $T(x, s) = \mathcal{L}[T(x, t)]$.

Caso cada termo independente seja convergente e limitado (e se possa garantir a existência da transformada de Laplace) então o seu produto também será limitado e não divergirá.

A seguir, a condição de existência da transformada de Laplace para função de trans-

ferência do modelo 1D, $h(x, t)$, é provada matematicamente, assim como é provado que $\mathcal{L}^{-1}[\tilde{h}(x, t)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{h(x, t)}\right]$ é estável.

3.1.6.1 Estabilidade do sistema dinâmico direto

Observa-se que para a existência da transformada de Laplace de $h(x, t)$ é suficiente que (WYLIE; BARRET, 2007):

- (a) Em cada intervalo de $[0, \infty)$, $h(x, t)$, deve ser limitada e continua (ou continua por partes). Nesse caso, observa-se da Eq. (3.16) que $h(x, t)$ é integrável e pode ser dada por e portanto uma função contínua em todo o intervalo $[0, \infty)$
- (b) Existe uma constante real tal que a integral $\int_0^\infty e^{(-st)}|h(x, t)|dt$ seja convergente. Esta condição pode ser reescrita como sendo: existe uma constante M com a propriedade que $e^{(-st)}|h(x, t)|$ é limitado quando t tende a infinito; isto é, existem as constantes κ , c , \mathcal{C} e \mathcal{Q} tal que

$$e^{(-st)}|h(x, t)| < \mathcal{C} \text{ para todo } t > \mathcal{Q}$$

Na realidade, satisfazer a condição (b) é dizer que a função é de ordem exponencial. Ou seja, basta provar que

$$|h(x, t)| < c e^{\kappa t}$$

Observando-se os termos

$$\left| \frac{\alpha}{kL} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right|$$

E considerando que

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{3.28}$$

quaisquer a e b reais, então conclui-se que se cada termo separadamente for limitado, então a soma também será.

Nesse caso $\frac{\alpha}{KL}$ é de ordem exponencial se

$$\left| \frac{\alpha}{KL} \right| \leq c e^{\kappa t} \quad (3.29)$$

Observa-se que a Eq. (3.29) é satisfeita fazendo-se $c > 0$ e igual a $\frac{\alpha}{KL}$ e $\kappa = 0$.

O último termo

$$\frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t}$$

é claramente de ordem exponencial, uma vez que

$$\left| c_m e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \right| \leq c e^{\kappa t} \quad (3.30)$$

E a Eq. (3.30) pode ser garantida obtendo-se para cada valor de m ,

$$c_m = \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{ e } \kappa_m = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha$$

Assim, a função de transferência do sistema $H(x, s)$ existe, é limitada, convergente e é dada por $\mathcal{L}[h(x, t)] = H(x, s)$

$$H(x, s) = \frac{\alpha}{kLs} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{s + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.31)$$

Observa-se ainda que a função de transferência é caracterizada por seus zeros (valores de s em que $H = 0$) e pólos (valores de s em que $H \rightarrow \infty$). Neste caso, observa-se que H não possui zero. E, seus pólos são números reais dados por $s = 0$ e $s = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha$, com $m = 1, 2, \dots, M$. Quando $x = L/2$, tem-se $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ se m é ímpar, assim, para essa posição o número de pólos é reduzido em $s = 0$ e $s = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha$, com m par. Sabe-se que os sistemas dinâmicos estáveis são caracterizados por terem todos os seus pólos no semiplano esquerdo do plano complexo s , como mostra a Fig. 3.7.

O Teorema do Valor Final afirma que se o sistema é estável e tende a um valor constante, c , os limites mostrados na Eq. (3.32) são satisfeitos (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). Nesse caso, verifica-se facilmente que $c = \alpha/kL$, ao calcular os limites para Eqs. (3.16)

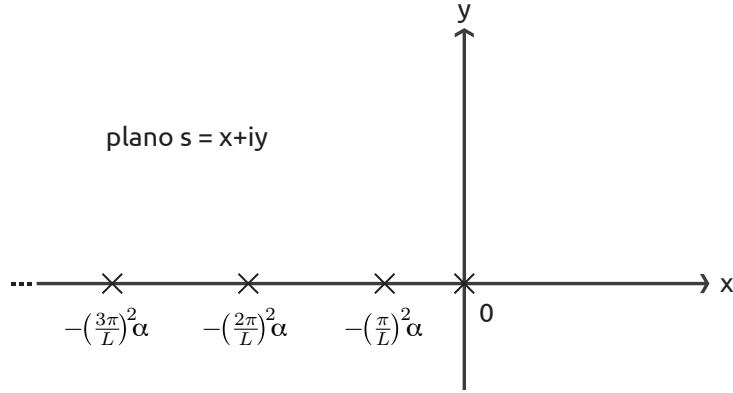


Figura 3.7: Localização dos pólos de $H(x, s)$ no plano complexo s

e (3.31).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) = c = \lim_{s \rightarrow 0} sH(x, s) \quad (3.32)$$

Mostra-se na sequência a análise sobre o comportamento e a existência do produto $\frac{1}{H(x, s)} \cdot T(x, s)$ para o sistema dinâmico inverso.

3.1.6.2 Estabilidade do sistema dinâmico inverso

Observa-se da Figura 3.5 que a resposta do sistema $q(x, t)$ pode ser dada por

$$q(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x, t - \tau)} \right] T(x, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x, t - \tau) T(x, \tau) d\tau \quad (3.33)$$

ou ainda da propriedade de convolução

$$\mathcal{L}^{-1}[q(s)] = q(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{h}(x, t)T(x, t)] \quad (3.34)$$

Assim, o sistema poderá ser considerado estável se para cada possível função limitada de entrada

$$x(t) = T(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[T(x, t)] \quad (3.35)$$

produzir uma função de saída

$$y(t) = q(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[q(x, s)] \quad (3.36)$$

Em um sistema com resposta impulsiva

$$\tilde{h}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \quad (3.37)$$

Reescrevendo a Eq. (3.33) tem-se que

$$q(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x, t - \tau) T(x, \tau) d\tau \quad (3.38)$$

Como para um sistema fisicamente realizável $\tilde{h}(x, t) = 0$ para $t < 0$ então

$$q(x, t) = \int_0^{\infty} \tilde{h}(x, t - \tau) T(x, \tau) d\tau \quad (3.39)$$

O sistema físico é dito estável se para cada possível função limitada de entrada produzir uma função limitada de saída.

E segue que (BENDAT; PIERSOL, 1996)

$$|q(x, t)| = \left| \int_0^{\infty} \tilde{h}(x, t - \tau) T(x, \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |\tilde{h}(x, t - \tau)| |T(x, \tau)| d\tau \quad (3.40)$$

Assim, quando um sinal de entrada $T(x, t)$ é limitado, existe alguma constante finita \mathcal{A} tal que

$$|T(x, t)| \leq \mathcal{A} \text{ para todo } t \quad (3.41)$$

Como $T(x, t)$ são temperaturas medidas a partir de um sistema físico possível, a Eq. (3.41) é satisfeita pois existe um parâmetro \mathcal{A} para qualquer t em que a equação é válida.

Logo,

$$|q(x, t)| \leq \mathcal{A} \int_0^{\infty} |\tilde{h}(x, t - \tau)| d\tau \quad (3.42)$$

Resta provar que se a função $|\tilde{h}(x, t)|$ é convergente e limitada

$$\left| \int_0^\infty \tilde{h}(x, t - \tau) d\tau \right| \leq \mathcal{C} \quad (3.43)$$

A demonstração dessa afirmativa é feita considerando o teorema do valor final que afirma que o sistema é estável se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}(x, t) = c \quad (3.44)$$

Avaliando o limite da Eq. (3.44), obtém-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\frac{\alpha}{kL} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-(\frac{m\pi}{L})^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)} \right] = \frac{1}{\frac{\alpha}{kL}} = \frac{kL}{\alpha} \quad (3.45)$$

Assegura-se assim que o sistema dinâmico inverso é estável, linear e portanto não necessita de regularização, desde que os parâmetros do sistema (α , k e L) sejam invariantes com o tempo.

3.2 Problema 3D - caso particular $X33Y33Z33$

Um modelo térmico equivalente para a descrição do problema de condução de calor originado por um processo de usinagem utilizando-se ferramenta de geometria definida é representado na Fig. 3.8. A ferramenta de corte é analisada como um corpo de geometria retangular que é submetido a um fluxo de calor superficial.

Observa-se que todas as faces, exceto a região onde ocorre o fluxo de calor, estão sujeitas à uma troca de calor por convecção. Em um processo de usinagem de corte ortogonal pode-se identificar claramente que as superfícies laterais e superior estão, de fato, expostas à um meio à temperatura ambiente. Para a obtenção da solução do problema direto, tanto o fluxo de calor imposto, como as propriedades térmicas e os diversos parâmetros como os coeficientes $h_i = h$ são considerados conhecidos.

O problema térmico dado pela Fig. 3.8 é descrito pela seguinte equação da difusão de

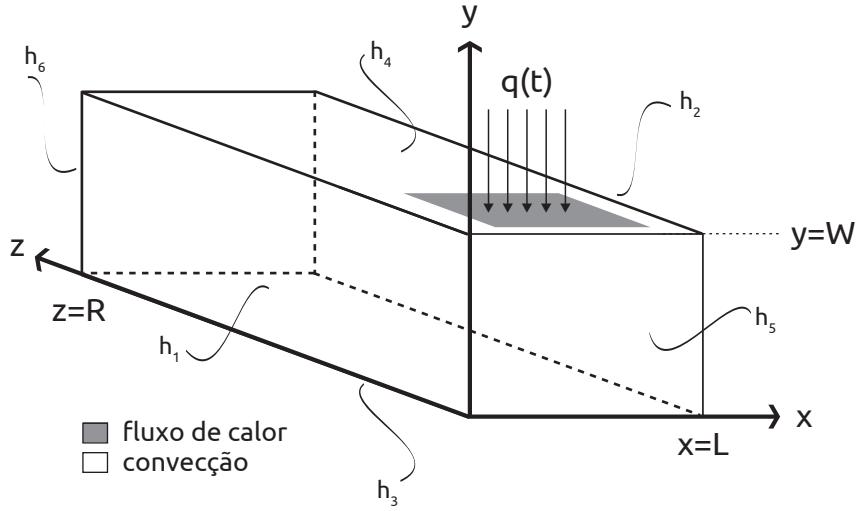


Figura 3.8: Problema X33Y33Z33

calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.46a)$$

sujeito às condições de contorno na direção x

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -h_1(T - T_\infty); \quad (3.46b)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(T - T_\infty) \quad (3.46c)$$

e às condições de contorno na direção y

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3(T - T_\infty) \quad (3.46d)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = -q(t) + h_4(T - T_\infty) \quad (3.46e)$$

e às condições de contorno na direção z

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -h_5(T - T_\infty) \quad (3.46f)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=R} = h_6(T - T_\infty) \quad (3.46g)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.46h)$$

As Equações (3.46b) - (3.46g) podem ser homogeneizadas definindo-se a variável $\theta = T - T_\infty$, assim

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.47a)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -h_1 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 \theta; \quad (3.47b)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = -h_3 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=W} - h_4 \theta = -q(t); \quad (3.47c)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=0} = -h_5 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=R} = h_6 \theta \quad (3.47d)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.47e)$$

Em sequência serão mostradas a solução do problema direto e a obtenção da função de transferência em termos de funções de Green. Para este caso particular $X33Y33Z33$, o procedimento para a obtenção da solução do problema inverso é análogo ao caso unidimensional.

Uma vantagem no uso de soluções integrais por funções de Green é a possibilidade de se construir, sem dificuldades adicionais, soluções multidimensionais a partir da obtenção das funções de Green unidimensionais. As versões da equação-solução 2D e 3D são absolutamente equivalentes à equação unidimensional e as funções de Green podem ser obtidas a partir de

produtos das funções de Green 1D nas diversas direções, respeitando-se algumas particularidades da geometria do problema de condução de calor (COLE *et al.*, 2010); (FERNANDES, 2009).

3.2.1 Solução do problema direto

A solução do problema homogêneo, descrito pelas Eqs. (3.47a)-(3.47e), em termos de funções de Green é dada por (COLE *et al.*, 2010); (FERNANDES, 2009)

$$\begin{aligned}\theta(x, y, z, t) = & \int_0^L \int_0^W \int_0^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ & + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} q(\tau) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau\end{aligned}\quad (3.48)$$

O primeiro termo da Equação (3.48) é referente ao termo da temperatura inicial ($\theta(x, y, z, 0)$) e o segundo termo está relacionado com a condição de contorno de fluxo de calor imposto à área arbitrária delimitada por $0 \leq L_1 \leq x \leq L_2 \leq L$ e $0 \leq R_1 \leq z \leq R_2 \leq R$ em $y = W$, como mostrado na Fig. 3.9.

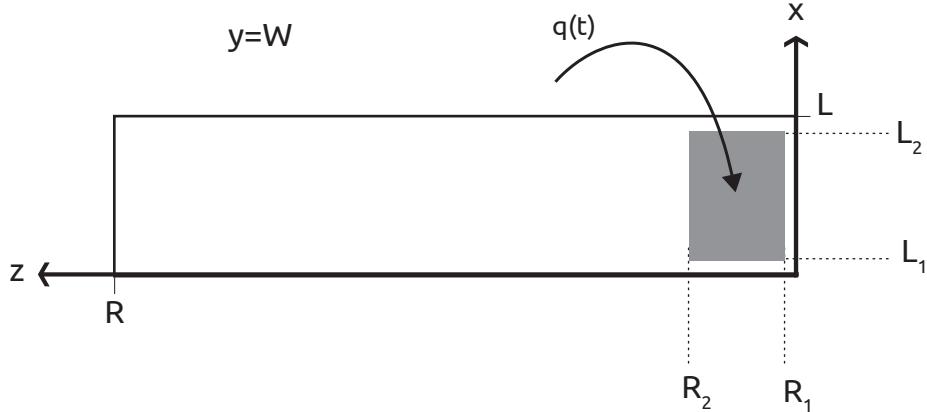


Figura 3.9: Problema X33Y33Z33 - vista superior ($y = W$)

Obtém-se a função de Green $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ observando-se os tipos de condições de contorno nas direções de x , y e z , como sendo três problemas unidimensionais independentes. Então, obtém-se a função $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ como o produto destas funções de Green, isto é, $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}$.

Na direção x , y e z , tem-se as condições de contorno do tipo três, que significa condição de convecção, e a função de Green unidimensional pode ser encontrada em Cole *et al.* (2010),

na direção x como

$$G_{X33}(x, t|x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \right] \\ \times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right]}{\left(\alpha_m^2 + B_1^2 \right) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} \right] + B_1} \quad (3.49)$$

onde $\tan \alpha_m = \frac{\alpha_m(B_1+B_2)}{\alpha_m^2 - B_1 B_2}$ e $B_1 = \frac{h_1 L}{k}$ e $B_2 = \frac{h_2 L}{k}$.

Na direção y tem se a mesma função de Green, tornando-se necessário apenas mudar a variáveis que caracterizam o problema no eixo y . Assim,

$$G_{Y33}(y, t|y', \tau) = \frac{2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha(t-\tau)/W^2} \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \right] \\ \times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \right]}{\left(\beta_n^2 + B_3^2 \right) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} \right] + B_3} \quad (3.50)$$

onde $\tan \beta_n = \frac{\beta_n(B_3+B_4)}{\beta_n^2 - B_3 B_4}$ e $B_3 = \frac{h_3 W}{k}$ e $B_4 = \frac{h_4 W}{k}$.

Analogamente para a direção z

$$G_{Z33}(z, t|z', \tau) = \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\gamma_p^2 \alpha(t-\tau)/R^2} \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) \right] \\ \times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right]}{\left(\gamma_p^2 + B_5^2 \right) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} \right] + B_5} \quad (3.51)$$

onde $\tan \gamma_p = \frac{\gamma_p(B_5+B_6)}{\gamma_p^2 - B_5 B_6}$ e $B_5 = \frac{h_5 R}{k}$ e $B_6 = \frac{h_6 R}{k}$.

Os autovalores α_m , β_n e γ_p são obtidos por meio das equações transcendentais que envolvem a função trigonométrica tangente, os índices $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$ e $p = 1, \dots, P$ definem a quantidade de interações (autovalores) necessárias para a convergência das séries, dado um erro de truncamento, ϵ , desejado. Cada B_i é o número de Biot, sendo $i = 1, \dots, 6$.

Portanto, realizando a multiplicação $G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}$ tem-se a função de Green referente

ao o problema $X33Y33Z33$ dada por

$$\begin{aligned}
G_{X33}G_{Y33}G_{Z33} &= G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) \\
&= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \\
&\times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \\
&\times \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Logo, avaliando função de Green (Eq. (3.52)) para $\tau = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
G_{X33}G_{Y33}G_{Z33} &= G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) \\
&= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \times \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

e avaliando a função em $y' = W$ obtém-se

$$\begin{aligned}
& G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}(x, y, z, t|x', W, z', \tau) \\
&= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t-\tau)} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\beta_n\right) + B_3 \sin\left(\beta_n\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \\
&\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \times \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right] \\
&\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Desta forma, substitui-se as Eqs.(3.53) e (3.54) na Eq.(3.48) para a resolução das integrais analíticas que por sua vez são facilmente obtidas. Assim, obtém-se para o primeiro termo

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^W \int_0^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta_0 dx' dy' dz' \\
&= \frac{8\theta_0}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
&\times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \\
&\times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} \\
&\times \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \\
&\times \int_0^L \int_0^W \int_0^R \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)\right] \\
&\times \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right)\right] \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)\right] dx' dy' dz'
\end{aligned} \tag{3.55}$$

e resolve-se facilmente o termo integral

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^W \int_0^R \left[\alpha_m \cos \left(\frac{\alpha_m x'}{L} \right) + B_1 \sin \left(\frac{\alpha_m x'}{L} \right) \right] \left[\beta_n \cos \left(\frac{\beta_n y'}{W} \right) + B_3 \sin \left(\frac{\beta_n y'}{W} \right) \right] \\
& \times \left[\gamma_p \cos \left(\frac{\gamma_p z'}{R} \right) + B_5 \sin \left(\frac{\gamma_p z'}{R} \right) \right] dx' dy' dz' = \\
& = \frac{LWR}{\alpha_m \beta_n \gamma_p} \\
& \times [\alpha_m \sin \alpha_m - B_1(\cos \alpha_m - 1)] [\beta_n \sin \beta_n - B_3(\cos \beta_n - 1)] [\gamma_p \sin \gamma_p - B_5(\cos \gamma_p - 1)] \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Para o segundo termo da Eq. (3.48) tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} q(\tau) G(x, y, z, t | x, W, z, \tau) dx' dz' d\tau \\
& = \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
& \times \frac{[\alpha_m \cos \left(\frac{\alpha_m x}{L} \right) + B_1 \sin \left(\frac{\alpha_m x}{L} \right)] [\beta_n \cos \left(\frac{\beta_n y}{W} \right) + B_3 \sin \left(\frac{\beta_n y}{W} \right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} \right] + B_1 (\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} \right] + B_3} \\
& \times [\beta_n \cos (\beta_n) + B_3 \sin (\beta_n)] \frac{[\gamma_p \cos \left(\frac{\gamma_p z}{R} \right) + B_5 \sin \left(\frac{\gamma_p z}{R} \right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} \right] + B_5} \\
& \times \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[q(\tau) e^{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2} \right) \alpha \tau} \right] \left[\alpha_m \cos \left(\frac{\alpha_m x'}{L} \right) + B_1 \sin \left(\frac{\alpha_m x'}{L} \right) \right] \\
& \times \left[\gamma_p \cos \left(\frac{\gamma_p z'}{R} \right) + B_5 \sin \left(\frac{\gamma_p z'}{R} \right) \right] dx' dz' d\tau \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Integrando os termos dependentes das variáveis espaciais, x' e y' , obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} q(\tau) G(x, y, z, t | x, W, z, \tau) dx' dz' d\tau \\
&= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
&\quad \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \\
&\quad \times \frac{[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} [\beta_n \cos(\beta_n) + B_3 \sin(\beta_n)] \\
&\quad \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \\
&\quad \times \left[L \left[\sin\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] \right] \\
&\quad \times \left[R \left[\sin\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] \right] \\
&\quad \times \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha \tau} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Resta, portanto, resolver a integral temporal que aparece na Eq. (3.58). Então, como mostrado na seção 3.1.2, se o fluxo de calor, $q(t)$ é de origem discreta, implementada-se a solução em termos da solução híbrida.

Como já mencionado, a obtenção do problema inverso depende fortemente da solução do problema direto, o que implica na necessidade de validação (ou verificação) dessa solução.

Portanto, substituindo (3.55) e (3.58) na Eq. (3.48), obtém-se a expressão analítica, em

termos da variável de homogeneização, θ .

$$\begin{aligned}
& \theta(x, y, z, t) = \\
& 8\theta_0 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
& \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \times \frac{[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} \\
& \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \times \frac{1}{\alpha_m \beta_n \gamma_p} \\
& \times [\alpha_m \sin \alpha_m - B_1(\cos \alpha_m - 1)] [\beta_n \sin \beta_n - B_3(\cos \beta_n - 1)] [\gamma_p \sin \gamma_p - B_5(\cos \gamma_p - 1)] \\
& + \frac{\alpha}{k} \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
& \times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \\
& \times \frac{[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} [\beta_n \cos(\beta_n) + B_3 \sin(\beta_n)] \\
& \times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \\
& \times \left\{ L \left[\sin\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left[\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right] \right\} \\
& \times \left\{ R \left[\sin\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left[\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right] \right\} \\
& \times \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha\tau} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{3.59}$$

A solução em termos da variável original T é dada por $T = \theta + T_{\infty}$. Vale lembrar que a solução do problema direto de condução de calor $X33Y33Z33$ é determinada desde que se conheça o fluxo de calor, $q(t)$, e, também, os coeficientes de troca de calor por convecção, h_i .

3.2.2 Função de transferência analítica

Propõe-se exatamente o mesmo procedimento realizado para o problema unidimensional ($X22$), mostrado na seção 3.1.3 isto é, a partir do conhecimento da função de Green que descreve o problema é possível identificar a resposta impulsiva do sistema, e portanto, sua função de transferência.

A solução geral do problema $X33Y33Z33$, Eq. (3.48), pode ser re-escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\Theta(x, y, z, t) &= \theta(x, y, z, t) - \int_0^L \int_0^W \int_0^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ &= \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} q(\tau) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau\end{aligned}\quad (3.60)$$

Então, organizando a expressão anterior em termos do Teorema da Convolução, fica fácil visualizar a operação de convolução entre o fluxo de calor, $q(t)$ e a integral de área da função de Green, $G(x, y, z, t|x', W, z', \tau)$, isto é

$$\Theta(x, y, z, t) = \int_0^t q(\tau) \left(\frac{\alpha}{k} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \right) d\tau \quad (3.61)$$

A função de Green é dada pela Eq. (3.52). Observa-se novamente que $G_{X33Y33Z33}$ é dada em termos do atraso $t - \tau$ (ÖZİŞIK, 1993) e portanto, consolida-se a convolução dada pela Eq. (3.61). A Fig. 3.10 a ilustra.

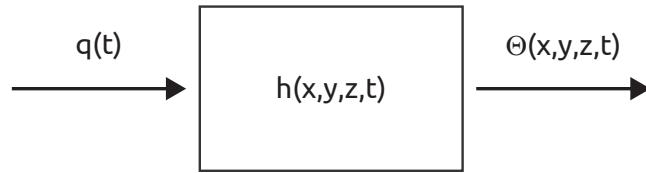


Figura 3.10: Diagrama de bloco referente a convolução dada pela Eq. (3.61)

Logo, considerando o fluxo de calor como a função Delta de Dirac, $q(t) = \delta(t)$, e, também, considerando o atraso $t - \tau$ na expressão de convolução tem-se

$$\begin{aligned}h(x, y, z, t) &= \int_0^t \delta(\tau) \left(\frac{\alpha}{k} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' \right) d\tau \\ &= \delta(t) * \left(\frac{\alpha}{k} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G(x, y, z, t|x', W, z', t - \tau) dx' dz' \right)\end{aligned}\quad (3.62)$$

Assim, valendo-se da propriedade de convolução ($H * \delta = H$), identifica-se a função de transferência do problema de condução de calor $X33Y33Z33$ como sendo

$$h(x, y, z, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} G(x, y, z, t | x', W, z', \tau) dx' dz' \quad (3.63)$$

onde

$$\begin{aligned} G(x, y, z, t | x', W, z', \tau) &= \\ &= \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\ &\times \frac{[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right)]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)}\right] + B_1} \\ &\times \frac{[\beta_n \cos(\beta_n) + B_3 \sin(\beta_n)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)}\right] + B_3} \\ &\times \frac{[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right)]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)}\right] + B_5} \\ &\times \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \\ &\times \left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right] \\ &\times \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Observa-se, neste caso, que, é necessário realizar a integração de área para obter a expressão analítica para a função de transferência.

Ou seja, integrar os termos dependentes de x' e z'

$$\begin{aligned} &\int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right] dx' dz' \\ &= \left[L \left(\sin\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right) - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left(\cos\left(\frac{\alpha_m L_2}{L}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_m L_1}{L}\right) \right) \right] \\ &\times \left[R \left(\sin\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right) - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left(\cos\left(\frac{\gamma_p R_2}{R}\right) + \cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Portanto, a função de transferência para o problema $X33Y33Z33$ é dada por

$$\begin{aligned}
 h(x, y, z, t) = & \frac{\alpha}{k LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha t} \\
 & \times \frac{\left[L \left(\sin \left(\frac{\alpha_m L_2}{L} \right) - \sin \left(\frac{\alpha_m L_1}{L} \right) \right) - \frac{B_1 L}{\alpha_m} \left(\cos \left(\frac{\alpha_m L_2}{L} \right) + \cos \left(\frac{\alpha_m L_1}{L} \right) \right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} \right] + B_1} \\
 & \times \frac{[\beta_n \cos(\beta_n) + B_3 \sin(\beta_n)]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} \right] + B_3} \\
 & \times \frac{\left[R \left(\sin \left(\frac{\gamma_p R_2}{R} \right) - \sin \left(\frac{\gamma_p R_1}{R} \right) \right) - \frac{B_5 R}{\gamma_p} \left(\cos \left(\frac{\gamma_p R_2}{R} \right) + \cos \left(\frac{\gamma_p R_1}{R} \right) \right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} \right] + B_5} \\
 & \times \left[\alpha_m \cos \left(\frac{\alpha_m x}{L} \right) + B_1 \sin \left(\frac{\alpha_m x}{L} \right) \right] \\
 & \times \left[\beta_n \cos \left(\frac{\beta_n y}{W} \right) + B_3 \sin \left(\frac{\beta_n y}{W} \right) \right] \\
 & \times \left[\gamma_p \cos \left(\frac{\gamma_p z}{R} \right) + B_5 \sin \left(\frac{\gamma_p z}{R} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

3.2.3 Problema inverso

A solução do problema inverso para o caso $X33Y33Z33$ é obtida a partir do conhecimento da sua função de transferência, $H(s)$, e do campo de temperatura. Assim, aplicam-se os mesmos procedimentos computacionais feitos no caso particular unidimensional, $X22$, mostrado na seção 3.1.4.

A metodologia de solução de problema inverso apresentada nesta pesquisa pode ser aplicada para qualquer tipo de problema de condução de calor 1D, 2D ou 3D para diferentes tipos de condições de contorno. O cerne do método reside em identificar a resposta impulsiva/função de transferência para cada problema particular de condução de calor.

3.2.4 Análise de estabilidade

A mesma análise realizada nas seções 3.1.6.1 e 3.1.6.2, para o problema 1D pode ser aplicada para função de transferência $h(x, y, z, t)$ para o problema 3D.

Observa-se, neste caso, que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, y, z, t)$ tende a zero, onde $h(x, y, z, t)$ é a função de transferência dada pela Eq. (3.66), portanto, conclui-se que, para o caso do problema inverso,

quando a função de transferência é dada por $\frac{1}{h(x, y, z, t)}$, o cálculo de $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x, y, z, t)}$ tende a altos valores numéricos, porém, ainda a um valor limitado.

3.3 Problemas com duas ou mais fontes de calor simultâneas

Apresenta-se, a seguir, o desenvolvimento teórico necessário a aplicação da técnica para casos onde mais de uma fonte de calor devem ser estimadas simultaneamente. Neste caso, obtém-se as componentes das diferentes fontes de calor resolvendo-se um sistema de equações que envolvem diferentes funções transferência. Embora não seja foco desse trabalho a base para estimativas de multicomponentes de fluxo de calor são apresentadas nesta seção.

O método será exemplificado por meio de dois problemas, 1D - X22, com $q_1(t)$ em $x = 0$ e $q_2(t)$ em $x = L$ e 3D - X22Y22Z22, com diferentes fontes de calor atuando em cada uma das faces.

3.3.1 Exemplo 1D - X22, com $q_1(t)$ em $x = 0$ e $q_2(t)$ em $x = L$

Dado o problema unidimensional, X22, com as diferentes fontes de calor $q_1(t)$ em $x = 0$ e $q_2(t)$ em $x = L$, atuando simultaneamente na mesma geometria (Fig. (3.11)), tem-se a sua descrição por meio da equação de difusão de calor dada pela Eq. (3.68)

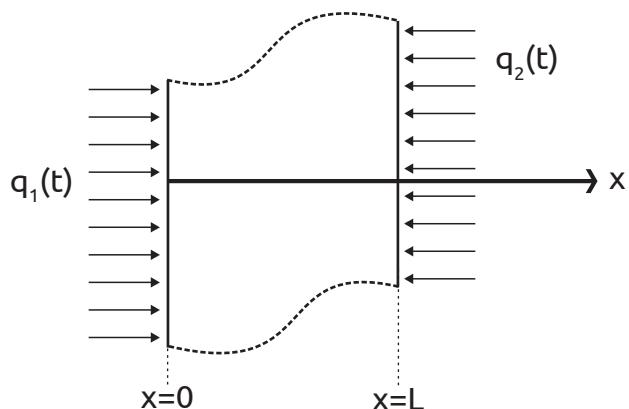


Figura 3.11: X22, com $q_1(t)$ em $x = 0$ e $q_2(t)$ em $x = L$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.67a)$$

sujeito às condições de contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_1(t) \quad (3.67b)$$

e

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -q_2(t) \quad (3.67c)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = T_0 \quad (3.67d)$$

A solução em termos de Green para este problema é dada por

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k} \left[\int_0^t q_1(\tau) G(x, t|0, t-\tau) d\tau - \int_0^t q_2(\tau) G(x, t|L, t-\tau) d\tau \right] \quad (3.68)$$

Sabe-se que

$$G(x, t|x, \tau) = G_{X22} = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (3.69)$$

Re-escrevendo a Eq. (3.68) em termos do Teorema da Convolução, e seguindo a mesmo roteiro apresentando previamente, tem-se

$$T(x, t) - T_0 = q_1(t) * h_1(x, t) - q_2(t) * h_2(x, t) \quad (3.70)$$

sendo

$$h_1(x, t) = \frac{\alpha}{k} G(x, t|0, t) \quad \text{e} \quad h_2(x, t) = \frac{\alpha}{k} G(x, t|L, t) \quad (3.71)$$

Desta forma, pode-se escrever o sistema de 2 equações e 2 incógnitas ($q_1(t)$, $q_2(t)$):

$$\begin{aligned} T_1(0, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1(0, t) - q_2(t) * h_2(0, t) \\ T_2(L, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1(L, t) - q_2(t) * h_2(L, t) \end{aligned} \quad (3.72)$$

A função de transferência é, então, avaliada nas posições requeridas

$$\begin{aligned} h_1(0, t) &= \frac{\alpha}{k} \left[\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \right] \\ h_1(L, t) &= \frac{\alpha}{k} \left[\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos(m\pi) \right] \\ h_2(0, t) &= \frac{\alpha}{k} \left[\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos(m\pi) \right] \\ h_2(L, t) &= \frac{\alpha}{k} \left[\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Observa-se que $\mathcal{G}_1 = h_1(0, t) = h_2(L, t)$ e que $\mathcal{G}_2 = h_1(L, t) = h_2(0, t)$ e fazendo $\Theta_1 = T_1(0, t) - T_0$ e $\Theta_2 = T_2(L, t) - T_0$, então o sistema, (3.72), pode ser re-escrito como:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= q_1(t) * \mathcal{G}_1 - q_2(t) * \mathcal{G}_2 \\ \Theta_2 &= q_1(t) * \mathcal{G}_2 - q_2(t) * \mathcal{G}_1 \end{aligned} \quad (3.74)$$

O mesmo sistema, descrito no domínio de Laplace é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_1 &= q_1(s) \cdot \tilde{\mathcal{G}}_1 - q_2(s) \cdot \tilde{\mathcal{G}}_2 \\ \tilde{\Theta}_2 &= q_1(s) \cdot \tilde{\mathcal{G}}_2 - q_2(s) \cdot \tilde{\mathcal{G}}_1 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Assim, na forma matricial, mas ainda no domínio de Laplace

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{G}}_1 & \tilde{\mathcal{G}}_2 \\ \tilde{\mathcal{G}}_2 & \tilde{\mathcal{G}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(s) \\ -q_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_1 \\ \tilde{\Theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Observa-se que para estimar as distintas fontes de calor $q_1(s)$ e $q_2(s)$ é necessário encontrar a matriz inversa das funções transferências.

3.3.2 Exemplo 3D - X22Y22Z22, diferentes fontes de calor atuando em cada uma das faces da geometria

Sem perda de generalidade, para o problema 3D, X22Y22Z22, com diferentes fontes de calor atuando em cada uma das faces da geometria, mostrado na Fig. 3.12, tem-se solução em termos de Green dada pela Eq. (3.77)

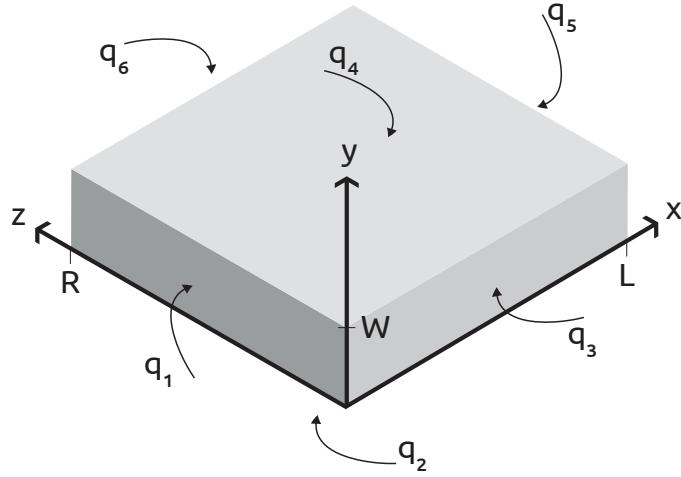


Figura 3.12: X22Y22Z22, diferentes fontes de calor atuando em cada uma das faces geometria

Considerando $q_1(t) \neq q_2(t) \neq q_3(t) \neq q_4(t) \neq q_5(t) \neq q_6(t)$

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, t) = & T_0 + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_0^W \int_0^R q_1(\tau) G(x, y, z, t | 0, y', z', t - \tau) dy' dz' d\tau \\
 & - \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_0^W \int_0^R q_5(\tau) G(x, y, z, t | L, y', z', t - \tau) dy' dz' d\tau \\
 & + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_0^L \int_0^R q_2(\tau) G(x, y, z, t | x', 0, z', t - \tau) dx' dz' d\tau \\
 & - \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_0^L \int_0^R q_4(\tau) G(x, y, z, t | x', W, z', t - \tau) dx' dz' d\tau \\
 & + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_0^L \int_0^W q_3(\tau) G(x, y, z, t | x', y', 0, t - \tau) dx' dy' d\tau \\
 & - \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_0^L \int_0^W q_6(\tau) G(x, y, z, t | x', y', R, t - \tau) dx' dy' d\tau
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

onde $G(x, y, z, t) = G_{X22}G_{Y22}G_{Z22}$

A equação (3.77) pode ser re-escrita em termos do Teorema de Convolução da seguinte

forma

$$T(x, y, z, t) - T_0 = q_1(t) * h_1 - q_5(t) * h_5 + q_2 * h_2 - q_4 * h_4 + q_3 * h_3 - q_6 * h_6 \quad (3.78)$$

As respostas impulsivas, h_i , que descrevem o sistema são dadas por

$$\begin{aligned} h_1(x, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_0^W \int_0^R G(x, y, z, t | 0, y', z', t - \tau) \\ h_5(x, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_0^W \int_0^R G(x, y, z, t | L, y', z', t - \tau) \\ h_2(x, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_0^L \int_0^R G(x, y, z, t | x', 0, z', t - \tau) \\ h_4(x, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_0^L \int_0^R G(x, y, z, t | x', W, z', t - \tau) \\ h_3(x, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_0^L \int_0^W G(x, y, z, t | x', y', 0, t - \tau) \\ h_6(x, y, z, t) &= \frac{\alpha}{k} \int_0^L \int_0^W G(x, y, z, t | x', y', R, t - \tau) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Da mesma forma, a proposta é resolver o sistema de 6 equações e 6 incógnitas (q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 e q_6), cada T_i é trata-se de uma temperatura conhecida em cada uma das faces da geometria, e lembrando que cada h_i deve ser avaliada nas mesmas coordenadas que as temperaturas, T_i , foram avaliadas

$$\begin{aligned} T_1(0, y, z, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1 - q_5(t) * h_5 + q_2 * h_2 - q_4 * h_4 + q_3 * h_3 - q_6 * h_6 \\ T_5(L, y, z, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1 - q_5(t) * h_5 + q_2 * h_2 - q_4 * h_4 + q_3 * h_3 - q_6 * h_6 \\ T_2(x, 0, z, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1 - q_5(t) * h_5 + q_2 * h_2 - q_4 * h_4 + q_3 * h_3 - q_6 * h_6 \\ T_4(x, W, z, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1 - q_5(t) * h_5 + q_2 * h_2 - q_4 * h_4 + q_3 * h_3 - q_6 * h_6 \\ T_3(x, y, 0, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1 - q_5(t) * h_5 + q_2 * h_2 - q_4 * h_4 + q_3 * h_3 - q_6 * h_6 \\ T_6(x, y, R, t) - T_0 &= q_1(t) * h_1 - q_5(t) * h_5 + q_2 * h_2 - q_4 * h_4 + q_3 * h_3 - q_6 * h_6 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Na forma matricial, no domínio da frequência, de maneira compacta pode-se escrever

$$\mathbf{H}_{6 \times 6} \times \mathbf{q}_{6 \times 1} = \mathbf{T}_{6 \times 1} \quad (3.81)$$

onde \mathbf{H} é a matriz das funções transferência é dada por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1(0, y, z, s) & H_5(0, y, z, s) & H_2(0, y, z, s) & H_4(0, y, z, s) & H_3(0, y, z, s) & H_6(0, y, z, s) \\ H_1(L, y, z, s) & H_5(L, y, z, s) & H_2(L, y, z, s) & H_4(L, y, z, s) & H_3(L, y, z, s) & H_6(L, y, z, s) \\ H_1(x, 0, z, s) & H_5(x, 0, z, s) & H_2(x, 0, z, s) & H_4(x, 0, z, s) & H_3(x, 0, z, s) & H_6(x, 0, z, s) \\ H_1(x, W, z, s) & H_5(x, W, z, s) & H_2(x, W, z, s) & H_4(x, W, z, s) & H_3(x, W, z, s) & H_6(x, W, z, s) \\ H_1(x, y, 0, s) & H_5(x, y, 0, s) & H_2(x, y, 0, s) & H_4(x, y, 0, s) & H_3(x, y, 0, s) & H_6(x, y, 0, s) \\ H_1(x, y, R, s) & H_5(x, y, R, s) & H_2(x, y, R, s) & H_4(x, y, R, s) & H_3(x, y, R, s) & H_6(x, y, R, s) \end{bmatrix}$$

A matriz dos fluxos de calor, \mathbf{q} , é definida por

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1(s) \\ -q_5(s) \\ q_2(s) \\ -q_4(s) \\ q_3(s) \\ -q_6(s) \end{bmatrix}$$

E por último, a matriz de temperatura, \mathbf{T} , é definida como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1(0, y, z, s) - \frac{T_0}{s} \\ T_5(L, y, z, s) - \frac{T_0}{s} \\ T_2(x, 0, z, s) - \frac{T_0}{s} \\ T_4(x, W, z, s) - \frac{T_0}{s} \\ T_3(x, y, 0, s) - \frac{T_0}{s} \\ T_6(x, y, R, s) - \frac{T_0}{s} \end{bmatrix}$$

Assim, da Eq. (3.81), conclui-se que para obter a matriz de fluxo de calor, \mathbf{q} , é necessário inverter a matriz das funções transferência, \mathbf{H} .

A solução de problemas inversos de condução onde se tem diferentes fontes de calor atuando em uma geometria, mostrados nestas duas últimas seções de fundamentos teóricos por meio do método proposto nesta pesquisa, ilustram que a identificação de função de transferência pode ser aplicada a problemas de maior complexidade.

Capítulo 4

PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

Implementação computacional no MATLAB e testes com dados simulados

Nesta seção, mostra-se a aplicação da metodologia descrita no capítulo anterior, quanto aos procedimentos computacionais implementados em MATLAB. Os testes são realizados com dados sintéticos que simulam dados experimentais. Os testes no MATLAB referem-se aos mesmos problemas estudados teoricamente nos fundamentos da técnica de obtenção da solução do problema inverso por meio da identificação da função de transferência analítica, ou seja, apresenta-se a solução computacional para os problemas unidimensional $X22$ e tridimensional $X33Y33Z33$.

Na primeira etapa, preocupa-se em analisar a influência da propriedades termofísicas, condutividade e difusividade térmica do material, k e α . Mostra-se resultados considerando-se materiais de natureza metal e não-metal, tem-se a visão do procedimento por meio da função de transferência amortecida ou não-amortecida, dependendo da posição de análise dos dados. Os testes foram feitos a partir das propriedades do cobre e polietileno. Posteriormente faz-se a análise em termos de outros parâmetros do problema, como por exemplo, o comprimento da amostra do material em análise e a discretização do tempo.

4.1 Problema 1D, $X22$, metal

O problema $X22$ é um dos problemas clássicos em condução de calor que tem aplicação em obtenção de propriedades termofísicas e cujo procedimento experimental pode ser reali-

zado a partir de um problema 3D, $X22Y22Z22$. A equivalência entre $X22Y22Z22$ e $X22$ é valida quando se aplica fluxo de calor em toda área de uma das faces de geometria do problema tridimensional, ou seja, $X22$ é uma ‘fatia’ de $X22Y22Z22$, como ilustrado na Fig. 4.1. Desta forma, faz-se uso desta equivalência entre os problemas 1D e 3D para tornar a solução computacional bem mais simples e rápida. A validação do procedimento computacional encontra-se em Fernandes (2009).

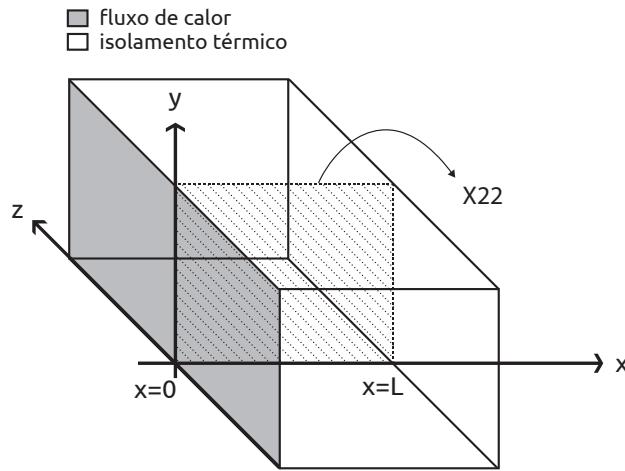


Figura 4.1: Equivalência entre $X22Y22Z22$ e $X22$

4.1.1 Problema direto

Para obter a solução do problema direto unidimensional, $X22$, dado pela Eq. (3.11), denominada solução híbrida, é necessário considerar conhecido um fluxo de calor discreto, $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$. Por exemplo, pode-se simular um fluxo de calor discreto construindo-o na forma vetorial, no MATLAB, como um pulso triangular, por meio da função *tripuls* (linha 6), dada a discretização do tempo, t (linha 3). A Figura 4.2 mostra o fluxo de calor idealizado.

```

1  dt=1;
2  tf=1024;
3  t=[0:dt:tf];
4  c1=3e5;
5  c2=300;
6  q=c1*tripuls(t-c2,c2);

```

Então, considerando as propriedades termofísicas do cobre, tem-se, condutividade térmica $k = 401 \ [W/m.K]$ e difusividade térmica $\alpha = 117E - 06 \ [m^2/s]$; e, comprimento $L = 10E -$

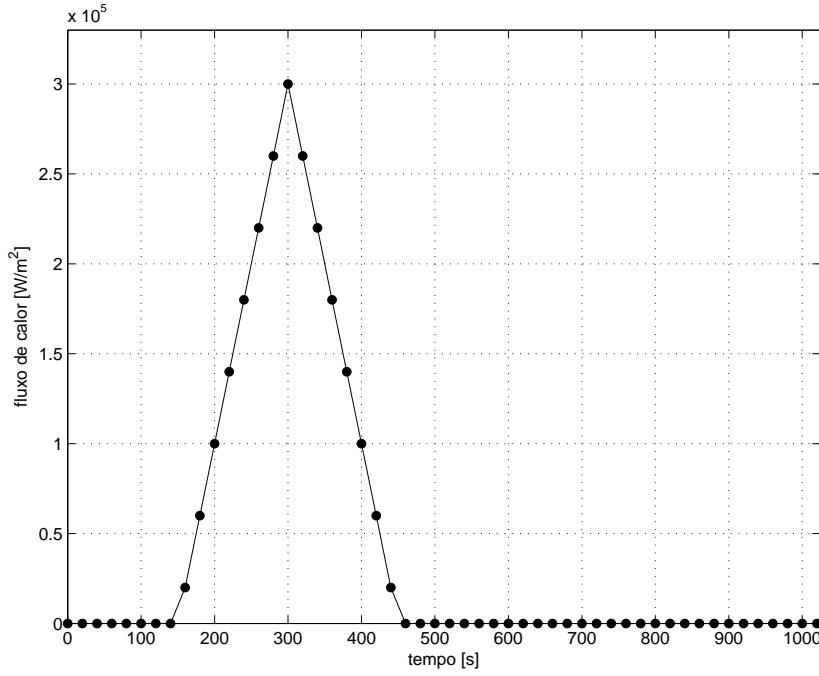


Figura 4.2: Fluxo de calor pulso triangular

02 [m]; temperatura inicial, $T_0 = 25^\circ C$ e, ainda é considerado, intervalo de discretização do tempo $dt = 1$ [s] e tempo final de simulação sendo $tf = 1024$ [s], obtém-se a distribuição de temperatura para as posições $x = 0$, $L/2$ e L (conforme o esquema da Fig. 4.3), e os perfis destas temperaturas, calculadas por meio da Eq. (3.11), são apresentadas na Fig. 4.4. Desta forma, conhecendo-se o fluxo de calor, o problema direto fica estabelecido.

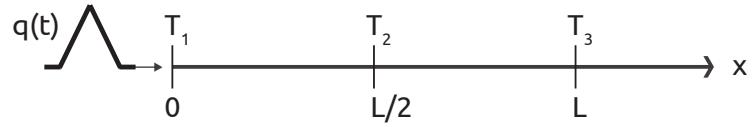


Figura 4.3: Posições de cálculo para as temperaturas

O código em MATLAB referente a solução híbrida X22 encontra-se no Anexo A. O tempo computacional para obter a solução para as três posições é aproximadamente 95 segundos utilizando-se processador 2.5GHz Intel Core i5 e memória de 8GB 1333MHz DDR3.

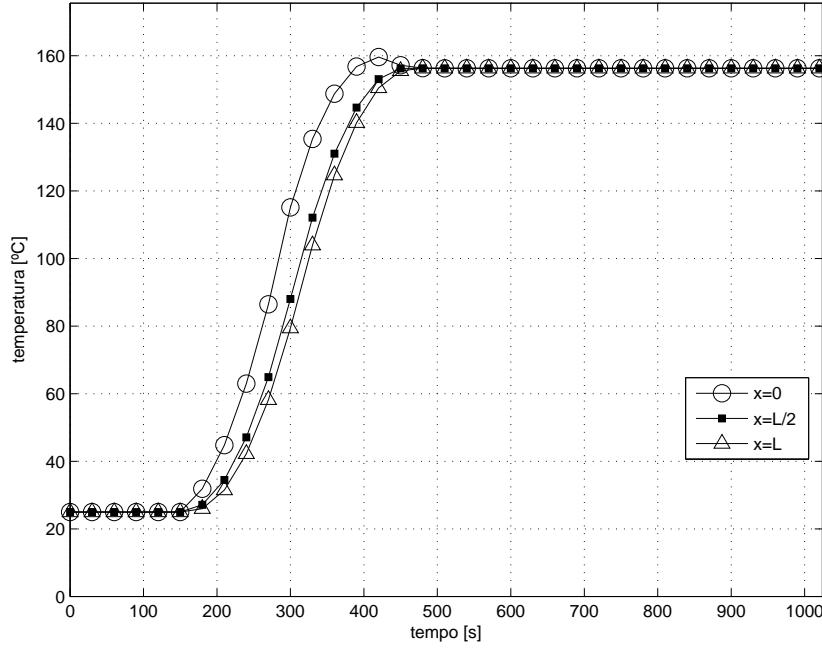


Figura 4.4: Temperaturas obtidas a partir do fluxo de calor pulso triangular

4.1.2 Função de transferência

Como já foi mencionado, a resposta impulsiva do sistema, h , é independente do par entrada/saída (fluxo/temperatura) do sistema dinâmico, e que para o caso $X22$, ela fornece uma descrição completa das características dinâmicas do sistema, e é dada por

$$h(x, t) = \frac{\alpha}{kL} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad t > 0 \quad (4.1)$$

Para atribuir valores numéricos à resposta impulsiva, dada pela Eq. (4.1), considera-se as mesmas informações usadas para a obtenção das temperaturas apresentadas na Fig. 4.4, i.e., os mesmos dados, propriedades termo-físicas, α e k ; comprimento L ; dt e tf , anteriormente mencionados. A Fig. 4.5 mostra o comportamento assintoticamente estável da resposta impulsiva ao longo do tempo, para as posições $x = 0$, $L/2$ e L , e na Tab. 4.1 tem-se alguns de seus valores.

Analizando o comportamento da resposta impulsiva do sistema é fácil observar que os

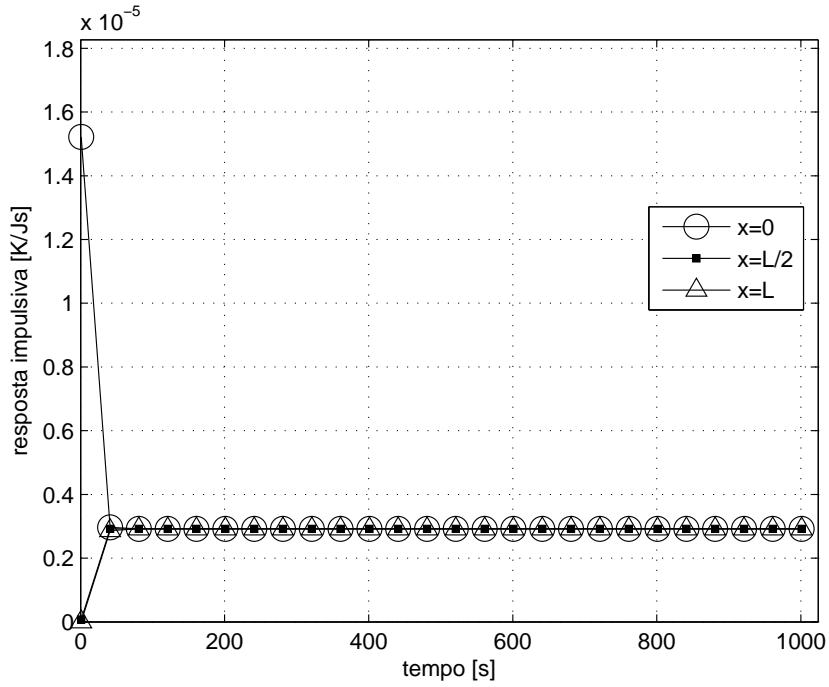


Figura 4.5: Resposta impulsiva para $x = 0; L/2; L$

parâmetros que a determinam são α , k e L , pois, tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) \rightarrow \frac{\alpha}{kL} \quad \text{a Fig. 4.5 e Tab. 4.1 mostram que} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) \rightarrow 2,91771E-06$$

Observa-se na Fig. 4.5 que para $x = 0$ o comportamento da resposta impulsiva assemelha-se a uma exponencial negativa, caracterizando um sistema dinâmico não amortecido, enquanto para $x = L/2$ e L tem-se características de um sistema amortecido. Na Tab. 4.1 é possível constatar que para $x = L/2$ a convergência para o valor $\frac{\alpha}{kL}$ é mais rápida.

O código em MATLAB referente a função de transferência, para o caso X22, encontra-se no Anexo B. Utiliza-se o mesmo número de autovalores (iterações), M na Eq. (3.11), suficiente para obter a convergência para a solução híbrida. Como se trata de uma expressão simples o tempo computacional para a obtenção de $h(x, t)$ em três posições é de aproximadamente 5 segundos.

Se a resposta impulsiva do problema de condução de calor é conhecida e calculada, tem-se o vetor de dados que a representa, logo, com a transformada de Fourier, obtém-se a função de transferência, e, sabendo-se a resposta do sistema (temperatura experimental ou hipotética) é possível obter uma estimativa para a excitação do sistema, ou seja, o fluxo de calor. A

Tabela 4.1: Valores calculados para $h(x, t)$

t [s]	$h(0, t)$	$h(L/2, t)$	$h(L, t)$
1	1,52186E-05	7,28491E-08	1,59811E-14
2	1,07611E-05	7,44533E-07	4,93163E-10
3	8,78644E-06	1,48080E-06	1,41768E-08
4	7,60928E-06	2,00155E-06	7,28491E-08
5	6,80595E-06	2,33875E-06	1,89653E-07
6	6,21296E-06	2,55264E-06	3,52935E-07
7	5,75213E-06	2,68764E-06	5,43462E-07
8	5,38082E-06	2,77274E-06	7,44533E-07
9	5,07362E-06	2,82636E-06	9,44482E-07
10	4,81440E-06	2,86015E-06	1,13612E-06
20	3,49780E-06	2,91714E-06	2,33875E-06
30	3,10034E-06	2,91770E-06	2,73508E-06
40	2,97526E-06	2,91771E-06	2,86015E-06
50	2,93584E-06	2,91771E-06	2,89957E-06
60	2,92342E-06	2,91771E-06	2,91199E-06
70	2,91951E-06	2,91771E-06	2,91590E-06
80	2,91827E-06	2,91771E-06	2,91714E-06
90	2,91788E-06	2,91771E-06	2,91753E-06
100	2,91776E-06	2,91771E-06	2,91765E-06
500	2,91771E-06	2,91771E-06	2,91771E-06
900	2,91771E-06	2,91771E-06	2,91771E-06
1024	2,91771E-06	2,91771E-06	2,91771E-06

solução computacional do problema inverso é apresentada a seguir.

4.1.3 Problema inverso

Considerando as temperaturas calculadas por meio da Eq. (3.11), mostradas na Fig. 4.4, como se fossem temperaturas medidas experimentalmente (sem adição de ruídos), i.e., uma temperatura hipotética, e, tendo conhecimento da função de transferência analítica, dada pela Eq. (3.16), mostra-se aqui a possibilidade de obter estimativas para o fluxo calor pulso triangular, Fig. 4.2, que deu origem a essas temperaturas.

O procedimento computacional é fundamentado nas Eqs. (3.22) ou (3.23), ou seja, ou pela multiplicação $q(s) = T(x, s) \cdot (1/H(x, s))$, no domínio de Laplace, ou por meio da convolução $q(t) = T(x, t) * (1/h(x, t))$, no domínio do tempo. Ou ainda, pode-se usar as Eqs. (3.24) e (3.25) e obter o fluxo de calor em termos das densidades espetrais.

Os vetores de temperatura, $T(x, t)$ (dados sintéticos ou experimentais) e da resposta impulsiva, $h(x, t)$ são conhecidos. Então, para cada uma das posições de interesse $x = 0$, $L/2$ e L , realiza-se um dos procedimentos computacionais para obter a estimativa do fluxo de calor. O script MATLAB que descreve estes três procedimentos (convolução no domínio do tempo, multiplicação no domínio da frequência ou cálculo das densidades espectrais) está disponível no Anexo C.

No MATLAB, a convolução é dada pelas funções, *conv*, algoritmo de convolução discreta no domínio do tempo, e a deconvolução dada por *deconv*. No domínio da frequência, usa-se a *fft*, o algoritmo de transformada rápida de Fourier, discreta (MATLAB, 2012). A definição do sistema dinâmico foi dada em termos da transformada de Laplace, Eq. (3.21), mas sabe-se que a transformada de Fourier pode ser considerada um caso particular da transformada de Laplace. Além disso, a equivalência entre *conv* e *fft*, no MATLAB, deve ser realizada observando-se algumas particularidades tratadas na seção .

Por exemplo, mostra-se aqui um extrato da solução do problema inverso dada por meio da função *fft*, e da inversa da transformada rápida de Fourier, *ifft*, responsável pelo retorno ao domínio do tempo. Então, por meio da função *fft*, os vetores T e h conhecidos previamente, no domínio do tempo, são transformados para o domínio da frequência (linhas 2 e 3), assim, pode-se simplesmente realizar a divisão entre estes vetores (linha 4), desde que $Hfreq \neq 0$, e então, obtém-se o vetor de fluxo de calor no domínio do tempo, por meio da *ifft*.

```

1 NR=2^25;
2 Hfreq=fft (h ,NR) ;
3 Tfreq=fft (T, NR) ;
4 qfreq=Tfreq ./ Hfreq ;
5 qtempo=ifft (qfreq )/ dt ;

```

Observa-se nesse trecho de código MATLAB, que foi definida a variável *NR*, número de pontos utilizados na *fft*. Esse número deve ser maior que o número de elementos de T e h , e, tem como função apenas adicionar zeros a esses vetores quando número de elementos de T ou h é menor que *NR*, além disso, sabe-se que o algoritmo *fft* é mais eficiente quando o tamanho do vetor é potência de dois, isto é, 2^n . Outro fato importante a ser ressaltado é a divisão por *dt*, na linha 5, uma vez que a definição da função *fft* do MATLAB não leva em conta esta divisão por *dt* (MATLAB, 2012).

Assim, por meio desta proposta de solução para o problema inverso, apresenta-se nas Figs. 4.6, 4.7 e 4.8 as estimativas para o fluxo de calor pulso triangular, considerando as temperaturas e as funções transferências calculadas para cada uma das posições de interesse

$x = 0$, $L/2$ e L , e ressalta-se que o fluxo de calor imposto é localizado em $x = 0$. O tempo de execução computacional desse *script* em MATLAB é de aproximadamente 20 segundos, para cada posição.

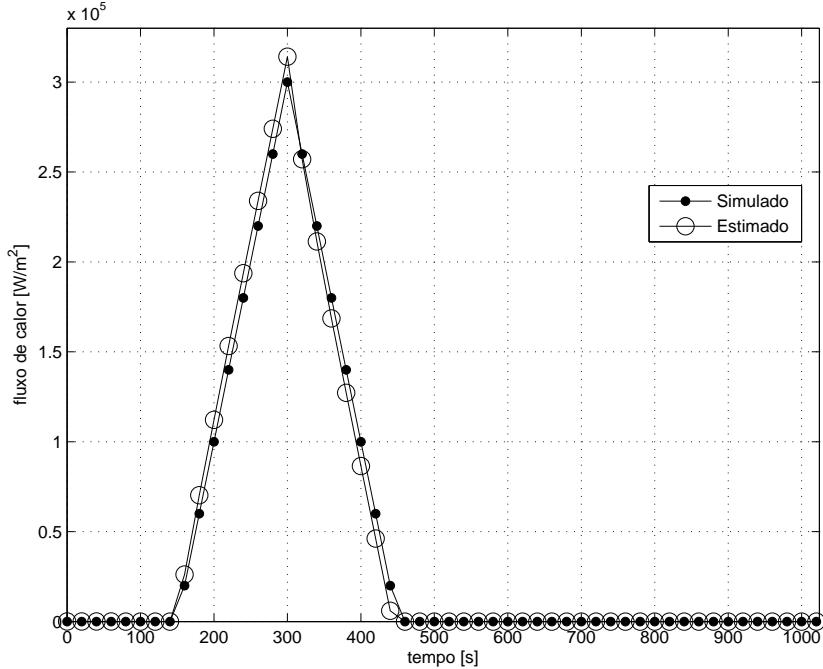


Figura 4.6: Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$

A Figura 4.9 mostra o erro absoluto entre o fluxo simulado e estimado, para cada uma das posições de cálculo. Observa-se aqui, que o erro absoluto informa o montante de fluxo de calor [W/m^2] excedente ao fluxo de calor simulado. Neste exemplo, a posição em que obteve-se a melhor estimativa foi em $x = L/2$, em termos percentuais o erro médio é de 3,5%, para a posição $x = 0$ de 4,4%, e a pior estimativa foi para $x = L$, posição oposta a fonte de calor, neste caso o erro médio é de 12%, na Fig. 4.8 é possível observar que o fluxo de calor simulado está defasado em relação ao estimado, por isso o erro médio percentual é maior.

A relação entre o fluxo simulado e o estimado também pode ser representada pela diferença (não absoluta) entre eles, como mostra a Fig. 4.10. Para as posições $x = L/2$ e L , observa-se que a diferença é positiva na primeira parte onde há fluxo de calor, e negativa na segunda metade, devido ao atraso do fluxo de calor estimado em relação ao simulado, atraso que pode ser percebido nas Figs. 4.7 e 4.8, principalmente em $x = L$, pois para estas posições

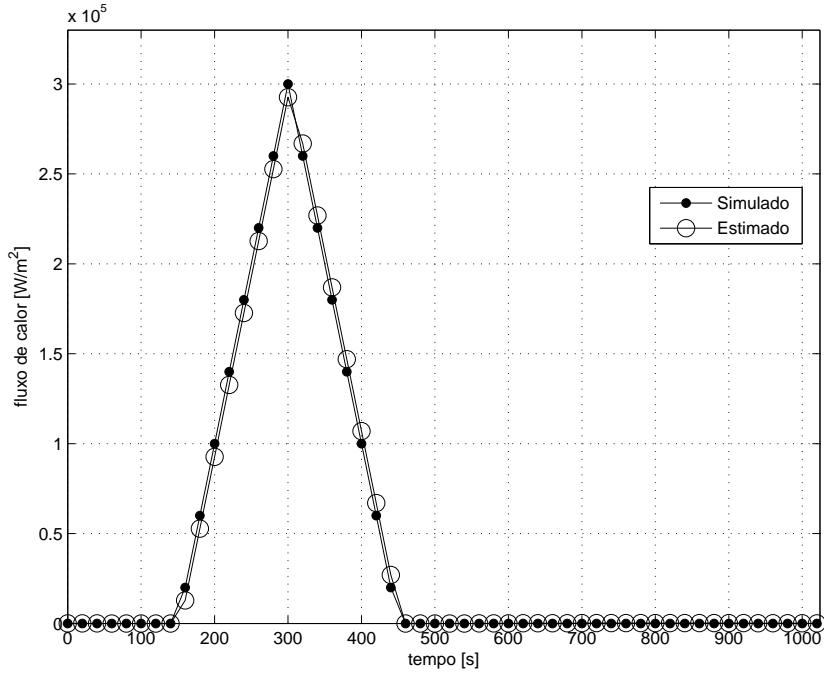


Figura 4.7: Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$

o sistema caracteriza-se por ser amortecido. Na posição $x = 0$ tem-se o oposto, o fluxo estimado está adiantando em relação ao simulado, Fig. 4.6, onde o sistema é não-amortecimento.

Outra informação relevante dada pela Fig. 4.10 é a simetria entre as diferenças dos fluxos, o que sugere que as áreas estabelecidas pelas curvas do fluxo simulado (A_1) e estimado (A_2) são muito próximas, e a menor diferença encontrada é para a posição $x = L$, de acordo com a Tab. 4.2. Essas áreas podem ser calculadas pelo método de integração numérica trapezoidal, no MATLAB, dada pela função *trapz*.

Tabela 4.2: Comparaçāo áreas fluxo simulado (A_1) e estimado (A_2)

x	A_1	A_2	$A_2 - A_1$	%
0	4,5E+07	4,5377E+07	3,7694E+05	0,8376
$L/2$	4,5E+07	4,5014E+07	13680	0,0304
L	4,5E+07	4,5000E+07	0,6517	1,4483E-06

Até aqui, a solução do problema inverso foi apresentada em termos da comparação entre os fluxos simulado e estimado, porém, em uma situação real, o fluxo de calor não é conhecido, assim, a solução do problema inverso deve ser apresentada em termos de temperatura, isto é, deve-se mostrar a comparação entre as temperaturas ‘reais’ (que na verdade foram simuladas

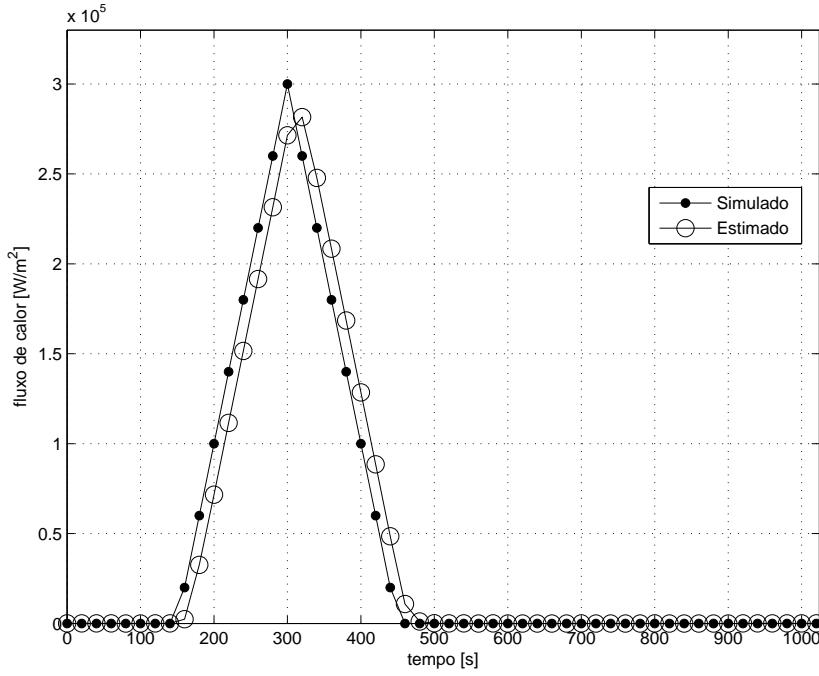


Figura 4.8: Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$

pela solução híbrida) e as temperaturas obtidas por meio do fluxo que foi estimado, ou seja, é necessário verificar se o fluxo estimado retorna as temperaturas conhecidas. Assim, usa-se novamente a solução híbrida, informando o fluxo estimado no lugar do fluxo idealizado.

As Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 mostram as temperaturas obtidas por meio de cada um dos fluxos estimados por seus respectivos dados de posição de análise ($0, L/2$ e L). Isto é, ressalta-se que a fonte de calor está posicionada em $x = 0$ (Fig. 4.3), e foram obtidas três estimativas para o fluxo de calor, por meio de dados (temperatura e função de transferência) calculados para as posições $x = 0, L/2$ e L .

Assim, como esperado, da estimativa para o fluxo de calor com menor erro médio percentual, e portanto menor defasagem, de informações provenientes da posição $x = L/2$, tem-se a melhor estimativa para as temperaturas, como mostra a Fig. 4.14, onde a máxima diferença absoluta entre temperatura estimada e simulada é de $3,2^\circ\text{C}$, quando se configura regime transiente. Para as posições, $x = 0$ e $x = L$ as máximas diferenças encontradas são de $6,4^\circ\text{C}$ e $11,8^\circ\text{C}$. O erro médio percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas é de 1,5%, 0,7% e 2,4% para as posições $0, L/2$ e L , respectivamente. Na Figura 4.13 é evidente o atraso entre a temperatura estimada e simulada que é proveniente da defasagem do fluxo de

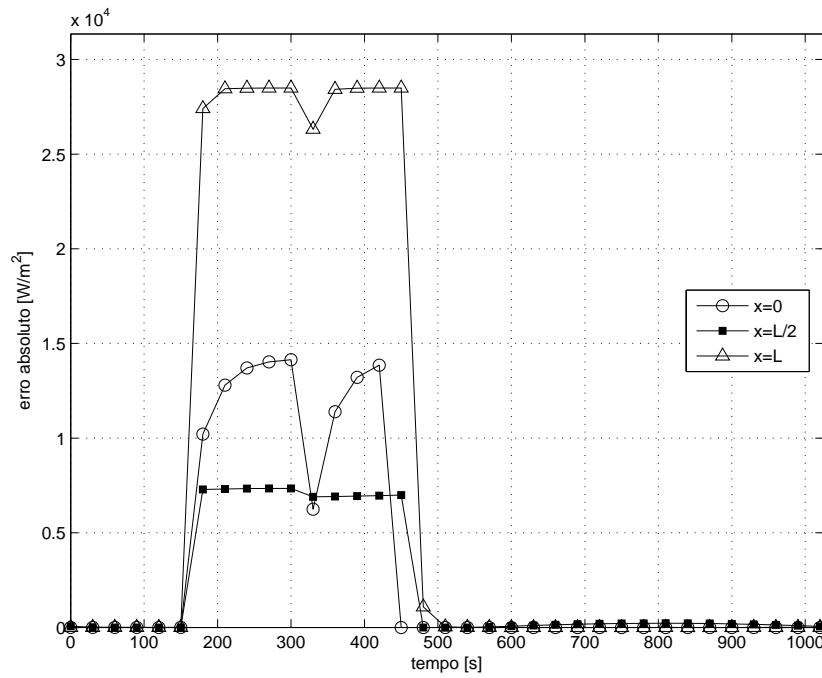


Figura 4.9: Erro absoluto entre o fluxo de calor simulado e estimado

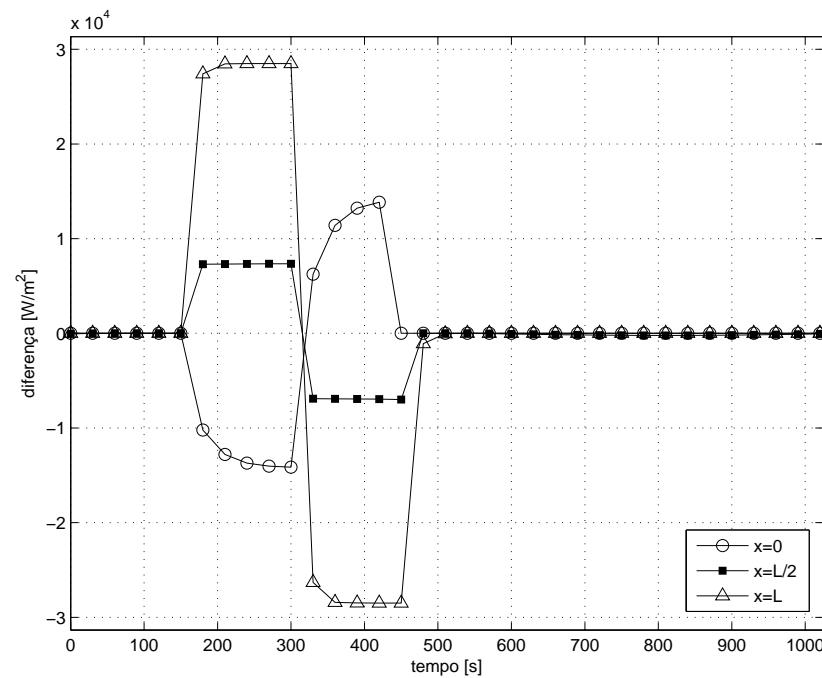


Figura 4.10: Diferença entre o fluxo de calor simulado e estimado

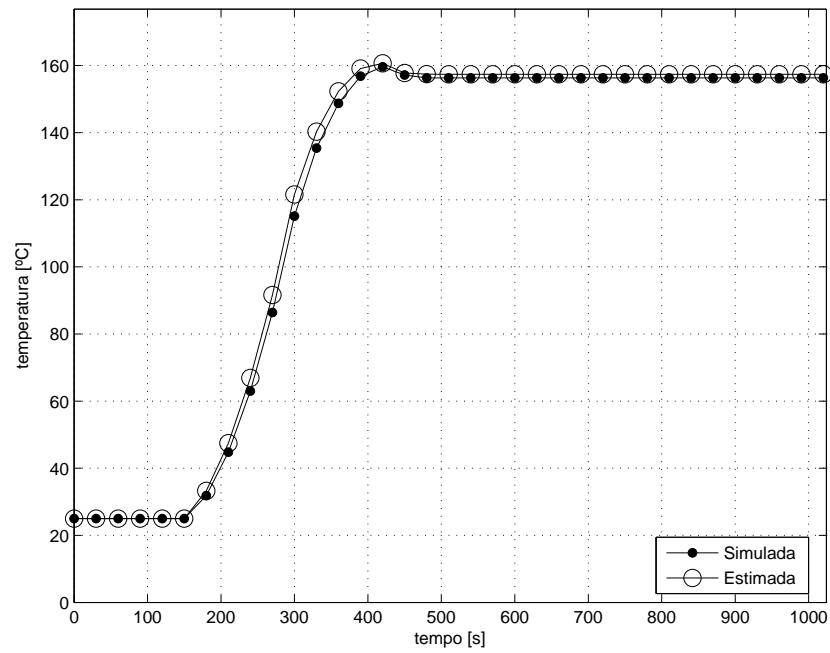


Figura 4.11: Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = 0$

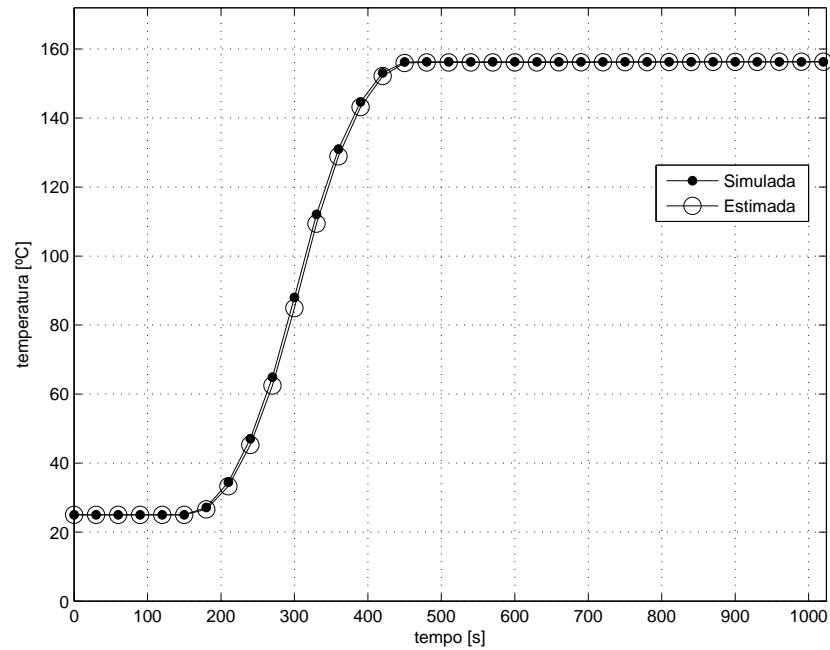


Figura 4.12: Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = L/2$

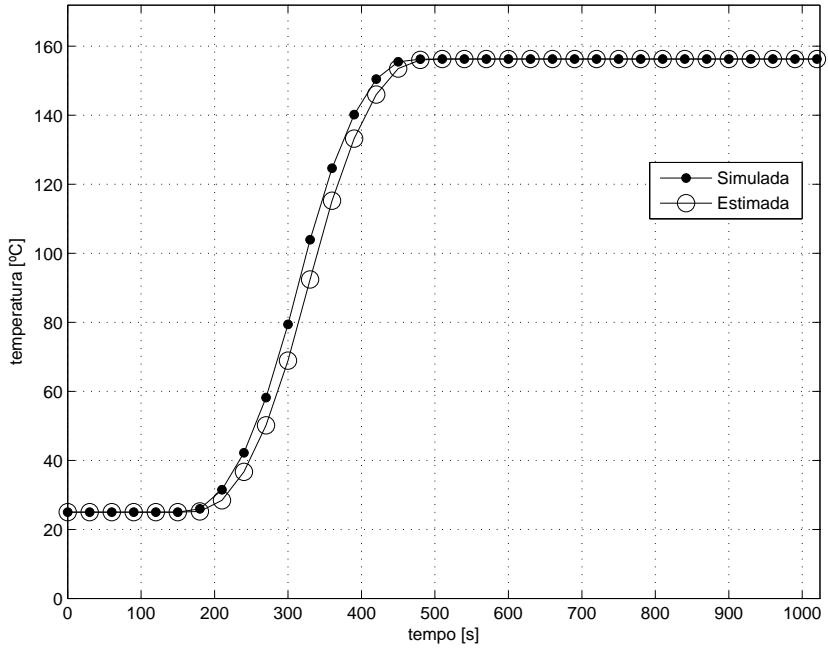


Figura 4.13: Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = L$

calor estimado mostrado na Fig. 4.8, pois não foi feita nenhuma correção para o atraso que aparece no fluxo de calor estimado.

Portanto, considerando a estimativa do fluxo de calor por informações de $x = L/2$ para as posições $x = 0$ e $x = L$, a máxima diferença absoluta entre temperatura estimada e simulada decai para $3,8^{\circ}\text{C}$ e $3,1^{\circ}\text{C}$, respectivamente, como mostrado na Fig. 4.15. Ou em porcentagem, erro médio é de aproximadamente 0,7% para as três posições.

E ainda, para essa mesma estimativa ($x = L/2$), pode-se tratar o atraso do fluxo de calor estimado em relação ao simulado retrocedendo-o em relação ao tempo, conforme mostra a Tab. 4.3, e observar o comportamento do erro médio entre as temperaturas. Nesse caso o retrocesso de 5 segundos no fluxo de calor estimado faz o erro médio entre as temperaturas cair de 0,68% para 0,16%, e assim, a máxima diferença entre as temperaturas simulada e estimada passa a ser de $0,36^{\circ}\text{C}$, como mostra a Fig. 4.16. O erro percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas, Fig. 4.17, que não é superior a 0,45%.

Na comparação entre as áreas dos fluxos simulado e estimado, a posição $x = L$ mostrou-se a menor diferença entre elas, sugerindo a defasagem entre os fluxos. A Tabela 4.4 mostra o erro médio percentual entre as temperaturas simulada e estimada quando aplica-se o proce-

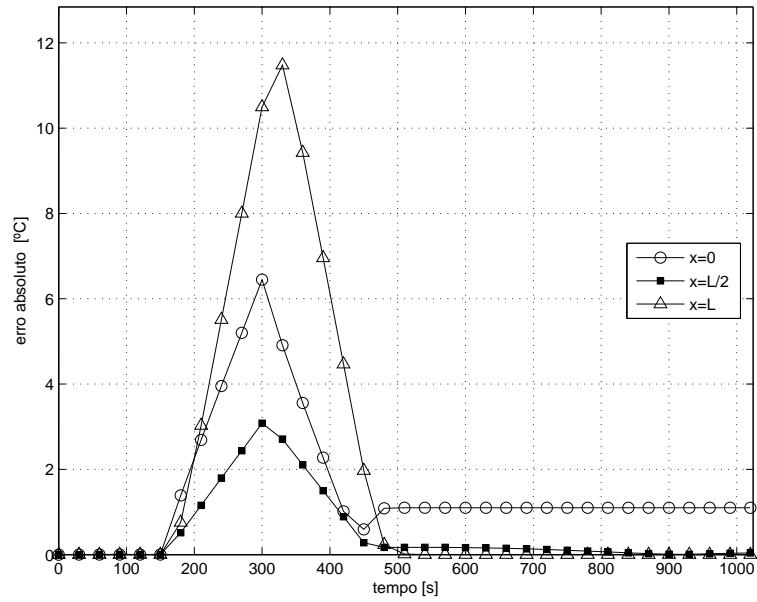


Figura 4.14: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada nas posições $x = 0$, $L/2$ e L

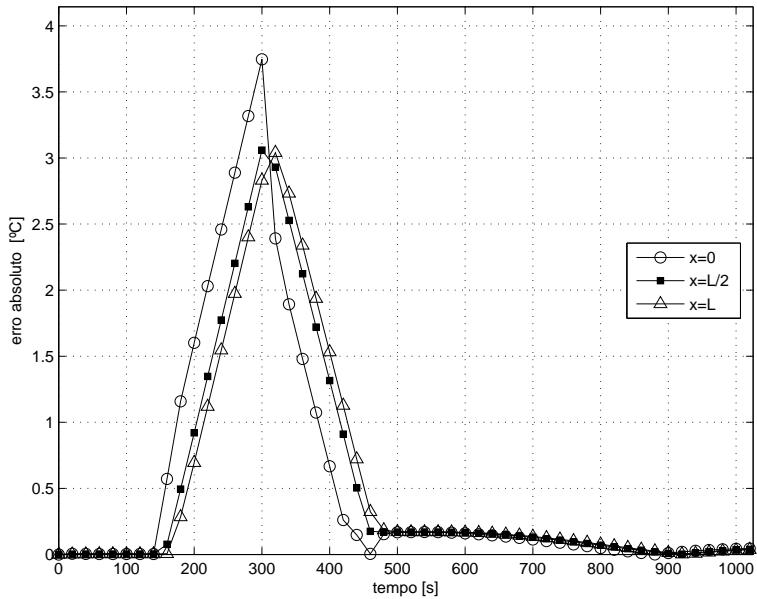


Figura 4.15: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.7) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L

Tabela 4.3: Retrocesso aplicado ao fluxo de calor estimado (a partir de dados sintéticos calculados em $x = L/2$)

retrocesso [s]	erro médio temperatura (%)
0	0,6847
1	0,6847
2	0,5104
3	0,3346
4	0,1575
→ 5	0,1013
6	0,2767
7	0,6400

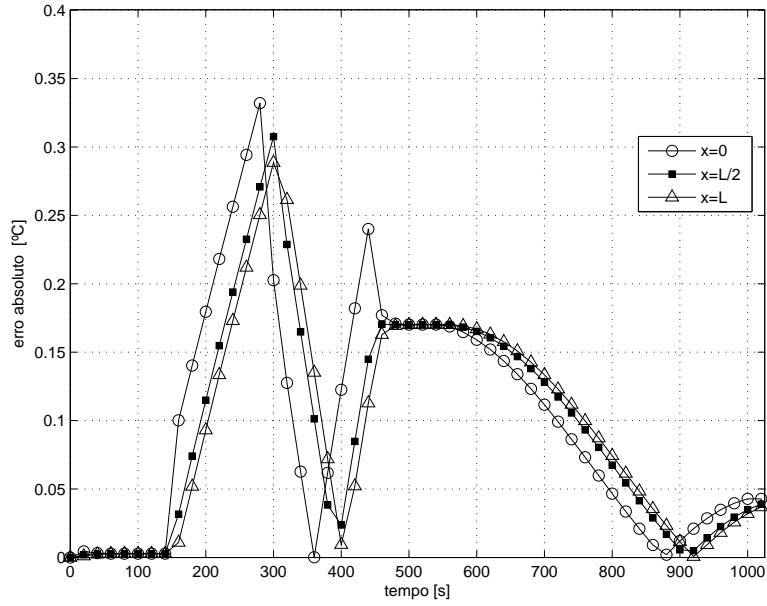


Figura 4.16: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.7) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 5 segundos

dimento de retrocesso ao fluxo de calor estimado em relação ao tempo, para o retrocesso em 15 segundos o erro médio percentual não ultrapassa 0,01% para as três posições.

As Figs. 4.18 e 4.19 mostram o erro absoluto e o erro percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas. Observa-se, que nesse caso, apesar da distância da origem da fonte de calor tem-se uma boa estimativa para as temperaturas.

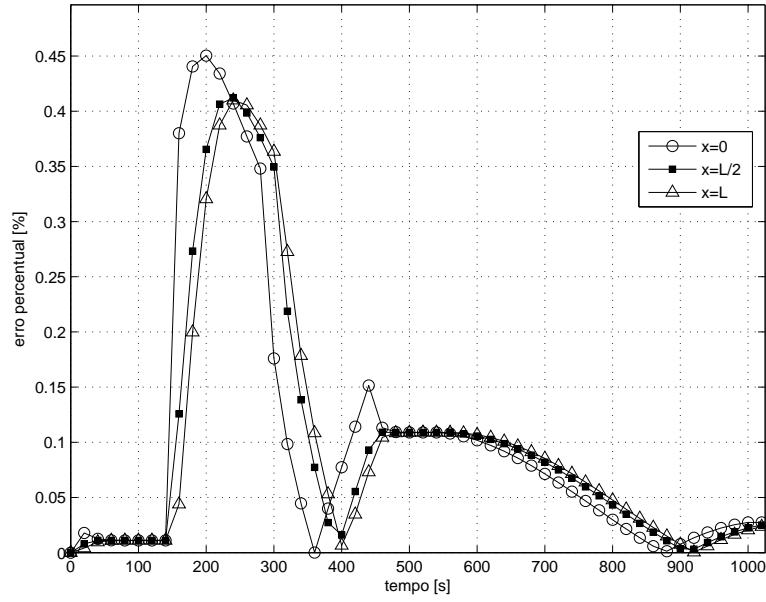


Figura 4.17: Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.7) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 5 segundos

Pode-se também considerar a estimativa do fluxo de calor por meio de informações obtidas em $x = 0$, pois, tratando-se do problema de obtenção de propriedades termofísicas é possível fazer a aquisição da temperatura onde tem-se a fonte de calor.

Tabela 4.4: Retrocesso aplicado ao fluxo de calor estimado (a partir de dados sintéticos calculados em $x = L$)

retrocesso [s]	erro médio temperatura (%)		
	$x = 0$	$x = L/2$	$x = L$
0	2,3887	2,3556	2,3574
5	1,7314	1,7062	1,7074
10	0,8777	0,8643	0,8648
→ 15	0,0995	0,0887	0,0880
16	0,2185	0,2032	0,2024

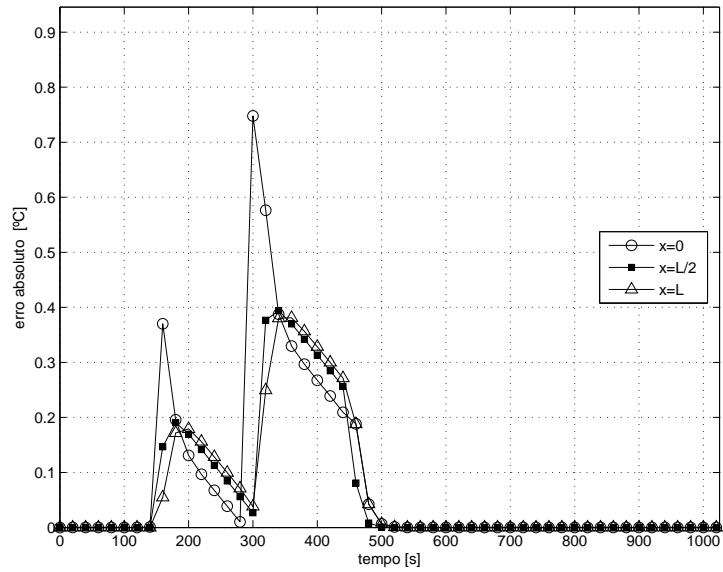


Figura 4.18: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$ (Fig. 4.8) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 15 segundos

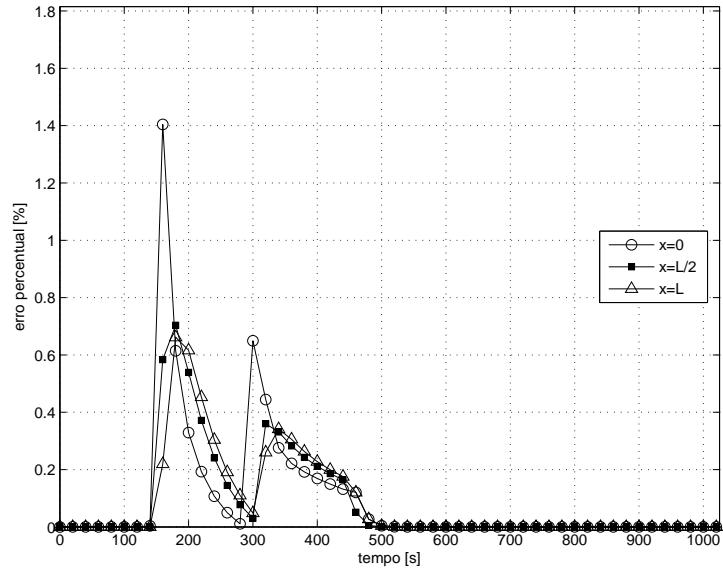


Figura 4.19: Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$ (Fig. 4.8) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 15 segundos

4.2 Problema 1D, $X22$, não-metal

O mesmo procedimento realizado para o cobre mostrado nas seções anteriores será repetido para o material polietileno (alta densidade), cuja condutividade térmica $k = 0,33 \text{ [W/m.K]}$ e difusividade térmica é $\alpha = 0,16E - 06 \text{ [m}^2/\text{s]}$. Tem-se, portanto, um material de baixa condutividade e difusividade térmica, o que colabora para que sistema dinâmico seja mais amortecido nas posições $x = L/2$ e L , assim, o atraso e a atenuação do fluxo de calor estimado tornam-se mais evidente.

4.2.1 Problema direto

Neste caso, para obter a solução do problema direto unidimensional, $X22$, dado pela Eq. (3.11), solução híbrida, considera-se o fluxo de calor discreto, $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$, também com o pulso de triangular descrito no código abaixo (linhas 1-6). A Figura 4.20 mostra o fluxo de calor idealizado, proporcional as características termofísicas do polietileno.

```

1      dt=1;
2      tf=1024;
3      t=[0:dt:tf];
4      c1=3e3;
5      c2=300;
6      q=c1*tripuls(t-c2,c2);

```

Então, considerando as propriedades termofísicas do polietileno, tem-se, condutividade térmica $k = 0,33 \text{ [W/m.K]}$ e difusividade térmica $\alpha = 0,16E - 06 \text{ [m}^2/\text{s]}$; e, comprimento $L = 1E - 02 \text{ [m]}$ (no caso do cobre tem-se $L = 10E - 02$); temperatura inicial, $T_0 = 25^\circ\text{C}$ e, também considerado o intervalo de discretização do tempo $dt = 1 \text{ [s]}$ e tempo final de simulação sendo $tf = 1024 \text{ [s]}$. Obtém-se, assim, a distribuição de temperatura para as posições $x = 0$, $L/2$ e L por meio da Eq. (3.11) apresentadas na Fig. 4.21.

4.2.2 Função de transferência

A estrutura matemática da resposta impulsiva (ou função de transferência) do sistema é a mesma. Assim, analogamente, como no exemplo do cobre, atribui-se valores numéricos à Eq. (3.16), considerando-se as mesmas informações usadas para a obtenção das temperaturas apresentadas na Fig. 4.21, i.e., os mesmos dados, propriedades termofísicas, α e k ; compri-

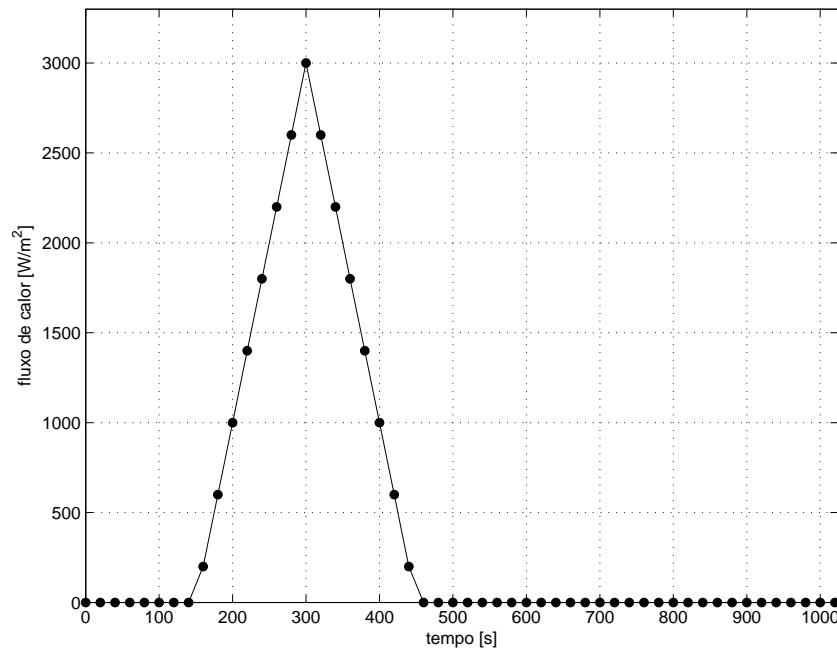


Figura 4.20: Fluxo de calor pulso triangular

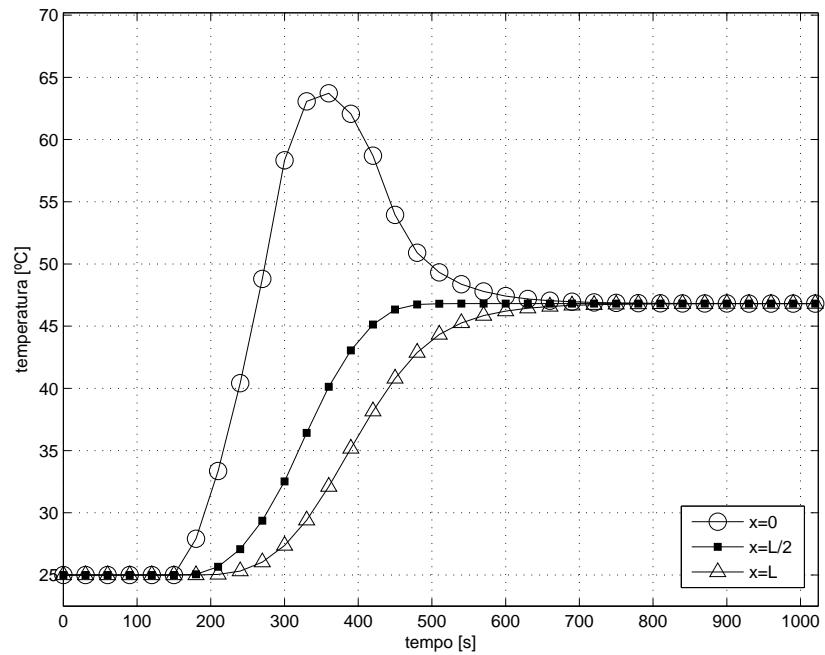


Figura 4.21: Temperaturas obtidas a partir do fluxo de calor pulso triangular (polietileno)

mento L ; dt e tf . A Figura 4.22 mostra o comportamento da resposta impulsiva do sistema, para as posições $x = 0$, $L/2$ e L .

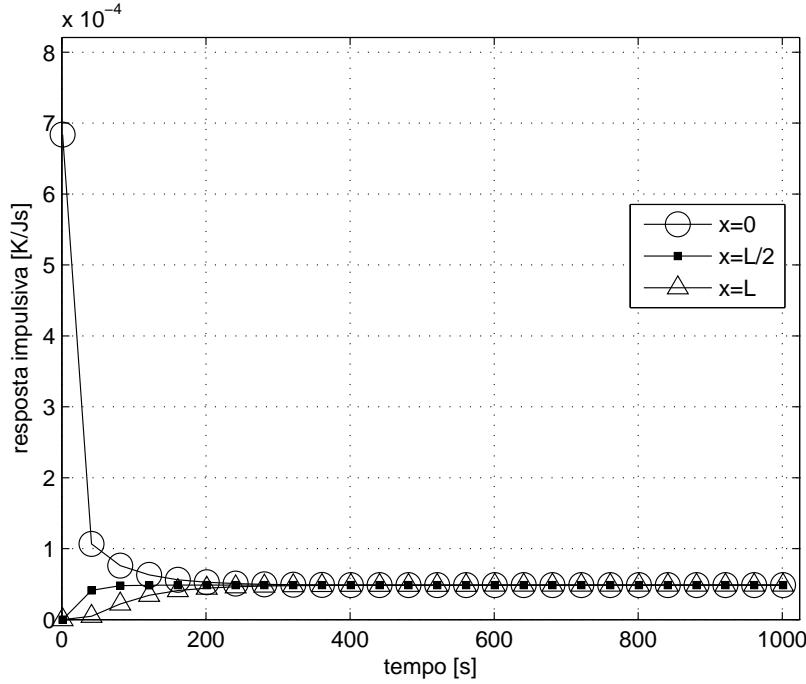


Figura 4.22: Resposta impulsiva

Pode-se observar na Fig. 4.5 e Tab. 4.1 que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) \rightarrow 4,8485E - 05$$

Observa-se que para o caso do polietileno (Tab. 4.5) a convergência para o valor $\frac{\alpha}{kL}$ ocorre de forma mais lenta, em relação ao que acontece quando se tem as propriedades térmicas do cobre (Tab. 4.1). Além disso, a diferença percentual entre o valor $\frac{\alpha}{k}$ para o polietileno é aproximadamente 40% maior que para o cobre.

Assim, conhecendo-se o comportamento da resposta impulsiva do problema de condução de calor, apresenta-se a solução computacional do problema inverso.

4.2.3 Problema inverso

Considerando as temperaturas calculadas por meio da Eq. (3.11), mostradas na Fig. 4.21 como temperaturas hipotéticas, e, conhecendo-se da função de transferência analítica, mostra-

Tabela 4.5: Valores calculados para $h(x, t)$

t [s]	$h(0, t)$	$h(L/2, t)$	$h(L, t)$
1	6,8387E-04	-4,0658E-20	1,3553E-20
2	4,8357E-04	1,5927E-12	2,0329E-20
3	3,9483E-04	8,7405E-10	-2,0329E-20
4	3,4193E-04	1,9624E-08	6,7763E-21
5	3,0583E-04	1,2375E-07	1,6371E-17
6	2,7919E-04	4,1539E-07	2,7364E-15
7	2,5848E-04	9,7477E-07	1,0456E-13
8	2,4178E-04	1,8317E-06	1,5927E-12
9	2,2796E-04	2,9709E-06	1,3154E-11
10	2,1626E-04	4,3502E-06	7,0819E-11
20	1,5292E-04	2,1688E-05	1,2375E-07
30	1,2486E-04	3,3958E-05	1,3661E-06
40	1,0813E-04	4,0738E-05	4,3502E-06
50	9,6714E-05	4,4364E-05	8,4986E-06
100	6,8651E-05	4,8310E-05	2,8669E-05
200	5,2606E-05	4,8485E-05	4,4364E-05
300	4,9334E-05	4,8485E-05	4,7635E-05
400	4,8660E-05	4,8485E-05	4,8310E-05
500	4,8521E-05	4,8485E-05	4,8449E-05
600	4,8492E-05	4,8485E-05	4,8477E-05
700	4,8486E-05	4,8485E-05	4,8483E-05
800	4,8485E-05	4,8485E-05	4,8485E-05
900	4,8485E-05	4,8485E-05	4,8485E-05
1024	4,8485E-05	4,8485E-05	4,8485E-05

se aqui a possibilidade de obter estimativas para o fluxo calor pulso triangular, Fig. 4.20, que originou a essas temperaturas.

Então, analogamente ao procedimento realizado para o cobre, obtém-se as estimativas para o fluxo de calor pulso triangular, considerando as temperaturas e as funções transferências calculadas para cada uma das posições de interesse $x = 0$, $L/2$ e L . As estimativas são apresentadas nas Figs. 4.23, 4.24 e 4.25, neste caso, o atraso e a atenuação para o fluxo de calor estimado são mais visíveis, para $x = L/2$ e L .

A Figura 4.26 mostra o erro absoluto entre o fluxo simulado e estimado, para cada uma das posições de cálculo. Observa-se aqui, que o erro absoluto informa o montante de fluxo de calor [W/m^2] excedente ao fluxo de calor simulado. Para o caso do polietileno, a posição em que obteve-se a melhor estimativa foi em $x = 0$, em termos percentuais o erro médio é de 3,5%, para a posição $x = L/2$ de 20,9%, e a pior estimativa foi para $x = L$, posição oposta

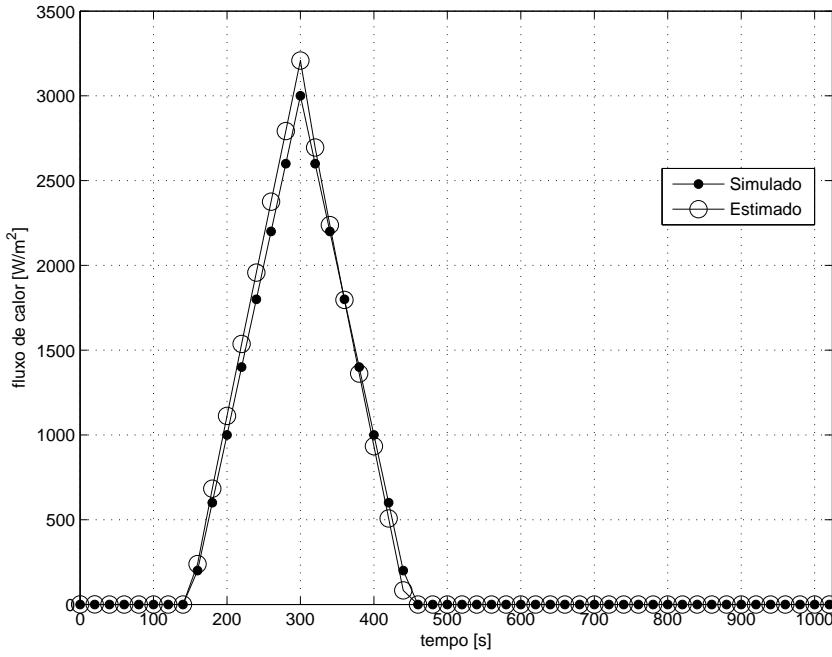


Figura 4.23: Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$

a fonte de calor, neste caso o erro médio é de 50,3%, nas Fig. 4.24 e 4.25 é possível observar que o fluxo de calor simulado está defasado e atenuado em relação ao estimado, por isso o erro é maior.

A relação entre o fluxo de calor simulado e o estimado pode ser analisada pela diferença (não absoluta) entre eles, como mostra a Fig. 4.27, observa-se a simetria entre essas diferenças, assim, pode-se dizer que a áreas estabelecidas pelas curvas do fluxo de calor simulado (A_1) e estimado (A_2) são próximas, conforme mostra a Tab. 4.6, a menor diferença percentual entre as áreas é dada pela posição $x = L/2$, observa-se, também, que para $x = L$ a diferença percentual é de apenas 0,7%, o que não é óbvio de visualizar na Fig. 4.25.

Tabela 4.6: Comparação áreas fluxo simulado (A_1) e estimado (A_2)

x	A_1	A_2	$A_2 - A_1$	%
0	4,5E+05	4,6840E+05	18403	4,0895
$L/2$	4,5E+05	4,5000E+05	0,19423	4,3163E-05
L	4,5E+05	4,5326E+05	3261,6	0,7248

Apresenta-se a solução do problema inverso graficamente nas Figs. 4.28(a), 4.28(b) e 4.28(c) que mostram as temperaturas obtidas por meio de cada um dos fluxos de calor estimados

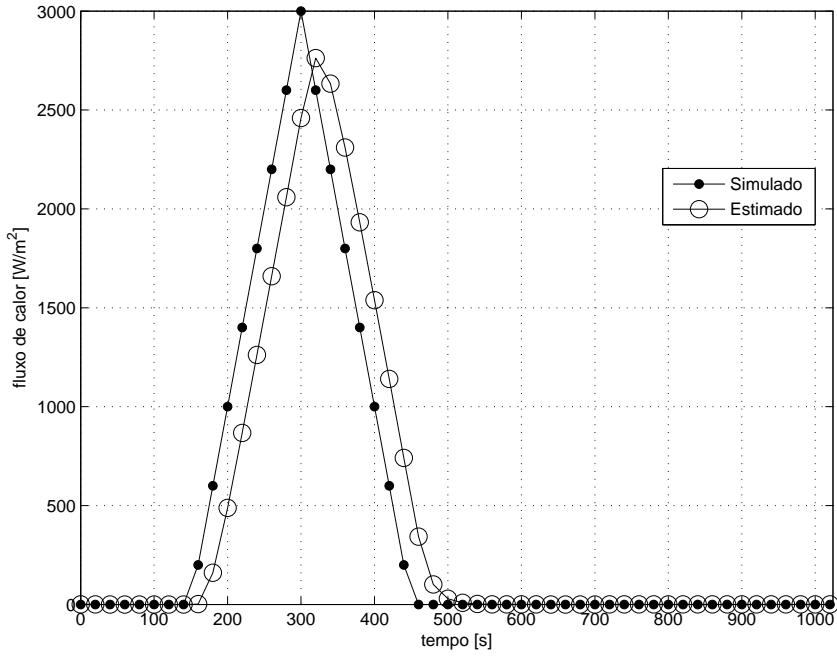


Figura 4.24: Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$

por seus respectivos dados de posição de análise ($0, L/2$ e L). Isto é, ressalta-se que a fonte de calor está posicionada em $x = 0$, e foram obtidas três estimativas para o fluxo de calor a partir das informações (temperatura e função de transferência) calculadas em $x = 0, L/2$ e L .

O erro médio percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas é de 1,8%, 1,6% e 5,7% para as posições 0, $L/2$ e L , respectivamente. Assim, a melhor estimativa para a temperatura é proveniente do fluxo de calor estimado a partir de informações obtidas em $x = L/2$. A Figura 4.29, mostra que para $x = L/2$ a máxima diferença absoluta entre temperatura estimada e simulada é de $3,5^\circ C$, quando se configura regime transitório. Para as posições, $x = 0$ e $x = L$ as máximas diferenças encontradas são de $2,7^\circ C$ e $8,9^\circ C$, respectivamente.

Portanto, considerando a estimativa do fluxo de calor ($x = L/2$) que mostra menor erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, também para as posições $x = 0$ e $x = L$, o erro médio percentual entre as temperaturas é de 3,1%, para $x = 0$, a diferença aumenta em consequência da defasagem do fluxo de calor estimado e, para $x = L$ é de 1,6%, a diferença decai, pois o fluxo de calor estimado é menos defasado que o anterior. A Fig. 4.30

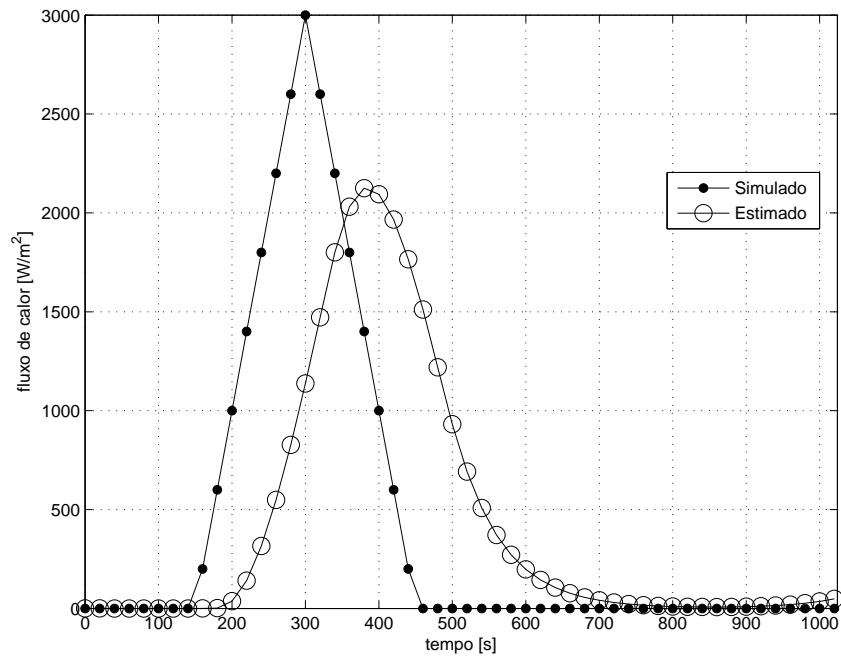


Figura 4.25: Fluxo de calor por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$

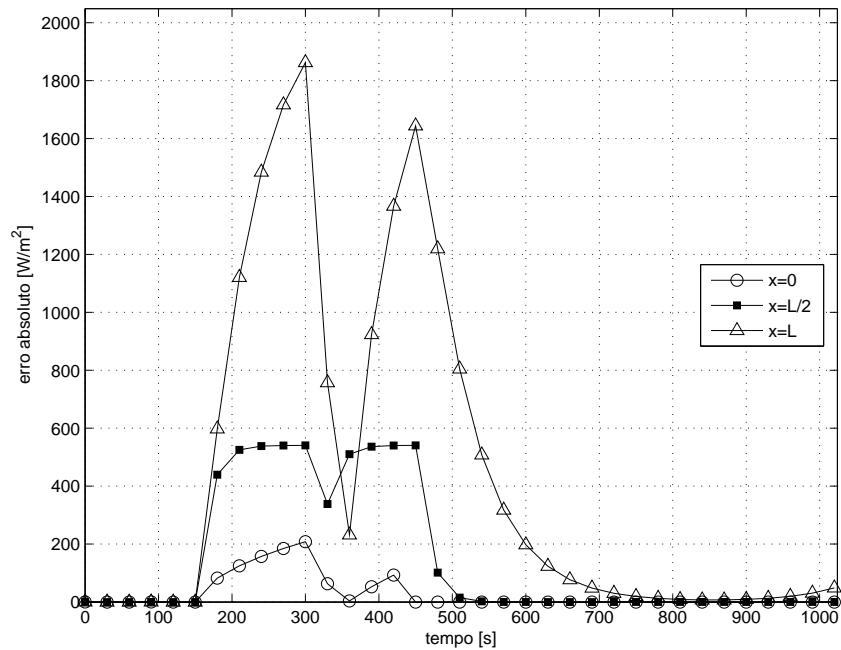


Figura 4.26: Erro absoluto entre o fluxo de calor simulado e estimado

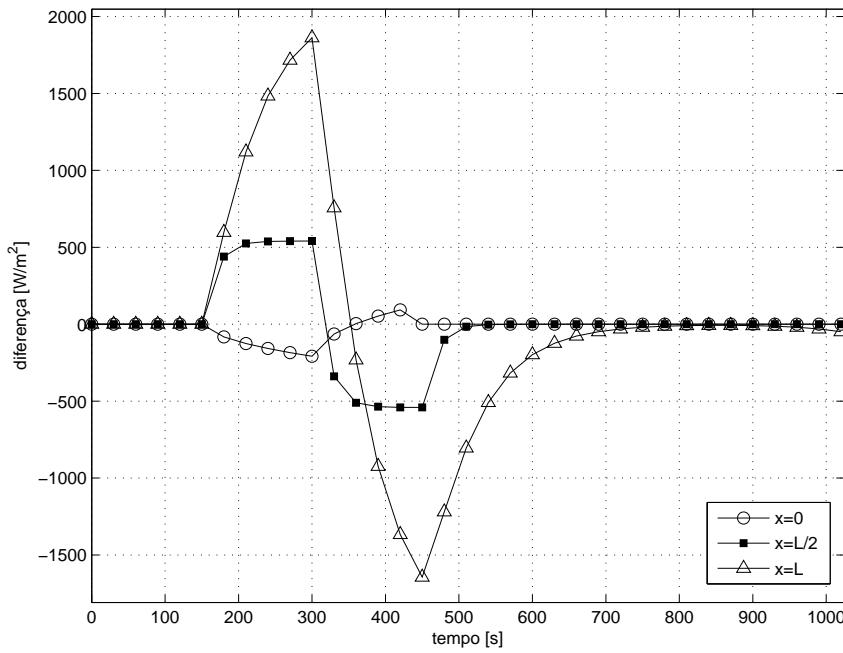


Figura 4.27: Diferença entre o fluxo de calor simulado e estimado

mostra o erro absoluto entre as temperaturas simuladas e estimadas, para $x = 0$, $L/2$ e L .

Ainda, para essa mesma estimativa do fluxo de calor ($x = L/2$), pode-se tratar o atraso do fluxo de calor estimado em relação ao simulado retrocedendo-o em relação ao tempo, conforme mostra a Tab. 5.1, observando o comportamento do erro médio entre as temperaturas simulada e estimada, em $x = L/2$.

Nesse caso, o retrocesso de 30 segundos no fluxo de calor estimado faz o erro médio entre essas temperaturas cair de 1,6% para 0,16%, e, desta forma, a máxima diferença entre as temperaturas simulada e estimada passa a ser de $0,37^\circ\text{C}$. Para $x = 0$, a diferença máxima entre as temperaturas é de $0,78^\circ\text{C}$ e o erro médio percentual é de 0,41%, e para $x = L$ de $0,27^\circ\text{C}$, com erro médio percentual de 0,14%, como mostra a Fig. 4.31.

A Figura 4.31 mostra o erro absoluto e a Fig. 4.32 o erro percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas. Torna-se claro o sucesso da estimativa do fluxo de calor, principalmente para as temperaturas provenientes das posições $x = L/2$ e L .

As Figuras 4.33(a), 4.33(b) e 4.33(c), ilustram as temperaturas aplicando-se o fluxo de calor estimado com retrocesso de 30 segundos, desta forma é possível graficamente visualizar o efeito do tratamento do atraso do fluxo de calor estimado.

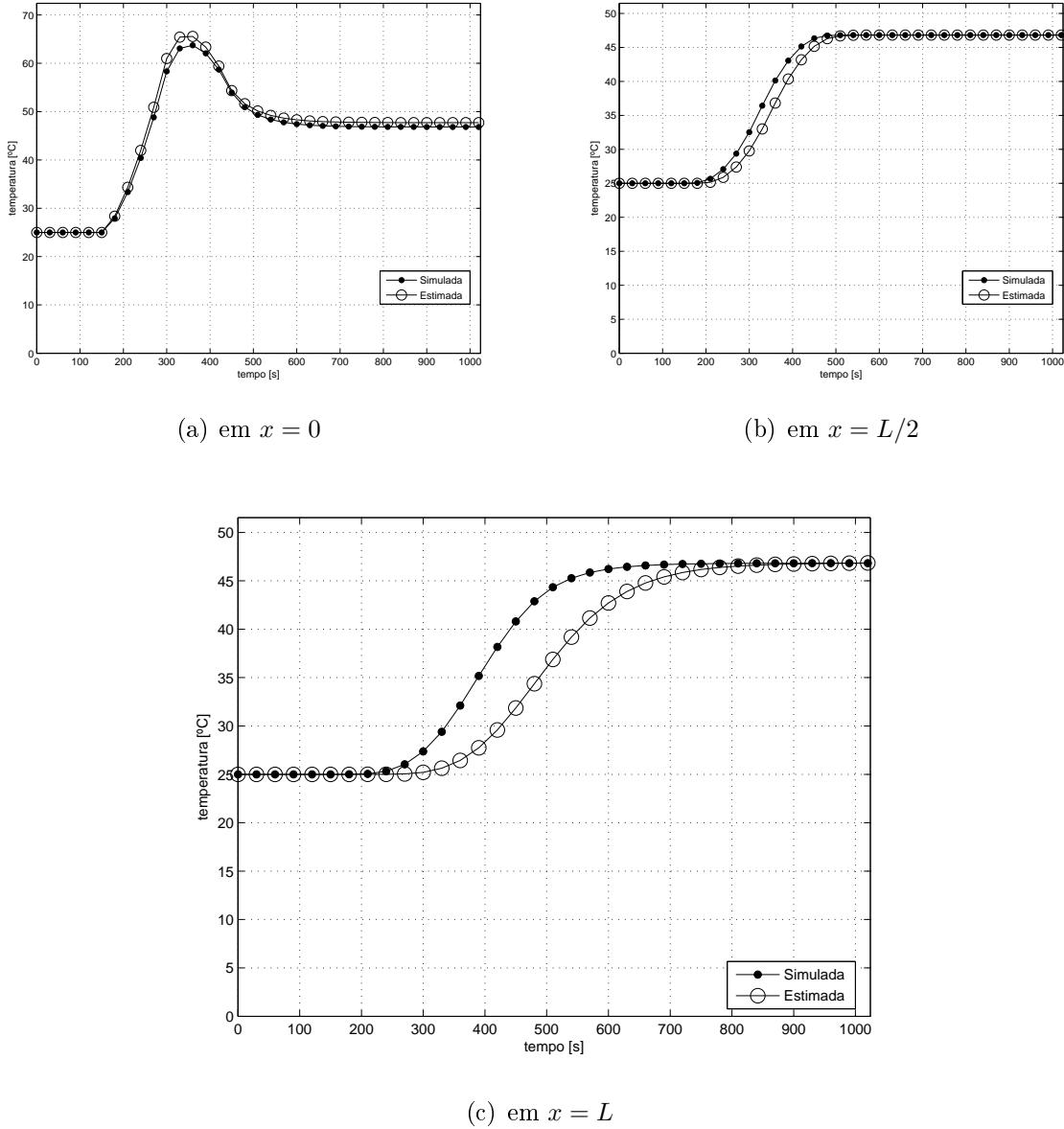


Figura 4.28: Comparação entre as temperaturas simulada e estimada

Em problemas de obtenção de propriedades termofísicas, as informações obtidas posição $x = 0$ também podem ser usadas, isto é, é possível adquirir temperatura onde se tem fonte de calor. Assim, por meio dessas informações tem-se as estimativas para as temperaturas com o erro médio percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas é de 1,82%, 1,57% e 1,44%, e a maior diferença entre elas é de $2,75^{\circ}\text{C}$, $1,17^{\circ}\text{C}$ e $1,02^{\circ}\text{C}$, para $x = 0$, $L/2$ e L , respectivamente.

A Figura 4.34 mostra o erro absoluto e a Fig. 4.35 o erro percentual entre as temperaturas

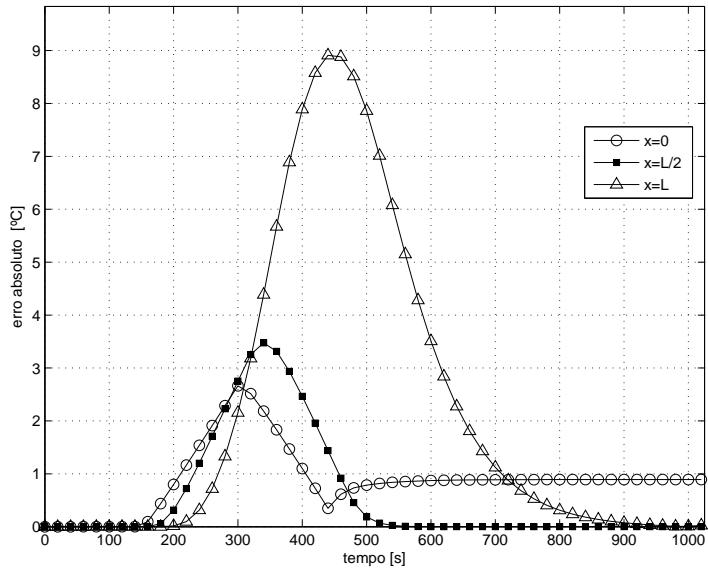


Figura 4.29: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada nas posições $x = 0$, $L/2$ e L

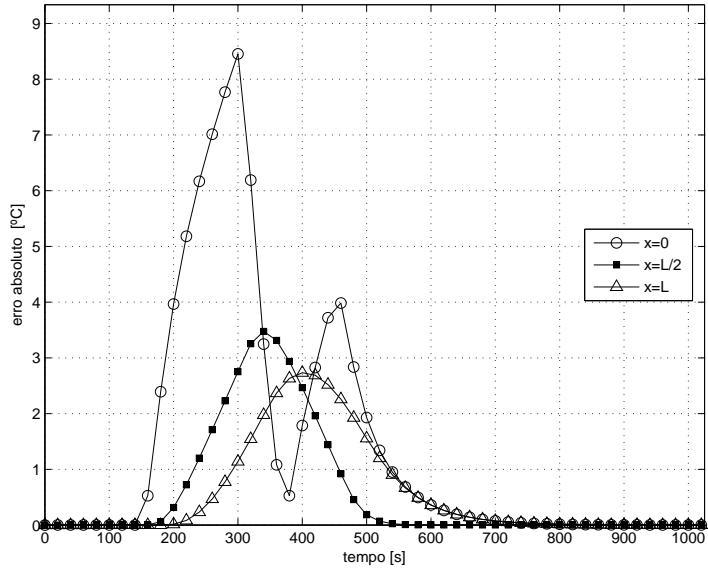


Figura 4.30: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L

simuladas e estimadas, obtém-se maior sucesso com estimativa do fluxo de calor em $x = 0$

Tabela 4.7: Retrocesso aplicado ao fluxo de calor estimado (a partir de dados sintéticos calculados em $x = L/2$)

retrocesso [s]	erro médio temperatura (%)
0	1,5478
5	1,3485
10	1,0582
15	0,7641
20	0,4665
25	0,1743
→ 30	0,1647
31	0,2196
32	0,2770
33	0,3363
34	0,3965
35	0,4573

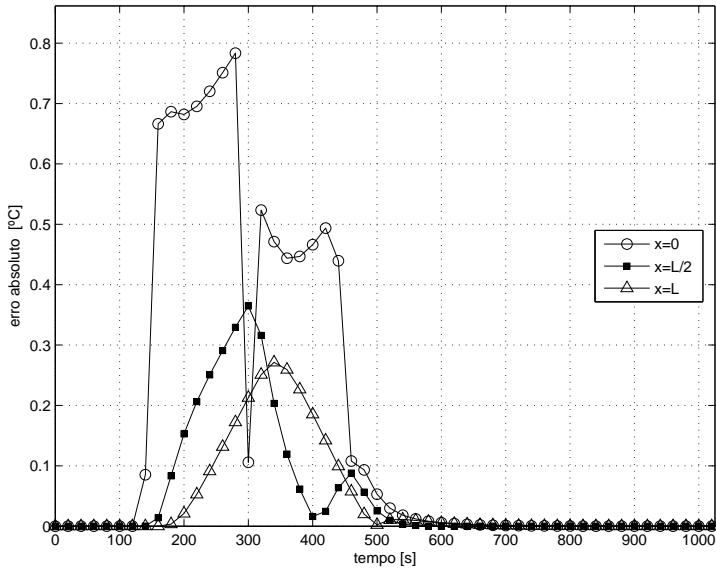


Figura 4.31: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 30 segundos

do que para as temperaturas provenientes das posições $x = L/2$ e L .

Observa-se que a Figura 4.28(a) mostra que o fluxo de calor estimado produz temperatura mais altas que as simulada, isso significa que o fluxo de calor estimado é maior que o simulado,

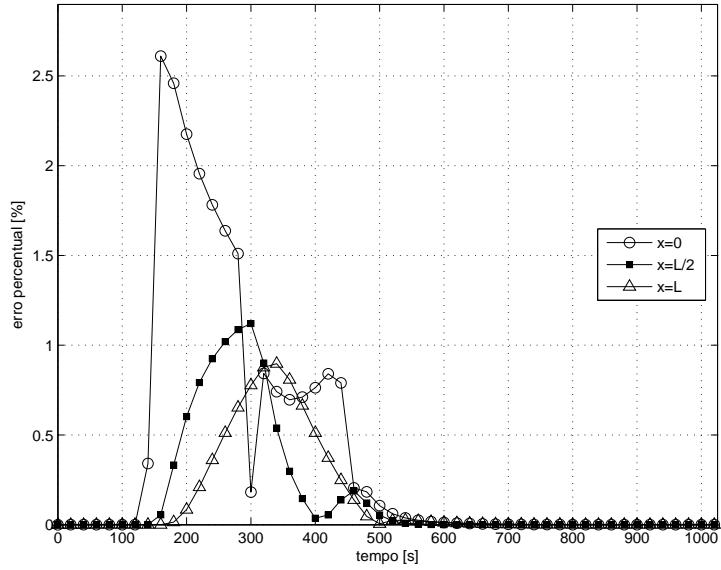


Figura 4.32: Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L , com retrocesso de 30 segundos

exatamente como ilustrado na Fig. 4.23. Assim, sugere-se que para conseguir erros menores o fluxo de calor estimado deve ser minorado.

Nessas seções procurou-se expor a solução teórica do problema inverso de condução de calor por meio materiais que possuem propriedades termofísicas antagônicas, cobre e polietileno. Para os dois casos a estrutura matemática da função de transferência é a mesma, porém, o sistema dinâmico pode ser caracterizado como não-amortecido ou amortecido, dependendo da posição de análise (0 , $L/2$ e L) e das propriedades termofísicas que também ajudam a descrever o sistema. Assim, em sequência faz-se a análise de parâmetros como o comprimento L , a discretização do tempo, tempo de simulação e diferentes tipos de fluxos.

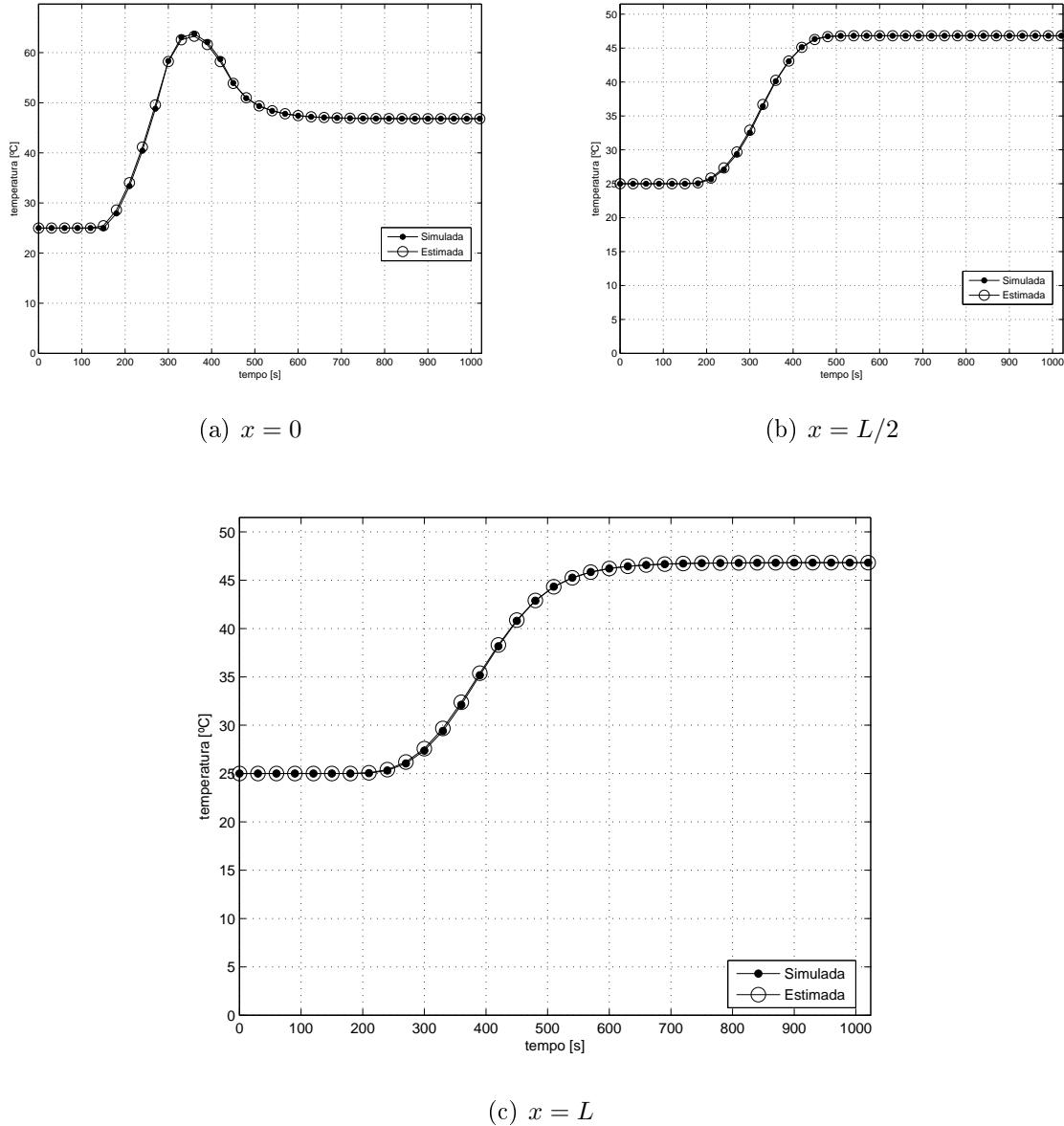


Figura 4.33: Comparação entre as temperaturas simulada e estimada em $x = 0$; $L/2$ e L , quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.24) com retrocesso de 30 segundos

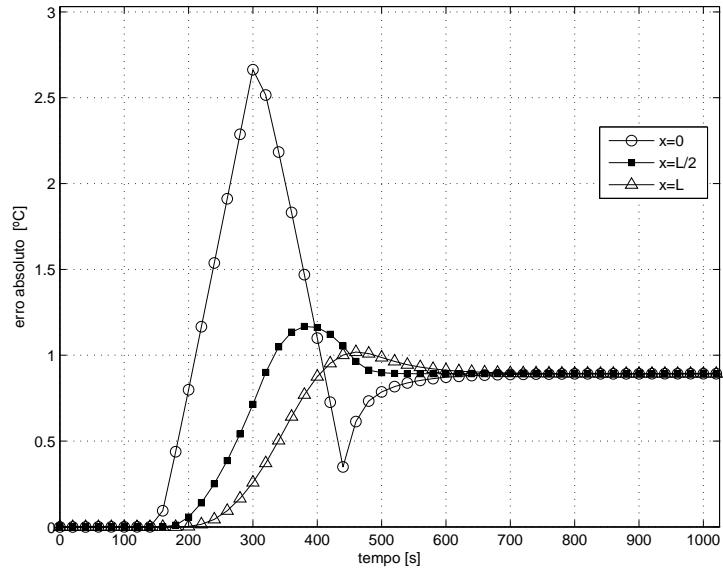


Figura 4.34: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (Fig. 4.23) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L

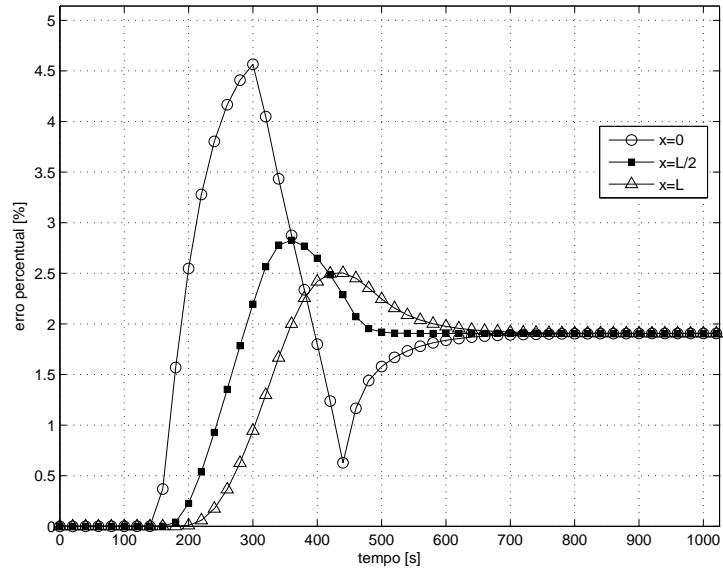


Figura 4.35: Erro absoluto entre as temperaturas simulada e estimada, quando aplica-se o fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (Fig. 4.23) para o cálculo das temperaturas nas posições $x = 0$, $L/2$ e L

4.3 Análise de parâmetros

As seções anteriores concentraram-se em analisar o comportamento da metodologia proposta quanto a natureza dos materiais, metal (cobre) e não metal (polietileno), para os quais os parâmetros condutividade (k) e difusividade térmica (α) são determinantes.

O objetivo desta seção é mostrar o estudo da variação de outros parâmetros para a solução do problema inverso, ou seja, pretende-se analisar as estimativas para o fluxo de calor quanto a variação do comprimento da amostra (L), a discretização do tempo (dt), características do fluxo de calor e a equivalência entre a teoria e as operações computacionais do MATLAB.

4.3.1 Comprimento L

Ao considerar as mesmas configurações do problema térmico descrito na seção 4.1, cujo material é cobre, o mesmo fluxo de calor triangular, Fig. 4.2, tem-se a solução do problema direto. Assim, por meio da temperatura hipotética e da função de transferência calculadas nas posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$ obteve-se as estimativas para o fluxo de calor.

Observando a estimativa para o fluxo de calor apenas por informações (temperatura e função de transferência) provenientes da posição $x = L$, como ilustrado na Fig. 4.36, e, assumindo L variável, isto é, $L = 5e - 02$; $L = 10e - 02$; $L = 15e - 02$ e $L = 20e - 02$, a Fig. 4.39 mostra que o fluxo de calor estimado por dados dessas posições é atenuado e defasado a medida que L cresce, pois é essas informações estão cada vez mais distante da fonte de calor, posicionada em $x = 0$.

O comportamento de atraso e atenuação é ainda mais visível para o caso de um material de natureza isolante, como o caso do polietileno, tratado na seção 4.2. Na Figura 4.39 observa-se as estimativa para o fluxo de calor fornecidas por meio da temperatura e função de transferência calculadas da posição $x = L/2$, conforme o esquema da Fig. 4.38.

Observa-se assim que dependendo das características físicas do material e de seu comportamento térmico as grandezas geométricas são fundamentais para a escolha da posição do sensor, ou seja, se material for um isolante térmico e o modelo for unidimensional, o comprimento da amostra é fundamental para uma estimativa satisfatória para o fluxo de calor. Claramente, isto se deve a baixa sensibilidade da resposta da temperatura em local distito da excitação térmica, como é evidenciado na Fig. 4.39.

Esta situação, todavia, pode ser melhor resolvida a partir do uso de modelos térmicos

tridimensionais, que por sua vez possibilitam o posicionamento de sensores mais próximos à fonte de calor. Nesse caso, localizações de maior sensibilidade.



Figura 4.36: Indicação da posição $x = L$ para o cálculo da temperatura e função de transferência

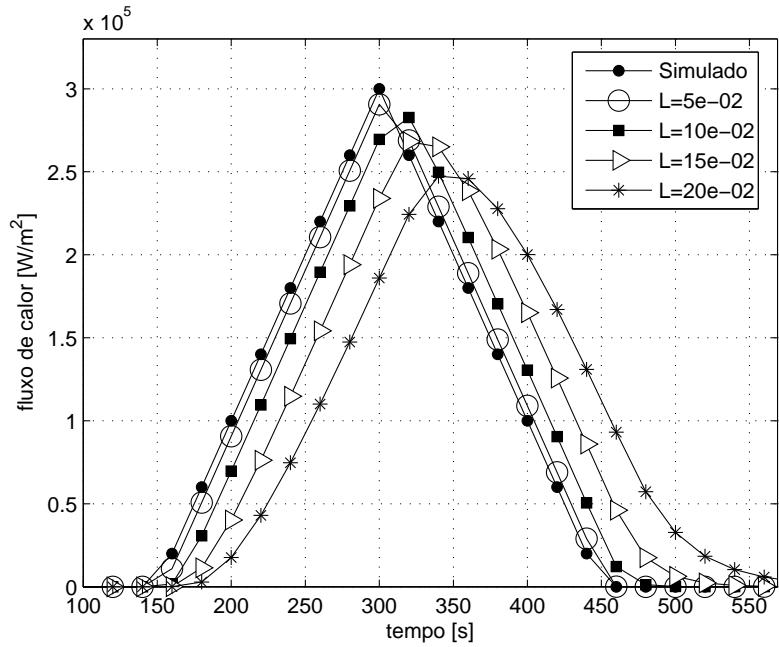


Figura 4.37: Fluxo de calor estimado a partir das informações calculadas em $x = L$ (Fig. 4.36), variando-se o comprimento L de uma amostra de cobre

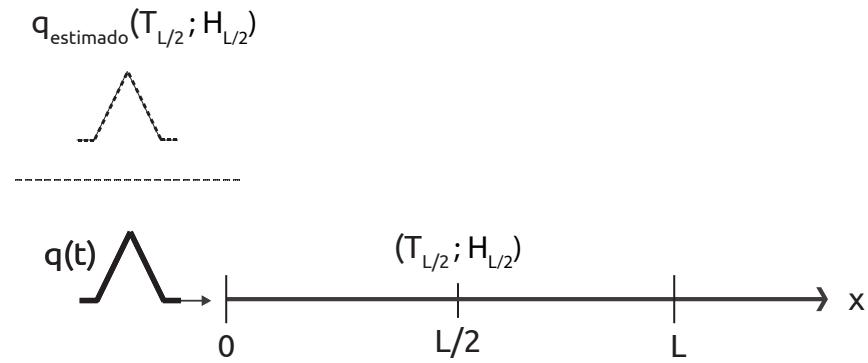


Figura 4.38: Indicação da posição $x = L/2$ para o cálculo da temperatura e função de transferência

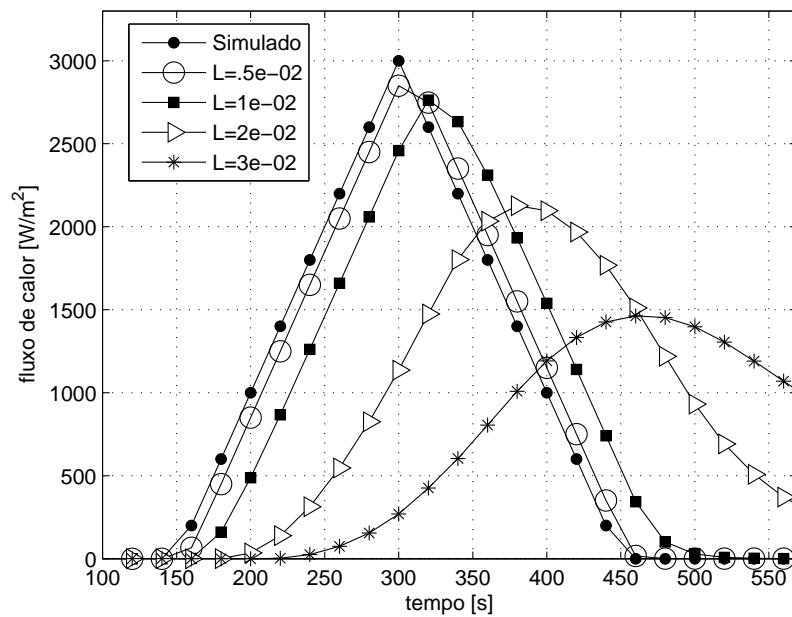


Figura 4.39: Fluxo de calor estimado a partir das informações calculadas em $x = L/2$ (Fig. 4.38), variando-se o comprimento L de uma amostra de polietileno

4.3.2 Discretização do tempo dt

Em soluções puramente analíticas a discretização do tempo não influencia a resposta. Porém, em situações reais, aplicam-se as soluções híbridas, nas quais dados experimentais são inseridos à soluções analíticas escritas em termos de algoritmo computacional, assim, torna-se necessária uma análise da influência da tomada de passo de tempo, dt , na solução do problema inverso por meio da metodologia proposta.

Nos problemas mostrados anteriormente, tanto nos testes para o cobre quanto para o polietileno, obteve-se resultados satisfatórios fazendo-se a discretização do tempo igual a um segundo, $dt = 1s$. Considerando as mesmas configurações do problema térmico descrito na seção 4.1, cujo material é cobre, o fluxo de calor triangular, Fig. 4.2, e, por meio da temperatura e da função de transferência calculadas na posição $x = L$, sendo $L = 10e-02[m]$, foram obtidas as estimativas para o fluxo de calor variando-se o dt . As Figuras 4.40 e 4.41 mostram o fluxo de calor simulado e estimado, considerando os seguintes passos de tempo $dt = 0,5s$; $dt = 1s$; $dt = 5s$ e $dt = 10s$.

A Figura 4.41 apresenta uma visão detalhada na escala do tempo da Fig. 4.40, para o intervalo de 145 a 180 s. Observa-se que as estimativas para o fluxo de calor para o passo de tempo de 0,5 e 1 s são equivalentes, além disso é possível visualizar a adição de atraso entre o fluxo estimado e simulado, quando tem-se um passo de tempo maior, como para os casos de 5 e 10 segundos.

A Tabela 4.8 mostra a relação entre a discretização do tempo, número de amostras e a diferença percentual entre as áreas dos fluxo simulado ($A1$) e estimado ($A2$). O número de amostra corresponde ao número de elementos do vetor temperatura e função de transferência responsáveis por obter as estimativas para o fluxo de calor, sendo o vetor de tempo construído como $t = 0 : dt : tf$, onde $tf = 1024s$ é o tempo final de simulação. Quanto maior o passo, menor é o número informações amostradas, porém, a diferença percentual entre as áreas dos fluxos de calor simulado e estimado permanece suficientemente pequena e oscilando entorno de $1,144E-6\%$, para dt menor ou igual 100s.

Mostra-se, que no caso extremo, quando $dt = 100s$ e consequentemente apenas com 11 elementos no vetor de temperatura e função de transferência, é ainda possível estimar fluxo de calor, com a adição de defasagem de 100s, como mostra a Fig. 4.42. Nas Figuras 4.43 e 4.44 tem-se a comparação entre as temperaturas simulada e estimada a partir do fluxo estimado e feita a correção de retrocesso que corresponde a 100s, respectivamente. Porém, só é possível retroceder um posição do vetor de fluxo de calor, para colocar o início do fluxo

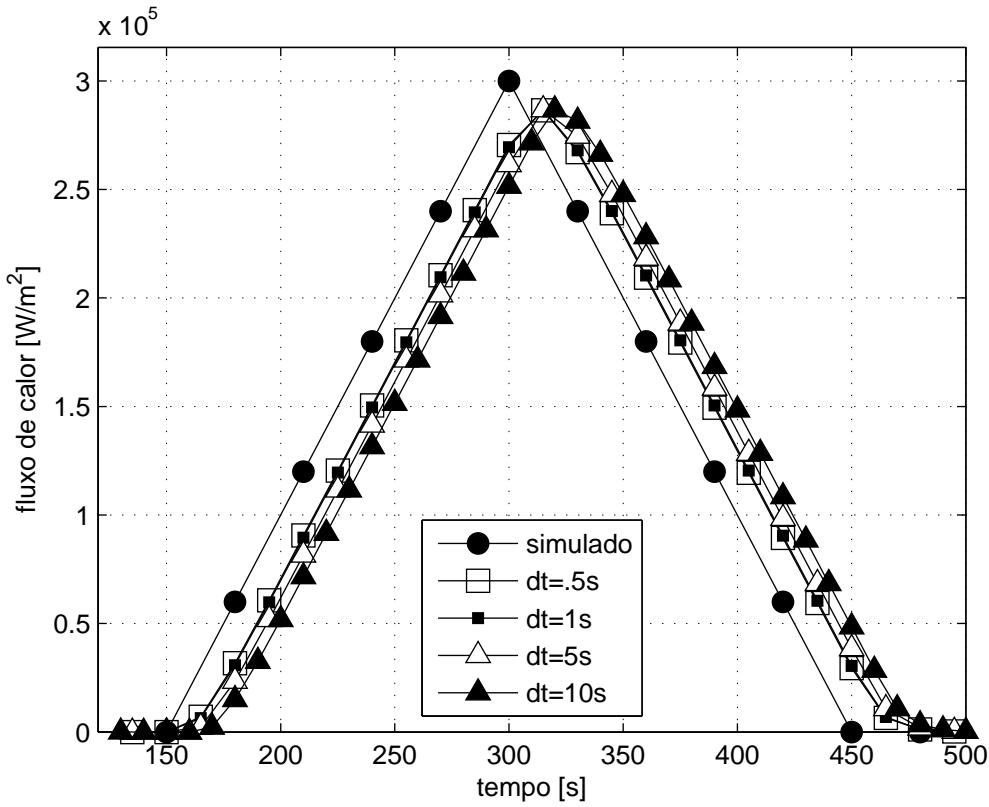


Figura 4.40: Estimativas para o fluxo de calor, a partir das informações em $x = L$, variando-se dt

de calor estimado que está em 200s em 100s, sendo $dt = 100s$. Assim, a diferença percentual entre essas temperaturas é inferior a 9%, Fig. 4.45, o que exemplifica o prejuízo da pouca informação nos vetores de temperatura e função de transferência. Para $dt = 10s$ o erro é inferior a 4%, para 5s, menor que 2% e quando $dt = 1s$ e 0,5s o erro é equivalente e inferior a 1%.

Desta forma, tendo em vista o comportamento desse método em relação ao passo de tempo, sua escolha deve ser baseada no número de amostras, que deve ser suficientemente significativa para não degradar a informação do vetor temperatura e função de transferência. Outro importante critério para determinação do dt é o custo computacional.

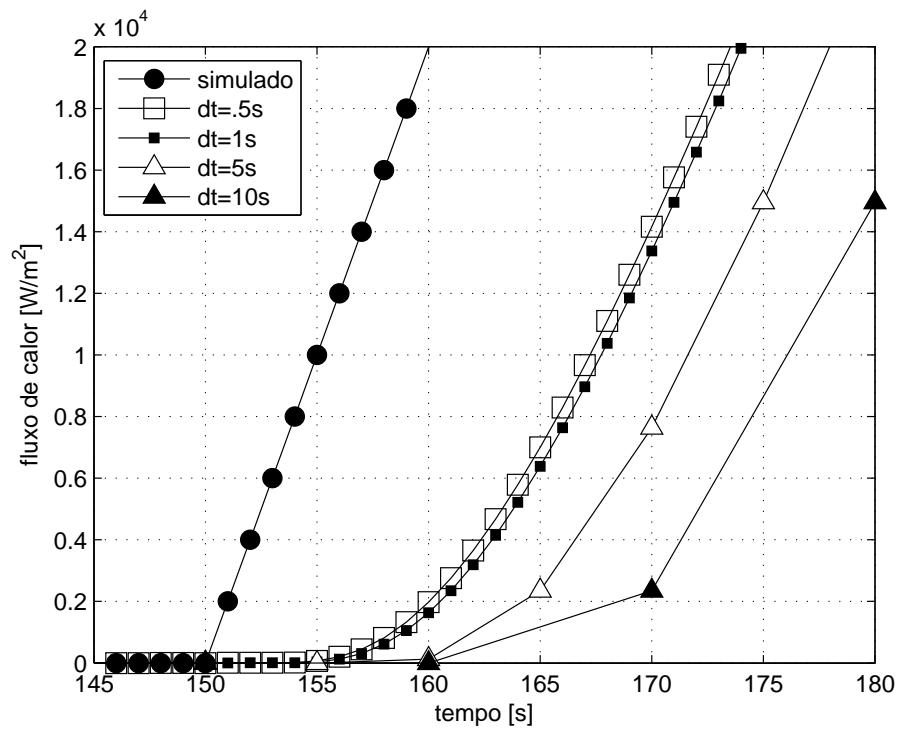
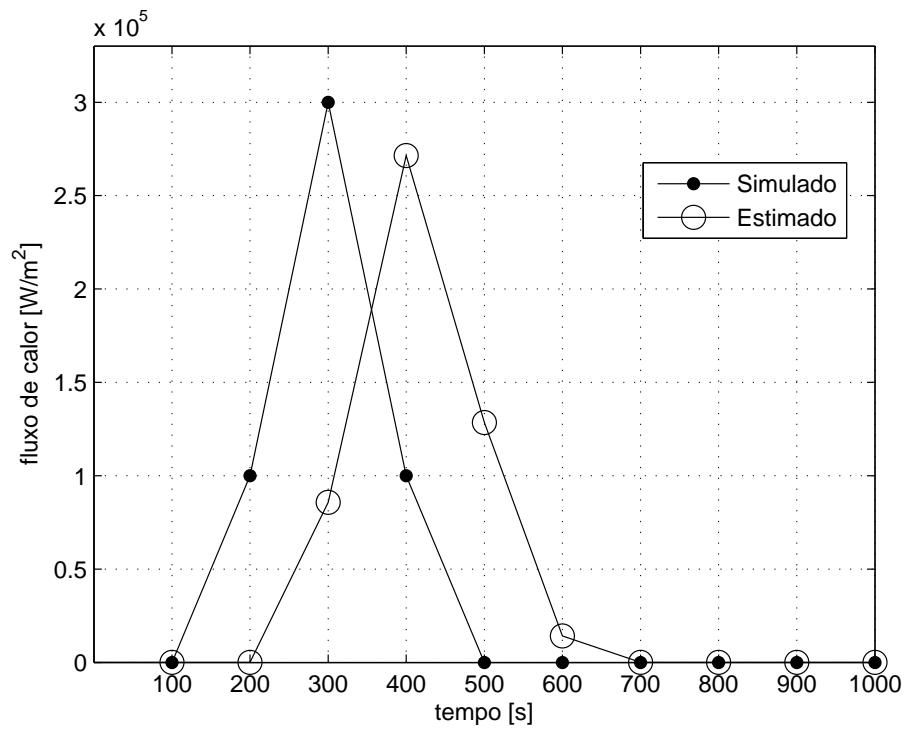
Figura 4.41: *Zoom* na escala de tempo da Fig. 4.40Figura 4.42: Fluxo de calor estimado com $d = 100s$

Tabela 4.8: Discretização do tempo \times número de amostras \times área

$dt[s]$	n	A1-A2(%)
0,5	2048	1,4485E-6
1	1024	1,4459E-6
2	513	1,4474E-6
3	342	1,4468E-6
4	257	1,9277E-7
5	205	1,4459E-6
10	103	1,4446E-6
15	69	1,4441E-6
20	52	5,6781E-7
30	35	1,4436E-6
40	26	2,3277E-6
50	21	1,4435E-6
60	18	1,1506E-6
70	15	2,3275E-6
80	13	2,3275E-6
90	12	1,7661E-6
100	11	2,2051E-6
110	10	0,0025
120	9	0,6838
130	8	5,8108

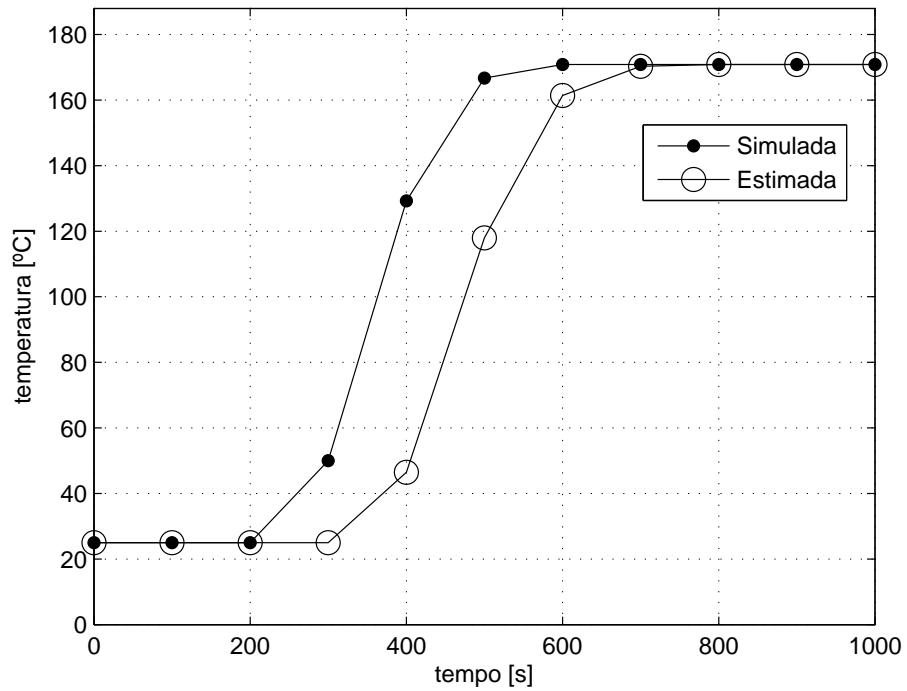


Figura 4.43: Comparação entre as temperaturas simulada e estimada, $dt = 100s$

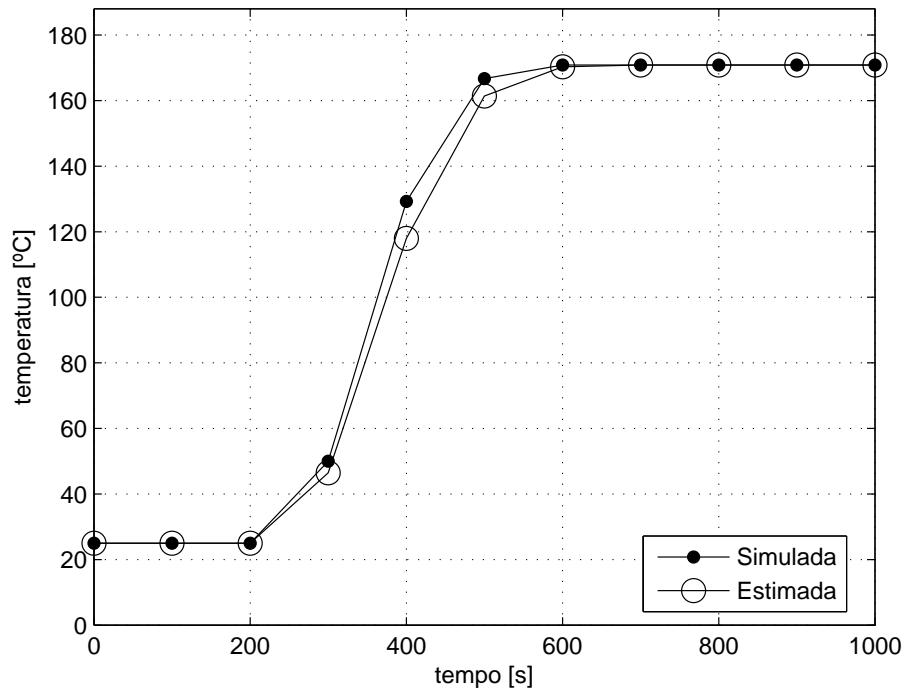


Figura 4.44: Comparação entre as temperaturas simulada e estimada (corrigida)

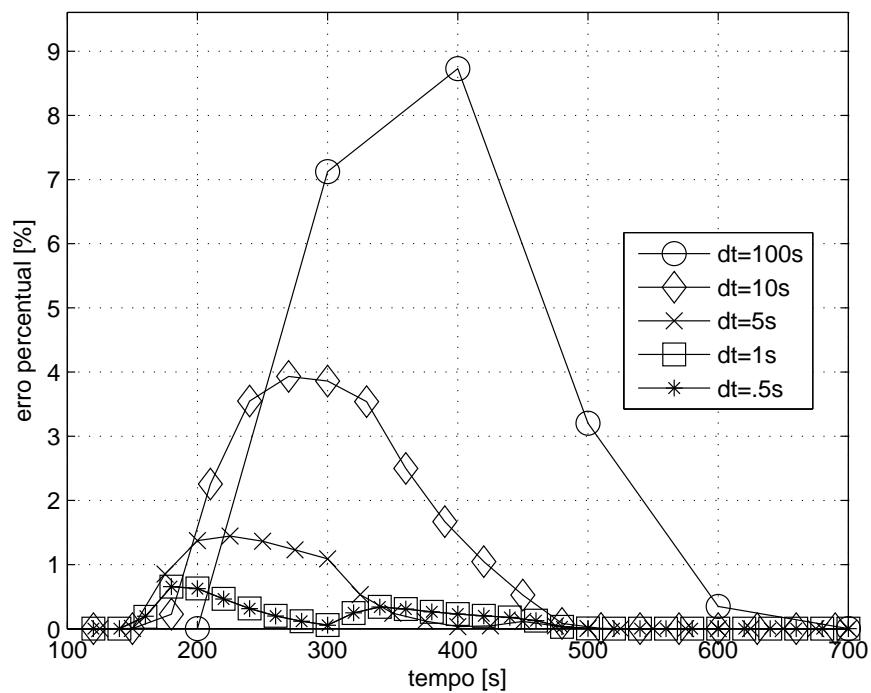


Figura 4.45: Erro percentual entre as temperaturas simulada e estimada, com dt variável

4.3.3 Diferentes formas de fluxo

A metodologia proposta também é testada por meio de outras diferentes formas de fluxo de calor simulado, além da triangular, experimenta-se fluxo de calor constante, onda quadrada (*step*), de comportamento gaussiano, exponencial e senoidal.

Considerando as propriedades termofísicas do cobre, condutividade térmica $k = 401$ [W/m.K] e difusividade térmica $\alpha = 117E - 06$ [m²/s]; comprimento $L = 10E - 02$ [m]; temperatura inicial, $T_0 = 25$ [°C] e, ainda considerando o intervalo de discretização do tempo $dt = 1$ [s] e tempo final de simulação sendo $tf = 1024$ [s]. Obtém-se a distribuição de temperatura para as posições de interesse, $x = 0$, $L/2$ e L , para cada uma das formas de fluxo de calor mostrada nas Figs 4.46(a), 4.48(a), 4.50(a), 4.52(a) e 4.54(a), e os perfis destas temperaturas correspondentes mostrados nas Figs 4.46(b), 4.48(b), 4.50(b), 4.52(b) e 4.54(b), calculadas por meio da solução híbrida, Eq. (3.11).

Observa-se, graficamente, que a resposta impulsiva é independente do par fluxo/temperatura, isso significa que os vetores mostrados nas Figs 4.46(c), 4.48(c), 4.50(c), 4.52(c) e 4.54(c) são iguais, para cada uma das posições analisadas.

As estimativas para cada forma de fluxo de calor, a partir de informações oriundas das posições $x = 0$, $x = L/2$ ou $x = L$, são mostradas nas figuras identificadas pelos índices (d), (e) e (f), nas Figs. 4.46; 4.48; 4.50; 4.52 e 4.54. Assim, recorrendo-se a essas estimativas de fluxo de calor, calcula-se as temperaturas. As Figuras 4.47; 4.49; 4.51; 4.53 e 4.55 mostram a comparação entre as temperaturas simuladas e as estimadas, bem como o erro percentual entre elas, para cada uma das posições analisadas. Pode-se verificar que o erro percentual é maior entre as temperaturas simuladas e estimadas para os fluxos de calor estimados a partir de dados procedente da posição $x = L$, como analisado na seção 4.3.2.

Observa-se nas estimativas para o fluxo de calor constante a ocorrência de *overshoot* (pico) quando a estimativa é obtida por meio de dados da posição $x = 0$ (Fig. 4.46(d)) e também *undershoot* (pico invertido) para $x = L/2$ e $x = L$ (Figs. 4.46(e) e 4.46(f)), ou seja, localmente, a estimativa diverge do que corresponde ao fluxo simulado. Esse mesmo fenômeno também aparece na estimativa do fluxo de calor *step*, exponencial e senoidal em $x = 0$ (Fig. 4.48(d), 4.52(d) e 4.54(d)). Esse fenômeno ocorre por causa da natureza dos vetores que são convoluidos para obter a estimativa para o fluxo de calor, que será detalhada na próxima seção. Para as estimativas de fluxo de calor de comportamento gaussiano ou triangular esse fenômeno não é verificado, pois nestes casos não se tem mudança brusca em seu comportamento.

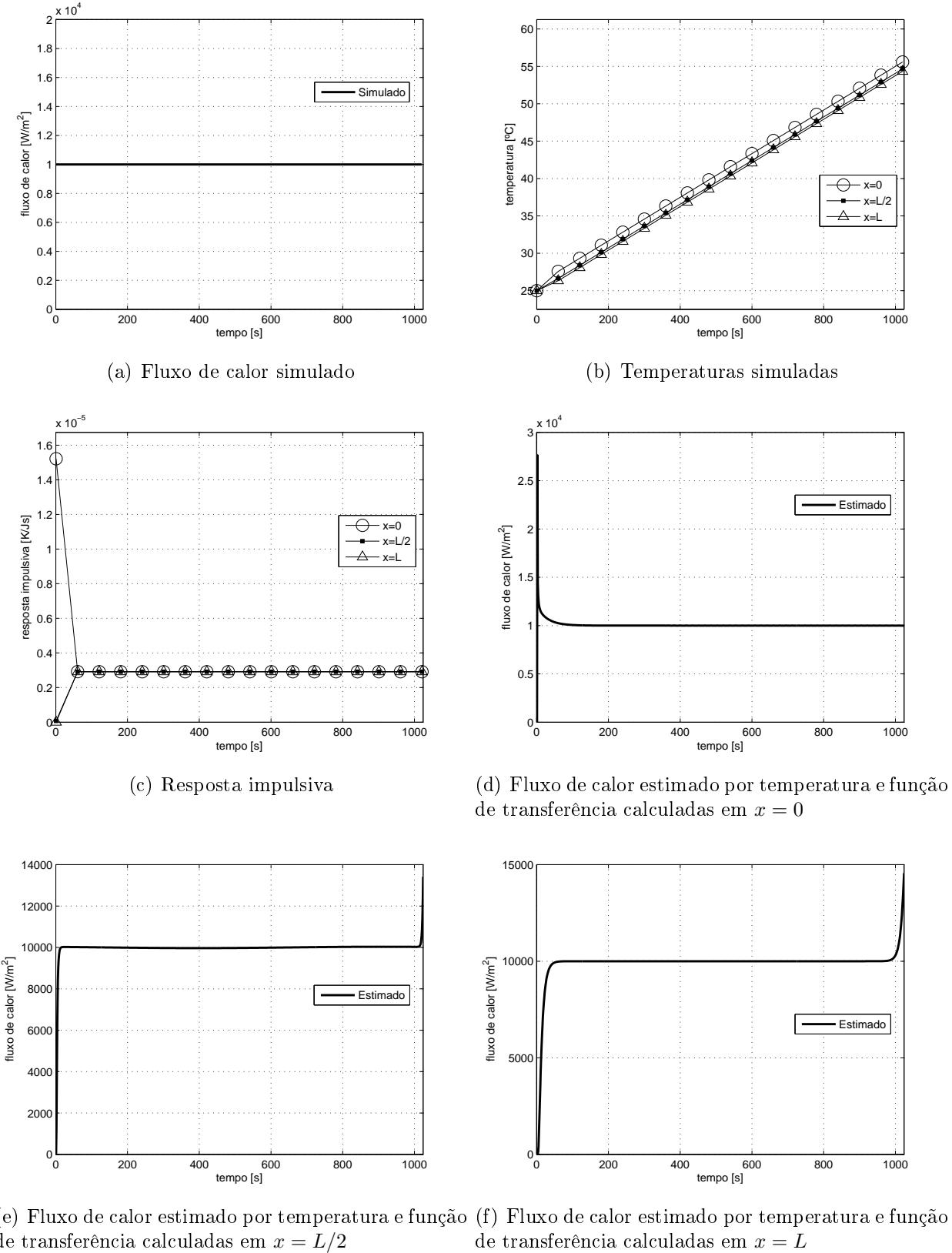
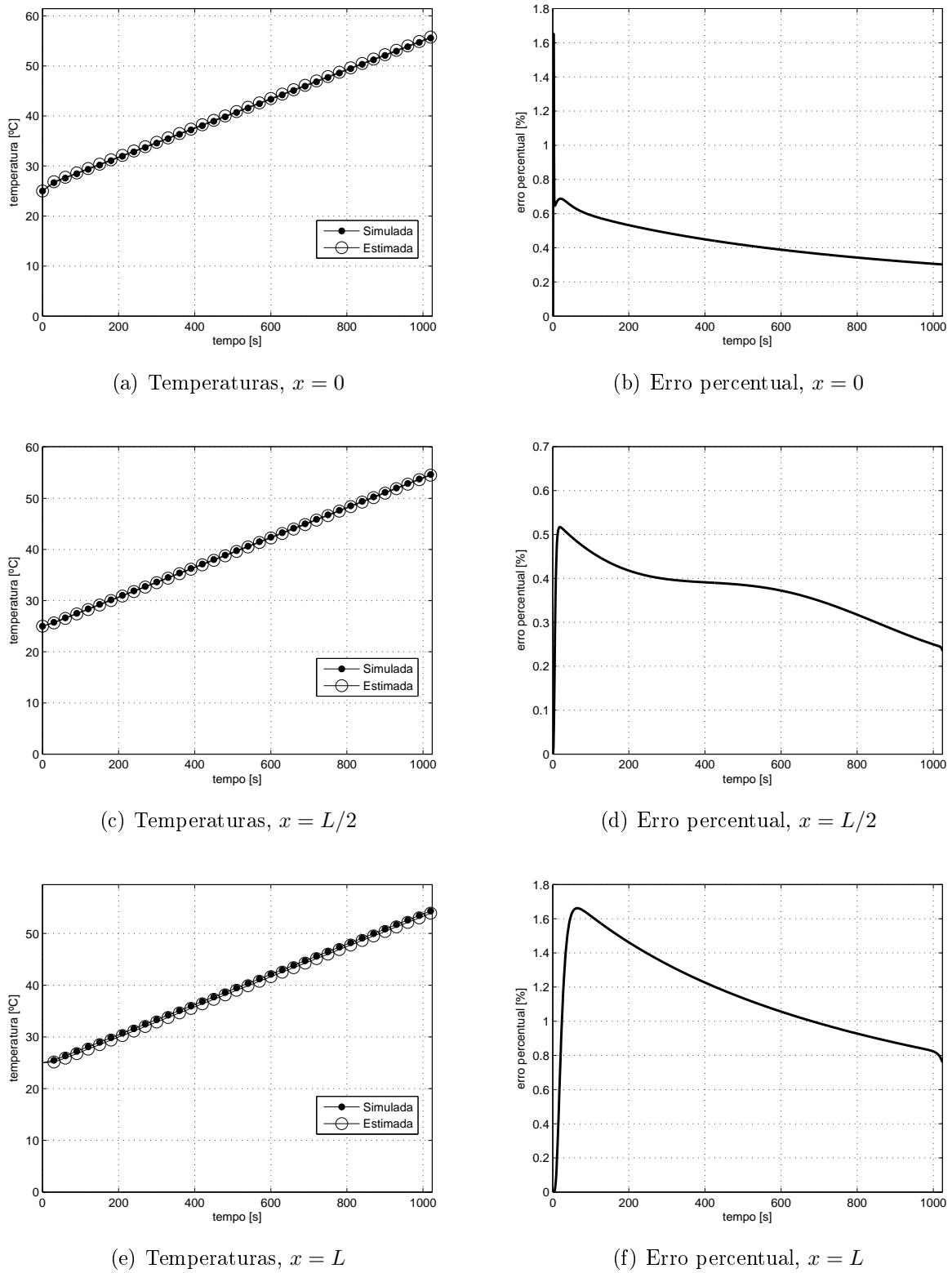
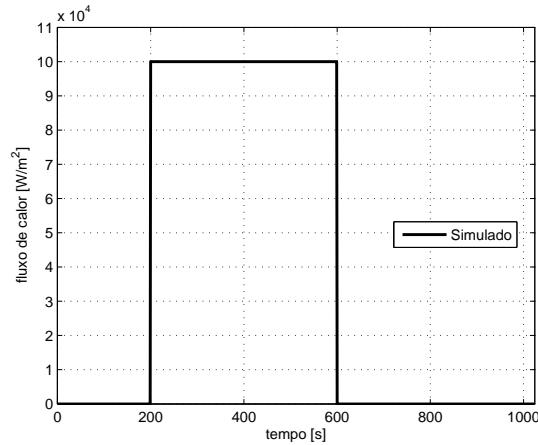
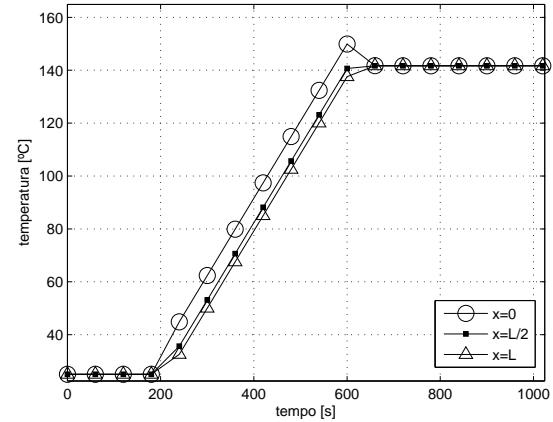


Figura 4.46: Análise para fluxo de calor constante

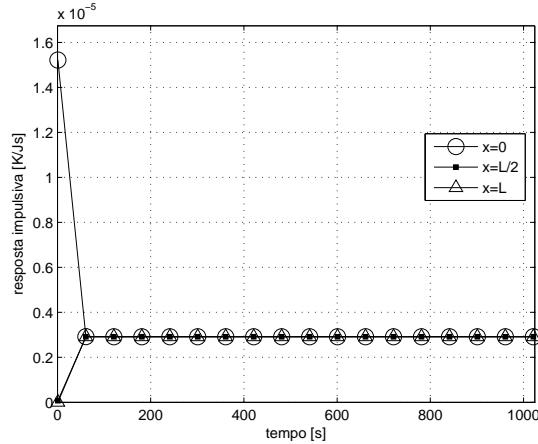
Figura 4.47: Temperatura simulada *versus* estimada com fluxo constante



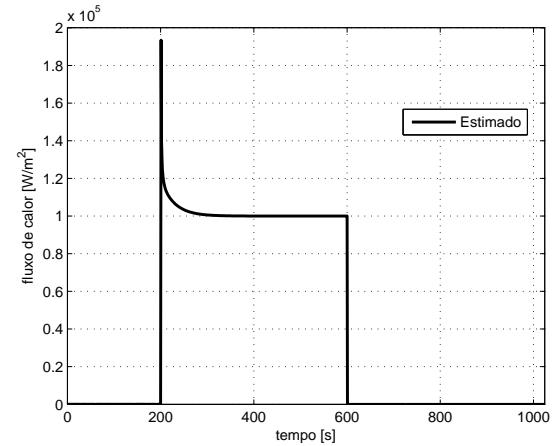
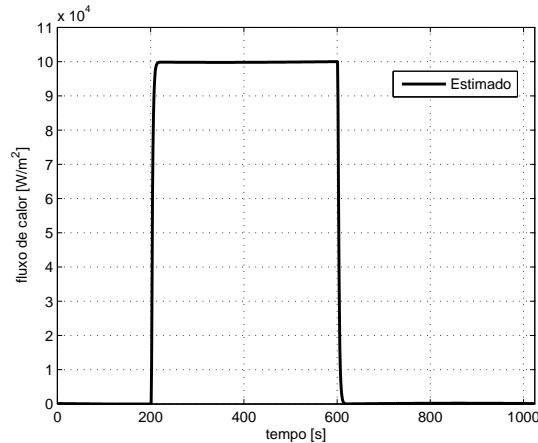
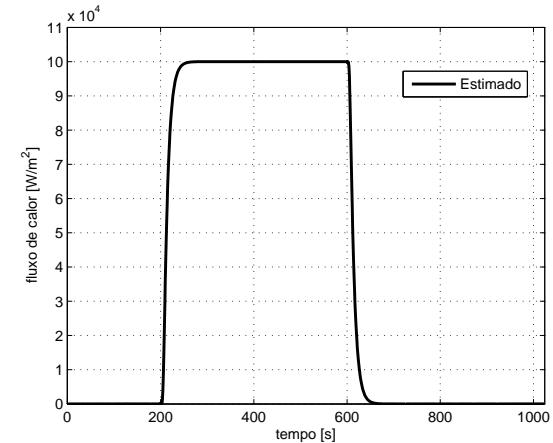
(a) Fluxo de calor simulado



(b) Temperaturas simuladas



(c) Resposta impulsiva

(d) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (e) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (f) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$ Figura 4.48: Análise para fluxo de calor *step*

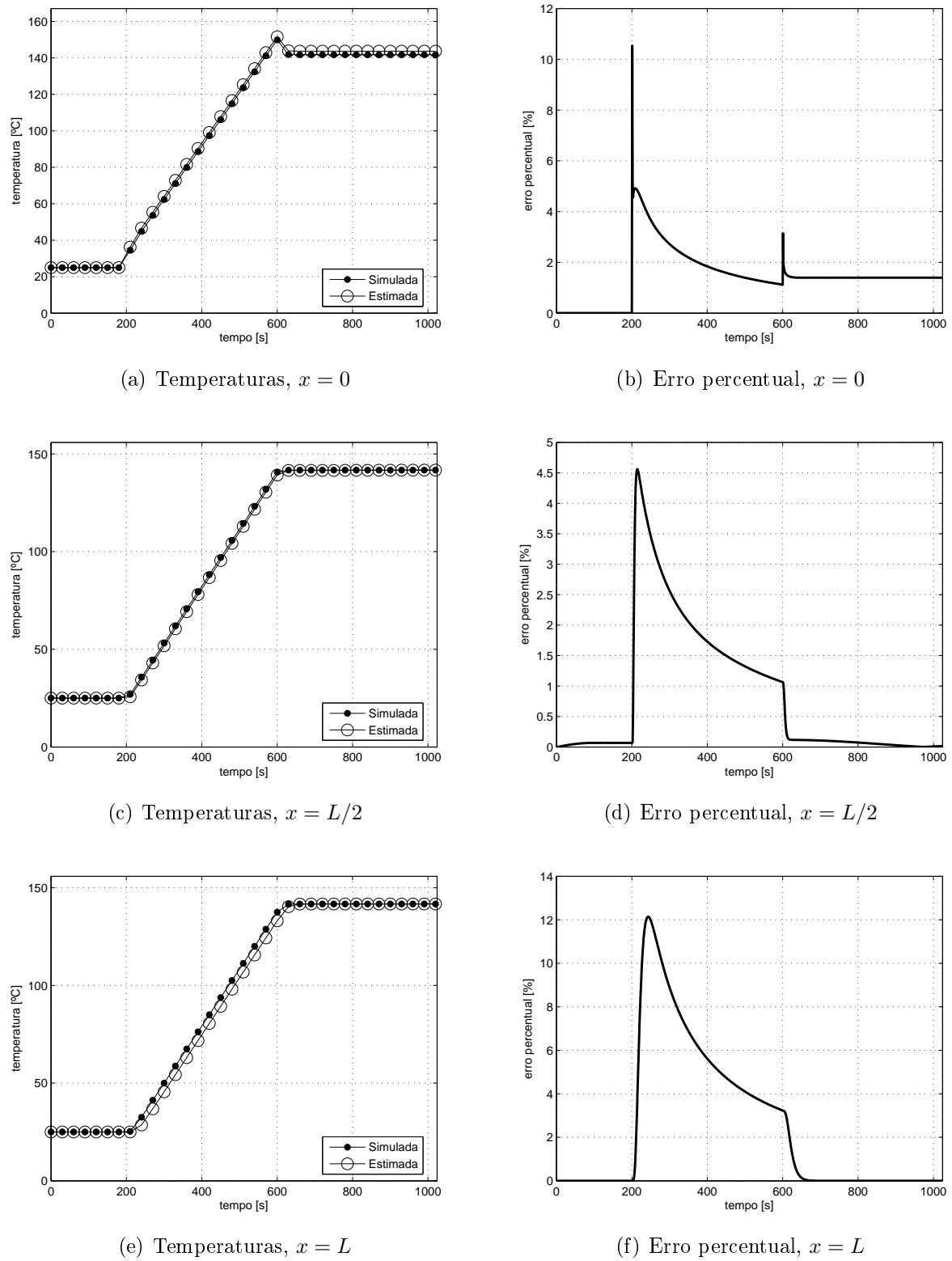
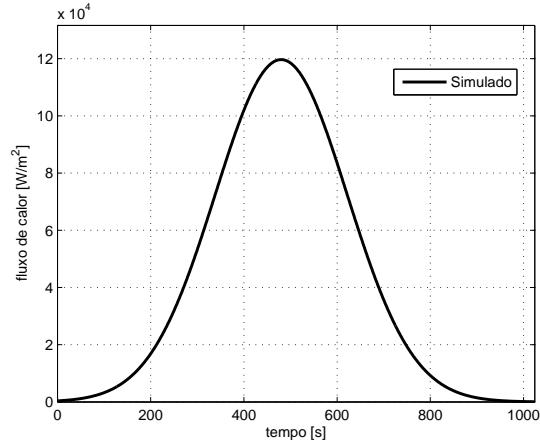
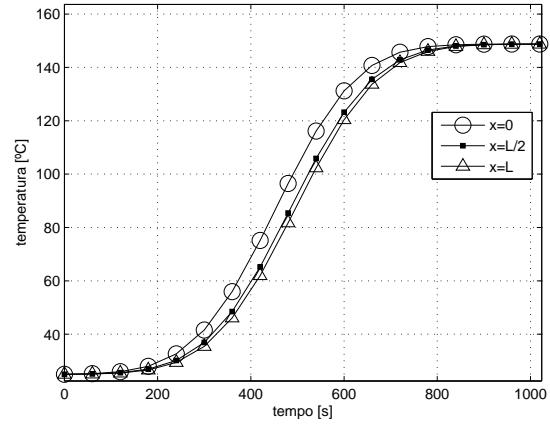


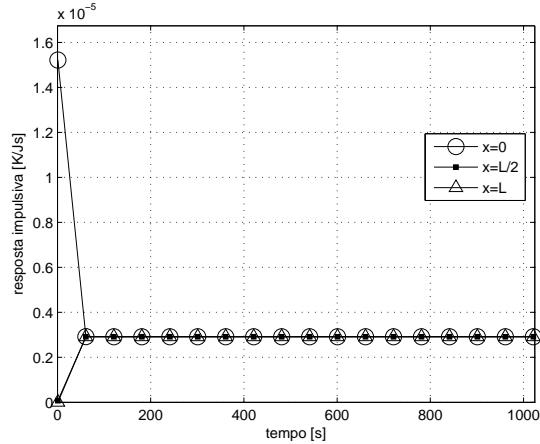
Figura 4.49: Temperatura simulada *versus* estimada com fluxo *step*



(a) Fluxo de calor simulado



(b) Temperaturas simuladas



(c) Resposta impulsiva

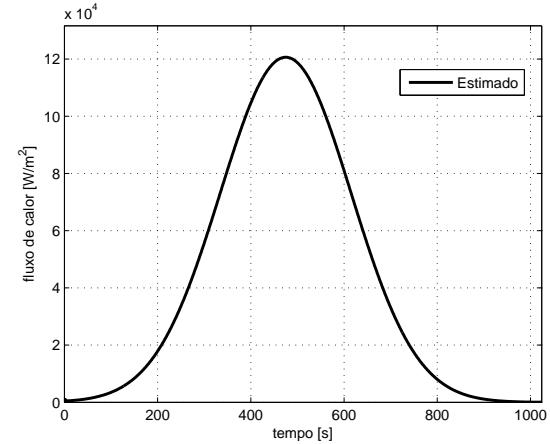
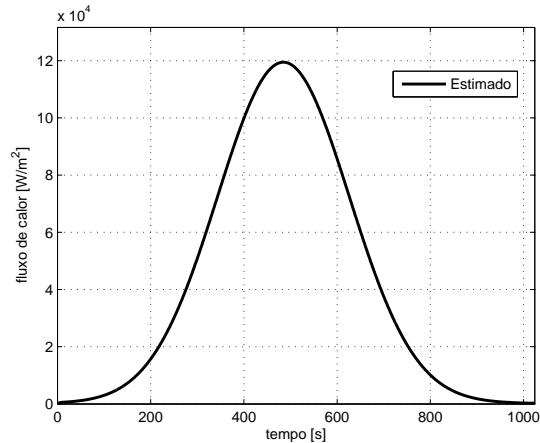
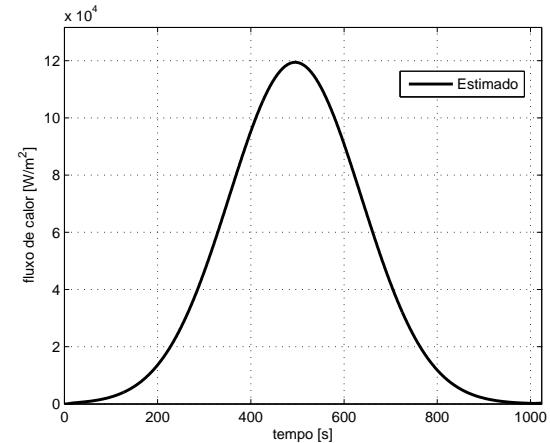
(d) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (e) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (f) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$

Figura 4.50: Análise para fluxo de calor gaussiano

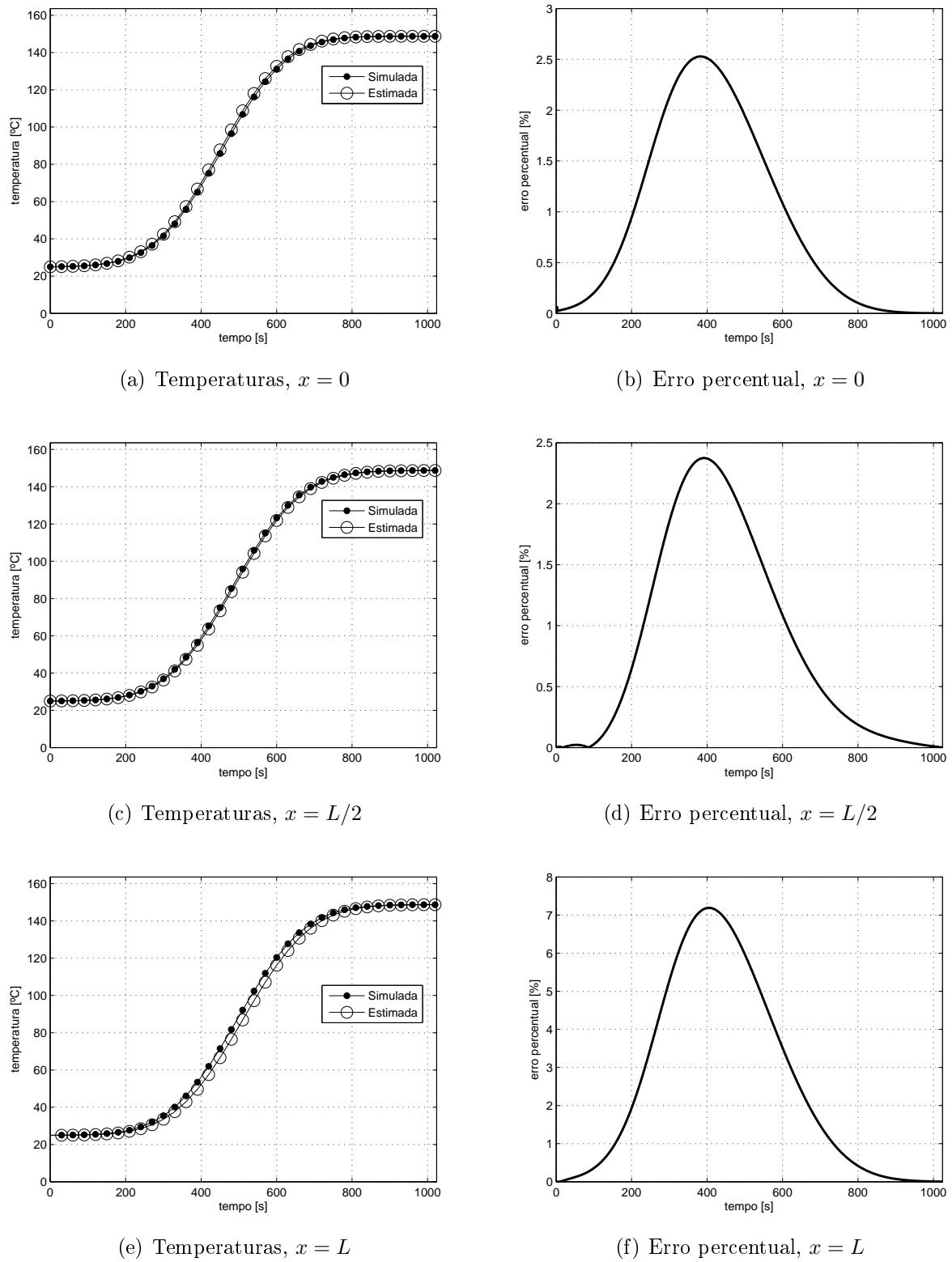
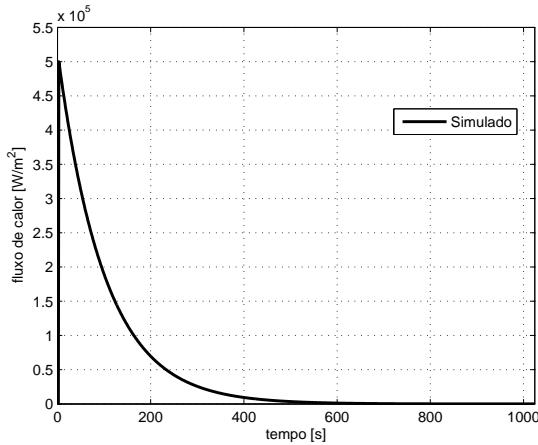
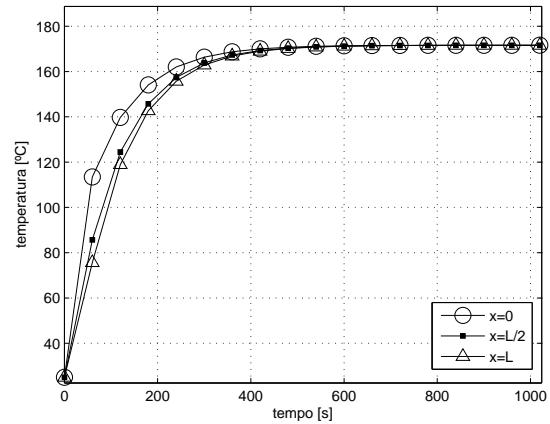


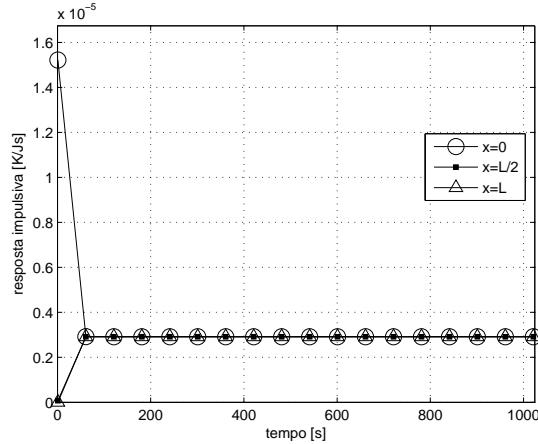
Figura 4.51: Temperatura simulada *versus* estimada com fluxo gaussiano



(a) Fluxo de calor simulado



(b) Temperaturas simuladas



(c) Resposta impulsiva

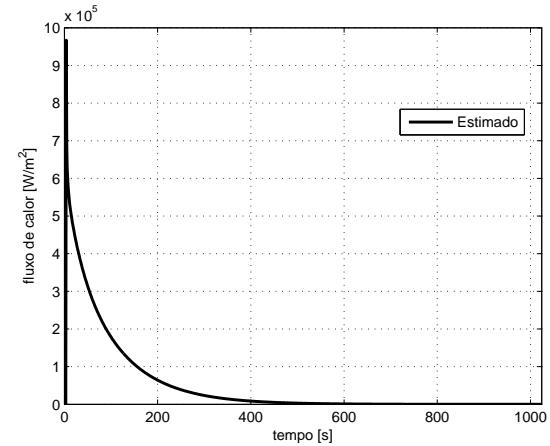
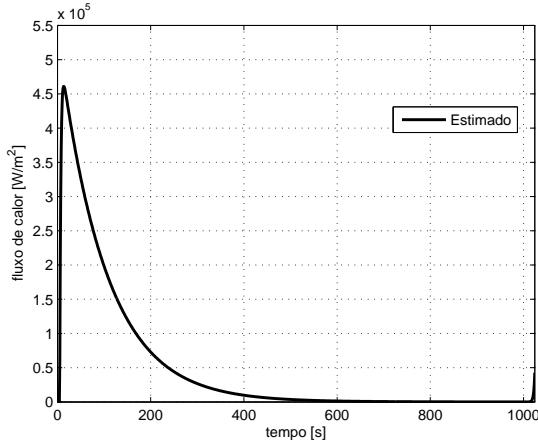
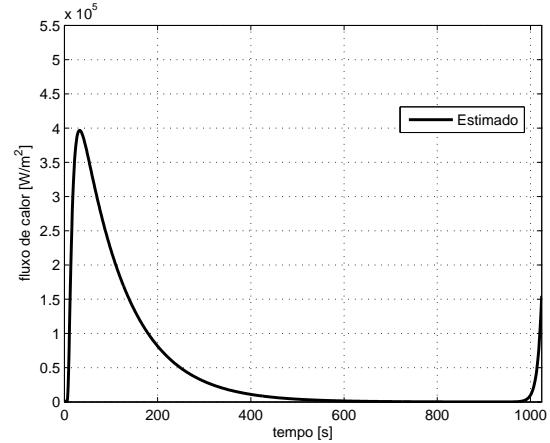
(d) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (e) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (f) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$

Figura 4.52: Análise para fluxo exponencial

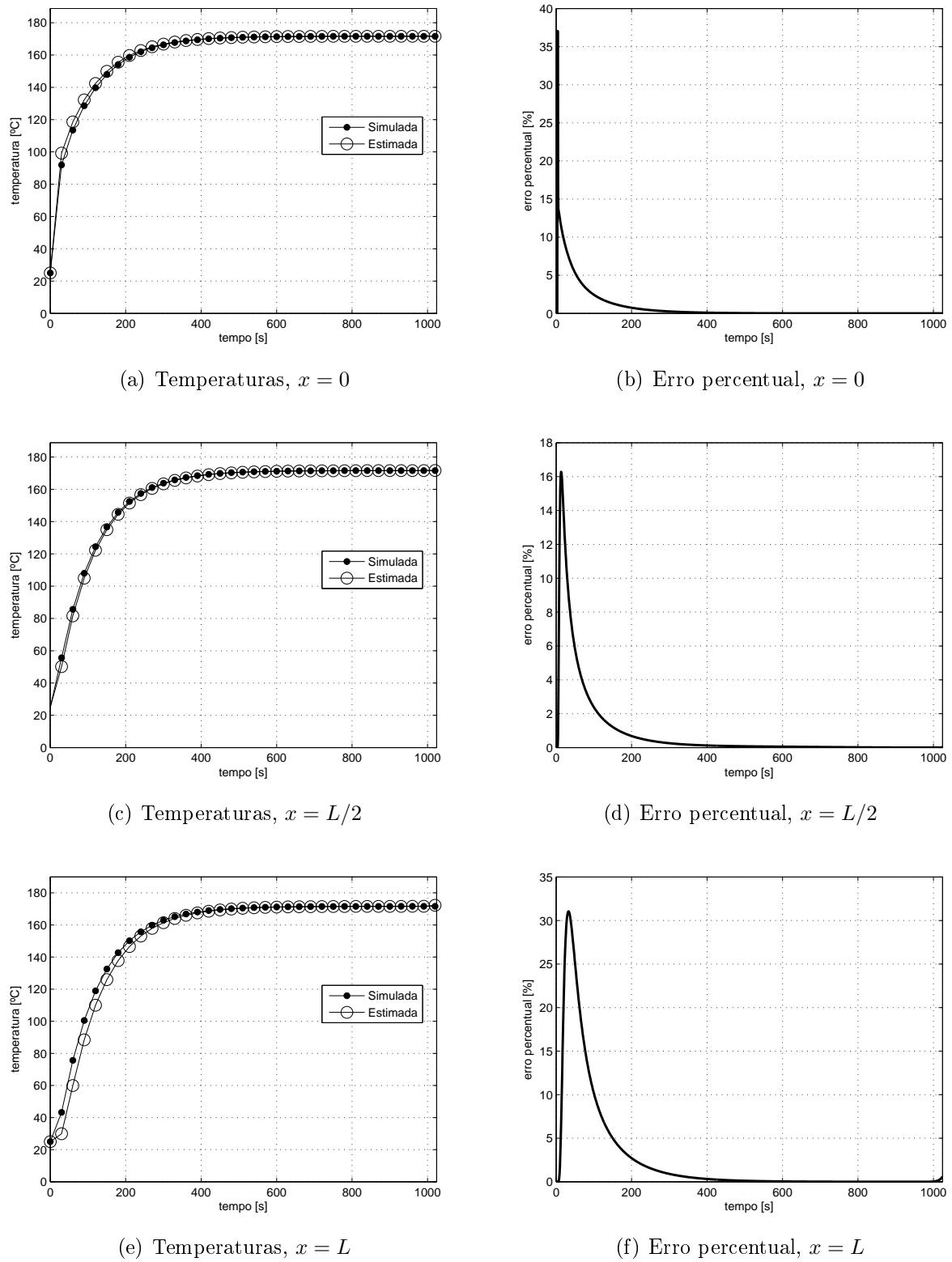
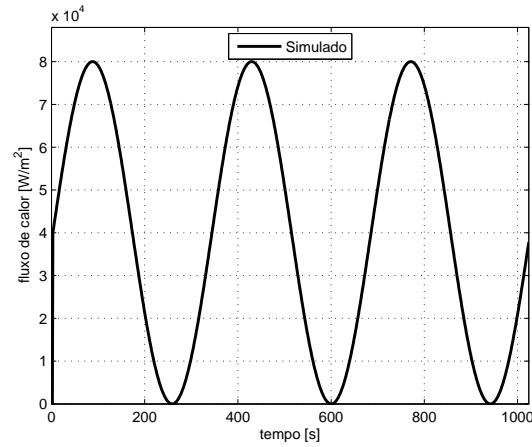
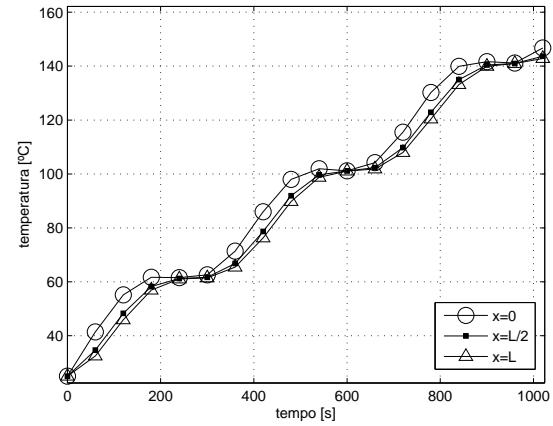


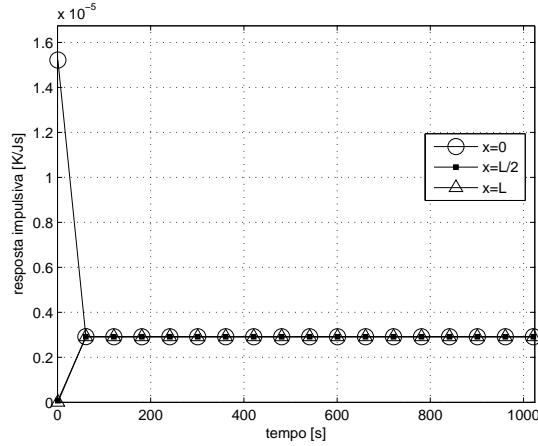
Figura 4.53: Temperatura simulada *versus* estimada com fluxo exponencial



(a) Fluxo de calor simulado



(b) Temperaturas simuladas



(c) Resposta impulsiva

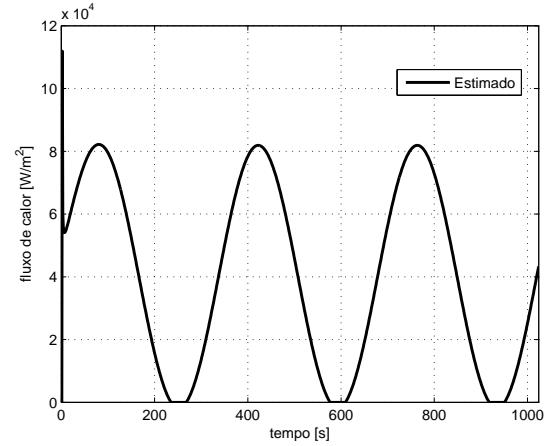
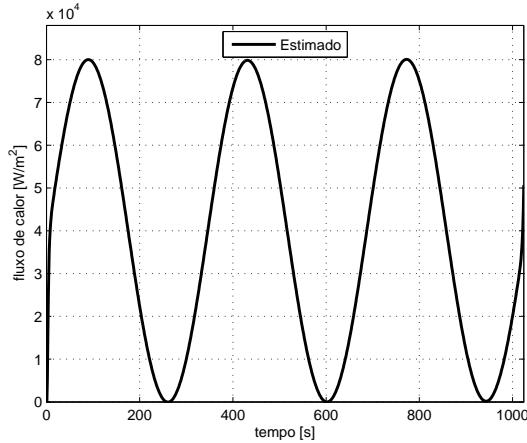
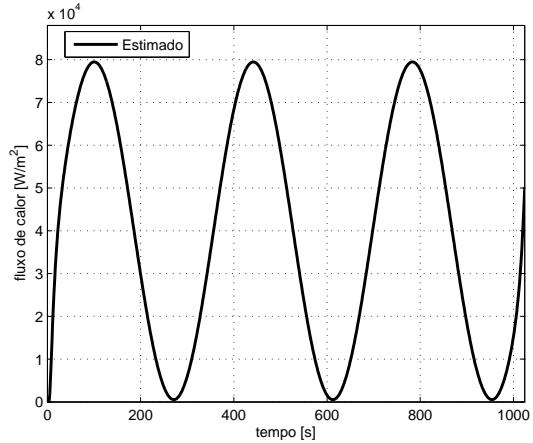
(d) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = 0$ (e) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L/2$ (f) Fluxo de calor estimado por temperatura e função de transferência calculadas em $x = L$

Figura 4.54: Análise para fluxo seno

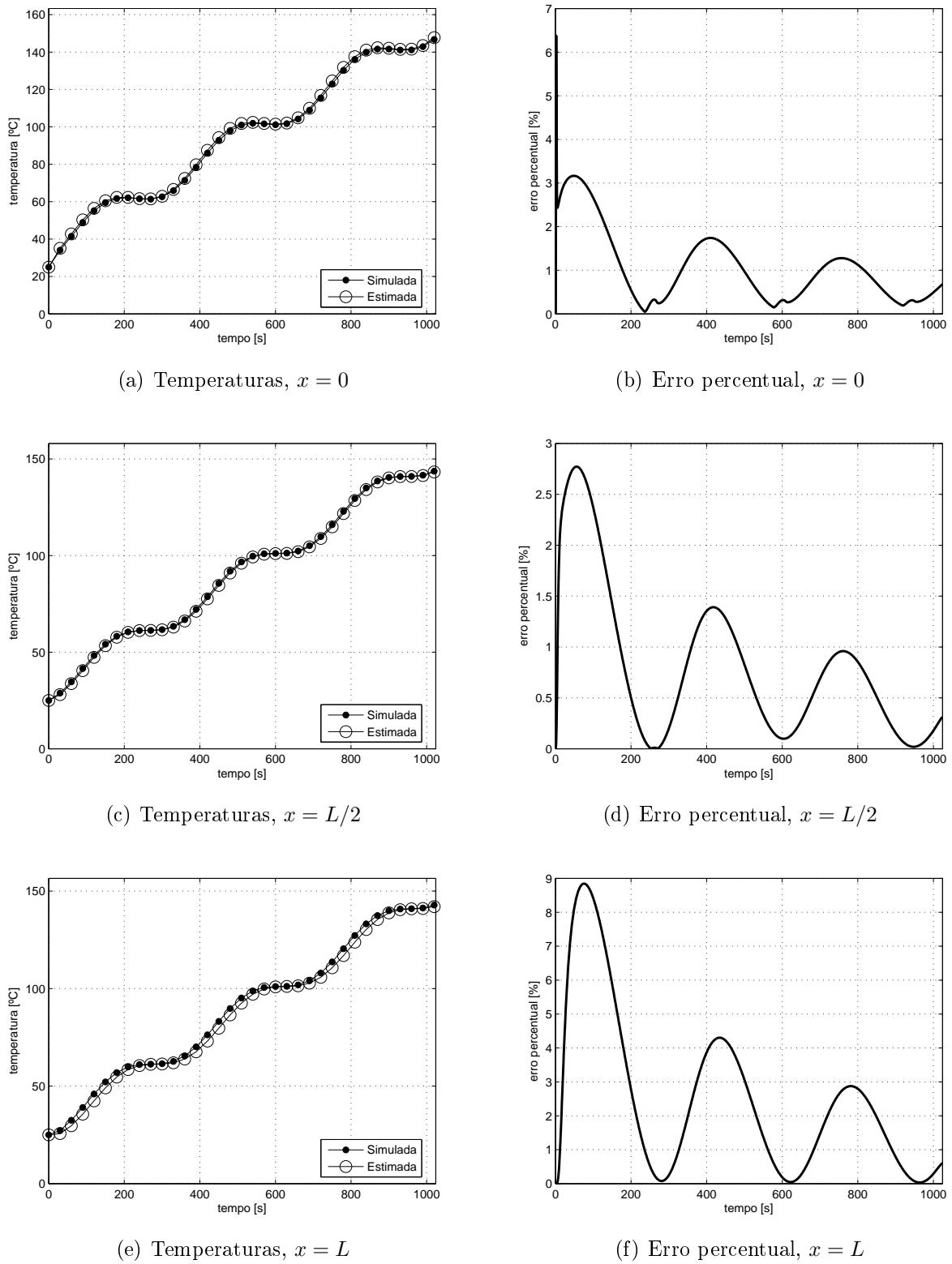


Figura 4.55: Temperatura simulada *versus* estimada com fluxo seno

4.3.4 Interpretação gráfica

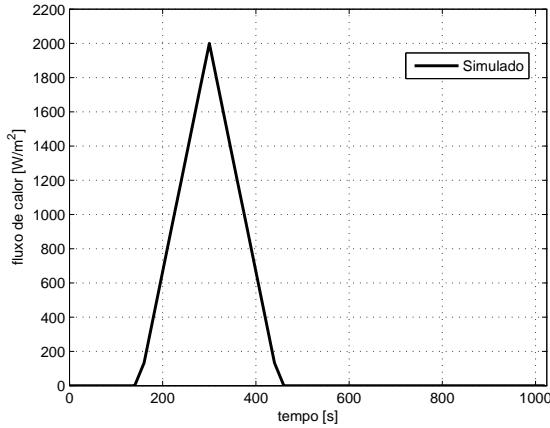
O objetivo desta seção é analisar graficamente as estimativas do fluxo de calor, considerando a definição matemática da convolução discreta dada por

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=0}^n x_1[n] \cdot x_2[n-i] \quad (4.2)$$

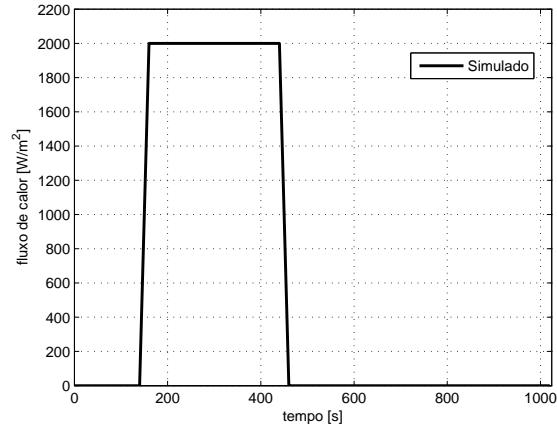
A noção gráfica de convolução é estabelecida observando a configuração dos vetores $x_1[n] = T[n]$ e $x_2[n] = 1/h[n]$ inseridas à Eq. (4.2), a qual indica que o vetor $x_2[n]$ integra $x_1[n]$, sendo revertido e deslocado.

Considera-se, para essa análise, os fluxos de calor simulado do tipo triangular e *step* (Figs. 4.56(a) e 4.56(b)) aplicados ao mesmo dados geométricos e físicos do problema analisado na seção 4.2, e suas estimativas obtidas por meio dos vetores T e h , calculados em $x = 0$.

As Figs. 4.57(b) e 4.58(b) mostram o quociente da resposta impulsiva revertido, como trata-se do mesmo problema físico, eles são exatamente iguais. Cada um dos perfis de temperatura visualizados nas Figs. 4.57(a) e 4.58(a) conserva em sua estrutura a forma geométrica do fluxo de calor que a gerou (triangular ou *step*). Institui-se, claramente, o conceito de filtro para a resposta impulsiva, que busca extrair da temperatura uma estimativa para o fluxo de calor, conforme o procedimento de multiplicação dado pela Eq. (4.2).



(a) triangular



(b) *step*

Figura 4.56: Fluxos de calor simulados

Mostra-se nas Figuras 4.57(c) e 4.58(c) o comportamento das temperaturas, calculadas

em $x = 0$, no intervalo de tempo entre 100 e 250 segundos. Desta forma, torna-se possível observar que para o início da atuação do fluxo de calor triangular, tem-se um comportamento suave para a temperatura, enquanto o fluxo de calor *step* gera temperatura com uma transição súbita, quando $t = 150s$, devido ao seu degrau de descontinuidade (0 para $2000[W/m^2]$), unindo-se esse fato ao decaimento brusco da resposta impulsiva é o que ocasiona o *overshoot* em sua estimativa (Fig. 4.58(d)). Quando o fluxo de calor *step* é interrompido, no intervalo de tempo entre 400 e 500, ocorre *undershoot*, porém o fluxo negativo não é considerado e convertido para valor nulo, por isso, neste ponto sua estimativa mostra-se corrigida.

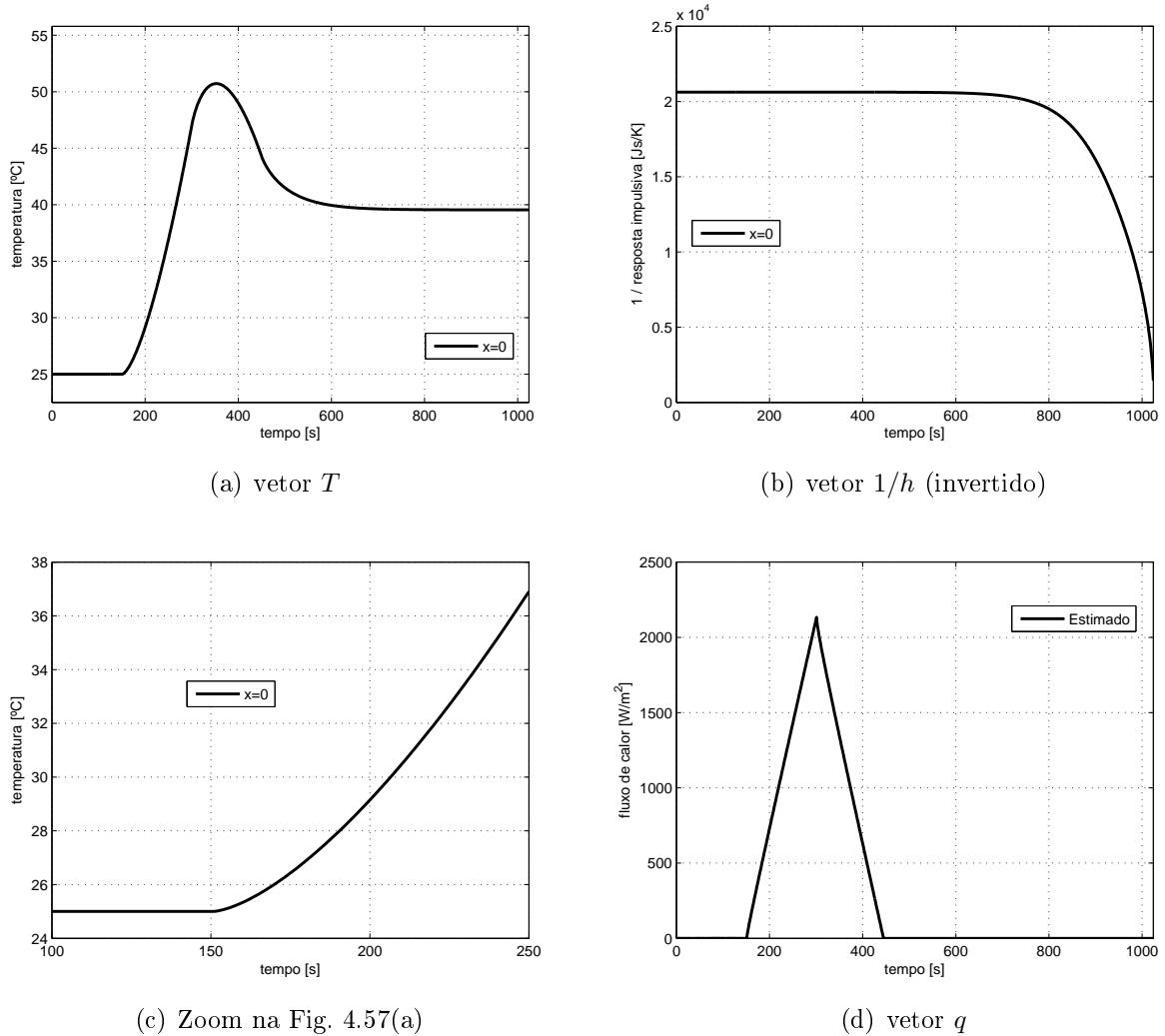
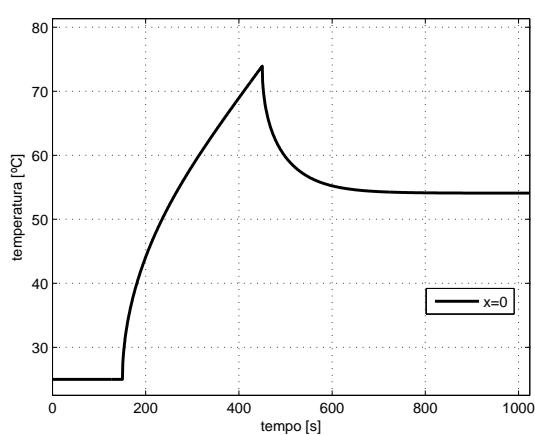
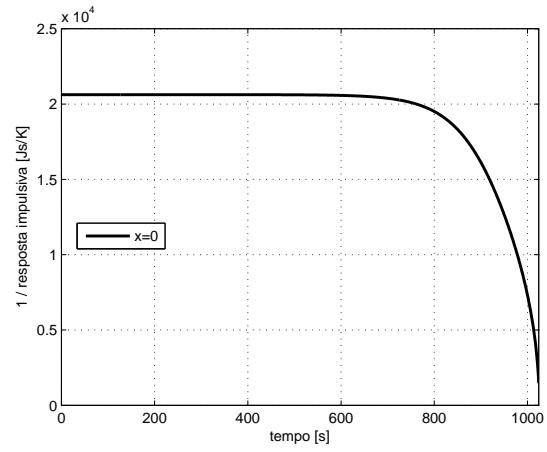
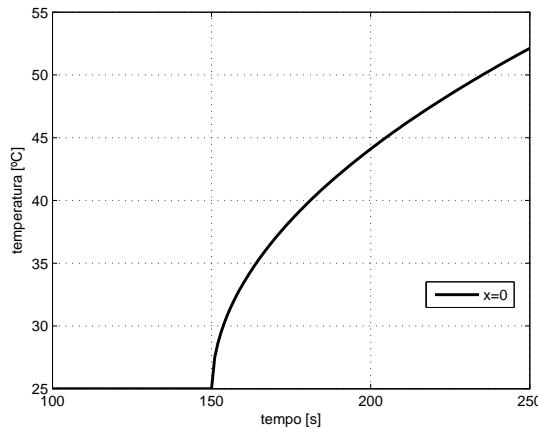
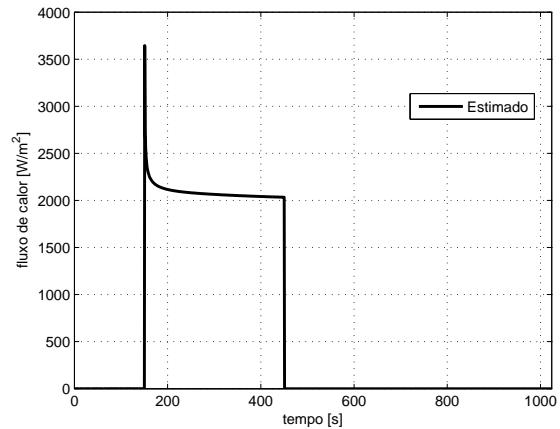


Figura 4.57: Noção gráfica da convolução para obter o fluxo triangular

(a) vetor T (b) vetor $1/h$ (invertido)

(c) Zoom na Fig. 4.58(a)

(d) vetor q Figura 4.58: Noção gráfica da convolução para obter o fluxo *step*

4.3.5 Operações do MATLAB

No capítulo 3 relata-se que o fluxo de calor pode ser estimado por diferentes abordagens, no domínio do tempo pela deconvolução descrita na Eq. (3.23) e, no domínio de Laplace por meio da definição clássica de sistemas dinâmicos de uma entrada e saída, Eqs. (3.22), e ainda, por meio das densidades espectrais apresentadas nas Eqs. (3.24), (3.25).

Essas possibilidades para a estimativa do fluxo são possíveis por que a expressão matemática que descreve a função de transferência (ou resposta impulsiva) é conhecida. Além disso, mostra-se com a Fig. 4.59 que as implementações computacionais das Eqs. (3.23); (3.22); (3.24); (3.25) são equivalentes. Nesse exemplo, as estimativas para o fluxo de calor foram calculadas por meio de informações oriundas da posição $X = L$, portanto é possível perceber a defasagem em relação ao fluxo de calor simulado.

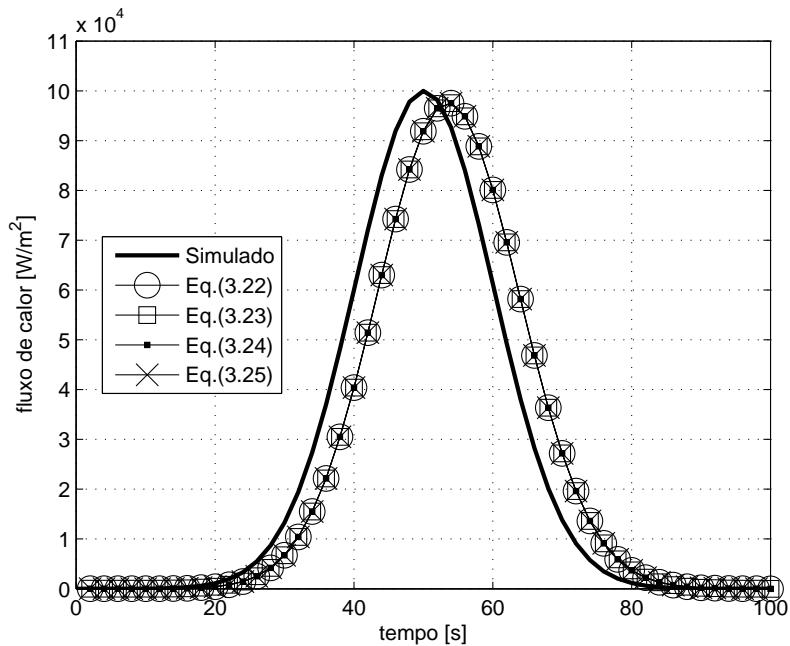


Figura 4.59: Comparação entre as Eqs. (3.23); (3.22); (3.24); (3.25), em $x = L$

Porém, no MATLAB, para que as Eqs. (3.23); (3.22); (3.24); (3.25) sejam equivalentes faz-se as seguintes operações:

Para a deconvolução, $q(x, t) = T(x, t) * \frac{1}{h(x, t)}$ (Eqs. (3.23)), o vetor de temperatura deve ser concatenado ao vetor de zeros, que possui pelo menos o mesmo número de elementos do vetor temperatura (linha 1). Assim, o vetor de fluxo de calor fornecido pela deconvolução terá a mesma dimensão do vetor temperatura; a deconvolução (*deconv*) é aplicada ao vetor T e

h , e não ao seu quociente (linha 2).

```

1 T=[T zeros (1,length(T))];
2 qdeconv=deconv(T,h)/dt;
```

Por transformada de Fourier, $q(x, s) = T(x, s) \cdot \frac{1}{H(x, s)}$ (Eq. (3.22)), ao transformar os vetores de temperatura e resposta impulsiva para o domínio da frequencia por meio da função de transformada rápida de Fourier (*fft*) (linhas 3 e 4), esses vetores são preenchido com a quantidade $NR = 2^p$ de zeros (linha 2), onde p é a próxima maior potência de dois da quantidade de amostra. Aumenta-se, assim, performance da *fft*. Aplica-se a transformada inversa de Fourier (*ifft*) para que o fluxo estimado seja mostrado no domínio do tempo (linha 7), divida pela discretização do tempo, pois na função de *fft* do MATLAB esse parâmetro não é considerado.

```

1 p=nextpow2 (length (t));
2 NR=2^p;
3 Tfreq=fft (T,NR);
4 Hfreq=fft (h,NR);
5 qfreq=Tfreq ./ Hfreq;
6 qtempo=ifft (qfreq)/dt;
```

Calcula-se as densidades espetrais por meio da multiplicação dos vetores no domínio da frenquênci, com o auxílio da função *conj* que fornece o complexo conjugado do vetor (linhas 1-3). Na primeira estimativa por desidade espectral, $S_{TT}(s) = |q(s)|^2 \cdot S_{HH}(s)$ (Eq. (3.24)), no domínio da frequênci o fluxo de calor é dado por $q(s) = |q(s)|e^{i\phi(s)}$, sendo $\phi(s)$ o ângulo de fase de S_{HT} (linha 6).

```

1 STT=Tfreq.*conj (Tfreq);
2 SHH=Hfreq.*conj (Hfreq);
3 SHT=Tfreq.*conj (Hfreq);
4 modqqespc12=STT./SHH;
5 modqqespc1=sqrt (modqqespc12);
6 qespc1=modqqespc1.*exp (1i*angle (SHT));
7 qespc1tempo=ifft (qespc1)/dt;
```

Na segunda estimativa por desidade espectral, $S_{HT}(s) = q(s) \cdot S_{HH}(s)$ (Eq. (3.24)), tem-se a estimativa do fluxo no domínio da frequênci diretamente pela divisão entre a densidade espectral S_{HT} e a auto densidade espectral S_{HH} .

```
1 qespc2=SHT./SHH;
```

```
2 qespc2tempo=ifft ( qespc2 ) / dt ;
```

Outra operação importante para o sucesso da técnica é fazer a inversão (*fliplr*) do vetor função de transferência quando se usa informações provenientes da posição $x = L/2$ e $x = L$, ou para posições que tenham o comportamento equivalente a essas posições (Fig. 4.3.5). Desta forma, informa se o vetor correto para os procedimentos de convolução no MATLAB.

```
1 if      x==L || x==L/2
2     h=fliplr ( h ) ;
3 end
```

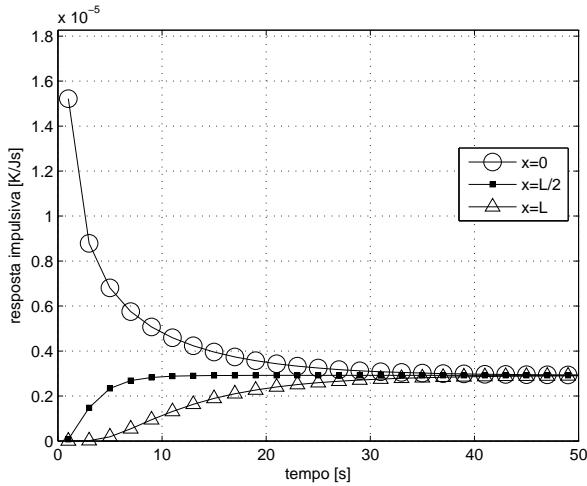
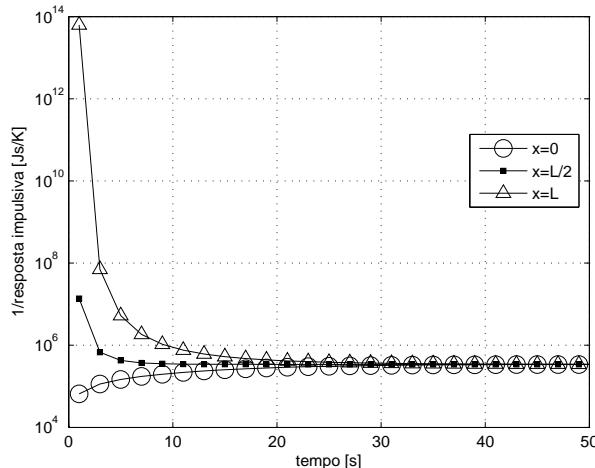
(a) vetor h (b) vetor $1/h$

Figura 4.60: Comportamento da resposta impulsiva, para as posições $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$

4.4 Problema 3D, $X33Y33Z33$

O problema denominado $X33Y33Z33$ pode ser visto como uma aproximação matemática para o problema de condução de calor originado por um processo de usinagem utilizando-se ferramenta de corte ortogonal. Na seção 3.2 apresentaram-se seus fundamentos teóricos com a solução do problema direto dada pela Eq. (3.59). Analogamente, para o caso 3D, conhecendo-se o fluxo de calor $q(t)$, obtém-se a temperatura, sendo o fluxo de calor tratado da mesma forma do problema unidimensional, ou seja, como um dado discreto, aplica-se, portanto, o conceito de solução híbrida.

4.4.1 Verificação intrínseca

Inicialmente verifica-se intrinsecamente, a solução computacional para a Eq. (3.59) que descreve a distribuição de temperatura (problema direto) para esse problema 3D (COLE *et al.*, 2010). A verificação pode ser feita a partir da solução do problema unidimensional $X22$, considerando-se o fluxo de calor atuando em toda área delimitada por $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq z \leq R$ quando $y = W$, e, além disso, faz-se cada coeficiente de convecção, h_i , suficientemente pequeno para que as demais áreas sofram isolamento térmico, conforme o esquema na Fig. 4.61.

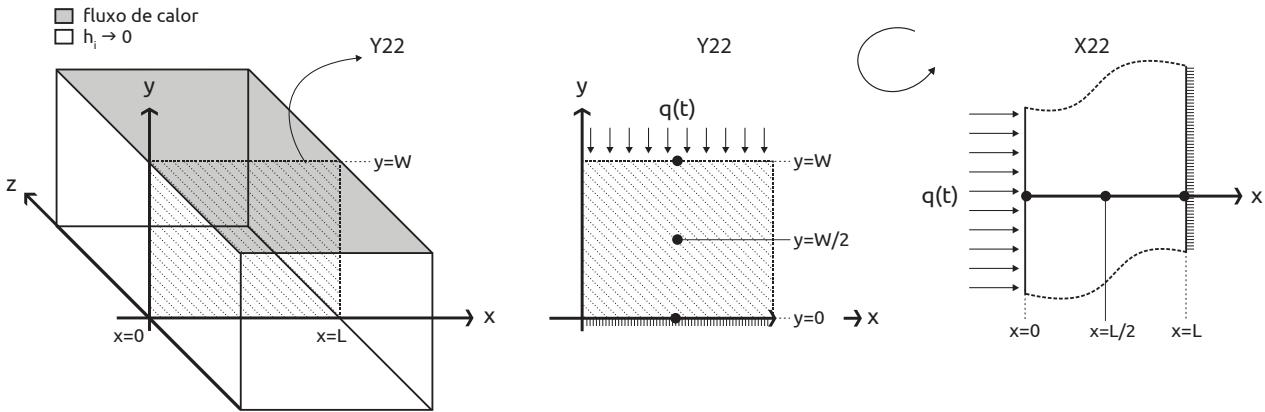


Figura 4.61: Equivalência entre $X33Y33Z33$ e $X22$

Para a verificação da solução computacional, pode-se considerar um fluxo de calor qualquer, por exemplo, o pulso retangular (*rectpuls*, no MATLAB) mostrado na Fig. 4.62. Considera-se também, nesse caso, as propriedades termofísicas de um tipo aço rápido, cuja condutividade térmica é $k = 24 [W/m.K]$ e difusividade térmica $\alpha = 7,0868E-06 [m^2/s]$; os coeficientes de convecção $h_i = 0.01 [W/m^2K]$, para $i \neq 4$ e $h_4 = 0$ (para a área da face onde

há fluxo de calor); e, comprimento $L = W = 1E - 02$ [m] e $R = 10E - 02$ (compatíveis com a geometria de uma ferramenta de usinagem, e, para a verificação os comprimentos L e R não devem interferir no resultado); temperatura inicial, $T_0 = 25$ [°C] e ambiente, $T_\infty = 30$ [°C] e, intervalo de discretização do tempo $dt = 1$ [s] e tempo final de simulação sendo $tf = 100$ [s].

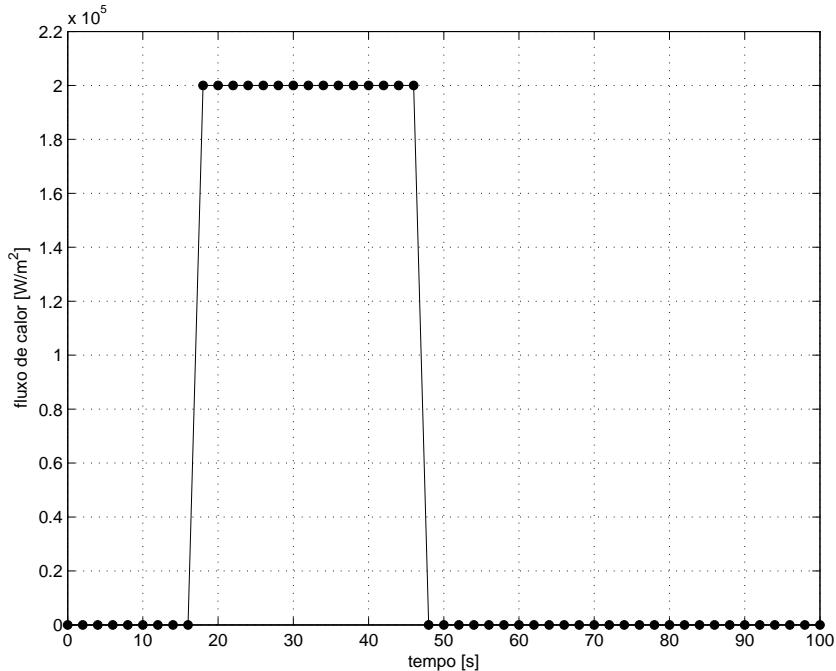


Figura 4.62: Fluxo de calor pulso retangular

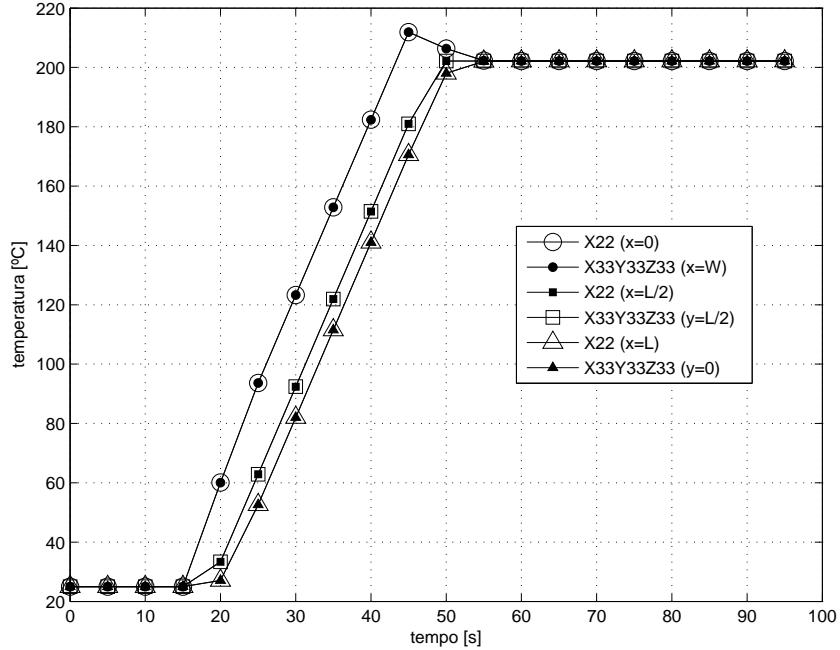
A Tabela 4.9 e a Fig. 4.63 mostram a comparação entre as temperaturas calculadas por meio da implementação computacional das Eqs. (3.11) e (3.59), que descrevem os problemas $X22$ e $X33Y33Z33$. A Figura 4.64 mostra que o erro percentual entre as duas soluções não é superior a 0,025%, portanto, pode-se concluir que as soluções para os problemas $X22$ e $X33Y33Z33$ são compatíveis quando os mesmos são configurados de modo equivalente.

É importante observar que a estrutura matemática das Eqs. (3.11) e (3.59) é diferente não somente pelo número de variáveis envolvidas, mas, também pela forma que os autovalores são calculados. No problema unidimensional $X22$ o conjunto de autovalores α_m é dado diretamente por $\{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, m\pi\}$, enquanto para o problema $X33Y33Z33$ os autovalores α_m, β_n e γ_p são as raízes das seguintes equações transcendentais:

$$\tan \alpha_m = \frac{\alpha_m(B_1 + B_2)}{\alpha_m^2 - B_1 B_2} \quad \text{e} \quad B_1 = \frac{h_1 L}{k} \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{h_2 L}{k} \quad (4.3)$$

Tabela 4.9: Comparação entre as temperaturas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$

t	$X22$ ($x = 0$)	$X33Y33Z33$ ($y = W$)	dif. abs.	$X22$ ($x = L/2$)	$X33Y33Z33$ ($y = L/2$)	dif. abs.	$X22$ ($x = L$)	$X33Y33Z33$ ($y = 0$)	dif. abs.
	($x = 0$)	($y = W$)		($x = L/2$)	($y = L/2$)		($x = L$)	($y = 0$)	
0	25,000000	25,000009	0,000009	25,000000	25,000009	0,000009	25,000000	25,000000	0,000000
5	25,000000	25,000017	0,000017	25,000000	25,000019	0,000019	25,000000	25,000026	0,000026
10	25,000000	25,000029	0,000029	25,000000	25,000032	0,000032	25,000000	25,000039	0,000039
15	25,000000	25,000041	0,000041	25,000000	25,000043	0,000043	25,000000	25,000051	0,000051
20	60,070118	60,063305	0,006813	33,351550	33,358314	0,006764	27,079002	27,072289	0,006713
25	93,656818	93,649855	0,006963	62,864202	62,870804	0,006602	52,580332	52,573422	0,006910
30	123,307570	123,300390	0,007180	92,392535	92,398905	0,006370	81,986244	81,979054	0,007190
35	152,839610	152,832150	0,007460	121,920870	121,926940	0,006070	111,510870	111,503330	0,007540
40	182,368060	182,360240	0,007820	151,449200	151,454900	0,005700	141,039090	141,031140	0,007950
45	211,896400	211,888160	0,008240	180,977540	180,982800	0,005260	170,567420	170,558990	0,008430
50	206,354610	206,352760	0,001850	202,154320	202,152380	0,001940	198,016750	198,014550	0,002200
55	202,296240	202,294010	0,002230	202,170000	202,167680	0,002320	202,043760	202,041160	0,002600
60	202,173820	202,171210	0,002610	202,170000	202,167300	0,002700	202,166180	202,163210	0,002970
65	202,170120	202,167140	0,002980	202,170000	202,166930	0,003070	202,169880	202,166550	0,003330
70	202,170000	202,166660	0,003340	202,170000	202,166570	0,003430	202,170000	202,166300	0,003700
80	202,170000	202,165940	0,004060	202,170000	202,165850	0,004150	202,170000	202,165580	0,004420
90	202,170000	202,165230	0,004770	202,170000	202,165140	0,004860	202,170000	202,164870	0,005130
100	202,170000	202,164520	0,005480	202,170000	202,164430	0,005570	202,170000	202,164160	0,005840

Figura 4.63: Temperaturas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$

$$\tan \beta_n = \frac{\beta_n(B_3 + B_4)}{\beta_n^2 - B_3 B_4} \quad \text{e} \quad B_3 = \frac{h_3 W}{k} \quad \text{e} \quad B_4 = \frac{h_4 W}{k} \quad (4.4)$$

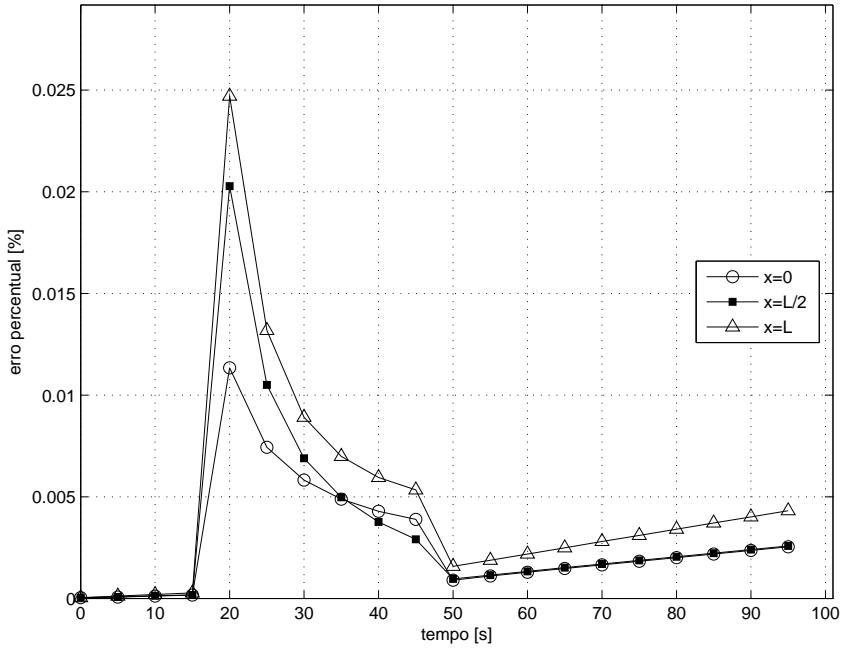


Figura 4.64: Erro percentual entre as temperaturas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$

$$\tan \gamma_p = \frac{\gamma_p(B_5 + B_6)}{\gamma_p^2 - B_5 B_6} \quad \text{e} \quad B_5 = \frac{h_5 R}{k} \quad \text{e} \quad B_6 = \frac{h_6 R}{k} \quad (4.5)$$

O número de Biot, B_i com $i = 1, 2, \dots, 6$, que aparece em cada uma das Eqs. (4.3), (4.4) e (4.5), é diretamente proporcional ao coeficiente de convecção, h_i , então se $h_i = 0$, as equações transcendentais se resumirão em $\alpha_m^2 \tan \alpha_m = 0$, assim, o conjunto de autovalores é dado por $\alpha_m = \beta_n = \gamma_p = \{0, \pi, 2\pi, \dots, m\pi\}$.

Desta forma, tem-se que o número zero também é um autovalor, porém, α_m , γ_p e o termo $\alpha_m \beta_n \gamma_p$ estão presentes no denominador da Eq. (3.59), logo nenhum autovalor pode ser nulo. Também não é possível simplesmente considerar $\{\pi, 2\pi, \dots, m\pi\}$ como conjunto de autovalores, pois os termos da Eq. (3.59) são multiplicados por $\sin \alpha_m$, dessa maneira, obtém-se como resposta apenas T_∞ .

Consequentemente, faz-se h_i suficientemente pequeno, ou ainda, observa-se que um dos termos para cada par $\{h_1 \text{ e } h_2\}$; $\{h_3 \text{ e } h_4\}$; $\{h_5 \text{ e } h_6\}$ pode assumir valor nulo. A Tabela 4.10 mostra a comparação entre os conjuntos de autovalores para $h_i = 0$ e $h_i \rightarrow 0$, quando

$h_i \rightarrow 0$ tem-se α_m, β_n e $\gamma_p \rightarrow \{0, \pi, 2\pi, \dots, m\pi\}$, assim, torna-se possível a comparação entre as equações Eqs. (3.11) e (3.59), que definem os problemas $X22$ e $X33Y33Z33$, respectivamente.

Tabela 4.10: Comparação entre os autovalores

$\alpha_m^2 \tan \alpha_m; h_i = 0$	Eq.(4.3); $h_i \rightarrow 0$	diferença
0	0,00204124003479	0,00204124003479
3,14159265358979	3,14159397988042	0,00000132629063
6,28318530717958	6,28318597032511	0,00000066314553
9,42477796076937	9,42477840286642	0,00000044209705
12,56637061435920	12,56637094593190	0,00000033157274
15,70796326794890	15,70796353320720	0,00000026525825

A função de transferência, ou resposta impulsiva, $X33Y33Z33$ também pode ser verificada a partir da resposta impulsiva $X22$, quando tem-se a configuração de equivalência entre os problemas, a Tab. 4.11 mostra a comparação entre alguns valores calculados.

Tabela 4.11: Comparação entre as respostas impulsivas calculadas por $X22$ e $X33Y33Z33$

t	$X22$		$X33Y33Z33$		$X22$		$X33Y33Z33$		$X22$		$X33Y33Z33$	
	$(x = 0)$	$(y = W)$	$(x = L/2)$	$(y = L/2)$	$(x = L)$	$(y = 0)$	$(x = 0)$	$(y = W)$	$(x = L/2)$	$(y = L/2)$	$(x = L)$	$(y = 0)$
1	6,2580576E-05	6,2580567E-05	2,5929843E-05	2,5929839E-05	3,6763314E-06	3,6763307E-06						
2	4,4327440E-05	4,4327431E-05	2,9308968E-05	2,9308961E-05	1,5167958E-05	1,5167953E-05						
3	3,6785751E-05	3,6785740E-05	2,9514964E-05	2,9514955E-05	2,2297655E-05	2,2297646E-05						
4	3,3128454E-05	3,3128442E-05	2,9527519E-05	2,9527507E-05	2,5929843E-05	2,5929829E-05						
5	3,1316748E-05	3,1316734E-05	2,9528284E-05	2,9528270E-05	2,7740018E-05	2,7740001E-05						
6	3,0416910E-05	3,0416895E-05	2,9528330E-05	2,9528314E-05	2,8639762E-05	2,8639742E-05						
7	2,9969834E-05	2,9969816E-05	2,9528333E-05	2,9528314E-05	2,9086833E-05	2,9086810E-05						
8	2,9747699E-05	2,9747679E-05	2,9528333E-05	2,9528312E-05	2,9308968E-05	2,9308942E-05						
9	2,9637328E-05	2,9637306E-05	2,9528333E-05	2,9528310E-05	2,9419338E-05	2,9419310E-05						
10	2,9582489E-05	2,9582464E-05	2,9528333E-05	2,9528307E-05	2,9474178E-05	2,9474147E-05						
20	2,9528383E-05	2,9528336E-05	2,9528333E-05	2,9528285E-05	2,9528284E-05	2,9528231E-05						
30	2,9528333E-05	2,9528265E-05	2,9528333E-05	2,9528264E-05	2,9528333E-05	2,9528259E-05						
40	2,9528333E-05	2,9528245E-05	2,9528333E-05	2,9528243E-05	2,9528333E-05	2,9528239E-05						
50	2,9528333E-05	2,9528225E-05	2,9528333E-05	2,9528223E-05	2,9528333E-05	2,9528218E-05						
60	2,9528333E-05	2,9528205E-05	2,9528333E-05	2,9528203E-05	2,9528333E-05	2,9528199E-05						
70	2,9528333E-05	2,9528185E-05	2,9528333E-05	2,9528183E-05	2,9528333E-05	2,9528179E-05						
80	2,9528333E-05	2,9528165E-05	2,9528333E-05	2,9528164E-05	2,9528333E-05	2,9528159E-05						
90	2,9528333E-05	2,9528146E-05	2,9528333E-05	2,9528144E-05	2,9528333E-05	2,9528140E-05						
100	2,9528333E-05	2,9528127E-05	2,9528333E-05	2,9528125E-05	2,9528333E-05	2,9528120E-05						

Verificadas as Eqs. (3.11) e (3.59) que fornecem os vetores de temperatura e resposta impulsiva, aplica-se a proposta de solução do problema inverso apresentada neste trabalho, que é independente da geometria do problema, pois, trata-se do mesmo código computacional mostrado no problema 1D, isto é, trata-se do emprego das funções *fft* e *ifft* do MATLAB, dado esses vetores.

A Figura 4.65(a) mostra o fluxo de calor idealizado comparado aos fluxos de calor estimados a partir dos problemas $X22$ por meio de informações provenientes da posição $x = L/2$, e $X33Y33Z33$ na coordenada $(x, y, z) = (L/2, W/2, 0)$. O erro médio entre o fluxo de calor

simulado e estimado por $X33Y33Z33$ é de 0,58% e para $X22$ é de 1,57%. Percebe-se, que o fluxo de calor estimado por $X33Y33Z33$ é menos defasado que o obtido por $X22$, porém, em termos de áreas, do problema $X22$ tem-se a menor diferença percentual entre a área do fluxo de calor simulado e estimado, sendo de $2,48E - 12\%$ e para $X33Y33Z33$ a diferença é de $4,17E - 04\%$.

A Figura 4.65(b) mostra as temperaturas simuladas comparadas às temperaturas estimadas a partir das estimativas para o fluxo de calor mostrados na Fig. 4.65(a). A diferença percentual entre as temperaturas simuladas por $X22$ e $X33Y33Z33$, para as posições equivalentes $x = L/2$ e coordenada $(x, y, z) = (x, W/2, y)$, é inferior a 0,024% (Fig. 4.64), e o erro entre a temperatura simulada e estimada para o problema $X33Y33Z33$ é de 1,66% e para $X22$ de 3,55%, neste caso, o erro apresenta-se maior pois o atraso que ocorre na estimativa do fluxo de calor por meio da solução unidimensional não sofreu nenhuma correção, tratando-se o atraso do fluxo, as respostas simuladas e estimadas serão equivalentes.

4.4.2 Problema direto (área parcial com fluxo de calor)

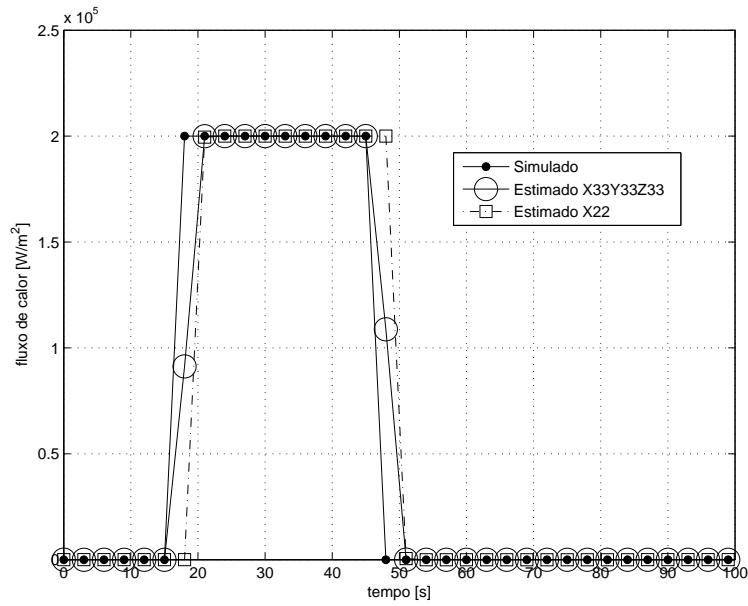
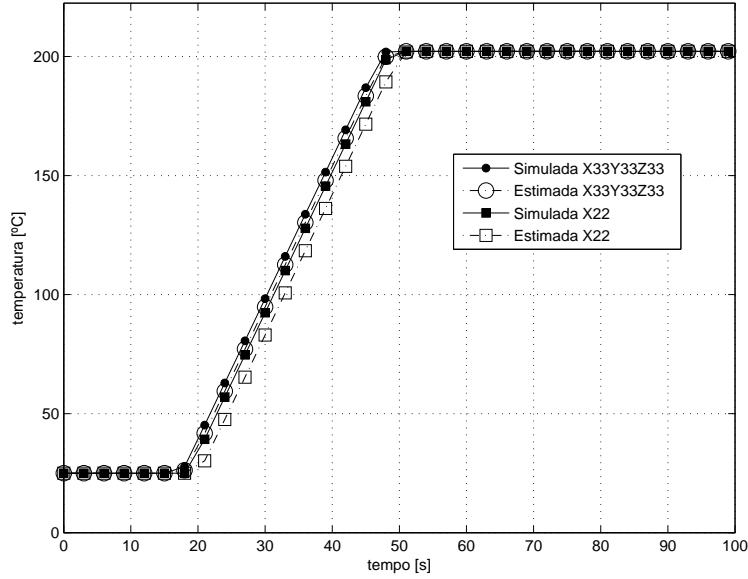
Nessa seção, para o problema $X33Y33Z33$, considera-se o vetor fluxo de calor mostrado na Fig. 4.66 construído no MATLAB conforme o código (linhas 1-9), imposto em uma área parcial da geometria tridimensional, como ilustrado na Fig. 4.67.

```

1 c1=2e6 ;
2 Nz=length ( t ) -80;
3 Pz=20;
4 tq=(Pz/100)*Nz-1;
5 tq=round ( tq );
6 q1=(1-cos ( pi *(0:tq)/tq ))/2;
7 q2=flip1r ( q1 );
8 meio=Nz-2*tq-2
9 q=c1*[ zeros ( 1 ,40 ) q1 ones ( 1 ,meio ) q2 zeros ( 1 ,40 ) ];

```

Considera-se também as propriedades termofísicas do aço rápido, condutividade térmica $k = 24 [W/m.K]$ e difusividade térmica $\alpha = 7,0868E-06 [m^2/s]$; os coeficientes de convecção $h_i = 100 [W/m^2K]$; e, comprimento $L = W = 1E - 02 [m]$ e $R = 10E - 02$ (compatíveis com a geometria de uma ferramenta de usinagem); temperatura inicial, $T_0 = 25 [^C]$ e ambiente, $T_\infty = 30 [^C]$; intervalo de discretização do tempo $dt = 1 [s]$ e tempo final de simulação sendo $tf = 200 [s]$.

(a) Fluxo de calor estimado por $X22$ e $X33Y33Z33$ (b) Temperatura estimada por $X22$ e $X33Y33Z33$ Figura 4.65: Comparaçāo entre as estimativas por $X22$ e $X33Y33Z33$

Supõe-se o fluxo de calor atuando na área quadrada delimitada por $0 \leq x \leq L/5$ e $0 \leq z \leq R/50$, ou $0 \leq x \leq 0,2E - 02$ e $0 \leq z \leq 0,2E - 02$, quando $y = W$. Desta forma, calcula-se as temperaturas, por meio da solução híbrida, para as seguintes posições:

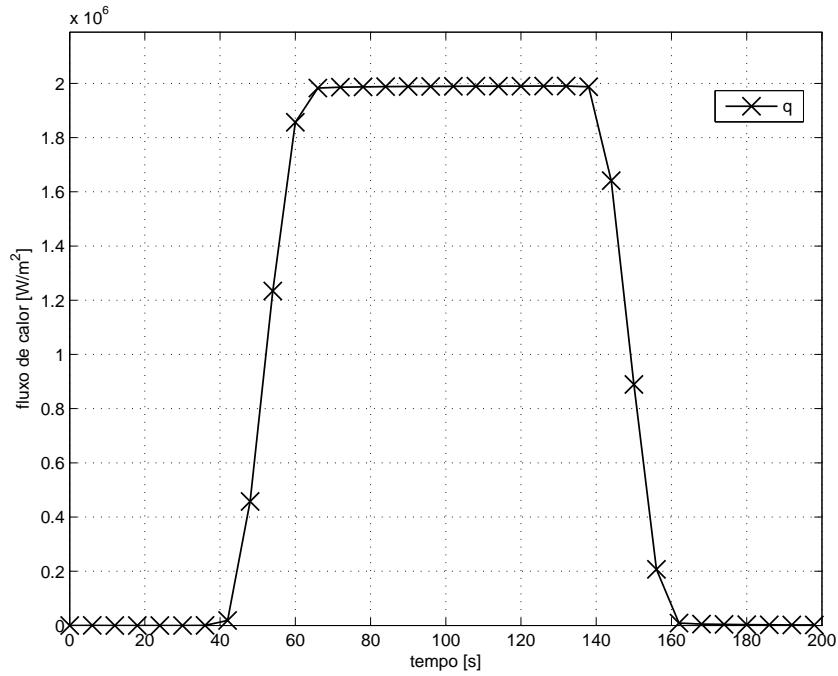


Figura 4.66: Fluxo de calor teórico

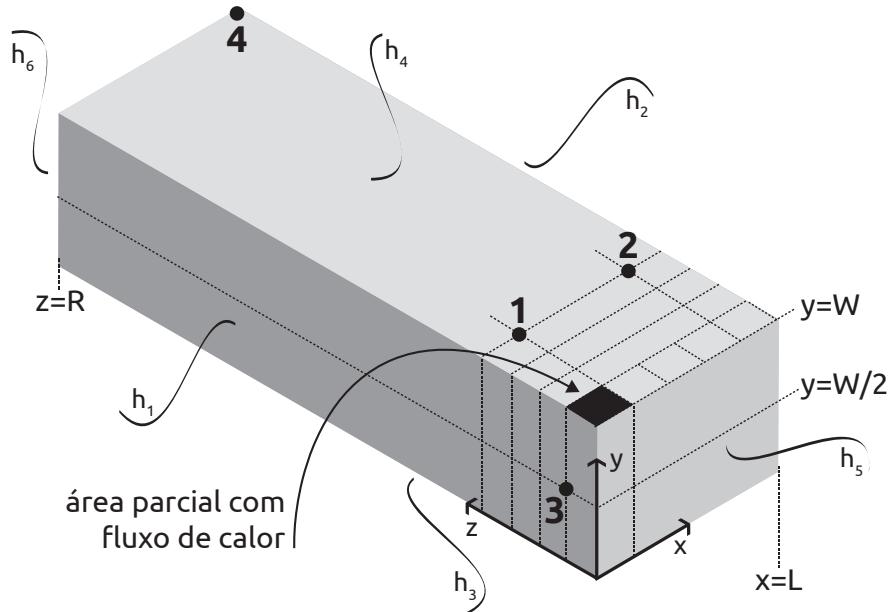


Figura 4.67: X33Y33Z33 com área parcial com fluxo de calor

- $T_1 = \left(\frac{1}{5}L, W, \frac{4}{50}R\right) = (0, 2E - 02; 1E - 02; 0, 08E - 02)$;
- $T_2 = \left(\frac{4}{5}L, W, \frac{4}{50}R\right) = (0, 8E - 02; 1E - 02; 0, 08E - 02)$ e

- $T_3 = (0, \frac{1}{2}W, \frac{1}{50}R) = (0; 0,5E - 02; 0,02E - 02)$,

As posições de interesse estão apontadas na Fig. 4.67, elas são tomadas próximas a fonte de calor, pois quanto mais longe, menor será a influência do fluxo de calor na temperatura, por exemplo, tem-se na Fig. 4.68 o perfil de temperatura para a posição $T_4 = (L, W, R)$, distante da fonte de calor, o gradiente que se tem é devido a configuração da temperatura inicial, $T_0 = 25$ [°C] e ambiente, $T_\infty = 30$ [°C]. Na Fig. 4.69 apresenta-se o perfil de temperatura para as posições 1, 2 e 3.

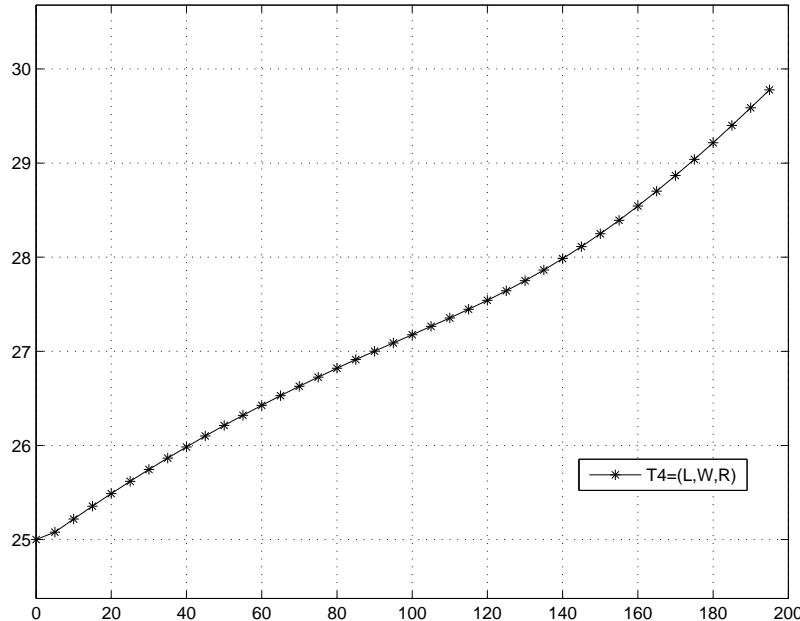


Figura 4.68: Temperatura calculada para a posição 4

4.4.3 Função de transferência

Seguindo a mesma configuração do problema direto, onde obteve-se os perfis de temperatura T_1 , T_2 e T_3 , calcula-se a função de transferência também para as posições 1, 2 e 3. A Figura 4.70 e a Tab. 4.12 mostram o comportamento da resposta impulsiva para cada uma das posições de interesse. Observa-se, graficamente e nos valores calculados, que para a posição 2 tem-se um ponto de inflexão, enquanto para as posições 1 e 3 a resposta impulsiva é sempre decrescente.

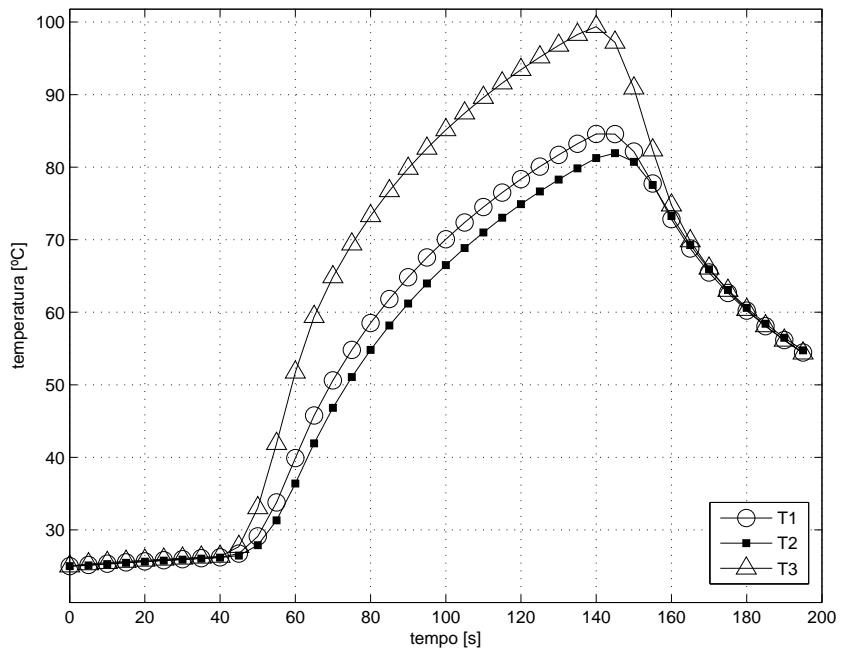


Figura 4.69: Temperatura calculada para as posições 1, 2 e 3

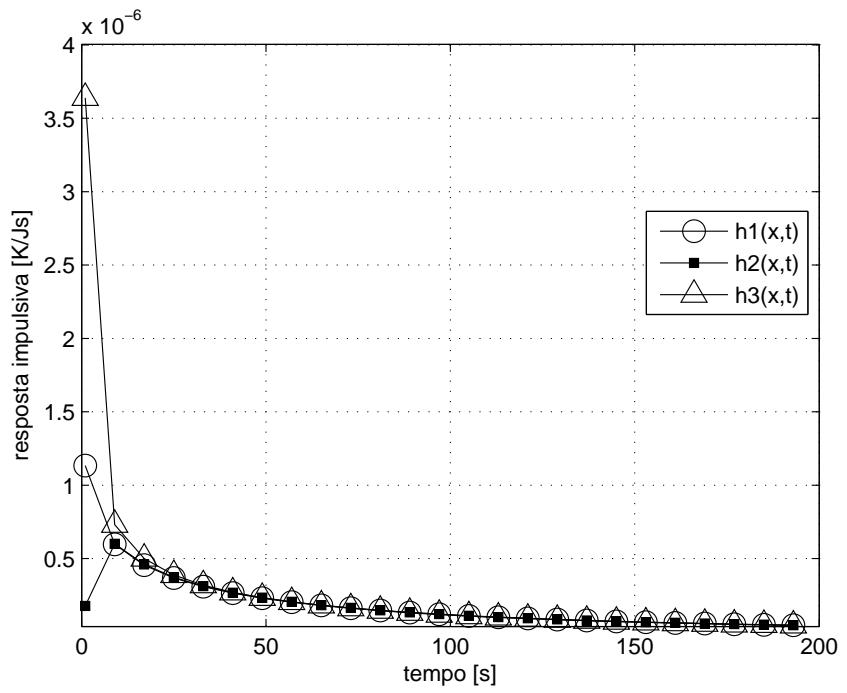


Figura 4.70: Resposta impulsiva calculada para as posições 1, 2 e 3

Tabela 4.12: Valores para a resposta impulsiva nas posições 1, 2 e 3

t	$h_1(x, t)$	$h_2(x, t)$	$h_3(x, t)$
1	1,1336E-06	1,7769E-07	3,6391E-06
2	1,1857E-06	5,4700E-07	2,2583E-06
3	9,7857E-07	6,8010E-07	1,5819E-06
4	8,3572E-07	7,0326E-07	1,2458E-06
5	7,4910E-07	6,9214E-07	1,0553E-06
6	6,9358E-07	6,7113E-07	9,3378E-07
7	6,5420E-07	6,4766E-07	8,4820E-07
8	6,2335E-07	6,2414E-07	7,8321E-07
9	5,9731E-07	6,0144E-07	7,3109E-07
10	5,7429E-07	5,7986E-07	6,8765E-07
20	4,1822E-07	4,2343E-07	4,5085E-07
30	3,2868E-07	3,3278E-07	3,4178E-07
40	2,6954E-07	2,7290E-07	2,7523E-07
50	2,2696E-07	2,2979E-07	2,2920E-07
60	1,9455E-07	1,9697E-07	1,9502E-07
70	1,6893E-07	1,7103E-07	1,6844E-07
80	1,4812E-07	1,4996E-07	1,4710E-07
90	1,3086E-07	1,3249E-07	1,2955E-07
100	1,1632E-07	1,1777E-07	1,1487E-07
110	1,0392E-07	1,0522E-07	1,0241E-07
120	9,3237E-08	9,4399E-08	9,1724E-08
130	8,3951E-08	8,4997E-08	8,2466E-08
140	7,5825E-08	7,6770E-08	7,4389E-08
150	6,8673E-08	6,9529E-08	6,7296E-08
160	6,2345E-08	6,3122E-08	6,1035E-08
170	5,6724E-08	5,7431E-08	5,5482E-08
180	5,1711E-08	5,2356E-08	5,0537E-08
190	4,7227E-08	4,7815E-08	4,6120E-08
200	4,3203E-08	4,3742E-08	4,2162E-08

4.4.4 Problema inverso

A partir dos pares dos vetores temperatura e função de transferência, $\{T_1, H_1\}$, $\{T_2, H_2\}$ e $\{T_3, H_3\}$, pode-se estimar o fluxo de calor. Tem-se na Tabela 4.13 o erro médio percentual entre o fluxo de calor teórico, q , e os estimados, q_1 , q_2 e q_3 , correspondente a cada posição de informação 1, 2 e 3. O menor erro corresponde a posição 3, que está localizada mais próxima da fonte de calor, porém, na face adjacente (Fig. 4.66).

Tabela 4.13: Erro médio percentual entre fluxo de calor teórico e estimado

teórico \times estimado	$q \times q_1$	$q \times q_2$	$q \times q_3$
erro médio (%)	5,4043	3,3221	2,4540

Na Tabela 4.14 mostra-se, efetivamente, alguns valores para os fluxos de calor teórico e estimados. Observa-se que o fluxo de calor estimado a partir dos dados (temperatura e

função de transferência) da posição 1 e 2 para os tempos maiores não corresponde tão bem ao fluxo de calor teórico como acontece para a posição 3, onde se tem menor erro médio percentual entre fluxo de calor teórico e estimado. Graficamente, as estimativas para o fluxo de calor teórico comparadas ao teórico são apresentadas nas Figs. 4.71, 4.72 e 4.73.

Examina-se na estimativa do fluxo de calor q_2 (Fig. 4.72) que para t maior que 180 segundos, há uma oscilação entre valores obtidos, ou seja, não ocorre convergência para o valor esperado. Como a estimativa do fluxo de calor é proveniente da convolução (ou da multiplicação no domínio de Fourier) e os perfis de temperaturas são similares, atribui-se a divergência de valores ao comportamento da função de transferência para essa posição, na qual ocorre uma inflexão, diferente do que ocorre para as posições 1 e 3 que são sempre decrescentes (Fig. 4.70).

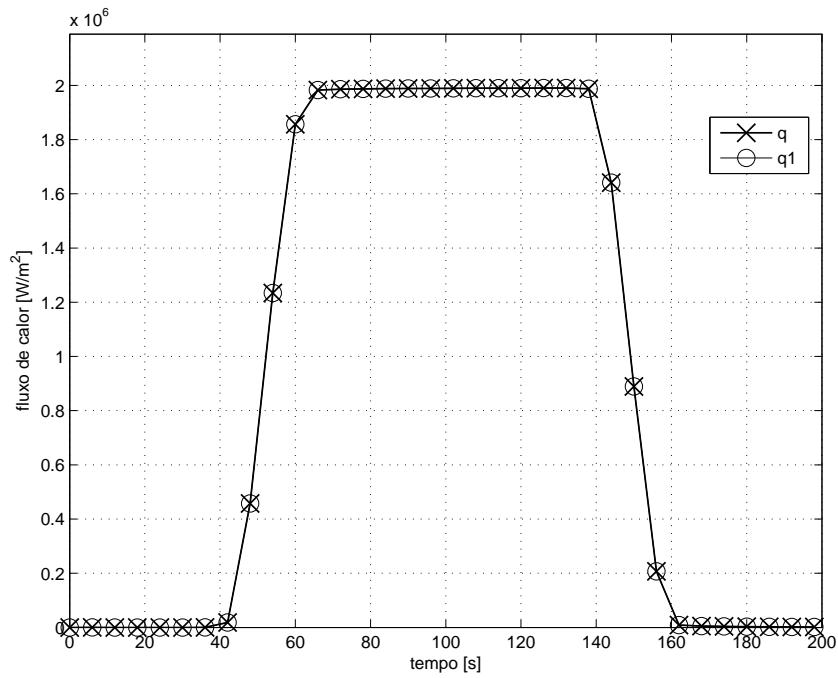
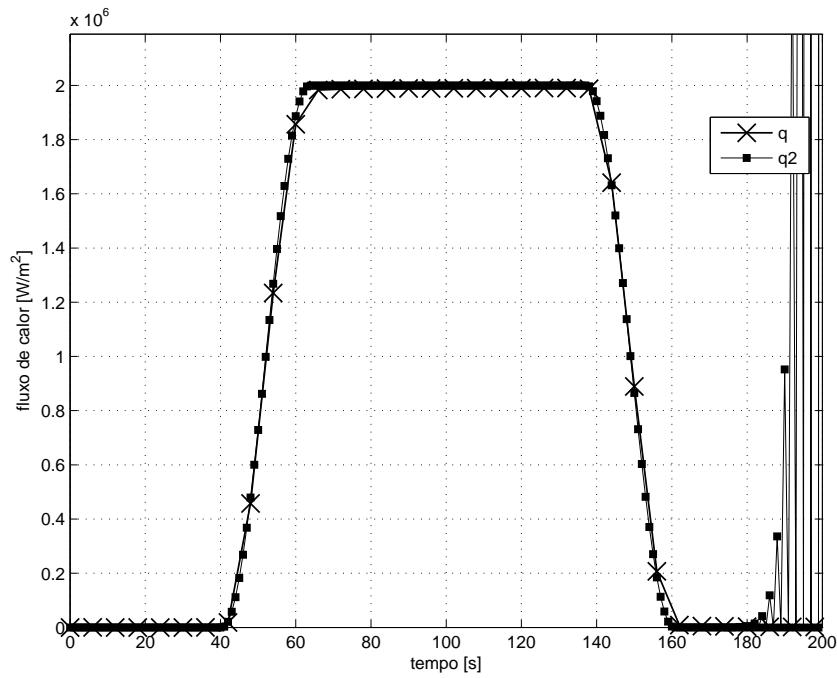
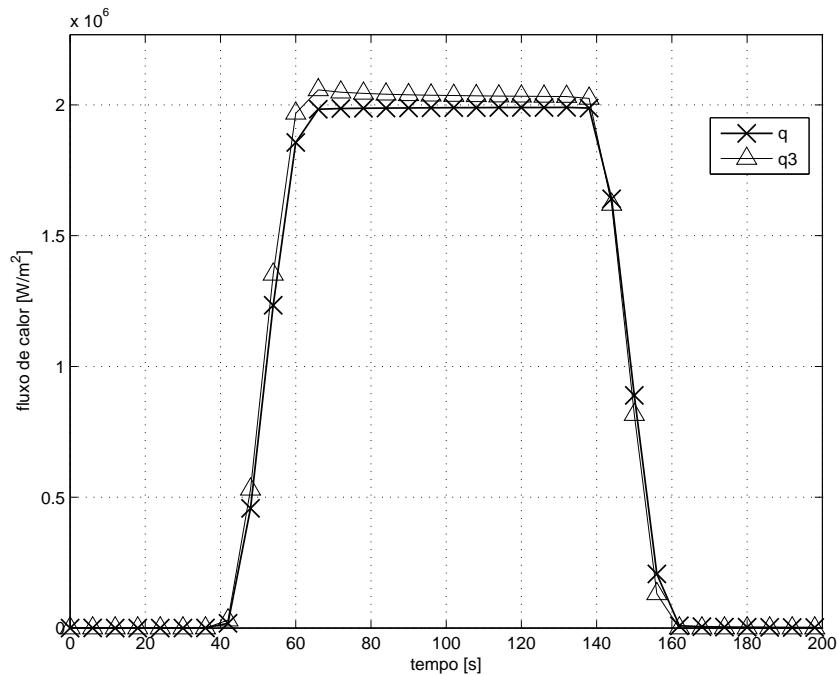


Figura 4.71: Fluxo de calor teórico q versus estimado q_1

Teoricamente faz-se a análise da solução do problema inverso em termos do fluxo de calor estimado comparado ao teórico, porém, em uma situação onde o fluxo de calor que dá origem as temperaturas não é conhecido, a solução do problema inverso deve ser apresentada em termos de temperatura.

Desta forma, mostra-se, na primeira parte da Tab. 4.15 o erro médio percentual entre as temperaturas simuladas e estimada, para cada uma das posições equivalentes, cujo erro

Figura 4.72: Fluxo de calor teórico q versus estimado q_2 Figura 4.73: Fluxo de calor teórico q versus estimado q_3

médio percentual é inferior a 0,9% para as posições 1 e 3. As Figs. 4.74 , 4.75 e 4.76 mostram as temperaturas simuladas (calculadas a partir do fluxo de calor estimado) comparadas às teóricas (calculadas a partir do fluxo de calor teórico).

A Fig. 4.77 mostra o erro percentual entre as temperaturas simuladas e estimada, que é no máximo de 2,45% 1,43%, respectivamente para as posições 1 e 3. Para a posição 2, observa-se que erro médio percentual é de 1,4%, sendo que para t maior que 180 segundos, o erro percentual cresce consideravelmente, em decorrência da oscilação que se tem para a estimativa do fluxo de calor q_2 . Corrigi-se o problema de divergência que ocorre em q_2 ao considerar nulo os valores deste vetor para $t > 180$, o erro médio percentual na posição 2 cai de 1,4% para 0,4%, segunda parte da Tab. 4.15, e na Fig. 4.78 mostra-se que o erro percentual é no máximo de 1,53%.

Aplica-se, portanto, o fluxo de calor estimado que oferece o menor erro médio percentual, $q_{2\text{corrigido}}$, para as demais posições. Na terceira parte da Tab. 4.15 mostra-se que o erro médio percentual é inferior a 0,5% para todas as posições. Enquanto a Fig. 4.78 mostra o comportamento do erro percentual nessas condições.

As duas últimas partes da Tab. 4.15 mostram o erro médio percentual quando se aplica os fluxos de calor estimado q_1 e q_3 para o cálculo das temperaturas, nas Figs. 4.80 e apresenta-se o erro percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas, quando se aplica as estimativas q_1 e q_3 . Assim, o máximo erro percentual é inferior a 3,5% e 1,5%, respectivamente. Desta forma, conclui-se que a melhor estimativa para o fluxo de calor é dada por q_2 , quando corrigida.

Nas próximas seções a solução do problema inverso será analisada a partir de dados experimentais, isto é, temperaturas adquiridas experimentalmente e função de transferência analítica. Assim, diferentemente do que foi apresentado teoricamente nas seções anteriores, as temperaturas apresentam-se com ruídos (erros) inerentes ao procedimento experimental.

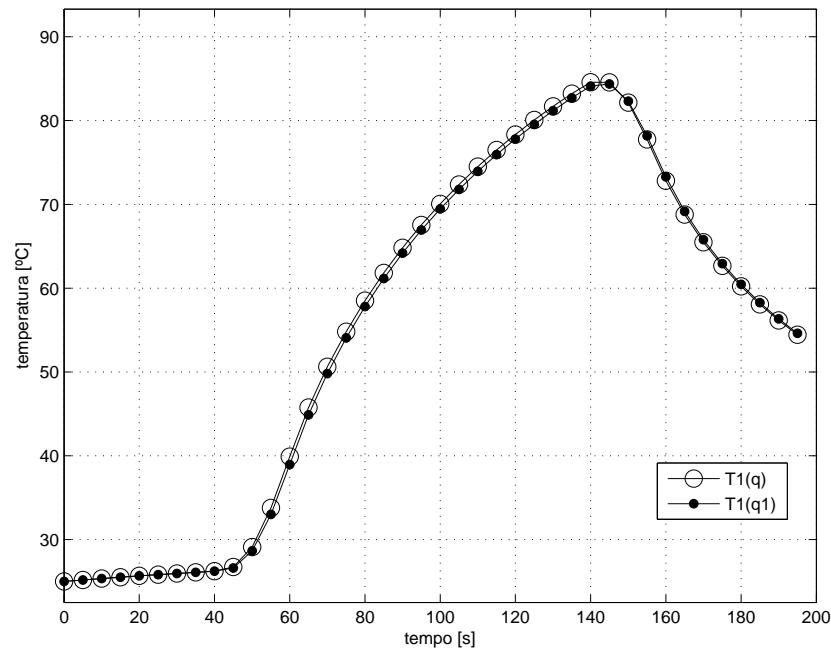


Figura 4.74: Temperatura simulada $T_1(q)$ versus estimada $T_1(q_1)$

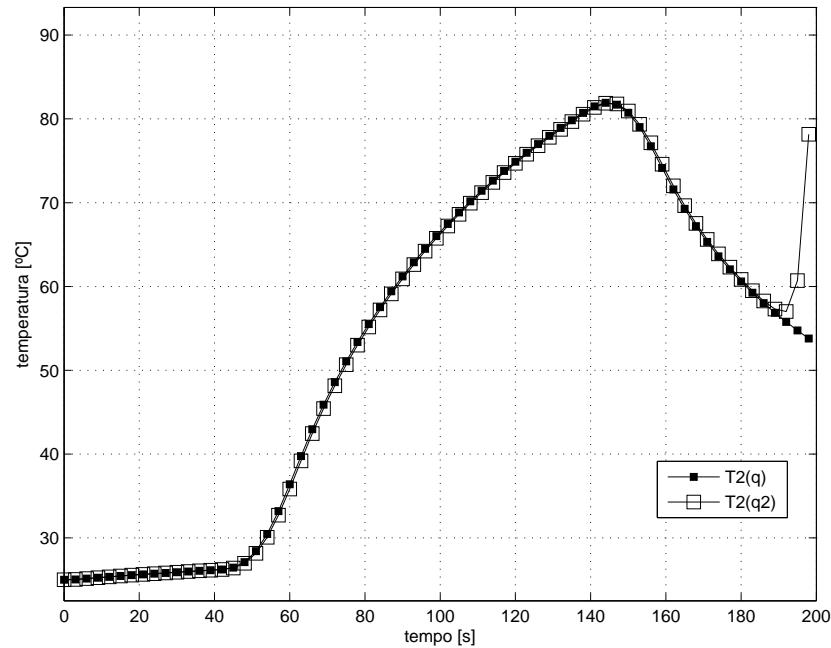


Figura 4.75: Temperatura simulada $T_2(q)$ versus estimada $T_2(q_2)$

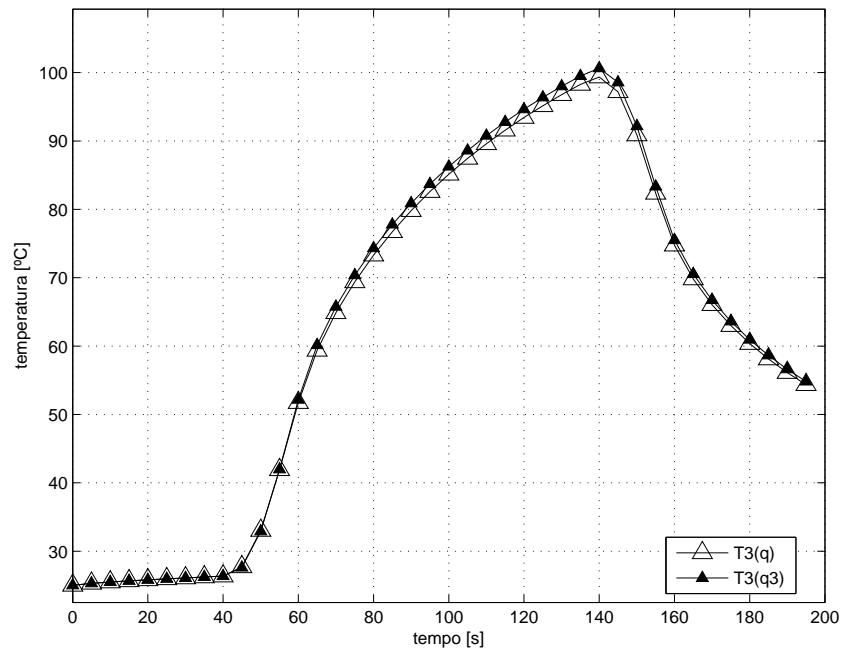


Figura 4.76: Temperatura simulada $T_3(q)$ versus estimada $T_3(q_3)$

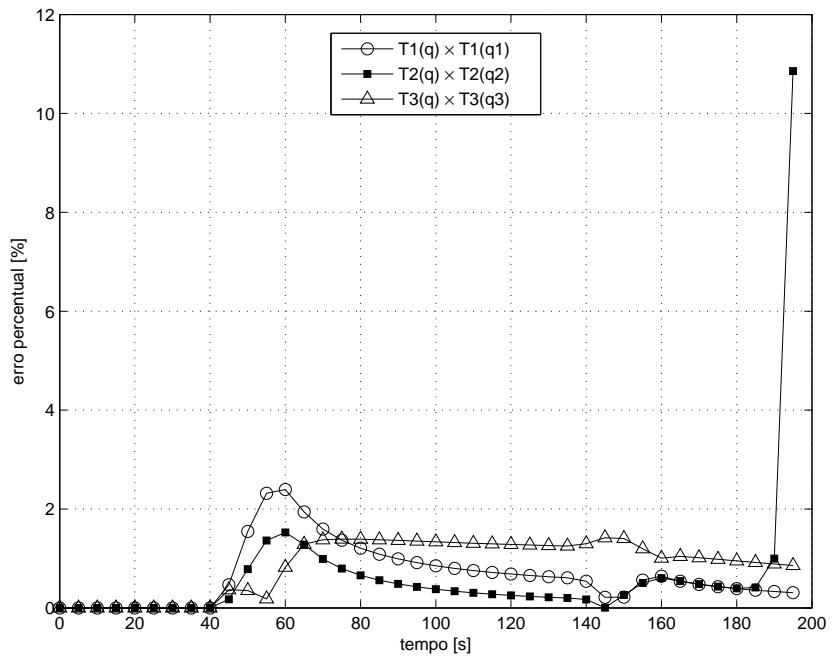
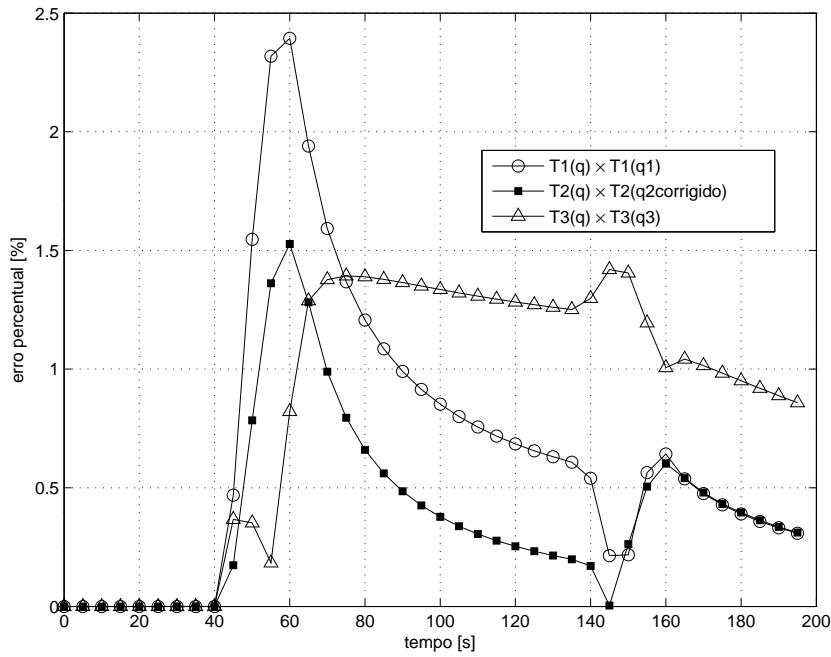
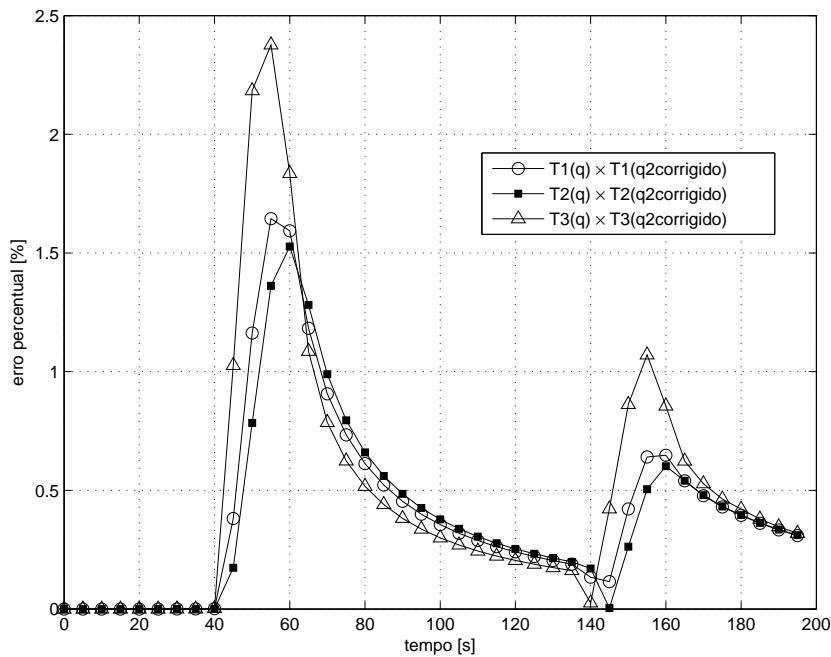


Figura 4.77: Erro percentual entre as temperaturas simuladas e estimadas

Figura 4.78: Erro percentual com q_2 corrigidoFigura 4.79: Erro percentual quando aplica-se q_2 para estimar T_1 e T_3

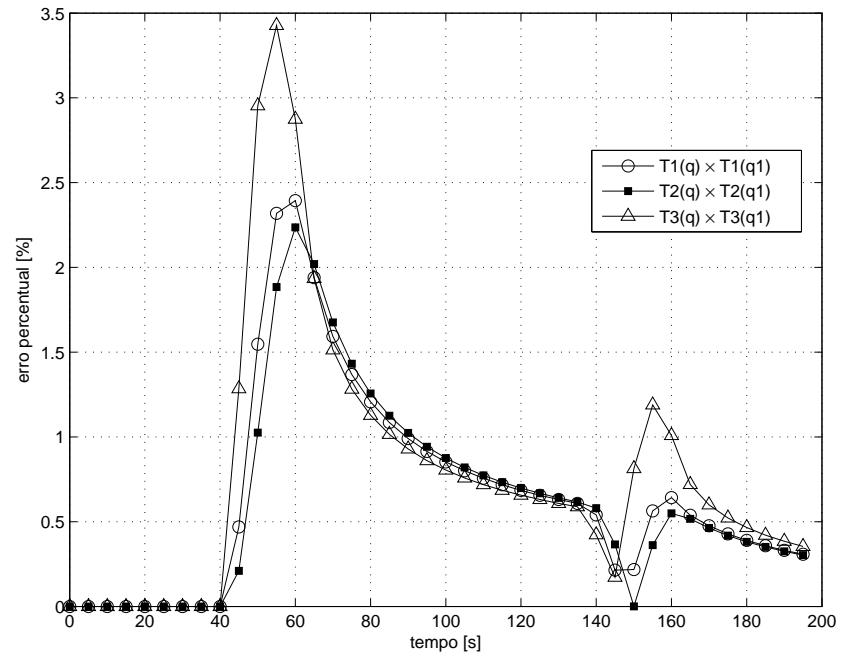


Figura 4.80: Erro percentual quando aplica-se q_1 para estimar T_2 e T_3

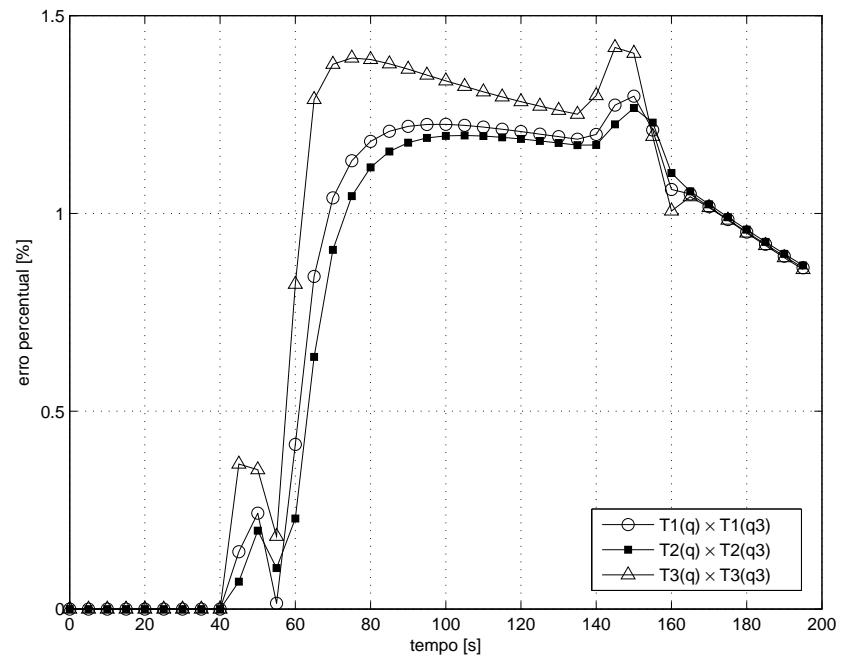


Figura 4.81: Erro percentual quando aplica-se q_3 para estimar T_1 e T_2

Tabela 4.14: Valores para os fluxos de calor: q , q_1 , q_2 e q_3

t	q	q_1	q_2	q_3
0	0,0000E+00	3,9149E-11	0,0000E+00	5,8786E-11
1	0,0000E+00	8,5671E-11	5,0905E-07	2,1644E-11
2	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	3,4226E-12
3	0,0000E+00	1,3466E-10	1,4473E-06	2,3720E-11
4	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
5	0,0000E+00	0,0000E+00	4,1183E-06	0,0000E+00
6	0,0000E+00	4,4733E-10	0,0000E+00	9,1613E-11
7	0,0000E+00	0,0000E+00	1,1678E-05	0,0000E+00
8	0,0000E+00	3,1499E-10	0,0000E+00	1,3887E-10
9	0,0000E+00	0,0000E+00	3,3104E-05	0,0000E+00
10	0,0000E+00	2,1950E-10	0,0000E+00	1,6135E-10
20	0,0000E+00	1,4206E-10	0,0000E+00	7,8556E-11
30	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	1,0926E-10
35	0,0000E+00	0,0000E+00	2,5387E+01	0,0000E+00
36	0,0000E+00	3,9146E-10	0,0000E+00	9,1052E-11
37	0,0000E+00	0,0000E+00	7,1990E+01	0,0000E+00
38	0,0000E+00	4,7419E-10	0,0000E+00	1,3415E-10
39	0,0000E+00	0,0000E+00	2,0414E+02	0,0000E+00
40	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
45	2,2429E+05	1,7056E+05	1,8254E+05	2,1122E+05
50	7,9654E+05	7,0138E+05	7,2875E+05	7,9342E+05
55	1,4601E+06	1,3618E+06	1,3965E+06	1,4828E+06
60	1,9172E+06	1,8565E+06	1,8863E+06	1,9678E+06
65	2,0000E+06	1,9820E+06	1,9994E+06	2,0595E+06
70	2,0000E+06	1,9853E+06	1,9994E+06	2,0508E+06
80	2,0000E+06	1,9874E+06	1,9995E+06	2,0426E+06
90	2,0000E+06	1,9885E+06	1,9995E+06	2,0385E+06
100	2,0000E+06	1,9891E+06	1,9996E+06	2,0360E+06
110	2,0000E+06	1,9896E+06	1,9996E+06	2,0343E+06
120	2,0000E+06	1,9899E+06	1,9996E+06	2,0331E+06
130	2,0000E+06	1,9902E+06	1,9996E+06	2,0321E+06
140	1,9172E+06	1,9383E+06	1,9419E+06	1,9588E+06
150	7,9654E+05	8,8926E+05	8,6525E+05	8,1604E+05
155	2,2429E+05	2,9476E+05	2,7058E+05	2,1470E+05
160	0,0000E+00	1,5622E+04	3,4534E+03	0,0000E+00
161	0,0000E+00	9,2903E+03	1,3543E+02	0,0000E+00
162	0,0000E+00	8,6617E+03	2,2905E+02	0,0000E+00
163	0,0000E+00	7,5876E+03	2,1341E+02	0,0000E+00
164	0,0000E+00	6,8729E+03	2,0808E+02	0,0000E+00
165	0,0000E+00	6,2858E+03	1,9334E+02	0,0000E+00
170	0,0000E+00	4,5766E+03	1,8193E+02	0,0000E+00
175	0,0000E+00	3,6582E+03	0,0000E+00	0,0000E+00
180	0,0000E+00	3,0294E+03	5,3104E+03	0,0000E+00
195	0,0000E+00	1,9079E+03	0,0000E+00	0,0000E+00
196	0,0000E+00	1,8573E+03	2,1708E+07	0,0000E+00
197	0,0000E+00	1,8077E+03	0,0000E+00	0,0000E+00
198	0,0000E+00	1,7614E+03	6,1558E+07	0,0000E+00
199	0,0000E+00	1,7150E+03	0,0000E+00	0,0000E+00
200	0,0000E+00	0,0000E+00	3,6332E+07	0,0000E+00

Tabela 4.15: Erro médio percentual entre temperatura simulada e estimada

simulada × estimada	$T_1(q) \times T_1(q_1)$	$T_2(q) \times T_2(q_2)$	$T_3(q) \times T_3(q_3)$
erro médio (%)	0,6633	1,4063	0,8716
<hr/>			
simulada × estimada	$T_1(q) \times T_1(q_1)$	$T_2(q) \times T_2(q_{2\text{corrigido}})$	$T_3(q) \times T_3(q_3)$
erro médio (%)	0,6633	0,3948	0,8716
<hr/>			
simulada × estimada	$T_1(q) \times T_1(q_{2\text{corrigido}})$	$T_2(q) \times T_2(q_{2\text{corrigido}})$	$T_3(q) \times T_3(q_{2\text{corrigido}})$
erro médio (%)	0,4143	0,3948	0,4964
<hr/>			
simulada × estimada	$T_1(q) \times T_1(q_1)$	$T_2(q) \times T_2(q_1)$	$T_3(q) \times T_3(q_1)$
erro médio (%)	0,6633	0,6360	0,7964
<hr/>			
simulada × estimada	$T_1(q) \times T_1(q_3)$	$T_2(q) \times T_2(q_3)$	$T_3(q) \times T_3(q_3)$
erro médio (%)	0,7859	0,7592	0,8716

Capítulo 5

RESULTADOS

Estimativas de fluxo de calor a partir de temperaturas experimentais

No capítulo anterior mostrou-se a proposta de solução do problema inverso, isto é, a possibilidade de se estimar o fluxo de calor por meio da função de transferência analítica e por temperaturas simuladas computacionalmente. O objetivo das próximas seções é mostrar como essa metodologia comporta-se a partir de temperaturas adquiridas experimentalmente. Assim, a metodologia é submetida a testes onde se tem temperaturas provenientes de um processo de usinagem, cujo objetivo é estimar a temperatura na interface peça-ferramenta, e temperaturas medidas em testes de laboratórios para a identificação de propriedades termofísicas.

5.1 Estimativa da temperatura e fluxo de calor na interface cavaco-ferramenta durante um processo de torneamento

As temperaturas mostradas na Fig. 5.1 são provenientes do processo de torneamento, realizado no no Laboratório de Ensino e Pesquisa em Usinagem da Universidade Federal de Uberlândia¹, cujo objetivo é investigar o processo e analisar a temperatura da ferramenta de corte durante o torneamento de ferro fundido cinzento por meio de uma ferramenta inteiriça

¹Experimento cedido pelo Prof. Dr. Márcio Bacci da Silva

de aço rápido. Nesse experimento, as temperaturas são adquiridas na região de formação do cavaco durante a operação de torneamento, na Fig. 5.3 mostra-se a localização dos termopares na ferramenta de corte. Utiliza-se a técnica termopar ferramenta-peça para estimar a temperatura na região da interface cavaco-ferramenta (KAMINISE, 2012).

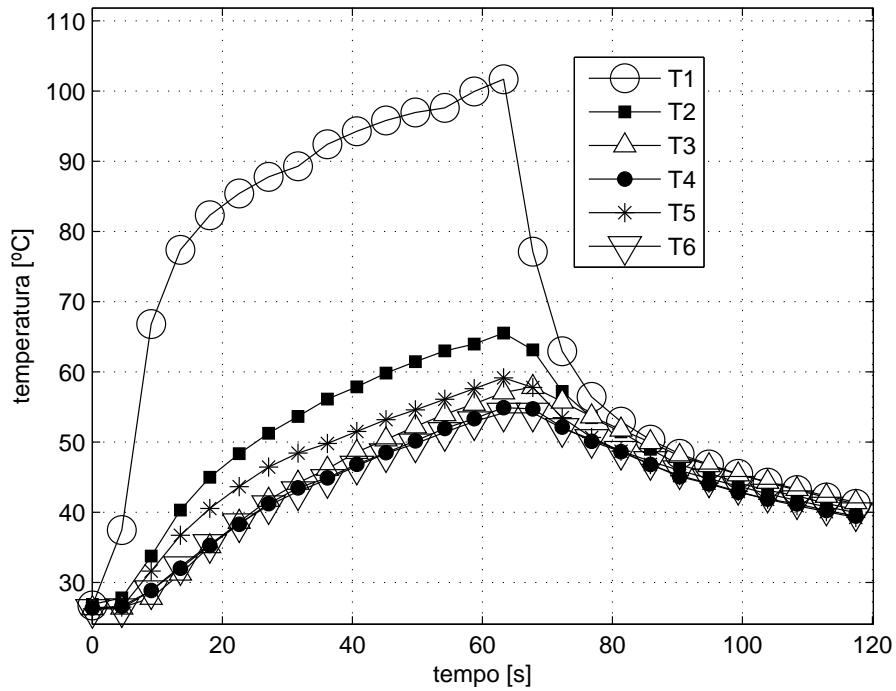


Figura 5.1: Temperaturas aquiridas no processo de torneamento

No referido experimento, como ferramenta de corte, foi utilizado um bit quadrado de aço rápido, cujo comprimento é de 101,6 mm (4 pol.) e lado da seção quadrada de 12,7 mm (0,5 pol.). O método da solda por descarga capacitiva foi usado para fixar os termopares na ferramenta. As medições de temperatura foram feitas com a utilização de termopares tipo K, com diâmetro aproximado do fio de 0,13mm (bitola de 36AWG). A aquisição dos sinais dos termopares tipo K e do termopar ferramenta-peça foram feitas através do sistema de aquisição de sinais AGILENT, mod. 34970A^a, conectado a um microcomputador. E, as seguintes condições de corte foram adotadas: velocidade de corte (v_c) de 36 m/min, profundidade de corte (ap) de 2 mm e avanço (f) de 0,095 mm/volta (CUNHA; SILVA, 2011).

As coordenadas de aquisição das temperaturas, T_1, T_2, \dots, T_6 , na ferramenta são apresentadas nas Tab. 5.1 e apontadas na Fig. 5.3. Para aplicar a proposta de solução de problema inverso por meio da função de transferência analítica descrita neste trabalho a ferramenta

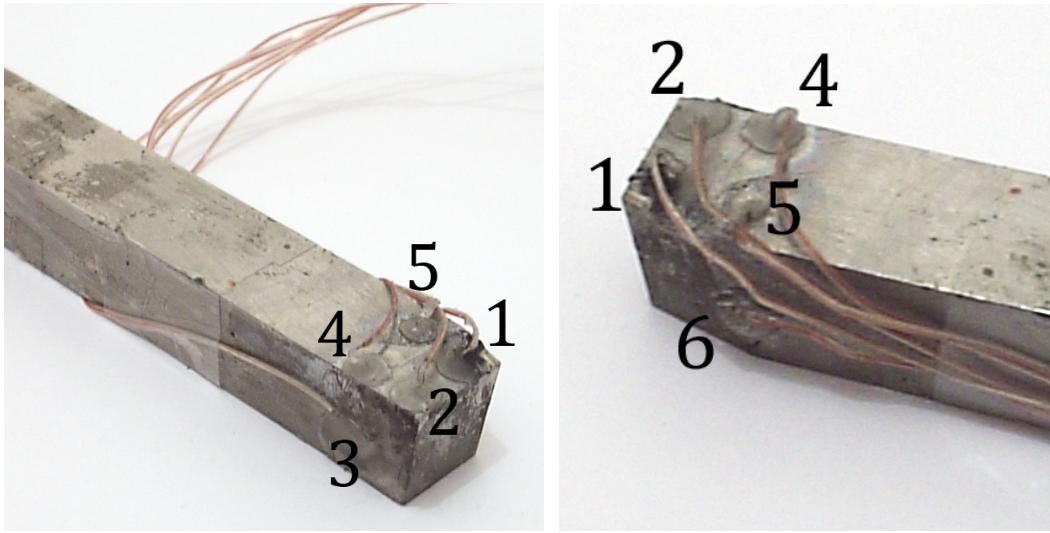


Figura 5.2: Disposição dos termopares na ferramenta (CUNHA; SILVA, 2011)

inteiriça de aço rápido deve ser tratada como uma geometria regular tridimensional (paralelepípedo).

Tabela 5.1: Posição média dos termopares na ferramenta

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
1	9,28E-3	W	3,03E-3
2	2,76E-3	W	3,35E-3
3	0	5,58E-3	5,14E-3
4	1,40E-3	W	9,17E-3
5	10,11E-3	W	9,11E-3
6	L	7,64E-3	9,88E-3

Considerando as propriedades termofísicas estimadas, tem-se, condutividade térmica $k = 24$ [$W/m.K$] e difusividade térmica $\alpha = 7,0868E - 06$ [m^2/s] (aço rápido); os coeficientes de convecção $h_i = 100$ [W/m^2K] (ajustados a partir do fluxo estimado); e que a geometria do problema 3D dada por $L = 12,7E - 03$, $W = 12,7E - 3$ e $R = 101,6E - 03$ [m] dimensões em x , y e z , respectivamente; temperatura inicial e ambiente, $T_0 = T_\infty = 26,73$ [$^\circ C$] e, intervalo de discretização do tempo $dt = 0,3$ [s]. E, tomando a área de fluxo de calor com sendo $2,272$ [mm] \times $0,688$ [mm] conforme aproximação proposta em Santos (2008).

Assim, para cada uma das posições indicadas na Tab. 5.1 obteve-se os vetores das funções transferência, H_1, H_2, \dots, H_6 , observa-se nas Figs. 5.4, 5.5 e 5.6 de suas respectivas respostas impulsivas. Nas posições de 2 a 6 as respostas impulsivas atuam de forma equivalente, diferentemente do que ocorre para posição 1, que é sempre decrescente.

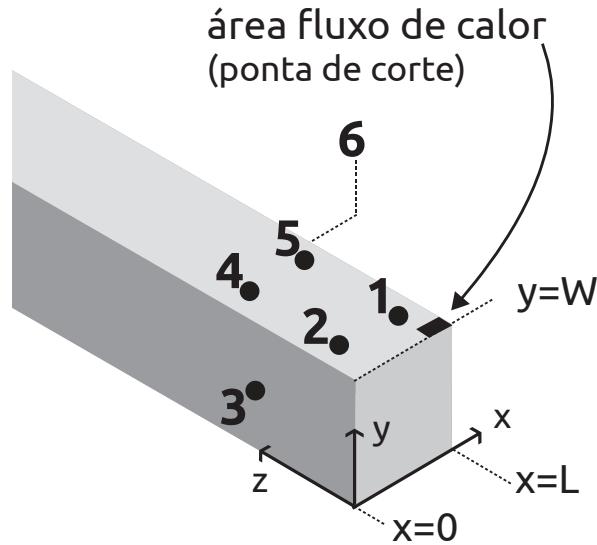


Figura 5.3: Indicação das coordenadas de aquisição da temperatura

Entender o comportamento da resposta impulsiva é determinante para o sucesso dessa técnica de solução de problema inverso. Mostrou-se para dados teóricos que a inflexão na respostas impulsivas, como as que ocorrem em H_2 a H_6 provocam divergências na estimativa do fluxo de calor. Consequentemente, as Figs. 5.7 e 5.8 mostram que apenas por meio de H_1 , quando a função de transferência tem o comportamento “ideal”, consegue-se prontamente uma estimativa para o fluxo de calor.

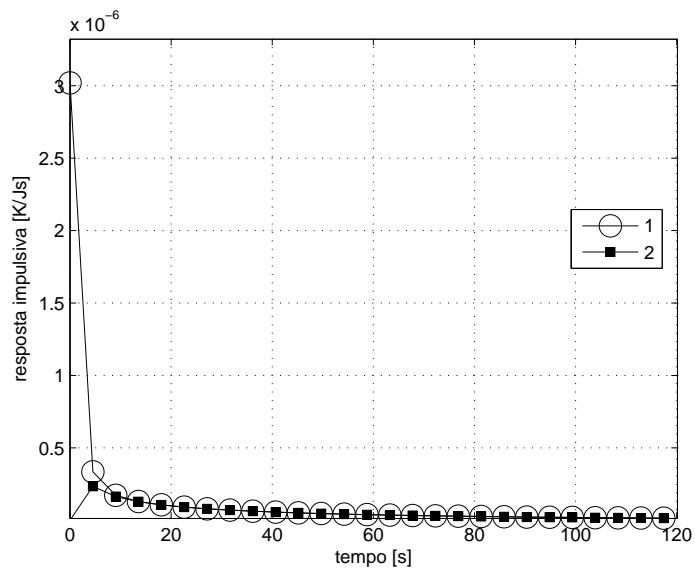


Figura 5.4: Resposta impulsiva para as posições 1 e 2

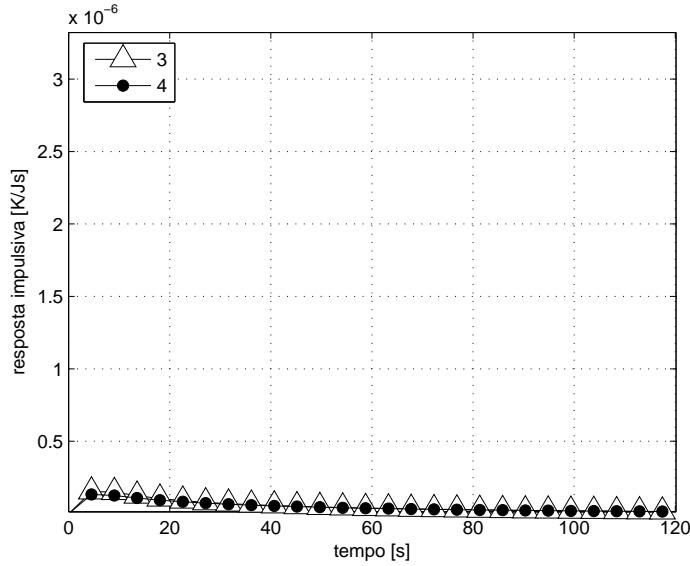


Figura 5.5: Resposta impulsiva para as posições 3 e 4

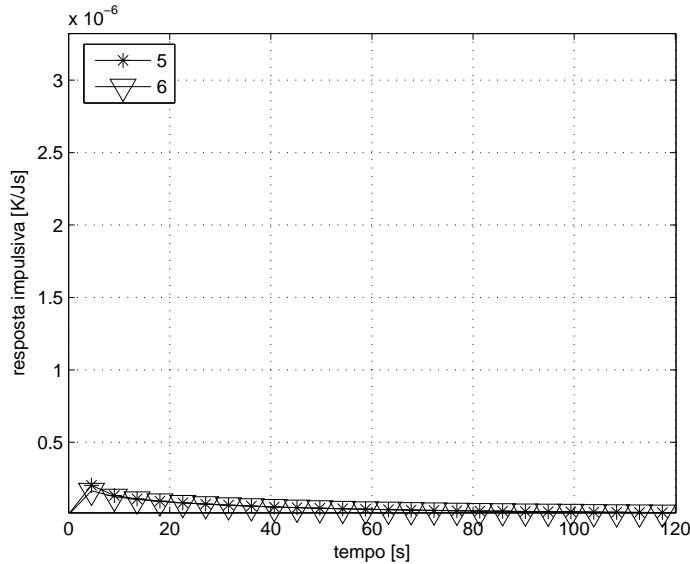


Figura 5.6: Resposta impulsiva para as posições 5 e 6

Desta forma, a estimativa possível para o fluxo de calor (5.7), proveniente das informações temperatura (T_1) e função de transferência H_1 , é submetida à solução híbrida, isto é, utiliza-se a solução do problema direto, dada pela Eq. 3.59, considerando esse fluxo de calor. A solução do problema inverso é mostrada em termos da comparação entre temperatura experimental e estimada, o que significa mostrar que o fluxo de calor estimado é capaz de descrever as temperaturas experimentais.

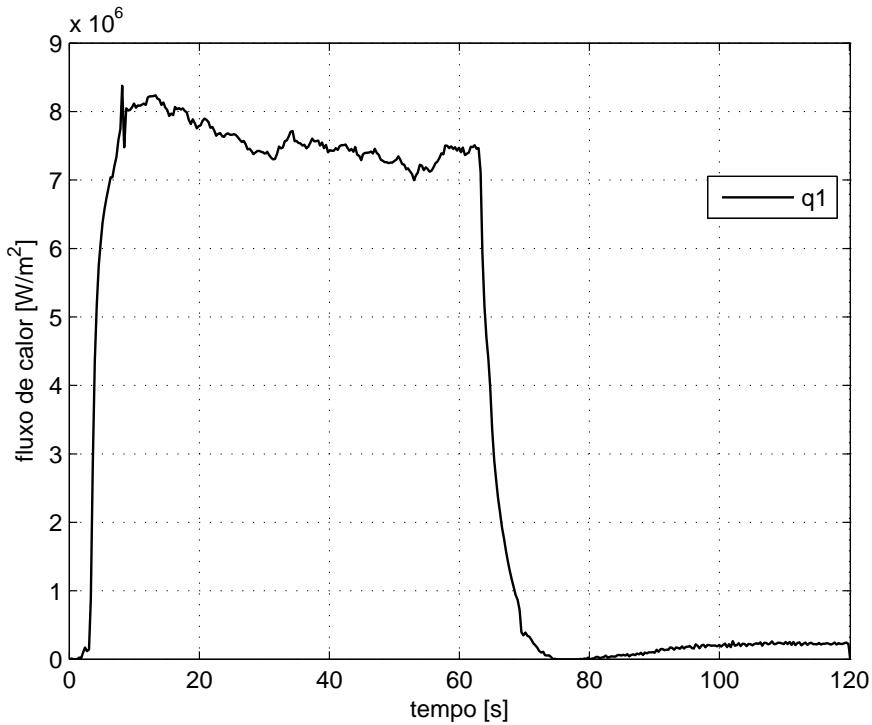


Figura 5.7: Fluxo de calor estimado por dados da posição 1

A Fig. 5.8 mostram as divergências para as estimativas do fluxo de calor quando aplica-se o par de informações (T e H) para as posições 2 a 6. Na seção mostra-se que é possível retificar essa divergência retirando da resposta impulsiva, para as posições 2 a 6, os dados que a provocam, isto significa impor o comportamento sempre decrescente para esses vetores.

As Figs. 5.9 e 5.10 mostram a comparação entre a temperatura experimental e a estimada por meio do fluxo de calor q_1 (Fig. 5.7). A técnica de estimativa para o fluxo de calor mostrou-se bastante eficiente, pois nesse caso, o erro médio percentual inferior a 0,25%. É no início da atuação do fluxo de calor, no intervalo de tempo de 2 a 6 segundos que erro percentual atinge o máximo de 5%, como pode ser visualizado na Fig. 5.11.

A Figura 5.12 mostra a comparação entre a temperatura experimental e a estimada por meio do fluxo de calor q_1 (Fig. 5.7), para a posição 2. Observa-se que o fluxo de calor q_1 fornece a temperatura estimada com valor superior a temperatura medida, com máxima diferença de temperatura sendo 4,22 $^{\circ}\text{C}$ (Fig. 5.12(b)) com erro médio de 3,5%. E, o mesmo ocorre para posições 3 – 6, pois elas são inferiores a T_2 .

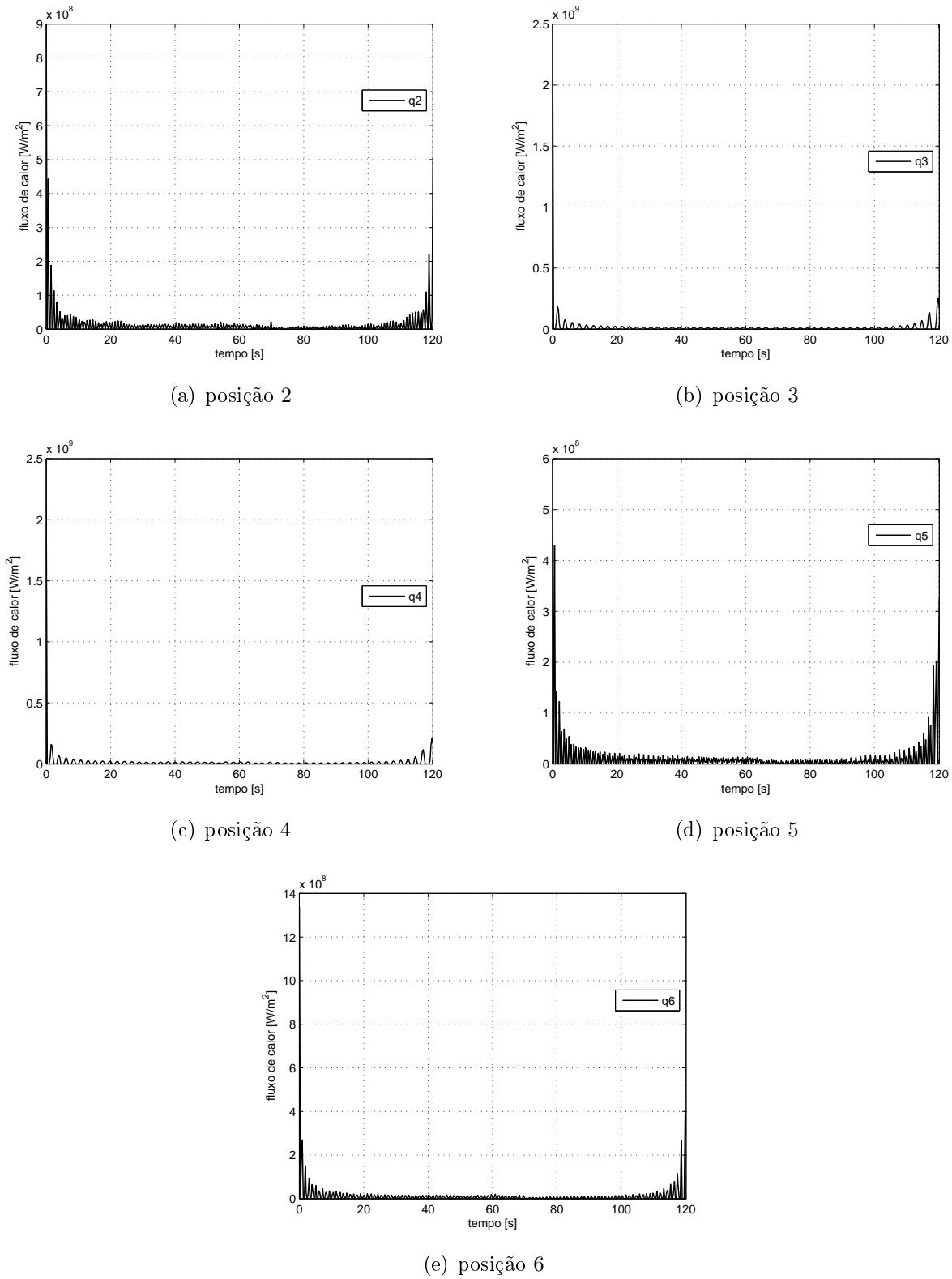


Figura 5.8: Divergências nas estimativas quando aplica-se $H2$ a $H6$

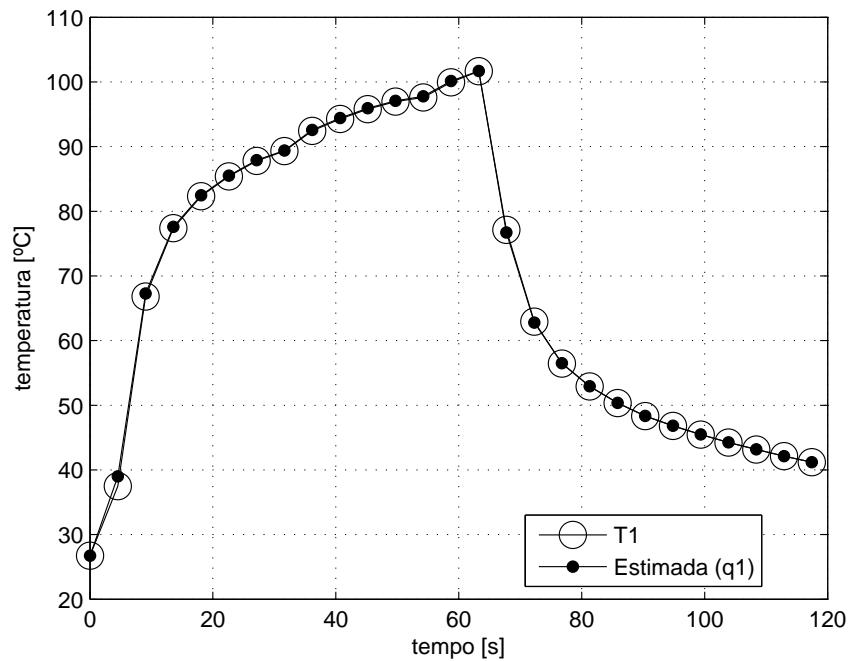


Figura 5.9: Temperatura experimental (T1) x estimada por q_1

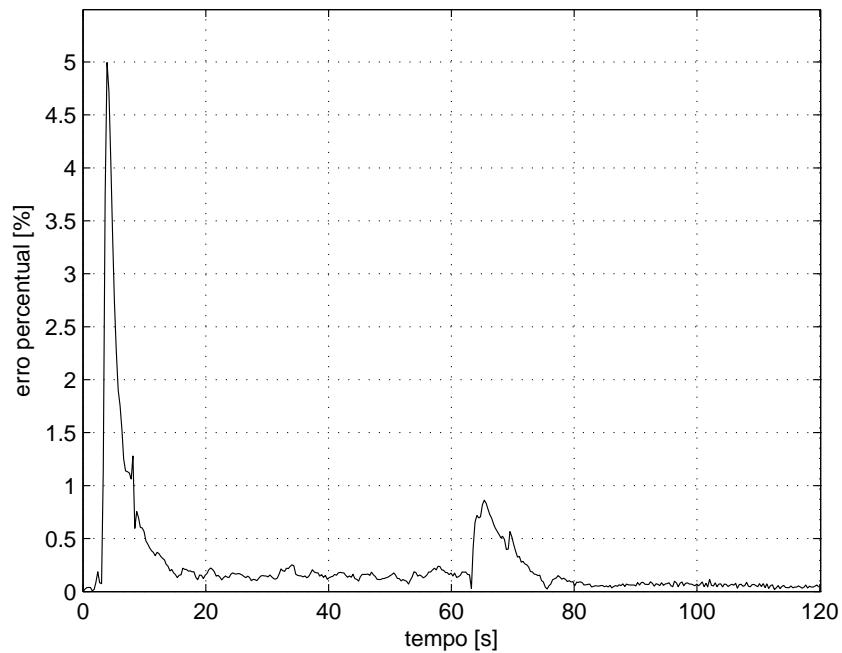


Figura 5.10: Erro percentual entre temperatura experimental e estimada na posição 1

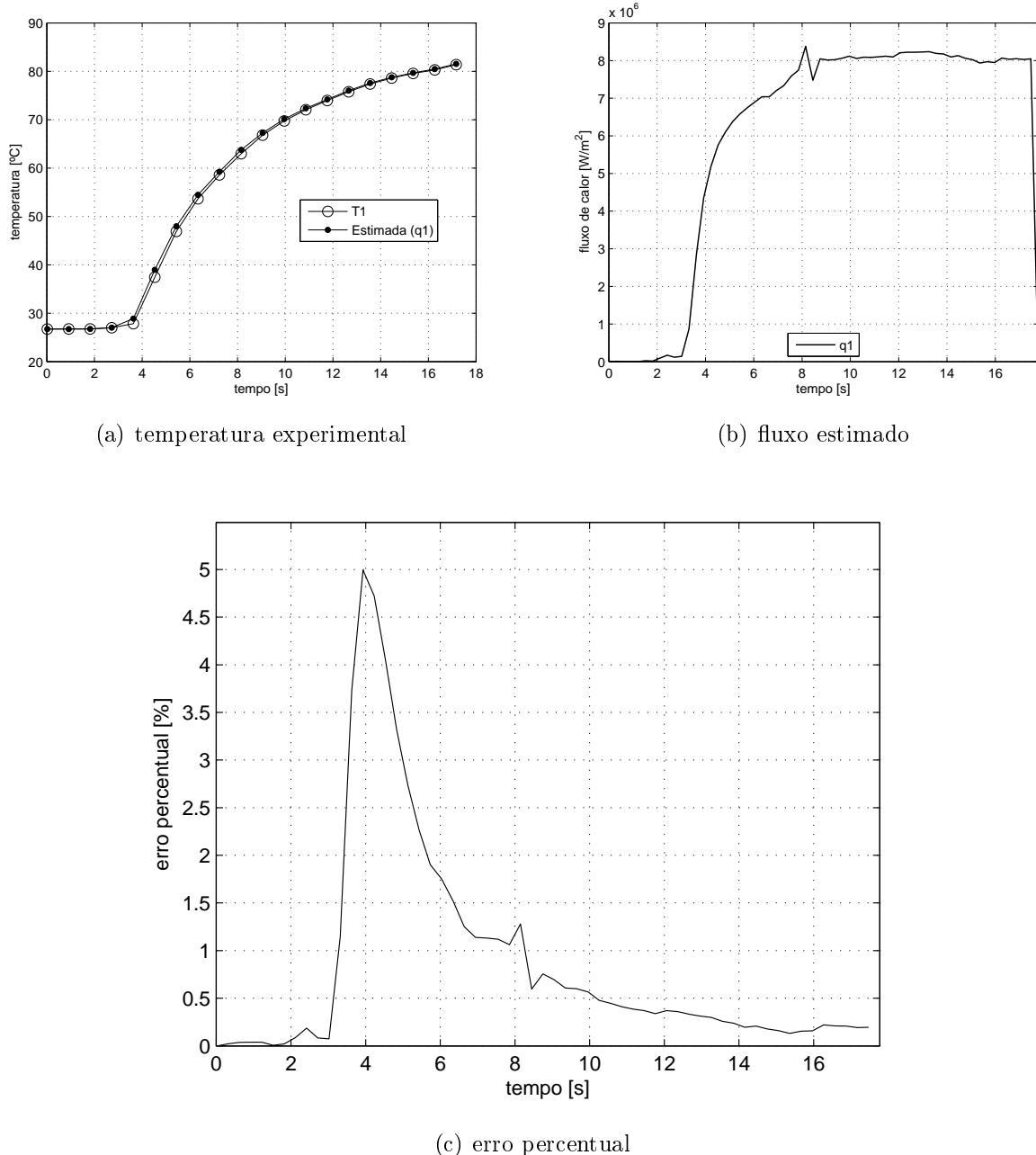
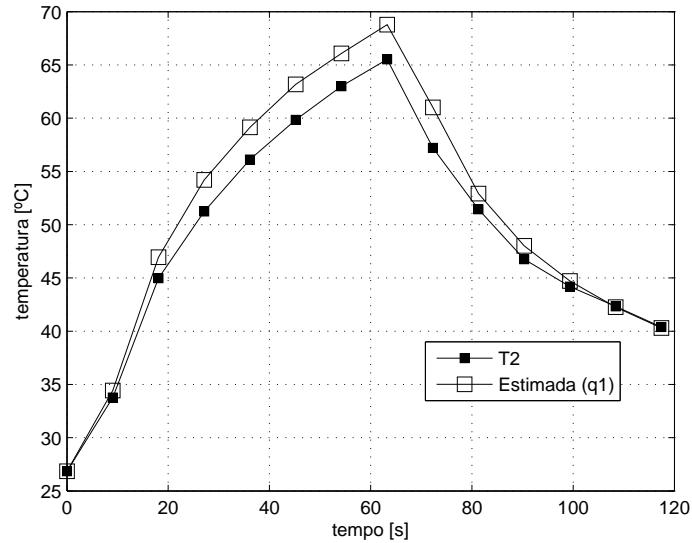
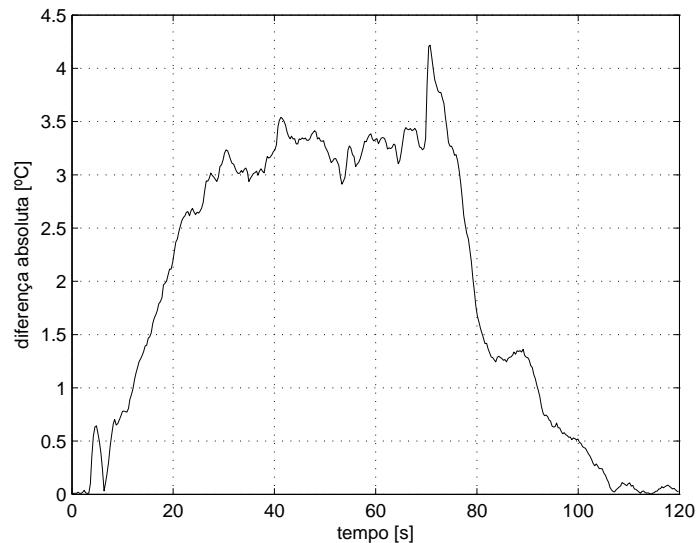


Figura 5.11: Análise do erro percentual entre temperatura experimental e estimada na posição 1, no intervalo de 2 a 6 segundos



(a) temperatura



(b) erro

Figura 5.12: Comparação entre temperatura experimental (T2) x estimada por q_1

5.1.1 Correção da função de transferência

A Tabela 5.2 mostra os valores calculados para as respostas impulsivas nas posições 1 a 6, identifica-se o valor máximo de cada uma delas (\rightarrow). Observa-se que o valor máximo para a posição 1 ocupa a primeira posição do vetor, enquanto o máximo para a posição 2 corresponde ao tempo $t = 2,42s$, nona posição do vetor. Considerando a resposta impulsiva a partir do seu valor máximo, seu comportamento torna-se decrescente, tendendo para o valor $9,7E - 09$.

Tabela 5.2: Valores calculados para as respostas impulsivas nas posições 1 a 6

t	posição 1	posição 2	posição 3	posição 4	posição 5	posição 6
0,02	$\rightarrow 3,0198E-06$	$1,3252E-09$	$6,1357E-15$	$1,7239E-13$	$6,3116E-09$	$6,4033E-10$
0,32	$2,7383E-06$	$3,6805E-08$	$7,9975E-11$	$1,5524E-10$	$5,6058E-08$	$7,9172E-09$
0,62	$2,1375E-06$	$1,0406E-07$	$1,9589E-09$	$2,6441E-09$	$1,5489E-07$	$4,1922E-08$
0,92	$1,6776E-06$	$1,6503E-07$	$9,3174E-09$	$1,0773E-08$	$2,3173E-07$	$8,7002E-08$
1,22	$1,3476E-06$	$2,0902E-07$	$2,2829E-08$	$2,4405E-08$	$2,7528E-07$	$1,2585E-07$
1,52	$1,1076E-06$	$2,3775E-07$	$4,0185E-08$	$4,1060E-08$	$2,9422E-07$	$1,5346E-07$
1,82	$9,2888E-07$	$2,5504E-07$	$5,8718E-08$	$5,8243E-08$	$\rightarrow 2,9790E-07$	$1,7082E-07$
2,12	$7,9248E-07$	$2,6422E-07$	$7,6570E-08$	$7,4292E-08$	$2,9282E-07$	$1,8045E-07$
2,42	$6,8621E-07$	$\rightarrow 2,6779E-07$	$9,2749E-08$	$8,8362E-08$	$2,8310E-07$	$1,8471E-07$
2,72	$6,0191E-07$	$2,6753E-07$	$1,0686E-07$	$1,0017E-07$	$2,7120E-07$	$\rightarrow 1,8542E-07$
3,02	$5,3405E-07$	$2,6470E-07$	$1,1884E-07$	$1,0975E-07$	$2,5858E-07$	$1,8389E-07$
3,32	$4,7703E-07$	$2,6003E-07$	$1,2913E-07$	$1,1755E-07$	$2,4567E-07$	$1,8090E-07$
3,63	$4,3166E-07$	$2,5448E-07$	$1,3724E-07$	$1,2334E-07$	$2,3376E-07$	$1,7724E-07$
3,93	$3,9386E-07$	$2,4835E-07$	$1,4376E-07$	$1,2768E-07$	$2,2265E-07$	$1,7322E-07$
4,23	$3,6209E-07$	$2,4195E-07$	$1,4891E-07$	$1,3083E-07$	$2,1244E-07$	$1,6908E-07$
4,53	$3,3517E-07$	$2,3549E-07$	$1,5288E-07$	$1,3303E-07$	$2,0314E-07$	$1,6499E-07$
4,83	$3,1219E-07$	$2,2911E-07$	$1,5585E-07$	$1,3445E-07$	$1,9471E-07$	$1,6102E-07$
5,13	$2,9243E-07$	$2,2290E-07$	$1,5796E-07$	$1,3527E-07$	$1,8708E-07$	$1,5725E-07$
5,43	$2,7533E-07$	$2,1691E-07$	$1,5936E-07$	$\rightarrow 1,3561E-07$	$1,8021E-07$	$1,5368E-07$
5,73	$2,6044E-07$	$2,1118E-07$	$1,6015E-07$	$1,3558E-07$	$1,7400E-07$	$1,5032E-07$
6,03	$2,4699E-07$	$2,0553E-07$	$\rightarrow 1,6045E-07$	$1,3523E-07$	$1,6821E-07$	$1,4709E-07$
6,34	$2,3555E-07$	$2,0035E-07$	$1,6031E-07$	$1,3467E-07$	$1,6316E-07$	$1,4416E-07$
6,64	$2,2540E-07$	$1,9543E-07$	$1,5983E-07$	$1,3393E-07$	$1,5857E-07$	$1,4143E-07$
6,94	$2,1636E-07$	$1,9077E-07$	$1,5907E-07$	$1,3306E-07$	$1,5440E-07$	$1,3888E-07$
7,24	$2,0801E-07$	$1,8621E-07$	$1,5804E-07$	$1,3205E-07$	$1,5048E-07$	$1,3641E-07$
7,55	$2,0075E-07$	$1,8203E-07$	$1,5685E-07$	$1,3100E-07$	$1,4700E-07$	$1,3417E-07$
7,85	$1,9418E-07$	$1,7807E-07$	$1,5551E-07$	$1,2990E-07$	$1,4382E-07$	$1,3207E-07$
8,15	$1,8821E-07$	$1,7431E-07$	$1,5405E-07$	$1,2875E-07$	$1,4088E-07$	$1,3009E-07$
8,45	$1,8276E-07$	$1,7073E-07$	$1,5250E-07$	$1,2757E-07$	$1,3816E-07$	$1,2821E-07$
8,75	$1,7775E-07$	$1,6733E-07$	$1,5088E-07$	$1,2638E-07$	$1,3563E-07$	$1,2644E-07$
9,05	$1,7315E-07$	$1,6408E-07$	$1,4921E-07$	$1,2517E-07$	$1,3328E-07$	$1,2475E-07$
9,35	$1,6889E-07$	$1,6099E-07$	$1,4750E-07$	$1,2396E-07$	$1,3107E-07$	$1,2315E-07$
9,65	$1,6481E-07$	$1,5794E-07$	$1,4571E-07$	$1,2271E-07$	$1,2894E-07$	$1,2156E-07$
9,96	$1,6113E-07$	$1,5512E-07$	$1,4396E-07$	$1,2151E-07$	$1,2699E-07$	$1,2009E-07$
20,81	$9,7102E-08$	$9,6713E-08$	$9,5165E-08$	$8,6661E-08$	$8,7130E-08$	$8,5510E-08$
59,94	$3,8116E-08$	$3,8061E-08$	$3,8110E-08$	$3,7014E-08$	$3,7157E-08$	$3,7069E-08$
109,89	$1,6943E-08$	$1,6928E-08$	$1,7024E-08$	$1,6804E-08$	$1,6864E-08$	$1,6894E-08$
129,75	$1,2777E-08$	$1,2767E-08$	$1,2849E-08$	$1,2723E-08$	$1,2767E-08$	$1,2799E-08$
139,96	$1,1108E-08$	$1,1101E-08$	$1,1176E-08$	$1,1079E-08$	$1,1118E-08$	$1,1149E-08$
149,89	$9,7254E-09$	$9,7189E-09$	$9,7876E-09$	$9,7135E-09$	$9,7470E-09$	$9,7772E-09$

Desta forma, uma nova estimativa para o fluxo de calor provenientes destas informações é apresentada na Fig. 5.13. As Figs. 5.14 e 5.15 mostram a comparação entre a temperatura experimental e a estimada por meio do fluxo de calor q_2 (Fig. 5.7). Observa-se, também, que o fluxo de calor q_2 fornece temperatura estimada com valor superior a temperatura medida, com máxima diferença de temperatura de $4,08 [^{\circ}C]$, porém, essa diferença acontece depois de 60 segundos, por conta do ruído que se apresenta em q_2 . O fluxo de calor q_2 descreve a temperatura na posição 2 melhor do que quando se aplica q_1 , pois, os vetores temperatura T_2 e função de transferência H_2 armazenam informações referente a essa posição. Neste caso o erro médio é de 2,81%.

O mesmo procedimento de correção para os vetores da resposta impulsiva é aplicado para as posições de 3 a 6. O conjunto de Figs. 5.16 a 5.19, mostram, respectivamente, os fluxo de calor estimado e a comparação entre as temperaturas, observa-se que a diferença absoluta entre as temperaturas é inferior a $2,5 [^{\circ}C]$.

Ressalta-se que o fluxo de calor estimado por meio de informações de uma dada posição representa o fluxo de calor notado nesse ponto. Nesse experimento de usinagem pretende-se estimar a temperatura na interface peça-ferramenta, onde não é possível posicionar sensores para captar a temperatura, assim, deve-se usar informações de uma posição suficientemente próxima à fonte de calor.

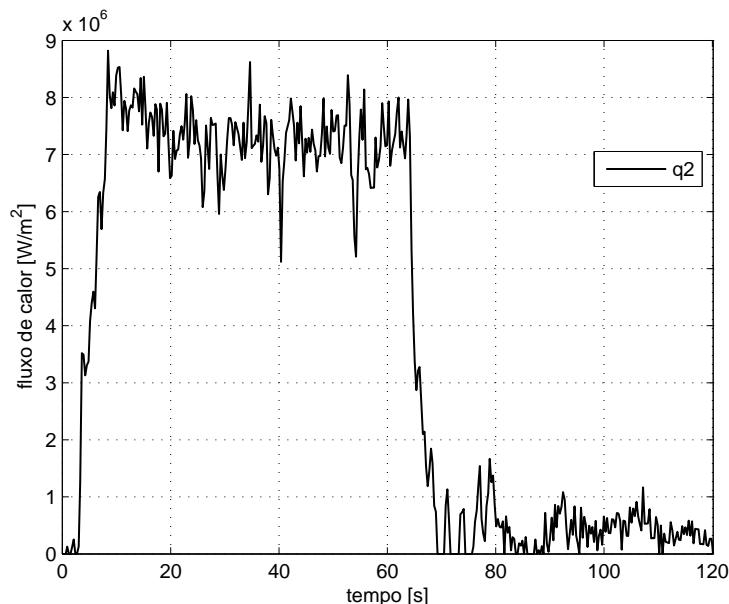


Figura 5.13: Fluxo de calor estimado, após a correção do vetor resposta impulsiva na posição 2

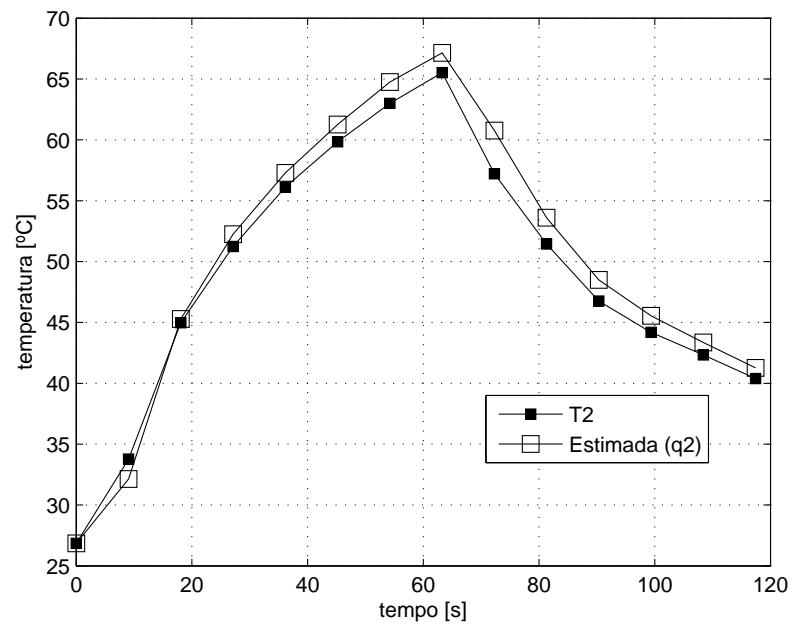


Figura 5.14: Temperatura experimental (T2) x estimada por q_2

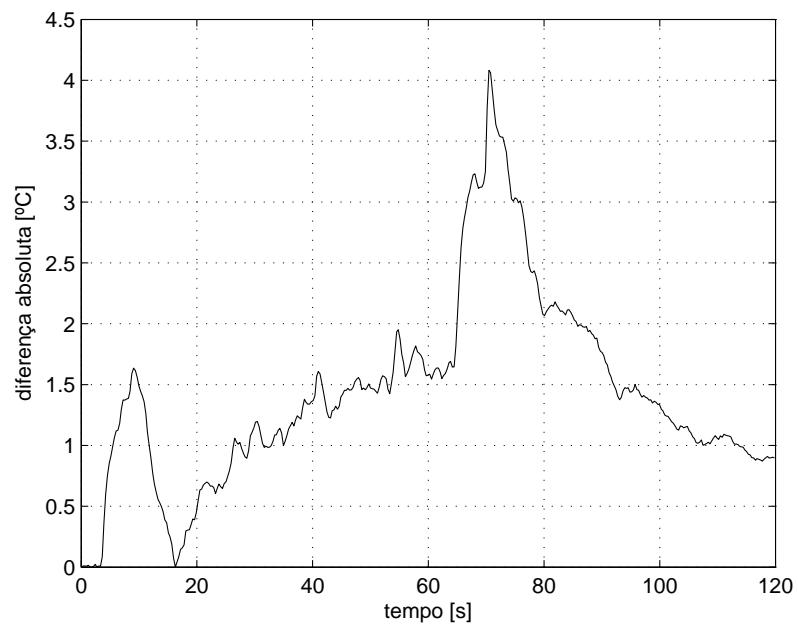
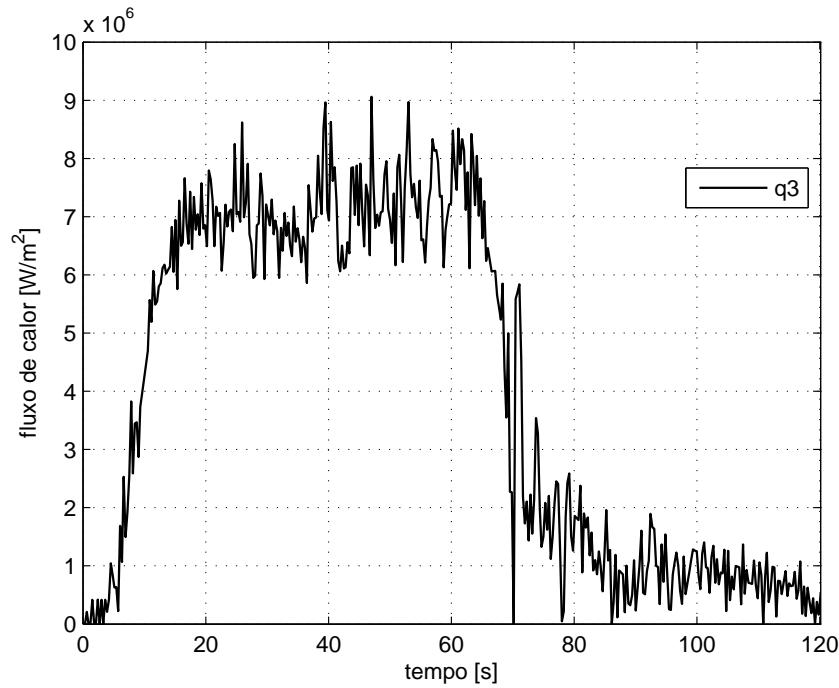
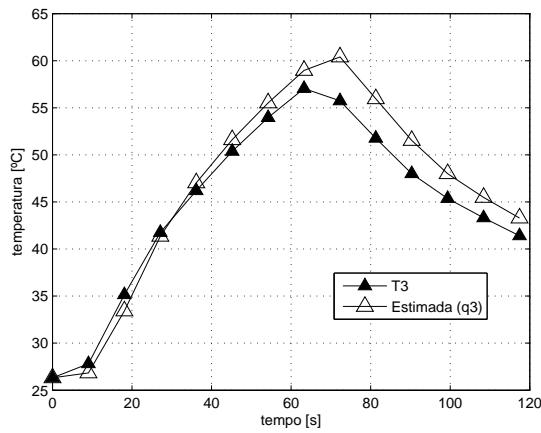


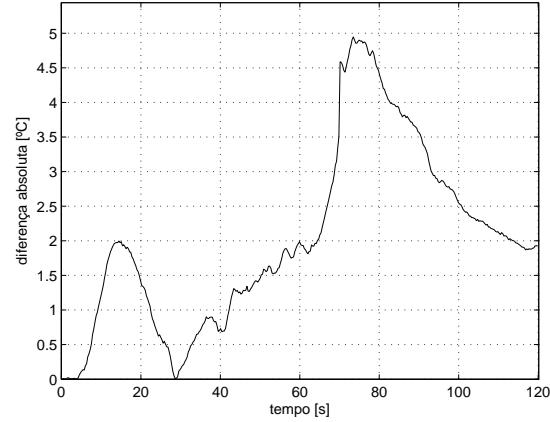
Figura 5.15: Diferença absoluta entre temperatura experimental e estimada na posição 2



(a) fluxo de calor estimado

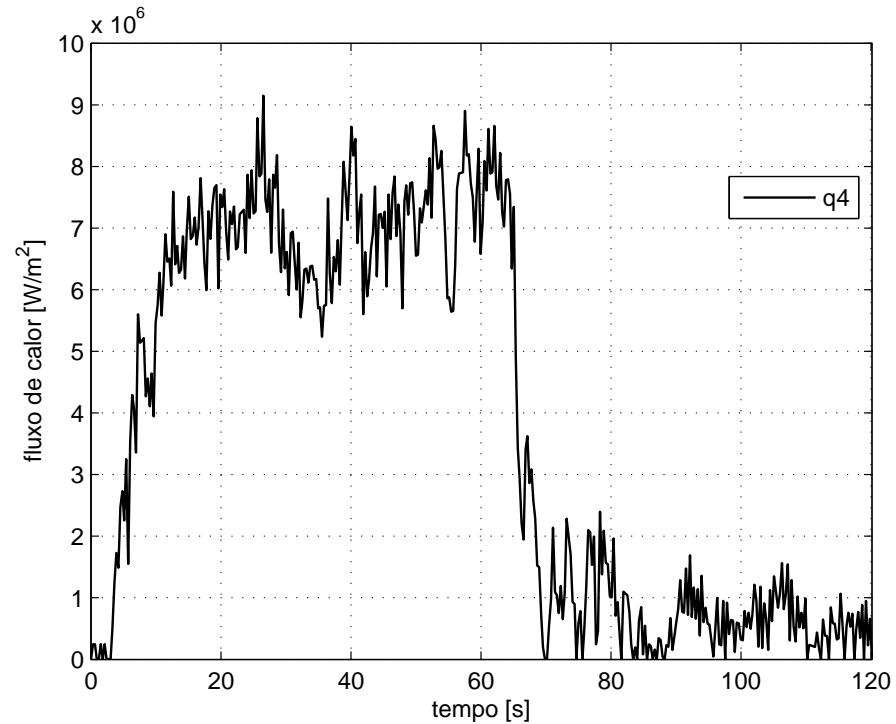


(b) temperatura

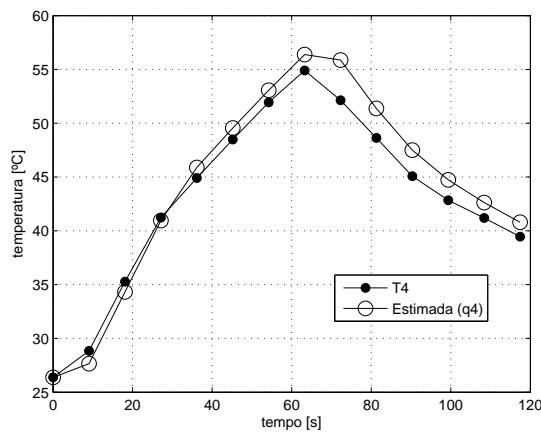


(c) erro

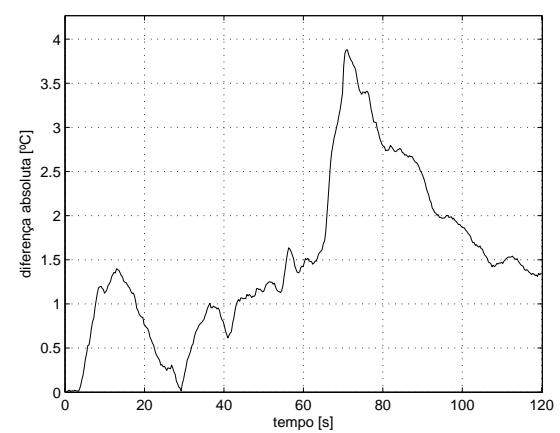
Figura 5.16: Comparação entre temperatura experimental (T3) x estimada por q_3



(a) fluxo de calor estimado

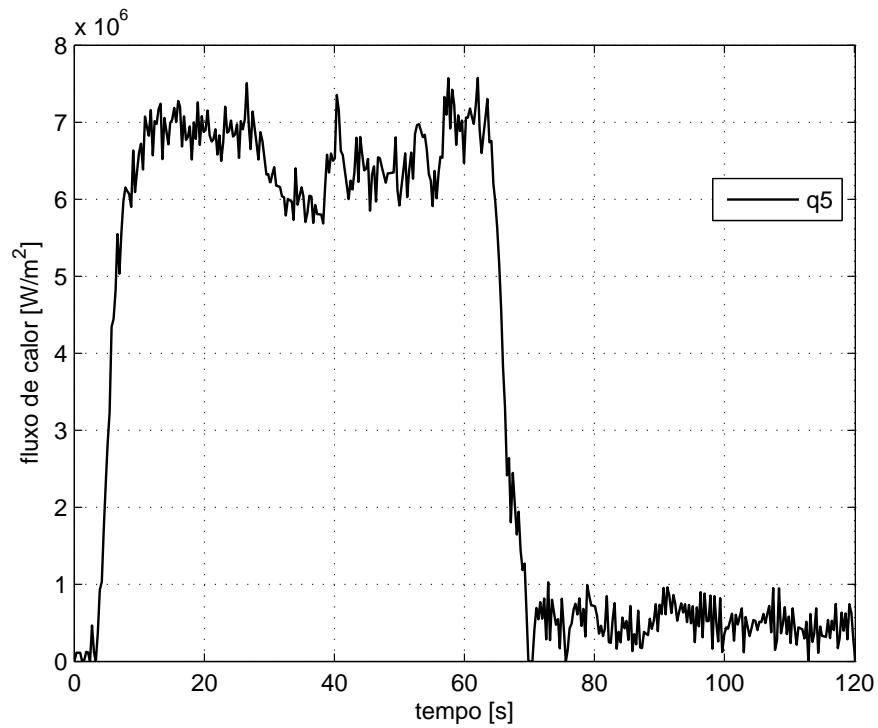


(b) temperatura

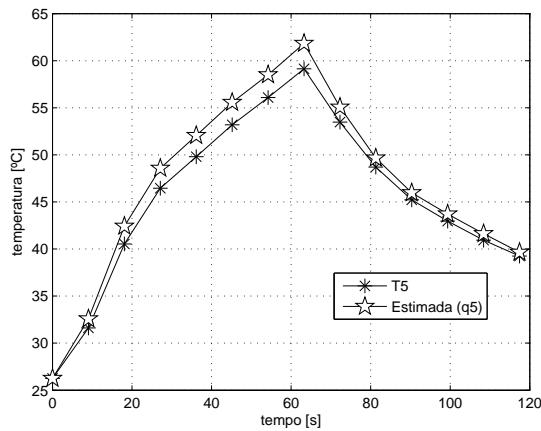


(c) erro

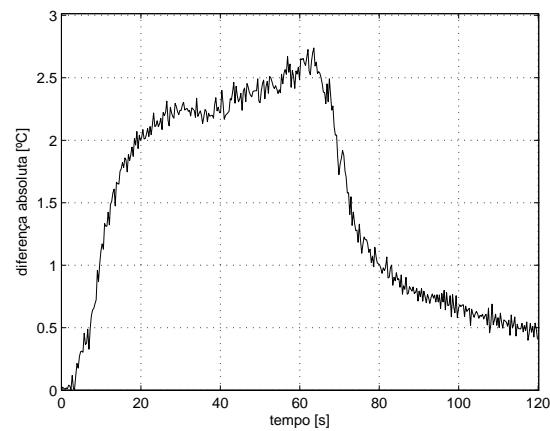
Figura 5.17: Comparaçao entre temperatura experimental (T4) x estimada por q_4



(a) fluxo de calor estimado

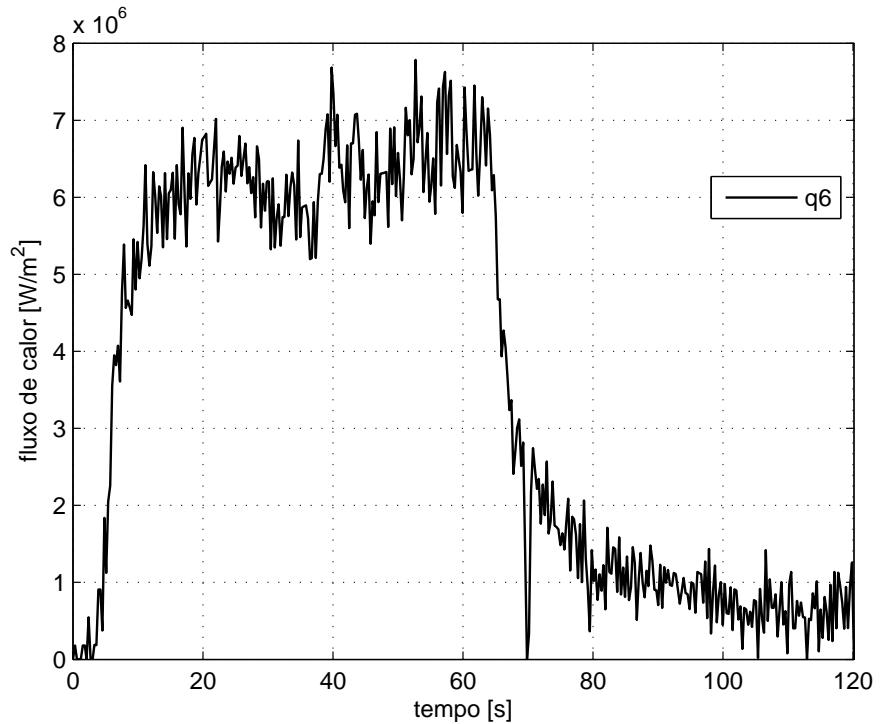


(b) temperatura

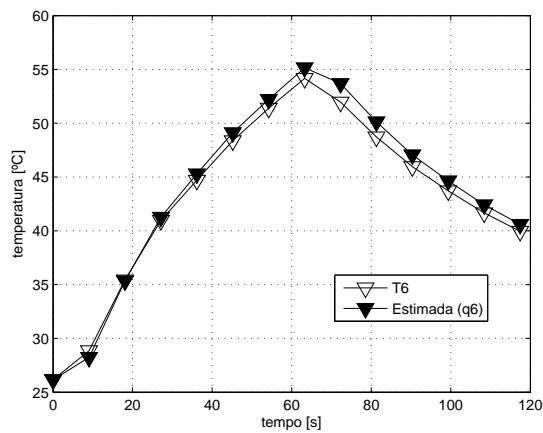


(c) erro

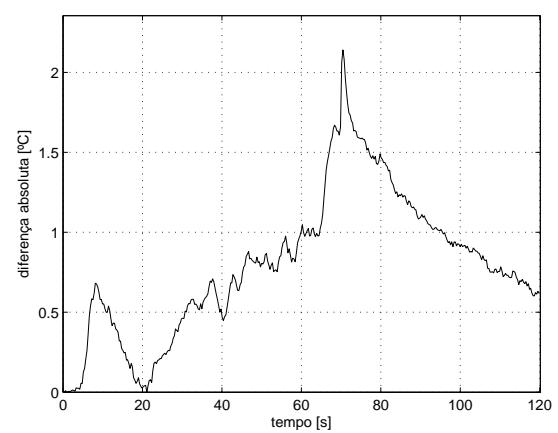
Figura 5.18: Comparaçao entre temperatura experimental (T5) x estimada por q_5



(a) fluxo de calor estimado



(b) temperatura



(c) erro

Figura 5.19: Comparação entre temperatura experimental (T6) x estimada por q_6

5.1.2 Temperatura na interface cavaco-ferramenta

O objetivo da solução do problema inverso, nesse experimento de usinagem, é estimar a temperatura na interface peça-ferramenta, onde não é possível medir a temperatura. Assim, com o fluxo de calor estimado na posição 1, Fig. 5.7, a mais próxima da fonte de calor, pode-se calcular a temperatura nas posições $i_1 - i_5$, mostradas na Fig. 5.20, por meio da solução híbrida $X33Y33Z33$.

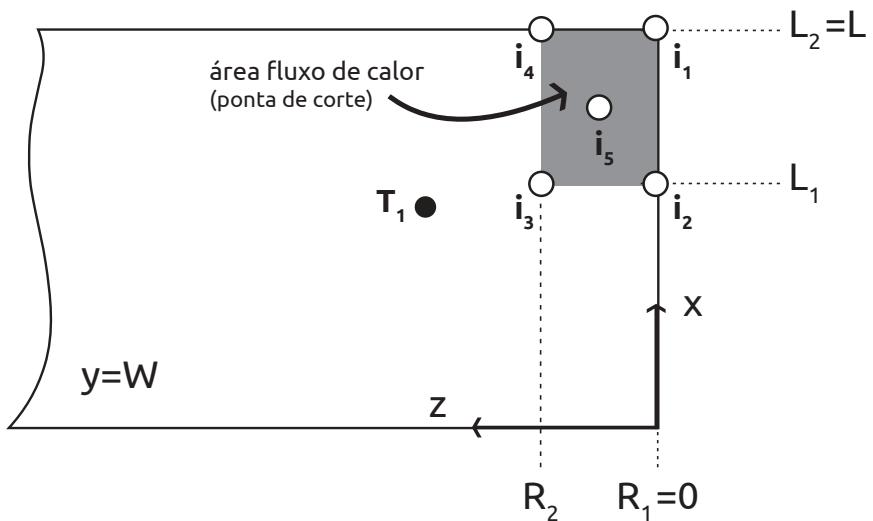


Figura 5.20: Posições para cálculo da temperatura na interface peça-ferramenta

As Fig. 5.21 e 5.22 mostram a comparação entre as temperaturas calculadas $T_{i_1}-T_{i_6}$, a média entre essas temperaturas T_{i_m} e a temperatura na interface peça-ferramenta obtida através método do termopar ferramenta-peça que mede a temperatura média da interface cavaco-ferramenta por meio de um fenômeno físico conhecido como efeito *Seebeck* (CUNHA; SILVA, 2011) (KAMINISE, 2012).

Na Tabela 5.3 e a Fig. 5.23 apresenta-se o erro percentual entre a temperatura calculada na interface peça-ferramenta, com o fluxo de calor estimado, q_1 , e a temperatura obtida com método do termopar ferramenta-peça. Os resultados mostram-se satisfatórios no intervalo de atuação do fluxo de calor, isto é, aproximadamente no período de tempo de 10 a 60 segundos, o erro médio percentual é de 4,65%.

É interessante destacar a grande força da técnica inversa desenvolvida que por sua vez se baseia na solução analítica do problema direto. Observa-se, neste caso, que o uso de métodos numéricos para a solução de problema direto acarreta em grandes dificuldades devido às pequenas dimensões da área de contato peça-ferramenta.

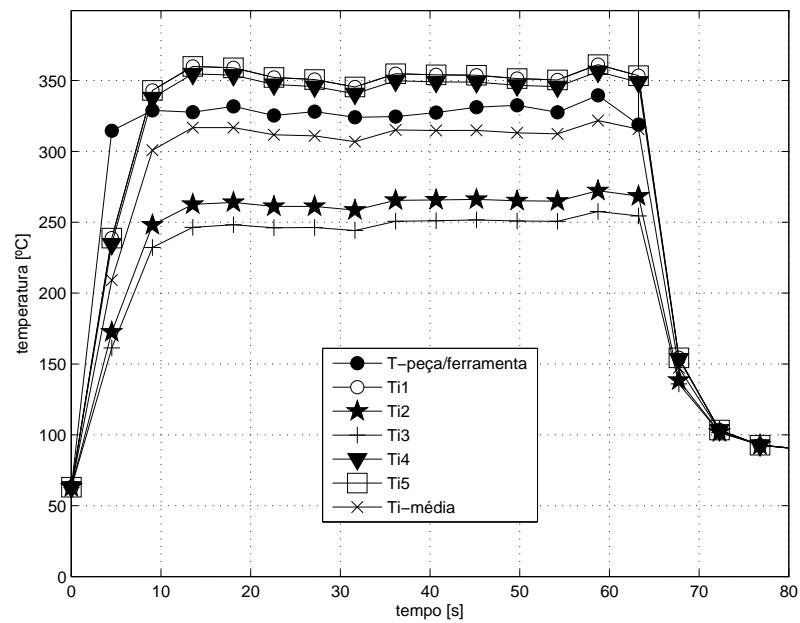


Figura 5.21: Comparaçāo entre as temperaturas na interface peça-ferramenta

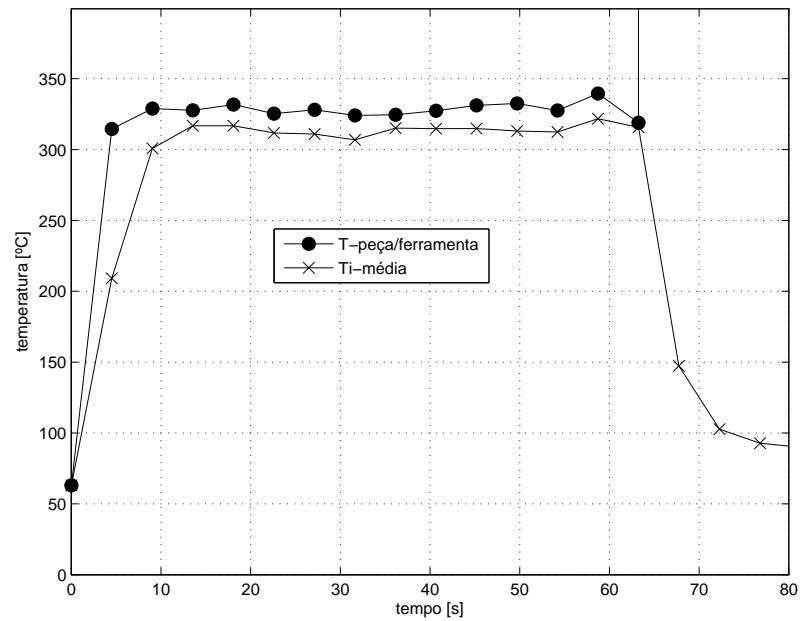


Figura 5.22: Comparaçāo entre a temperatura mādia calculada na interface *versus* mātodo do termopar ferramenta-peça

Nota-se que a área de contato é de $2,272 \times 0,688 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, ou seja da ordem de 1 mm^2 . O uso de métodos numéricos implicaria, neste caso, numa discretização com uma malha extremamente refinada o que por sua vez exigiria computadores de alta capacidade e custos computacional de grande proporção. Ressalta-se que os resultados obtidos indicam um gradiente de temperatura da ordem de 120°C na região de contato. Este resultado corrobora hipóteses presentes na literatura e podem, a partir do uso desta técnica ser melhor investigados, contribuindo para a elucidação da física do processo de cisalhamento durante o corte ortogonal (TRENT; WRIGHT, 2000).

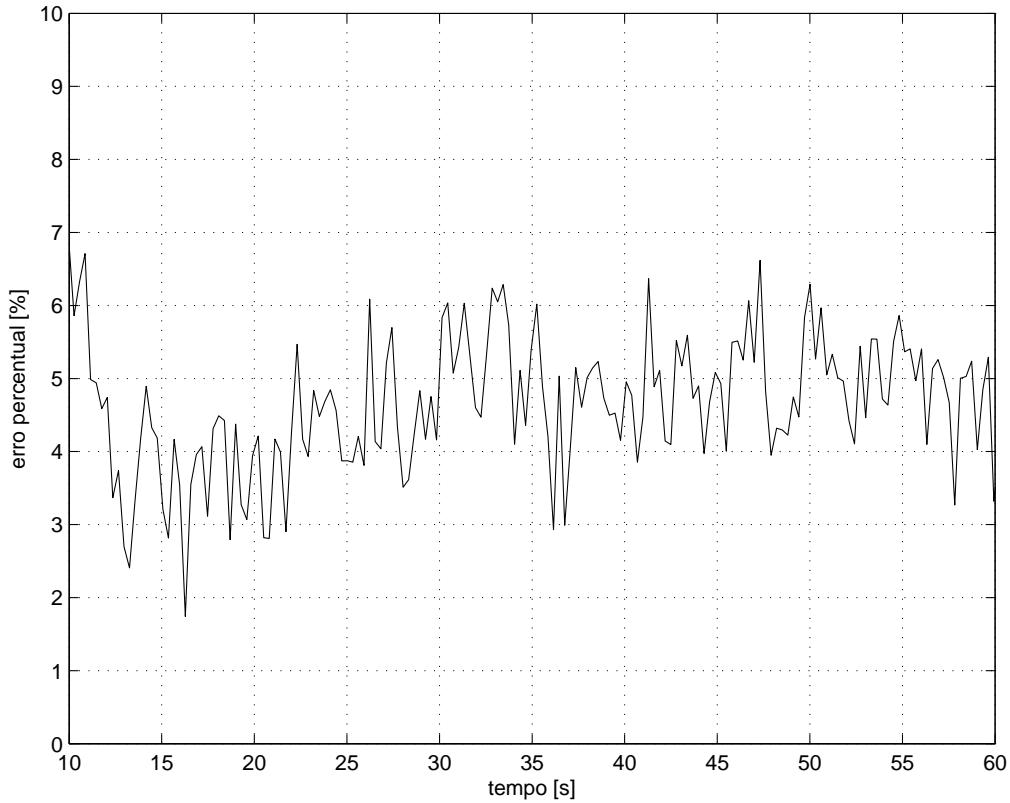


Figura 5.23: Erro percentual entre temperatura média calculada na interface *versus* método do termopar ferramenta-peça

Tabela 5.3: Temperatura peça-ferramenta (T_{PF}) \times média (T_{im})

t [s]	T_{PF} [°C]	T_{im} [°C]	dif. %
0,02	63,0316	63,0316	0,00
0,32	56,4659	63,2580	12,03
0,62	67,2582	63,0891	6,20
0,92	55,2565	63,1001	14,19
1,22	49,2970	63,0952	27,99
2,12	119,6261	65,0939	45,59
2,42	132,2070	66,9114	49,39
3,93	296,3116	163,6530	44,77
4,83	313,8986	222,8056	29,02
5,73	323,2616	249,7207	22,75
6,94	320,5722	270,0511	15,76
7,85	322,5853	287,8050	10,78
8,75	325,6452	299,2711	8,10
9,05	328,9293	300,8142	8,55
10,26	325,4555	306,3787	5,86
11,76	325,8079	310,8614	4,59
12,96	325,1437	316,3680	2,70
13,86	330,6828	316,8430	4,19
14,76	329,1602	315,3848	4,19
15,97	325,0489	313,5306	3,54
16,87	329,8805	316,8208	3,96
17,77	331,2676	316,9824	4,31
18,99	329,0923	314,6956	4,37
19,90	325,7536	312,9131	3,94
20,81	325,1437	316,0087	2,81
21,71	323,5052	314,1106	2,90
22,91	325,0218	312,2397	3,93
23,81	326,8929	311,5716	4,69
24,72	325,4013	312,8044	3,87
25,92	325,1708	312,7780	3,81
30,74	324,5612	308,0940	5,07
35,86	328,6440	314,8412	4,20
40,99	330,3564	315,5810	4,47
45,80	333,9769	315,6267	5,49
50,91	331,4172	314,6784	5,05
55,72	327,5713	311,2938	4,97
60,85	333,7862	319,9849	4,13
61,14	330,6692	320,1878	3,17
62,95	336,0217	322,8618	3,92
63,85	218,4602	270,4416	23,79
64,15	202,6179	256,1294	26,41
64,75	179,3999	233,4856	30,15

5.2 Temperaturas medidas em testes de laboratório para identificação de propriedades termofísicas

As temperaturas apresentadas na Fig. 5.24 são provenientes de um experimento para identificação de propriedades termofísicas, realizado no LTCM, Laboratório de Transferência de Calor e Massa da Universidade Federal de Uberlândia². As temperaturas, T_1 e T_2 , foram adquiridas conforme o esquema ilustrado nas Figs. 5.25 e 5.26.

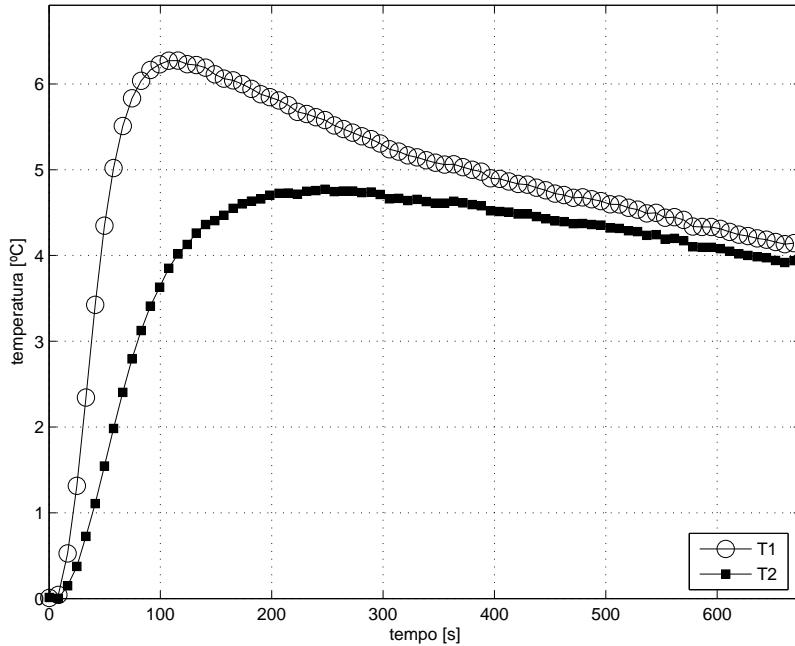


Figura 5.24: Temperaturas experimentais T_1 e T_2

Desta forma, considerando as propriedades termofísicas estimadas, tem-se, condutividade térmica $k = 14,655 \text{ [W/m.K]}$ e difusividade térmica $\alpha = 3,77E - 06 \text{ [m}^2/\text{s]}$ (aço inoxidável AISI 304); os coeficientes de convecção $h_i = 3 \text{ [W/m}^2\text{K]}$ (ajustados a partir do fluxo estimado); e que a geometria do problema 3D dada por $L = 138,8E - 03$, $W = 6E - 3$ e $R = 64,5E - 02 \text{ [m]}$ dimensões em x , y e z , respectivamente; temperatura inicial e ambiente, $T_0 = T_\infty = 0 \text{ [°C]}$ e, intervalo de discretização do tempo $dt = 0,165116 \text{ [s]}$ e tempo final $tf = 660,6291 \text{ [s]}$, no total de 4096 pontos amostrados. Então, para as mesmas coordenadas das temperaturas, $T_1(53,5E - 03; 6E - 3; 4E - 3)$ e $T_2(55,6E - 3; 6E - 3; 60,7E - 3)$, calcula-se os vetores das respostas impulsivas nas posições 1 e 2.

²Experimento cedido pelo Prof. Dr. Valério Luiz Borges

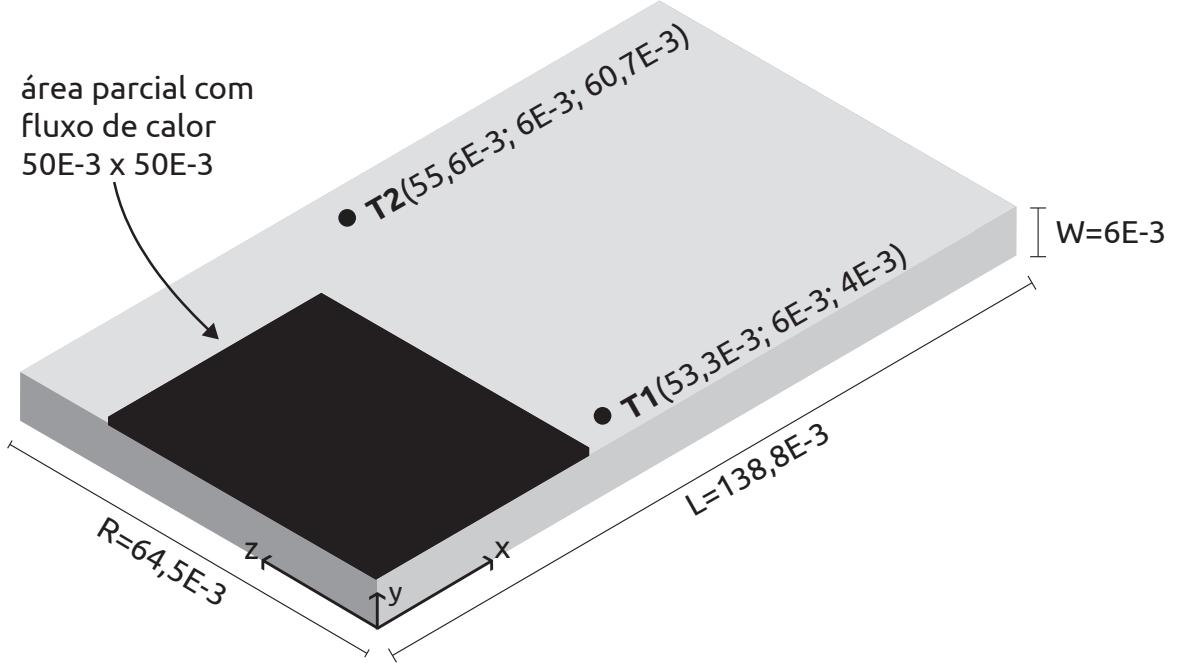


Figura 5.25: Temperaturas experimentais T_1 e T_2

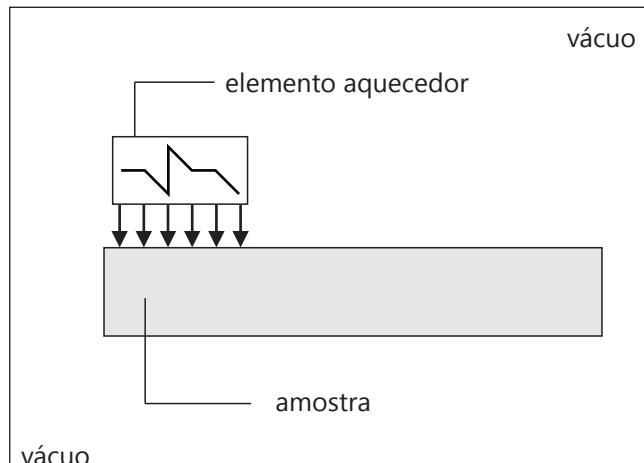
Observa-se na Fig. 5.27 que o comportamento das respostas impulsivas, não é o ideal, isto é, não é sempre decrescente. É importante observar que o vetor de discretização do tempo, pode ser tomado em passos largos, isto é de 100 em 100 dentro do conjunto original de 4096 amostras, neste caso, considerara-se $dt = 16,5116 [s]$. Portanto, consegue-se uma redução considerável do tempo computacional sem prejuízo significativo na resposta, como foi exemplificado na seção 4.3.2. Ao reduzir o número de amostras evita-se, consequentemente, que se tenha muita informação na parte crescente da resposta implusiva, o que promove a divergências na estimativa do fluxo de calor.

Assim, com o conhecimento dos vetores de temperatura experimental e função de transferência obtém-se a estimativa para o fluxo de calor. Então, para cada temperatura medida tem-se uma estimativa, ou seja, $q_1 = T_1 * \frac{1}{H_1}$ e $q_2 = T_2 * \frac{1}{H_2}$. Na Fig. 5.28 apresenta-se as estimativas para o fluxo de calor.

Nota-se na estimativa q_2 , para tempo superior a 500 s (Fig. 5.28), resíduos de fluxo de calor quando estes valores deveriam tender a zero, decorrente do comportamento crescente da função de transferência para valores inferiores a 200 s (Fig. 5.27), os resíduos contribuem para o aumento da temperatura para esta mesma faixa de tempo. Os fluxos de calor estimados podem ser corrigidos, nesse caso, para tempos superiores a aproximadamente 200 s, onde o fluxo de calor pode ser considerado nulo.



(a)



(b)

Figura 5.26: (a) Aparato experimental. (b) Esquema de montagem do elemento aquecedor resistivo em parte da amostra

Cada uma das estimativas para o fluxo de calor, q_1 e q_2 , mostradas na Fig. 5.29, é submetida à solução híbrida, assim, é possível verificar se elas são capazes de descrever as temperaturas experimentais T_1 e T_2 . As Figs. 5.30 e 5.31 mostram a comparação entre as temperaturas experimentais, T_1 e T_2 , e as estimadas pelos fluxos de calor, q_1 e q_2 , respectivamente. Observa-se na Fig. 5.31 que o fluxo q_2 não descreve a temperatura experimental T_2 , devido ao seu atraso.

O fluxo de calor q_1 também pode ser usado para verificação da temperatura T_2 , como mostra a Fig. 5.33, na qual é possível verificar que há defasagem entre a temperatura experimental e estimada, o que sugere que o fluxo de calor estimado q_1 deve ser sofrer um retrocesso

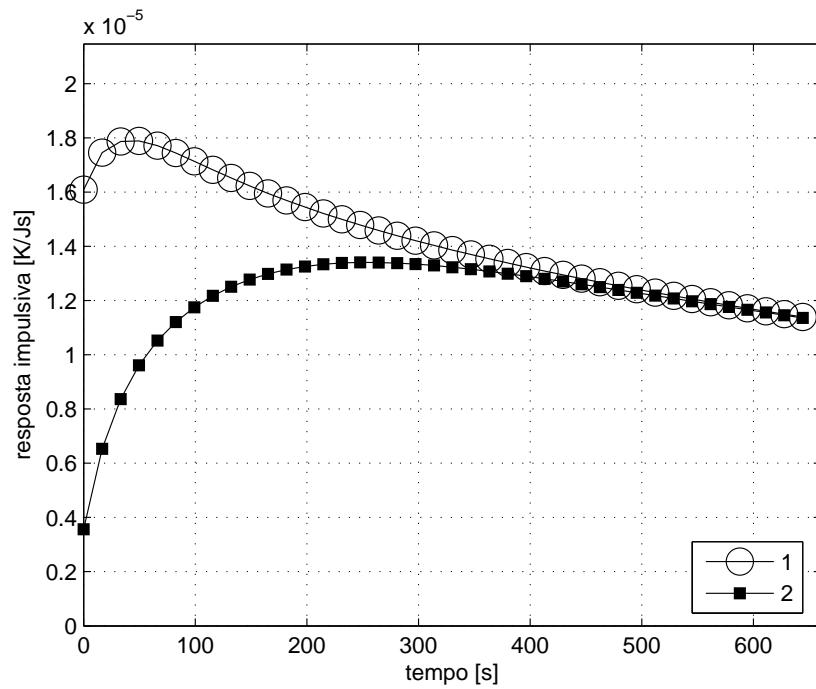
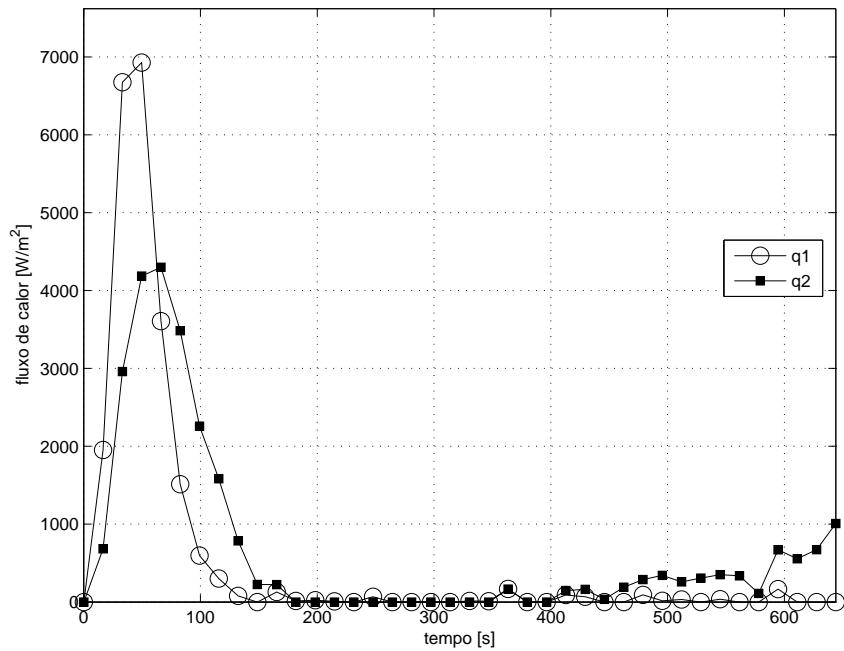


Figura 5.27: Resposta impulsiva para as posições 1 e 2

Figura 5.28: Fluxo de calor estimado q_1 e q_2

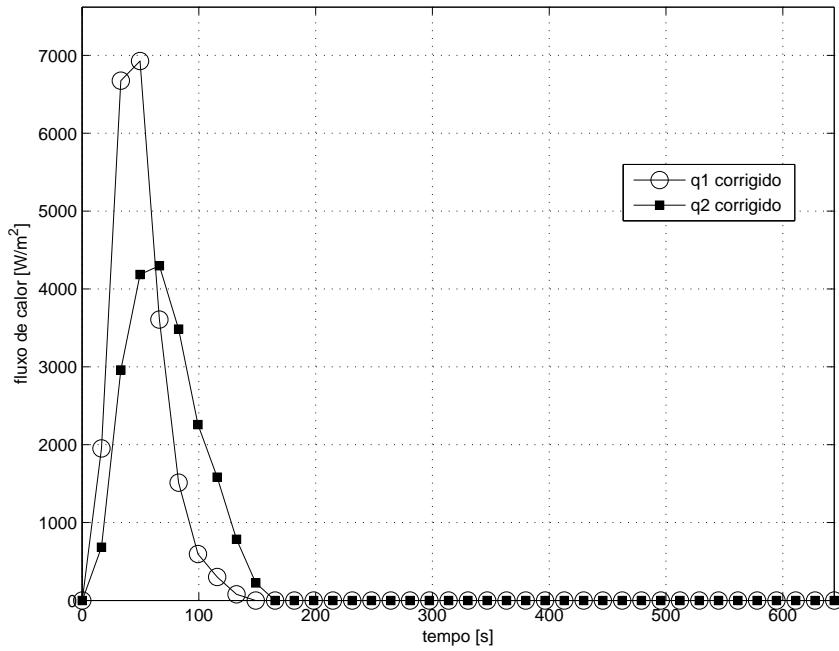


Figura 5.29: Fluxo de calor estimado q_1 e q_2 corrigidos

(como descrito na seção de procedimentos) para melhor descrever a temperatura na posição 2, assim, neste caso, retrocedendo-se no tempo apenas uma posição do vetor de fluxo de calor tem-se a estimativa para a temperatura na posição 2 mostrada na Fig. 5.33.

Na Figura 5.34 tem-se a diferença entre as temperaturas experimental e estimada nas posições 1 e 2. A máxima diferença entre a temperatura experimental e a estimada é de 0,44 [°C]. Como o experimento trata-se de diferenças de temperatura, o erro mostra-se satisfatório.

Calcula-se a diferença entre as áreas dos fluxos estimados q_1 e q_2 , por meio da função *trapz* do MATLAB, respectivamente tem-se, $A_1 = 3,68024E5$ e $A_2 = 3,5554E5$. Observa-se que a diferença entre elas é inferior a 3,4%. Este fato indica que embora exista o efeito de atraso e amortecimento, a técnica usada é conservativa do ponto de vista de energia do sistema. Uma grande aplicação deste procedimento é do estimativa de propriedades térmicas usando-se técnicas baseadas no cálculo da energia fornecida ao sistema, como desenvolvido por Borges (2008).

Observa-se que o uso do procedimento de correção apresentado no capítulo 4 torna-se necessário em função da física do processo, considerando as propriedades térmicas e geometria.

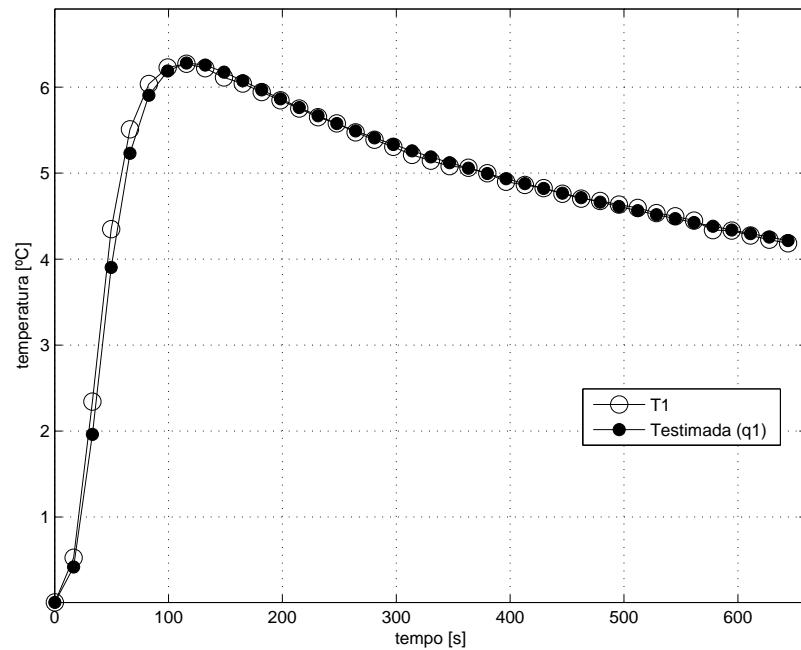


Figura 5.30: Temperatura experimental \times estimada por q_1 (posição 1)

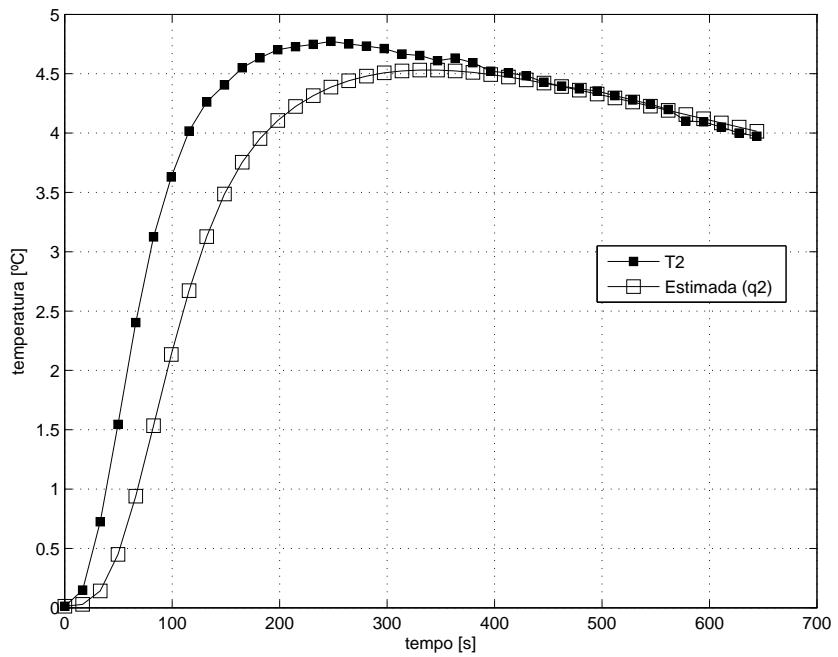


Figura 5.31: Temperatura experimental \times estimada por q_1 (posição 2)

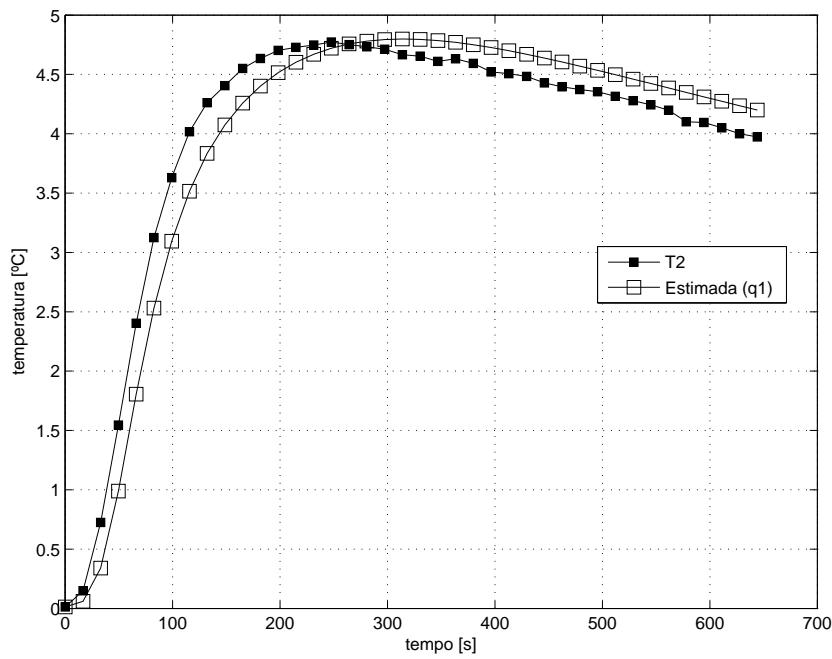


Figura 5.32: Temperatura experimental \times estimada por q_1 (posição 2)

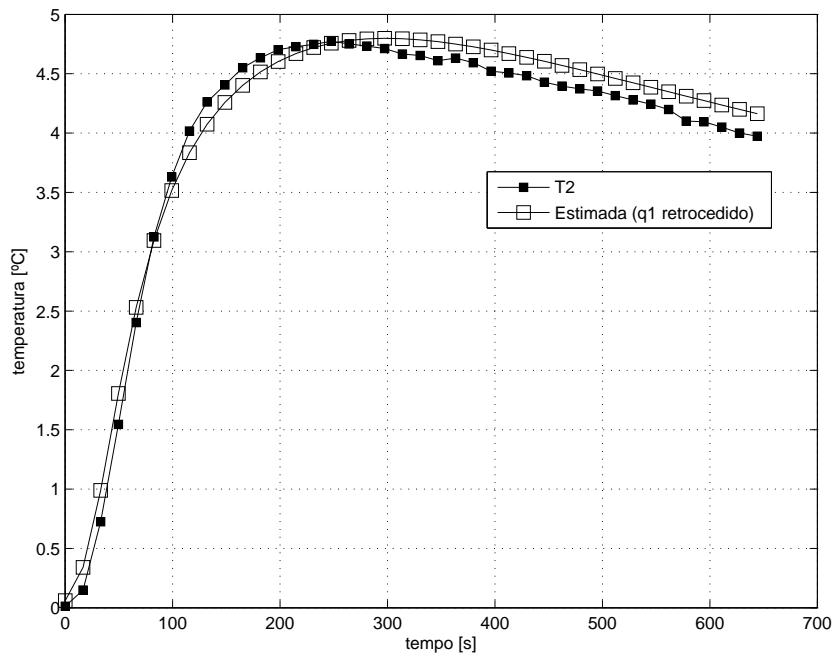


Figura 5.33: Temperatura experimental \times estimada por q_1 retrocedido (posição 2)

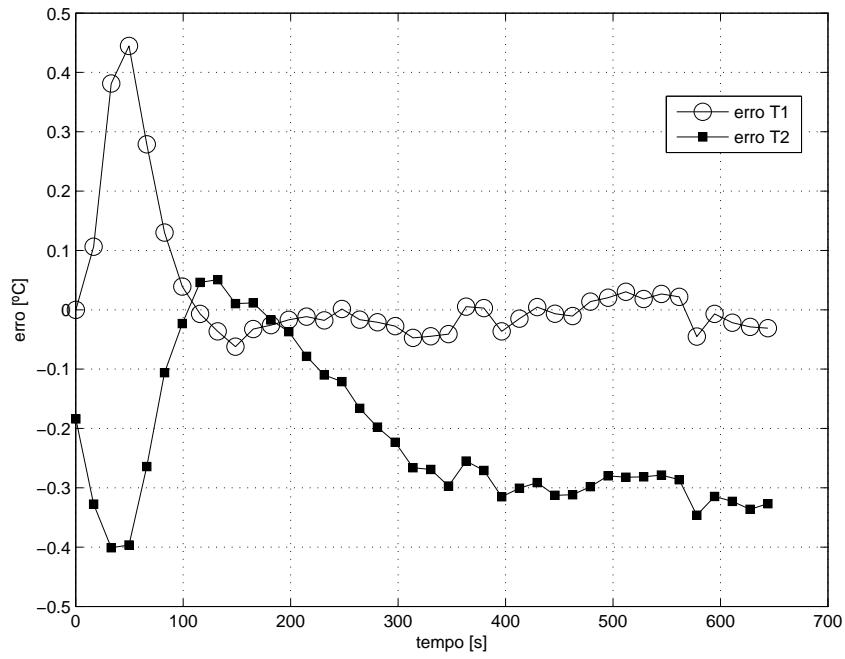


Figura 5.34: Diferença entre as temperaturas experimentais e estimadas por q_1

A análise do comportamento da resposta impulsiva é também fundamental para o sucesso da técnica.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Propôs-se neste trabalho o estudo da obtenção da função de transferência (ou resposta impulsiva) que descreve um dado problema térmico por meio de analogias entre as teorias de funções de Green e sistemas dinâmicos, para então, aplicá-la à solução de problema inverso em condução de calor.

Com a determinação da função de transferência foi possível estabelecer o método de estimativa do fluxo de calor por diferentes abordagens, seja por meio da deconvolução, ou da transformada rápida de Fourier e sua inversa, e ainda por cálculos de densidades espetrais, todas equivalentes entre si.

O uso do *software* MATLAB mostrou-se bastante eficiente e simples para executar a transposição da teoria matemática empregada no método de estimativa para o fluxo de calor como solução computacional de baixo custo e fácil implementação.

Desta forma, foi possível consolidar o desempenho da técnica explorando-se vários parâmetros de configuração de um problema térmico, como por exemplo, o tipo de material (metal ou não-metal), a dimensão da amostra, a discretização do tempo, simulação da temperatura por diferentes formas de fluxo de calor, e, posteriormente a restauração desse fluxo de calor que a gerou.

Uma vez consolidada a técnica, pode-se confirmar sua robustez com dados reais, por meio de temperaturas adquiridas em um processo de usinagem, cujo objetivo é estimar a temperatura na interface peça-ferramenta, e por temperaturas medidas em testes de laboratórios para a identificação de propriedades termofísicas, alcançando resultados satisfatórios. Neste ponto cabe ressaltar a força das soluções analíticas. O baixo custo computacional e a obtenção rápida de temperaturas em qualquer ponto do domínio, incluindo-se nesse caso, a

região de contato peça-ferramenta representa uma grande vantagem destas técnicas. Como a área de contato é extremamente pequena (ordem de $1\ mm^2$) o custo computacional de métodos numéricos para que essa área fosse refinada juntamente com o restante do domínio (ferramenta) seria muito grande.

Fez-se a escolha do problemas térmicos unidimensional ($X22$) e tridimensional ($X33Y33Z33$) para exposição da fundamentação teórica do método, por se tratar de campos de interesse de pesquisas realizadas nos laboratórios, LTCM e LEPU, desta instituição, por abordagem numérica e experimental. No entanto, essa técnica pode ser aplicada a qualquer outro problema térmico que possa ser resolvido por funções de Green, que vai além das coordenadas cartesianas, como os problemas de geometria cilíndrica, esféricas e anular, tratadas em Cole *et al.* (2010).

Com o intuito de ampliar a aplicabilidade do método de solução de problema inverso, aponta-se como proposta de trabalhos futuros, a investigação de funções transferência a partir de geometria complexas e a possibilidade de uso em conjunto com métodos numéricos com geometria generalizadas, elementos finitos e técnicas de otimização.

Propõe-se também o estudo de problemas de soldagem ou problemas térmicos que envolvam fontes móveis. Observa-se que neste caso as soluções analíticas existentes baseiam-se em modelos extremamente modificados, havendo neste campo grandes possibilidades de contribuição no desenvolvimento de modelos térmicos mais completos como as soluções analíticas baseadas em funções de Green.

Referências Bibliográficas

- ALIFANOV, O. M. Solution of an inverse problem of heat conduction by iterations methods. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, v. 26, n. 4, p. 471–476, 1974.
- ASTER, R.; BORCHERS, B.; THURBER, C. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. [S.l.]: Elsevier/Academic Press, 2013. (Academic Press). ISBN 9780123850485.
- BECK, J.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. [S.l.]: John Wiley & Sons Incorporated, 1985. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471083191.
- BEHBAHNI, A.; KOWSARY, F. A dual reciprocity be-based sequential function specification solution method for inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, p. 1247–1255, 2004.
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. *Random Data Analysis and Measurements Procedures*. 2. ed. Nova Iorque, NY: Wiley-Interscience, 1996.
- BLANC, G.; RAYNAUD, M.; CHAU, T. H. A guide for the use of the function specification method for 2d inverse heat conduction problems. *Revue Générale de Thermique*, v. 37, n. 1, p. 17–30, 1998.
- BLUM, J.; MARQUARDT, W. An optimal solution to inverse heat conduction problems based on frequency-domain interpretation and observers. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, v. 32, n. 4, p. 453–478, 1997.
- BORGES, V. L. *Desenvolvimento do método de aquecimento plano parcial para a determinação simultânea de propriedades térmicas sem o uso de transdutores de fluxo de calor*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

CARVALHO, S. R.; ONG, T. H.; GUIMARÃES, G. A mathematical and computational model of furnaces for continuous steel strip processing. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 178, n. 1-3, p. 379–387, 2006.

CHUNG, S.-C. Temperature estimation in drilling processes by using an observer. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Volume 45, n. 15, p. 1641–1651, 2005.

COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R. B.; DULIKRAVICH, G. S. Inverse and optimization problems in heat transfer. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 28, n. 1, p. 1–24, 2006.

COLE, K. D.; BECK, J. V.; HAJI-SHEIKH, A.; LITKOUHI, B. *Heat Conduction Using Green's Functions*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2010. (Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences). ISBN 9781439813546.

CUNHA, A. A.; SILVA, M. B. da. *Influência do Material do Porta-Ferramenta Sobre a Temperatura da Ferramenta de Corte Durante o Torneamento*. [S.l.], 2011.

DOWDING, K. J.; BECK, J. V. A sequential gradient method for the inverse heat conduction problem (ihcp). *Journal of Heat Transfer*, v. 121, p. 300–306, 1999.

FERNANDES, A. P. *Funções de Green: soluções analíticas aplicadas a problemas inversos em condução de calor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009. Disponível em: http://www.bdtd.ufu.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=2887.

FERNANDES, A. P.; GUIMARÃES, G. Heat conduction analytical solutions to be applied in boundary conditions obtained from discrete data. In: *Proceedings of the ENCIT 2012, 14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: ABCM, 2012.

FRANKLIN, G.; POWELL, J.; WORKMAN, M. *Digital control of dynamic systems*. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 1998. (Addison-Wesley world student series). ISBN 9780201820546.

GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.

- GONÇALVES, C. V.; SCOTTI, A.; GUIMARÃES, G. Simulated annealing inverse technique applied in welding: A theoretical and experimental approach. In: *4th International Conference on Inverse Problems in Engineering*. Rio de Janeiro, Brazil.: Proceedings of 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering, 2002. v. 4.
- GONÇALVES, C. V.; SILVA, L. A.; NETO, A. S. N.; A, D.; GUIMARÃES, G. An inverse technique applied to natural convection over a heated vertical plate. In: *34th National Heat Transfer Conference*. Pittsburgh, Pennsylvania: Proceedings of NHTC'00, 2000.
- GONÇALVES, C. V.; VILARINHO, L. O.; SCOTTI, A.; GUIMARÃES, G. Estimation of heat source and thermal efficiency in gtaw process by using inverse techniques. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 172, p. 42–51, 2006.
- JARNY, Y.; ÖZİŞIK, M. N.; BARDON, J. P. A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 34, n. 11, p. 2911–2919, 1991.
- KAMINISE, A. K. *Estudo da influência do material do porta-ferramenta sobre temperaturas de usinagem no torneamento*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2012.
- KEANINI, R. G.; LING, X.; CHERUKURI, H. P. A modified sequential function specification finite element-based method for parabolic inverse heat conduction problems. *Computational Mechanics*, v. 36, n. 2, p. 117–128, 2005.
- KIM, S. K.; DANIEL, I. M. Solution to inverse heat conduction problem in nanoscale using sequential method. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, v. 44, n. 5, p. 439–456, 2003.
- LEE, W.-S.; KO, Y.-H.; JI, C.-C. A study of an inverse method for the estimation of impulsive heat flux. *Journal of the Franklin Institute*, v. 337, n. 6, p. 661–671, 2000.
- LIMA, F. R. S. *Modelagem Tridimensional de Problemas Inversos em Condução de Calor: Aplicação em Processos de Usinagem*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2001.
- LIMA, F. R. S.; GUIMARÃES, G. Desenvolvimento de técnicas de problemas inversos bidimensionais em condução de calor. In: CIDIM/97 (Ed.). *III CIDIM/97*. Havana: [s.n.], 1997.

LIMA, F. R. S.; MACHADO, A. R.; GUTTS, S.; GUIMARÃES, G. Numerical and experimental simulation for heat flux and cutting temperature estimation using three-dimensional inverse heat conduction technique. *Inverse Problems In Engineering*, v. 8, p. 553–577, 2000.

LIN, S.-M.; CHEN, C.-K.; YANG, Y.-T. A modified sequential approach for solving inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, p. 2669–2680, 2003.

LOULOU, T.; SCOTT, E. P. Estimation of 3-dimensional heat flux from surface temperature measurements using an iterative regularization method. *Heat and Mass Transfer*, v. 39, p. 435–443, 2003.

MALHEIROS, F. C. *Ánalise experimental do funcionamento de um forno elétrico doméstico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

MARQUARDT, W.; AURACHER, H. An observer-based solution of inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 33, n. 7, p. 1545–1562, 1990.

MATLAB. *version 7.14.0.739 (R2012a)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2012.

MURIO, D. A. *The Molification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*. New York, NY: John Wiley, 1993.

OSMAN, A. M.; DOWDING, K. J.; BECK, J. V. Numerical solution of the general two-dimensional inverse heat conduction problem (ihcp). *Journal of Heat Transfer*, v. 119, n. 1, p. 38–45, 1997.

ÖZİŞIK, M. N. *Heat Conduction*. Nova Iorque, NY: Wiley, 1993. (Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471532569.

ÖZİŞIK, M. N.; ORLANDE, H. R. B. *Inverse Heat Transfer*. New York, NY: Taylor & Francis, 2000.

PARK, H. M.; JUNG, W. S. Recursive algorithm for multidimensional inverse heat conduction problems by means of mode reduction. *Chemical Engineering Science*, v. 55, n. 21, p. 5115–5124, 2000.

RAUDENSK, M.; WOODBURY, K. A.; KRAL, J.; BREZINA, T. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, v. 28, n. 3, p. 293–306, 1995.

- RECH, J.; KUSIAKB, A.; BATTAGLIA, J. L. Tribological and thermal functions of cutting tool coatings. *Surface and Coatings Technology*, v. 186, n. 3, p. 364–371, 2004.
- SANTOS, M. R. dos. *Modelo térmico para a solução de problemas inversos em transferência de calor com aplicação em um processo de usinagem por torneamento*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2008.
- SARAMAGO, S. F. P.; ASSIS, E. G.; STEFFEN, V. Simulated annealing: Some applications in mechanical systems optimization. In: *20th Iberian Latin - American Congress on Computational Methods in Engineering*. São Paulo, Brasil.: Proceedings of 20th Iberian Latin - American Congress on Computational Methods in Engineering, 1999. v. 20. CD-ROM.
- SMITH, S. W. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. [S.l.]: California Technical Publishing, 1998.
- SOUSA, P. F. B.; CARVALHO, S. R.; GUIMARÃES, G. Dynamic observers based on green's functions applied to 3d inverse thermal models. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 16, n. 6, p. 743–761, 2008.
- STOLZ, G. Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple for simple shapes. *Journal of Heat Transfer*, v. 82, p. 20–26, 1960.
- TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Washington, DC: Winston and Sons, 1977.
- TRENT, E.; WRIGHT, P. *Metal cutting*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000.
- TUAN, P.-C.; JI, C.-C.; FONG, L.-W.; HUANG, W.-T. An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, v. 29, n. 3, p. 345–363, 1996.
- VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. New York, NY: McGraw-Hill College, 1984.
- WYLIE, C. R.; BARRET, L. C. *Advanced Engineering Mathematics*. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 2007.
- XINGJIAN, X. *Improvements on Heat Flux and Heat Conductance Estimation with Applications to Metal Castings*. Dissertação (Mestrado) — Mississippi State University - Science in Mechanical Engineering, Mississippi, 2003.

Anexo A

SOLUÇÃO HÍBRIDA X22

Esse código MATLAB trata-se da solução computacional do problema direto, ou seja, a determinação do campo de temperatura para o problema térmico denominado *X22*, dada a discretização do fluxo de calor triangular (linhas 21-23). Este código está disponível para *download* no endereço <http://www.ana.mat.br>.

```
1 % numero de iteracoes
2     m=50;% autovalor para o calculo da temperatura
3     erom=1e-5;% truncamento
4     MM=1;
5
6 % propriedades termofisicas
7 % material polyethylene (high-dens.) (BECK, p. 531)
8     k=0.33;
9     alfa=0.16E-06;
10
11 % comprimento L e temperaturta inicial
12     L=1e-02;
13     T0=25;
14
15 % vetor tempo
16     dt=1;
17     tf=1024;
18     t=0:dt:tf;
19
20 % vetor fluxo de calor , W/m^2.K
21 % pulso triangular
```

```

22      c1=3e3 ;
23      c2=300 ;
24      q=c1*tripuls ( t-c2 , c2 ) ;
25
26 % posicoes de calculo da temperatura , no intervalo (0 ,L)
27      x=[0 L/2 L] ;
28
29 % _____
30 % Problema direto , X22
31 % _____
32 for c=2:length ( t )-MM
33      soma1T=0;
34      for ff=1:c
35          parcela1T=q( ff )*( t( ff+1)-t( ff ) ) ;
36          soma1T=soma1T+parcela1T ;
37      end
38      for a=1:length ( x )
39          soma2T=0;
40          for j=1:m
41              somaintegral1T=0;
42              An=( j*pi/L )^2*alfa ;
43              for f=1:c
44                  arg1=( t( c+1)-t( f+1 ) ) ;
45                  arg2=( t( c+1)-t( f ) ) ;
46                  integralT =q( f )*( exp(-An*arg1)-exp(-An*arg2 ) ) ;
47                  somaintegral1T=somaintegral1T+integralT ;
48              end
49              parcela2T=cos ( j*pi*x( a )/L )*( 1/An)*somaintegral1T ;
50 % truncamento
51 %          if abs( parcela2T )<errrom
52 %              soma2T=soma2T+parcela2T ;
53 %              break
54 %          end
55          soma2T=soma2T+parcela2T ;
56      end
57      T( a , c )=( alfa /k)*( 1/L)*soma1T+( alfa /k)*( 2/L)*soma2T ;
58  end
59 end

```

```
60
61 % matriz temperatura , posicoes de calculo [0 L/2 L]
62 TX22=T+T0 ;
63 TX220=[T0 TX22(1,:)];% vetor temperatura para a posicao x=0
64 TX22Lm=[T0 TX22(2,:)];% vetor temperatura para a posicao x=L/2
65 TX22L=[T0 TX22(3,:)];% vetor temperatura para a posicao x=L
```


Anexo B

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA $X22$

O trecho de código MATLAB mostrado abaixo descreve a solução computacional para a resposta impulsiva do problema $X22$. O código, na íntegra, está disponível para *download* no endereço <http://www.ana.mat.br>.

```
1 % ...
2 % posicoes de calculo da funcao de transferencia
3 x=[0 L/2 L];
4 % _____
5 % Resposta impulsiva , h
6 % _____
7 for ss=2:length(t)
8     for a=1:length(x)
9         somah=0;
10        for j=1:p
11            parcelah=(cos(j*pi*x(a)/L))* exp(-(j*pi/L)^2*alfa*t(ss));
12 % truncamento
13 %             if abs(parcelah)<errop
14 %                 somah=somah+parcelah;
15 %                 break
16 %             end
17 %             somah=somah+parcelah;
18 %             h(a,ss)=alfa/(k*L)+(alfa*2)/(k*L)*somah ;
19        end
20    end
21 end
22 hX220=H(1,:);% vetor h para a posicao x=0
```

```
23 hX22Lm=H(2,:);% vetor h para a posicao x=L/2
24 hX22L=H(3,:);% vetor h para a posicao x=L
25 % _____
26 % Funcao de transferencia , H
27 % _____
28 NR=2^26;
29 HX220=fft ( HX220 ,NR) ;
30 HX22Lm=fft ( HX22Lm ,NR) ;
31 HX22L=fft ( hX22L ,NR) ;
```

Anexo C

PROBLEMA INVERSO

Esse trecho de código MATLAB mostra as diferentes abordagens de estimativa para o fluxo de calor aplicável ao problema $X22$ e $X33Y33Z3$, ou qualquer outro problema definido pelas funções de Green, como por exemplo, $X20$, $X23$, $X22Y33$, $X22Y22Z2$, etc. O código está disponível para *download* no endereço <http://www.ana.mat.br>.

```
1 % _____  
2 % Estimativa 1 - FFT/IFFT  
3 % _____  
4 p=nextpow2( length( t ) );  
5 NR=2^p;  
6 Tfreq=fft ( T,NR );  
7 Hfreq=fft ( h ,NR );  
8 qfreq=Tfreq ./ Hfreq;  
9 qtempo=ifft ( qfreq )/dt;  
10  
11 % _____  
12 % Estimativa 2 - deconvolucao  
13 % _____  
14 T=[T zeros ( 1 ,length( T ) )];  
15 qdeconv=deconv( T, h )/dt;  
16  
17 % _____  
18 % Estimativa 3 - Estimativa do modulo do fluxo por STT(f) = |q(f)|^2 SHH  
19 ( f )  
20 % _____  
20 STT=Tfreq.* conj ( Tfreq );
```

```
21 SHH=Hfreq.*conj(Hfreq);  
22 SHT=Tfreq.*conj(Hfreq);  
23 modqqespc12=STT./SHH;  
24 modqqespc1=sqrt(modqqespc12);  
25 qespc1=modqqespc1.*exp(1i*angle(SHT));  
26 qespc1tempo=ifft(qespc1)/dt;  
27  
28 %

---

  
29 % Estimativa 3 - Estimativa do modulo fluxo por SHT(f) = q(f) SHH(f)  
30 %

---

  
31 qespc2=SHT./SHH;  
32 qespc2tempo=ifft(qespc2)/dt;
```