

A transição entre um manipulador do tipo 5 e um manipulador do tipo 6 efetua-se transpondo a superfície  $C_5$ , dada na Eq.(5.1), no espaço dos parâmetros de DH, conforme Fig. 5.9. Esta transição é caracterizada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.18 (para  $d_3 = 1,0$ ;  $d_4 = 1,02$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.]).

Sobre esta transição, percebe-se uma coincidência entre 2 pontos de cúspides. De fato, um ponto cúspide da envoltória interna coincide com outro ponto de cúspide da envoltória externa. Isto resulta na passagem de um manipulador com 8 pontos de cúspides (do tipo 5) para um manipulador com 4 pontos de cúspides (do tipo 6).

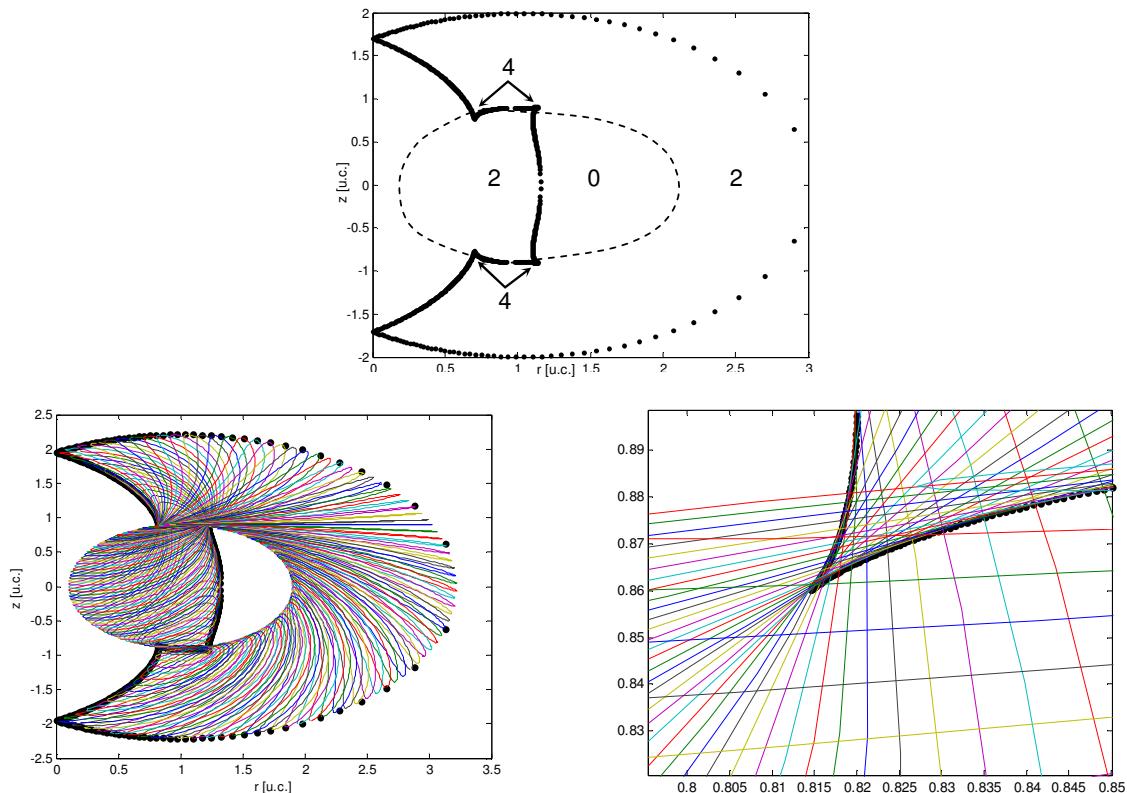


Figura 5.18 - Transição entre os domínios 5 e 6

### 5.2.7. Manipulador Ortogonal do Tipo 7, para $r_3 \neq 0$

O sétimo tipo de manipulador é caracterizado pela Fig. 5.19, sendo quaternário e cuspidal (sendo obtida para  $d_3 = 0,493$ ;  $d_4 = 0,53$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.]). Em seu espaço de trabalho, possui um vazio, 2 regiões com 2 soluções e 3 regiões com 4 soluções no MGI. Dois dos 6 pontos de cúspides encontram-se sobre a meia lua, enquanto que os 4 restantes encontram-se sobre a envoltória interna.

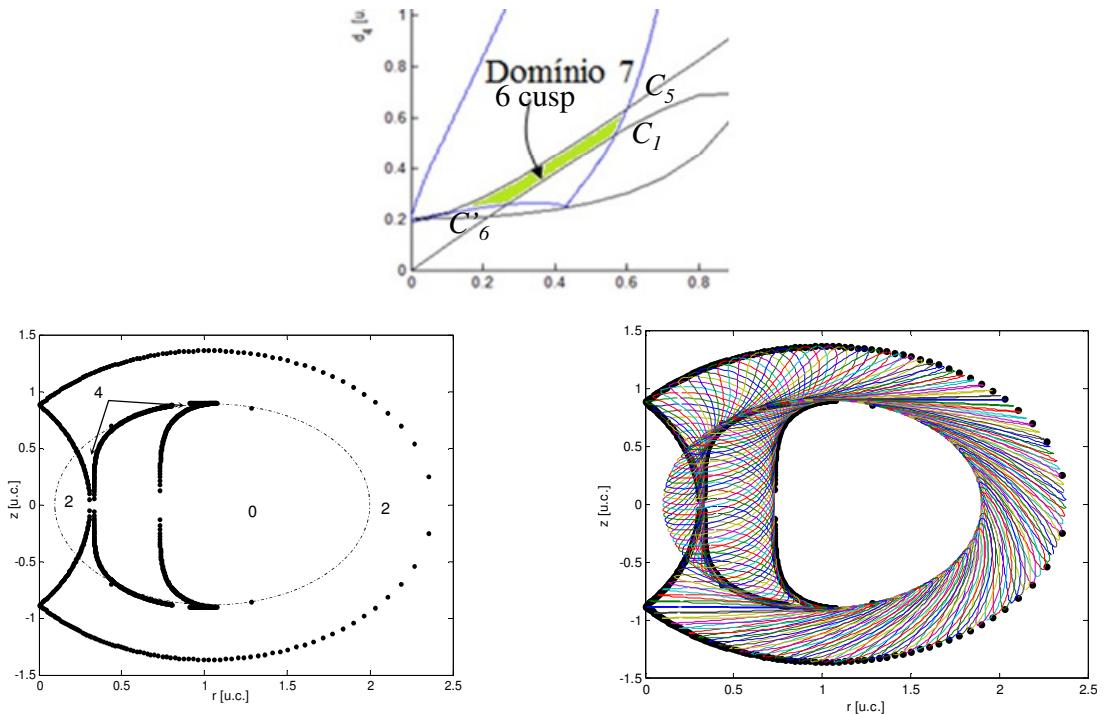


Figura 5.19 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 7

A transição entre os manipuladores do tipo 2 e do tipo 7 faz-se transpondo a parte  $C_6'$  que corresponde à criação de um par de pontos quádruplos em  $z = 0$  sobre a meia lua. Assim, o manipulador que tinha 4 pontos de cúspides passa a ter 6.

Outra transição ocorre ao transpor a superfície  $C_1$ , para passar de um manipulador do tipo 4 (com 2 pontos de cúspides) à um do tipo 7 (6 pontos de cúspides). Tem-se a criação de dois pares de pontos de cúspides em  $z \neq 0$  sobre a envoltória interna a partir de 2 pontos quádruplos simétricos com relação a  $z = 0$ .

Além disso, um manipulador pode passar do tipo 7 à um do tipo 5 ao transpor  $C_6''$ . Neste caso, tem-se a criação de um par de pontos de cúspides em  $z = 0$  exatamente como no caso da parte  $C_6'$ .

#### 5.2.8. Manipulador Ortogonal do Tipo 8, para $r_3 \neq 0$

A Figura 5.20 representa um manipulador do tipo 8, sendo quaternário e cuspidal. Os dois pontos de cúspides são formados sobre a meia lua. Este manipulador tem um vazio, 2 regiões com 2 soluções e uma região com 4 soluções no MGI, a ilustração foi obtida considerando:  $d_3 = 0,5$ ;  $d_4 = 1,0$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.].

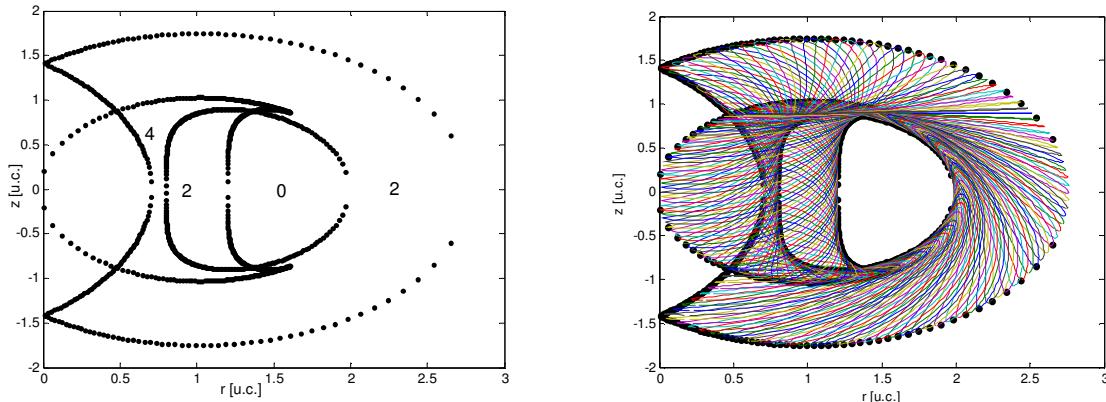


Figura 5.20 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 8

Observando a seção do espaço dos parâmetros representados na Fig. 5.9, a partir de um manipulador do tipo 8, três transições são possíveis. A primeira permite ter um manipulador do tipo 7, isso quer dizer transpor a superfície  $C_5$ . No espaço de trabalho, os 2 pontos de cúspides contidos na meia lua do manipulador do tipo 7 coincide com 2 dos 4 pontos de cúspides contidos na envoltória interna em  $z \neq 0$ . A meia lua recupera, em seguida, os 2 pontos de cúspides restantes.

A segunda transição permite encontrar um manipulador do tipo 6 ao transpor a parte  $C_6''$ . Consequentemente, tem-se a criação de um par de pontos de cúspides em  $z = 0$  sobre a envoltória externa. A terceira transição entre um manipulador do tipo 8 e 9 será vista na próxima seção.

### 5.2.9. Manipulador Ortogonal do Tipo 9, para $r_3 \neq 0$

O manipulador do tipo 9 corresponde à Fig. 5.21 (com parâmetros  $d_3 = 0,3$ ;  $d_4 = 2,0$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.]), sendo quaternário e não cuspidal. Possui uma região com 4 soluções, em cujo interior encontra-se 2 regiões com 2 soluções delimitadas pelas superfícies de singularidades  $D_1$  e  $D_2$ . A região resultante da sobreposição de  $D_1$  e  $D_2$  é um vazio.

A transição entre um manipulador do tipo 9 e outro do tipo 8 efetua-se ao transpor a parte  $C_6'''$ . Consequentemente, tem-se a criação de 2 pontos de cúspides em  $z = 0$  sobre a envoltória interna e a superfície de singularidade  $D_1$ .

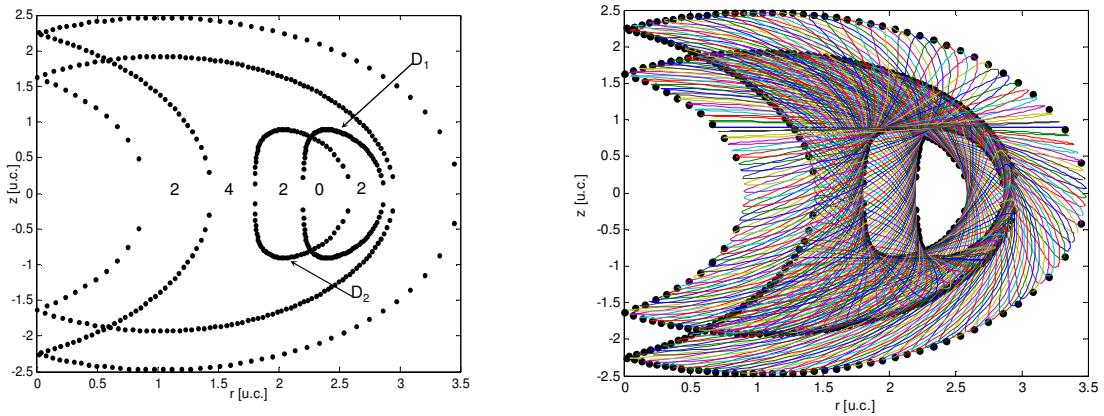


Figura 5.21 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 9

Em síntese, os manipuladores pertencendo aos domínios 1 e 9 são não cuspidais, sendo binários e quaternários, respectivamente. Todos os outros manipuladores, ou seja, aqueles que pertencem aos domínios 2 a 8 são quaternários e cuspidais. A Figura 5.7 apresenta uma seção no espaço dos parâmetros, com  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.], subdividida em 9 domínios.

O espaço dos parâmetros ( $d_3, d_4, r_2, r_3$ ) da família de manipuladores estudada foi dividido em 9 domínios onde o número de pontos de cúspides era constante. As equações das superfícies separando estes 9 domínios são determinadas analisando as diferentes transições entre dois manipuladores pertencentes a dois domínios vizinhos. As superfícies  $C_1$ ,  $C_{1b}$  e  $C_5$  são definidas respectivamente pelas Eqs.(3.41), (3.39) e (5.1), enquanto a superfície  $C_6$  é apresentada no Anexo II.

Para a família de manipuladores com  $r_3 \neq 0$ , é impossível estabelecer uma condição necessária e suficiente de forma explícita em função dos parâmetros de DH para que um manipulador seja cuspidal, tal como feito no estudo anterior. Isto se deve ao fato de que a equação da superfície  $C_6$  não pode ser fatorada. De fato, a transição entre um manipulador cuspidal e um manipulador não cuspidal situa-se sobre  $C_{1b}$ , sobre a parte  $C_6'$  e a parte  $C_6''$ . No entanto, se a expressão de  $C_{1b}$  é conhecida, as outras partes ( $C_6'$  e  $C_6''$ ) não o são.

### 5.3. Classificação da topologia segundo o Número de Nós, para $r_3 \neq 0$

Nesta seção, são determinadas todas as topologias do espaço de trabalho que podem ser encontradas na família de manipuladores estudada. Para isto, cada domínio com número de pontos de cúspides constante é dividido em vários subdomínios, considerando o número de

nós. São apresentadas as equações das duas superfícies responsáveis pela separação das topologias do espaço de trabalho no interior de um mesmo domínio.

Em um mesmo domínio, escolhe-se um manipulador pertencente a uma transição entre duas topologias do espaço de trabalho, observa-se que o aparecimento ou o desaparecimento de nós se faz sobre o eixo  $z = 0$ . Procurando a relação que permite descrever a existência de tal ponto sobre o eixo  $z = 0$ , Baili (2004) obteve o produto dos fatores dado na Eq.(5.2), cujas expressões são dadas pelas Eqs.(5.3) e (5.4):

$$E_{1g} \cdot E_{3g} \cdot C_6 = 0, \quad (5.2)$$

onde  $A$  e  $B$  são dados na Eq.(3.40),

$$E_{1g} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 - AB \left( \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right) \right)} \quad (5.3)$$

$$E_{3g} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left( \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right) \right)} \quad (5.4)$$

As superfícies  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$  são definidas pelas Eqs.(5.3) e (5.4), respectivamente. Elas dividem o espaço dos parâmetros de DH e os 9 domínios em subdomínios onde cada um corresponde a uma única topologia do espaço de trabalho. Quando o parâmetro  $r_3$  é nulo, as equações das superfícies  $E_1$  e  $E_2$  são bem determinadas. No caso em que  $r_3 \neq 0$ ,  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$  são as generalizações de  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Neste caso, não existe superfície equivalente a  $E_2$ , visto que esta superfície é proveniente do aparecimento de dois ramos de singularidades suplementares associadas ao fato que o efetuador pode encontrar o eixo 2, e isso não é mais possível com  $r_3 \neq 0$ .

Dois casos são apresentados, a saber:  $r_2 < r_3$  e  $r_2 > r_3$ . Em ambos os casos, a superfície  $E_{1g}$  está abaixo de  $E_{3g}$ , como pode ser observado na Fig. 5.22. Estudando estes dois casos, chega-se a uma classificação de todas as topologias do espaço de trabalho que podem ser encontradas na família de manipuladores considerada.

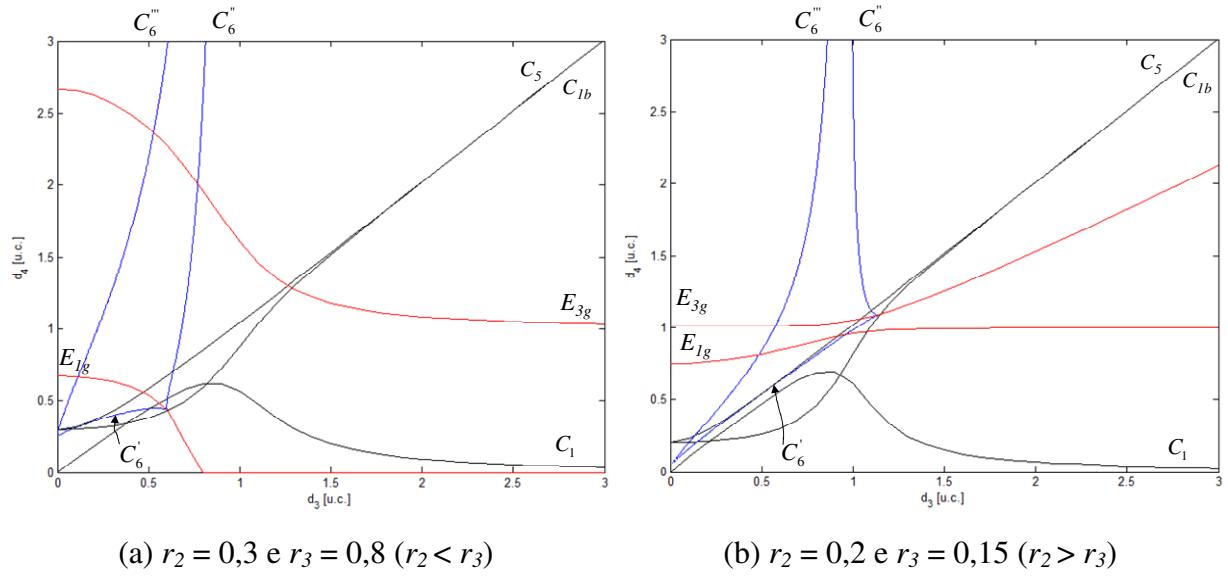


Figura 5.22 - Os dois casos possíveis para  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$

Quando  $r_2 = r_3$ , as duas superfícies  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$  coincidem e tem-se neste caso,  $d_4 = 1$ . Isto não acrescenta outras topologias ao espaço de trabalho.

A superfície  $C_6$  representa a equação que define o aparecimento e o desaparecimento de um par de pontos de cúspides em  $z = 0$ . O fato de encontrar esta equação é totalmente normal, já que o aparecimento de um par de pontos de cúspides em  $z = 0$  resulta no aparecimento de um nó. Em compensação, não foram encontradas as equações das superfícies  $C_1$ ,  $C_{1b}$  e  $C_5$ , já que o aparecimento das raízes triplas não está em  $z = 0$ .

### 5.3.1. Topologia do espaço de trabalho no caso $r_2 < r_3$

Nesta seção, são estudadas todas as topologias do espaço de trabalho que podem ser encontradas para o caso  $r_2 < r_3$ . Será mostrado que, neste caso, os manipuladores podem ter 0, 2 ou 4 nós e que existem 18 topologias do espaço de trabalho diferentes.

A Figura 5.23 representa as 6 superfícies de separação ( $C_1$ ,  $C_{1b}$ ,  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$ ) e as 18 topologias do espaço de trabalho em uma seção ( $d_3$ ,  $d_4$ ) para  $r_2 = 0,3$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.].

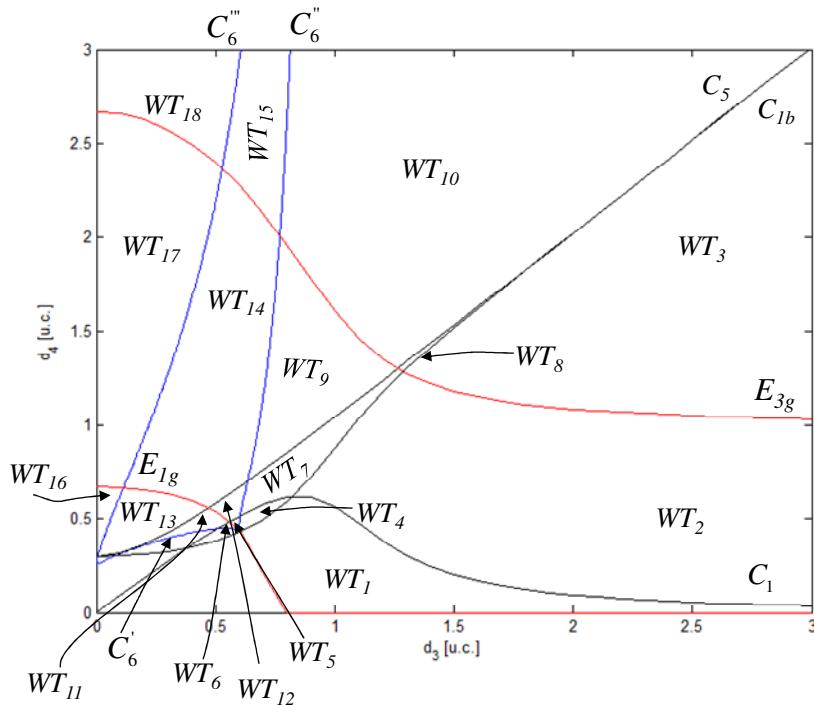


Figura 5.23 - As seis superfícies de separação e os dezoito tipos de topologia em uma seção  $(d_3, d_4)$  para um manipulador ortogonal, para  $r_2 < r_3$

a) *Manipuladores pertencentes ao Domínio 1, para  $r_3 \neq 0$*

Todos os manipuladores pertencentes ao domínio 1 são binários, portanto, não cuspidais, consequentemente, a superfície  $E_{1g}$  não pode dividir este domínio. Além disso, os manipuladores têm um vazio em seu espaço de trabalho. Esta topologia é similar à topologia do espaço de trabalho  $WT_1$  do estudo anterior. A Fig. 5.10 representa o espaço de trabalho de um manipulador cuja topologia do espaço de trabalho é  $WT_1(0, 0)$ .

b) *Manipuladores pertencentes ao Domínio 2, para  $r_3 \neq 0$*

A superfície  $E_{3g}$  divide o domínio 2 em dois subdomínios, existem portanto, duas topologias do espaço de trabalho. Os manipuladores correspondendo às Figs. 5.11, 5.12 e 5.24 pertencem a este domínio. O manipulador da Fig. 5.11 possui 4 pontos de cúspides, 2 nós e um vazio; o manipulador da Fig. 5.12 possui 4 pontos de cúspides, uma região vazia e nenhum nó, enquanto que o manipulador da Fig. 5.24 possui 4 pontos de cúspides e não contém nem vazio e nem nó. O primeiro manipulador representa a topologia do espaço de trabalho  $WT_2(4, 2)$ , enquanto que o segundo e o terceiro representam a topologia  $WT_3(4, 0)$ . Para obter a Fig. 5.24, considerou-se os parâmetros:  $d_3 = 1,7$ ;  $d_4 = 1,4$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.].

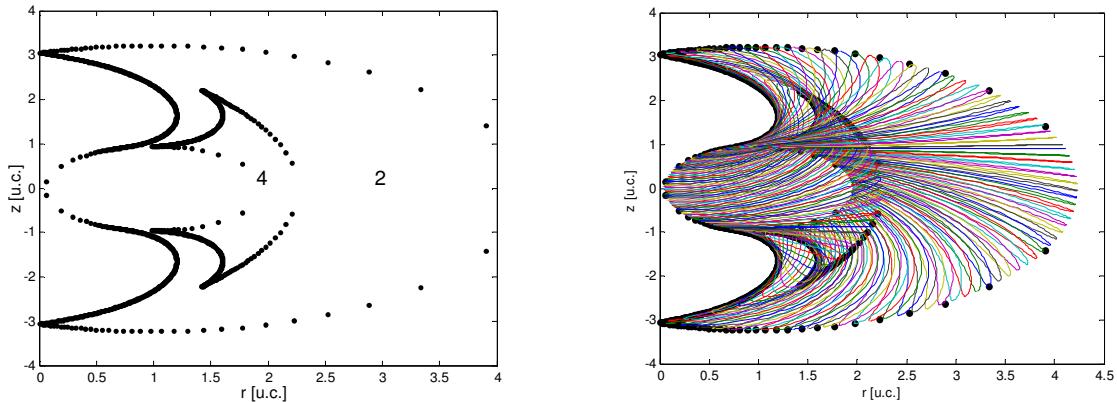


Figura 5.24 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_3$

A transição entre estas duas topologias do espaço de trabalho  $WT_2$  e  $WT_3$  é tal que os dois segmentos laterais da envoltória interior ao espaço de trabalho são tangentes. A passagem de  $WT_3$  a  $WT_2$  corresponde ao aparecimento de um par de nós sobre o eixo  $z = 0$ . Esta transição é possível transpondo-se a superfície de separação  $E_{3g}$ .

*c) Manipuladores pertencentes ao Domínio 3, para  $r_3 \neq 0$*

Observando a Fig. 5.9 e a Fig. 5.23, verifica-se que nenhuma das duas superfícies  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$  passa pelo domínio 3. Consequentemente, todos os manipuladores deste domínio têm a mesma topologia  $WT_4(4, 2)$  que é caracterizada por 4 pontos de cúspides e 2 nós sobre a envoltória externa. A superfície interna delimita um vazio. Tal topologia é representada pelo manipulador da Fig. 5.13.

*d) Manipuladores pertencentes ao Domínio 4, para  $r_3 \neq 0$*

A superfície  $E_{1g}$  divide o domínio 4 em dois subdomínios, consequentemente, duas topologias do espaço de trabalho são possíveis. O manipulador correspondendo à Fig. 5.14 tem 2 pontos de cúspides sobre a envoltória sob forma de meia lua. Além disso, tem um vazio e nenhum nó, este manipulador define a topologia  $WT_5(2, 0)$ . Outra categoria de manipuladores pertence ao domínio 4, trata-se de um manipulador que possui um vazio, 2 pontos de cúspides e 2 nós (a meia lua intercepta a envoltória externa fazendo aparecer os 2 nós). Esta topologia denotada  $WT_6(2, 2)$  é caracterizada pelo manipulador correspondente à Fig. 5.25 (para  $d_3 = 0,44$ ;  $d_4 = 0,41$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.]). A transição entre estas duas topologias é realizada transpondo a superfície de separação  $E_{1g}$ . Esta transição é definida para um manipulador cuja meia lua é tangente à envoltória externa.

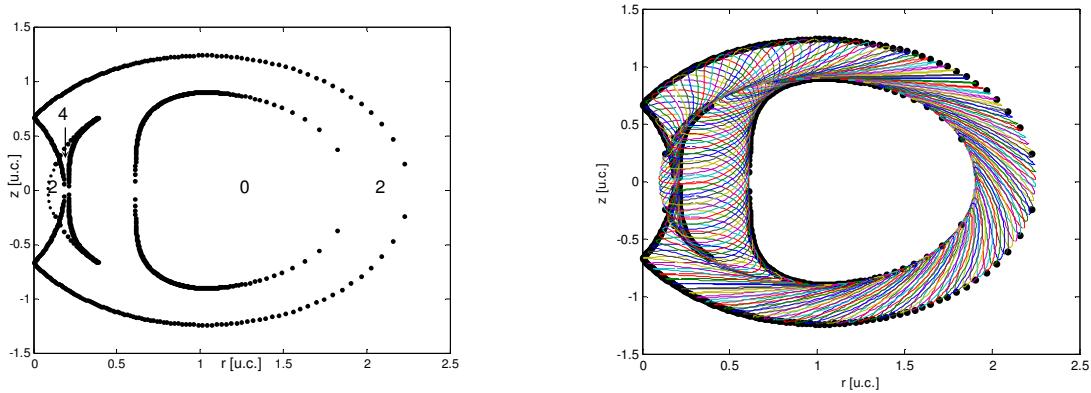


Figura 5.25 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_6$

e) *Manipuladores pertencentes ao Domínio 5, para  $r_3 \neq 0$*

A superfície de separação  $E_{3g}$  divide o domínio 5 em dois subdomínios onde cada um representa uma topologia do espaço de trabalho, conforme a Fig. 5.23. A primeira topologia, apresentada na Fig. 5.16, denominada  $WT_7(8, 4)$  é formada por 8 pontos de cúspides, 4 nós e um vazio. Transpondo a superfície  $E_{3g}$ , encontra-se a segunda topologia denominada  $WT_8(8, 2)$ , que possui 8 pontos de cúspides e 2 nós. A envoltória interna contém 4 pontos de cúspides enquanto que envoltória externa contém os 4 pontos de cúspides restantes e 2 nós. Durante a transição entre  $WT_7$  e  $WT_8$ , os 2 nós situados sobre a envoltória interna desaparecem com a cavidade toroidal. Um manipulador, com esta topologia do espaço de trabalho, é apresentado na Fig. 5.26, onde foram adotados:  $d_3 = 1,32$ ;  $d_4 = 1,33$ ;  $r_2 = 0,3$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.].

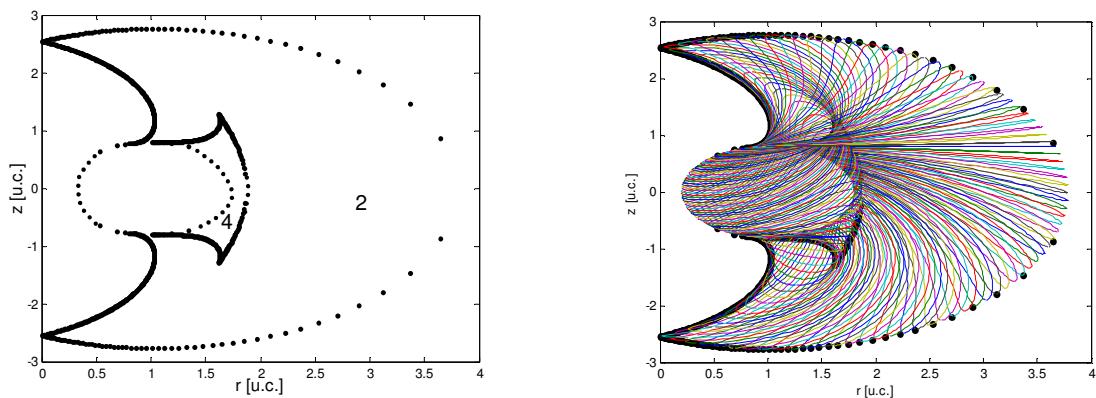


Figura 5.26 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_8$

*f) Manipuladores pertencentes ao Domínio 6, para  $r_3 \neq 0$*

De forma similar, a superfície de separação  $E_{3g}$  divide o domínio 6 em dois subdomínios, onde cada um representa uma topologia do espaço de trabalho. A topologia  $WT_9(4, 4)$  é representada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.27, ilustrada para  $d_3 = 0,9$ ;  $d_4 = 1,4$ ;  $r_2 = 0,3$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.]. É um manipulador que possui 2 pontos de cúspides sobre a envoltória interna, 2 pontos de cúspides sobre a envoltória externa, 4 nós devido à interseção destas duas envoltórias e um vazio. A outra categoria de manipulador pertencendo ao domínio 6 difere por seu número de nós que é de 2 e pela ausência de vazio. Esta categoria é denotada  $WT_{10}(4, 2)$ , apresentado na Fig. 5.17. A transição é definida por uma tangente vertical entre as envoltórias interna e externa.

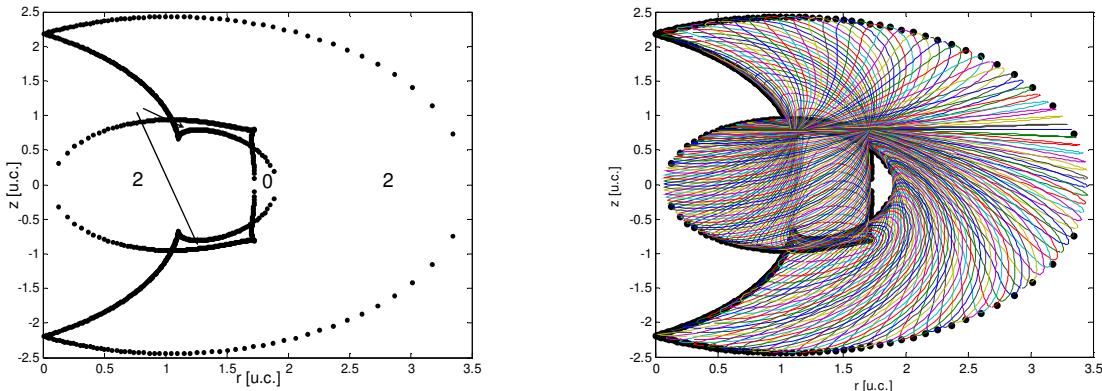


Figura 5.27 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_9$

*g) Manipuladores pertencentes ao Domínio 7, para  $r_3 \neq 0$*

O domínio 7 é dividido em duas topologias do espaço de trabalho pela superfície  $E_{1g}$ . Cada topologia tem 6 pontos de cúspides. A primeira é denotada  $WT_{11}(6, 2)$ , sendo caracterizada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.28, onde se considerou:  $d_3 = 0,2$ ;  $d_4 = 0,26$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,9$  [u.c.]. Este manipulador contém um vazio e 2 nós. A outra categoria é denotada  $WT_{12}(6, 4)$ , que difere de  $WT_{11}$  pelo fato de que a meia lua corta a envoltória externa e acrescenta 2 nós (ver Fig. 5.19). A transição entre essas duas topologias é caracterizada por um manipulador cuja meia lua é tangente à envoltória externa. Os parâmetros de DH de tal manipulador devem verificar a equação da superfície  $E_{1g}$ .

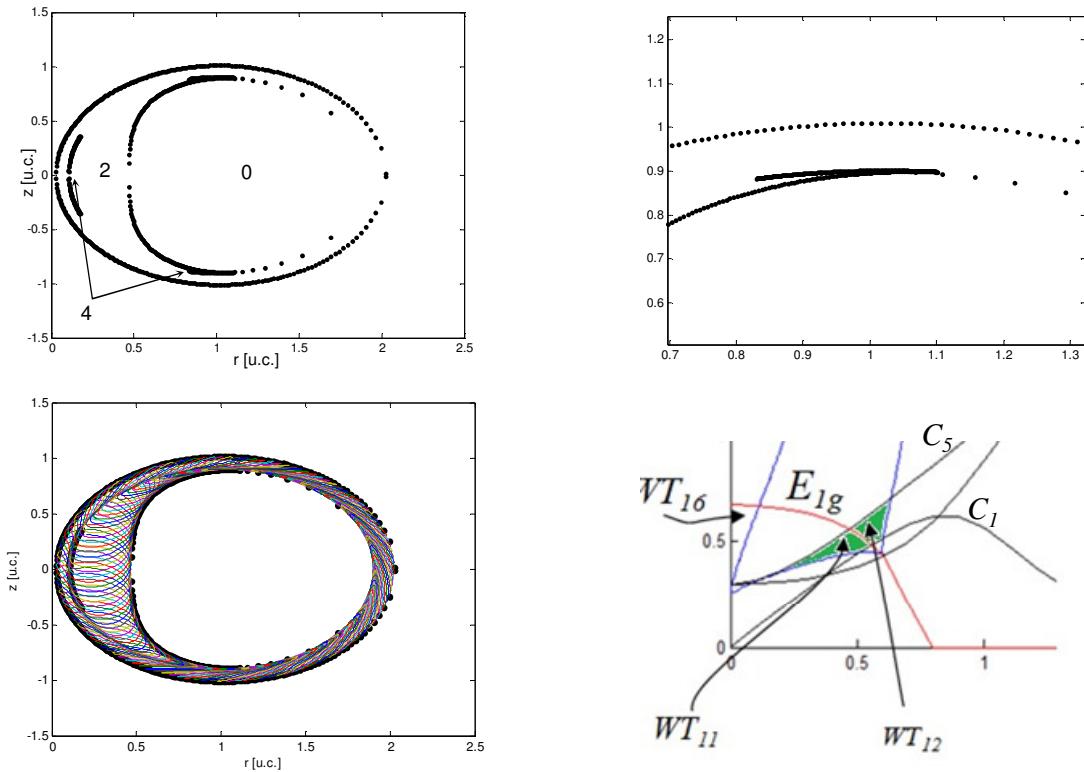


Figura 5.28 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_{11}$

*h) Manipuladores pertencentes ao Domínio 8, para  $r_3 \neq 0$*

Como pode ser observado na Fig. 5.23, este domínio é atravessado pelas superfícies de separação  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$ , ao mesmo tempo. Como estas duas superfícies não se cruzam, 3 topologias do espaço de trabalho são possíveis. A primeira é denotada  $WT_{13}(2, 2)$ , sendo representada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.29, obtida para  $d_3 = 0,4$ ;  $d_4 = 0,6$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,3$  [u.c.]. Um manipulador nesta topologia, possui um vazio, 2 pontos de cúspides, 2 nós resultante da interseção entre a envoltória interna e a meia lua.

A Figura 5.23 mostra que transpondo a superfície de separação  $E_{1g}$ , encontra-se a topologia do espaço de trabalho  $WT_{14}(2, 4)$  que é representada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.20. Esta topologia é caracterizada por um vazio, 2 pontos de cúspides, 2 nós devido à interseção entre a envoltória interna e a meia lua e 2 nós suplementares devido à interseção entre a envoltória externa e a meia lua. Um manipulador devido à transição entre  $WT_{13}$  e  $WT_{14}$  é tal que seus parâmetros de DH verificam a equação da superfície  $E_{1g}$ . Em seu espaço de trabalho, a meia lua é tangente à envoltória externa.

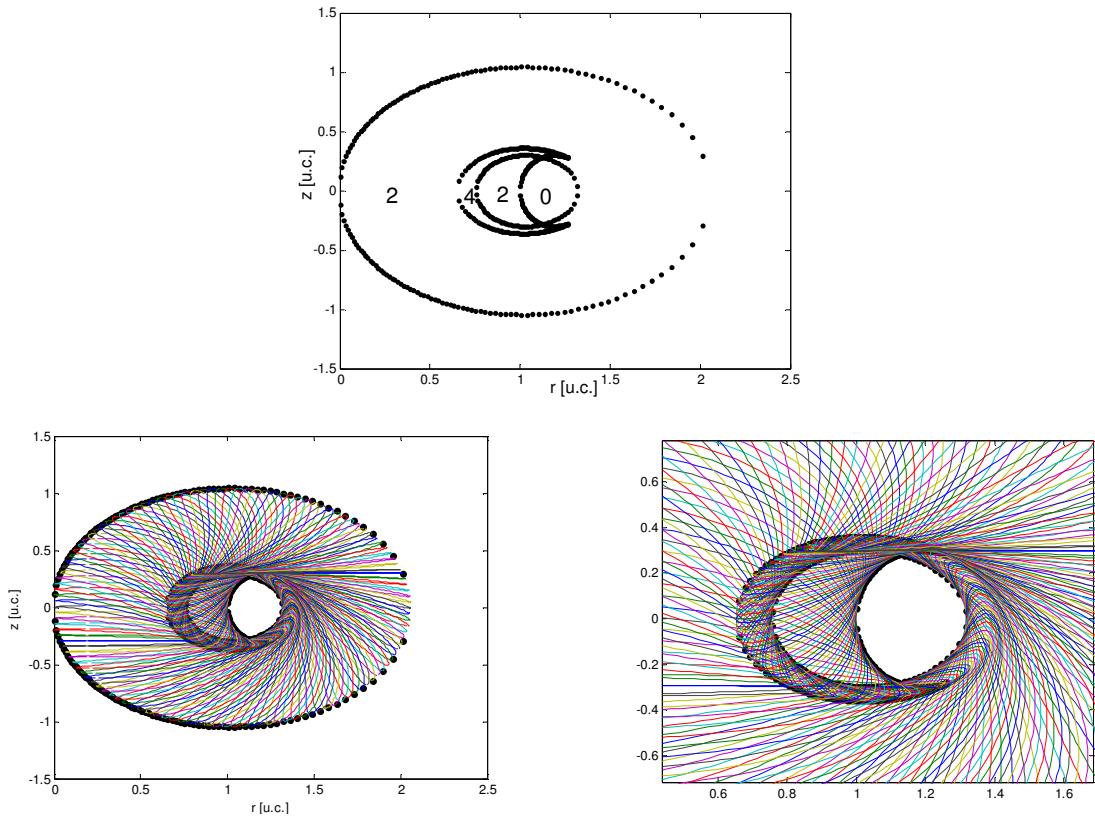


Figura 5.29 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_{13}$

O manipulador ilustrado pela Fig. 5.30, para  $d_3 = 0,9$ ;  $d_4 = 1,2$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,3$  [u.c.], representa a terceira topologia, denominada  $WT_{15}(2, 2)$ , do domínio 8. Tal topologia é caracterizada por 2 pontos de cúspides, 2 nós devido à interseção entre a meia lua e a envoltória externa e nenhum vazio. Observando a Fig. 5.23, percebe-se que a transição entre  $WT_{14}$  e  $WT_{15}$  é descrita por um manipulador cujos parâmetros de DH verificam a equação da superfície  $E_{3g}$ . Em seu espaço de trabalho, a envoltória interna é totalmente contida na meia lua, e tangente à mesma.

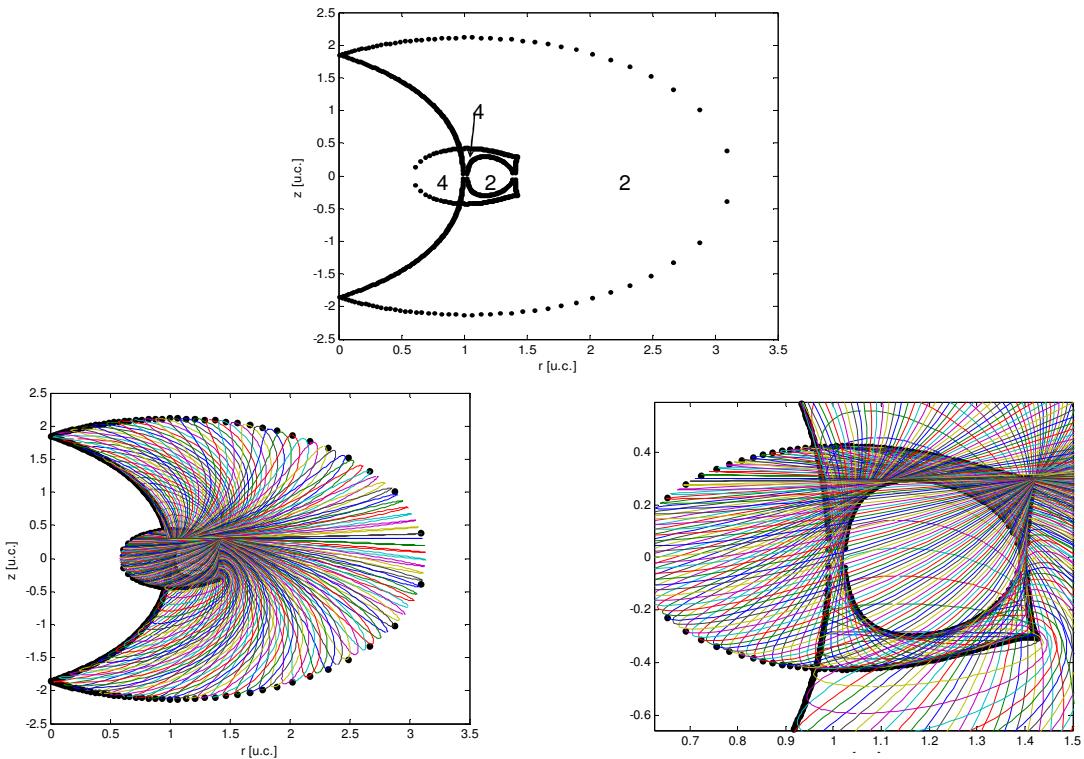


Figura 5.30 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_{15}$

i) *Manipuladores pertencentes ao Domínio 9, para  $r_3 \neq 0$*

O último domínio estudado contém somente manipuladores quaternários e não cuspídal. Este domínio também é atravessado pelas duas superfícies de separação  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$ , ao mesmo tempo, que não se interceptam, consequentemente, tem-se três topologias possíveis.

A Figura 5.31, obtida considerando  $d_3 = 0,05$ ;  $d_4 = 0,55$ ;  $r_2 = 0,3$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.], representa um manipulador que possui 2 nós e um vazio, correspondente à topologia do espaço de trabalho  $WT_{16}(0, 2)$ . Os dois nós são devidos à interseção entre as duas superfícies de singularidade  $D_1$  e  $D_2$ . A região de sobreposição entre as duas regiões delimitadas por estas duas superfícies de singularidade conduz a um vazio.

A segunda topologia, denominada  $WT_{17}(0, 4)$  é representada pelo manipulador mostrado na Fig. 5.32 (para  $d_3 = 0,2$ ;  $d_4 = 1,5$ ;  $r_2 = 0,3$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.]). Este manipulador é quaternário e não cuspídal. Por outro lado, tem um vazio e 4 nós: os dois primeiros são devido à interseção entre a envoltória  $D_1$  e a superfície  $D_2$ , enquanto que os dois últimos são devido à interseção entre a envoltória interna e externa. A transição entre as topologias do espaço de trabalho  $WT_{16}$  e  $WT_{17}$  é definida por um manipulador cujas envoltórias interna e externa são tangentes. Os parâmetros de DH de tal manipulador devem verificar a equação da superfície  $E_{1g}$ .

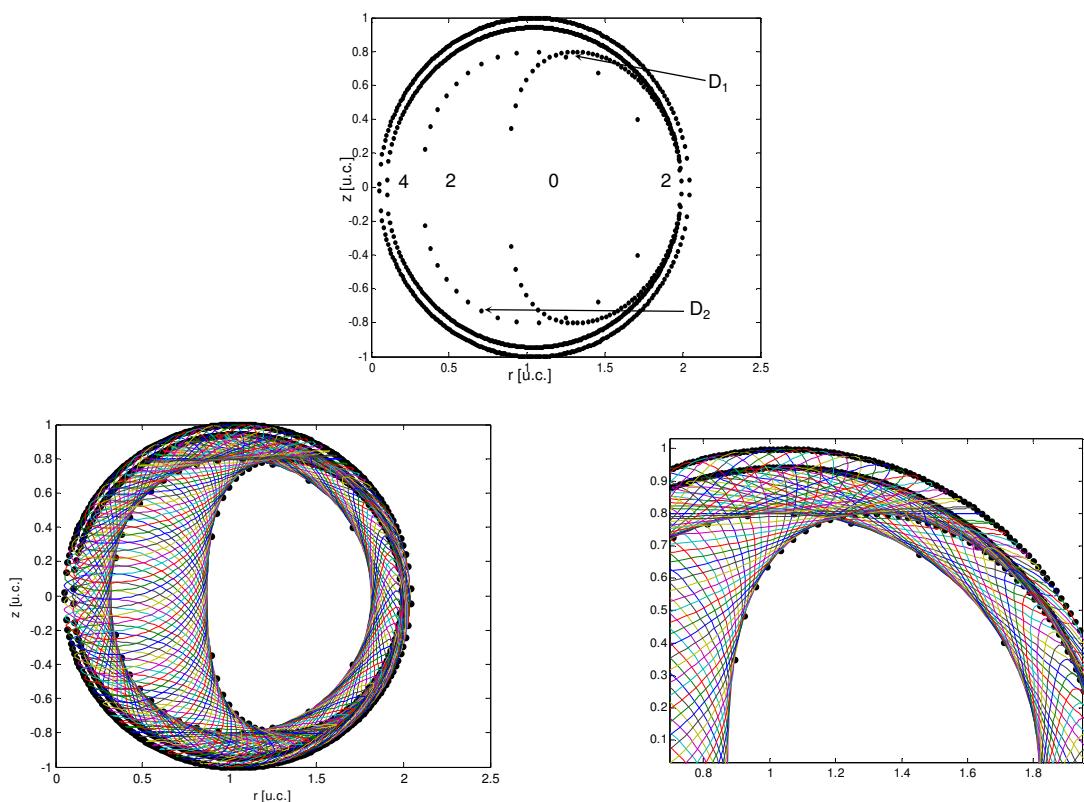


Figura 5.31 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_{16}$

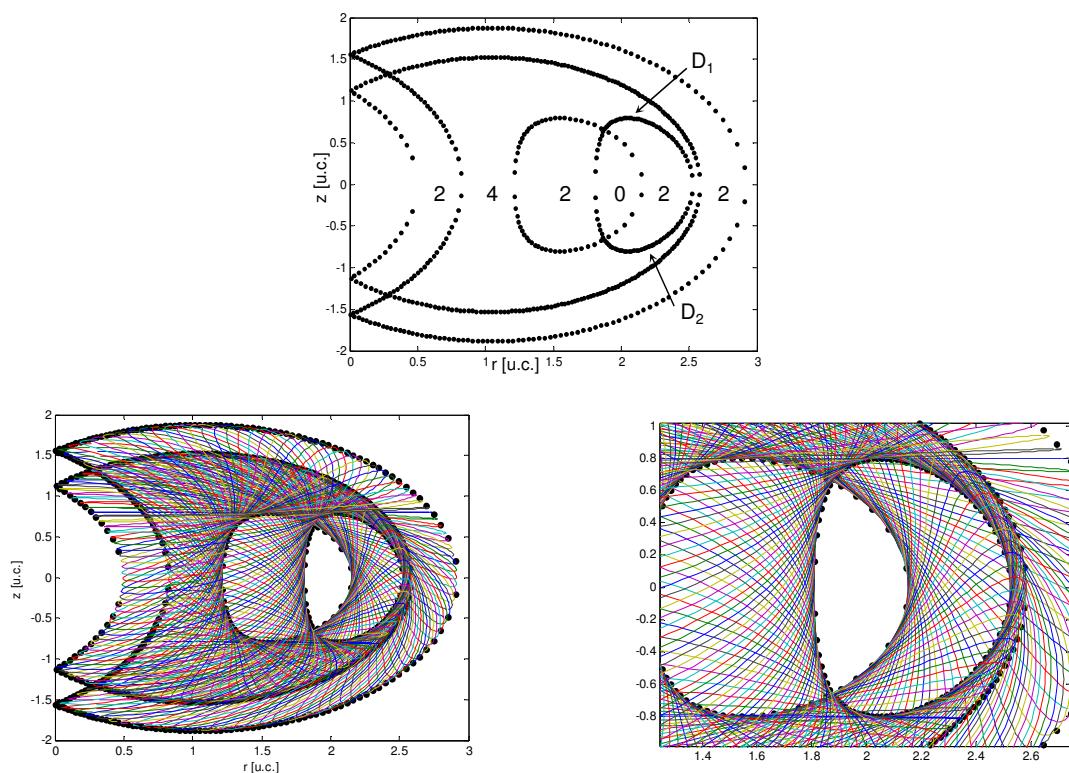


Figura 5.32 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_{17}$

Uma terceira categoria do espaço de trabalho denotada  $WT_{18}(0, 2)$  é representada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.33, onde se adotou  $d_3 = 0,2$ ;  $d_4 = 2$ ;  $r_2 = 0,5$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.]. Trata-se de um manipulador com 2 nós devido à interseção das envoltórias interna e externa. Os nós devido à interseção entre as superfícies  $D_1$  e  $D_2$  desaparecem com o vazio.

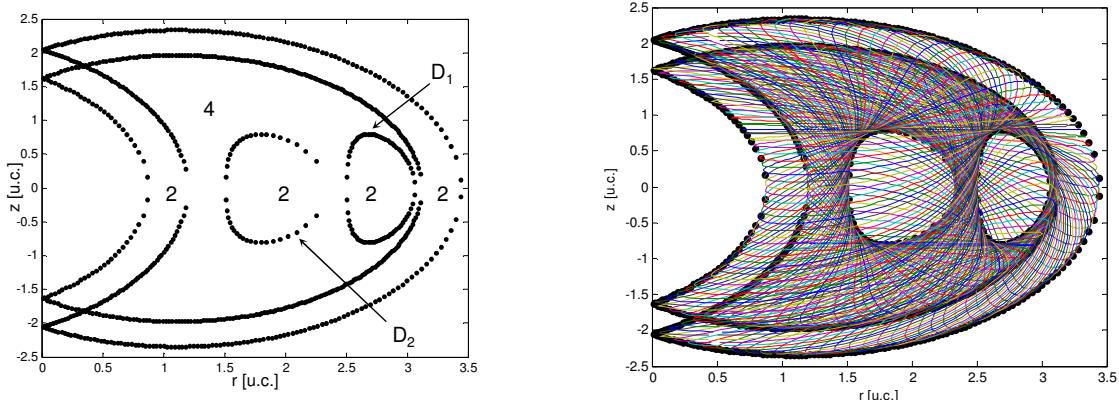


Figura 5.33 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_{18}$

A transição entre as topologias do espaço de trabalho  $WT_{17}$  e  $WT_{18}$  é definida por um manipulador cujas superfícies  $D_1$  e  $D_2$  são tangentes. Sobre o plano do espaço dos parâmetros de DH, esta transição corresponde a uma transposição da superfície de separação  $E_{3g}$  (ver Fig. 5.23).

Resumindo, no caso  $r_2 < r_3$ , os 9 domínios iniciais podem ser divididos em 18 topologias do espaço de trabalho diferentes.

### 5.3.2. Topologia do espaço de trabalho no caso $r_2 > r_3$

Nesta seção, são estudadas as topologias do espaço de trabalho suplementares que não são encontradas no caso anterior. É mostrado que os manipuladores representando estas novas topologias do espaço de trabalho podem ter 0, 2 ou 4 nós. Todavia, estas topologias suplementares não aparecem em todos os domínios com número de pontos de cúspides constantes.

Em uma seção  $(d_3, d_4)$  para  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,15$  [u.c.], a Fig. 5.34 mostra as 6 superfícies de separação ( $C_1$ ,  $C_{1b}$ ,  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$ ), as 18 topologias do espaço de trabalho já obtidas e as 4 topologias suplementares encontradas no caso  $r_2 > r_3$ . Observe que as topologias suplementares estão escritas em negrito e sublinhadas.

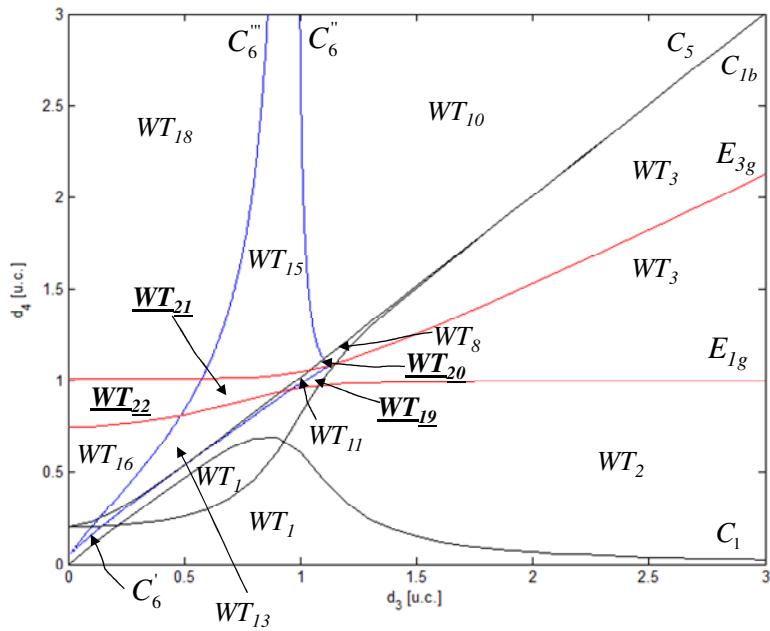


Figura 5.34 - As seis superfícies de separação e os vinte e dois tipos de topologia em uma seção  $(d_3, d_4)$  para um manipulador ortogonal, para  $r_2 > r_3$

No caso onde  $r_2 > r_3$ , a superfície  $E_{3g}$  não divide o domínio 2. De fato, a partir da Fig. 5.22(b), escolhendo dois manipuladores que pertencem ao domínio 2, situados de um lado e de outro da superfície  $E_{3g}$ , constata-se que o número de nós permanece constante. No entanto, a superfície  $E_{1g}$  divide o domínio 2 nas topologias  $WT_2(4, 2)$  e  $WT_3(4, 0)$ , como visto no caso anterior.

Observa-se ainda que, no caso onde  $r_2 > r_3$ , o domínio 7 acrescenta duas topologias do espaço de trabalho suplementares:  $WT_{19}$  e  $WT_{20}$ .

A Figura 5.35, obtida com parâmetros  $d_3 = 1$ ;  $d_4 = 1$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,15$  [u.c.], corresponde a um manipulador de topologia  $WT_{19}(6, 0)$ . Este manipulador contém 6 pontos de cúspides (dos quais 4 sobre a envoltória interna e 2 sobre a meia lua) e nenhum nó. Em seu espaço de trabalho, este manipulador contém uma região com 4 soluções no MGI.

A segunda categoria de topologia do espaço de trabalho pertencendo ao domínio 7 é a  $WT_{20}(6, 2)$ . Um manipulador pertencente a esta topologia é caracterizado pela Fig. 5.36 (para  $d_3 = 1,1$ ;  $d_4 = 1,1$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,15$  [u.c.]). Este manipulador tem 6 pontos de cúspides e 2 nós em seu espaço de trabalho. Os dois nós são dados pela interseção da envoltória externa com a meia lua. Este manipulador contém 2 regiões com 4 soluções e 2 regiões com 2 soluções no MGI.

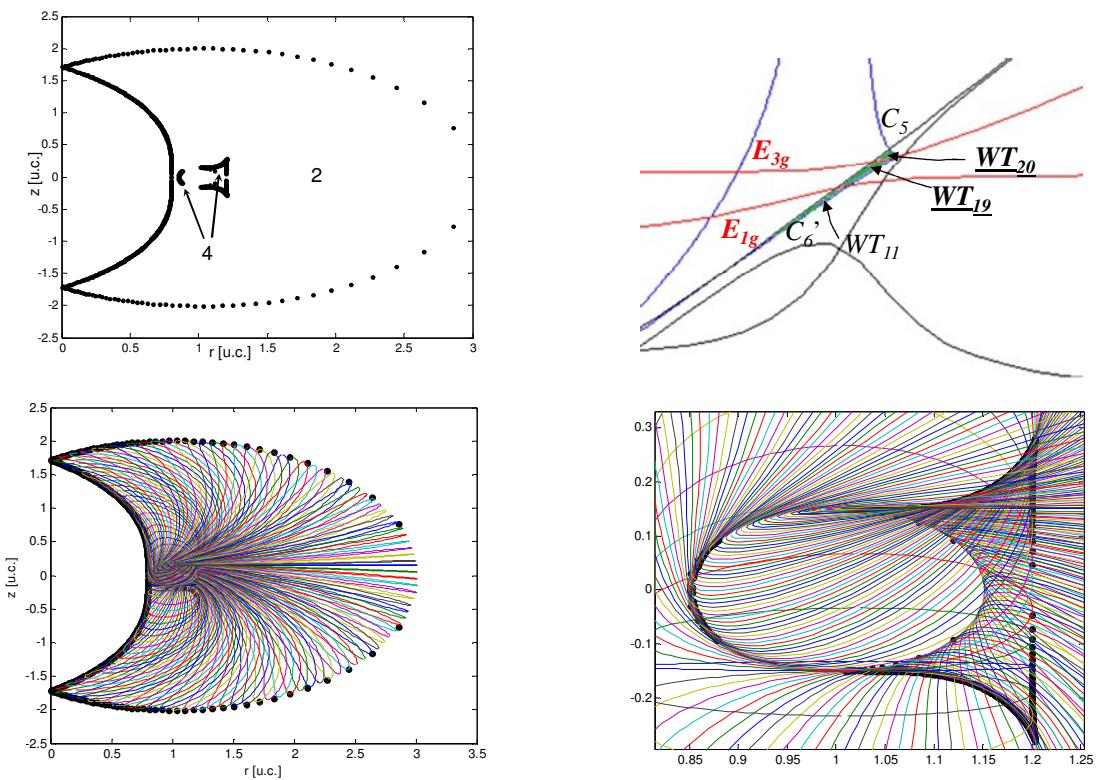


Figura 5.35 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT<sub>19</sub>

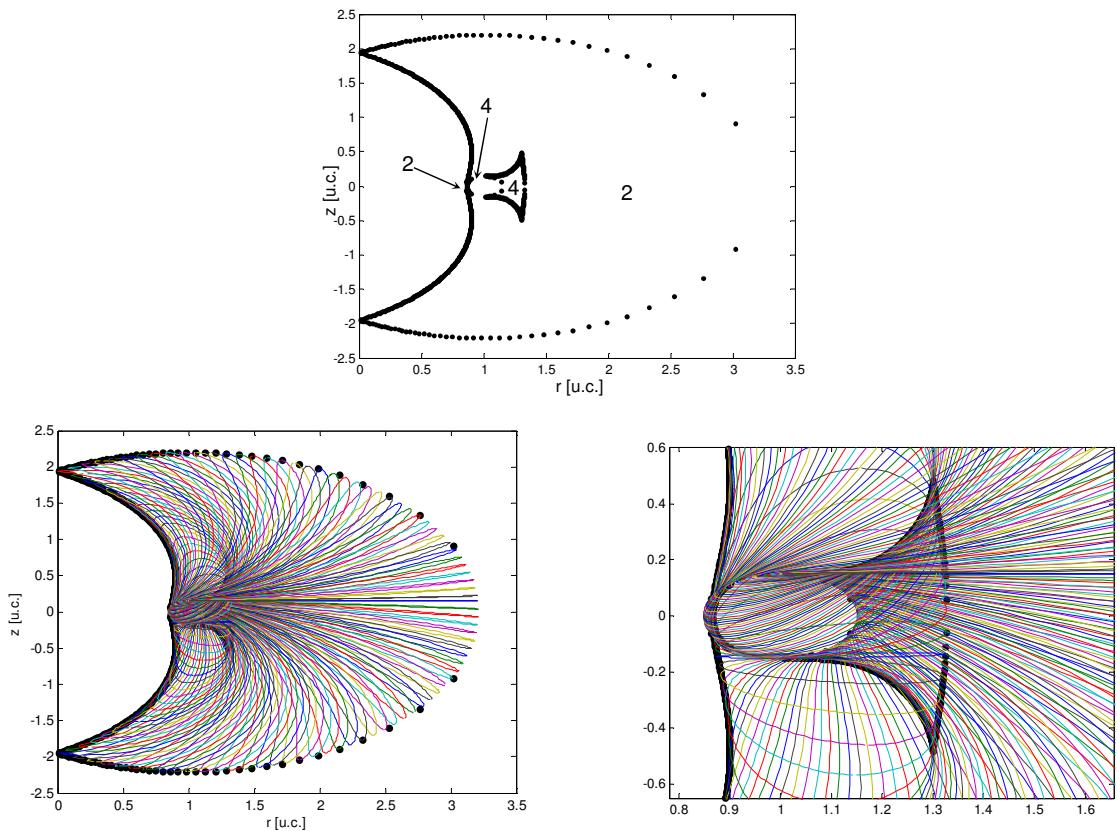


Figura 5.36 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT<sub>20</sub>

A transição entre as duas topologias do espaço de trabalho  $WT_{19}$  e  $WT_{20}$  é definida por um manipulador cuja meia lua é tangente à envoltória externa. No espaço dos parâmetros de DH, esta transição corresponde à uma transposição da superfície de separação  $E_{3g}$  (ver Fig. 5.34).

A terceira topologia no caso onde  $r_2 > r_3$  e que pertence ao domínio 7 é a topologia  $WT_{11}$ , já encontrada anteriormente. Observe que a região contendo os manipuladores cuja topologia é a  $WT_{11}$  é situada abaixo das duas curvas  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$ . Consequentemente, a mudança de posições destas duas primeiras não influenciará a forma do espaço de trabalho.

Observando a Fig. 5.34, percebe-se que a transição entre  $WT_{19}$  e  $WT_{11}$  corresponde a uma transposição da superfície de separação  $E_{1g}$ . Isto corresponde ao desaparecimento do vazio formado pela envoltória interna.

A mudança de posição relativa às duas superfícies  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$  dá lugar a outra subdivisão do domínio 8, aumentando uma topologia do espaço de trabalho suplementar, a saber,  $WT_{21}$ , além de  $WT_{13}$  e  $WT_{15}$ . A topologia  $WT_{21}(2, 0)$  é representada pelo manipulador correspondente à Fig. 5.37 (obtida para  $d_3 = 0,6$ ;  $d_4 = 0,95$ ;  $r_2 = 0,2$  e  $r_3 = 0,15$  [u.c.]). Este manipulador tem 2 pontos de cúspides e nenhum nó. Além disso, tem-se uma região com 4 soluções e 2 regiões com 2 soluções no MGI.

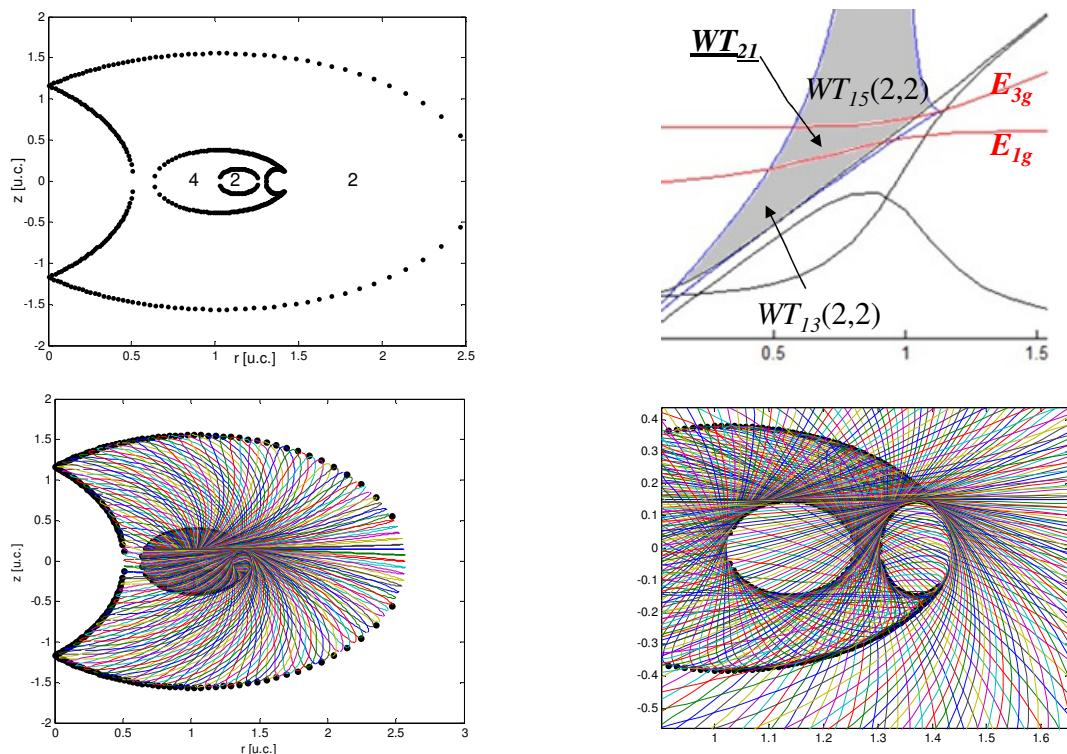


Figura 5.37 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia  $WT_{21}$

Considerando que o domínio 8 é subdividido em 3 topologias do espaço de trabalho diferentes, duas transições são possíveis. A primeira transição corresponde à transposição da superfície de separação  $E_{1g}$  e permite a passagem de  $WT_{13}$  a  $WT_{21}$ . Isto dá lugar à criação de 2 nós devido à interseção da meia lua e da envoltória interna. O caso limite se apresenta quando a envoltória interna está totalmente contida na meia lua e tangente a esta. A segunda transição corresponde à transposição da superfície  $E_{3g}$  e permite a passagem de  $WT_{21}$  a  $WT_{15}$ . Isto corresponde à criação de 2 nós devido a interseção entre a meia lua e a envoltória externa.

O último domínio, introduzindo uma nova topologia do espaço de trabalho para o caso onde  $r_2 > r_3$ , é o domínio 9. Esta topologia é  $WT_{22}(0, 0)$ , representada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.1. Este manipulador é quaternário, não cuspidal e não tem nó. Possui uma região com 4 soluções e 3 regiões com 2 soluções no MGI. No interior deste domínio, duas transições são possíveis. A Fig. 5.34 mostra que a primeira transição permite passar de  $WT_{16}$  a  $WT_{22}$  transpondo a superfície  $E_{1g}$ . Isto permite o desaparecimento de 2 nós devido a interseção das duas superfícies  $D_1$  e  $D_2$ . O caso limite se apresenta quando essas duas superfícies são tangentes.

A segunda transição entre  $WT_{22}$  e  $WT_{18}$  é definida pela criação de dois nós devido à interseção entre as envoltórias de singularidade interna e externa. Observando a Fig. 5.34, pode-se definir esta transição por um manipulador cujos parâmetros de DH verificam a equação da superfície  $E_{3g}$ . No espaço de trabalho de tal manipulador, as envoltórias interna e externa são tangentes.

Resumindo, os 9 domínios com número de pontos de cúspides constante foram subdivididos em várias topologias do espaço de trabalho. De fato, duas novas superfícies  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$  subdividiram o espaço dos parâmetros  $(d_3, d_4, r_2, r_3)$  da família de manipuladores estudada em várias topologias do espaço de trabalho, com isto, dois casos se apresentam:  $r_2 < r_3$  e  $r_2 > r_3$ . Foram encontradas 22 topologias do espaço de trabalho, sendo que todos os manipuladores pertencendo a estas topologias podem ter apenas 0, 2 ou 4 nós.

#### 5.4. Observações importantes

A família de manipuladores 3R ortogonais com  $r_3 \neq 0$  foi classificada segundo a topologia do espaço de trabalho, considerando o número de pontos de cúspides e de nós e se o manipulador era binário ou quaternário. Foram apresentados 9 domínios nos quais o número

de pontos de cúspides é constante. Estes 9 domínios foram subdivididos em 22 topologias em função do número de nós. As propriedades de cada topologia foram citadas considerando: o número de regiões com 2 ou 4 soluções no MGI, o fato dos manipuladores pertencentes a esta topologia terem ou não um vazio, se os manipuladores são binários ou quaternários. As equações das 6 superfícies ( $C_1$ ,  $C_{1b}$ ,  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $E_{1g}$  e  $E_{3g}$ ) separando os diversos domínios e as topologias do espaço de trabalho foram dadas em função dos parâmetros de DH. Estas equações foram determinadas utilizando um método de interpretação geométrica das transições entre os domínios e as topologias do espaço de trabalho.

O estudo conduzido neste capítulo foi mais qualitativo, cujo principal objetivo foi visualizar a forma do espaço de trabalho. De fato, dois manipuladores tendo a mesma topologia do espaço de trabalho podem ser diferentes, por exemplo, em relação ao volume da região com 4 soluções do MGI no espaço de trabalho ou em relação ao condicionamento da matriz Jacobiana do mecanismo.

A fim de ajudar o projetista a escolher entre vários manipuladores pertencendo a uma mesma topologia do espaço de trabalho de acordo com propriedades conhecidas, nesta pesquisa, são aplicadas algumas técnicas de otimização para encontrar o projeto ótimo de manipuladores em determinadas topologias pré-estabelecidas.

No próximo capítulo é apresentada a formulação do problema de otimização, descrevendo as funções objetivos adotadas e as restrições impostas para os vários tipos de topologias.

# CAPÍTULO VI

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo, é definido o problema geral de otimização e apresentadas algumas funções objetivos que podem ser consideradas na otimização de sistemas robóticos.

O trabalho proposto consiste na síntese dimensional de um manipulador 3R, onde o projeto ótimo corresponde àquele que otimiza algumas características desejáveis para a melhor performance do robô a executar tarefas.

São apresentadas situações onde se deseja otimizar problemas com vários objetivos, com e sem restrições impostas para que topologias pré-estabelecidas sejam obedecidas.

O problema geral de otimização é formulado com o objetivo de obter os parâmetros geométricos ótimos de manipuladores 3R de forma a maximizar o volume do espaço de trabalho, maximizar a rigidez do sistema de juntas e otimizar a destreza de tais manipuladores. Além de que, este projeto deve obedecer às restrições impostas.

### 6.1. Otimização Multi-Objetivo

O problema geral de otimização consiste em minimizar (ou maximizar) uma função objetivo, sujeita ou não a restrições de igualdade, desigualdade e restrições laterais.

A função objetivo e as funções de restrições podem ser funções lineares ou não-lineares em relação às variáveis de projeto, implícitas ou explícitas, descontínuas, não-diferenciáveis e não convexas. Podem ser calculadas por meio de técnicas analíticas ou numéricas.

Um problema de otimização pode ser formulado como o de encontrar um vetor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  de  $n$  variáveis de projeto (ou de decisão) com valores no domínio real, que otimize uma função objetivo  $f(x)$  de tal modo que as restrições sejam obedecidas, este vetor é dito *solução ótima* e denotado  $x^*$ . O problema pode ser escrito como:

$$\text{Maximizar ou Minimizar } f(x) \quad (6.1)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} g_j(x) \leq 0, & j = 1, \dots, k \\ h_l(x) = 0, & l = 1, \dots, m \\ x_i^{\inf} \leq x_i \leq x_i^{\sup}, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6.2)$$

sendo que as variáveis  $x$  possuem limites mínimo  $x^{\inf}$  e máximo  $x^{\sup}$ .  $h_i(x)$  são as  $m$  restrições de igualdade e  $g_j(x)$  são as  $k$  restrições de desigualdade que os parâmetros de projeto devem satisfazer.

Em muitas situações, várias funções objetivo precisam ser minimizadas e/ou maximizadas simultaneamente, e neste caso, o problema é denominado problema de otimização *multi-objetivo* (ou *multicritério*). Isto ocorre devido à complexidade dos problemas reais que, na maioria das vezes, apresentam objetivos conflitantes entre si, ou seja, a melhoria de um objetivo provoca a piora de outro (ESCHENAUER *et al.*, 1990). Para este problema, as soluções são denominadas *soluções ótimas de Pareto* (HAJELA; LIN, 1992).

A função objetivo do problema (6.1) pode ser reescrita conforme a Eq.(6.3), sendo que  $f(x)$  é dada como um vetor cujas componentes são  $k$  funções objetivos que se deseja maximizar e/ou minimizar. Esta função vetorial pode ser escrita como:

$$\text{Maximizar ou Minimizar } f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]^T \quad (6.3)$$

Existem vários métodos para resolver este tipo de problema (OLIVEIRA; SARAMAGO, 2010). Neste trabalho são utilizados o Método dos Objetivos Ponderados (MOP) e o Método do Critério Global (MCG), que são apresentados a seguir.

### 6.1.1 Método dos Objetivos Ponderados (MOP)

Este método é uma das técnicas mais usuais para o problema de otimização vetorial. Consiste em transformar o vetor de funções objetivo em uma função escalar. Esta função escalar é determinada através da combinação linear dos objetivos  $f_1, \dots, f_k$ , juntamente com os coeficientes de ponderação  $w_1, \dots, w_k$ . Assim, o problema de otimização multi-objetivo é transformado em um problema de otimização escalar (OSY CZKA, 1990), criando uma função da forma:

$$f(x) = \sum_{k=1}^K w_k \frac{f_k(x)}{f_k^0}, \text{ com } \sum_{k=1}^K w_k = 1 \quad (6.4)$$

A prioridade para cada função objetivo, dada pelos coeficientes de ponderação  $w_k$ , é definida de acordo com o interesse do projetista. É desejável que estes coeficientes representam a importância relativa de cada objetivo, mas para isto acontecer, todas as funções devem ser expressas em unidades que aproximem os mesmos valores numéricos (DEB, 2001). Assim, na Eq.(6.4), a função vetorial foi normalizada pelo uso do conceito de *solução ideal*  $f_k^0$ . Esta solução é determinada obtendo-se separadamente o ótimo viável, para todas as funções objetivo. Em outras palavras:

$$\begin{cases} f_k^0 = \min f_k(x), \quad k = 1, \dots, K \\ \text{Sujeito às restrições (6.2)} \end{cases} \quad (6.5)$$

### 6.1.2 Método Critério Global (MCG)

Neste método, a solução ótima é um vetor de variáveis de projeto que minimiza algum critério global. A função que descreve este critério deve ser definida pelo projetista de modo que se obtenha uma solução mais próxima possível da solução ideal. Tal função global pode ser escrita como uma família de Métricas- $L_p$  (OLIVEIRA, 2005), definida como:

$$L_p(f) = \left[ \sum_{i=1}^k |f_i^o - f_i(x)|^s \right]^{\frac{1}{s}}, \quad 1 \leq s \leq \infty \quad (6.6)$$

Por exemplo:

$$L_1(f) = \sum_{i=1}^k |f_i^o - f_i(x)| \quad (6.7)$$

$$L_2(f) = \left[ \sum_{i=1}^k (f_i^o - f_i(x))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

$$L_\infty(f) = \max |f_i^o - f_i(x)|, i \in I \quad (6.9)$$

Observe que a minimização da Eq.(6.8) equivale à minimização da distância Euclidiana entre o valor da função ideal e a função que expressa cada objetivo. Observe ainda que as Eqs.(6.7) e (6.9) utilizam a função módulo na definição das métricas e portanto podem apresentar dificuldades para aplicar a Programação Sequencial Quadrática, uma vez que este método requer a continuidade e diferenciabilidade da função objetivo.

Em vez de trabalhar com a distância no sentido absoluto, é recomendado o uso de distâncias relativas, assim a Eq.(6.6) pode ser reescrita como:

$$L_p(f) = \left[ \sum_{i=1}^k \left| \frac{f_i^o - f_i(x)}{f_i^o} \right|^s \right]^{\frac{1}{s}}, \quad 1 \leq s \leq \infty \quad (6.10)$$

Considerando que no problema estudado as funções ideais não tendem a zero, as métricas são dadas por funções contínuas. Assim, utilizando as métricas- $L_2$  e  $L_3$  relativas, têm-se as funções escalares dadas, respectivamente, por:

$$L_{2R}(f) = \left( \left( \frac{f_1^0(x) - f_1(x)}{f_1^0(x)} \right)^2 + \dots + \left( \frac{f_k^0(x) - f_k(x)}{f_k^0(x)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.11)$$

$$L_{3R}(f) = \left( \left| \frac{f_1^0(x) - f_1(x)}{f_1^0(x)} \right|^3 + \dots + \left| \frac{f_k^0(x) - f_k(x)}{f_k^0(x)} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.12)$$

## 6.2. Otimização Restrita usando Funções de Penalidade

Para realizar as simulações numéricas, são utilizadas duas técnicas baseadas em princípios evolutivos, a saber: Algoritmos Genéticos e Evolução Diferencial. Estas técnicas foram desenvolvidas para problemas irrestritos, no entanto, em capítulos posteriores serão apresentados problemas restritos.

Sendo assim, torna-se necessário adaptar estes algoritmos para trabalhar na presença de restrições. Para isto, é utilizado o conceito de funções de penalidade (NOCEDAL; WRIGHT, 2000), onde os problemas com restrições são tratados como problemas irrestritos adicionando-se uma função de penalidade  $P(x)$  à função objetivo original para limitar as violações das restrições.

A nova função objetivo, conhecida como pseudo-objetivo, é penalizada de acordo com um fator de penalidade  $r_p$  toda vez que encontrar *restrições ativas* (restrições de desigualdade que são satisfeitas por  $x^*$  na igualdade, ou seja,  $x^*$  pertence ao espaço viável tal que  $g_j(x^*) = 0$ ,  $j = 1, \dots, J$  (MARTINEZ; SANTOS, 1995), caso contrário, a restrição é dita *inativa*). Assim, o problema de otimização irrestrito pode ser escrito:

$$\phi(x) = f(x) + r_p P(x) \quad (6.13)$$

$$P(x) = \left[ \sum_{j=1}^J \left\{ \max \left[ 0, g_j(x) \right] \right\}^2 + \sum_{l=1}^L [h_l(x)]^2 \right] \quad (6.14)$$

sendo que  $f(x)$  é a função objetivo e neste trabalho são escritas de acordo com as Eqs.(6.4), (6.11) ou (6.12),  $P(x)$  é a função de penalidade imposta,  $g_j(x)$  e  $h_l(x)$  são funções de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, conforme a Eq.(6.2). O escalar  $r_p$  é um multiplicador que quantifica a magnitude da penalidade. Para a eficiência do método evolutivo, deve ser usado um valor grande do fator  $r_p$  para garantir que todas as restrições sejam satisfeitas. Neste trabalho,  $r_p$  foi adotado com ordem  $10^3$ .

A seguir são apresentadas as formulações de algumas funções objetivo a serem otimizadas no decorrer desta pesquisa.

### 6.3. Volume do Espaço de Trabalho de Manipuladores 3R

O volume do espaço de trabalho,  $V$ , é o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da seção radial em torno do eixo  $z$ , como pode ser observado na Fig. 2.2.

Assim, usando o Teorema de Pappus-Guldin, o volume é dado através da equação:

$$V = 2 \pi r_g A, \quad (6.15)$$

sendo  $A$  a área da seção radial plana que é coberta pela família de curvas e  $r_g$  a abscissa do baricentro desta seção radial.

Esta pesquisa propõe uma formulação numérica para aproximar o cálculo da área da seção radial através de sua discretização em uma malha retangular (OLIVEIRA *et al.*, 2006). Inicialmente, devem-se obter os valores extremos dos vetores  $r$  e  $z$ , ou seja,

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \min \{r\} & r_{\max} &= \max \{r\} \\ z_{\min} &= \min \{z\} & z_{\max} &= \max \{z\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Adotando-se o número de subintervalos desejados para a discretização ao longo de  $r$  e  $z$  ( $n_r$  e  $n_z$ ), pode-se calcular as dimensões das áreas elementares da malha através das seguintes expressões:

$$\Delta r = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{n_r} \quad \text{e} \quad \Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{n_z} \quad (6.17)$$

As Equações (2.11) a (2.13), obtidas no capítulo 2, permitem calcular todos os pontos da família de curvas que compõem a seção radial do espaço de trabalho. Dado um determinado ponto  $(r, z)$ , determina-se sua posição dentro da malha de discretização, através do seguinte controle de índices:

$$i = \text{int} \left( \frac{r - r_{\min}}{\Delta r} \right) + 1 \quad \text{e} \quad j = \text{int} \left( \frac{z - z_{\min}}{\Delta z} \right) + 1 \quad (6.18)$$

Conforme mostrado no esquema da Fig. 6.1, o ponto da malha que pertence ao espaço de trabalho é identificado como  $P_{ij} = 1$ , caso contrário terá valor nulo, ou seja:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } P_{ij} \notin W(H) \\ 1, & \text{se } P_{ij} \in W(H) \end{cases} \quad (6.19)$$

Desta forma, a área total é obtida aproximadamente pela soma de todas as áreas elementares da malha que estão contidas, totalmente ou parcialmente, na seção radial, conforme Eq.(6.20). Observa-se que apenas os pontos pertencentes ao espaço de trabalho contribuem para o cálculo da área:

$$A = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} (P_{ij} \Delta r \Delta z) \quad (6.20)$$

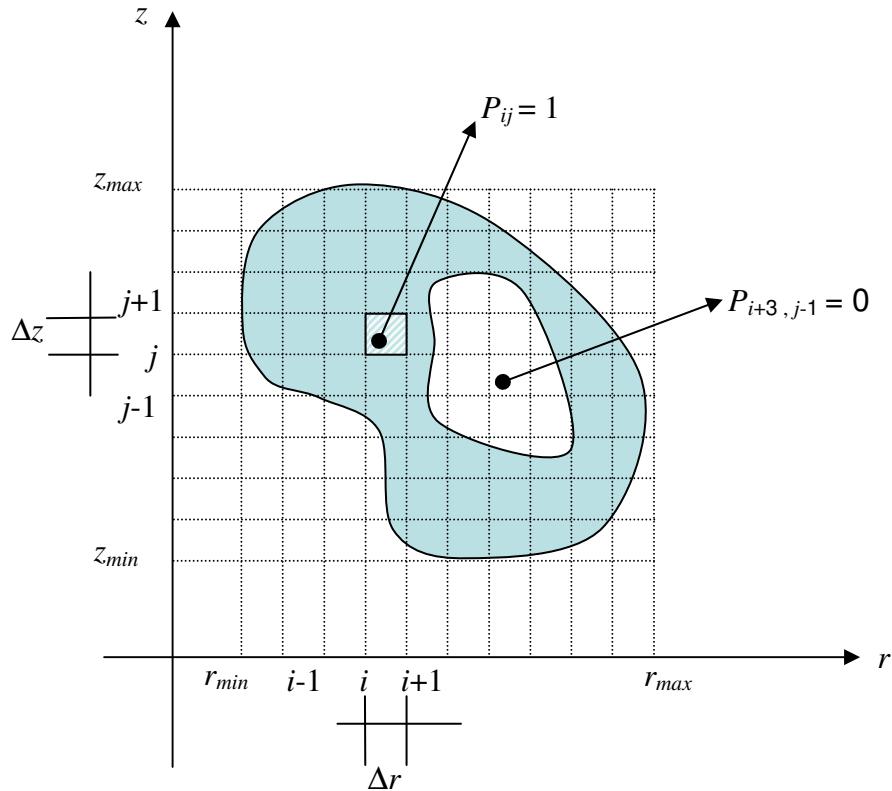


Figura 6.1 - Discretização da seção radial usando malha retangular (OLIVEIRA *et al.*, 2006)

A coordenada do baricentro é calculada considerando a soma dos baricentros de cada área elementar, dividida pela área total, dada por:

$$r_g = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} (P_{ij} \Delta r \Delta z) \left( (i-1) \Delta r + \frac{\Delta r}{2} + r_{\min} \right)}{A} \quad (6.21)$$

Finalmente, conhecendo-se os valores da área e do baricentro da seção radial, dados pelas Eqs.(6.20) e (6.11), pode-se calcular o volume do espaço de trabalho do manipulador usando a Eq.(6.15). Desta forma, a Eq.(6.15) representa a função objetivo a ser maximizada para obter o maior volume do espaço de trabalho possível.

#### 6.4. Rigidez do Mecanismo Serial

Cada vez mais, a importância da alta precisão e desempenho dinâmico para sistemas mecânicos, principalmente robôs, sistemas automáticos de manipulação e montagem, tem resultado no uso de materiais de baixo peso e alta resistência, projetados com a finalidade de reduzir dimensões do projeto e peso.

A rigidez é um importante parâmetro de projeto para a escolha correta de materiais, considerando a geometria dos componentes, formato e tamanho, bem como a interação de cada componente com os outros. Desta forma, deve ser um parâmetro a ser considerado no projeto ótimo de um sistema mecânico.

Pode-se definir rigidez como sendo a capacidade de um sistema mecânico de suportar cargas sem grandes mudanças em sua geometria (RIVIN, 1999). Assim, a rigidez é uma característica mecânica que descreve o comportamento de uma estrutura sujeita às forças estáticas em termos da deflexão elástica. Desta forma, o estudo da rigidez de um sistema equivale a obter a matriz de rigidez,  $K$ , da estrutura analisada, que representa a medida da capacidade da estrutura de resistir às deformações devido à ação de esforços externos.

Existem basicamente três métodos principais que podem ser usados para obter o modelo de rigidez de estruturas robóticas: métodos que utilizam a matriz Jacobiana, estudados por diversos autores, tais como: Gosselin, 1990; El-Khasawneh; Ferreira, 1999; Zhang *et al.*, 2004; Majou *et al.*, 2004; Company *et al.*, 2005; métodos derivados da técnica de elementos finitos (RADE, 2001; BOUZGARROU *et al.*, 2004; DONG *et al.*, 2005; ZHOU *et al.*, 2006) e os que utilizam a técnica de análise matricial de estruturas, sendo que a estrutura é modelada como uma combinação de elementos e nós (DEBLAISE *et al.*, 2006; GONÇALVES; CARVALHO, 2007; GONÇALVES, 2009).

Neste trabalho, o modelo de rigidez da estrutura é obtido a partir da matriz Jacobiana do mecanismo serial, considerando os elementos como sendo molas.

A matriz de rigidez do sistema de juntas do mecanismo no espaço cartesiano é dada por:

$$K = [J]^T K_j [J], \quad (6.22)$$

onde  $K_j$  é a matriz diagonal  $n \times n$ , para o caso estudado, mecanismo serial com 3 juntas rotacionais, tem-se  $K_j = \text{diag} [k_1, k_2, k_3]$  e  $J$  a matriz Jacobiana, dada na Eq.(2.15).

Assumindo que cada um dos atuadores do mecanismo é modelado como uma componente elástica,  $k_i$  é um escalar que representa a rigidez da junta de cada atuador. Particularmente, no caso em que todos os atuadores possuem a mesma rigidez, ou seja,  $k = k_1 = k_2 = k_3$ , tem-se:

$$K = k[J]^T[J] \quad (6.23)$$

Além disso, os elementos da diagonal da matriz de rigidez são utilizados como os valores da rigidez do sistema. Estes elementos representam a rigidez pura em cada direção, e refletem a rigidez de forma mais clara e direta.

Assim, a função objetivo para otimizar a rigidez do sistema pode ser escrita conforme a Eq.(6.24). Neste caso, a rigidez  $R$  deve ser maximizada:

$$R = n_1 K_{11} + n_2 K_{22} + n_3 K_{33}, \quad (6.24)$$

onde  $K_{ii}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , representa os elementos da diagonal da matriz de rigidez do mecanismo,  $n_i$  é o fator de peso para cada rigidez direcional que caracteriza a prioridade da rigidez nesta direção.

## 6.5. Destreza

O índice de desempenho de um sistema mecânico robótico é uma quantidade escalar que mede o quanto satisfatório o sistema se comporta com relação à transmissão de movimento e força. Este índice pode ser definido para todos os tipos de sistemas mecânicos robóticos, particularmente, os manipuladores seriais (ANGELES, 2003).

Existem vários índices de desempenho definidos na literatura, como por exemplo: o conceito de ângulo de serviço, introduzido por Vinogradov *et al.* (1971); o condicionamento de manipuladores robóticos, proposto por Yang e Lai (1985); o conceito de manipulabilidade, introduzido por Yoshikawa (1985); o índice de desempenho de Paul e Stevenson (1983), que usa o valor absoluto do determinante da Jacobiana; o conceito de espaço de trabalho hábil, introduzido por Kumar e Waldron (1981) e usado para otimização geométrica por Vijaykumar

et al. (1986).

Salisbury e Craig (1982) foram os primeiros a usarem o índice de desempenho baseado no *fator-condição* (conhecido na literatura como *condition number*) da Jacobiana para projetar dedos mecânicos. Angeles (2003) considerou três conceitos para medir a destreza: a manipulabilidade (que avalia a facilidade de mudança da posição e orientação do efetuador, de maneira arbitrária); o valor singular mínimo (que é mais viável e recomendado quando o efetuador se desenvolve próximo de uma singularidade, ou seja, ele avalia a aptidão do deslocamento do efetuador na direção mais desfavorável) e o fator-condição (que relaciona o maior e o menor valor singular da matriz Jacobiana). Baili (2004) se refere a este fator como *índice de isotropia*, o qual é adotado neste trabalho.

O índice de isotropia,  $k(J)$ , é definido como o índice de condicionamento da matriz Jacobiana  $J$ . Tal índice pode ser escrito como a relação entre o maior e o menor valor singular de  $J$  (ANGELES, 2003):

$$k(J) = \frac{|\lambda_{\max}(J)|}{|\lambda_{\min}(J)|} \quad (6.25)$$

sendo  $\lambda_{\max}$  e  $\lambda_{\min}$  os valores singulares máximo e mínimo de  $J$ , respectivamente.

Esta definição para medir a destreza é válida somente quando os elementos da Jacobiana possuem a mesma dimensão. Isto restringe o uso deste índice a manipuladores que têm graus de liberdade apenas em direções rotacionais ou Cartesianas, mas não na combinação de ambos (TSAI, 1999; ANGELES, 2003). Os mecanismos que pertencem a esta categoria são os manipuladores com 3 gdl ou menos, ou seja, apenas um tipo de atuador: juntas de rotação ou prismáticas. Considerando que o manipulador em estudo pertence a esta categoria, a destreza de um manipulador 3R pode ser definida pelo índice de isotropia  $k(J)$  como sendo a relação entre os valores singulares da matriz Jacobiana do modelo geométrico direto do manipulador, conforme Eq.(6.25).

Na robótica, o índice de isotropia reflete a precisão proveniente das velocidades operacionais a partir das velocidades dos atuadores calculadas usando a inversa de  $J$ . Este índice pode alcançar valores de 1 a infinito.

O valor 1 significa uma isotropia: o elipsóide das velocidades toma a forma de uma esfera. Fisicamente, quando o manipulador está em uma posição isotrópica, o efetuador terá a mesma facilidade para se deslocar em todas as direções. Assim, manipuladores isotrópicos

são aqueles cuja Jacobiana pode alcançar valores isotrópicos, neste caso,  $k(J) = 1$ . Quanto mais próximo de 1, maior a agilidade para executar tarefas no espaço de trabalho.

Por outro lado, matrizes singulares podem apresentar valores singulares muito pequenos que tendem a zero, consequentemente, o índice de isotropia tenderá a infinito. Isto significa um mal condicionamento, neste caso, as velocidades operacionais do efetuador são muito sensíveis aos erros nas velocidades dos atuadores, em outras palavras: quando  $k(J)$  tende a infinito, isto implica em singularidades do manipulador, ou seja, uma velocidade de entrada do atuador instantaneamente infinita não resulta em mudanças na posição do efetuador ou a posição do efetuador pode ser alterada sem ter modificado a velocidade de entrada do atuador. Neste sentido,  $k(J)$  pode ser entendido como um indicador da distorção da esfera unitária no espaço das variáveis de juntas; quanto maior este índice, maior esta distorção (ANGELES, 2003).

Assim, para otimizar a destreza do manipulador, define-se uma nova função objetivo:

$$\text{Minimizar } D = k(J) \quad (6.26)$$

## 6.6. Formulação do Problema de Otimização

Seja a síntese dimensional de um manipulador 3R formulada pelo seguinte problema de optimização:

$$\text{Maximizar } F(X) = [ V \ -D \ R ] \quad (6.27)$$

sendo  $X = (d_2, d_3, d_4, r_2, r_3, \alpha_2, \alpha_3)^T$  o vetor da variáveis de projeto, que  $V$  é o volume do espaço de trabalho, dado na Eq.(6.15),  $R$  é a rigidez da estrutura do mecanismo serial, dado na Eq.(6.24) e  $D$  é o índice de isotropia que representa a destreza do manipulador, dado em (6.26).

Sujeito às restrições laterais, adotadas como:

$$0,1 \leq d_2, d_3, d_4, r_2, r_3 \leq 3,0 \text{ e } -90^\circ \leq \alpha_2, \alpha_3 \leq 90^\circ \quad (6.28)$$

e sujeito às restrições de topologia. Para o caso onde  $r_3 = 0$ , tem-se as seguintes superfícies de separação:

$$C_1 : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \quad (6.29)$$

$$C_2 : d_4 = \frac{d_3}{1 + d_3} A \quad (6.30)$$

$$C_3 : d_4 = \frac{d_3}{d_3 - 1} B, \text{ com } d_3 > 1 \quad (6.31)$$

$$C_4 : d_4 = \frac{d_3}{1 - d_3} B, \text{ com } d_3 < 1 \quad (6.32)$$

$$E_1 : d_4 = \frac{1}{2}(A - B) \quad (6.33)$$

$$E_2 : d_4 = d_3 \quad (6.34)$$

$$E_3 : d_4 = \frac{1}{2}(A + B) \quad (6.35)$$

onde  $A$  e  $B$  são dados na Eq.(3.40).

Para o outro caso, onde considera-se o manipulador ortogonal com  $r_3 \neq 0$ , as superfícies de separação, conforme apresentado no capítulo 5, são dadas por:  $C_1$  dada na Eq.(3.41),  $C_{1b}$  dada na Eq.(3.39),  $C_5$  dada na Eq.(5.1),  $C_6$  dada no Anexo II,  $E_{1g}$  pela Eq.(5.3) e  $E_{3g}$  pela Eq.(5.4).

Uma revisão das técnicas de otimização utilizadas nesta pesquisa são apresentadas no capítulo seguinte.

# CAPÍTULO VII

## REVISÃO DAS TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO

Para o desenvolvimento da metodologia proposta neste trabalho, é apresentada uma breve revisão das técnicas de otimização a serem utilizadas nas simulações numéricas, onde pretende-se obter o projeto ótimo de manipuladores 3R ortogonais com, e sem restrições de topologias do espaço de trabalho de tais manipuladores.

### 7.1. Algoritmos Genéticos (AG)

São métodos de busca semi-aleatória baseada na teoria de evolução de Charles Darwin. Esses métodos operam com conjuntos de candidatos, chamados de *população*, que são constantemente modificados utilizando dois princípios básicos da evolução natural das espécies: *seleção* e *variação*. Estes princípios tentam representar a competição onde os indivíduos mais aptos reproduzem e repassam seu material genético às gerações futuras, e os indivíduos menos aptos tendem a desaparecer da população (DEB, 2001).

O método foi desenvolvido por John Holland (1975) na Universidade de Michigan e popularizado por um de seus alunos, David Goldberg (1989), que apresentou a solução de problemas complexos de engenharia usando os algoritmos genéticos.

Fazendo uma analogia com o processo da evolução natural, as soluções candidatas são denominadas *indivíduos*, também referidos na literatura como *cromossomos*, *cadeia de valores de parâmetros* ou *cadeias binárias* (HAUPT; HAUPT, 1998; DEB, 2001).

Resumidamente, o procedimento é o seguinte: define-se os parâmetros de otimização e a função objetivo, em seguida faz-se uma codificação dos parâmetros, procede-se uma

sequencia repetitiva de procedimentos que consistem em avaliar, selecionar, recombinar e modificar os indivíduos, gerando, assim, novas populações. Esses procedimentos são efetuados com base na *aptidão* de cada solução, em que indivíduos com melhores aptidões terão uma maior probabilidade de serem selecionados para o processo de cruzamento, passando assim parte dos seus genes a seus descendentes. Cada iteração desse processo recebe o nome de *geração*. A finalização é realizada através de testes de convergência, sendo que um número máximo de gerações deve sempre ser estabelecido. O melhor indivíduo é adotado como solução do problema.

Tanto a evolução biológica quanto os algoritmos genéticos começam com uma população inicial constituída por  $N_p$  indivíduos gerados aleatoriamente. Com a população inicial definida, calcula-se a função objetivo, que é geralmente referida na literatura, como *função de avaliação (fitness)* ou *função custo*. Esta função associa um valor numérico, conhecido como grau de adaptação, a cada indivíduo da população. Quando possível esta função deve ser de cálculo rápido, uma vez que ela deve ser avaliada para todos os indivíduos da população, o que tende a elevar o esforço computacional.

Os procedimentos básicos que transformam a população ao longo das gerações em busca da solução do problema de otimização caracterizam os operadores genéticos: *seleção*, *cruzamento* e *mutação*. Na prática, tem-se verificado que a consistência de um AG é garantida por estes três operadores (HAUPT; HAUPT, 1998). Uma descrição destes operadores é dada a seguir.

### 7.1.1 Seleção (Reprodução)

Este operador determina quais indivíduos serão escolhidos para o cruzamento. O grau de adaptação de cada cromossomo é caracterizado de acordo com o valor da função custo. Em um problema de maximização, por exemplo, quanto maior este valor, maior a probabilidade de contribuir à geração seguinte. Existem vários mecanismos para executar o operador seleção (DEJONG, 1975; GOLDBERG, 1989).

Na seleção elitista os melhores indivíduos de uma população intermediária são escolhidos. Para obter a população intermediária escolhe-se a metade da população de uma geração que corresponde aos indivíduos mais aptos, sendo a outra metade eliminada. Desse modo o cruzamento é realizado com os melhores indivíduos e espera-se que a convergência do algoritmo se torne mais rápida.

Na seleção aleatória, como indica o próprio nome, os indivíduos de uma população intermediária são selecionados aleatoriamente para o posterior cruzamento.

Na seleção por torneio dois indivíduos são escolhidos aleatoriamente, a seguir gera-se um número aleatório  $rand \in [0, 1]$ . Se  $rand$  for menor que um parâmetro previamente definido, que determina o quanto este operador é elitista, o melhor indivíduo é escolhido, senão o outro sobreviverá.

Outra forma de fazer a seleção é através do método da Roleta, no qual a probabilidade de seleção de um indivíduo é diretamente proporcional ao valor da função custo. Quanto maior a participação do cromossomo na área da roleta, maior a probabilidade dele continuar na população.

Em seguida, devem-se selecionar as cadeias que irão contribuir para a geração seguinte. Gera-se um conjunto de números aleatórios  $rand \in [0, 1]$  em quantidade igual ao número de indivíduos da população. Por exemplo, se  $rand < Pa_1$ , seleciona-se o primeiro cromossomo, senão, passa-se para o indivíduo subsequente e faz-se a análise novamente.

No processo de seleção, observa-se que alguns cromossomos podem ser selecionados mais de uma vez, ou seja, os melhores serão copiados mais vezes, enquanto que os piores não sobreviverão.

### 7.1.2 Cruzamento

Nos sistemas biológicos o cruzamento pode ocorrer durante a reprodução sexuada permitindo a troca de material genético entre dois indivíduos. O algoritmo genético utiliza os cromossomos determinados no processo de seleção para gerarem novos descendentes. Este operador é a primeira forma do algoritmo explorar o espaço de busca e evitar uma convergência prematura, ou seja, evitar ótimos locais (HAUPT; HAUPT, 1998; BRAGA, 1998).

A forma mais simples de cruzamento envolve dois pais que irão produzir dois descendentes. A quantidade de cromossomos da população a ser submetida ao cruzamento é definida através da *probabilidade de cruzamento*  $Pc$ , fornecida pelo usuário. É bastante usual adotar para esta probabilidade  $Pc = 60\%$ .

O processo de escolha dos indivíduos que serão cruzados deve ser feito em pares, gerando números aleatórios  $rand_d \in [0, 1]$ ,  $d = 1, \dots, Np$ . Por exemplo, se  $rand_1$  for menor que a probabilidade  $Pc$ , então o primeiro cromossomo da população será selecionado. Desta forma, um cromossomo  $d$  é selecionado para o cruzamento se  $rand_d < Pc$ . A posição de

cruzamento é selecionada entre o primeiro e o último bit dos cromossomos paternos. Uma maneira de selecionar esta posição é descrita a seguir:

Seja  $p_c$  a posição de cruzamento na cadeia binária de cada cromossomo, dada por:

$$p_c = 1 + \text{rand} [(\Sigma m_i - 1) - 1] \quad (7.1)$$

onde  $\text{rand}$  é um número aleatório no intervalo  $[0, 1]$  e  $\Sigma m_i, i = 1, \dots, n$ , é a quantidade de bits do cromossomo, que também representa a posição do último bit no cromossomo.

Cada cadeia é quebrada na posição  $p_c$  e todas as informações de um cromossomo, compreendidas entre as posições  $p_c+1$  e  $\Sigma m_i$ , são copiadas para o outro cromossomo e vice-versa, como ilustrado na Fig. 7.1.



Figura 7.1 - Representação do operador cruzamento simples entre dois indivíduos

No caso contínuo, o modo mais simples é escolher um ou mais pontos no cromossomo e indicá-los como posições de cruzamento. As posições onde deve ocorrer o cruzamento são selecionadas aleatoriamente e conforme a Fig. 7.2, percebe-se nos descendentes uma combinação dos parâmetros de ambos os pais.



Figura 7.2 - Representação do operador cruzamento uniforme com parâmetros contínuos

Existem outros tipos de cruzamento que podem ser vistos na literatura (HAUPT; HAUPT, 1998; MICHALEWICZ, 1996; ESHELMAN; SHAFFER, 1993).

### 7.1.3 Mutação

É uma modificação aleatória do material genético dos indivíduos, ou seja, é a alteração de pequenas percentagens nos bits dos cromossomos. A mutação é outra forma do algoritmo genético explorar a região de busca. Este operador pode introduzir características que não

dependem da população original aumentando a diversidade da população, podendo evitar que o algoritmo convirja prematuramente.

Uma estratégia usual é a mutação de *ponto único*, que modifica o bit “1” para “0” e vice versa em determinadas posições do cromossomo, conforme Fig. 7.3. Os pontos de mutação são selecionados aleatoriamente em uma matriz  $Np \times \Sigma m_i, i = 1, \dots, n$ , que representa o número total de bits da população. Aumentar o número de mutações aumenta a liberdade do algoritmo em buscar soluções fora do espaço de busca, para evitar isso, usualmente faz-se mutação de 1% a 5% do total de bits por iteração. Esta mutação não se aplica aos melhores indivíduos, pois são considerados de *elite*.

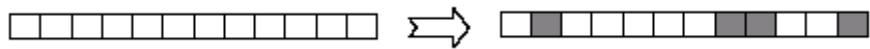


Figura 7.3 - Representação do operador mutação

Uma forma de realizar a mutação é gerar pares aleatórios ( $A, B$ ), onde  $A$  representa o cromossomo a sofrer a mutação e  $B$  representa a posição do bit a ser mudado. Outra forma é selecionar aleatoriamente a posição em um cromossomo, obedecendo a uma *probabilidade de mutação*  $P_m$  (também conhecida como *taxa de mutação*), e mudar o valor do bit. Neste caso, é necessário gerar números aleatórios *rand* no intervalo  $[0, 1]$  em mesma quantidade de bits total da população, representando a posição seqüencial de cada bit na matriz populacional. Para os casos onde *rand* for menor que a probabilidade  $P_m$  serão feitas as mutações nos bits correspondentes. Geralmente, recomenda-se usar  $P_m$  igual a 1%. (HAUPT; HAUPT, 1998).

Na representação real, a probabilidade de mutação adequada está entre 1% e 20%. O parâmetro que sofre mutação é substituído por um novo parâmetro gerado aleatoriamente.

Depois de realizadas as mutações, os custos associados aos descendentes e aos cromossomos que sofreram mutações são calculados, compondo a próxima geração.

#### 7.1.4 Considerações finais

Como o algoritmo é iterativo, o procedimento acima é repetido até obter uma solução desejável. Usualmente é usado como critério de parada o número máximo de gerações, porém existem outros critérios tais como: estagnação da população (os cromossomos e seus respectivos custos se repetem); existência de um indivíduo com qualidades satisfatórias, entre outros. A Fig. 7.4 mostra um fluxograma básico de um algoritmo genético binário.

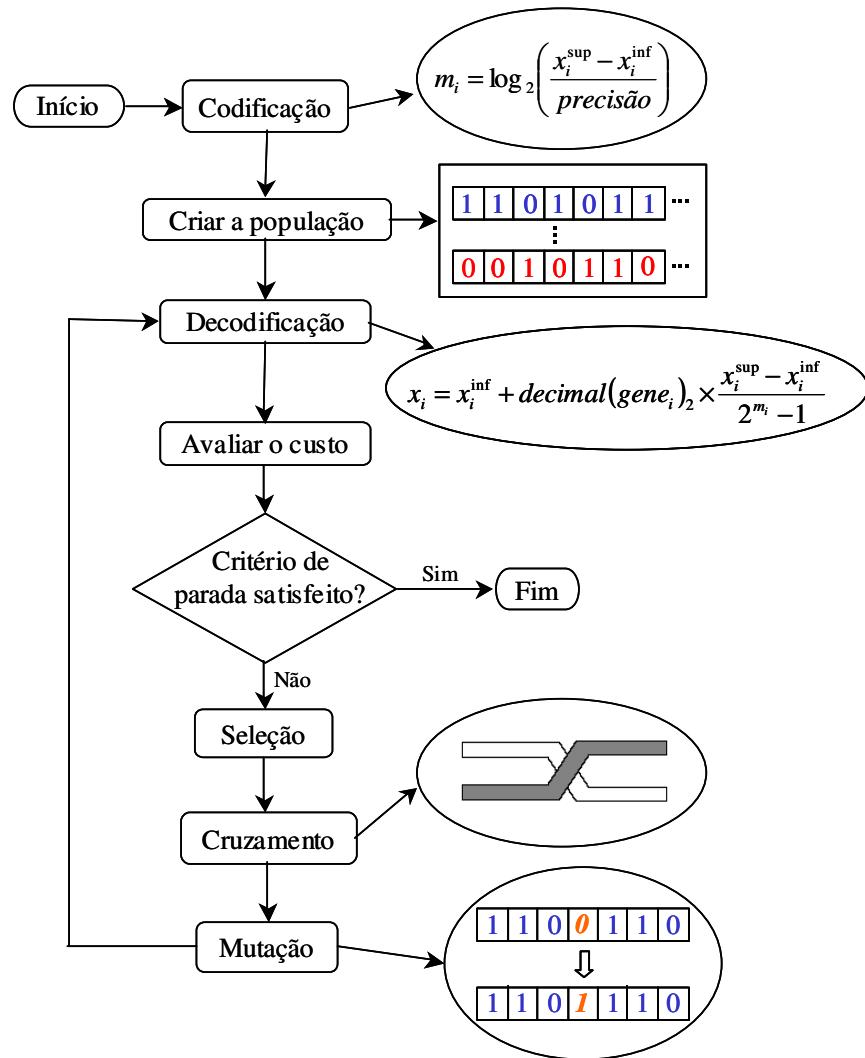


Figura 7.4 - Fluxograma básico de um algoritmo genético binário

O melhor indivíduo, ou seja, aquele que possuir a melhor aptidão é adotado como solução do problema de otimização.

Os algoritmos genéticos apresentam algumas vantagens quando comparados aos métodos de otimização determinísticos, podendo citar: facilidade em sua implementação; eficiência ao evitarem ótimos locais; não requerem o cálculo de derivadas, o que favorece a otimização de funções não contínuas, não diferenciáveis e multimodais; são robustos e apresentam desempenho satisfatório na resolução de vários tipos de problemas, entre outras. Como desvantagem do método, tem-se o elevado custo computacional, e, além disto, nem sempre a solução ótima global é obtida (HAUPT; HAUPT, 1998).

## 7.2. Evolução Diferencial (ED)

Dentre os algoritmos evolutivos, destaca-se o algoritmo de Evolução Diferencial, desenvolvido por Storn e Price em 1995, visando a busca por melhores resultados com uma abordagem um pouco diferente da utilizada nos algoritmos genéticos e nas estratégias de evolução. Trata-se de um método de busca direta estocástica que surgiu de tentativas de resolver o problema de ajuste polinomial de Chebychev. Kenneth Price introduziu a idéia de usar diferenças de vetores para perturbar a população de indivíduos (vetores) resultando em um método que requer poucas variáveis de controle, de rápida convergência, fácil de usar e robusto (STORN; PRICE, 1997).

A escolha do algoritmo de Evolução Diferencial para otimização numérica, conforme Cheng e Hwang (2001) está baseada nas seguintes características:

- É um algoritmo de busca estocástica, originado dos mecanismos de seleção natural;
- Dificilmente torna-se preso em ótimos locais, pois busca a solução ótima global manipulando uma população de soluções, ou seja, buscando simultaneamente a solução em diferentes regiões do espaço de busca;
- É muito eficaz para resolver problemas de otimização com função objetivo descontínua, pois não requer informação sobre suas derivadas;
- Permite que os parâmetros de entrada e saída sejam manipulados como números ordinários reais (pontos flutuantes) sem processamento extra, e, portanto, utiliza eficientemente os recursos do computador;
- Trabalha bem como otimizador local porque os diferenciais gerados por uma população convergente eventualmente tornam-se infinitesimais;
- É eficaz trabalhando com uma população pequena.

Seja uma população inicial escolhida aleatoriamente composta por  $Np$  indivíduos, chamados vetores, cobrindo todo o espaço de busca. Para um problema com  $n$  variáveis de projeto, cada vetor possui  $n$  componentes. Geralmente, esta população é criada por uma distribuição de probabilidade uniforme, quando não há nenhum conhecimento sobre o problema. Assim, a população segue uma evolução natural, porém o número de indivíduos permanece fixo durante o processo de minimização.

A ideia principal da evolução diferencial é gerar novos indivíduos, denotados vetores modificados ou doadores, pela adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo. Esta operação é denominada *mutação*.

As componentes deste novo indivíduo doador são misturadas com as componentes de um indivíduo escolhido aleatoriamente (denotado vetor alvo ou vetor a ser substituído), para resultar o chamado vetor tentativa, ou vetor experimental. O processo de misturar os parâmetros é referido freqüentemente como *cruzamento* na comunidade dos algoritmos evolutivos.

Se o custo do vetor experimental for menor que o custo do vetor alvo, então o vetor experimental será o vetor alvo da geração seguinte. Esta última operação é denominada *seleção*. O procedimento é finalizado através de algum critério de parada.

### 7.2.1. Operadores da Evolução Diferencial

Os operadores da evolução diferencial se baseiam no princípio da evolução natural cujos objetivos são manter a diversidade da população, evitar convergências prematuras e obter a melhor solução.

#### a) Mutação

Para a obtenção do vetor doador  $V^{(q+1)}$ , considere os vetores  $X_\alpha$ ,  $X_\beta$  e  $X_\gamma$  distintos entre si e escolhidos aleatoriamente em uma população com  $Np$  indivíduos.  $Np$  deve ser maior ou igual a 4 para garantir uma quantidade suficiente de indivíduos para a execução do método. Os índices aleatórios  $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, Np\}$  são inteiros distintos entre si. Utilizando o par de vetores  $(X_\beta, X_\gamma)$  da  $q$ -ésima geração define-se o vetor diferença  $(X_\beta - X_\gamma)$ . Esta diferença é multiplicada por  $F_p$ , sendo denotada diferença vetorial ponderada ou apenas diferença ponderada e será usada para perturbar o terceiro vetor  $X_\alpha$ . O fator de perturbação  $F_p$  é um número real, positivo pertencente ao intervalo  $[0, 2]$  e controla a amplitude do vetor diferença.

O processo de mutação pode ser escrito conforme a Eq.(7.2), no entanto, existem outras estratégias (OLIVEIRA, 2006).

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F_p (X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (7.2)$$

A Figura 7.5 mostra um exemplo bidimensional que ilustra os diferentes vetores que geram o vetor doador  $V^{(q+1)}$ .

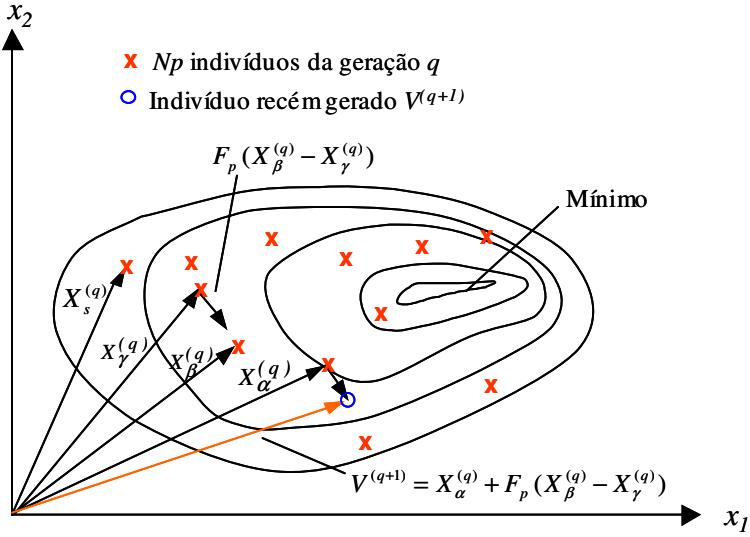


Figura 7.5 - Processo para gerar o vetor doador  $V^{(q+1)}$  de uma função bidimensional

b) *Cruzamento*

Considere que para cada vetor alvo  $X_s^{(q)}$ ,  $s \in \{1, \dots, Np\}$ , e diferente dos índices  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , foi gerado um vetor doador. O cruzamento é introduzido para aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram a mutação. Assim, utilizando o vetor doador e o vetor alvo, as componentes do vetor experimental  $U^{(q+1)}$  são escolhidas pela seguinte comparação:

$$u(i)^{(q+1)} = \begin{cases} v(i)^{(q+1)}, & \text{se } rand_i \leq P_c. \\ x_s(i)^{(q)}, & \text{se } rand_i > P_c, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (7.3)$$

sendo  $rand_i$  um número gerado aleatoriamente no intervalo  $[0, 1]$ ,  $P_c \in [0, 1]$  é a probabilidade do cruzamento e representa a probabilidade do vetor experimental herdar os valores das variáveis do vetor doador, devendo ser fornecida pelo usuário. Quando  $P_c = 1$ , por exemplo, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor doador  $V^{(q+1)}$ . Por outro lado, se  $P_c = 0$ , todas as componentes do vetor experimental virão do vetor alvo  $X_s^{(q)}$ .

Este tipo de cruzamento, apresentado por Storn e Price (1995) é denominado operador cruzamento binomial (devido aos experimentos binomiais independentes), sendo executado em cada variável sempre que um número aleatório  $rand \in [0, 1]$  for menor que a probabilidade de cruzamento  $P_c$ . A Fig. 7.6 mostra o processo de cruzamento binomial para uma função de 7 variáveis.

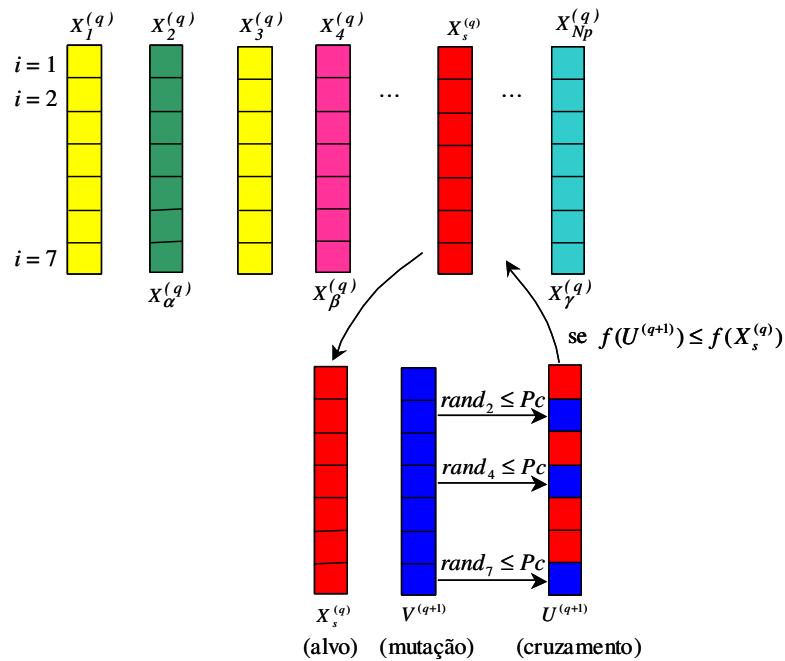


Figura 7.6 - Ilustração do processo de cruzamento binomial para  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 4$  e  $\gamma = Np$

Alguns anos mais tarde, Storn e Price (1997) desenvolveram o operador cruzamento exponencial, em que o cruzamento é executado nas variáveis enquanto o número aleatório  $rand \in [0,1]$  for menor que a probabilidade de cruzamento  $Pc$ . A primeira vez que este número aleatório ultrapassar o valor de  $Pc$ , nenhum cruzamento é executado e as variáveis restantes são deixadas intactas, ou seja:

Enquanto  $rand_i \leq Pc$ ,  $u(i)^{(q+1)} = v(i)^{(q+1)}$ ,

Se  $rand_i > Pc$ ,  $u(j)^{(q+1)} = x_s(j)^{(q)}$ ,  $j = (i+1), \dots, n$  (7.4)

A Figura 7.7 mostra o processo de cruzamento exponencial para uma função de 7 variáveis. Se após o cruzamento uma ou mais componentes do vetor experimental estiver fora da região de busca, definida pelas restrições laterais das variáveis de projeto, as seguintes correções devem ser feitas:

$$\begin{cases} \text{Se } u(i) < x(i)^{\inf} \text{ ent\~ao } u(i) = x(i)^{\inf} \\ \text{Se } u(i) > x(i)^{\sup} \text{ ent\~ao } u(i) = x(i)^{\sup} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (7.5)$$

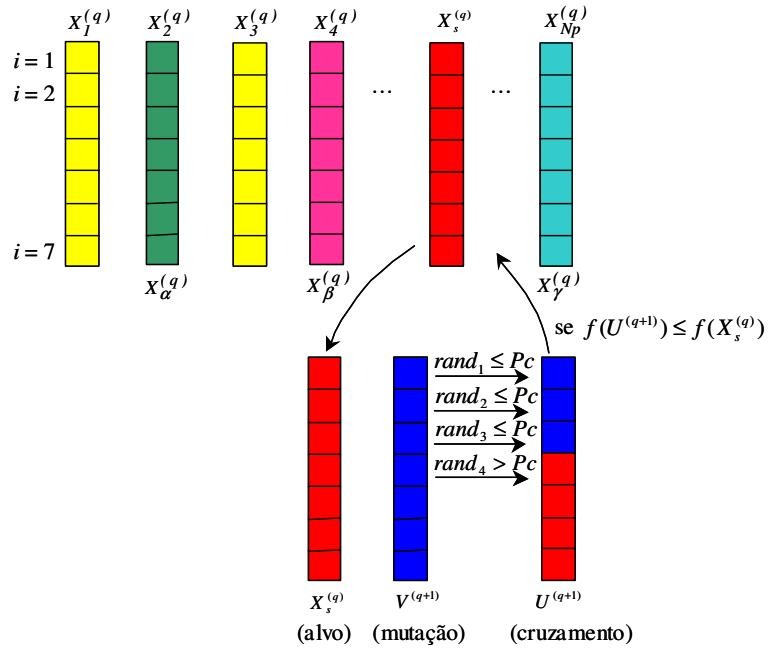


Figura 7.7 - Ilustração do processo de cruzamento exponencial para  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 4$  e  $\gamma = N_p$

### c) Seleção

A seleção é o processo de produzir filhos melhores. Diferentemente de outros algoritmos evolutivos, a evolução diferencial não usa hierarquia (elitismo) nem seleção proporcional. Em vez disso, o custo do vetor experimental  $U^{(q+1)}$  é calculado e comparado com o custo do vetor alvo  $X_s^{(q)}$ . Se o custo do vetor experimental for menor que o custo do vetor alvo, o vetor alvo da próxima geração será o vetor experimental. Caso contrário, o vetor alvo da próxima geração será o vetor alvo da geração atual.

Em outras palavras, este processo pode ser escrito como:

$$\begin{cases} Se \quad f(U^{(q+1)}) \leq f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = U^{(q+1)} \\ Se \quad f(U^{(q+1)}) > f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = X_s^{(q)} \end{cases} \quad (7.6)$$

O procedimento acima é finalizado através de algum critério de parada, sendo que o número máximo de gerações deve ser estabelecido.

Usualmente, o desempenho do algoritmo de ED depende principalmente do tamanho da população  $N_p$ , da região de busca, da taxa de cruzamento e também do fator de perturbação  $F_p$ .

### 7.3. Programação Sequencial Quadrática (PSQ)

O conceito básico de PSQ (Sequential quadratic programming-SQP) é modelar um problema de programação não-linear usando um algoritmo iterativo em que, a cada iteração atual  $x_k$ , o passo para a próxima iteração é obtido através de informações geradas resolvendo um subproblema quadrático. Para isto, assume-se que este subproblema reflete de alguma forma, as propriedades locais do problema original. A ideia principal é a formulação de um subproblema baseado em uma aproximação quadrática da função Lagrangeana (NOCEDAL; WRIGHT, 2000).

O problema de programação não-linear a ser resolvido é, então:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad F_c(x), \quad F_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.7)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{cases} h_l(x) = 0, & l = 1, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0, & j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (7.8)$$

em que  $F_c(x)$  é a função objetivo;  $m$  é o número de restrições de igualdade  $h(x)$ ,  $p$  é o número de restrições de desigualdade  $g(x)$  e  $x$  é o vetor contendo os parâmetros de projeto (no caso desta pesquisa, os parâmetros dimensionais do robô).

O método PSQ adota como função objetivo um modelo quadrático da função Lagrangeana  $\Lambda$ . Seja a função Lagrangiana dada por:

$$\Lambda(x_k, \lambda_i) = F_c(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x_k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x_k) \quad (7.9)$$

então,

$$\nabla_x \Lambda(x_k, \lambda_i) = \nabla F_c(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x_k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(x_k). \quad (7.10)$$

Nas equações acima,  $\lambda_i$  representam os multiplicadores de Lagrange,  $\nabla F_c$  é o gradiente da função objetivo  $F_c$  em  $x_k$ ;  $\nabla h_i$  e  $\nabla g_i$  são as matrizes Jacobianas das restrições. De acordo com Nocedal e Wright (2000), a estrutura PSQ pode ser facilmente estendida para o problema não-linear (7.7) e (7.8), neste caso, para modelar o problema, é necessário linearizar as restrições de igualdade e de desigualdade para obter:

$$\underset{s_x}{\text{Minimizar}} \quad \left\{ F_c(x_k) + \nabla F_c(x_k)^T s_x + \frac{1}{2} s_x^T H e_k s_x \right\} \quad (7.11)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{cases} \nabla h_i(x_k)^T s_x + h_i(x_k) = 0, & i = 1, \dots, m \\ \nabla g_i(x_k)^T s_x + g_i(x_k) \leq 0, & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (7.12)$$

onde  $x_k$  é o vetor contendo os parâmetros de projeto na iteração  $k$ ,  $T$  denota a operação de transposição;  $s_x = x - x_k$  é a direção de busca;  $H e_k$  é tida como a matriz Hessiana da função Lagrangeana em  $x_k$ .

O procedimento numérico se inicia com uma estimativa inicial da solução e, em cada iteração  $k$ , o problema de programação quadrática é resolvido para fornecer uma direção de busca  $s_x$ . A solução  $s_x$  pode ser usada para gerar um novo  $x_{k+1}$  iterativo, para alguma seleção do parâmetro tamanho do passo  $\psi_k$ , conforme:

$$x_{k+1} = x_k + \psi_k s_x \quad (7.13)$$

Para continuar a próxima iteração, uma nova estimativa para os multiplicadores de Lagrange é necessária (BOGGS; TOLLE, 1995). Uma abordagem usual é a utilização de multiplicadores ótimos do subproblema quadrático, denotado por  $\lambda_{qp}$ . Assim, os multiplicadores atualizados  $\lambda_{k+1}$  são obtidos como segue:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \psi_k s_x ; \quad s_x = \lambda_{qp} - \lambda_k \quad (7.14)$$

Resumindo, a técnica PSQ resolve o problema de otimização definido pelas Eqs.(7.7) e (7.8), calculando a direção de busca por meio das Eqs.(7.9) a (7.14).

A seguir, são apresentadas as simulações numéricas utilizando o problema de otimização definido no capítulo 6 e as técnicas apresentadas neste capítulo.



# CAPÍTULO VIII

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentadas algumas simulações numéricas para os problemas definidos no capítulo 6 como uma contribuição deste trabalho. Para estas simulações são utilizados os métodos de otimização multi-objetivo: Método dos Objetivos Ponderados e o Método do Critério Global. Os resultados da otimização são obtidos através das técnicas evolutivas Algoritmos Genéticos e Evolução Diferencial e a Programação Sequencial Quadrática, revisadas no capítulo 7.

O problema de otimização irrestrito, desenvolvido na seção 8.1, visa a obtenção do projeto ótimo de manipuladores 3R considerando o caso geral, ou seja, deseja-se otimizar os parâmetros dimensionais  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e os ângulos  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  de tais manipuladores, sem a presença de restrições de topologia.

Na seção 8.2 são descritas as simulações considerando a otimização irrestrita de manipuladores 3R ortogonais, ou seja, adota-se os ângulos  $\alpha_2 = -90^\circ$  e  $\alpha_3 = 90^\circ$ . Nas seções 8.3 e 8.4 são realizadas as otimizações restritas de manipuladores 3R ortogonais considerando o parâmetro  $r_3 = 0$  e  $r_3 \neq 0$ , respectivamente. Para estes dois casos, as restrições são relacionadas com a escolha da topologia do espaço de trabalho.

O algoritmo da Evolução Diferencial foi executado utilizando o código computacional desenvolvido pelo grupo de pesquisa do instituto, sendo implementado em Matlab®7.4, em um microcomputador Intel(R), Core(TM)i7, CPU 9200, 2.67 GHz; 3,23 GB (RAM). Os Algoritmos Genéticos foram aplicados utilizando o código computacional GAOT (HOUCK *et al.*, 1995), adotando-se uma população com 80 indivíduos. A técnica sequencial foi executada fazendo uso da função *fmincon* do Matlab®.

Em todas as simulações apresentadas a seguir, os parâmetros utilizados na ED foram: fator da diferença ponderada:  $F = 0,8$ ; probabilidade de cruzamento:  $CR = 0,6$ ; Número de indivíduos da população:  $N_p = 15$  e estratégia: ED/best/1/bin.

Para o cálculo do volume adotou-se  $n_r = n_z = 50$  subintervalos e a discretização dos ângulos das juntas  $\Delta\theta_1 = 0,6$  radianos e  $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_3 = 0,05$  radianos.

## 8.1. Otimização irrestrita de Manipuladores 3R

O problema de otimização é formulado com o objetivo de obter os parâmetros ótimos de um manipulador 3R que maximizam o volume do espaço de trabalho, maximizam a rigidez do sistema de juntas e otimizam a destreza do manipulador. Neste caso, tem-se um problema multi-objetivo irrestrito com funções objetivo conflitantes entre si.

### 8.1.1 Método dos Objetivos Ponderados (MOP)

Utilizando este método, como visto na seção 6.5, o problema é escrito como uma função escalar:

$$\text{Maximizar } F(x) = w_1 \frac{V}{V^o} - w_2 \frac{D}{D^o} + w_3 \frac{R}{R^o}, \sum w_i = 1, \quad (8.1)$$

sendo  $x = (d_2, d_3, d_4, r_2, r_3, \alpha_2, \alpha_3)^T$ ;  $0,1 \leq d_2, d_3, d_4, r_2, r_3 \leq 3,0$  e  $-90^\circ \leq \alpha_2, \alpha_3 \leq 90^\circ$ ;  $V$  é o volume do espaço de trabalho, dado na Eq.(6.15),  $R$  é a rigidez da estrutura do mecanismo serial, dado na Eq.(6.24) e  $D$  é o índice de isotropia que representa a destreza do manipulador, conforme Eq.(6.26).

Os coeficientes  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  indicam, respectivamente, os fatores de ponderação para o volume, a destreza e a rigidez. É desejável que estes coeficientes representem a importância relativa de cada objetivo, mas para isto acontecer, todas as funções objetivo devem possuir a mesma ordem de grandeza. Assim, na Eq.(8.1), a função vetorial foi normalizada utilizando-se o conceito de solução ideal.

O ótimo viável de cada solução ideal foi obtido separadamente utilizando a Evolução Diferencial. O volume ideal  $V^o$  foi igual a 3689,507 [u.v.], a destreza ideal  $D^o$  foi 1,003 e a

rigidez ideal  $R^0$  foi 293,270 [u.r.]. Para o cálculo destes valores, adotou-se o número máximo de gerações igual a 100 e a estagnação da população na ordem de seis casas decimais.

A Tabela 8.1 apresenta os resultados da otimização utilizando o Método dos Objetivos Ponderados. Como critério de parada da ED, foi adotado o número máximo de 50 gerações e a verificação de sua estagnação (após realização de 15 iterações sucessivas sem melhoria significativa no valor da função otimizada) na ordem de quatro casas decimais, isto justifica a variação do número de avaliações da função ( $N_f$ ) apresentado nesta tabela. Devido ao critério de estagnação, pode-se observar na Tab. 8.1 uma redução bastante significativa de  $N_f$  ao utilizar ED, e, consequentemente, de seu custo computacional em relação aos AG.

Observa-se que a matriz Jacobiana geral, dada na Eq.(2.15), depende do ângulo da junta  $\theta_l$ , deste modo, para obter a otimização do volume do espaço de trabalho, da rigidez e da destreza dos manipuladores 3R foi necessário uma discretização deste ângulo, gerando um alto custo computacional.

Como este problema é multi-objetivo, não existe uma solução ótima, e sim um conjunto de soluções de Pareto. Assim, a melhor solução depende do interesse do projetista, por exemplo, se houver interesse num maior volume do espaço de trabalho, pode-se adotar o coeficiente de ponderação  $w_1$  acima de 80%, tendo, porém, uma piora nos resultados da rigidez e da destreza. Por outro lado, se o projetista desejar obter um manipulador com maior agilidade para executar tarefas no espaço de trabalho, poderá atribuir prioridade para a destreza, ou seja, adotar  $w_2$  acima de 80%, porém, terá uma redução no volume do espaço de trabalho e na rigidez do mecanismo serial, pois esta função é conflitante com as outras duas.

Na Tabela 8.1 não são apresentados todos os resultados das simulações numéricas realizadas nesta pesquisa, visto que alguns valores foram muito próximos. Por exemplo, ao considerar  $w_1 = 90\%$  ( $w_2 = w_3 = 5\%$ ) e  $w_1 = 80\%$  ( $w_2 = w_3 = 10\%$ ), os resultados foram semelhantes.

Para este problema, a destreza não apresentou grandes variações, no entanto, apresenta melhores resultados se o coeficiente de ponderação adotado for acima de 80%.

Os valores da rigidez que mais se aproximam do ideal são obtidos quando adotado prioridade maior que 80%, mas o volume reduz consideravelmente.

Comparando as técnicas evolutivas, observa-se que, algumas vezes, AG obteve resultados melhores que ED, mas cabe ao projetista avaliar se vale a pena o elevado custo computacional.

Tabela 8.1 - Resultados ótimos para o Volume, a Destreza e a Rigidez, para manipuladores 3R, aplicando o Método dos Objetivos Ponderados (MOP)

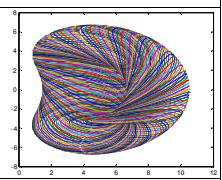
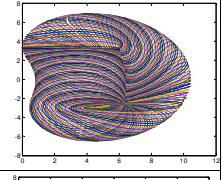
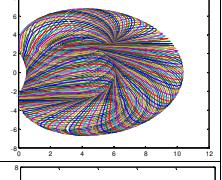
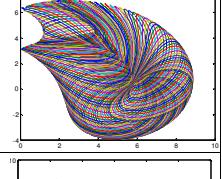
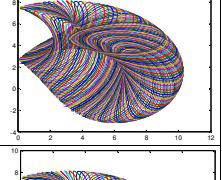
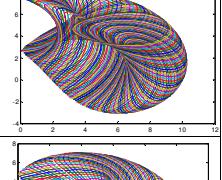
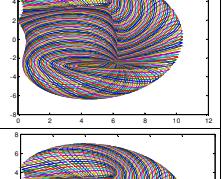
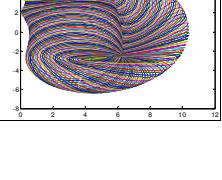
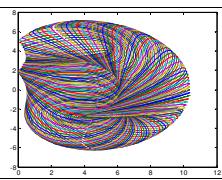
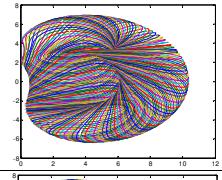
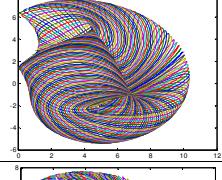
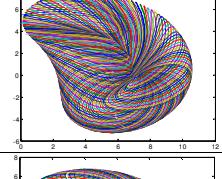
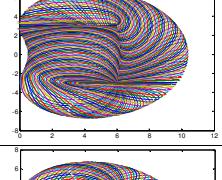
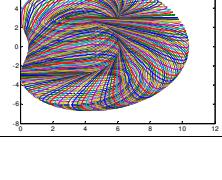
$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_2, d_3, d_4$ $r_2, r_3$ [u.c.] $\alpha_2, \alpha_3$ [graus]	Volume [u.v.]	Destr.	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [h]	Seção Transversal
$w_1=0,80$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 -90,00 -75,43	3691,677	1,150	254,053	435	17,48	
		$w_2=0,10$ $w_3=0,10$						
$w_1=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 89,48 -90,00	3608,818	1,013	249,443	540	17,46	
		$w_2=0,80$ $w_3=0,10$						
$w_1=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 45,36 -73,29	2905,837	1,177	283,513	465	16,51	
		$w_2=0,10$ $w_3=0,80$						
$w_1=0,50$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 90,00 -90,00	3609,135	1,015	249,932	300	10,09	
		$w_2=0,25$ $w_3=0,25$						

Tabela 8.1 - Resultados ótimos para o Volume, a Destreza e a Rigidez, para manipuladores 3R, aplicando o Método dos Objetivos Ponderados (MOP) (continuação)

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_2, d_3, d_4$ $r_2, r_3$ [u.c.] $\alpha_2, \alpha_3$ [graus]	Volume [u.v.]	Destr.	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [h]	Seção Transversal
$w_1=0,25$ $w_2=0,50$ $w_3=0,25$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 -81,55 -90,00	2846,612	1,025	214,983	240	7,77	
	AG	3,00 2,99 3,00 3,00 2,92 84,62 -88,49	3568,585	1,012	249,289	2214	77,13	
$w_1=0,25$ $w_2=0,25$ $w_3=0,50$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 68,78 90,00	3432,884	1,015	261,993	450	16,01	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 -71,37 -64,70	3515,394	1,040	263,398	1925	67,43	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 89,55 90,00	3601,962	1,011	249,976	345	11,78	
	AG	3,00 3,00 3,00 2,99 3,00 89,76 -90,00	3612,397	1,013	249,690	2008	68,57	

### 8.1.2 Método do Critério Global (MCG)

Utilizando como função global a família de Métricas- $L_p$ , conforme visto no capítulo 6, considerando  $p = 1, 2$  e  $3$ , pode-se escrever:

$$\text{Minimizar } L_1(f) = |V^o - V| + |D^o - D| + |R^o - R| \quad (8.2)$$

$$\text{Minimizar } L_2(f) = [V^o - V]^2 + [D^o - D]^2 + [R^o - R]^2 \quad (8.3)$$

$$\text{Minimizar } L_3(f) = \left( |V^o - V|^3 + |D^o - D|^3 + |R^o - R|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8.4)$$

E as métricas relativas:

$$\text{Minimizar } L_{2R}(f) = \left( \left( \frac{V^0 - V}{V^0} \right)^2 + \left( \frac{D^0 - D}{D^0} \right)^2 + \left( \frac{R^0 - R}{R^0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.5)$$

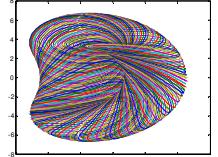
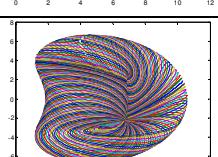
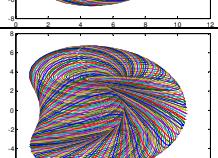
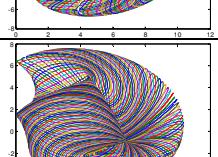
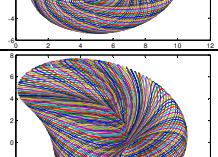
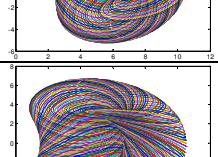
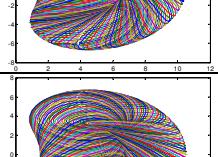
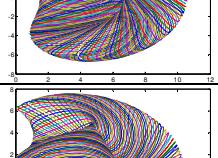
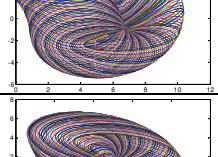
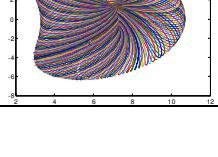
$$\text{Minimizar } L_{3R}(f) = \left( \left( \frac{V^0 - V}{V^0} \right)^3 + \left( \frac{D^0 - D}{D^0} \right)^3 + \left( \frac{R^0 - R}{R^0} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8.6)$$

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.2. As métricas que fornecem as melhores soluções, tanto em ED como em AG, são as relativas, pois os objetivos são normalizados pelas soluções ideais. Este comportamento era esperado, visto que no método do critério global, deseja-se obter uma solução mais próxima possível da solução ideal.

Ao comparar os resultados obtidos pelas técnicas evolutivas, na maioria das vezes, a ED encontrou melhores resultados, com a vantagem de grande redução do custo computacional.

É importante observar que os valores dos ângulos negativos, apresentados nas Tab. 8.1 e Tab. 8.2 significam que o movimento do efetuador do manipulador pode ocorrer no sentido horário, isto ocorre devido às restrições do espaço de busca impostas aos ângulos  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , que devem estar no intervalo de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ .

Tabela 8.2 - Valores ótimos para o Volume, a Destreza e a Rigidez, para manipuladores 3R, aplicando o Método do Critério Global (MCG)

Métrica	Método	$d_2, d_3, d_4$ $r_2, r_3$ [u.c.] $\alpha_2, \alpha_3$ [graus]	Volume [u.v.]	Destr.	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo[h]	Seção Transversal
$L_1$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 90,00 72,15	3689,507	1,210	262,608	750	29,09	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 89,75 -74,92	3689,507	1,197	261,107	1989	68,10	
$L_2$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 90,00 69,97	3681,316	1,218	263,174	750	25,84	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 89,89 72,37	3689,456	1,208	262,498	1939	67,38	
$L_{2R}$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 68,58 89,22	3436,389	1,013	262,680	450	14,82	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 -71,22 -64,69	3510,616	1,040	263,466	2091	70,41	
$L_3$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 -89,26 67,62	3679,752	1,155	257,886	750	26,27	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 89,95 70,07	3680,845	1,218	263,692	2087	82,63	
$L_{3R}$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 69,55 87,59	3466,227	1,048	262,922	495	16,54	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00 3,00 -87,64 48,05	3476,492	1,077	263,466	2146	77,15	

## 8.2. Otimização irrestrita de Manipuladores 3R Ortogonais

Nesta seção deseja-se obter os parâmetros ótimos de um manipulador 3R ortogonal ( $\alpha_2 = -90^\circ$  e  $\alpha_3 = 90^\circ$ ).

Para simplificar a obtenção dos parâmetros dimensionais adotou-se  $d_2 = 1,0$  [u.c.]. Esta escolha permite que os resultados possam ser comparados com o problema sujeito a restrições de topologia que será apresentado na próxima seção. Assim, o problema de otimização fica definido como:

$$\text{Maximizar } F(x) = [V \ -D \ R], \quad (8.7)$$

$$x = (d_3, d_4, r_2, r_3)^T \quad (8.8)$$

Sujeito às restrições laterais:

$$0,1 \leq d_3, d_4, r_2, r_3 \leq 3,0 \text{ [u.c.]} \quad (8.9)$$

Os parâmetros utilizados por ED e AG foram os mesmos utilizados anteriormente, exceto o número máximo de gerações que foi igual a 100. As soluções ideais, obtidas por ED (com número máximo de gerações igual a 200) foram:  $V^0 = 2382,741$  [u.v.];  $D^0 = 1,026$  e  $R^0 = 125,077$  [u.r.].

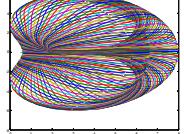
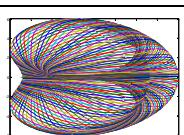
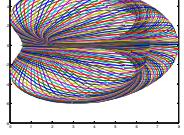
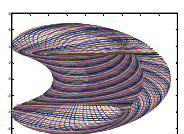
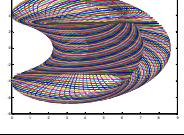
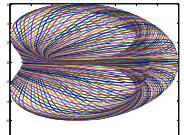
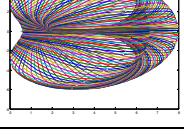
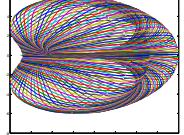
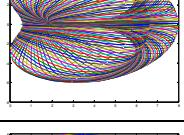
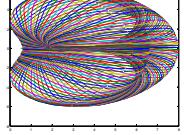
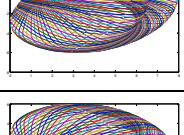
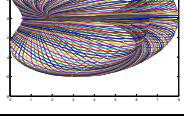
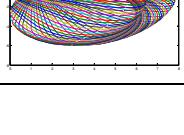
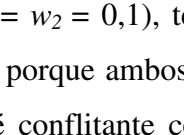
### 8.2.1 Método dos Objetivos Ponderados (MOP)

O problema multi-objetivo é dado na Eq.(8.1), sendo o vetor de parâmetros de projeto apresentado em (8.8). A Tab. 8.3 apresenta os resultados da otimização.

Comparando as técnicas evolutivas, pode-se observar na Tab. 8.3 que, tanto ED quanto AG apresentam resultados semelhantes, exceto ao adotar  $w_1 = 0,8$  (com  $w_1 = w_2 = 0,10$ ) e  $w_2 = 0,80$  e  $w_1 = w_3 = 0,10$ .

A melhor solução dependerá do interesse do projetista, por exemplo, se desejar maior volume do espaço de trabalho, poderá adotar o coeficiente de ponderação  $w_1$  acima de 80%, tendo, porém, uma piora no resultado da destreza. Se desejar uma solução razoável, poderá atribuir igual importância para todos os objetivos.

Tabela 8.3 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, para manipuladores 3R ortogonais, aplicando o MOP e considerando  $d_2 = 1,0$

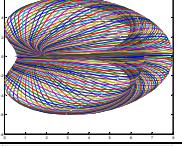
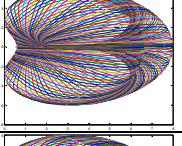
$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4$ $r_2, r_3$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00 0,11	1898,199	1,042	105,669	225	8,34	
	AG	3,00 3,00 3,00 2,99	2383,379	1,895	125,004	1785	59,75	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,667	255	8,88	
	AG	2,65 2,61 2,58 0,10	1301,697	1,040	82,283	2291	82,86	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00	2382,741	1,898	125,077	1500	49,83	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00	2382,741	1,898	125,077	1531	53,21	
$w_1=0,50$ $w_2=0,25$ $w_3=0,25$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,667	1500	55,08	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,11	1899,490	1,042	105,669	1759	128,91	
$w_1=0,25$ $w_2=0,50$ $w_3=0,25$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,667	180	6,01	
	AG	3,00 3,00 2,97 0,10	1890,962	1,038	105,478	1929	143,63	
$w_1=0,25$ $w_2=0,25$ $w_3=0,50$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,667	1500	58,30	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,10	1898,209	1,041	105,668	1920	143,31	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,667	1500	51,88	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,10	1898,199	1,041	105,668	1665	56,15	

Ao considerar  $w_1 = 0,8$  (com  $w_2 = w_3 = 0,1$ ) e  $w_3 = 0,8$  (com  $w_1 = w_2 = 0,1$ ), tem-se, respectivamente, que volume e a rigidez tendem aos valores ideais, isto porque ambos estão sendo maximizados, ao passo que a destreza é bem penalizada, pois é conflitante com os demais objetivos.

### 8.2.2 Método do Critério Global

O problema de otimização é definido pelas métricas  $L_{2R}$  e  $L_{3R}$ , conforme Eqs.(8.5) e (8.6), onde o vetor de parâmetros dimensionais é dado na Eq.(8.8). Os parâmetros ótimos obtidos nas simulações são apresentados na Tab. 8.4.

Tabela 8.4 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais, aplicando o MCG e considerando  $d_2 = 1,0$

Métrica	Método	$d_3, d_4$ $r_2, r_3$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destr.	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,667	180	6,17	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,16	1903,329	1,057	105,689	1744	127,75	
$L_{3R}$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,667	210	7,41	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,21	1903,895	1,077	105,749	1743	136,30	

Para a obtenção dos dados apresentados nas Tabs. 8.3 e 8.4, o custo computacional foi bem menor quando comparado aos resultados das Tabs. 8.1 e 8.2, isto se deve ao fato de que nos manipuladores 3R ortogonais, a matriz Jacobiana, dada na Eq.(2.15), não depende do ângulo de junta  $\theta_1$ , consequentemente, não utiliza a discretização deste ângulo, apenas de  $\theta_2$  e  $\theta_3$ .

É desejável que um manipulador tenha a maior agilidade possível para executar tarefas no espaço de trabalho. No entanto, isto ocorre quando o índice de isotropia (adotado neste trabalho para definir a destreza) tende a um.

Neste estudo de caso, a destreza ideal foi de 1,026; e, observando a Tab. 8.3, verifica-se que a destreza se aproxima do valor ideal quando é adotado fator de ponderação igual a  $w_2 = 0,50$  e utilizando o AG. Neste caso, houve uma grande redução do volume e da rigidez (o que pode não ser interessante para a indústria). No entanto, uma solução que apresenta uma destreza sem piorar muito o volume e a rigidez pode ser obtida pelas métricas  $L_2$  e  $L_3$  relativas, como mostra a Tab. 8.4. Outra forma de obter uma solução de compromisso é atribuir igual prioridade para todos os objetivos. Entretanto, cabe ao projetista decidir qual será a melhor solução.

É válido mencionar que em todas as simulações deste capítulo as variáveis otimizadas permaneceram na faixa exigida, ou seja, o espaço de busca viável sempre foi obedecido.

De modo geral, conclui-se que o problema é mais sensível ao otimizar o volume e a rigidez, que possuem o mesmo comportamento, ao passo que ao otimizar a destreza, piora o volume e a rigidez, pois são objetivos conflitantes.

Em todas as tabelas, observa-se que o maior volume e rigidez são atingidos quando os parâmetros dimensionais do manipulador tendem ao limite máximo do espaço de busca, que é um dos objetivos deste trabalho.

Outra importante contribuição nesta etapa do trabalho foi verificar que a destreza tem grande influência na obtenção do projeto ótimo de manipuladores 3R. Além disso, as simulações iniciais permitiram verificar a validade da metodologia proposta, visando a otimização do problema na presença de restrições.

### 8.3. Otimização restrita de Manipuladores 3R Ortogonais, considerando $r_3 = 0$

Estas simulações visam à obtenção do projeto ótimo de manipuladores 3R ortogonais considerando a escolha de algumas topologias pré-determinadas. Para a solução do problema ótimo são aplicadas as técnicas de otimização apresentadas no capítulo 7.

Conforme visto no capítulo 4, quando o parâmetro dimensional  $r_3$  é considerado nulo, é possível escolher nove tipos de topologias do espaço de trabalho, cujas curvas são dadas pelas Eqs.(3.41), (4.13), (4.16), (4.18) e (4.28) a (4.30) e representadas na Fig. 4.31, para o caso particular em que o parâmetro dimensional  $r_2 = 1,0$  [u.c.].

Uma tela com um menu de entrada de dados e outra tela com os resultados ótimos foram criadas para facilitar o uso do código computacional, como mostrado na Fig. 8.1(a) e 8.1(b), respectivamente.

Na tela de entrada o projetista pode escolher o método de otimização multi-objetivo, o tipo de topologia e definir as restrições laterais, ou seja, a dimensão máxima do tamanho dos segmentos do manipulador. Na tela de saída, podem ser vistos os valores ótimos para o volume, a rigidez e a destreza, bem como seus valores ideais. Além disso, apresenta as dimensões ótimas e a seção radial do espaço de trabalho que representa a topologia escolhida.

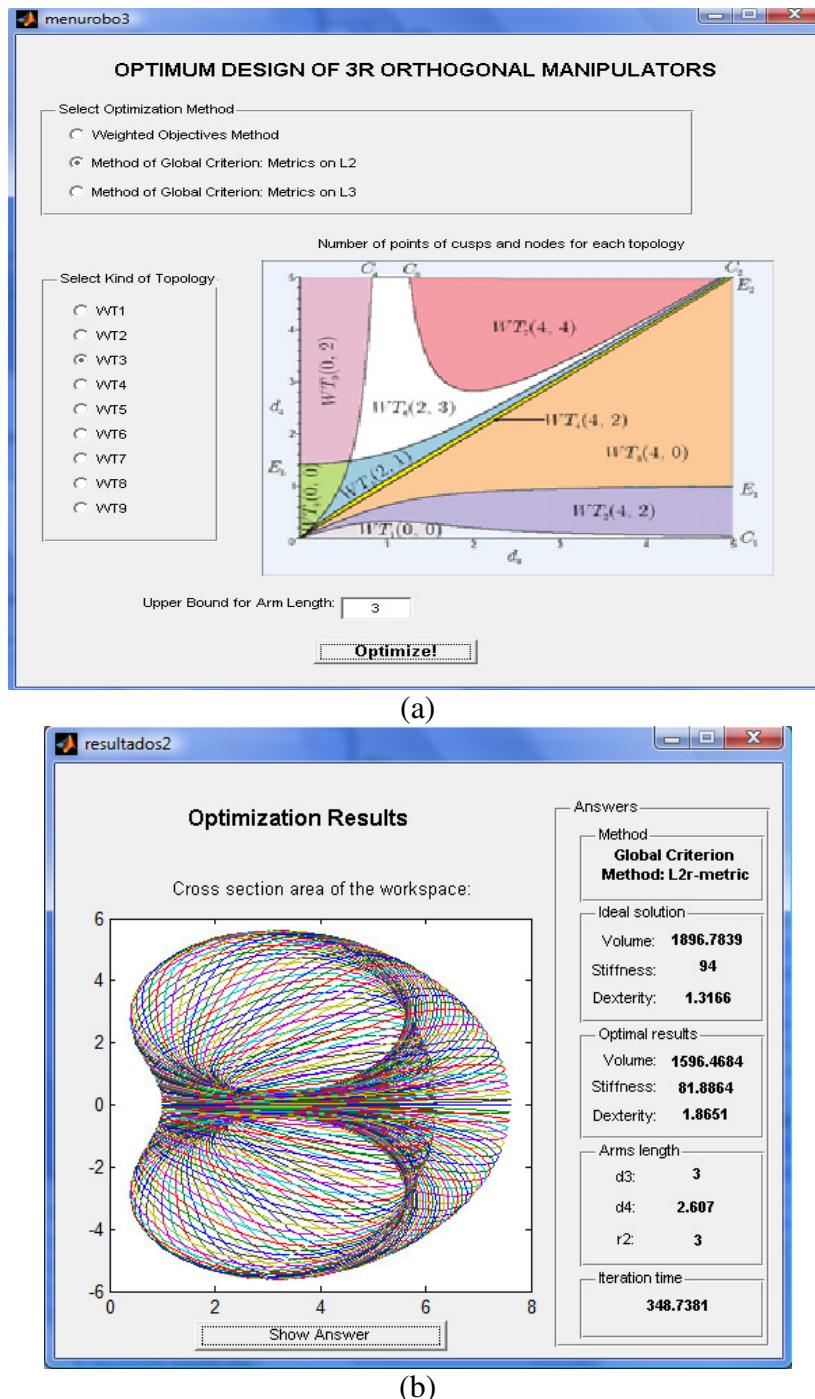


Figura 8.1 - (a) Tela com o menu de entrada de dados; (b) Tela de saída dos resultados ótimos

Para estas simulações, além das técnicas aleatórias ED e AG, foi utilizado o método sequencial *Programação Sequencial Quadrática* (PSQ). Como este é um modelo multimodal, a solução ótima depende do ponto inicial fornecido pelo usuário, sendo assim, em cada caso estudado, foram testados vários pontos iniciais: os limites inferior e superior do espaço de

busca, o ponto médio deste espaço e o ponto ótimo obtido pela ED. Para os resultados que são apresentados nas tabelas, adotou-se como ponto inicial o ponto ótimo obtido pela ED.

Em todos os casos apresentados a seguir, os parâmetros utilizados por ED e AG foram os mesmos utilizados na seção 8.2. As soluções ideais foram obtidas por ED em cada caso estudado (com número máximo de gerações igual a 200) e a PSQ foi aplicada utilizando a sub-rotina *fmincon* do Matlab®. Como se trata de problemas restritos utilizou-se funções de penalidade conforme Eq.(6.14) e adotou-se o fator de penalidade  $r_p = 1000$ .

### 8.3.1 Caso 1 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_1(0, 0)$

Deseja-se que o manipulador pertença à topologia  $WT_1(0, 0)$ . No capítulo 4, foi visto que a seção radial do espaço de trabalho dos manipuladores pertencentes a esta topologia possui um vazio em seu interior, não possuem pontos de cúspides e nem pontos de nós. A Fig. 8.2(a) mostra um ponto qualquer representando um manipulador pertencente à topologia  $WT_1$  e na Fig. 8.2(b) tem-se a seção radial do espaço de trabalho de tal manipulador, onde  $V = 31,951$  [u.v.];  $D = 2,743$  e  $R = 8,081$  [u.r.]. Para este exemplo, adotou-se  $d_3 = 1,1$ ;  $d_4 = 0,3$  e  $r_2 = 0,5$  [u.c.].

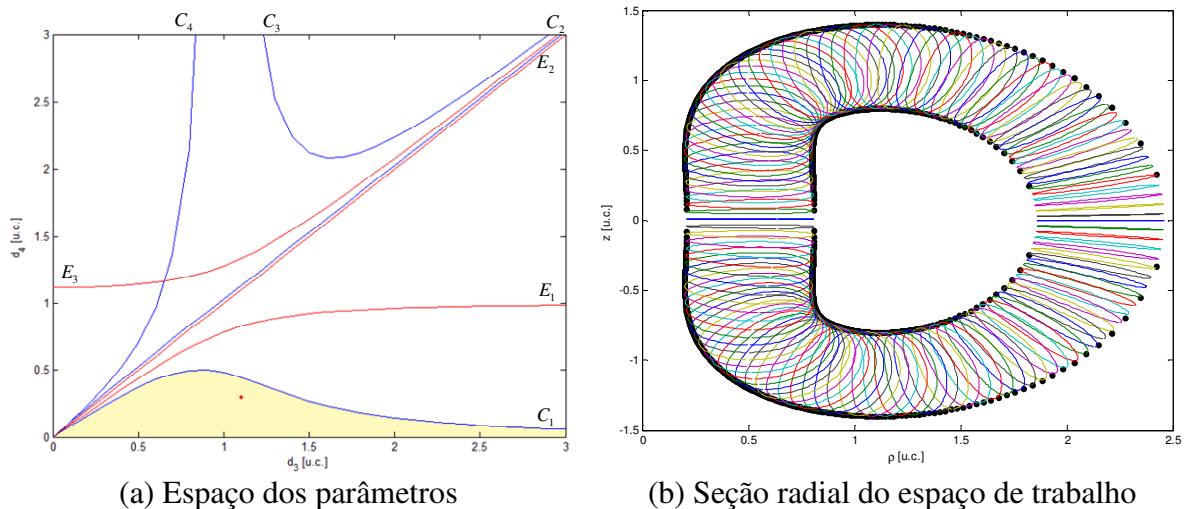


Figura 8.2 - Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia  $WT_1(0, 0)$

Observando a Fig. 8.2(a), verifica-se que a única restrição a ser obedecida é: o ponto ótimo deverá estar abaixo da curva de separação  $C_1$ . Assim, o problema de otimização multi-objetivo restrito, considerando o Método dos Objetivos Ponderados, é escrito conforme a Eq.(6.13), e reescrito a seguir:

$$\text{Maximizar } F(x) = w_1 \frac{V}{V^o} - w_2 \frac{D}{D^o} + w_3 \frac{R}{R^o} - r_p P(x), \quad x = (d_3, d_4, r_2)^T \quad (8.10)$$

Sujeito a:

Restrições Laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.] e

$$\text{Pontos abaixo da curva } C_I: \quad d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \Rightarrow$$

$$g_1(x) = d_4 - \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \leq 0, \quad (8.11)$$

sendo  $A$  e  $B$  dados pela Eq.(3.40),  $P(x)$  dada conforme Eq.(6.14) e as soluções ideais:  $V^0 = 315,298$  [u.v.];  $D^0 = 1,182$  e  $R^0 = 35,552$  [u.r.].

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.5. A melhor solução, utilizando o MOP, depende do interesse do projetista, pois as funções são conflitantes.

Observa-se que todas as técnicas obtiveram resultados que se distanciam bastante dos valores ideais, mesmo quando se atribui alta prioridade, por exemplo, para o volume e a rigidez, isto mostra a dificuldade imposta pela restrição, que força a obtenção de uma solução ótima na topologia  $WT_1$ . Para este caso, apenas a destreza com prioridade de 80% não sofre alterações (até a segunda casa decimal) e tende ao valor ideal, no entanto, piora significativamente os valores do volume e da rigidez.

Ao considerar o Método do Critério Global, o problema de otimização multi-objetivo, dado pelas Eqs.(8.5) e (8.6), é reescrito como:

$$\text{Minimizar } L_{2R}(f) = \left( \left( \frac{V^0 - V}{V^0} \right)^2 + \left( \frac{D^0 - D}{D^0} \right)^2 + \left( \frac{R^0 - R}{R^0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + r_p P(x) \quad (8.12)$$

$$\text{Minimizar } L_{3R}(f) = \left( \left( \frac{V^0 - V}{V^0} \right)^3 + \left( \frac{D^0 - D}{D^0} \right)^3 + \left( \frac{R^0 - R}{R^0} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} + r_p P(x) \quad (8.13)$$

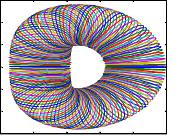
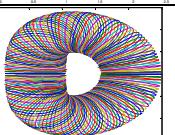
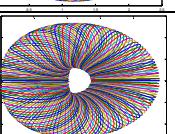
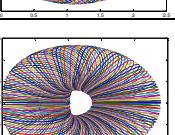
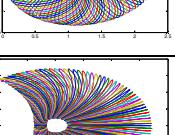
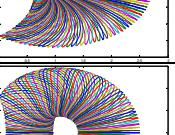
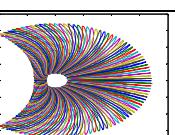
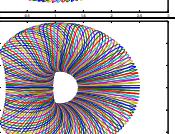
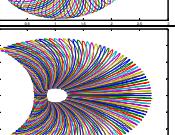
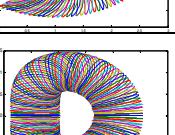
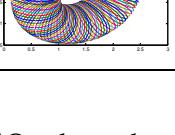
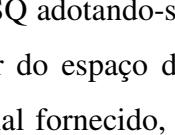
Sujeito às restrições laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.] e à Eq.(8.11).

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.6. As soluções obtidas representam um compromisso entre as três funções objetivo em estudo.

Tabela 8.5 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando  $r_3=0$  e a topologia  $WT_1$

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	0,96 0,75 0,10	59,587	1,909	10,851	915	49,22	
	AG	1,01 0,44 0,62	42,885	1,544	8,723	2397	87,54	
	PSQ	0,97 0,73 0,10	58,640	1,866	10,722	44	1,65	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	0,60 0,43 0,48	22,679	1,184	5,633	1050	60,88	
	AG	0,60 0,43 0,49	22,639	1,184	5,628	2301	89,12	
	PSQ	0,60 0,43 0,48	22,659	1,185	5,623	49	1,78	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	0,97 0,74 0,10	59,144	1,887	10,794	1125	56,39	
	AG	1,00 0,44 0,61	42,567	1,513	8,653	2342	121,90	
	PSQ	0,97 0,74 0,10	59,0072	1,882	10,781	78	1,01	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	0,97 0,73 0,10	58,635	1,866	10,721	1275	67,34	
	AG	0,65 0,44 0,52	25,456	1,187	6,045	2316	117,73	
	PSQ	0,71 0,44 0,55	28,979	1,226	6,564	189	7,06	

Tabela 8.6 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_1$

	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	0,95 0,45 0,59	40,867	1,417	8,346	1260	65,17	
	AG	0,97 0,45 0,59	41,728	1,448	8,464	2200	87,39	
	PSQ-ED	0,95 0,45 0,59	40,856	1,419	8,344	37	1,45	
	PSQ-inf	0,82 0,51 0,47	37,688	1,477	7,729	132	1,90	
	PSQ-sup	0,91 0,46 0,59	39,437	1,377	8,119	62	0,90	
	PSQ-pm	0,93 0,46 0,59	40,243	1,396	8,232	59	0,86	
$L_{3R}$	ED	0,97 0,73 0,10	58,637	1,866	10,721	930	36,30	
	AG	0,92 0,54 0,41	44,334	1,667	8,662	2188	75,20	
	PSQ-ED	0,94 0,71 ,16	55,949	1,781	10,309	51	1,75	
	PSQ-inf	1,02 0,45 0,58	43,933	1,570	8,828	95	1,41	
	PSQ-sup	1,02 0,45 0,58	43,911	1,570	8,825	69	1,01	
	PSQ-pm	1,02 0,45 0,58	43,717	1,559	8,795	103	1,46	

Para este estudo de caso, a Tab. 8.6 mostra os resultados obtidos pela PSQ adotando-se vários pontos iniciais, a saber: limite inferior, ponto médio e limite superior do espaço de busca e a solução ótima obtida por ED. Verifica-se que para cada ponto inicial fornecido, a técnica sequencial obteve uma solução diferente. Este comportamento indica que trata-se de um problema com a presença de vários mínimos locais. Sendo assim, para os demais casos estudados nesta pesquisa, adotou-se como ponto inicial a solução ótima obtida por ED. Desta forma, trabalhando com a otimização híbrida (aplicando ED para obter o ponto inicial e a

seguir a PSQ), torna-se possível aliar as melhores características de cada um dos métodos: a capacidade de escapar dos mínimos locais (ED) e a alta taxa de convergência (PSQ).

Observando as Tabs. 8.5 e 8.6 verifica-se que, na maioria das vezes, os resultados obtidos por ED e PSQ são próximos, ao passo que os obtidos por AG diferenciam um pouco, tanto usando o MOP quanto o MCG, diferindo apenas no custo computacional. No entanto, as técnicas obtiveram resultados coerentes.

Neste exemplo, os baixos valores apresentados nas Tabs. 8.5 e 8.6, em relação aos valores ideais, são devidos às dificuldades impostas pela restrição  $g_1$ , que é difícil de ser obedecida já que a curva  $C_1$  só pode admitir raiz real. Apesar disto, pode-se dizer que o ponto ótimo obedeceu à restrição imposta, pois seu maior valor ( $g_1 = 0,0004$ ) foi pequeno, apesar de configurar uma restrição ativa.

Para ilustrar este caso, a Fig. 8.3 mostra o projeto ótimo do manipulador 3R considerando a métrica  $L_{2R}$ , dada na Eq.(8.12), obtido utilizando a técnica ED. O ponto ótimo está marcado no espaço dos parâmetros  $(d_3, d_4)$ , conforme Fig. 8.3(a). A área da seção radial ótima do espaço de trabalho é apresentada na Fig. 8.3(b). O esquema do manipulador ótimo pertencendo à topologia  $WT_1$  é representado na Fig. 8.3(c).

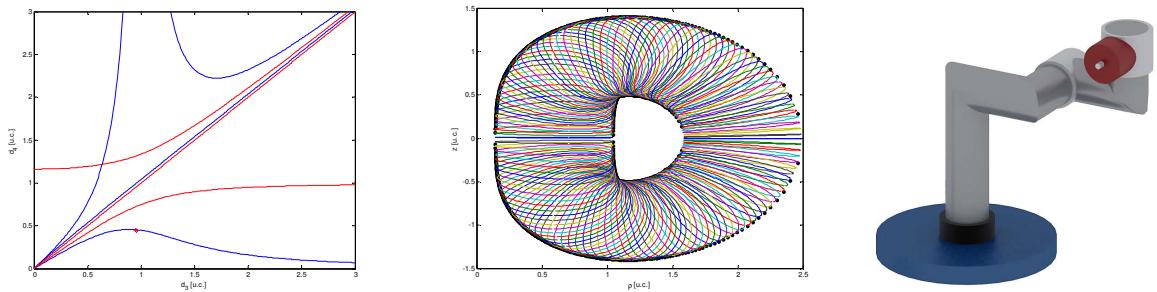


Figura 8.3 - Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica  $L_{2R}$  e a topologia  $WT_1$

Comparando a seção radial da Fig. 8.3(b) com a Fig. 8.2(b), observa-se que o projeto ótimo resulta em um manipulador com maior volume (o vazio do espaço de trabalho foi reduzido), menor índice de isotropia e maior rigidez, portanto, a otimização foi eficiente para os três objetivos em questão, pois a seção apresentada na Fig. 8.3(b) corresponde a  $V = 40,867$  [u.v.];  $D = 1,417$  e  $R = 8,346$  [u.r.].

### 8.3.2 Caso 2 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_3(4, 0)$

Neste caso, deseja-se que o manipulador pertença à topologia  $WT_3(4, 0)$ . A seção radial do espaço de trabalho dos manipuladores que pertencem a esta topologia possui 4 pontos de

cúspides e nenhum ponto de nó. A Fig. 8.4(a) mostra um ponto qualquer que representa um manipulador pertencente a esta topologia e na Fig. 8.4(b) tem-se a seção radial do espaço de trabalho de tal manipulador (para  $d_3 = 2,0$ ;  $d_4 = 1,0$  e  $r_2 = 1,0$  [u.c.]) e para este exemplo, tem-se  $V = 251,511$  [u.v.];  $D = 1,015$  e  $R = 27,164$  [u.r.].

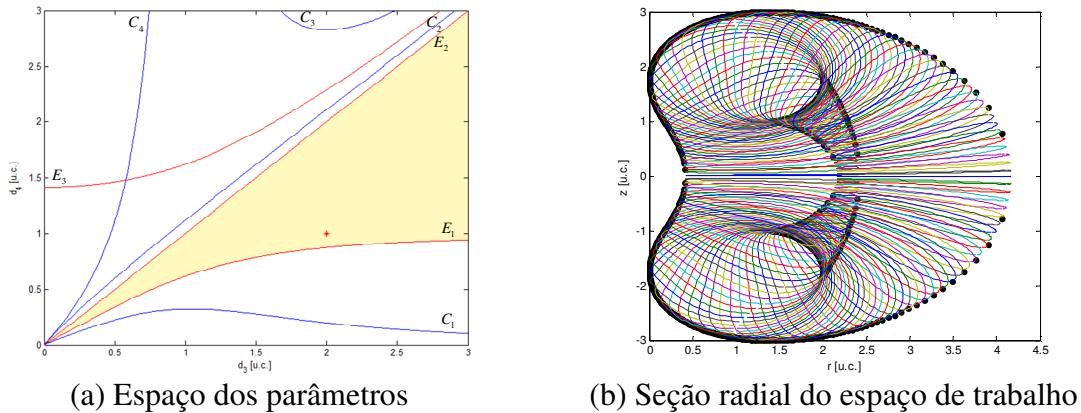


Figura 8.4 - Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia  $WT_3(4, 0)$

Observando a Fig. 8.4(a), verifica-se que para as restrições serem obedecidas, o ponto ótimo deverá estar acima da curva de separação  $E_1$  e abaixo de  $E_2$ . Assim, o problema considerando o Método dos Objetivos Ponderados, é dado por:

Maximizar  $F(x)$ , dada na Eq.(8.10), sujeito às restrições:

Laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.];

Pontos acima da curva  $E_1$ :  $d_4 = \frac{1}{2}(A - B) \Rightarrow g_1(x) = -d_4 + \frac{1}{2}(A - B) \leq 0$  e

(8.14)

Abaixo de  $E_2$ :  $d_4 = d_3 \Rightarrow g_2(x) = d_4 - d_3 = 0$ ,

sendo  $A$  e  $B$  dados pela Eq.(3.40),  $P(x)$  dada conforme Eq.(6.14) e as soluções ideais:  $V^0 = 1896,784$  [u.v.];  $D^0 = 1,018$  e  $R^0 = 105,657$  [u.r.].

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.7.

Tabela 8.7 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_3$

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	1500	73,89	
	AG	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	1564	114,02	
	PSQ	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	8	0,39	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	3,00 3,00 2,99	1892,498	1,017	105,590	300	9,80	
	AG	3,00 2,97 2,94	1850,929	1,010	104,119	2342	114,56	
	PSQ	3,00 2,97 2,94	1850,966	1,010	104,136	95	3,55	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	1500	55,21	
	AG	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	1539	119,84	
	PSQ	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	8	0,34	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	165	12,87	
	AG	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	1482	55,03	
	PSQ	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	8	0,35	

Considerando o Método do Critério Global, o problema de otimização multi-objetivo torna-se:

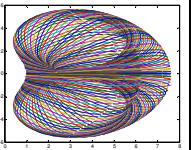
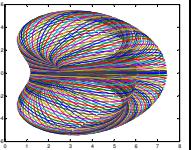
Minimizar  $F(x)$ , dada nas Eqs.(8.12) e (8.13),

Sujeito às restrições laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.] e à Eq.(8.14).

A Tabela 8.8 apresenta os resultados da otimização. As soluções obtidas representam um compromisso entre os objetivos.

Observando as Tabs. 8.7 e 8.8 verifica-se que mesmo com a imposição das restrições, os resultados não sofreram grandes alterações em relação aos valores ideais, pois neste caso, as restrições são mais simples. Observa-se ainda que as três técnicas obtiveram valores muito próximos, diferindo apenas no custo computacional.

Tabela 8.8 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_3$

	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	190	13,35	
	AG	3,00 3,00 3,00	1896,775	1,018	105,657	1681	59,78	
	PSQ	3,00 3,00 3,00	1896,780	1,018	105,657	27	1,04	
$L_{3R}$	ED	3,00 3,00 3,00	1896,784	1,018	105,657	165	11,93	
	AG	3,00 3,00 3,00	1896,771	1,018	105,657	1696	66,28	
	PSQ	3,00 3,00 3,00	1896,777	1,018	105,657	25	1,01	

Para ilustrar este caso, a Fig. 8.5 mostra o projeto ótimo do manipulador para a topologia  $WT_3$ , considerando a métrica  $L_{2R}$  e a ED. Na Fig. 8.5(a) é representado o ponto ótimo marcado no espaço dos parâmetros  $(d_3, d_4)$ . A área da seção radial ótima do espaço de trabalho é apresentada na Fig. 8.5(b).

Comparando a seção radial da Fig. 8.5(b) com a Fig. 8.4(b), observa-se que o manipulador apresenta volume do espaço de trabalho e rigidez significativamente maiores, contudo, o índice de isotropia se mantém. O manipulador da Fig. 8.5(b) possui  $V = 1896,784$  [u.v.];  $D = 1,018$  e  $R = 105,657$  [u.r.]. O esquema do manipulador ótimo pertencendo à topologia  $WT_3$  é representado na Fig. 8.5(c). Vale ressaltar que o ponto ótimo obedeceu às restrições:  $g_1 = -1,9098$  e  $g_2 = -0,3929$ .

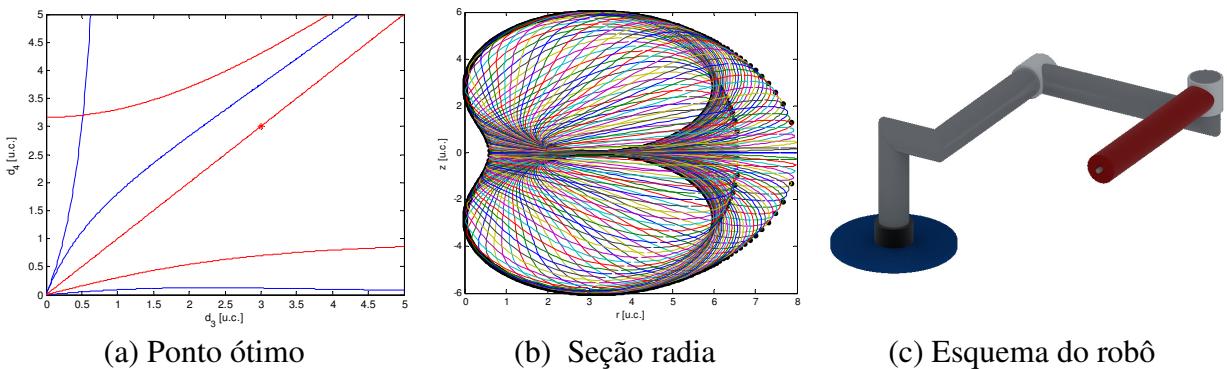


Figura 8.5 - Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica  $L_{2R}$  e a topologia  $WT_3$

### 8.3.3 Caso 3 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_5(2, 1)$

Deseja-se que o manipulador pertença à topologia  $WT_5(2, 1)$ . A seção radial do espaço de trabalho dos manipuladores que pertencem a esta topologia possui uma região com 2 soluções no MGI e outra com 4 soluções (a envoltória interna tem forma de peixe), 2 pontos de cúspides e um ponto de nó. A Fig. 8.6(a) mostra um ponto que representa um manipulador qualquer nesta topologia e na Fig. 8.6(b) tem-se a seção radial do espaço de trabalho de tal manipulador com  $V = 1181,834$  [u.v.];  $D = 1,410$  e  $R = 78,557$  [u.r.]. Neste exemplo,  $d_3 = 2,0$ ;  $d_4 = 3,0$  e  $r_2 = 2,5$  [u.c.].

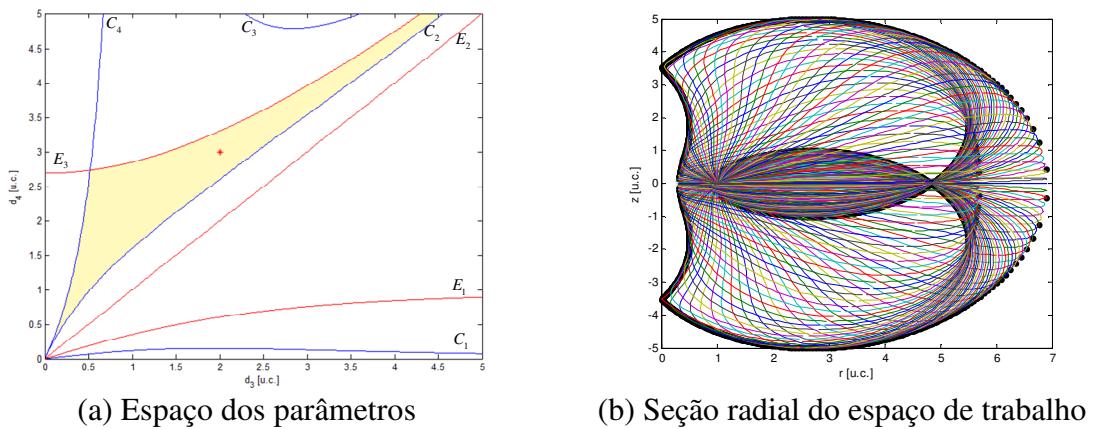


Figura 8.6 - Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia  $WT_5(2, 1)$

Observando a Fig. 8.6(a), verifica-se que o projeto ótimo deve pertencer à região formada pelas curvas  $C_2$ ,  $C_4$  e  $E_3$ , ou seja, para que as restrições sejam obedecidas, a solução ótima deve estar acima da curva  $C_2$ , à direita de  $C_4$  e abaixo de  $E_3$ . Assim, considerando o Método dos Objetivos Ponderados, o problema de otimização é escrito como:

Maximizar  $F(x)$ , dada na Eq.(8.10), sujeito às restrições:

Laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.];

Abaixo de  $E_3$ :  $d_4 = \frac{1}{2}(A+B) \Rightarrow g_1(x) = d_4 - \frac{1}{2}(A+B) \leq 0$

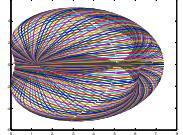
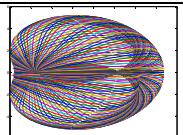
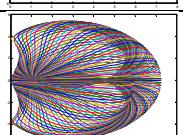
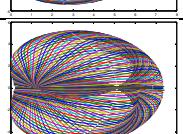
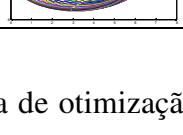
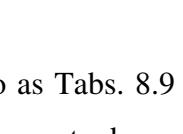
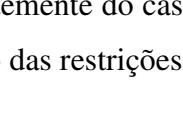
À direita de  $C_4$ :  $d_4 = \frac{d_3}{1-d_3}B \Rightarrow g_2(x) = d_4 - \frac{d_3}{1-d_3}B \leq 0$ , se  $d_3 < 1$  (8.15)

E acima de  $C_2$ :  $d_4 = \frac{d_3}{1+d_3}A \Rightarrow g_3(x) = -d_4 + \frac{d_3}{1+d_3}A \leq 0$ ,

sendo  $A$  e  $B$  dados pela Eq.(3.40),  $P(x)$  dada conforme Eq.(6.14) e as soluções ideais:  $V^0 = 1597,697$  [u.v.];  $D^0 = 1,028$  e  $R^0 = 94,099$  [u.r.].

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.9, observa-se que as técnicas obtêm resultados próximos, exceto ao atribuir maior prioridade para a destreza ( $w_2 = 0,80$ ).

Tabela 8.9 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_5$

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	2,18 3,00 3,00	1412,614	1,191	86,249	675	25,27	
	AG	2,21 3,00 2,95	1412,391	1,188	86,408	2029	68,73	
	PSQ	2,19 3,00 2,98	1414,456	1,187	86,328	188	8,82	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	2,18 3,00 3,00	1413,013	1,191	86,265	810	30,80	
	AG	1,91 2,53 2,52	904,968	1,167	64,138	2283	79,24	
	PSQ	2,20 3,00 2,97	1412,642	1,186	86,356	31	1,21	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	2,38 3,00 2,59	1404,409	1,273	87,672	1050	38,13	
	AG	2,18 3,00 3,00	1412,962	1,191	86,265	2079	72,09	
	PSQ	2,38 3,00 2,58	1404,451	1,273	87,681	144	5,99	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	2,20 3,00 2,97	1412,775	1,186	86,356	750	24,46	
	AG	2,20 3,00 2,97	1412,766	1,186	86,370	2104	77,77	
	PSQ	2,21 3,00 2,95	1412,059	1,189	86,419	16	0,66	

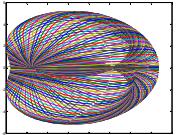
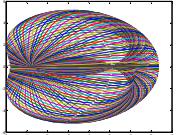
Ao considerar o Método do Critério Global, tem-se o seguinte problema de otimização multi-objetivo:

Minimizar  $F(x)$ , dada nas Eqs.(8.12) e (8.13),

Sujeito às restrições dadas na Eq.(8.15).

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.10. Observando as Tabs. 8.9 e 8.10 verifica-se que as três técnicas obtiveram valores próximos, mas, diferentemente do caso anterior, este valores se distanciam dos ideais, uma consequência da imposição das restrições.

Tabela 8.10 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_5$

	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	2,18 3,00 3,00	1413,061	1,191	86,267	540	16,34	
	AG	2,20 3,00 2,97	1412,757	1,186	86,355	2183	85,81	
	PSQ	2,20 3,00 2,97	1412,645	1,186	86,357	30	1,10	
$L_{3R}$	ED	2,18 3,00 3,00	1413,019	1,191	86,265	525	19,55	
	AG	2,20 3,00 2,97	1412,648	1,186	86,348	2236	82,71	
	PSQ	2,20 3,00 2,97	1412,643	1,186	86,356	38	1,47	

A Figura 8.7 mostra o projeto ótimo do manipulador pertencendo à topologia  $WT_5$ , considerando a métrica  $L_{2R}$  e a ED. Na Fig. 8.7(a), o ponto ótimo está marcado no espaço dos parâmetros  $(d_3, d_4)$ . A área da seção radial ótima do espaço de trabalho é apresentada na Fig. 8.7(b).

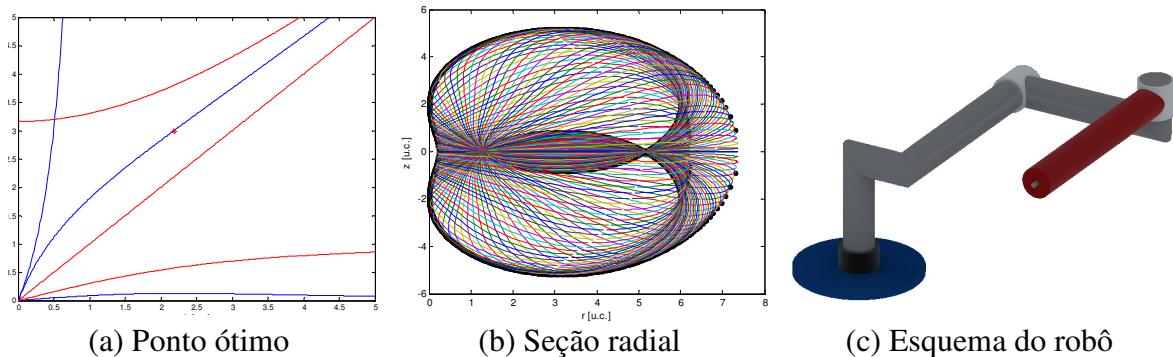


Figura 8.7 - Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica  $L_{2R}$  e a topologia  $WT_5$

Ao se comparar a seção radial da Fig. 8.7(b) com a Fig. 8.6(b) nota-se que o projeto ótimo resulta em um manipulador com maior volume e rigidez e menor índice de isotropia, pois  $V = 1413,061$  [u.v.];  $D = 1,191$  e  $R = 86,267$  [u.r.].

O esquema do manipulador ótimo pertencendo à topologia  $WT_5$  é representado na Fig. 8.7(c). O ponto ótimo obedeceu à tolerância imposta para as restrições:  $g_1 = -0,7997$ ;  $g_2 = 0$  e  $g_3 = 0,0003$  (restrição ativa, apesar de ter um valor muito pequeno).

### 8.3.4 Caso 4 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_6(2, 3)$

Neste caso, deseja-se que o manipulador pertença à topologia  $WT_6(2, 3)$ . A seção radial do espaço de trabalho dos manipuladores que pertencem a esta topologia possui 2 pontos de cúspides e 3 pontos de nós, sendo que 2 destes nós são formados pela interseção da envoltória interna com a externa. A Fig. 8.8(a) mostra um ponto qualquer que representa um manipulador pertencente a esta topologia e na Fig. 8.8(b) tem-se a seção radial do espaço de trabalho de tal manipulador (para  $d_3 = 1,5$ ;  $d_4 = 2,5$  e  $r_2 = 1,0$  [u.c.]), com  $V = 494,584$  [u.v.];  $D = 2,036$  e  $R = 48,633$  [u.r.].

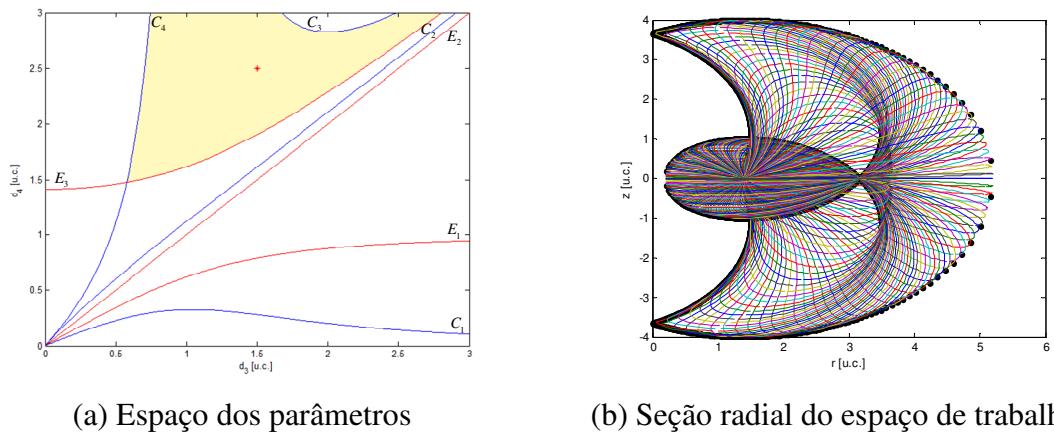


Figura 8.8 - Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia  $WT_6(2, 3)$

Observando a Fig. 8.8(a), verifica-se que para as restrições serem obedecidas, o projeto ótimo deverá estar abaixo da curva  $C_3$ , à direita de  $C_4$  e acima de  $E_3$ . Assim, o problema considerando o Método dos Objetivos Ponderados, é dado por:

Maximizar  $F(x)$ , dada na Eq.(8.10), sujeito às restrições:

Laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.]

$$\text{Pontos abaixo da curva } C_3 (d_3 > 1): \quad d_4 = \frac{d_3}{d_3 - 1} B \quad \Rightarrow \quad g_1(x) = d_4 - \frac{d_3}{d_3 - 1} B \leq 0$$

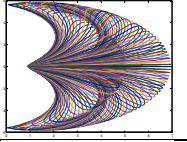
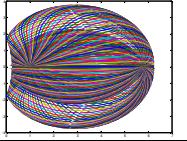
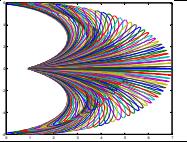
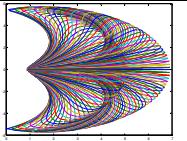
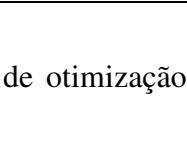
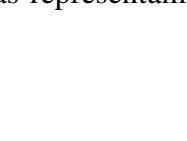
$$\text{À direita de } C_4 (d_3 < 1): \quad d_4 = \frac{d_3}{1 - d_3} B \quad \Rightarrow \quad g_2(x) = d_4 - \frac{d_3}{1 - d_3} B \leq 0 \quad \text{e} \quad (8.16)$$

$$\text{Acima de } E_3: \quad d_4 = \frac{1}{2}(A + B) \quad \Rightarrow \quad g_3(x) = -d_4 + \frac{1}{2}(A + B) \leq 0,$$

sendo  $A$  e  $B$  dados pela Eq.(3.40),  $P(x)$  dada conforme Eq.(6.14) e as soluções ideais:  $V^0 = 1371,606$  [u.v.];  $D^0 = 1,400$  e  $R^0 = 94,014$  [u.r.].

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.11. Para este caso, as restrições afetam os resultados, como pode ser observado, por exemplo, na primeira linha da referida tabela, pois ao atribuir fator de ponderação igual a 80% para o volume, verifica-se que seu valor se distancia do ideal. Além disso, vale ressaltar que a forma da seção transversal, assim como as regiões com 2 e com 4 soluções do MGI, são bastante diversas nos resultados apresentados (ver última coluna da Tab. 8.11).

Tabela 8.11 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_6$

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	2,84 3,00 0,91	1219,281	1,743	90,982	975	33,97	
	AG	2,84 3,00 0,92	1220,756	1,742	90,904	2142	73,49	
	PSQ	2,84 3,00 0,91	1218,696	1,743	91,001	296	9,96	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	0,75 3,00 2,74	749,297	1,454	57,077	870	33,37	
	AG	1,86 2,99 2,74	1040,058	1,582	73,551	2301	87,29	
	PSQ	0,75 3,00 2,74	749,307	1,454	57,078	97	3,78	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	2,97 3,00 0,40	1181,443	1,866	93,438	855	31,66	
	AG	2,75 3,00 1,14	1210,333	1,692	89,256	2226	76,91	
	PSQ	2,97 3,00 0,38	1178,322	1,870	93,491	53	2,05	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	2,79 3,00 1,17	1212,900	1,683	88,941	1185	40,85	
	AG	2,71 3,00 1,21	1211,277	1,682	88,621	2041	71,90	
	PSQ	2,74 3,00 1,15	1210,367	1,685	89,117	54	1,90	

Agora, considerando o Método do Critério Global, tem-se o problema de otimização multi-objetivo:

Minimizar  $F(x)$ , dada nas Eqs.(8.12) e (8.13),

Sujeito às restrições laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.] e à Eq.(8.16).

A Tabela 8.12 apresenta os resultados da otimização. As soluções obtidas representam um compromisso entre os objetivos.

Tabela 8.12 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_6$

	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	2,59 3,00 1,42	1200,696	1,641	86,419	1005	33,36	
	AG	2,59 3,00 1,43	1200,408	1,641	86,331	2060	76,73	
	PSQ	2,59 3,00 1,42	1199,946	1,641	86,447	41	1,60	
$L_{3R}$	ED	2,44 3,00 1,65	1177,988	1,613	83,650	990	34,79	
	AG	2,42 3,00 1,67	1173,648	1,614	83,413	2128	80,65	
	PSQ	2,44 3,00 1,65	1177,727	1,613	83,638	89	3,41	

Para ilustrar este caso, a Fig. 8.9 mostra o projeto ótimo do manipulador para a topologia  $WT_6$ , considerando a métrica  $L_{2R}$  e a ED. A Fig. 8.9(a) mostra o ponto ótimo marcado no espaço dos parâmetros  $(d_3, d_4)$ . A área da seção radial ótima do espaço de trabalho é apresentada na Fig. 8.9(b).

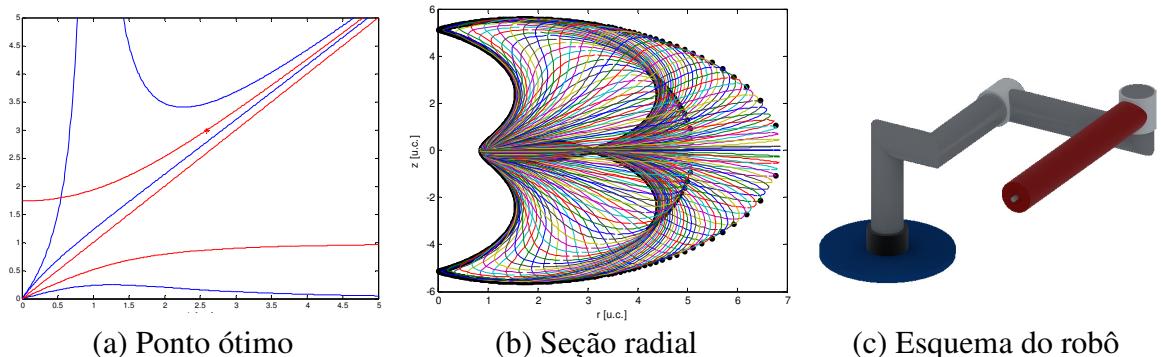


Figura 8.9 - Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica  $L_{2R}$  e a topologia  $WT_6$

Observando as Figs. 8.8(a) e 8.9(a) verifica-se que o projeto ótimo foi para a fronteira com a topologia  $WT_5(2, 1)$ . Comparando a seção radial da Fig. 8.8(b) com a Fig. 8.9(b), observa-se que a otimização reduziu o número de nós de 3 para 1. A envoltória em forma de peixe ficou totalmente dentro da envoltória externa, eliminando os 2 nós de interseção das envoltórias interna e externa, conforme mostrado na Fig. 8.10. Neste caso, tem-se um manipulador com volume do espaço de trabalho e rigidez significativamente maior e menor índice de isotropia, mais uma vez a otimização foi eficiente para os três objetivos em questão:  $V = 1200,696$  [u.v.];  $D = 1,641$  e  $R = 86,419$  [u.r.].

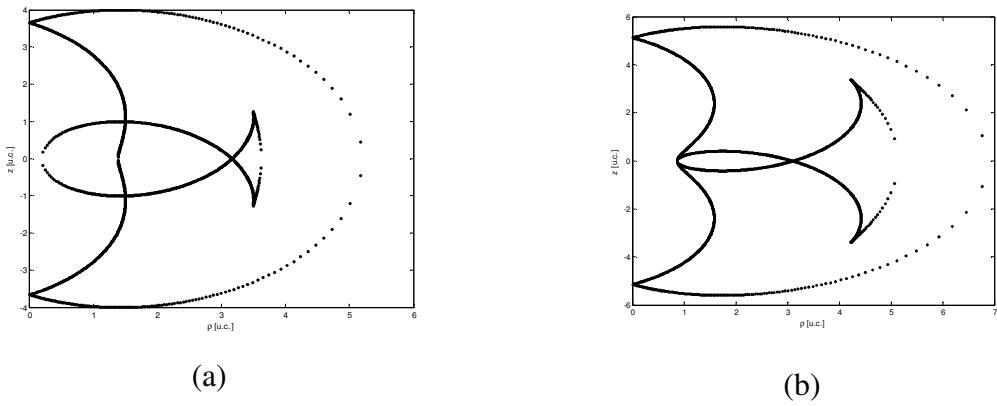


Figura 8.10 - Gráfico das envoltórias no plano  $rz$ , comparando as seções radiais do espaço de trabalho

O esquema do manipulador ótimo pertencendo à topologia  $WT_6$  é representado na Fig. 8.9(c). Vale ressaltar que o ponto ótimo obedeceu à tolerância imposta para as restrições:  $g_1 = -0,4782$ ;  $g_2 = 0$  e  $g_3 = 0,0004$ .

### 8.3.5 Caso 5 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_9(0, 2)$

Neste último caso, o manipulador deve pertencer à topologia  $WT_9(0, 2)$ . A seção radial do espaço de trabalho dos manipuladores pertencentes a esta topologia não possui vazio em seu interior, mas uma região com 4 soluções no MGI. Não possui pontos de cúspides, mas possui 2 pontos de nós formados pela interseção das envoltórias interna e externa. A Fig. 8.11(a) mostra um ponto qualquer representando um manipulador pertencente à topologia  $WT_9$  e na Fig. 8.11(b) tem-se a seção radial do espaço de trabalho de tal manipulador, onde  $V = 151,676$  [u.v.];  $D = 2,096$  e  $R = 21,727$  [u.r.]. Para este exemplo, os parâmetros adotados foram:  $d_3 = 0,3$ ;  $d_4 = 2,0$  e  $r_2 = 1,0$  [u.c.].

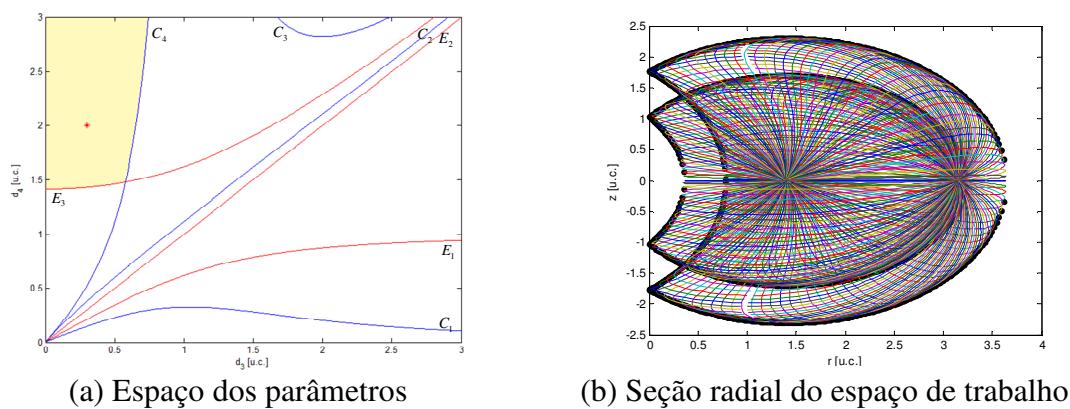


Figura 8.11 - Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia  $WT_9(0, 2)$

Observando a Fig. 8.11(a) verifica-se que para as restrições serem obedecidas, a solução ótima deve estar à esquerda de  $C_4$  e acima de  $E_3$ . Assim, considerando o Método dos Objetivos Ponderados, o problema de otimização é escrito como:

Maximizar  $F(x)$ , dada na Eq.(8.10), sujeito às restrições:

Laterais:  $0,1 < d_3 < 1,00$  [u.c.] e  $0,1 < d_4, r_2 < 3,0$  [u.c.];

$$\text{À esquerda de } C_4 (d_3 < 1): d_4 = \frac{d_3}{1-d_3} B \Rightarrow g_1(x) = -d_4 + \frac{d_3}{1-d_3} B \leq 0; \quad (8.17)$$

$$\text{E acima de } E_3: d_4 = \frac{1}{2}(A+B) \Rightarrow g_2(x) = -d_4 + \frac{1}{2}(A+B) \leq 0,$$

sendo  $A$  e  $B$  dados pela Eq.(3.40),  $P(x)$  dada conforme Eq.(6.14) e as soluções ideais:  $V^0 = 710,773$  [u.v.];  $D^0 = 1,330$  e  $R^0 = 54,018$  [u.r.].

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.13.

Tabela 8.13 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_9$

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	0,51 3,00 2,79	688,735	1,501	53,984	795	27,07	
	AG	0,51 3,00 2,79	688,766	1,501	53,986	1996	75,09	
	PSQ	0,51 3,00 2,79	688,740	1,501	53,985	16	0,66	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	0,51 3,00 2,79	688,710	1,501	53,983	1035	33,95	
	AG	0,52 2,71 2,48	524,516	1,476	45,256	2217	76,36	
	PSQ	0,51 3,00 2,79	688,740	1,501	53,985	16	0,65	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	0,51 3,00 2,79	688,765	1,501	53,986	960	35,76	
	AG	0,51 3,00 2,79	688,759	1,501	53,986	2075	80,52	
	PSQ	0,51 3,00 2,79	688,740	1,501	53,985	16	0,64	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	0,51 3,00 2,79	688,546	1,501	53,976	855	28,60	
	AG	0,51 3,00 2,79	688,546	1,501	53,976	2108	77,52	
	PSQ	0,51 3,00 2,79	688,740	1,501	53,985	16	0,65	

Ao considerar o Método do Critério Global, tem-se o seguinte problema de otimização multi-objetivo:

Minimizar  $F(x)$ , dada nas Eqs.(8.12) e (8.13),

Sujeito às restrições dadas na Eq.(8.17).

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.14. Observando as Tabs. 8.13 e 8.14 verifica-se que os métodos de otimização multi-objetivo aplicados através das três técnicas estudadas obtiveram valores relativamente próximos, exceto AG, quando adotou-se  $w_2 = 0,80$ , que melhorou a destreza mas piorou o volume e a rigidez.

Com a imposição das restrições, verifica-se que não houve grande afastamento dos valores obtidos pela otimização em relação aos ideais, isto implica que, para este exemplo, as restrições afetam pouco o problema.

Tabela 8.14 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando  $r_3 = 0$  e a topologia  $WT_9$

	Método	$d_3, d_4, r_2$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	0,51 3,00 2,79	688,821	1,501	53,989	840	27,45	
	AG	0,51 2,98 2,77	679,284	1,500	53,502	2233	81,48	
	PSQ	0,51 3,00 2,79	688,740	1,501	53,985	16	0,65	
$L_{3R}$	ED	0,51 3,00 2,79	688,732	1,501	53,985	1500	49,01	
	AG	0,51 2,98 2,77	679,001	1,500	53,487	2219	76,02	
	PSQ	0,51 3,00 2,79	688,740	1,501	53,985	16	0,67	

A Figura 8.12 mostra o projeto ótimo do manipulador pertencendo à topologia  $WT_9$ , considerando a métrica  $L_{2R}$  e a ED. A Fig. 8.12(a) mostra o ponto ótimo marcado no espaço dos parâmetros  $(d_3, d_4)$ . A área da seção radial ótima do espaço de trabalho é apresentada na Fig. 8.12(b).

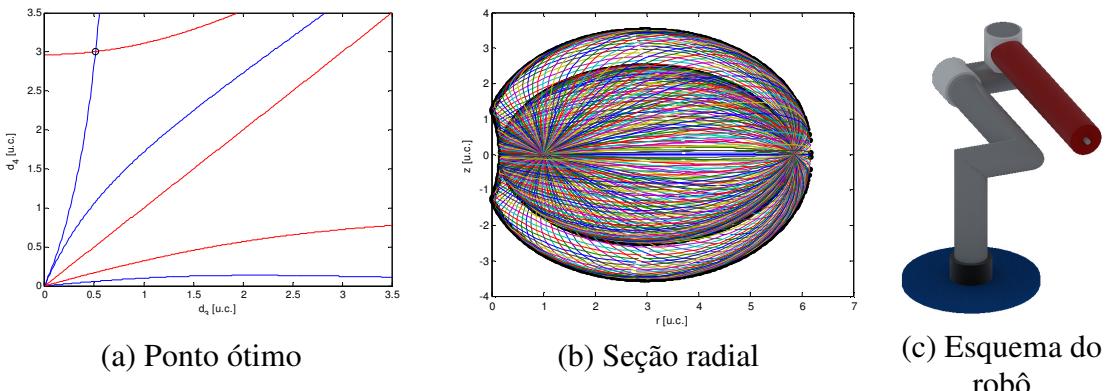


Figura 8.12 - Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica  $L_{2R}$  e a topologia  $WT_9$

Ao se comparar com a Fig. 8.11, observa-se que o projeto ótimo resulta em um manipulador com maior volume e rigidez e menor índice de isotropia:  $V = 688,821$  [u.v.];  $D = 1,501$  e  $R = 53,989$  [u.r.].

O esquema do manipulador ótimo pertencendo à topologia  $WT_9$  é representado na Fig. 8.12(c). Além disso, a solução ótima satisfaz às equações  $C_4$  e  $E_3$ , obedecendo a tolerância imposta para as restrições: restrições ativas  $g_1 = 0,0001$  e  $g_2 = 0,0004$ .

Observa-se que, com a otimização, este tipo de manipulador foi para a fronteira do espaço de trabalho da topologia  $WT_8$ . Os 2 nós formados pela interseção das envoltórias interna e externa foram eliminados, conforme Fig. 8.13.

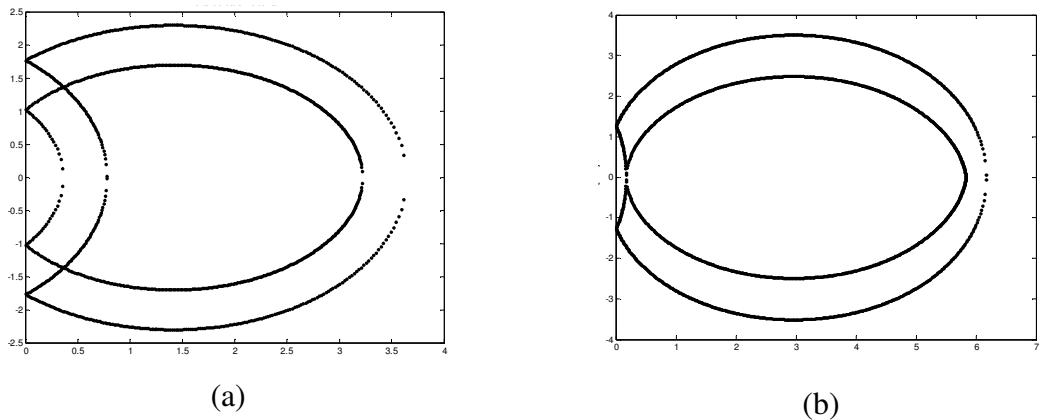


Figura 8.13 - Gráfico das envoltórias no plano  $rz$ , comparando as seções radiais do espaço de trabalho

Para concluir esta seção, vale ressaltar que em todos os estudos de casos vistos anteriormente, as três técnicas foram eficientes em otimizar os parâmetros dimensionais

obedecendo as restrições de topologia e do espaço de definição dos parâmetros dimensionais do manipulador.

#### 8.4. Otimização restrita de Manipuladores 3R Ortogonais, considerando $r_3 \neq 0$

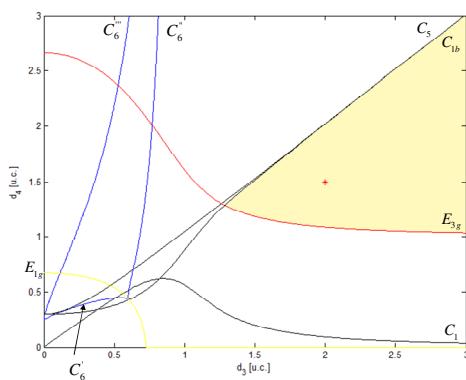
As simulações aqui apresentadas visam à obtenção do projeto ótimo de manipuladores 3R ortogonais mais gerais, ou seja, acrescenta-se o parâmetro dimensional  $r_3$ . Do mesmo modo que na seção anterior, algumas topologias são escolhidas e são aplicadas as técnicas de otimização para obter o projeto ótimo.

Conforme visto no capítulo 5, ao considerar o parâmetro dimensional  $r_3$  não nulo, é possível escolher diversas topologias do espaço de trabalho, cujas curvas são apresentadas na Fig. 5.22, adotando dois valores particulares para os parâmetros dimensionais  $r_2$  e  $r_3$  (dois casos possíveis:  $r_2 < r_3$  e  $r_2 > r_3$ ).

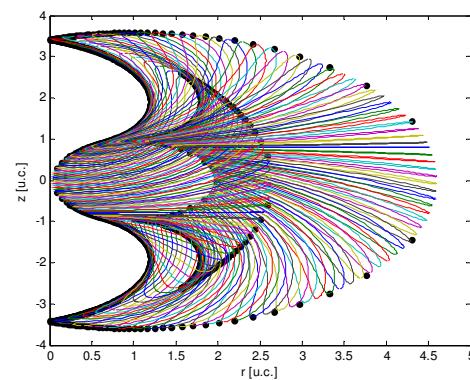
##### 8.4.1 Caso 1 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_3(4, 0)$

Deseja-se que o manipulador pertença à topologia  $WT_3(4, 0)$ , considerado inicialmente os parâmetros  $r_2 < r_3$ , conforme Fig. 5.23. Para isto, os parâmetros dimensionais otimizados devem obedecer às restrições: pontos acima de  $E_{3g}$  e abaixo de  $C_{1b}$ .

A seção do espaço de trabalho dos manipuladores nesta topologia não possui vazio em seu interior, mas uma região com 4 soluções e outra com 2 soluções no MGI; 4 pontos de cúspides e nenhum nó. A Fig. 8.14(a) mostra um ponto qualquer representando um manipulador pertencente à topologia  $WT_3$  e na Fig. 8.14(b) tem-se a seção radial do espaço de trabalho de tal manipulador (com  $d_3 = 2,0$ ;  $d_4 = 1,5$ ;  $r_2 = 0,3$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.]), onde  $V = 343,697$  [u.v.];  $D = 1,790$  e  $R = 36,311$  [u.r.].



(a) Espaço dos parâmetros



(b) Seção radial do espaço de trabalho

Figura 8.14 - Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia  $WT_3(4, 0)$

Considerando o Método dos Objetivos Ponderados, o problema de otimização é escrito como:

Maximizar  $F(x)$ , dada na Eq.(8.10), sujeito às restrições:

Laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2, r_3 < 3,0$  [u.c.];

Pontos acima da curva  $E_{3g}$ :

$$E_{3g} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right] + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left| \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)} \Rightarrow$$

$$g_1(X) = -d_4 + \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left| \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)} \leq 0 \quad (8.18)$$

E abaixo de  $C_{1b}$ :

$$C_{1b} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \Rightarrow$$

$$g_2(x) = d_4 - \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \leq 0,$$

sendo  $A$  e  $B$  dados pela Eq.(3.40),  $P(x)$  dada conforme Eq.(6.14) e as soluções ideais:  $V^0 = 2382,741$  [u.v.];  $D^0 = 1,170$  e  $R^0 = 125,077$  [u.r.].

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.15. Observa-se que, ao considerar mais um braço no manipulador, tem-se maior volume do espaço de trabalho e rigidez, o que era esperado, principalmente quando se atribui maior prioridade para o volume e para a rigidez.

Tabela 8.15 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando  $r_3 \neq 0$  e a topologia  $WT_3$

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4,$ $r_2, r_3$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00	2382,741	1,898	125,077	1515	47,65	
	AG	3,00 3,00 3,00 2,99	2382,665	1,893	124,967	2180	85,81	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 3,00	2382,741	1,898	125,077	5	0,09	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	3,00 1,62 0,59 0,53	686,463	1,170	56,424	960	31,89	
	AG	3,00 1,67 0,84 0,75	735,149	1,204	58,851	2264	84,72	
	PSQ	3,00 1,61 0,59 0,53	686,7736	1,170	56,389	56	2,60	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	3,00 3,00 3,00 3,00	2382,741	1,898	125,077	1515	57,55	
	AG	3,00 3,00 3,00 3,00	2382,741	1,898	125,077	2177	81,33	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 3,00	2382,741	1,898	125,077	5	0,08	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	3,00 3,00 3,00 2,38	2210,297	1,581	117,883	405	12,71	
	AG	3,00 3,00 3,00 2,38	2210,418	1,581	117,874	1728	70,47	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 2,38	2210,450	1,581	117,888	20	0,24	

Considerando o Método do Critério Global, o problema de otimização multi-objetivo torna-se:

Minimizar  $F(x)$ , dada nas Eqs.(8.12) e (8.13),

Sujeito às restrições laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2, r_3 < 3,0$  [u.c.] e à Eq.(8.18).

A Tabela 8.16 apresenta os resultados da otimização. As soluções obtidas representam um compromisso entre os objetivos e percebe-se uma coerência com os resultados obtidos pelo MOP.

Comparando os resultados obtidos sem a imposição de restrições (Tab. 8.3 e Tab. 8.4) com os resultados apresentados nas Tab. 8.15 e Tab. 8.16, observa-se que a otimização restrita obtém melhores resultados para o volume e a rigidez, mas, não se pode dizer o mesmo para a destreza.

Tabela 8.16 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando  $r_3 \neq 0$  e a topologia  $WT_3$

	Método	$d_3, d_4, r_2, r_3$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	3,00 3,00 3,00 2,38	2210,400	1,581	117,874	540	17,89	
	AG	3,00 3,00 3,00 2,38	2205,757	1,579	117,692	2129	96,44	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 2,38	2206,423	1,579	117,716	96	1,01	
$L_{3R}$	ED	3,00 2,99 2,85 2,32	2136,708	1,574	116,021	705	23,37	
	AG	2,98 3,00 2,99 2,32	2178,575	1,581	116,769	2144	96,09	
	PSQ	2,99 2,98 2,86 2,32	2124,623	1,573	115,540	94	0,98	

Para ilustrar este caso, a Fig. 8.15 mostra o projeto ótimo do manipulador para a topologia  $WT_3$ , considerando a métrica  $L_{2R}$  e a ED. A Fig. 8.15(a) mostra o ponto ótimo marcado no espaço dos parâmetros  $(d_3, d_4)$ . A área da seção radial ótima do espaço de trabalho é apresentada na Fig. 8.15(b).

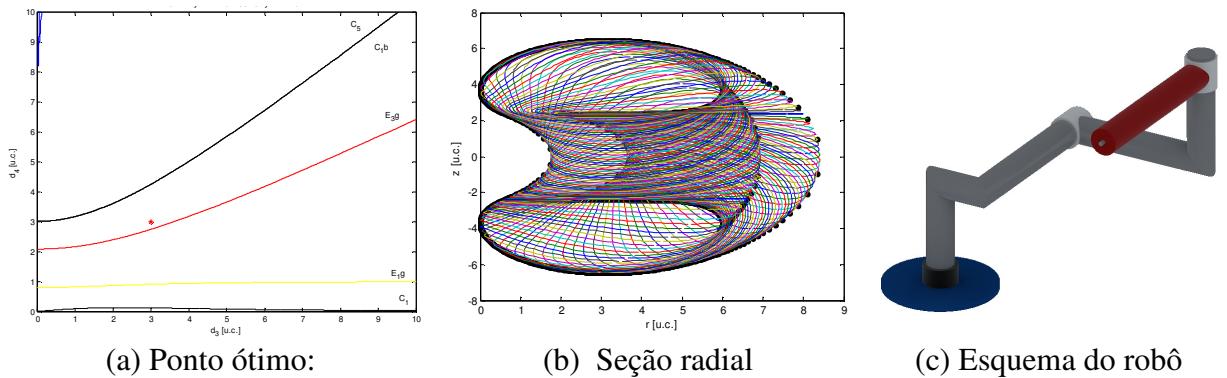


Figura 8.15 - Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica  $L_{2R}$  e a topologia  $WT_3(4, 0)$

O manipulador apresenta volume do espaço de trabalho e rigidez significativamente maiores, contudo, o índice de isotropia não altera muito. Pode-se dizer que a otimização foi eficiente para os três objetivos em questão:  $V = 2210,400$  [u.v.];  $D = 1,581$  e  $R = 117,874$  [u.r.]).

O esquema do manipulador ótimo pertencendo à topologia  $WT_3$  é representado na Fig. 8.15(c). O ponto ótimo obedeceu às restrições ( $g_1 = -0,2579$  e  $g_2 = -1,2410$ ).

A Figura 8.16 mostra como ficam as curvas que formam a envoltória do espaço de trabalho dos manipuladores correspondente às Figs 8.14(b) e 8.15(b). Observa-se que a otimização conduz a um manipulador com maiores dimensões e, consequentemente, maior seção do espaço de trabalho. Observa-se ainda que a otimização obteve  $r_2$  maior que  $r_3$ .

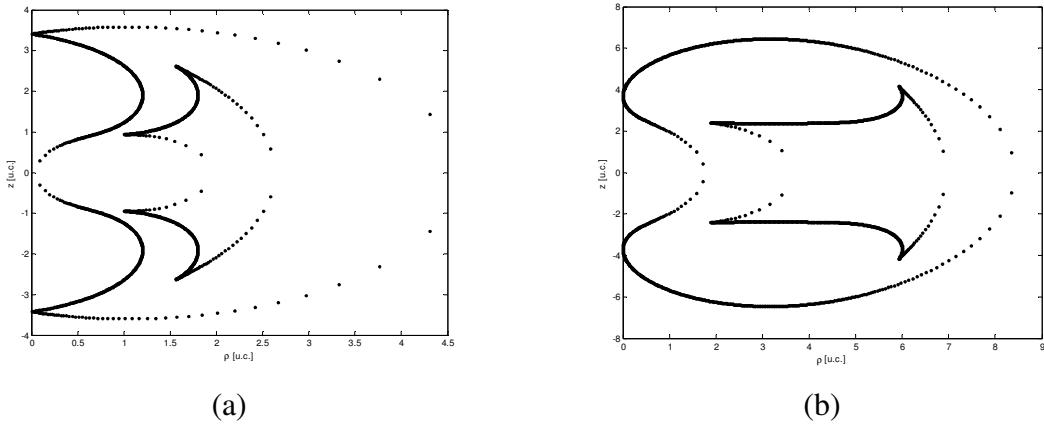


Figura 8.16 - Gráfico das envoltórias no plano  $rz$  comparando as seções radiais do espaço de trabalho

#### 8.4.2 Caso 2 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_2(4, 2)$

Neste caso, deseja-se que o manipulador pertença à topologia  $WT_2(4, 2)$ , considerado inicialmente os parâmetros  $r_2 < r_3$ . A seção do espaço de trabalho dos manipuladores nesta topologia possui um vazio em seu interior, duas regiões com 4 soluções, uma com 2 soluções no MGI, 4 pontos de cúspides e 2 nós. A Fig. 8.17(a) mostra um ponto qualquer representando um manipulador pertencente a esta topologia e na Fig. 8.17(b) tem-se a seção radial do espaço de trabalho de tal manipulador. Neste exemplo,  $d_3 = 2,0$ ;  $d_4 = 0,5$ ;  $r_2 = 0,3$  e  $r_3 = 0,8$  [u.c.], correspondendo à  $V = 128,80$  [u.v.];  $D = 3,841$  e  $R = 20,377$  [u.r.].

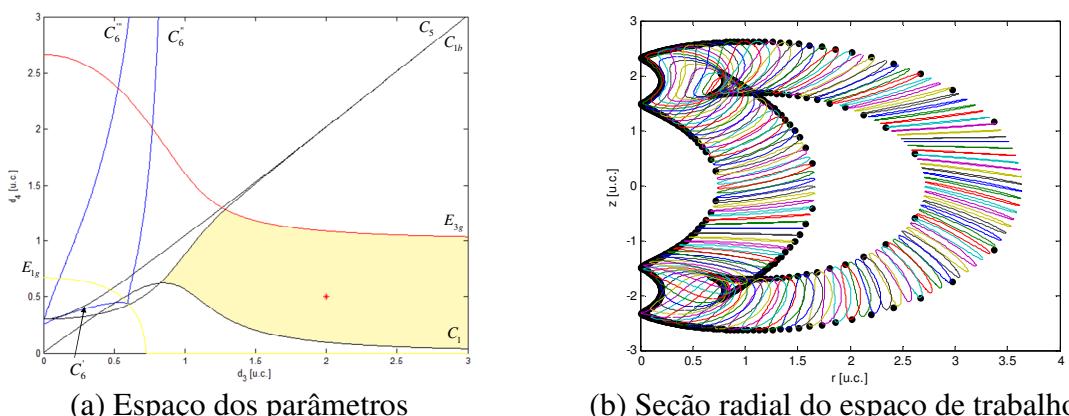


Figura 8.17 - Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia  $WT_2(4, 2)$

Observando a Fig. 8.17(a) verifica-se que para as restrições serem obedecidas, a solução ótima deverá estar acima da curva  $C_I$ , à direita de  $C_{Ib}$  e abaixo de  $E_{3g}$ . Assim, considerando o Método dos Objetivos Ponderados, o problema de otimização é escrito como:

Maximizar  $F(x)$ , dada na Eq.(8.10), sujeito às restrições:

Laterais:  $0,1 < d_3, d_4, r_2, r_3 < 3,0$  [u.c.];

Pontos acima da curva  $C_I$ :

$$C_I : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \Rightarrow$$

$$g_1(X) = -d_4 + \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \leq 0 \quad (8.19)$$

À direita de  $C_{Ib}$ :

$$C_{Ib} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \Rightarrow$$

$$g_2(X) = d_4 - \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \leq 0$$

E abaixo de  $E_{3g}$ :

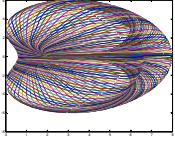
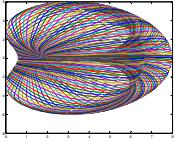
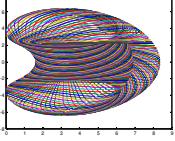
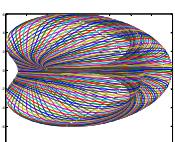
$$E_{3g} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right] + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left[ \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right] \right)} \Rightarrow$$

$$g_3(X) = d_4 - \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right] + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left[ \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right] \right)} \leq 0,$$

sendo  $A$  e  $B$  dados pela Eq.(3.40),  $P(x)$  dada conforme Eq.(6.14) e as soluções ideais:  $V^0 = 2180,949$  [u.v.];  $D^0 = 1,037$  e  $R^0 = 116,258$  [u.r.].

Os resultados da otimização são apresentados na Tab. 8.17.

Tabela 8.17 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando  $r_3 \neq 0$  e a topologia  $WT_2$

$w_1$ $w_2$ $w_3$	Método	$d_3, d_4,$ $r_2, r_3$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$w_1=0,80$ $w_2=0,10$ $w_3=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1898,195	1,042	105,668	255	2,49	
	AG	3,00 3,00 3,00 2,21	2164,679	1,625	116,237	1891	19,31	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,668	5	0,08	
$w_1=0,10$ $w_2=0,80$ $w_3=0,10$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,668	210	2,09	
	AG	3,00 3,00 2,97 0,10	1885,934	1,037	105,405	1973	19,79	
	PSQ	3,00 3,00 2,97 0,10	1883,987	1,037	105,362	40	0,44	
$w_1=0,10$ $w_2=0,10$ $w_3=0,80$	ED	3,00 3,00 3,00 2,21	2164,492	1,626	116,230	540	5,47	
	AG	3,00 3,00 3,00 2,21	2164,678	1,625	116,237	1938	19,27	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 2,21	2164,669	1,625	116,236	10	3,13	
$w_1=0,33$ $w_2=0,33$ $w_3=0,33$	ED	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,668	1515	15,02	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,10	1898,196	1,042	105,668	1872	18,63	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 0,10	1896,662	1,041	105,668	5	0,09	

Considerando o Método do Critério Global, o problema de otimização torna-se:

Minimizar  $F(x)$ , dada nas Eqs.(8.12) e (8.13),

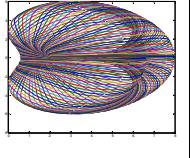
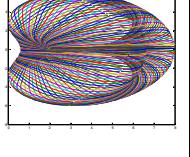
Sujeito às restrições dadas pelas Eqs.(8.19).

A Tabela 8.18 apresenta os resultados da otimização. As soluções obtidas representam um compromisso entre os objetivos.

Observando as Tabs. 8.17 e 8.18 verifica-se que com a imposição das restrições, os resultados não sofrem grandes alterações em relação aos valores ideais, pois neste caso, as restrições são mais simples, apesar de  $g_1$  poder resultar em número complexo. Comparando os

resultados apresentados nas Tabs. 8.3 e 8.4 com os resultados das Tabs. 8.17 e 8.18, observa-se que a otimização restrita obtém melhores resultados que a otimização irrestrita, principalmente no que diz respeito ao tempo computacional, uma vez que o espaço de busca para a procura do projeto ótimo torna-se menor com a imposição das restrições de topologias.

Tabela 8.18 - Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando  $r_3 \neq 0$  e a topologia  $WT_2$

	Método	$d_3, d_4, r_2, r_3$ [u.c.]	Volume [u.v.]	Destreza	Rigidez [u.r.]	$N_f$	Tempo [min]	Seção Transversal
$L_{2R}$	ED	3,00 3,00 3,00 0,15	1901,630	1,056	105,686	210	2,22	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,14	1902,617	1,052	105,676	1760	17,75	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 0,14	1902,618	1,052	105,676	39	0,43	
$L_{3R}$	ED	3,00 3,00 3,00 0,21	1903,878	1,077	105,749	240	2,54	
	AG	3,00 3,00 3,00 0,15	1902,563	1,053	105,679	1798	17,91	
	PSQ	3,00 3,00 3,00 0,21	1903,879	1,077	105,749	5	0,08	

A Figura 8.18 mostra o projeto ótimo do manipulador para a topologia  $WT_2$ , considerando a métrica  $L_{2R}$  e a ED. Na Fig. 8.18(a) o ponto ótimo está marcado no espaço dos parâmetros. A área da seção radial ótima do espaço de trabalho é apresentada na Fig. 8.18(b).

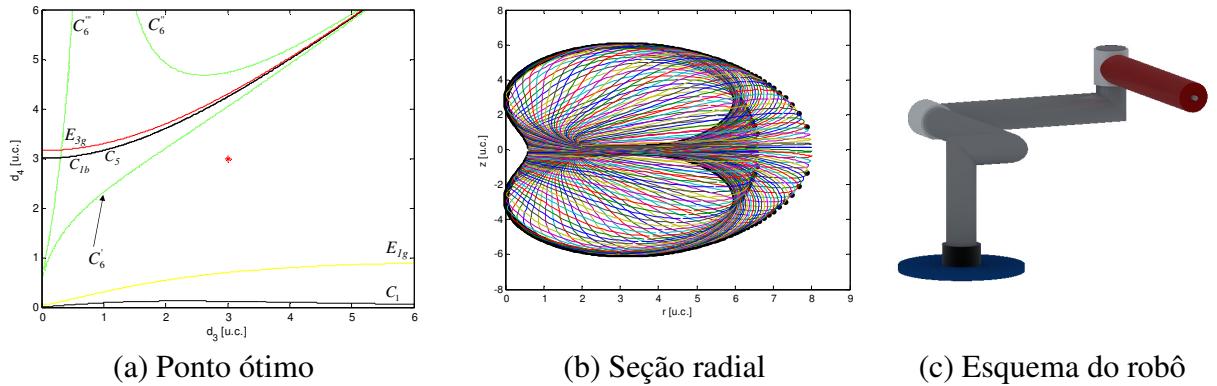


Figura 8.18 - Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica  $L_{2R}$  e a topologia  $WT_2(4, 2)$

Comparando as seções radiais das Fig. 8.18(b) e Fig. 8.17(b), verifica-se que o vazio formado pela envoltória interna e os dois pontos de nós desaparecem, consequentemente, em

vez de duas regiões com 4 soluções do MGI, tem-se apenas uma região. Observa-se um considerável acréscimo nas dimensões do manipulador, portanto, maior volume do espaço de trabalho e rigidez. Novamente, a otimização foi eficiente para os três objetivos em questão:  $V = 1901,630$  [u.v.];  $D = 1,056$  e  $R = 105,686$  [u.r.]).

O esquema do manipulador ótimo pertencendo à topologia  $WT_2$  é representado na Fig. 8.18(c). Ressalta-se que o ponto ótimo obedeceu às restrições ( $g_1 = -2,8823$ ;  $g_2 = -1,2410$  e  $g_3 = -1,2977$ ).

A Figura 8.19 mostra como ficam os gráficos das envoltórias no plano  $rz$  dos manipuladores apresentados nas Figs 8.17(b) e 8.18(b). Observa-se que a otimização resultou em  $r_2$  maior que  $r_3$ .

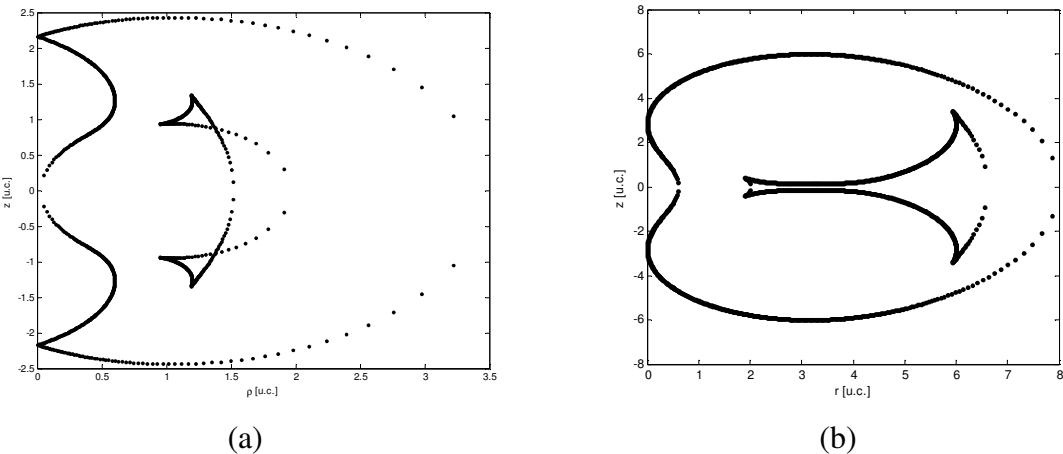


Figura 8.19 - Gráfico das envoltórias no plano  $rz$ , comparando as seções radiais do espaço de trabalho

## 8.5. Observações importantes

Com as simulações apresentadas neste capítulo, verifica-se que o volume e a rigidez estão correlacionados, enquanto que a destreza não. A destreza é um objetivo conflitante em relação ao volume e a rigidez.

A utilização da sub-rotina *fmincon* do Matlab® para executar a PSQ foi eficiente para encontrar a solução com tempo computacional pequeno, mas para cada ponto inicial adotado obteve-se uma solução ótima diferente, devido à presença de vários mínimos locais. Desta forma, não se investigou outros softwares, pois ficou claro que as técnicas sequenciais são pouco adequadas para este tipo de problema. Ressalta-se que os resultados apresentados nas

tabelas foram obtidos com o método híbrido, adotando-se como ponto inicial o valor ótimo encontrado por ED e a seguir aplicando a PSQ.

Observando as tabelas apresentadas com os resultados da otimização irrestrita e restrita, nota-se que a otimização irrestrita obteve manipuladores cujas seções radiais do espaço de trabalho pertencem à topologia  $WT_3$ .

Os manipuladores da topologia  $WT_1$  apresentam os menores valores de volume e rigidez e altos índices de isotropia, além de apresentar um vazio na seção do espaço de trabalho. Segundo estes critérios, pode-se dizer que são manipuladores de baixa performance.

Dos casos estudados, os manipuladores da topologia  $WT_6$  são os que apresentam os maiores índices de isotropia, ou seja, são os manipuladores com pior destreza. Já os manipuladores da topologia  $WT_9$ , apesar de não apresentarem vazios em seu espaço de trabalho, possuem valores intermediários para o índice de isotropia.

A partir dos resultados das simulações numéricas para os estudos de casos restritos considerando  $r_3 = 0$ , pode-se dizer que, em relação aos critérios considerados nesta tese, os melhores manipuladores se encontram na topologia  $WT_3$ , pois apresentam maior volume, maior rigidez, melhores índices de isotropia e nenhum vazio no espaço de trabalho.

Para os estudos de casos considerando os manipuladores com  $r_3 \neq 0$ , a otimização apresentou maiores dificuldades devido à soluções dadas por números complexos. Mesmo para este caso, a topologia  $WT_3$  continua apresentando melhores resultados em relação aos critérios estabelecidos.

# CAPÍTULO IX

## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta pesquisa, utilizando as expressões que definem o modelo cinemático de manipuladores com três juntas rotacionais e a ferramenta algébrica Base de Groebner, foram obtidas as equações de separação (superfícies de singularidades) das regiões que possuem diferentes tipos de manipuladores 3R ortogonais. Foi apresentada uma classificação da topologia do espaço de trabalho de manipuladores 3R ortogonais considerando o número de soluções no Modelo Geométrico Inverso, o número de pontos de cúspide e o número de nós. As relações geométricas entre os parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH), que obedecem a uma determinada topologia, foram consideradas como restrições na formulação do projeto ótimo destes manipuladores. Assim, tornou-se possível a obtenção de soluções que obedecem à topologia pré-estabelecida e atendam possíveis necessidades industriais.

Alguns problemas de otimização multi-objetivo foram propostos, visando a obtenção do projeto ótimo de manipuladores 3R. Primeiramente, considerou-se o caso geral, para o qual deseja-se maximizar o volume do espaço de trabalho, maximizar a rigidez do sistema de juntas e otimizar a destreza do manipulador sem a imposição de restrições. Para este caso irrestrito, também foram obtidas as soluções considerando apenas manipuladores ortogonais.

A seguir foi estudado o problema de otimização multi-objetivo restrita visando obter o projeto ótimo de manipuladores 3R ortogonais considerando algumas topologias pré-estabelecidas. Apresentou-se as soluções para o caso  $r_3$  nulo e para  $r_3$  não nulo.

Vale ressaltar que, por tratar-se de um problema multi-objetivo, as soluções apresentadas fazem parte do conjunto ótimo de Pareto. Observa-se que as funções objetivo são fortemente conflitantes entre si. Foram aplicados o Método dos Objetivos Ponderados e o Método do Critério Global para escrever o vetor de funções objetivo na forma de uma função

escalar. Cabe ao projetista escolher uma solução de compromisso que melhor atenda às suas especificidades.

Foram utilizados dois algoritmos evolutivos (Algoritmos Genéticos e Evolução Diferencial) e uma técnica determinística (Programação Sequencial Quadrática). Todas as técnicas apresentaram bom desempenho na obtenção da solução do problema. As técnicas evolutivas exigem maior esforço computacional quando comparadas ao método sequencial, porém são muito adequadas para os problemas estudados devido à presença de vários mínimos locais.

Quando comparada aos Algoritmos Genéticos, a Evolução Diferencial apresentou melhor desempenho, já que esta técnica permite trabalhar com um pequeno número de indivíduos da população, resultando em uma redução significativa do custo computacional. As soluções obtidas usando Programação Sequencial Quadrática são fortemente dependentes do ponto inicial, como esperado para problemas multimodais. Os valores obtidos nesta pesquisa foram calculados adotando-se como ponto de partida a solução ótima encontrada pela Evolução Diferencial.

De acordo com a pesquisa bibliográfica realizada, não se encontrou trabalhos publicados até o momento, que otimizem simultaneamente o volume, a rigidez e a destreza de manipuladores seriais 3R, considerando a topologia do espaço de trabalho. Assim, a principal contribuição deste trabalho é possibilitar ao projetista de sistemas robóticos a escolha da topologia do espaço de trabalho desejada e ajustar os parâmetros de Denavit-Hartenberg que satisfazem aos critérios propostos.

Com o desenvolvimento deste projeto de pesquisa, foram publicados alguns trabalhos científicos, conforme citados abaixo:

1 - OLIVEIRA, G.T.S; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Use of the Grobner Basis in the Study of Singularity Surface of Orthogonal Manipulators. Submitted to: **Computational & Applied Mathematics**, 2012.

2 - OLIVEIRA, G.T.S; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Optimum Design of 3R Orthogonal Manipulators Considering its Topology. In: **21th Brazilian Congress of Mechanical Engineering**, 2011, Natal. COBEM 2011, 2011. v. 1. p. 1-11.

3 - OLIVEIRA, G.T.S.; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Use of the Grobner Basis in the Study of Manipulators Topology. In: Victor Juliano De Negri; Eduardo André

Perondi; Mauro André Barbosa Cunha; Oswaldo Orikawa. (Org.). **ABCM Symposium Series in Mechatronics**. Rio de Janeiro: ABCM, 2010, v. 4, p. 618-627.

4 - OLIVEIRA, G. T. S.; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Estudo das Singularidades de Robôs Manipuladores usando Base de Groebner. **In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, 2010, Águas de Lindóia. CNMAC2010. v. 1. p. 1-8.

5 - OLIVEIRA, G. T. S.; SARAMAGO, S. F. P.; NOGUEIRA, A. C. Use of the Grobner Basis in the Study of Manipulators Topology. **In: 20th International Congress of Mechanical Engineering**, 2009, Gramado. 20 th COBEM, 2009, v.1.

6 - OLIVEIRA, G. T. S.; CARRIJO NETO, A. D.; MENDONÇA, S. A.; SARAMAGO, S. F. P. Projeto Ótimo de Manipuladores 3R Ortogonais Considerando a sua Topologia. **In: V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM**, Salvador, ABCM, 2008, v. 1, p. 1 - 11.

7 - OLIVEIRA, G. T. S., BERGAMASCHI, P. R., SARAMAGO, S. F. P. Optimization of the Workspace Volume of 3R Manipulators using a Hybrid Methodology. **In: 19th International Congress of Mechanical Engineering, Proceeding of COBEM2007 (CD-ROM)**, 2007, Brasília, ABCM.

Além disso, as seguintes contribuições podem ser consideradas:

- Desenvolvimento de códigos computacionais para o cálculo das equações de separação (superfícies de singularidades) das diversas topologias de manipuladores 3R;
- Desenvolvimento de códigos computacionais para o cálculo do projeto ótimo destes manipuladores. Estes programas são bastante úteis, tanto para os cursos de pós-graduação, como para o desenvolvimento de novas pesquisas com manipuladores;
- Concepção de uma metodologia para a obtenção de projetos ótimos de sistemas robotizados, usando diferentes configurações, com possibilidade de aplicação industrial.

Como sugestões de estudos futuros, podem ser citados:

- Utilização de outros métodos para otimizar o volume, a destreza e a rigidez;
- Utilização de outros algoritmos híbridos;
- Desenvolvimento e utilização de outros índices de desempenho, como por exemplo, performance dinâmica;
- Estudo da robustez dos manipuladores 3R com eixos ortogonais;
- Extensão deste estudo aos manipuladores paralelos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdel-MALEK, K.; YEH, H-J.; OTHMAN, S. Understanding Voids in the Workspace of Serial Robot Manipulators. **Proc. 23<sup>rd</sup> ASME, Design Engineering Technical Conf. Baltimore, Maryland.** 2000.
- ANGELES, J. **Fundamentals of Robotics Mechanical Systems.** Theory, Methods and Algorithmas, 2.ed. Springer, 2003.
- BAILI, M. **Analise et Classification de Manipulateur 3R à axes Orthogonaux.** 2004. 256f. Thèse de Doctorat - University of Nantes, France.
- BAILI, M.; WENGER Ph.; CHABLAT D. Classification of One Family of 3R Positioning Manipulators, **The 11<sup>th</sup> Int. Conf. on Advanced Robotics, University of Coimbra**, Portugal, 2003.
- BERGAMASCHI, P. R. **Projeto Ótimo de Robôs Manipuladores 3R, considerando as características de seu Espaço de Trabalho.** 2004. 112f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- BERGAMASCHI, P. R.; SARAMAGO, S. F. P.; COELHO, L. S. Comparative study of SQP and metaheuristics for robotic manipulator design. **Applied Numerical Mathematics.** v. 58, p. 1396-1412, 2008.
- BOGGS, P. B.; TOLLE, J. W. Sequential Quadratic Programming, **Acta Numerica**, n.4, p. 1-52, 1955.

BORREL, P.; LIEGEOIS A. A Study of Manipulator Inverse Kinematic Solutions with Application to Trajectory Planning and Workspace Determination. **Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation**, p. 1180-1185, 1986.

BOUZGARROU, B.C; FAUROUX, J. C.; GOGU, G.; HEERAH, Y. Rigidity analysis of T3R1 parallel robot with uncoupled kinematics, **Proc. of the 35th Int. Symposium on Robotics**, Paris, France, March, 2004.

BRAGA, C. G. **O Uso de Algoritmos Genéticos para Aplicação em Problemas de Otimização de Sistemas Mecânicos**. 1998. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

BUCHBERGER, B.; COLLINS G. E.; LOOG R. **Computer Algebra: Symbolic & Algebraic Computation**, Springer-Verlag, Wien, p. 115-138, 1982.

BURDICK, J. W. **Kinematic Analysis and Design of Redundant Manipulators**. 1988. Ph.D. Dissertation, Stanford.

BURDICK, J. W. A Recursive method for Finding Revolute-Jointed Manipulator Singularities. **Journal of Mechanical Design**, v. 117, p. 55-63, 1995.

BURDICK, J.W. A Classification of 3R Regional Manipulator Singularities and Geometries. **Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation**, p. 2670-2675, Sacramento, California, Avril, 1991.

CARO, S. **Conception Robuste de Mécanismes**. 2004. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France.

CECCARELLI, M. On the Workspace of 3R Robot Arms. **The Fifth IFToMM Int. Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods - Theory and Pratice of Mechanism**, Bucarest, v. 2, p. 37-46, 1989.

CECCARELLI, M. A Formulation for the Workspace Boundary of General N-Revolute Manipulators. **IFToMM Jnl Mechanism and Machine Theory**, v. 31, n.5, p. 637-646, 1996.

CECCARELLI, M.; LANNI C. Sintesis Optima de Brazos Manipuladores Considerando las Caracteristicas de su Espacio de Trabajo. **Revista Iberoamericana de Ingenieria Mecanica**, v. 3, n.1, p. 49-59, 1999.

CHABLAT, D.; WENGER, P.; GOSSELIN, C.M. A Comparative Study of Parallel Kinematic Architectures for Machining Applications. **Proc. of the 2nd Workshop on Computational Kinematics**, Seoul, Korea, p. 249-258, 2007.

CHABLAT, D.; WENGER, P. On the Characterization of the Regions of Feasible Trajectories in the Workspace of Parallel Manipulators, **Proc. Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms**, v. 3, p. 1109-1114, Oulu, June, 1999.

CHABLAT, D. Joint space and workspace analysis of a two-DOF closed-chain manipulator, **Robot Design, Dynamics and Control CISM Courses and Lectures**, v. 524, Chapter I, p. 81-90, 2010.

CHABLAT, D.; CARO, S.; UR-REHMAN, R.; WENGER, P. Comparison of Planar Parallel Manipulator Architectures Based on a Multi-Objective Design Optimization Approach. **Proc. of the ASME 2010 Int. Design Engineering Technical Conf. & Computers and Information in Engineering Conf. IDETC/CIE**, DETC2010-28650, Canada, 2010.

CHENG, S.L.; HWANG, C. Optimal Approximation of Linear Systems by a Differential Evolution Algorithm. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans**, v. 31, n.6, p. 698-707, 2001.

COMPANY, O.; PIERROT, F.; FAUROUX, J. C. A method for modeling analytical stiffness of a lower mobility parallel manipulator, **Proc. Of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation**, Barcelona, Spain, April 18-25, 2005.

CORVEZ, S.; ROUILLIER, F. Using computer algebra tools to classify serial manipulators, **Proc. Fourth Int. Workshop on Automated Deduction in Geometry**, Lins, 2002.

COX D.; LITTLE J.; O'SHEA D. **Using Algebra Geometry**. Springer-Verlag, New York. 2005.

DEB, K. **Multi-objective optimization using Evolutionary Algorithms**. John Wiley & Sons, 2001.

DEBLAISE, D.; HERNOT, X.; MAURINE, P. A Systematic Analytical Method for PKM Stiffness Matrix Calculation. **IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation**. 2006.

DEJONG, K. A. **An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems**. 1975. Ph.D. Dissertation, University of Michigan, USA.

DONG, W.; DU, Z; SUN, L. Stiffness influence atlases of a novel flexure hinge-based parallel mechanism with large workspace, **Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. on Robotics and Automation**, Barcelona, Spain, April 18-25, 2005.

ESCHENAUER, H.; KOSKI, J.; OSYCZKA, A. **Multicriteria Design Optimization**. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

EL-KHASAWNEH, B. S.; FERREIRA, P. M. Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulator. **Int. Journal Machine Tools & manufacture**. v. 39, n.2, p. 321-342. 1999.

EL OMRI, J. **Analyse Géometrique et Cinématique des mécanismes de type manipulateur**. 1996. 260f. These de Doctorat - Université de Nantes, France.

EL OMRI, J.; WENGER P. How to Recognize Simply a Nonsingular Posture Changing 3-DOF Manipulators, **7<sup>th</sup> Int. Conf. on Advanced Robotics**, ICAR'95, v. 1, p. 215-222, San Felieu de Glixol, Espagne. 1995.

ESHELMAN, L.; SHAFFER. **Real Coded Genetic Algorithms and Interval-Schemata**. In San Mateo, CA: Morgan Kaufman, pp. 187-202, 1993.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.** Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

GONÇALVES, R. S. **Estudo de Rigidez de Cadeias Cinemáticas Fechadas.** 2009. 239f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Brasil.

GONÇALVES, R. S.; CARVALHO, J. C. M. Estudo da Rigidez de Sistemas Multicorpos, **17º Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

GOSSELIN, C. M. Stiffness Mapping for Parallel Manipulator, **IEEE Trans. on Robotics and Automation**, v. 6, n.3, p. 377-382, 1990.

GUPTA, K. C.; ROTH, B. Design Considerations for Manipulator Workspace. **ASME, Journal of Mechanical Design**, v. 104, p. 704-711, 1982.

HAJELA, P.; LIN, C.Y. Genetic Search Strategies in Multicriterion Optimal Design. **Structural Optimization**, v. 4, p. 99-107, 1992.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. **Practical Genetic Algorithms.** Wiley-Interscience Publication, New York, 1998.

HOLLAND, J.H. **Adaptation in natural and artificial systems.** MIT Press, Illinois Genetic Algorithm Laboratory. IlliGAL, University of Illinois at Urbana-Champaign, p. 11-147, 1975.

HOUCK, C.R.; JOINEZ, J.A.; KAY, M.G. A Genetic Algorithms for Function Optimization: a Matlab Implementation. **NCSO-IE Technical Report.** University of North Caroline, USA, 1995.

HUDA, S.; TAKEDA, Y. Kinematic Analysis and Synthesis of a 3-URU Pure Rotational Parallel Mechanism with Respect to Singularity and Workspace, **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing**, v. 1, n.1, 2007.

ISO 9409/1 UNI-ISSO. Robot manipolatori industriali, 1990.

KHALIL, W.; DOMBRE, E. **Modélisation Identification et Commande des Robots**, 2<sup>ème</sup> édition revue et augmentée, Hermès, Paris. 1999.

KOHLI, D.; SPANOS J. Workspace Analysis of Mechanical Manipulator Using Polynomial Discriminants. *Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design*, v. 107, p. 209-215, June 1985.

KOHLI, D.; HSU M. S. The Jacobian Analysis of Workspaces of Mechanical Manipulators. **Journal of Mechanism and Machine Theory**, v. 22, n.3, p. 265-275, 1987.

KUMAR, A. V; WALDRON, K. J. The Workspace of a Mechanical Manipulator. **ASME, Journal of Mechanical Design**, v. 103, p. 665-672, 1981.

LANNI, C.; SARAMAGO, S. F. P.; CECCARELLI, M. Optimal Design of 3R manipulators by Using Classical Techniques and Simulated Annealing. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v. 24, p. 293-301, 2002.

MAJOU, F.; GOSSELIN, C. M.; WENGER, P.; CHABLAT, D. Parametric stiffness analysis of the orthoglide, **Proc. of the 35th Int. Symposium on Robotics**, Paris, France, March 2004.

MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. Métodos computacionais de otimização. **XX COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA - IMPA**, 1995, Rio de Janeiro (ISBN 85-244-0092-7, 256p).

MEGAHED, S. M. **Principles of Robots Modelling and Simulation**, Wiley, 1993, New York.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 3.ed. New York: Springer-Verlag, 1996.

MOROZ, G.; CHABLAT, D.; WENGER P.; ROUILLER F. Cusp points in the parameter space of RPR-2PRR parallel manipulator, **3-rd European Conf. on Mechanism Science**, Cluj-Napoca, Romania, Sep. 2010, p. 29-37.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. Springer Series in Operations Research, 2000.

OLIVEIRA, G. T. S; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Use of the Grobner Basis in the Study of Singularity Surface of Orthogonal Manipulators. Submitted to: **Computational & Applied Mathematics**, 2012.

OLIVEIRA, G. T. S; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Optimum Design of 3R Orthogonal Manipulators Considering its Topology. In: **21th Brazilian Congress of Mechanical Engineering**, Natal. COBEM 2011, v. 1, p. 1-11, 2011.

OLIVEIRA, G. T. S.; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Use of the Grobner Basis in the Study of Manipulators Topology. In: Victor Juliano De Negri; Eduardo André Perondi; Mauro André Barbosa Cunha; Oswaldo Orikawa. (Org.). **ABCM Symposium Series in Mechatronics**. Rio de Janeiro: ABCM, 2010, v. 4, p. 618-627.

OLIVEIRA, G. T. S.; NOGUEIRA, A. C.; SARAMAGO, S. F. P. Estudo das Singularidades de Robôs Manipuladores usando Base de Groebner. In: **Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Águas de Lindóia. CNMAC2010. v. 1, p. 1-8, 2010.

OLIVEIRA, L. S.; SARAMAGO, S. F. P. Multiobjective Optimization Techniques Applied to Engineering Problems, **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXXII, p. 94-104, 2010.

OLIVEIRA, G. T. S.; SARAMAGO, S. F. P.; NOGUEIRA, A. C. Use of the Grobner Basis in the Study of Manipulators Topology. In: **20th Int. Congress of Mechanical Engineering**, Gramado. 20th COBEM, 2009.

OLIVEIRA, G. T. S.; NETO, A. D. C.; MENDONÇA, S. A.; SARAGAMAGO, S. F. P. Projeto Ótimo de Manipuladores 3R Ortogonais considerando a sua Topologia. In: **V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica** - CONEM, Associação Brasileira de Mecânica Computacional – ABCM, Salvador, Brasil, v. 1, p. 1-11, 2008.

OLIVEIRA, G. T. S.; BERGAMASCHI, P. R.; SARAGAMAGO, S. F. P. Optimization of the Workspace Volume of 3R Manipulators using a Hybrid Methodology. In: **19th Int. Congress of Mechanical Engineering, Proc. of COBEM2007** (CD-ROM), Brasília, ABCM, 2007.

OLIVEIRA, G. T. S.; PRADO, J. R.; SARAGAMAGO, S. F. P.; BERGAMASCHI, P. R. Maximização do Espaço de Trabalho de Manipuladores 3R usando Algoritmos Evolutivos. In: **XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering** (CILAMCE), Belém do Pará, Brasil. Anais do XXVII CILAMCE (CD-ROM). Associação Brasileira de Mecânica Computacional – ABMEC, 2006.

OLIVEIRA, G. T. S. **Estudo e Aplicações da Evolução Diferencial**. 2006. 126f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

OLIVEIRA, L. S. **Uma Contribuição ao Estudo dos Métodos de Otimização Multi-Objetivo**. 2005. 117f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

OSYCZKA, A. **Multi-criterion Optimization in Engineering**. Ellis Horwood Ltd, 1990.

OTTAVIANO, E.; HUSTY M.; CECCARELLI M. A Cartesian Representation for The Boundary Workspace of 3R Manipulators. **Proc. on Advanced in Robot Kinematics**, ARK'04, Kluwer Academic Publisher, p. 247-254, Sestri Levante, Italie, Juin 2004.

PAI, D. K.; LIEU M. C. Genericity and Singularities of Robot Manipulators. **IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation**, v. RA-8, p. 545-559, 1992.

PARENTI, C. V.; INNOCENTI C. Spatial Open Kinematic Chains: Singularities, Regions and Subregions. Proc. 7th CISM-IFTOMM Romansy, p. 400-407, Udine, Italy, Septembre 1988.

PASKHEVICH, A.; WENGER P.; CHABLAT D. Kinematic and stiffness analysis of the Orthoglide, a PKM with simple, regular workspace and homogeneous performances, **IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation**, Rome, Italy, p. 549-554, April, 2007.

PASHKEVICH, A.; CHABLAT D.; WENGER P. Design optimization of parallel manipulators for high-speed precision machining applications, Preprints of the **13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing**, (INCOM'2009), Moscow, Russia, p. 139-144, 2009.

PAUL, R. P. **Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control**. M.I.T Press, 1981.

PAUL, R. P.; STEVENSON, C. N. Kinematics of Robot Wrists, **The Int. Journal Robotics Res.**, n.1, p. 31-38, 1983.

PIEPER, D. L. **The Kinematics of Manipulators under Computer Control**. 1968. PhD Thesis, Stanford University, Stanford.

RADE, D. A. Método dos Elementos Finitos em Engenharia Mecânica. **Apostila**, 2001.

RANJBARAN, F.; ANGELES J. On positioning Singularities of 3-Revolute Robotic Manipulators. Proc. 12th Symposium on Engineering Applications in Mechanics, p. 273-282, Montreal, Canada, June 1994.

RIVIN, E. I. **Stiffness and Damping in Mechanical Design**. Marcel Dekker Inc., New York, 1999.

ROTH, B. Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint. Special Publication. **Performance Evaluation of Programmable Robots and Manipulators**, p. 39-61, 1975.

SALISBURY, J. K.; CRAIG, J. J. Articulated Hands: Force and Kinematic Issues. **The Int. Journal Robotics Res.** v. 1, n.1, p. 4-17, 1982.

SARAMAGO, S. F. P.; OTTAVIANO, E.; CECCARELLI, M. A characterization of the workspace boundary of three-revolute manipulators. In: DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONF. (DETC'02), **Proc. of DETC'02 ASME**, p. 34342-34352, Montreal, 2002.

SMITH, D. R. **Design of Solvable 6R Manipulators**. 1990. Phd Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta.

SOMMESE, A.; VERSCHELDE, J.; WAMPLER C. Numerical Decomposition of the Solution Sets of Polynomial Systems into Irreducible Components. **SIAM Journal of Numerical Analysis**, v. 38, n.6, p. 2022-2046, 2001.

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces". **Technical Report** TR-95-012, Int. Computer Science Institute, Berkeley, 1995.

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. **Journal of Global Optimization**, v. 11, p. 341-359, 1997.

TSAI, L.W. **Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators**. John Wiley & Sons, Inc. USA, 1999.

TSAI, K. Y.; SONI, A. H. An Algorithm for the Workspace of a General n-R Robot. **Journal of Mechanism, Transmission, Automation in Design**, v. 105, p. 52-57, 1983.

TSAI, K. Y.; KOHLI, D.; ARNOLD J. Trajectory Planning in Joint Space for Mechanical Manipulators. **ASME Journal of Mechanical Design**, v. 115, p. 915-921, Déc 1993.

UR-REHMAN, R.; CARO, S.; CHABLAT, D.; WENGER, P. Path Placement Optimization of Parallel kinematics machines based on energy consumption, shaking forces and maximum actuator torques: Application to the orthoglide. **Mechanism and Machine Theory**, v. 45, p. 1125-1141, 2009.

VIJAYKUMAR, R.; TSAI, M. J.; WALDRON, K. J. Geometric Optimization of Serial Chain Manipulator Structures for Working Volume and Dexterity, **The Int. Journal Robotics Res.** v. 5, n.2, p. 91-103, 1986.

VINOGRADOV, I. B.; KOBRINSKI, A. E.; STEPANENKO, Y. E.; TIVES, L. T. Details of Kinematics of Manipulators with the Method of Volumes (in Russian), **Mekhanika Mashin**, n.27, p. 5-16, 1971.

WANG, H.; GUO, Y. Synchronization on a Segment without Localization: Algorithm, Applications, and Robot Experiments, **The Int. Journal of INTELLIGENT CONTROL AND SYSTEMS**, v. 15, n.1, p. 9-17, 2010.

WENGER, P. Cuspidal and Noncuspidal Robot Manipulators. Submitted to special issue “**Geometry in Robotics and Sensing**” of ROBOTICA. Fev 2010.

WENGER, P. Some Guidelines for the Kinematic Design of New Manipulators. **Mechanism and Machine Theory**, v. 35, p. 437-449, 2000.

WENGER, P.; CHABLAT, D.; BAILI M. A DH-Parameter Based Condition for 3R Orthogonal Manipulators to have 4 Distinct Inverse Kinematic Solutions. **ASME Journal of Mechanical Design**, v. 127, n.1, p. 150-155, Jan 2005.

WENGER, P.; CHEDMAIL P.; REYNIER E. Global Analysis of Following Trajectories by redundant Manipulators in the Presence of Obstacles. **Proc. Int. Conf. on Robotics and automation**, p. 3901-3906, Atlanta, Mai 1993.

WENGER, P.; EL OMRI, J. On the Kinematics of Singular and Nonsingular Posture Changing Manipulators. **Proc. Advanced Robotics in Kinematics, ARK'94, Kluwer Academic Publisher**, p. 29-38, Ljubjana, Juillet 1994.

WENGER, P.; EL OMRI J. Changing Posture for Cuspidal Robot Manipulators. **Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation**, p. 3173-3178, Philadelphia, Mai 1996.

YANG, D. C.; LAI, Z. C. On the Conditioning of Robotic Manipulators – service angle, **ASME Journal Mechanisms, Transm., and Automation in Design**, v. 107, p. 262-270, 1985.

YAO, W.; DAI, J. S. Workspace and Orientation Analysis of a Parallel Structure for Robotic Fingers, **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing**, v. 5, n.1, p. 54-69, 2011.

YOSHIKAWA, T. Manipulability of Robotic Mechanisms, **The Int. Journal Robotics Res.** v. 4, n.2, p. 3-9, 1985.

ZAITER, A. K.; WENGER, P.; CHABLAT, D. A study of the singularity locus in the joint space of planar parallel manipulators: special focus on cusps and nodes, *4th Int. Congress Design and Modeling of Mechanical Systems*, Sousse, Tunisia, 2011.

ZHANG, D.; XI, F.; MECHEFSKE, C. M.; LANG, S. Y. T. Analysis of parallel kinematic machine with kinetostatic modeling method, **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 20, n.2, p. 151-165, April 2004.

ZHOU, L.; BAI, S.; HANSEN, M. R.; RASMUSSEN, J. Modeling of Human Arm Energy Expenditure for Predicting Energy Optimal Trajectories. **Journal of Modeling, Identification and Control**, v. 32, n.3, p. 91-101, 2011.

ZHOU, Z.; XI, j.; MECHEFSKE, C. K. Modeling of a Fully Flexible 3PRS Manipulator for Vibration Analysis, **Journal of Mechanical Design**, v. 128, p. 403-412, 2006.

## ANEXO I

### ESTUDO SOBRE BASE DE GROEBNER

Para estudar as topologias do espaço de trabalho dos manipuladores 3R é necessário conhecer as equações que as separam. O Capítulo foi dedicado à obtenção de uma destas equações através da solução do polinômio do MGI utilizando a ferramenta algébrica Base de Groebner. Por esta razão, apresenta-se a seguir um breve estudo sobre esta importante ferramenta algébrica.

#### 1. Ordenação de Monômios em $k[x_1, \dots, x_n]$

**Definição 1:** Uma ordenação monomial em  $k[x_1, \dots, x_n]$  é alguma relação  $>$  em  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , ou equivalentemente, alguma relação no conjunto de monômios  $x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , satisfazendo:

- (i)  $>$  é uma ordenação total (ou linear) em  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ .
- (ii) Se  $\alpha > \beta$  e  $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , então  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ .
- (iii)  $>$  é uma bem ordenada em  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Isto significa que todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tem um elemento menor que  $>$ .

**Definição 2: Ordem Lexicográfica (ordem *lex*)** Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Diz-se que  $\alpha >_{lex} \beta$  se, no vetor diferença  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ , o termo não nulo mais à esquerda é positivo. Escreve-se:  $x^\alpha >_{lex} x^\beta$  se  $\alpha >_{lex} \beta$ .

#### Exemplos:

- a)  $(1, 2, 0) >_{lex} (0, 3, 4)$ , pois  $\alpha - \beta = (1, -1, -4)$ .
- b)  $(3, 2, 4) >_{lex} (3, 2, 1)$ , pois  $\alpha - \beta = (0, 0, 3)$ .
- c)  $(1, 0, \dots, 0) >_{lex} (0, 1, \dots, 0) >_{lex} \dots >_{lex} (0, 0, \dots, 1) \Rightarrow x_1 >_{lex} x_2 >_{lex} \dots >_{lex} x_n$ .

**Definição 3: Ordem Lex Graded (ordem  $grlex$ )** Seja  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Diz-se  $\alpha >_{grlex} \beta$  se:  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$  ou  $|\alpha| = |\beta|$  e  $\alpha >_{lex} \beta$ .

**Exemplos:**

a)  $(1, 2, 3) >_{grlex} (3, 2, 0)$ , pois  $|(1, 2, 3)| = 6 > |(3, 2, 0)| = 5$ .

b)  $(1, 2, 4) >_{grlex} (1, 1, 5)$ , pois  $|(1, 2, 4)| = |(1, 1, 5)| = 7$  e  $(1, 2, 4) >_{lex} (1, 1, 5)$ , pois  $\alpha - \beta = (0, 1, -1)$ .

c) As variáveis são ordenadas de acordo com a ordem  $lex$ , i.e.,  $x_1 >_{grlex} \dots >_{grlex} x_n$

Outra ordem monomial é a ordem lexicográfica reversa *Graded* (ou ordem *grevlex*). Para algumas operações, esta ordenação é a mais eficiente para computadores.

**Definição 4: Ordem Lex Reversa Graded (ordem  $grevlex$ )** Seja  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Diz-se  $\alpha >_{grevlex} \beta$  se:  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$  ou  $|\alpha| = |\beta|$  e o elemento não nulo mais à direita de  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  é negativo.

**Exemplos:**

a)  $(4, 7, 1) >_{grevlex} (4, 2, 3)$ , pois  $|(4, 7, 1)| = 12 > |(4, 2, 3)| = 9$ .

b)  $(1, 5, 2) >_{grevlex} (4, 1, 3)$ , pois  $|(1, 5, 2)| = |(4, 1, 3)|$  e  $\alpha - \beta = (-3, 4, -1)$ .

**Relação entre as ordens  $grlex$  e  $grevlex$ :**

Observe que ambas utilizam o grau total da mesma forma.

**Exemplo:**  $x^5yz >_{grlex} x^4yz^2$ , pois ambos os monômios tem grau total 7 e  $x^5yz >_{lex} x^4yz^2$ . Neste caso, tem-se também  $x^5yz >_{grevlex} x^4yz^2$  por uma diferente razão:  $x^5yz$  é maior porque a menor variável  $z$  aparece com menor grau. Ou seja:

$x^5yz >_{grlex} x^4yz^2 \Rightarrow (5, 1, 1) >_{grlex} (4, 1, 2)$ , pois  $|7| = |7|$  e  $(5, 1, 1) >_{lex} (4, 1, 2)$ , pois  $\alpha - \beta = (1, 0, -1)$ ;

$x^5yz >_{lex} x^4yz^2$ , pois  $\alpha - \beta = (1, 0, -1)$ ;

$x^5yz >_{grevlex} x^4yz^2$ , pois  $|7| = |7|$  e  $\alpha - \beta = (1, 0, -1)$

Portanto, este é um exemplo de *ordem lex*, *grlex* e *grevlex* ao mesmo tempo.

### Como a ordenação monomial pode ser aplicada aos monômios?

Se  $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha}x^{\alpha}$  é um polinômio em  $k = [x_1, \dots, x_n]$  e seleciona-se a ordenação polinomial  $>$ , então pode-se ordenar os monômios de  $f$  de modo sem ambigüidade com respeito a  $>$ .

**Exemplo:**  $f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in k[x, y, z]$ .

Com relação à *ordem lex*, podemos ordenar os termos de  $f$  em ordem decrescente como mostrado abaixo:

$$f = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2$$

Com relação à *ordem grlex*, tem-se:  $f = 7x^2z^2 + 4xy^2z - 5x^3 + 4z^2$

E com relação à *ordem revlex*, tem-se:  $f = 4xy^2z + 7x^2z^2 - 5x^3 + 4z^2$

**Definição 5:** Sejam  $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha}x^{\alpha}$  um polinômio não nulo em  $k = [x_1, \dots, x_n]$  e  $>$  uma ordem monomial.

(i) O multigrau de  $f$  é:  $\text{multideg}(f) = \max(\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : a_{\alpha} \neq 0)$  (o máximo é tomado com relação a  $>$ ).

(ii) O coeficiente dominante de  $f$  é:  $\text{LC}(f) = a_{\text{multideg}(f)} \in k$ .

(iii) O monômio dominante de  $f$  é:  $\text{LM}(f) = x^{\text{multideg}(f)}$  (coeficiente igual a 1).

(iv) O termo dominante de  $f$  é:  $\text{LT}(f) = \text{LC}(f) \cdot \text{LM}(f)$ .

**Exemplo:**  $f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in k[x, y, z]$  e a relação  $>$  é a *ordem lex*.

(i)  $\text{multideg}(f) = (3, 0, 0)$

(ii)  $\text{LC}(f) = a_{\text{multideg}(f)} = -5$

(iii)  $\text{LM}(f) = x^{\text{multideg}(f)} = x^3$

(iv)  $\text{LT}(f) = \text{LC}(f) \cdot \text{LM}(f) = -5 \cdot x^3$

## 2. Um Algoritmo de Divisão em $k[x_1, \dots, x_n]$

Dividir  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  por  $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , ou seja:  $f = a_1f_1 + \dots + a_sf_s + r$ , sendo  $a_s$  os quocientes,  $f_s$  os divisores e  $r$  o resto.

(usa a mesma ideia do algoritmo de uma variável:  $f(x) = g(x)h(x) + r$ )

**Exemplo:** Considerando a *ordem lex*:  $x > y$ , dividir  $f = xy^2 + 1$  por  $f_1 = xy^2 + 1$  e  $f_2 = y + 1$ , ou seja, escrever  $f$  na forma  $f = a_1f_1 + a_2f_2 + r$ .

Tem-se que  $\text{LT}(f) = xy^2$ ,  $\text{LT}(f_1) = xy$  e  $\text{LT}(f_2) = y$ . Os termos dominantes de  $f_1$  e  $f_2$  dividem  $\text{LT}(f)$ , como  $f_1$  é listado primeiro, este será utilizado nesta ordem. Assim, dividindo  $f$  por  $f_1$ , tem-se o primeiro quociente  $a_1 = y$  e resto  $r = -y + 1$ . Repete-se o mesmo processo em  $r$ . Desta vez, vamos usar  $f_2$ , já que  $\text{LT}(f_2) = y$  não divide  $\text{LT}(r) = -y$ . O quociente  $a_2 = -1$  e resto  $r = 2$ . Como  $\text{LT}(f_1)$  e  $\text{LT}(f_2)$  não dividem 2, o resto final é  $r = 2$ .

Assim,  $f$  pode ser reescrito como  $xy^2 + 1 = y(xy + 1) + (-1)(y + 1) + 2$ .

**Exemplo:** Adotando a ordem  $x > y$ , dividir  $f = x^2y + xy^2 + y^2$  por  $f_1 = xy - 1$  e  $f_2 = y^2 - 1$ .

Tem-se que  $\text{LT}(f) = x^2y$ ,  $\text{LT}(f_1) = xy$  e  $\text{LT}(f_2) = y^2$ . Tanto  $\text{LT}(f_1)$  como  $\text{LT}(f_2)$  dividem  $\text{LT}(f)$ ,  $f_1$  é usado primeiro. Assim, dividindo  $f$  por  $f_1$ , tem-se o primeiro quociente  $a_1 = x + y$  e resto  $r = x + y^2 + y$ . Note que nem  $\text{LT}(f_1)$  nem  $\text{LT}(f_2)$  dividem  $\text{LT}(r)$ . No entanto,  $x + y^2 + y$  não é resto, já que  $\text{LT}(f_2)$  divide o monômio  $y^2$  de  $r$ . Assim, se for retirado  $x$ , pode-se continuar a divisão (isto nunca acontece no caso de uma variável, uma vez que o termo dominante do divisor não mais divide o termo principal do que está à esquerda do radical, o algoritmo finaliza).

Para implementar esta ideia, cria-se uma coluna resto  $r$ , para a direita do radical, onde coloca-se os termos pertencendo ao resto. Também denomina-se o polinômio abaixo do radical de *dividendo intermediário*. Então continua-se a divisão até que o dividendo intermediário seja zero.

O próximo passo consiste em mover  $x$  para a coluna do resto e dividir o que sobrou do resto, ou seja,  $r = y^2 + y$  por  $f_2$ , resultando no quociente  $a_2 = 1$  e resto  $r = y + 1$ . Observa-se que  $\text{LT}(r) = y$  não pode ser dividido por  $\text{LT}(f_1)$  nem  $\text{LT}(f_2)$ , então move-se o termo dominante ( $y$ ) do dividendo intermediário para a coluna resto. Mas (1) também não pode ser dividido por  $\text{LT}(f_1)$  e  $\text{LT}(f_2)$ , portanto, a coluna resto é  $(x+y+1)$ . Assim, o polinômio  $f$  pode ser escrito como:

$$f = x^2y + xy^2 + y^2 = (x + y)(xy - 1) + (1)(y^2 - 1) + (x + y + 1)$$

Este exemplo é uma ilustração completa de como o algoritmo da divisão funciona. Também mostra qual propriedade desejada para o *resto*:

“*Nenhum dos termos do resto deve ser divisível pelos termos dominantes dos polinômios pelos quais estamos dividindo*”.

Pode-se agora, estabelecer a forma geral do algoritmo da divisão:

**Teorema 1: Algoritmo da Divisão em  $k[x_1, \dots, x_n]$ :** Fixe uma ordem monomial  $\succ$  em  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  e faça  $F = (f_1, \dots, f_s)$  ser uma  $s$ -upla ordenada de polinômios em  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Então, todo  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  pode ser escrito como:  $f = a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_sf_s + r$ , onde  $a_i, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ , e se  $r = 0$  ou  $r$  é uma combinação linear, com coeficientes em  $k$ , de monômios, nenhum dos

quais é divisível por algum dos  $\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_s)$ . Denomina-se  $r$  de um resto de  $f$  na divisão por  $F$ . Além disso, se  $a_i f_i \neq 0$ , então tem-se que  $\text{multideg}(f) \geq \text{multideg}(a_i f_i)$ .

Uma propriedade importante do algoritmo da divisão em  $k[x]$  é que o resto é unicamente determinado, o que não ocorre em  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Exemplo:** Sejam  $f_1 = xy + 1$  e  $f_2 = y^2 - 1 \in k[x, y]$ , com a ordem  $\text{lex } x > y$ . Dividir  $f = xy^2 - x$  por  $F = (f_1, f_2)$  e depois por  $F = (f_2, f_1)$ . O que ocorre?

Dividindo  $f$  por  $f_1$ , tem-se  $a_1 = y$  e o resto  $r = -x - y$ , e como  $\text{LT}(f_1)$  e  $\text{LT}(f_2)$  não dividem  $(-x - y)$ , o resto final é  $r = -x - y$ . Assim,  $f$  pode ser reescrito como 
$$xy^2 - x = y(xy + 1) + (0)(y^2 - 1) + (-x - y).$$

Agora, dividindo  $f$  por  $f_2$ , tem-se  $a_1 = x$  e o resto  $r = 0$ . Assim,  $f$  pode ser reescrito como 
$$xy^2 - x = x(y^2 - 1) + (0)(xy + 1) + 0.$$

O segundo cálculo mostra que  $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$ . Então, o primeiro cálculo mostra que mesmo que  $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$ , ainda é possível obter um resto não nulo na divisão por  $F = (f_1, f_2)$ . Assim, conclui-se que o algoritmo da divisão dado no Teorema 1 é uma generalização imperfeita de seu equivalente em uma variável. Para remediar esta situação, quando deseja-se resolver algum problema com uma coleção de polinômios  $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , é frequentemente desejável passar para o ideal que eles geram. Isto permite fazer de  $f_1, \dots, f_s$  um conjunto gerador diferente para  $I$ . Pode-se ainda perguntar se existe um conjunto gerador “bom” para  $I$ . Para tal conjunto, deseja-se que o resto  $r$  na divisão pelos geradores “bons” seja unicamente determinado e a condição  $r = 0$  deve ser equivalente ao membro do ideal. Na seção 5 será visto que as Bases de Groebner têm estas propriedades “boas”.

### 3. Ideais Monomiais e Lema de Dickson

Seja o *problema de descrição de Ideal*: Todo ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  possui um conjunto de geradores finito? Em outras palavras, podemos escrever  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  para algum  $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ ?

Este problema será considerado para o caso de ideais monomiais. Isto exigirá um estudo cuidadoso das propriedades destes ideais. Os resultados terão também uma aplicação inesperada para ordenações monomiais.

Para começar, são definidos ideais monomiais em  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Definição 6:** Um ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  é um ideal monomial se existe um subconjunto  $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  (possivelmente finito) tal que  $I$  consiste de todos os polinômios que são somas finitas da forma  $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha x^\alpha$ , onde  $h_\alpha \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Neste caso, escrevemos:  $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$ .

Um exemplo de ideal monomial é dado por:  $I = \langle x^4 y^2, x^3 y^4, x^2 y^5 \rangle \subset k[x, y]$ . Exemplos mais interessantes serão dados posteriormente.

**Teorema 2: (Lema de Dickson)** Um ideal monomial  $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$  pode ser escrito na forma:  $I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$ , onde  $\alpha(1), \dots, \alpha(s) \in A$ . Em particular,  $I$  tem uma base finita.

#### 4. O Teorema da Base de Hilbert e as Bases de Groebner

Nesta seção é dada uma solução completa do *problema de descrição ideal*. Este tratamento também conduz as bases ideais com “boas” propriedades relativas ao algoritmo da divisão introduzido anteriormente. A ideia chave a ser usada é escolher uma ordenação monomial, cada  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  tem um único termo dominante  $LT(f)$ . Então, para algum ideal  $I$ , pode-se definir seus ideais de termos dominantes como segue:

**Definição 7:** Seja  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  um ideal monomial exceto  $\{0\}$ .

(i) Denota-se por  $LT(I)$  o conjunto dos termos dominantes dos elementos de  $I$ . Assim,

$$LT(I) = \{cx^\alpha : \text{existe } f \in I \text{ com } LT(f) = cx^\alpha\}.$$

(ii) Denota-se por  $\langle LT(I) \rangle$  o ideal gerado pelos elementos de  $LT(I)$ .

Tem-se visto que os termos dominantes têm uma importante regra no algoritmo da divisão. Isto traz um sutil, porém importante ponto relativo a  $\langle LT(I) \rangle$ . A saber, se dado um conjunto gerador finito para  $I$ , por exemplo,  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , então  $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle$  e  $\langle LT(I) \rangle$  deve ter ideais diferentes. É verdade que  $LT(f_i) \in LT(I) \subset \langle LT(I) \rangle$  por definição, que implica  $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle \subset \langle LT(I) \rangle$ . No entanto,  $\langle LT(I) \rangle$  pode ser estritamente grande.

Para ver isto, considere o seguinte exemplo.

**Exemplo:** Seja  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ , onde  $f_1 = x^3 - 2xy$ ,  $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$  e ordem *grlex* para os monômios em  $k[x, y]$ . Então  $x(x^2y - 2y^2 + x) - y(x^3 - 2xy) = x^2$ , tal que  $x^2 \in I$ . Assim,  $x^2 = LT(x^2) \in \langle LT(I) \rangle$ , mas  $x^2$  não é divisível por  $LT(f_1) = x^3$  ou  $LT(f_2) = x^2y$ , tal que  $x^2 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$  pelo Teorema 2 da seção 3.

Agora é mostrado que  $\langle LT(I) \rangle$  é um ideal monomial, isto permitirá a aplicação dos resultados da seção 3. Em particular, seguirá que  $\langle LT(I) \rangle$  é gerado por muitos termos dominantes.

**Proposição 1:** Seja  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  um ideal.

- (i)  $\langle LT(I) \rangle$  é um ideal monomial.
- (ii) Existem  $g_1, \dots, g_t \in I$  tal que  $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$ .

A Proposição 1 e o Algoritmo da Divisão são utilizados para provar a existência de um conjunto finito de geradores de todo ideal polinomial, e assim, dar uma resposta afirmativa para o *problema de descrição ideal*.

Seja,  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  um ideal e considere o ideal associado  $\langle LT(I) \rangle$  como na definição 7. Como sempre, deve-se selecionar uma ordem monomial para usar no algoritmo da divisão e no cálculo dos termos dominantes.

**Teorema 3: (Teorema da Base de Hilbert)** Todo ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  tem um conjunto gerador finito que é  $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$  para algum  $g_1, \dots, g_t \in I$ .

Além disto, para responder o problema de descrição de ideal, a base  $\{g_1, \dots, g_t\}$  usada na demonstração do Teorema 3 tem a propriedade especial que  $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$ .

Como visto no exemplo anterior, nem todas as bases de um ideal se comportam deste jeito. A seguir, são definidas tais bases especiais.

**Definição 8:** Fixe uma ordem monomial. Um subconjunto finito  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  de um ideal  $I$  é dito *Base de Groebner* (ou base padrão) se  $\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ .

Equivalentemente, porém mais informalmente, um conjunto  $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$  é uma base de Groebner se, e somente se, o termo dominante de qualquer elemento de  $I$  é divisível por um dos  $LT(g_i)$ , pelo Teorema 2, seção 3.

A prova do Teorema 3 também estabelece o seguinte resultado:

**Corolário 1:** Fixe uma ordem monomial. Então todo ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , exceto  $\{0\}$ , tem uma base de Groebner. Além disso, qualquer base de Groebner para um ideal  $I$  é uma base de  $I$ .

Na próxima seção, são estudadas as propriedades das bases de Groebner com mais detalhes, e, em particular, é visto como elas dão uma solução para o problema do membro ideal. As bases de Groebner são “bons” conjuntos geradores.

Para alguns exemplos de base de Groebner, considere o ideal  $I$  do exemplo anterior que tinha base  $\{f_1, f_2\} = \{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\}$ .

Então  $\{f_1, f_2\}$  não é uma base de Groebner para  $I$  com relação à ordem *grlex* já que foi visto no exemplo que  $x^2 \in \langle LT(I) \rangle$ , mas  $x^2 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$ . Na seção 6 será visto como encontrar uma base de Groebner.

A seguir, considere o ideal  $J = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle x+z, y-z \rangle$ . Pode-se afirmar que  $g_1$  e  $g_2$  formam uma base de Groebner usando a ordem *lex* em  $\mathbb{R}[x, y, z]$ . Assim, deve-se mostrar que

a forma inicial de cada elemento não nulo de  $J$  está no ideal  $\langle LT(g_1), LT(g_2) \rangle = \langle x, y \rangle$ . Pelo Teorema 2 da seção 3, isto é equivalente a mostrar que o termo dominante de qualquer elemento não nulo de  $J$  é divisível por  $x$  ou  $y$ .

Para provar isto, considere algum  $f = Ag_1 + Bg_2 \in J$ . Supondo o contrário, ou seja, que  $f$  é não nulo e  $LT(f)$  não é divisível por  $x$  e nem  $y$ . Então, pela definição de ordem *lex*,  $f$  deve ser um polinômio em  $z$  (apenas). No entanto,  $f$  desaparece no subespaço linear  $L = V(x+z, y-z) \subset \mathbb{R}^3$ , já que  $f \in J$ . É fácil verificar que  $(x, y, z) = (-t, t, t) \in L$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ . O único polinômio em  $z$  que desaparece em todos estes pontos é o polinômio zero, que é uma contradição. Segue que  $\langle g_1, g_2 \rangle$  é uma base de Groebner para  $J$ .

Na seção 5 será visto um jeito mais sistemático para detectar quando uma base é base de Groebner.

## 5. Propriedades das Bases de Groebner

Como mostrado na seção anterior, todo ideal não nulo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  possui uma base de Groebner. Nesta seção, são estudadas as propriedades das bases de Groebner e apresentado como detectar quando uma base dada é base de Groebner. Inicia-se mostrando que o comportamento indesejável do algoritmo da divisão em  $k[x_1, \dots, x_n]$ , visto anteriormente, não ocorre quando divide-se por elementos de uma base de Groebner.

Prova-se, primeiramente, que o resto é unicamente determinado quando divide-se por uma base de Groebner:

**Proposição 2:** Seja  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  uma base de Groebner para um ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  e seja  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Então existe um único  $r \in k[x_1, \dots, x_n]$  com as seguintes propriedades:

- (i) Nenhum termo de  $r$  é divisível por qualquer um dos termos  $LT(g_1), \dots, LT(g_t)$ .
- (ii) Existe  $g \in I$  tal que  $f = g + r$ .

Em particular,  $r$  é o resto da divisão de  $f$  por  $G$ , não importando como os elementos de  $G$  estão listados quando usado o algoritmo da divisão.

O resto  $r$  é algumas vezes, chamado de forma *normal de f*. Na verdade, as bases de Groebner podem ser caracterizadas pela unicidade do resto (ver Teorema 5.35 de BECKER and WEISPFENNING, 1993) para estas e outras condições equivalentes para ser uma base de Groebner.

Embora o resto seja único, mesmo para uma base de Groebner, os quocientes  $a_i$  produzidos pelo algoritmo de divisão,  $f = a_1f_1 + \dots + a_sf_s + r$ , podem mudar se listamos os geradores em uma ordem diferente.

A seguir, é dado um critério para saber quando um polinômio está em um ideal.

**Corolário 2:** Seja  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  uma base de Groebner para um ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  e seja  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Então  $f \in I$  se, e somente se, o resto da divisão de  $f$  por  $G$  for **zero**.

A propriedade dada no corolário 2 é algumas vezes tida como a definição da base de Groebner, já que pode mostrar que é verdade se, e somente se,  $\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ . Para esta e condições similares equivalentes serem uma base de Groebner, ver proposição 5.38 de BECKER e WEISPFENNING, 1993.

Usando o corolário 2, obtém-se um algoritmo para decidir se um dado polinômio  $f$  pertence ou não ao ideal  $I$ , desde que seja conhecida uma base de Groebner  $G$  para o ideal em questão – basta calcular o resto com respeito a  $G$  para determinar se  $f \in I$ .

**Definição 9:** Escreve-se  $\overline{f}^F$  para o resto da divisão de  $f$  pela  $s$ -upla ordenada  $F = (f_1, \dots, f_s)$ . Se  $F$  é uma base de Groebner para  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , então pode-se considerar  $F$  como um conjunto (sem qualquer ordem particular) pela proposição 2.

Por exemplo, com  $F = (x^2y - y^2, x^4y^2 - y^2) \subset k[x, y]$ , usando a ordem *lex*, tem-se:

$$\overline{x^5y}^F = xy^3 \text{ (resto da divisão de } f = x^5y \text{ pela base } F\text{).}$$

Já com o algoritmo da divisão, tem-se:

$$f = x^5y = (x^3 + xy)(x^2y - y^2) + 0.(x^4y^2 - y^2) + xy^3$$

A seguir, será discutido como determinar se um dado conjunto de gerador de um ideal é uma base de Groebner. Como tem-se indicado, para  $\{f_1, \dots, f_s\}$  ser uma base de Groebner é possível ocorrer que combinações polinomiais de  $f_i$  cujos termos dominantes não estão no ideal gerado pelos  $LT(f_i)$ . Uma forma disto ocorrer é se os termos dominantes em uma combinação adequada  $ax^\alpha f_i - bx^\beta f_j$  se cancelam, deixando apenas os menores termos. Por outro lado,  $ax^\alpha f_i - bx^\beta f_j \in I$ , então seu termo dominante está em  $\langle LT(I) \rangle$ . Para estudar este fenômeno de cancelamento, são introduzidas as seguintes combinações especiais.

**Definição 10:** Sejam  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  polinômios não nulos.

(i) Se  $\text{multideg}(f) = \alpha$  e  $\text{multideg}(g) = \beta$ , então seja  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , onde  $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$  para cada  $i$ . Chama-se  $x^\gamma$  de mínimo múltiplo comum de  $\text{LM}(f)$  e  $\text{LM}(g)$ , e escreve-se  $x^\gamma = \text{LCM}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))$ .

(ii) O polinômio de  $f$  e  $g$  é a combinação

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g$$

Para exemplificar, considere  $f = x^3y^2 - x^2y^3 + x$  e  $g = 3x^4y + y^2$  em  $\mathbb{R}[x, y]$ , com a ordem *grlex*.

Então,  $\gamma = \max(3, 4; 2, 1) \Rightarrow \gamma = (4, 2) \Rightarrow x^\gamma = x^4y^2$  e

$$S(f, g) = \frac{x^4y^2}{x^3y^2} (x^3y^2 - x^2y^3 + x) - \frac{x^4y^2}{3x^4y} (3x^4y + y^2).$$

Simplificando, tem-se: 
$$S(f, g) = -x^3y^3 + x^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

Um  $S$ -polinômio  $S(f, g)$  é “designado” para produzir cancelamento de termos dominantes. Na verdade, o seguinte lema mostra que todo cancelamento de termos dominantes entre polinômios de mesmo multigrau resulta deste tipo de cancelamento.

**Lema 1:** Suponha que temos a soma  $\sum_{i=1}^s c_i f_i$ , onde  $c_i \in k$  e  $\text{multideg}(f_i) = \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , para todo  $i$ . Se  $\text{multideg}(\sum_{i=1}^s c_i f_i) < \delta$ , então  $\sum_{i=1}^s c_i f_i$  é uma combinação linear, com coeficientes em  $k$ , dos  $S$ -polinômios  $S(f, g)$ , para  $1 \leq j, k \leq s$ . Além disso, cada  $S(f_i, f_k)$  tem multigrau  $< \delta$ .

Quando  $f_1, \dots, f_s$  satisfaz as hipóteses do lema 5, chega-se a uma equação da forma:

$$\sum_{i=1}^s c_i f_i = \sum_{j,k} c_{jk} S(f_j, f_k)$$

Considere onde o cancelamento ocorre. Na soma da esquerda, cada parcela  $c_i f_i$  tem multigrau  $\delta$ , então o cancelamento ocorre apenas depois de somá-los. No entanto, na soma da direita, cada parcela  $c_{jk} S(f_j, f_k)$  tem multigrau  $< \delta$ , e aí o cancelamento tem já ocorrido. Intuitivamente, isto significa que todo cancelamento pode ser representado pelos  $S$ -polinômios.

Usando  $S$ -polinômios e o lema 5, pode-se provar o seguinte critério de Buchberger para verificar quando uma base de um ideal é base de Groebner.

**Teorema 4:** Seja  $I$  um ideal polinomial. Então a base  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  para  $I$  é uma base de Groebner para  $I$ , se, e somente se, para todos os pares  $i \neq j$ , o resto da divisão de  $S(g_i, g_j)$  por  $G$  (listada nesta ordem) for **zero**.

Este Teorema é algumas vezes chamado de “*critério  $S$ -par de Buchberger*” e é um dos resultados chave sobre as bases de Groebner. Tem-se visto que as bases de Groebner têm muitas propriedades boas, porém, até agora, tem sido difícil determinar se uma base de um ideal é base de Groebner (os exemplos anteriores foram triviais). Usando o critério  $S$ -par, no entanto, é agora fácil mostrar se uma dada base é base de Groebner. Além disso, na próxima seção será visto que o critério  $S$ -par também conduz naturalmente a um algoritmo para calcular as bases de Groebner.

Para exemplificar como usar o Teorema 4, considere o ideal  $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ .

Afirma-se que  $G = \{y - x^2, z - x^3\}$  é uma base de Groebner para a ordem *lex* com  $y > z > x$ . Para provar isto, considere o *S*-polinômio:

$$S(y - x^2, z - x^3) = \frac{yz}{y}(y - x^2) - \frac{yz}{z}(z - x^3) \Rightarrow \boxed{S(y - x^2, z - x^3) = -zx^2 + yx^3}$$

Usando o algoritmo da divisão:

Dividindo  $S(y - x^2, z - x^3)$  por  $f = y - x^2$ , tem-se  $a_1 = x^3$  e o resto  $r = -zx^2 + x^5$ , e como  $\text{LT}(\text{resto})$  divide  $g = z - x^3$ , tem-se  $a_2 = -x^2$  e o resto é zero.

Assim,  $S(f, g) = -zx^2 + yx^3$  pode ser reescrito como:

$$-zx^2 + yx^3 = x^3(y - x^2) + (-x^2)(z - x^3) + 0.$$

Logo,  $\overline{S(y - x^2, z - x^3)}^G = 0$ . Assim, pelo Teorema 4,  $G$  é uma base de Groebner para  $I$ .

Observe que para a ordem *lex* com  $x > y > z$ ,  $G$  não é base de Groebner.

## 6. Algoritmo de Buchberger

No corolário 1 da seção 4, foi visto que todo ideal em  $k[x_1, \dots, x_n]$ , exceto  $\{0\}$ , tem uma base de Groebner. Infelizmente, a demonstração dada foi não construtiva no sentido que não foi falado como produzir a base de Groebner. Então, agora retorna-se à questão.

Dado um ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , como construir uma base de Groebner para  $I$ ?

Para ver as idéias principais que estão “por trás” do método que será usado, retorna-se ao ideal do exemplo da seção 4 e procede-se como segue:

**Exemplo:** Considere o anel  $k[x, y]$  com ordem *grlex* e seja  $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x \rangle$ . Recordar que  $\{f_1, f_2\}$  não é uma base de Groebner para  $I$  já que  $\text{LT}(S(f_1, f_2)) = -x^2 \notin \langle \text{LT}(f_1), \text{LT}(f_2) \rangle$ .

Para produzir uma base de Groebner, uma ideia natural é tentar primeiro estender o conjunto de geradores original para uma base de Groebner adicionando mais polinômios em  $I$ .

Isto não acrescenta nada de novo, até mesmo introduz um elemento de redundância. No entanto, a informação extra que obtém-se de uma base de Groebner pode compensar isto.

Quais geradores novos devem ser adicionados? Pelo que tem sido dito sobre os *S*-polinômios, a ideia que é apresentada aparece naturalmente.

Tem-se  $S(f_1, f_2) = -x^2 \in I$ , e seu resto na divisão por  $F = (f_1, f_2)$  é  $-x^2$ , que não é nulo. Daí deve-se incluir o resto no conjunto de geradores, como um novo gerador  $f_3 = -x^2$ . Se for adotado  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , pode-se usar o Teorema 4 para testar se este novo conjunto é uma base de Groebner para  $I$ .

Calcula-se  $S(f_1, f_2) = f_3$ , e então  $\overline{S(f_1, f_2)}^F = 0$ .

$$S(f_1, f_3) = \frac{x^3}{x^3} \cdot (x^3 - 2xy) - \frac{x^3}{x^2} (-x^2) = -2xy, \text{ mas } \overline{S(f_1, f_3)}^F = -2xy \neq 0.$$

Seja  $f_4 = -2xy$ , devemos adicionar  $f_4$  ao conjunto de geradores.

Fazendo  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ , tem-se:  $\overline{S(f_1, f_2)}^F = \overline{S(f_1, f_3)}^F = 0$ .

$$S(f_1, f_4) = \frac{x^3 y}{x^3} \cdot (x^3 - 2xy) - \frac{x^3 y}{-2xy} (-2xy) = -2xy^2 \Rightarrow S(f_1, f_4) = -2xy^2 = yf_4 \text{ e aí,}$$

$$\overline{S(f_1, f_4)}^F = 0.$$

$$S(f_2, f_3) = \frac{x^2 y}{x^2 y} \cdot (x^2 y - 2y^2 + x) - \frac{x^2 y}{(-2x^2)} (-2x^2) \Rightarrow \boxed{S(f_2, f_3) = -2y^2 + x}, \text{ mas}$$

$$\overline{S(f_2, f_3)}^F = -2y^2 + x \neq 0.$$

Assim, deve-se também adicionar  $f_5 = -2y^2 + x$  ao conjunto gerador. Fazendo  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ , é possível calcular  $\overline{S(f_i, f_j)}^F = 0, \forall 1 \leq i \leq j \leq 5$ .

Pelo Teorema 6, segue que uma base de Groebner *grlex* para o ideal  $I$  é dada por:

$$\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{x^3 - 2xy, x^2 y - 2y^2 + x, -x^2, -2xy, -2y^2 + x\}.$$

O exemplo acima sugere que, em geral, é desejável tentar estender uma base  $F$  para uma base de Groebner, adicionando sucessivamente, restos não nulos  $\overline{S(f_i, f_j)}^F$  a  $F$ . Esta ideia é uma consequência natural do critério *S-par* e conduz ao seguinte algoritmo devido a Buchberger, para calcular uma Base de Groebner.

**Teorema 5:** Seja  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$  um ideal polinomial. Então a Base de Groebner para  $I$  pode ser construída em um número finito de passos pelo seguinte algoritmo:

Entrada:  $F = (f_1, \dots, f_s)$

Saída: uma base de Groebner  $G = (g_1, \dots, g_s)$  para  $I$ , com  $F \subset G$ .

$G := F$

Repetir

$G' := F$

para cada par  $\{p, q\}, p \neq q$  em  $G'$ ,  $S := \overline{S(p, q)}^{G'}$

se  $S \neq 0$  então  $G := G \cup \{S\}$

até  $G = G'$

## ANEXO II

### APRESENTAÇÃO DA SUPERFÍCIE $C_6$

$$\begin{aligned}
C_6 = & -12r_2^4 d_3^{10} d_4^8 + 180r_2^8 d_3^{10} r_3^4 + 90r_2^8 d_3^{12} r_3^2 - 18r_3^2 d_3^{14} d_4^8 + 60r_3^2 d_3^8 d_4^{10} - 60r_3^2 d_3^{14} d_4^6 \\
& - 30r_2^8 d_3^{10} d_4^2 + 15r_2^4 d_3^8 r_3^4 - 20r_3^6 d_3^6 d_4^6 - 90d_4^8 d_3^6 - 20d_3^{18} d_4^6 + 60r_2^{10} d_3^6 r_3^6 \\
& - 24r_2^4 d_3^{10} r_3^6 + 96r_2^8 d_3^8 d_4^2 r_3^2 + 18r_2^8 d_3^{14} - 60d_3^{16} r_3^2 + 36d_3^{12} d_4^{10} - 90r_2^2 d_3^{18} r_3^2 \\
& - 60d_3^{10} d_4^2 r_3^6 - 36r_2^4 d_3^{10} r_3^4 + 30r_2^8 d_3^4 d_4^2 r_3^{10} + 120d_3^{16} d_4^2 + 15d_3^4 d_4^8 r_2^4 - 90r_2^8 d_3^{12} d_4^2 r_3^2 \\
& + 306r_2^4 r_3^6 d_3^6 d_4^6 - 20d_3^6 d_4^6 + 60d_3^8 d_4^4 r_2^2 - 300d_3^{14} d_4^6 - 36d_3^{12} d_4^4 r_2^4 - 102r_2^8 d_3^2 d_4^4 r_3^6 \\
& + 120r_2^2 d_3^{14} d_4^4 + 24r_2^8 d_3^2 d_4^2 r_3^8 + 60r_2^4 r_3^{10} d_3^8 d_4^2 + 90d_3^8 d_4^8 r_3^4 + 240r_2^8 d_3^8 d_4^4 r_3^2 \\
& - 18r_2^2 d_3^{20} - 6d_3^{10} d_4^{12} - 24r_2^4 d_3^2 d_4^8 r_3^2 - 36r_3^4 d_3^{12} d_4^4 - 12d_3^6 d_4^6 r_3^4 + 102r_2^{10} d_3^4 d_4^2 r_3^6 \\
& + 48r_2^2 d_3^{16} r_3^2 - 138r_2^8 r_3^4 d_3^8 d_4^2 + 180r_2^4 r_3^8 d_3^{10} d_4^2 + 24r_2^{10} d_3^8 d_4^2 r_3^2 + 15r_3^4 r_2^4 d_4^8 \\
& - 60r_2^8 d_3^{10} d_4^2 r_3^4 + 12r_2^6 d_3^{14} - 138r_2^4 r_3^8 d_3^8 d_4^2 - 6d_3^{22} d_4^2 - 60r_2^4 d_3^{16} r_3^2 + 102r_3^4 r_2^4 d_4^6 d_3^2 \\
& - 90d_3^{10} d_4^{10} + 120d_3^{16} d_4^6 + 12r_2^2 d_3^{16} - 6d_3^{12} r_3^2 + 15d_3^4 d_4^8 + 24r_2^4 d_3^{10} d_4^6 + 12r_2^8 d_3^{10} d_4^4 r_3^2 \\
& + 102r_2^{10} r_3^4 d_3^6 d_4^2 - 18r_2^6 d_3^6 d_4^2 r_3^8 - 36r_2^4 r_3^4 d_3^{10} d_4^6 - 12r_2^4 d_3^{14} - 24r_2^4 d_3^{14} r_3^2 \\
& - 1548r_3^4 r_2^4 d_4^6 d_3^4 + 60d_3^{14} r_3^6 - 12r_2^4 d_3^6 d_4^8 - 24r_3^2 r_2^2 d_4^8 d_3^2 + 18r_2^{10} d_3^4 d_4^2 r_3^8 + 36d_3^{20} d_4^2 \\
& - 12r_2^2 d_3^8 d_4^{10} - 18r_2^8 d_3^6 d_4^2 r_3^6 + 15d_3^8 d_4^4 + 60d_3^{18} r_3^2 - 6d_3^{14} d_4^{10} + 72r_2^4 r_3^6 d_3^{10} d_4^4 \\
& + 120d_3^8 d_4^6 - 60d_3^{16} r_3^6 - 90d_3^{14} d_4^8 - 6r_2^2 d_4^{10} r_3^2 + 204r_2^8 d_3^4 d_4^2 r_3^6 - 72r_2^4 d_3^{14} d_4^4 \\
& - 900d_3^{10} r_3^4 r_2^2 d_4^2 + 306r_2^4 r_3^8 d_3^6 d_4^4 - 6d_4^{10} d_3^2 + 400d_3^{12} d_4^6 - 18r_2^{10} d_3^{10} d_4^2 r_3^2 - 90d_3^{10} d_4^4 \\
& + 6r_2^{10} d_3^{12} - 120r_2^4 r_3^4 d_3^{14} d_4^2 + 102r_2^4 r_3^4 d_4^8 d_3^2 + 24r_2^4 d_3^{14} d_4^2 + 24r_2^8 d_3^2 d_4^4 r_3^8 \\
& - 12r_2^2 d_3^6 d_4^{10} - 102r_2^8 d_3^6 d_4^4 r_3^2 - 90d_3^{18} d_4^4 + 12r_2^2 d_3^{10} r_3^6 - 198r_2^8 d_3^6 d_4^4 r_3^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +24r_2^{10}d_3^2d_4^2r_3^8 - 978r_2^4r_3^6d_3^{10}d_4^2 - 90d_3^{18}d_4^2 + 36r_2^2d_3^{14}r_3^2 + 306r_2^8r_3^4d_3^6d_4^2 - 20d_3^6d_4^{12} \\
& +12r_2^{10}d_3^6d_4^2r_3^6 + 6r_2^{10}d_3^2d_4^2r_3^{10} - 12r_2^4d_3^8r_3^6 + 90r_2^8d_3^6d_4^2r_3^8 + 6d_3^{22}r_2^2 \\
& -504r_2^4r_3^6d_3^8d_4^4 - 60d_3^{18}r_3^4 + 36d_3^{12}d_4^2 + 36d_4^{10}d_3^4 - 24r_2^2r_3^4d_4^8d_3^2 - 6d_3^{10}d_4^2 - 6d_3^{12}r_3^{10} \\
& -282r_2^4d_3^{10}d_4^4r_3^2 - 12r_2^{10}r_3^4d_3^8d_4^2 + d_3^{12}r_3^{12} + d_3^{12}r_2^{12} + r_3^{12}r_2^{12} + d_3^{12}d_4^{12} + 120d_3^8d_4^{10} \\
& -300d_3^{10}d_4^6 + 225d_3^{12}d_4^4 + 225d_3^8d_4^8 + 15d_3^4d_4^{12} + 15d_3^{20}r_3^4 + 15d_3^{16}r_2^8 + 15d_3^{20}r_2^4 \\
& +15d_3^{12}r_3^8 + 90d_3^{16}r_3^4 + 15d_3^{12}r_2^8 - 6d_3^{16}r_2^4 + 15d_3^{16}r_3^8 + 15d_3^{20}d_4^4 + 225d_3^{16}d_4^4 - 90d_3^{14}d_4^2 \\
& +15d_3^8d_4^{12} + 15d_3^{16}d_4^8 + 15d_3^{12}r_3^4 + 15d_3^{12}r_2^4 + 225d_3^{12}d_4^8 - 90d_4^{10}d_3^6 - 6d_3^2d_4^{12} + 6d_3^{14}r_3^8 \\
& +30d_3^{14}r_3^2 + 6r_3^2d_3^{22} + 20d_3^{18}r_3^6 - 12r_2^4d_3^{18} + 12r_2^2d_3^{18} - 300d_3^{14}d_4^4 + 20d_3^{18}r_2^6 - 30d_3^{14}r_3^8 \\
& -18r_2^2d_3^{14} - 30r_3^2d_3^{20} - 60d_3^{14}r_3^4 + 6r_2^2d_3^{12} - 20d_3^{12}r_3^6 + 12r_2^6d_3^{16} + 6d_3^{14}r_2^{10} + 20d_3^{12}r_2^6 \\
& -300d_3^{10}d_4^8 + d_3^{12} + 15d_3^{20} + 15d_3^{16} - 6d_3^{14} - 6d_3^{22} - 20d_3^{18} - 12d_3^8d_4^4r_3^6 + 30r_2^4d_3^{10}r_3^2 \\
& +60d_3^8d_4^6r_3^2 - 12d_3^6d_4^6r_3^2 - 12d_3^8d_4^4r_3^2 - 6d_3^8d_4^4r_3^4 - 60d_4^6r_2^2d_3^6 + 90d_4^4r_2^4d_3^8 \\
& -60d_4^6r_2^4d_3^6 - 90d_4^8r_2^2d_3^6 + 30d_4^8r_2^2d_3^4 + 60d_3^8d_4^4r_2^6 - 180d_3^{10}d_4^4r_2^2 - 60d_3^{14}d_4^2r_2^2 \\
& +60d_3^{10}d_4^4r_3^2 - 120d_3^{10}d_4^6r_2^2 + 60d_3^8d_4^8r_2^2 + 6r_2^2d_3^{10}r_3^2 - 60d_4^2r_2^4d_3^{10} + 18d_3^{10}d_4^2r_3^2 \\
& +180d_3^8d_4^8r_3^2 - 120d_3^{10}d_4^6r_3^2 + 90d_4^2r_2^2d_3^{12} - 30d_4^2r_2^2d_3^{10} + 48d_3^8d_4^6r_3^4 - 90d_3^6d_4^8r_3^2 \\
& +18d_3^4d_4^8r_3^2 + 90r_2^8d_3^6r_3^8 + 180r_2^8d_3^8r_3^6 + 60r_2^8d_3^{10}r_3^2 - 30r_2^8d_3^{14}d_4^2 + 18r_2^8d_3^4r_3^{10} \\
& -36r_2^8d_3^{12}d_4^2 + 90r_3^2d_3^{12}d_4^8 - 6r_3^2d_4^{10}d_3^2 + 30r_3^2d_4^{10}d_3^4 - 60r_3^2d_3^6d_4^{10} + 120r_3^2d_3^{14}d_4^4 \\
& -180r_3^2d_3^{16}d_4^2 + 120r_3^2d_3^{12}d_4^6 - 30r_3^2d_3^{10}d_4^{10} + 90r_3^2d_3^{18}d_4^2 + 12r_3^2d_3^{16}d_4^6 + 6r_3^2d_3^{12}d_4^{10} \\
& -18r_3^2d_3^{20}d_4^2 + 12r_3^2d_3^{18}d_4^4 + 60r_2^8d_3^6r_3^6 + 90r_2^8d_3^{14}r_3^2 + 15r_2^8d_3^8d_4^4 + 300r_2^8d_3^{10}r_3^6 \\
& +90r_2^8d_3^6r_3^{10} + 60r_3^6d_3^8d_4^6 + 12r_3^6d_3^{14}d_4^4 + 36r_3^6d_3^{12}d_4^2 + 36r_3^6d_3^{10}d_4^4 + 12r_3^6d_3^{16}d_4^2 \\
& +20r_3^6d_3^{12}d_4^6 - 36r_3^6d_3^{12}d_4^4 - 60r_3^6d_3^{10}d_4^6 + 18r_3^8d_3^{14}d_4^2 - 36r_3^8d_3^{12}d_4^2 - 30r_3^8d_3^{10}d_4^4 \\
& +18r_3^8d_3^{10}d_4^2 + 15r_3^8d_3^8d_4^4 - 6r_3^{10}d_3^{10}d_4^2 + 6r_3^{10}d_3^{12}d_4^2 - 72r_3^4d_3^{10}d_4^6 - 72r_3^4d_3^{14}d_4^2 \\
& +24r_3^4d_3^{14}d_4^4 - 60r_3^4d_3^6d_4^8 + 48r_3^4d_3^{16}d_4^2 + 48r_3^4d_3^{12}d_4^6 - 12r_3^4d_3^{14}d_4^6 - 12r_3^4d_3^{18}d_4^2 \\
& -60r_3^4d_3^{10}d_4^8 - 180r_3^2d_3^{10}d_4^8 + 60r_2^2d_3^{10}d_4^8 - 60r_3^2d_3^{16}d_4^4 + 36r_2^2d_3^{12}r_3^{10} + 48r_2^2d_3^{12}r_3^6 \\
& +6r_2^2d_3^{10}r_3^{12} - 18r_2^2d_3^{10}r_3^{10} + 12r_2^2d_3^{10}r_3^8 + 90r_2^2d_3^{18}r_3^4 + 120r_2^2d_3^{16}r_3^6 - 180r_2^2d_3^{14}r_3^6 \\
& +72r_2^2d_3^{14}r_3^4 + 36r_2^2d_3^{20}r_3^2 - 60r_2^2d_3^{16}d_4^2 - 120r_2^2d_3^{12}d_4^6 + 18r_2^2d_3^{10}d_4^{10} + 90r_2^2d_3^{18}d_4^2 \\
& -60r_2^2d_3^{16}d_4^6 + 30r_2^2d_3^{14}d_4^8 - 6r_2^2d_3^{12}d_4^{10} - 30r_2^2d_3^{20}d_4^2 + 60r_2^2d_3^{18}d_4^4 + 180r_2^2d_3^{14}d_4^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +36r_2^{10}d_3^4r_3^{10} - 6r_2^{10}d_3^{12}d_4^2 + 6r_2^{10}d_3^2r_3^{12} - 36r_3^6d_3^{14}d_4^2 + 300r_2^4d_3^{14}r_3^6 - 120r_2^4d_3^{14}r_3^4 \\
& +48r_2^4d_3^{16}d_4^2 + 48r_2^4d_3^{12}d_4^6 - 60r_2^4d_3^{14}d_4^6 - 36r_2^4d_3^{12}r_3^2 - 60r_2^4d_3^{18}d_4^2 - 180r_2^2d_3^{16}r_3^4 \\
& -90r_2^2d_3^{12}r_3^8 - 180r_2^2d_3^{16}d_4^4 - 90r_2^2d_3^{12}d_4^8 + 36r_2^2d_3^{12}r_3^4 - 6r_2^2d_4^{10}d_3^2 + 18r_2^2d_4^{10}d_3^4 \\
& -306r_3^2r_2^6d_4^4d_3^6 - 102d_3^6r_2^2r_2^2d_4^4 - 138d_3^8r_3^2r_2^2d_4^4 + 24d_3^8r_3^2r_2^2d_4^2 + 978r_3^2r_2^2d_4^4d_3^{10} \\
& -702r_3^2r_2^2d_4^6d_3^8 + 18r_3^2r_2^2d_4^6d_3^6 + 990r_3^4r_2^6d_4^4d_3^4 + 306d_3^6r_3^4r_2^6d_4^2 - 198d_3^6d_4^2r_3^6r_2^4 \\
& +108d_3^{10}d_4^2r_3^2r_2^4 - 168r_3^4r_2^2d_4^4d_3^8 + 102d_3^4d_4^6r_3^2r_2^2 + 144d_3^8r_3^2r_2^6d_4^2 - 306d_3^6d_4^4r_3^2r_2^4 \\
& +495d_3^4d_4^4r_3^4r_2^4 + 102d_3^4d_4^2r_2^6r_3^6 + 198d_3^6r_3^4r_2^2d_4^4 + 240d_3^8r_3^4d_4^2r_2^2 - 504d_4^4r_2^4d_3^8r_3^2 \\
& +96d_4^2r_2^4d_3^8r_3^2 - 648d_4^4r_2^4r_3^4d_3^6 + 102d_4^2r_2^4r_3^4d_3^6 + 204d_4^6r_2^4r_3^2d_3^4 - 432d_4^2r_2^2d_3^{12}r_3^2 \\
& +126d_3^{10}r_3^2r_2^2d_4^2 + 18r_3^2r_2^2d_4^8d_3^6 + 54r_3^2r_2^2d_4^8d_3^4 + 828d_3^6d_4^6r_3^4r_2^2 - 396d_3^4d_4^6r_3^4r_2^2 \\
& -528d_3^8r_3^2r_2^2d_4^2 + 198d_3^6d_4^4r_3^6r_2^2 + 828d_3^6d_4^6r_2^4r_3^2 - 138d_3^8d_4^2r_3^4r_2^4 - 102r_3^6r_2^6d_4^4d_3^2 \\
& -702d_3^4d_4^4r_3^6r_2^4 - 126r_2^8d_3^{10}d_4^2r_3^2 + 12r_2^8d_3^6d_4^4r_3^6 - 396r_2^8d_3^4d_4^4r_3^6 + 60r_2^8r_3^6d_3^8d_4^2 \\
& +54r_2^8d_3^4d_4^2r_3^8 - 90r_2^2r_3^2d_3^{18}d_4^2 + 6r_2^2r_3^2d_3^{10}d_4^{10} - 432r_2^2r_3^2d_3^{12}d_4^6 + 72r_2^2r_3^2d_3^{16}d_4^2 \\
& +300r_2^2r_3^2d_3^{14}d_4^4 + 24r_2^2r_3^2d_3^8d_4^{10} + 300r_2^2r_3^2d_3^{14}d_4^2 - 102r_2^2r_3^2d_3^6d_4^{10} \\
& +978r_2^2r_3^2d_3^{10}d_4^6 + 102r_2^2r_3^2d_4^{10}d_3^4 - 138r_2^2r_3^2d_3^8d_4^8 - 24r_2^2r_3^2d_4^{10}d_3^2 \\
& -1086r_2^2r_3^2d_3^{12}d_4^4 - 36r_2^2r_3^2d_3^{12}d_4^8 + 48r_2^2r_3^2d_3^{16}d_4^4 + 126r_2^2r_3^2d_3^{10}d_4^8 + 30r_2^2r_3^4d_3^{10}d_4^8 \\
& -36r_2^2r_3^4d_3^{12}d_4^6 - 60r_2^2r_3^4d_3^{16}d_4^2 - 282r_2^2r_3^4d_3^{10}d_4^4 - 306r_2^2r_3^4d_3^6d_4^8 + 1020r_2^2r_3^4d_3^{12}d_4^2 \\
& -24r_2^2r_3^4d_3^{14}d_4^4 - 504r_2^2r_3^4d_3^8d_4^6 - 300r_2^2r_3^4d_3^{14}d_4^2 + 96r_2^2d_3^8d_4^8r_3^4 + 204r_2^2d_3^4d_4^8r_3^4 \\
& +36r_2^2r_3^2d_3^{14}d_4^6 + 276r_2^2r_3^4d_3^{12}d_4^4 + 60r_2^2r_3^6d_3^{14}d_4^2 - 306r_2^2r_3^6d_3^6d_4^6 - 138r_2^2r_3^6d_3^8d_4^4 \\
& +900r_2^2r_3^6d_3^{10}d_4^2 + 48r_2^2r_3^6d_3^{12}d_4^4 - 108r_2^2r_3^6d_3^{10}d_4^4 - 432r_2^2r_3^6d_3^{12}d_4^2 + 144r_2^2r_3^6d_3^8d_4^6 \\
& +102r_2^2r_3^6d_3^4d_4^6 + 108r_2^2r_3^4d_3^{10}d_4^6 + 24r_2^2r_3^{10}d_3^8d_4^2 + 30r_2^2r_3^{10}d_3^{10}d_4^2 + 240r_2^2r_3^8d_3^8d_4^2 \\
& +96r_2^2r_3^8d_3^8d_4^4 - 126r_2^2r_3^8d_3^{10}d_4^2 + 60r_2^2r_3^8d_3^{10}d_4^4 + 90r_2^2r_3^8d_3^{12}d_4^2 - 102r_2^2r_3^8d_3^6d_4^4 \\
& +60r_2^2r_3^6d_3^{10}d_4^6 + 276r_2^4d_3^{12}d_4^2r_3^2 + 282r_2^4d_3^{10}d_4^2r_3^4 - 168r_2^4r_3^6d_3^8d_4^2 - 648r_2^4d_3^6d_4^6r_3^4 \\
& +648r_2^4d_3^6d_4^4r_3^6 - 198r_2^4d_3^6d_4^2r_3^8 + 198r_2^4d_3^6d_4^8r_3^2 - 168r_2^4d_3^8d_4^6r_3^2 + 120r_2^4r_3^6d_3^{12}d_4^2 \\
& +60r_2^4r_3^6d_3^8d_4^6 + 990r_2^4r_3^6d_3^4d_4^6 + 102r_2^4r_3^6d_3^2d_4^6 + 102r_2^4r_3^{10}d_3^6d_4^2 - 396r_2^4d_3^4d_4^8r_3^2 \\
& +36r_2^4r_3^2d_3^{12}d_4^6 - 180r_2^4r_3^2d_3^{16}d_4^2 + 72r_2^4r_3^2d_3^{14}d_4^4 - 300r_2^4r_3^2d_3^{14}d_4^2 - 900r_2^4r_3^2d_3^{10}d_4^6 \\
& +240r_2^4r_3^2d_3^8d_4^8 + 1020r_2^4r_3^2d_3^{12}d_4^4 - 18r_2^4r_3^2d_3^{10}d_4^8 + 282r_2^4r_3^4d_3^{10}d_4^4 + 102r_2^4r_3^4d_3^6d_4^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1086r_2^4r_3^4d_3^{12}d_4^2 - 138r_2^4r_3^4d_3^8d_4^6 + d_4^{12} + d_3^{24} - 120r_2^4d_3^{12}r_3^6 - 12r_2^4d_3^8r_3^{10} \\
& + 90r_2^4d_3^{10}r_3^{10} - 60r_2^4d_3^{10}r_3^8 + 90r_2^4d_3^{18}r_3^2 + 36r_2^{10}d_3^{12}r_3^2 + 30r_2^{10}d_3^{10}r_3^2 + 120r_2^{10}d_3^8r_3^6 \\
& + 90r_2^{10}d_3^{10}r_3^4 + 90r_2^{10}d_3^6r_3^8 + 48d_3^{12}d_4^2r_2^4 - 6r_2^{10}r_3^{10}d_4^2 + 6r_2^{10}r_3^{10}d_3^2 - 6d_3^8d_4^8r_2^4 \\
& + 15d_3^4d_4^8r_3^4 + 15d_3^{12}d_4^8r_3^4 + 90r_2^2d_3^{14}r_3^8 - 18r_2^2d_3^{10}r_3^4 + 30r_2^{10}d_3^4r_3^8 + 60r_2^{10}d_3^8r_3^4 \\
& - 6r_2^{10}d_3^{10}d_4^2 + 12r_2^6d_3^6r_3^{10} + 6r_2^{12}d_3^{10}r_3^2 + 6r_2^{12}r_3^{10}d_3^2 + 20r_2^{12}d_3^6r_3^6 - 60r_2^6d_3^{16}d_4^2 \\
& - 20r_2^6d_3^{12}d_4^6 + 48r_2^6d_3^{12}r_3^2 + 60r_2^6d_3^{14}r_3^2 + 20r_2^6r_3^6d_3^6 - 36r_2^6d_3^{14}d_4^2 - 20r_2^6r_3^6d_4^6 \\
& + 72r_2^6d_3^{10}r_3^4 + 12r_2^6d_3^6r_3^8 + 48r_2^6d_3^8r_3^6 + 60r_2^6d_3^{10}r_3^2 - 12r_2^6d_3^8d_4^6 + 60r_2^6d_3^{14}d_4^4 \\
& - 36r_2^6d_3^{12}d_4^2 + 36r_2^6d_3^{10}d_4^4 + 20r_2^6d_3^6r_3^{12} + 120r_2^6d_3^{16}r_3^2 + 400r_2^6d_3^{12}r_3^6 + 120r_2^6d_3^8r_3^{10} \\
& + 300r_2^6d_3^{10}r_3^8 + 300r_2^6d_3^{14}r_3^4 + 120r_2^6d_3^{12}r_3^4 + 60r_2^6d_3^8r_3^8 + 15d_3^4r_3^{12}r_2^8 + 225d_3^8r_3^8r_2^8 \\
& + 225d_3^{12}r_3^4r_2^8 + 15d_3^8r_3^{12}r_2^4 + 225d_3^{12}r_3^8r_2^4 + 90d_3^{16}d_4^4r_2^4 - 6d_3^{16}d_4^4r_3^4 + 15d_3^{12}d_4^4r_3^8 \\
& + 15d_3^{12}d_4^8r_2^4 + 15d_3^{12}d_4^4r_2^8 + 15r_3^8r_2^8d_4^4 + 15d_3^4r_3^8r_2^4 + 90d_3^8r_3^4r_2^8 - 6d_3^8r_3^8r_2^4 \\
& - 36d_3^{12}r_3^4r_2^4 + 60r_2^6d_3^8r_3^4 + 36r_2^6d_3^{12}d_4^4 - 20r_2^6d_3^6d_4^6 - 12r_2^6d_3^{10}d_4^6 + 120r_2^6d_3^{10}r_3^6 \\
& + 15d_3^4r_3^8r_2^{12} + 15d_3^8r_3^4r_2^{12} + 225d_3^{16}r_3^4r_2^4 + 180d_3^{14}d_4^2r_3^2 + 48d_3^{12}d_4^2r_3^4 - 12d_3^{10}d_4^2r_3^6 \\
& - 36d_3^{12}r_3^2r_2^2 - 72d_3^{10}d_4^4r_2^4 + 180d_3^8d_4^6r_2^2 - 90d_3^{12}d_4^2r_3^2 - 12d_3^{10}d_4^2r_3^4 + 120d_3^{12}d_4^4r_2^2 \\
& + 24d_3^{10}d_4^4r_3^4 - 120d_3^{12}d_4^4r_3^2 + 48d_3^8d_4^6r_2^4 + 18r_2^8d_3^{10}d_4^4 - 528r_2^6d_3^8d_4^6r_3^2 \\
& - 432r_2^6d_3^{12}d_4^2r_3^2 - 978r_2^6d_3^{10}d_4^2r_3^4 - 702r_2^6d_3^4d_4^6r_3^4 - 1548r_2^6d_3^4d_4^4r_3^6 \\
& - 702r_2^6r_3^6d_3^8d_4^2 - 198r_2^6d_3^6d_4^6r_3^4 - 828r_2^6d_3^6d_4^4r_3^6 - 396r_2^6d_3^4d_4^2r_3^8 - 108r_2^6d_3^{10}d_4^2r_3^2 \\
& + 102r_2^6d_3^4d_4^6r_3^2 + 648r_2^6d_3^6d_4^4r_3^4 - 828r_2^6d_3^6d_4^2r_3^6 - 504r_2^6r_3^4d_3^8d_4^2 + 198r_2^6d_3^6d_4^6r_3^2 \\
& - 138r_2^6d_3^8d_4^4r_3^2 + 102r_2^6r_3^4d_3^2d_4^6 + 204r_2^6d_3^4d_4^4r_3^8 - 168r_2^6d_3^8d_4^4r_3^4 + 15d_3^8d_4^8r_3^4r_2^4 \\
& - 180r_2^6r_3^2d_3^{14}d_4^2 + 12r_2^6r_3^2d_3^{10}d_4^6 + 48r_2^6r_3^2d_3^{12}d_4^4 - 24r_2^6r_3^4d_3^{10}d_4^4 - 120r_2^6r_3^4d_3^{12}d_4^2 \\
& - 12r_2^6r_3^4d_3^8d_4^6 + 900r_2^6d_3^{10}d_4^4r_3^2 + 180r_2^6r_3^8d_3^8d_4^2 + 60r_2^6r_3^8d_3^6d_4^4 + 20r_2^6r_3^6d_3^6d_4^6 \\
& + 48r_2^6r_3^6d_3^8d_4^4 + 120r_2^6r_3^6d_3^{10}d_4^2 + 102r_2^6r_3^6d_3^4d_4^6 - 102r_2^6r_3^6d_3^2d_4^6 + 60r_2^6r_3^{10}d_3^6d_4^2 \\
& + 102r_2^6d_3^4d_4^2r_3^{10} - 102r_2^6d_3^2d_4^4r_3^8 + 495r_3^4r_2^4d_4^8d_3^4 - 36d_3^{12}r_3^4r_2^4d_4^4 + 90d_3^8r_3^8r_2^4d_4^4 \\
& + 2331r_3^4d_3^8d_4^4r_2^4 + 495d_3^4d_4^4r_3^8r_2^4 + 495d_3^4d_4^4r_2^8r_3^4 - 6d_3^8r_3^4r_2^8d_4^4 + 24r_2^8d_3^2d_4^2r_3^{10} \\
& + 15r_3^8r_2^8d_4^4d_3^4
\end{aligned}$$