

CAPÍTULO V

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através do código *SPECTRAL*. Inicialmente é apresentada a validação do código, realizada através da solução da Equação de Burgers (Canuto et al., 1988) e da simulação dos vórtices de Green-Taylor (Layzet e Lamballais, 2004). Em seguida são apresentadas as análises temporais de decaimento de jatos livres simulados a partir de diferentes perturbações impostas sobre os campos iniciais de velocidade. As visualizações da formação e evolução das estruturas do escoamento para os diferentes casos estudados são apresentadas seguidas de análises sobre a dinâmica do escoamento. As influências da resolução no espaço de Fourier e da precisão utilizadas no código também são analisadas. São apresentados ainda tratamentos estatísticos simplificados utilizando conceitos de similaridade (Townsend, 1976; Narasimha, 1990).

5.1 Validação do Código *SPECTRAL*

5.1.1 Equação de Burgers

Para validação do código *SPECTRAL* foi resolvida a Equação de Burgers (Canuto et al., 1988), apresentada abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.1)$$

A equação de Burgers tem sido de grande interesse físico devido a suas propriedades estatísticas e por causa de sua função na hierarquia de aproximações das equações de Navier-Stokes. A equação de Burgers modela com sucesso a dinâmica de gases para situações particulares (Lightill, 1956); acústica (Blackstock, 1966), e os fenômenos de difusão e advecção (Burgers, 1948). Soluções da Eq (5.1) exibem um delicado balanço entre advecção e difusão. Além disso, ela é uma das poucas EDPs não-lineares para as quais a solução exata e

completa é conhecida em termos de valores iniciais (Cole, 1951; Hopf, 1950). A equação de Burgers constitui um problema teste conveniente e usual para esquemas numéricos.

A solução para condições de contorno periódicas (Whitiam, 1974) é:

$$u(x, t) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x - ct, t + 1)}{\phi(x - ct, t + 1)}, \quad (5.2)$$

sendo:

$$\phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - (2n+1)\rho)^2}{4\nu t}}. \quad (5.3)$$

Esta solução teórica com o valor da constante $c=8$ foi utilizada para comparação com os resultados do código *SPECTRAL*. Foram realizadas simulações do instante $t=0$ até $t = \pi/8$ s, utilizando um passo de tempo de $\pi/12800$ s e 16, 32, 64 e 128 pontos de colocação. Os resultados obtidos destas simulações foram comparados com a solução teórica. O erro máximo absoluto foi determinado através da diferença entre os resultados das simulações e a solução teórica. A Figura 5.1 apresenta a comparação gráfica dos resultados, enquanto a Tabela 5.1 apresenta os erros máximos obtidos pelo código *SPECTRAL* e apresentados por Canuto et al. (1988) para diferentes níveis de refinamento.

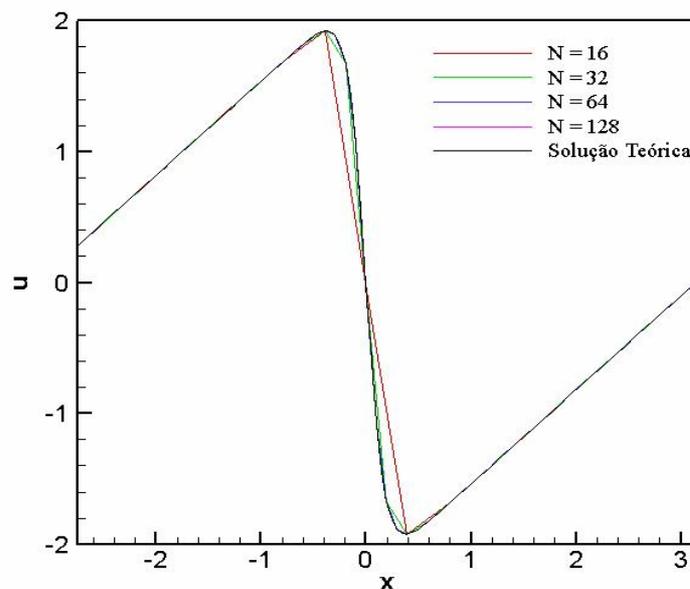


Figura 5.1 - Resultados simulados através do código *SPECTRAL* para Equação de Burgers e sua solução analítica.

Tabela 5.1 - Erros Máximos para Equação periódica de Burgers.

N	Código SPECTRAL	Solução Método Espectral (Canuto et al., 1988)
16	$1,29 \times 10^{-1}$	$2,1 \times 10^{-1}$
32	$9,74 \times 10^{-3}$	$2,5 \times 10^{-2}$
64	$3,26 \times 10^{-5}$	$3,6 \times 10^{-4}$
128	$1,99 \times 10^{-9}$	$6,1 \times 10^{-8}$

A Figura 5.1 permite verificar o quanto os resultados das simulações coincidem bem com a solução teórica da equação de Burgers a partir de 32 modos de Fourier. A Tabela 5.1 permite observar que o erro máximo diminui à medida em que se aumenta a resolução no espaço de Fourier. Os erros máximos obtidos através do código *SPECTRAL* foram inferiores aos erros máximos apresentados pela solução obtida por Canuto et al. (1988).

5.1.2 Vórtices de Green Taylor

A validação do código *SPECTRAL* também foi realizada para o caso bidimensional do decaimento temporal dos vórtices de Green Taylor (Layzet e Lamballais, 2004).

Em um domínio retangular $L_x \times L_y$ com condições periódicas nos contornos $x=0$, $x=L_x$, $y=0$, e $y=L_y$, partindo das condições iniciais:

$$u(x, y, 0) = U \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right), \quad (5.4)$$

$$v(x, y, 0) = -U \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right), \quad (5.5)$$

a solução analítica das equações incompressíveis de Navier-Stokes é dada por:

$$u(x, y, t) = U \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) e^{-\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right) 4\pi^2 \nu t}, \quad (5.6)$$

$$v(x, y, t) = -U \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) e^{-\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right) 4\pi^2 \nu t}. \quad (5.7)$$

Esta solução exata foi utilizada para comparações aos resultados obtidos através do código *SPECTRAL*. Foi realizada uma simulação considerando um domínio quadrado com $L_x = L_y$ discretizado em $n_x \times n_y$ modos de Fourier com $n_x = n_y$. Foram utilizados 8^2 , 16^2 , 32^2 , 64^2 e 128^2 modos de Fourier. O passo de tempo foi de 0,0005 s de forma que o erro do tempo de discretização possa ser considerado desprezível em relação ao erro espacial. O número de Reynolds definido por $Re = U L_x / \nu$ é igual a 1000. O erro foi calculado através do desvio padrão da componente de velocidade calculada u_c a partir de sua solução exata u_e :

$$Erro = \sqrt{\frac{1}{n_x} \frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \left(u_c(x_i, y_j, t_1) - u_e(x_i, y_j, t_1) \right)^2}, \quad (5.8)$$

com $x_i = (i-1)L_x / n_x$ e $y_j = (j-1)L_y / n_y$.

A Figura 5.2 apresenta o campo de velocidade resultante da simulação dos vórtices de Green-Taylor, e a Figura 5.3 mostra as respectivas linhas de corrente.

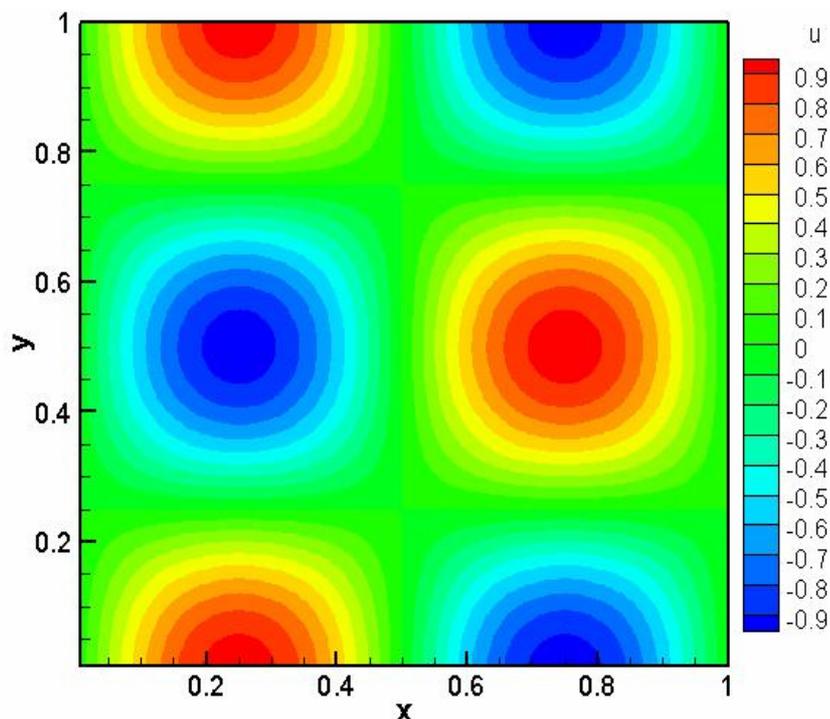


Figura 5.2 - Campo de velocidade u para os vórtices de Green-Taylor.

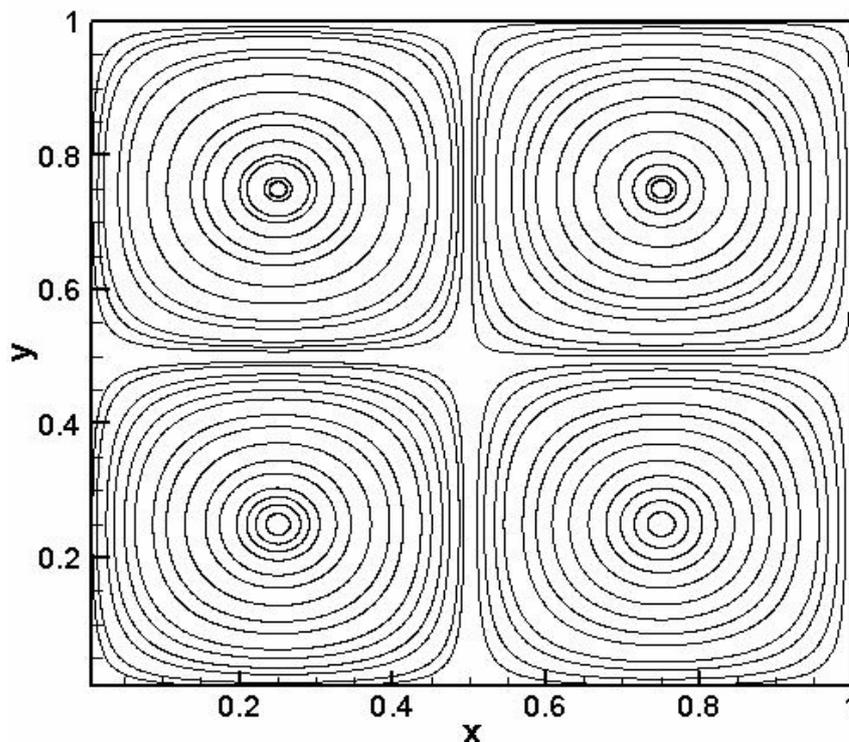


Figura 5.3 - Vórtices de Green-Taylor representados por linhas de corrente.

As Figuras 5.2 e 5.3 permitem verificar que os vórtices de Green-Taylor foram simulados de forma consistente. O erro calculado através da Equação (5.8) foi de $2,36 \times 10^{-15}$ ao utilizar 128^2 modos de Fourier. É importante ressaltar que resultados com a mesma precisão já haviam sido obtidos com 8^2 pontos de colocação, com o erro também da ordem de 10^{-15} , confirmando a alta precisão do código SPECTRAL.

5.2 Análise do Jato Circular Tridimensional em decaimento temporal

Realizada a validação do código SPECTRAL, objetivou-se o estudo da evolução temporal do jato circular livre. Este estudo consta de análises qualitativas e quantitativas de cinco casos, os quais se diferenciam pelo tipo de perturbação imposta ao perfil de velocidade inicial. As condições de simulação destes casos são semelhantes em alguns aspectos, sendo detalhadas a seguir.

Condições de contorno periódicas são aplicadas nas três direções do escoamento, sendo esta uma exigência do método pseudo-espectral utilizado neste trabalho, conforme já apresentado no capítulo 3. Devido à condição de contorno periódica na direção do escoamento, esta é uma simulação temporal do jato, e, portanto diferente das realizadas nos estudos preliminares. As simulações foram conduzidas com o número de Reynolds 1600,

passo de tempo de 0,0025 s, em um domínio cúbico de dimensões $8R \times 8R \times 8R$, onde R é o raio inicial do jato, conforme mostra a Figura 5.4.

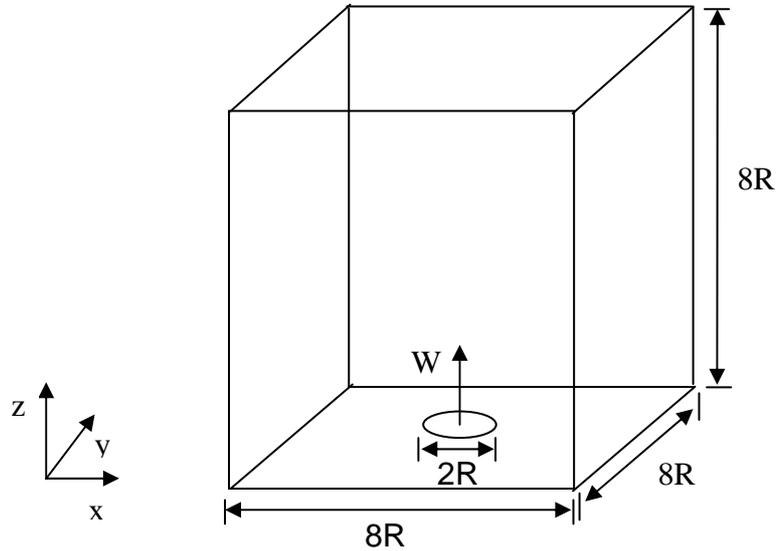


Figura 5.4 - Esquema do domínio de cálculo.

O perfil inicial da componente axial de velocidade é o mesmo em todas as simulações realizadas:

$$w_0(r, \theta, z, 0) = \begin{cases} 1 & (r \leq R - \delta) \\ \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \tanh\left(\frac{r - R}{2\delta}\right) \right] & (R - \delta < r < R + \delta), \\ 0 & (r \geq R + \delta) \end{cases} \quad (5.9)$$

sendo r dado por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, tendo como referência o sistema de coordenadas cartesianas e δ a metade da espessura da camada cisalhante, considerada igual a 2,5/16 m.

A Figura 5.5 mostra esquematicamente o perfil $w_0(x, y, z)$, o raio inicial do jato e a camada cisalhante de espessura 2δ .

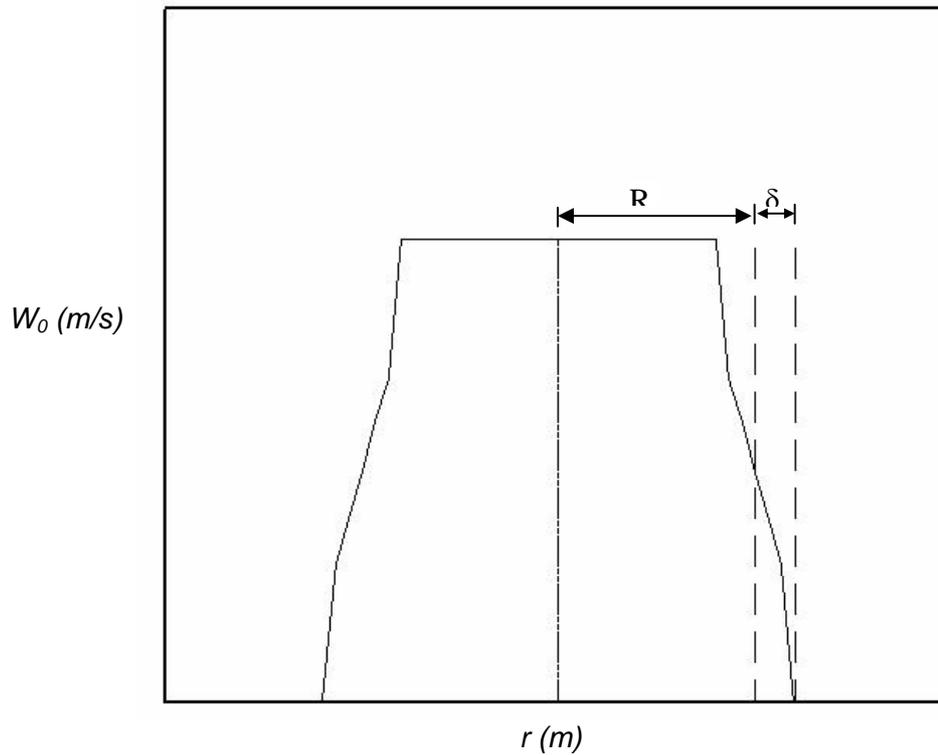


Figura 5.5 - Perfil de velocidade axial inicial $w_0(x, y, z)$, apresentando o raio R do jato e a camada cisalhante de espessura 2δ .

É importante lembrar aqui que o código *SPECTRAL* adota sistema de coordenadas cartesianas e como o jato é circular, torna-se necessária a transformação das coordenadas polares do jato para coordenadas cartesianas. A componente radial do jato gera, portanto, duas componentes cartesianas de velocidade, como apresentado a seguir.

Escrevendo as velocidades u e v em termos de derivadas parciais de r e θ , tem-se:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \quad (5.10)$$

que podem ser escritas como:

$$\begin{cases} u = u_r \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + u_\theta \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ v = u_r \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + v_\theta \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \quad (5.11)$$

Como não é imposta qualquer perturbação na componente azimutal de velocidade, $u_\theta = 0$. Assim, as Equações (5.11) reduzem-se a:

$$\begin{cases} u = u_r \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \\ v = u_r \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \end{cases} \quad (5.12)$$

Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \end{cases} \quad (5.13)$$

Finalmente tem-se a equação de conversão da componente de velocidade radial em componentes de velocidade cartesianas, conforme mostra a equação (5.14):

$$\begin{cases} u = u_r \cos \theta, \\ v = u_r \sin \theta. \end{cases} \quad (5.14)$$

Em algumas simulações estas componentes são perturbadas, em outras não, sendo assim apresentadas na descrição de cada caso estudado.

Na maioria das simulações foram utilizados 120^3 modos de Fourier. No entanto, foram também utilizadas diferentes resoluções (64^3 e 96^3 pontos de colocação) para realização de análises comparativas com relação ao refinamento da mesma e precisão utilizada no código.

As análises qualitativas do escoamento em cada caso estudado foram feitas através de visualizações do módulo de vorticidade e do denominado critério Q (Hunt et al., 1988) em diferentes instantes de tempo. O critério Q é baseado no segundo invariante dos tensores rotação e taxa de deformação:

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega_{ij} \Omega_{ij} - S_{ij} S_{ij}), \quad (5.15)$$

onde Ω_{ij} é a parte anti-simétrica e S_{ij} é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade:

$$\Omega_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.16)$$

$$S_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.17)$$

Além de análises qualitativas, foram também construídos os espectros de energia dos escoamentos em diferentes instantes de tempo, bem como realizado o tratamento estatístico adequado à análise de decaimento do jato livre.

O espectro de energia para diferentes instantes de tempo foi obtido a partir dos campos de velocidade no espaço físico a cada diferente instante. O campo de velocidade no espaço físico foi convertido para o espaço de Fourier via FFT direta (FFTPACK). Em seguida foi calculada a energia através da soma do produto de cada componente da velocidade pelo seu respectivo conjugado, dividida por 2. Assim, pôde-se representar em escalas logarítmicas a energia em função do número de onda k na direção axial.

É importante lembrar que as condições de periodicidade impostas produzem um escoamento que, embora não seja idêntico ao desenvolvimento espacial do jato, assemelha-se a ele. Estruturas tridimensionais, fenômenos como formação de instabilidades de Kelvin-Helmholtz toroidais e emparelhamentos são identificados em evolução temporal e não em uma região particular do espaço. Assim sendo, este tratamento estatístico difere-se do tratamento realizado com escoamentos em desenvolvimento espacial.

O tratamento estatístico, no presente estudo, fundamenta-se nos princípios de auto-similaridade em escoamentos turbulentos (Townsend, 1976; Narasimha, 1990) e no procedimento realizado por Basu e Narasimha (1999), conforme apresentado a seguir.

Para obtenção dos perfis de velocidade axial média foi inicialmente superposta uma malha cilíndrica sobre a malha cartesiana utilizada. Os valores das diferentes variáveis nos pontos da malha cilíndrica foram obtidos via interpolação bilinear simples usando os valores da malha cartesiana. Os perfis radiais de velocidade média foram calculados pela média ao longo das direções azimutal e axial (direção do escoamento). A média na direção axial é consistente

com a simulação temporal (Basu e Narasimha, 1998). Em experimentos, é usual tomar a velocidade da linha central a uma localização qualquer na direção do escoamento como a velocidade característica local, e a ‘meia-largura’ (onde a velocidade média cai para metade do valor na linha central) como a escala de comprimento local. Estas quantidades não podem ser precisamente estimadas próximo ao eixo do jato nas presentes simulações, porque o número de pontos para obtenção da média é pequeno. Como os invariantes no jato temporal são diferentes daqueles no jato espacial, as escalas de velocidade e comprimento são também diferentes. Na simulação temporal sujeita a condições de contorno periódicas, o fluxo de massa no escoamento (integrado sobre o domínio computacional) permanece constante no tempo, mas o fluxo de momento cai. As escalas de velocidade e comprimento calculadas neste caso (usando $\overline{w}(r, t)$ para a média de velocidade) foram:

$$\tilde{w}(t) = \frac{\int \overline{w}^2 r dr}{\int \overline{w} r dr}, \quad (5.18)$$

$$\tilde{b}(t) = \frac{\int \overline{w} r dr}{\left[\int \overline{w}^2 r dr \right]^{1/2}}, \quad (5.19)$$

as quais superam a desvantagem das escalas locais convencionais neste tipo de simulação (Basu e Narasimha, 1999).

Os argumentos conhecidos de auto-similaridade em escoamento turbulentos (Townsend, 1976; Narasimha, 1990) podem ser utilizados para encontrar soluções assintóticas adequadas para simulação temporal. Pelo “princípio de similaridade do número de Reynolds” pode-se desconsiderar a viscosidade como um parâmetro relevante. Dos argumentos dimensionais a única quantidade que envolve as escalas locais e tem a dimensão de tempo é \tilde{b} / \tilde{w} . Então segue que $\tilde{b} = c\tilde{w}t$, onde c é uma constante. Como o fluxo de massa é um invariante devido à periodicidade das condições de contorno, conclui-se que $\tilde{b}^2 \tilde{w}$ é uma constante independente do tempo, denominada M . Assim, têm-se as seguintes leis de similaridade para a simulação temporal,

$$\tilde{b} = (Mc)^{1/3} t^{1/3}, \quad (5.20)$$

$$\tilde{w} = (M / c^2)^{1/3} t^{-2/3}. \quad (5.21)$$

Baseado nos conceitos e procedimentos descritos foram plotadas as seguintes grandezas, envolvendo as medidas integrais de comprimento e escala de velocidade local: \tilde{b}^3 , $\tilde{w}^{-3/2}$, \tilde{b} e $1/\tilde{w}$ em função do tempo para alguns dos casos estudados.

A descrição mais detalhada de cada caso é apresentada a seguir, juntamente com os resultados qualitativos e quantitativos obtidos.

5.2.1 Caso 1: Jato Natural

O denominado jato “natural” caracteriza-se pela imposição de uma perturbação randômica tipo “ruído branco” à componente axial de velocidade w nas três direções do escoamento:

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, z, 0) + \left(\frac{0,5 - a}{100,0} \right), \quad (5.22)$$

sendo a um número aleatoriamente gerado entre 0 e 1.

O perfil da componente axial de velocidade w_0 é o mesmo anteriormente apresentado pela Equação (5.9) e não há perturbação nas componentes radial e azimutal de velocidade.

a) Visualização das estruturas do escoamento

Os resultados da simulação do jato natural são apresentados a seguir. Na Figura 5.6 é apresentada a evolução temporal através de isosuperfícies do critério Q ao nível 0,1, enquanto na Figura 5.7. é apresentada a evolução temporal através do módulo de vorticidade $\|\vec{\omega}\|$ ao nível $1,0 \text{ s}^{-1}$.

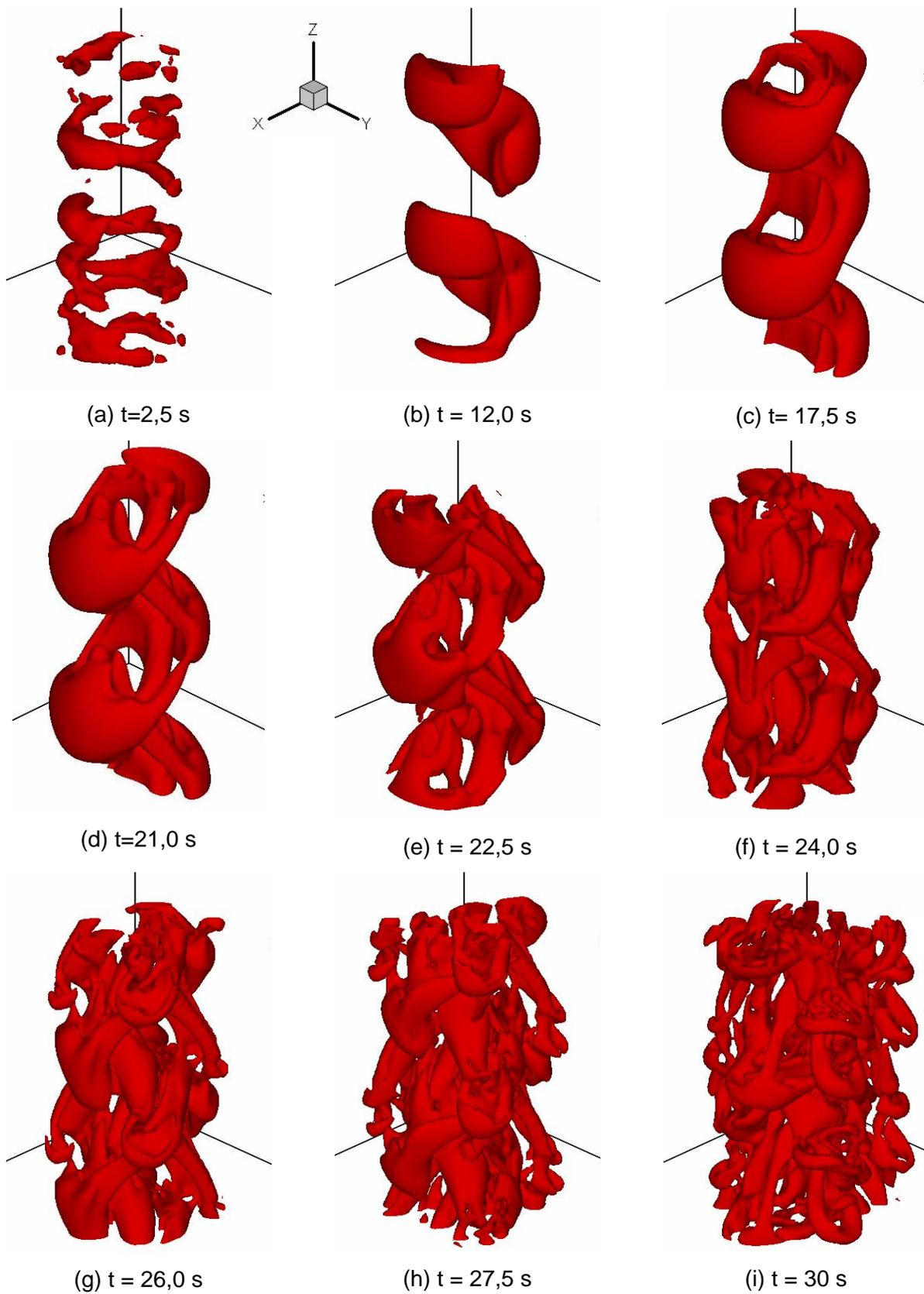


Figura 5.6 - Evolução temporal do campo do critério Q (Isosuperfície Nível $0,01 \text{ s}^{-2}$) – jato natural.