

**LEONARDO DE QUEIROZ MOREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE JATOS EM  
DESENVOLVIMENTO ESPACIAL USANDO A  
METODOLOGIA PSEUDOSPECTRAL DE  
FOURIER**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
2011

**LEONARDO DE QUEIROZ MOREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE JATOS EM  
DESENVOLVIMENTO ESPACIAL USANDO A  
METODOLOGIA PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER**

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia - MG

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

---

M838m Moreira, Leonardo de Queiroz, 1980-  
Modelagem matemática de jatos em desenvolvimento espacial usando  
a metodologia pseudoespectral de Fourier / Leonardo de Queiroz Moreira.  
- 2011.  
202 f. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.

1. Mecânica dos fluidos - Teses. 2. Turbulência - Teses. I. Silveira Neto,  
Aristeu, 1955- II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 532

---

LEONARDO DE QUEIROZ MOREIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA DE JATOS EM DESENVOLVIMENTO  
ESPACIAL USANDO A METODOLOGIA PSEUDOSPECTRAL DE  
FOURIER

Tese **APROVADA** pelo Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica da  
Universidade Federal de Uberlândia.  
Área de concentração: Transferência de Calor  
e Mecânica dos Fluidos.

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto - Orientador (UFU)

---

Prof. Dr. Carlos Bettencourt da Silva (IST)

---

Prof. Dr. Domingos Alves Rade (UFU)

---

Prof. Dr. Elie Luis Martínez Padilla (UFU)

---

Prof. Dr. Márcio Teixeira de Mendonça (ITA)

Uberlândia, agosto de 2011

*Aos meus pais e irmãos e avós.*



## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente gostaria de agradecer a meus pais, Geraldo e Marina, por estarem sempre ao meu lado, dando suporte para que eu pudesse sempre me concentrar na vida acadêmica. Obrigado também pelo exemplo de amor, dedicação, respeito e carinho.

Aos meus irmãos Tales, Murilo e Hugo pelo apoio mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador e amigo Aristeu pelos ensinamentos, paciência e incentivos transmitidos durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos do MFLab, da FEMEC e da UFU, além de todos que, de uma maneira ou de outra, foram indispensáveis para a realização deste trabalho. Em especial, aos meus amigos Carlos Frederico Bettencourt da Silva e Felipe Pamplona Mariano, pelas primeiras e inestimáveis idéias e ajudas desde o início dos estudos sobre os métodos espectrais.

A PETROBRAS, CAPES e FAPEMIG pelo suporte financeiro dedicados ao MFLab onde foi desenvolvido todo esse trabalho.

Ao CNPQ - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico por financiar meus estudos junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (POSMEC-UFU) onde tive todo suporte necessário para realização dos meus trabalhos.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, juntamente com a Coordenação do seu Programa de Pós-Graduação, onde tive todo suporte e infra-estrutura necessários para realização dos meus trabalhos.

MOREIRA, L. Q., **Modelagem Matemática de Jatos em Desenvolvimento Espacial Usando a Metodologia Pseudoespectral de Fourier**. 2011. 191 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## RESUMO

A busca por métodos de alta acurácia e alta taxa de convergência com a finalidade de resolver as equações de Navier-Stokes é de grande interesse para estudiosos de *CFD*. Essa busca é motivada, pois existem fenômenos físicos, como a turbulência nos fluidos, para os quais apenas metodologias que possuem uma alta acurácia permitem obter uma solução satisfatória da física que caracteriza o problema. A principal dificuldade encontrada em obter alta acurácia na solução das equações de Navier-Stokes é o custo computacional. Neste sentido, no MFLab, uma nova metodologia começou a ser desenvolvida com os trabalhos de Mariano (2007), Moreira (2007), Mariano (2011). Ela é baseada no acoplamento da metodologia pseudo-espectral de Fourier (*MPEF*) juntamente com a metodologia da fronteira imersa (*MFI*). As principais particularidades do *MPEF* é a alta acurácia numérica, aliada com o baixo custo computacional em termos relativos, pois não é necessário resolver um sistema linear do acoplamento pressão-velocidade. Entretanto, ela é limitada a problemas com condições de contorno periódicas. Com o intuito de expandir a aplicabilidade da *MPEF* a outros problemas da Dinâmica dos Fluidos Computacional (*CFD*), ela foi acoplada à metodologia de Fronteira Imersa (*MFI*). A *MFI* é uma metodologia desenvolvida para simular escoamentos sobre geometrias complexas e móveis usando malha cartesiana. Normalmente, apresenta baixa acurácia nos resultados próximos à região da interface imersa. O presente trabalho propõe dar continuidade aos desenvolvimentos da hibridação dessas duas metodologias, que foca na solução das equações de Navier-Stokes na formulação incompressível e isotérmica. O presente trabalho é uma evolução do trabalho de Mariano (2011), o qual foi estendido à terceira dimensão e implementada a modelagem submalha para simulações de grandes escalas. Para a verificação, utilizou-se a técnica das soluções manufaturas, obtendo-se taxa de convergência espectral. Para validação da metodologia simulou-se turbulência homogênea e



isotrópica, onde foram obtidos resultados consistentes do ponto de vista físico. Por fim, esta metodologia foi usada para a simulação de jatos em desenvolvimento espacial. Os resultados obtidos nessa simulação foram comparados com dados experimentais e apresentam uma boa concordância qualitativa e quantitativamente. A metodologia proposta e implementada permite ter taxa de convergência espectral, alta acurácia, eficiência computacional e possibilita a solução integralmente espectral de Fourier de problemas não periódicos.

*Palavras-chave: jatos circulares, turbulência, simulação das grandes escalas, método pseudo-espectral.*

MOREIRA, L. Q., **Mathematical Modeling of Spatially Developing Jets using Fourier Pseudo Spectral Method**. 2011. 191 f. Doctor Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## ABSTRACT

The search for numerical methods aiming at the solution of solve the Navier-Stokes equations accurately and with a high convergence rate represents a major area of interest for *CFD* researchers. Such a quest is motivated by physical phenomena, like turbulence in fluids, in which only accurate methodologies with high convergence rate may allow to satisfactorily obtain a physical solution that characterizes the problem. One of the main difficulties in obtaining high accuracy in the numerical solution of the Navier-Stokes equations is the high computational cost. In order to circumvent such a drawback, in the MFLab, a new methodology has began to be developed with the works of Mariano (2007), Moreira (2007), Mariano (2011). Such a methodology is based on the coupling of the Fourier pseudo-spectral (*FPSM*) and immersed boundary methodologies (IBM). A main characteristic of the *FPSM* is the high numerical accuracy associated to a relative low computational cost, since solving the linear system of the pressure-velocity coupling is not necessary. However, the *FPSM* methodology has its applicability restricted only to problems with periodic boundary conditions. In order to expanding the range of problems to which the *FPSM* can be applied more complex problems of the Computational Fluid Dynamics (*CFD*), the *FPSM* methodology is coupled with the IBM. The IBM is a methodology developed to simulate flows over complex, moving geometries, based on a cartesian-type grid. Normally, the IBM presents a low accuracy in regions near the immersed interface. The present work proposes to continue the developments of the hybrid *FPSM-IBM* methodology, focusing in the solution of the Navier-Stokes equations in its isothermal and incompressible form. The present work, as an evolution of the developments of (MARIANO, 2011), solves the Navier-Stokes equations in its three-dimensional form. The numerical code developed is capable of Large Eddy Simulations also. The method of manufactured solutions was used in the verification of the numerical code

developed, and a spectral convergence rate is achieved. In the process of validation of the *FPSM* methodology, a isotropic turbulence flow was simulated and the results obtained are consistent from a physical point of view. Finally, the *FPSM-IBM* methodology was used in the simulation of turbulent jet in spatial development. The results obtained are compared with experimental data, and present a good agreement, both qualitative and quantitatively. It was observed that the *FPSM-IBM* implemented allows obtaining high accuracy, spectral convergence rates, computational efficiency, and allows the integrally Fourier-spectral solution of non-periodic problems.

*Keywords: Circular jets, turbulence, large eddy simulations, pseudo spectral method.*



## Lista de Figuras

1.1	Impacto do uso de <i>CFD</i> em testes de túnel de vento na indústria aeroespacial (JOHNSON; TINOCO; YU, 2005). . . . .	3
1.2	Evolução do poder computacional devido a melhoramentos em hardware e nas metodologias; adaptado de U.S. Department of Energy (2004). . . . .	4
1.3	Comparação do custo computacional entre a <i>DFT</i> e a FFT. . . . .	6
1.4	Ilustração conceitual dos métodos numéricos versus complexidade geométrica (KIRBY; KARNIADAKIS, 2001). . . . .	7
1.5	(a) Visualização de fumaça e velocimetria por imagem de partículas de pares de vórtices (Aerodynamics of Segmented Solid Motors - Centre National d'Études Spatiales - França). (b) Evolução espacial de estruturas turbilhonares obtidas por velocimetria por imagem de partículas (TODDE; SPAZZINI; SANDBERG, 2009). . . . .	9
2.1	Escoamentos cisalhantes livres: (a) camada de mistura espacial (BROWN; ROSHKO, 1974); (b) esteira de Von Kármán; (c) jato circular (SAMIMY et al., 2004). . . . .	15
2.2	(a) Esquema ilustrativo das diferentes estruturas turbilhonares encontradas na transição a turbulência do jato (SILVEIRA-NETO, 2001); (b) Estruturas turbilhonares de jato circular em transição evidenciadas pelo ensaio experimental de Thurow e Lynch (2009). . . . .	16
2.3	Perfis médios de velocidade da componente $z$ do jato (IPARI; STANSBY, 2011). . . . .	18
2.4	Esboço do desenvolvimento de um jato próximo ao bocal: região irrotacional, núcleo potencial ( $\cdots$ ) e camada cisalhante (—) (IPARI; STANSBY, 2011). . . . .	19

2.5	Definição da espessura da camada cisalhante, e meia largura em um jato turbulento. . . . .	20
2.6	Contorno instantâneo da vorticidade (STANLEY; SARKAR, 1999). . . . .	30
2.7	Domínio de cálculo e isovalores de vorticidade do jato (UZUN, 2003). . . . .	32
2.8	Contorno instantâneo de isosuperfície do critério Q (WANG et al., 2010). . .	34
2.9	(a)Estruturas turbilhonares sobre uma esfera (CAMPREGHER, 2005) e (b) escoamento sobre um modelo de automóvel (VEDOVOTO, 2007). . . . .	37
2.10	Jato simulado por Uzun (2003), contornos instantâneos de vorticidade para $Re_d = 36.000$ . . . . .	39
2.11	Campo médio de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com a) discretização de segunda ordem e b) discretização de quarta ordem e malha 95x95 (PINHO, 2006). . . . .	39
2.12	Comparação dos perfis da componente u de velocidade média, Reynolds igual a 10.000, obtidos com malha de 95x95 (PINHO, 2006). . . . .	40
2.13	Visualizações da vorticidade no jato natural: (a) Isosuperfície de vorticidade = $1, 3s^{-1}$ (SOUZA, 2005), (b) visualização experimental via PIV (MATSUDA; SAKAKIBARA, 2005). . . . .	43
2.14	Simulação do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante utilizando o método pseudoespectral de Fourier acoplado com o método da fronteira imersa - modelo físico virtual (MARIANO, 2007). . . . .	44
2.15	Simulação de escoamento sobre um cilindro de base quadrada (MARIANO; MOREIRA; SILVEIRA-NETO, 2010a). . . . .	44
3.1	Modelo de espectro de energia cinética turbulenta ( $E(k)$ ) em função do número de onda para um escoamento turbulento, em escala log-log. . . . .	53
3.2	Modelo de espectro de energia cinética turbulenta ( $E(k)$ ) em função do número de onda para um escoamento turbulento, em escala log-log. . . . .	56
3.3	Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa, onde $\vec{x}$ posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano ( $\Omega$ ) e $\vec{X}$ posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano ( $\Gamma$ ). . . . .	57

3.4	Trem de pouso imerso em um domínio euleriano (VEDOVOTO, 2007). . . .	58
3.5	Função distribuição do tipo gaussiana $W_g$ (Eq. 3.27) proposta por Peskin (1972). . . . .	59
3.6	Definição do plano $\pi$ . . . . .	68
3.7	Representação dos termos da Eq. 3.58 no espaço de Fourier e sua apresentação em relação ao plano $\pi$ . . . . .	71
3.8	Representação esquemática dos domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano.	78
3.9	Isovalor de vorticidade de um jato em desenvolvimento espacial. Zona de amortecimento atuando como um sumidouro de vorticidade na parte final do domínio (UZUN, 2003). . . . .	85
3.10	Função de estiramento de vórtices $\Psi(z)$ . . . . .	86
3.11	Topologias possíveis para a troca de mensagens: (a) programa serial, (b) particionamento unidimensional, (c) particionamento bidimensional e (d) particionamento tridimensional. . . . .	91
3.12	Domínio em serial e a decomposição em $n + 1$ processos. . . . .	91
3.13	Comunicação global entre $n + 1$ subdomínios. . . . .	93
3.14	Avaliação do <i>speedup</i> do presente trabalho. . . . .	96
3.15	Avaliação a eficiência para o presente trabalho. . . . .	97
4.1	(a) Isovalores do campo de pressão. (b) Isovalores da componente $u$ de velocidade. . . . .	103
4.2	Influência do número de pontos de colocação na evolução temporal da norma $L_2$ da componente $w$ de velocidade com (a) $8^3$ (b) $16^3$ e (c) $32^3$ nós de colocação.	104
4.3	Influência do passo de tempo na evolução temporal da norma $L_2$ da componente $w$ de velocidade. . . . .	105
4.4	(a) Evolução temporal da norma $L_2$ para a: (a) componente de velocidade na direção $z$ e (b) pressão. . . . .	106
4.5	Norma $L_2$ para as componentes de velocidade na direção: (a) $x$ e (b) $y$ . . . .	106
4.6	Isovalor da componente $u$ de velocidade em domínio paralelizado em quatro processos. . . . .	107

4.7	Sonda da componente $w$ de velocidade na versão com um processo e quatro processos. . . . .	108
4.8	Sonda da pressão na versão com um processo e quatro processos. . . . .	108
4.9	Norma $L_2$ da componente $w$ de velocidade na versão com um processo e quatro processos. . . . .	109
4.10	Norma $L_2$ da pressão $p$ de velocidade na versão com um processo e quatro processos. . . . .	109
4.11	Domínio de Cálculo euleriano colorido pela isovalores de $u$ sobreposto a malha lagrangiana: (a) plano e (b) cubo. . . . .	111
4.12	Sonda da Componente $w$ de velocidade simulando com e sem MFI. . . . .	112
4.13	Sonda da pressão $p$ simulando com e sem MFI. . . . .	112
4.14	Norma $L_2$ calculada sobre os pontos lagrangianos para as componentes do vetor velocidade. . . . .	113
4.15	a) Pontos de colocação de cada processo; b) Domínio de cálculo e as condições de não deslizamento; c) Campo de velocidade desenvolvido. . . . .	115
4.16	Sonda $v$ em diferentes posições em relação a coordenada $z$ . . . . .	115
4.17	Perfil de velocidade analítica versus solução numérica. . . . .	116
4.18	Norma $L_2$ sobre os pontos Lagrangianos. . . . .	117
4.19	Taxa de convergência para a norma $L_2$ euleriana. . . . .	118
4.20	Evolução temporal do espectro de energia cinética turbulenta sem modelagem da turbulência. . . . .	123
4.21	Influência do número de pontos de colocação usando a modelagem dinâmica de Smagorinsky; módulo de vorticidade usando: (a) $32^3$ ( $k_c = 16$ ), (b) $64^3$ ( $k_c = 32$ ) e (c) $128^3$ ( $k_c = 64$ ) pontos de colocação; (d) espectro de energia cinética turbulenta. . . . .	125
4.22	Evolução temporal do espectro de energia cinética turbulenta usando a modelagem dinâmica da turbulência. . . . .	126
4.23	Evolução temporal do módulo de vorticidade; simulação realizada utilizando $LES$ com modelagem dinâmica de Smagorinsky: (a) $t=2s$ , (b) $t=4s$ , (c) $t=6s$ , e (d) $t=10s$ . . . . .	127



4.24	Módulo de vorticidade simulado para turbulência homogênea e isotrópica: a) Lesieur, Métais e Comte (2005), b) presente trabalho. . . . .	128
4.25	Influência da constante de Smagorinsky. Módulo de vorticidade em regime estatisticamente estabelecido utilizando a modelagem de Smagorinsky com a constante igual a: (a) $C_s = 0,1$ , (b) $C_s = 0,18$ e (c) $C_s = 0,3$ . (d) Espectro de energia cinética turbulenta dos campos de velocidade apresentados nos itens (a), (b) e (c). . . . .	129
4.26	Comparação entre a modelagem de Smagorinsky usando $C_s = 0,12$ e a modelagem dinâmica de Smagorinsky. Módulo de vorticidade: (a) modelagem de Smagorinsky (b) modelagem dinâmica de Smagorinsky. Espectro de energia cinética turbulenta: (c) modelagem de Smagorinsky (d) modelagem dinâmica de Smagorinsky. . . . .	131
4.27	Esboço do domínio utilizado na simulação de jatos em desenvolvimento espacial.	133
4.28	Estruturas turbilhonares na entrada e saída do domínio. . . . .	134
4.29	Perfil da componente longitudinal de velocidade na entrada do domínio físico $\Gamma_{PhD}$ $w_1 = 1$ e $w_2 = 0$ . . . . .	136
4.30	Evolução espacial do perfil de velocidade média na linha de centro do jato. . . . .	141
4.31	Evolução espacial do jato, evidenciadas através isosuperfícies do critério Q ao nível $0,1 [s^{-2}]$ : (a) $2 \cdot a_u = 2 \cdot a_v = a_w = 1,0 \cdot 10^{-3}$ , (b) $2 \cdot a_u = 2 \cdot a_v = a_w = 1,5 \cdot 10^{-3}$ e (c) $2 \cdot a_u = 2 \cdot a_v = a_w = 3,0 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	143
4.32	Evolução espacial da meia largura do jato submetido a diferentes intensidades turbulentas. . . . .	145
4.33	Perfil de velocidade longitudinal média em função da componente radial do jato na posição, (a) $z/d = 5$ e (b) $z/d = 9$ . . . . .	146
4.34	Evolução temporal do resíduo do balanço de massa do jato. . . . .	147
4.35	Evolução temporal da Norma $L_2$ sobre a condição de contorno da componente $w$ de velocidade na entrada do domínio do jato. . . . .	148
4.36	Evolução temporal da isosuperfície do critério $Q = 0,1 [s^{-1}]$ : (a) $t=0,1 [s]$ , (b) $t=5 [s]$ , (c) $t=10 [s]$ , (d) $t=20 [s]$ , (e) $t=30 [s]$ e (f) $t=40 [s]$ . . . . .	150

4.37	Esquema do arranjo de anéis de vórtice conduzindo à ocorrência de emparelhamento alternado (SILVA; MÉTAIS, 2002b). . . . .	151
4.38	Evolução espacial do módulo de vorticidade no plano $y = 4$ [m]. (a) $t=0,1$ [s], (b) $t=5$ [s], (c) $t=10$ [s], (d) $t=20$ [s], (e) $t=30$ [s] e (f) $t=40$ [s] . . . . .	152
4.39	Isosuperfície da componente $z$ da vorticidade $w_z = 0,95$ . . . . .	153
4.40	Isosuperfície da componente $y$ da vorticidade. . . . .	154
4.41	Evolução espacial do jato simulado por Glaze e Frankel (2003). Estruturas vorticais visualizadas por isosuperfície negativas do critério $\lambda_2$ . . . . .	154
4.42	Filamentos de vórtices: (a) presente trabalho e (b) Matsuda e Sakakibara (2005). . . . .	155
4.43	Evolução espacial do perfil de velocidade média axial do jato. . . . .	157
4.44	Evolução espacial da meia largura do jato. . . . .	157
4.45	Perfil de velocidade média da componente longitudinal mostrada em função do raio do jato. . . . .	159
4.46	Isosuperfície do critério $Q = 0,1$ mostrado para as malhas de: (a) $64 \times 64 \times 256$ , (b) $96 \times 96 \times 384$ e (c) $128 \times 128 \times 512$ . . . . .	160
4.47	Evolução espacial do perfil de velocidade média longitudinal do jato em função da direção coordenada $z$ . . . . .	161

## Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46. . . . .	83
4.1	Parâmetros utilizados nas simulações de Turbulência Homogênea e Isotrópica. . . . .	121
4.2	Influência da amplitude da flutuação de velocidade sobre a origem virtual e taxa de espalhamento do jato. . . . .	145
4.3	Comparação entre os valores da origem virtual, do coeficiente $b_u$ de espalhamento e da taxa de espalhamento do jato do presente trabalho e das referências. . . . .	148



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Siglas

<i>AUX</i>	-	variável auxiliar do Runge-Kutta
<i>BZ</i>	-	zona de amortecimento (“buffer zone”)
<i>CFD</i>	-	“Computational Fluid Dynamics”
<i>DF</i>	-	“Direct Forcing”, Modelo da imposição direta da força
<i>DFT</i>	-	“Direct Fourier Transform”, transformada discreta de Fourier
<i>DNS</i>	-	“Direct Numerical Simulation”, simulação numérica direta
<i>EDP</i>	-	Equação Diferencial Parcial
<i>FEMEC</i>	-	Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia
<i>FFT</i>	-	“Fast Fourier Transform”, transformada rápida de Fourier
<i>FZ</i>	-	zona de forçagem
<i>IMERSPEC</i>	-	Metodologia da Fronteira Imersa acoplada com a metodologia pseudo-espectral de Fourier
<i>LES</i>	-	“Large Eddy Simulation”, simulação de grandes escalas
<i>MDF</i>	-	“Multi-Direct Forcing”, método da múltipla forçagem,
<i>MFI</i>	-	Metodologia da Fronteira Imersa
<i>MFLab</i>	-	Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia
<i>MFV</i>	-	Modelo Físico Virtual
<i>MPEF</i>	-	Metodologia Pseudo-Espectral de Fourier
<i>PIV</i>	-	“Particle Image Velocimetry”
<i>tnl</i>	-	termo não linear das equações de Navier-Stokes
<i>UFU</i>	-	Universidade Federal de Uberlândia
<i>visc</i>	-	termo viscoso (difusivo) das equações de Navier-Stokes

### Operadores

$\partial$	-	derivada parcial
$\int$	-	integral
<i>max</i>	-	máximo valor
<i>min</i>	-	mínimo valor
$\sum$	-	somatória
$\wp$	-	projeção

## Subscritos

$i$	- índice da notação tensorial
$j$	- índice da notação tensorial
$\infty$	- infinito
$PhD$	- “Periodical Domain”, domínio periódico
$PhD$	- “Physical Domain”, domínio físico

## Sobrescritos

$a$	- variável analítica
$it$	- iteração atual
$p$	- vetor projetado
$t$	- variável no tempo atual
$\hat{\phantom{a}}$	- variável no espaço espectral de Fourier
$*$	- variável temporária

## Letras gregas

$\alpha$	- constante da mola $[N/m]$ ou variável auxiliar do Runge-Kutta
$\beta$	- fator de amortecimento $[Ns/m]$ ou variável auxiliar do Runge-Kutta
$\Delta t$	- discretização do tempo $[s]$
$\Delta s$	- discretização do comprimento do domínio lagrangiano $[m]$
$\Delta x$	- discretização do comprimento do domínio na direção $x$ $[m]$
$\Delta y$	- discretização do comprimento do domínio na direção $y$ $[m]$
$\Delta z$	- discretização do comprimento do domínio na direção $z$ $[m]$
$\varepsilon$	- resíduo das iterações do método da múltipla força
$\theta$	- função filtro
$\Gamma$	- domínio lagrangiano
$\iota$	- Número imaginário, $\iota = \sqrt{-1}$
$\mu$	- viscosidade dinâmica do fluido $[Ns/m^2]$
$\nu$	- viscosidade cinemática do fluido $[m^2/s]$
$\pi$	- plano de divergência nula, ou número real constante $\pi = 3,14159265359$
$\rho$	- Massa específica do fluido $[kg/m^3]$
$\phi$	- função qualquer
$\Omega$	- domínio euleriano
$\tau$	- tangente unitária

## Letras latinas

$Cd$	- Coeficiente de arrasto
$Cl$	- Coeficiente de sustentação
$D$	- núcleo de Dirac
$\vec{f}$	- campo de força euleriano $[N/m^3]$
$\vec{F}$	- campo de força lagrangiano $[N/m^3]$
$\vec{F}_c$	- força global que o fluido faz sobre um corpo imerso $[N/m^3]$
$freq$	- frequência $[Hz]$
$h$	- espaçamento entre dois pontos de colocação eulerianos
$\vec{k}$	- vetor número de onda $[m^{-1}]$
$L$	- comprimento do domínio $[m]$ ou norma do erro
$NL$	- número de iterações
$Np$	- número de iterações
$N_x$	- número de pontos de colocação na direção $x$
$N_y$	- número de pontos de colocação na direção $y$
$N_z$	- número de pontos de colocação na direção $z$
$p$	- campo de pressão euleriano $[N/m^2]$
$P$	- campo de pressão lagrangiano $[N/m^2]$
$q$	- ordem de convergência numérica
$r$	- distância adimensionalizada entre um ponto lagrangiano até um ponto de colocação euleriano
$s$	- superfície lagrangiana
$\vec{r}$	- vetor distância entre o centro de massa de uma partícula até um ponto lagrangiano
$Re$	- número de Reynolds
$RHS$	- variáveis que estão do lado direito de uma equação diferencial parcial
$St$	- número de Strouhal
$t$	- tempo $[s]$
$T$	- campo de tensão de uma fibra elástica $[Nm]$
$\vec{u}$	- velocidade euleriana $[m/s]$
$\vec{U}$	- velocidade lagrangiana $[m/s]$
$\vec{x}$	- vetor posição de um ponto euleriano $[m]$
$\vec{X}$	- vetor posição de um ponto lagrangiano $[m]$
$W$	- função peso utilizada nos processos de distribuição e interpolação





## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xii
------------------	-----

LISTA DE TABELAS	xviii
------------------	-------

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Dinâmica dos Fluidos Computacional . . . . .	1
1.2	Métodos de alta ordem . . . . .	4
1.2.1	Método pseudoespectral de Fourier . . . . .	5
1.3	Jatos . . . . .	8
1.4	Justificativas do presente trabalho . . . . .	10
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E ASPECTOS TEÓRICOS</b>	<b>13</b>
2.1	Turbulência e escoamentos cisalhantes livres . . . . .	13
2.2	Jatos . . . . .	15
2.3	Método de Fronteira imersa . . . . .	35
2.4	Métodos de alta ordem . . . . .	38
2.4.1	Método pseudoespectral de Fourier . . . . .	40
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>47</b>
3.1	Equações de Navier-Stokes filtradas . . . . .	47
3.1.1	Modelagem da turbulência . . . . .	51
3.1.1.1	Modelo de Smagorinsky . . . . .	53
3.1.1.2	Modelo dinâmico de Smagorinsky . . . . .	55
3.2	Metodologia da fronteira imersa . . . . .	56
3.2.1	Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano . . . . .	56

3.2.2	Modelo para o acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano	58
3.2.3	Cálculo da força lagrangiana . . . . .	60
3.2.4	Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de imposição direta da força . . . . .	63
3.2.5	Múltipla imposição da força (Multi-Direct Forcing - MDF) . . . . .	64
3.3	Transformação das equações de Navier-Stokes para espaço espectral . . . . .	66
3.3.1	Recuperação do campo de pressão . . . . .	72
3.3.2	Metodologia pseudoespectral de Fourier . . . . .	74
3.3.3	DFT e <i>FFT</i> . . . . .	75
3.4	Acoplamento entre as metodologias pseudoespectral de Fourier e fronteira imersa - IMERSPEC . . . . .	77
3.5	O Código IMERPEC3DP . . . . .	82
3.5.1	Discretização espacial e temporal . . . . .	82
3.5.2	Tratamento das condições de contorno . . . . .	84
3.5.2.1	Zona de amortecimento . . . . .	85
3.5.3	Metodologia de paralelização . . . . .	86
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>99</b>
4.1	Verificação . . . . .	99
4.1.1	Método das soluções manufaturadas . . . . .	100
4.1.1.1	Código base - 1 processo . . . . .	102
4.1.1.2	Código base - n processos . . . . .	105
4.1.1.3	Fronteira imersa . . . . .	110
4.2	Validação . . . . .	111
4.2.1	Escoamento de Poiseuille . . . . .	113
4.2.2	Turbulência homogênea e isotrópica . . . . .	118
4.3	Jatos . . . . .	130
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>163</b>
5.1	Conclusões . . . . .	163
5.2	Trabalhos futuros . . . . .	166

## 6 REFERÊNCIAS



# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Dinâmica dos Fluidos Computacional

A turbulência em fluidos é um dos problemas mais desafiadores da atualidade e motiva estudos e pesquisas de físicos, matemáticos e engenheiros. Sua compreensão é de grande importância devido ao vasto número de escoamentos turbulentos que são encontrados na natureza e encontradas em aplicações industriais.

Atualmente existem duas maneiras para se estudar e compreender a turbulência nos fluidos: os métodos experimentais, os métodos teóricos e os métodos numéricos, os quais possibilitam simular e experimentar a dinâmica de escoamentos. Com ambas as abordagens, modela-se e experimenta-se uma dada realidade física. Todas as formas de estudos buscam representar um fenômeno físico o mais próximo possível da realidade.

As técnicas experimentais evoluíram muito nos últimos anos, com o desenvolvimento de instrumentos menos intrusivos ou de dimensões praticamente microscópicas e de alta acurácia. Destacam-se entre esses avanços: modernos anemômetros de fio quente, anemometria laser-doppler (*LDA*) (ABDEL-RAHMAN; CHAKROUN; AL-FAHED, 1997) e Velocimetria por imagem de partículas (*VIP*)<sup>1</sup> (HORI; SAKAKIBARA, 2004; MATSUDA; SAKAKIBARA, 2005). Essas técnicas são aplicadas em nível acadêmico, para estudar e quantificar escoamentos de base como camada limite, escoamentos cisalhantes livres, jatos e esteiras

---

<sup>1</sup>do inglês Particle Image Velocimetry (*PIV*)

ou mesmo em escoamentos complexos presentes na indústria como partes do projeto de aeronaves, veículos, máquinas térmicas, bombas, edificações etc.

Dentre os métodos teóricos, a dinâmica dos fluidos computacional ( $CFD^2$ ) (FERZIGER; PERIC, 2001) tem por objetivo simular escoamentos através de metodologias numéricas de tal forma que represente um fenômeno físico, resolvendo as equações de Navier-Stokes (POPE, 2000). O seu desenvolvimento começou em meados de 1960, tendo seus primeiros sucessos na década de 1970 e início em aplicações industriais na década de 1980. A divulgação e aceitação da metodologia vieram a partir de 1990, com o uso massivo de  $CFD$  em projetos aeronáuticos e veiculares. A partir daí, passou a ser uma ferramenta de desenvolvimento e melhoria de projetos.

A realização de um ensaio experimental exige a execução do projeto em si e, às vezes, requer uma condição difícil e/ou cara de se obter em laboratório. Neste ponto torna-se interessante a interação do projetista com soluções de  $CFD$ . Muitas vezes em etapas preliminares de projetos, onde dimensões básicas precisam ser determinadas e não se têm dados experimentais confiáveis, a metodologia  $CFD$  pode ser uma excelente opção de estudo tanto qualitativo como quantitativo, dependendo do grau de conhecimento do projetista ou de exigência do projeto. Condições de operação de extremas temperatura, pressão, velocidade ou geometrias complexas em geral são de difícil reprodução em laboratório e demandam tempo e dinheiro para serem realizadas. Aplicando-se modelos e métodos apropriados, resultados confiáveis podem ser obtidos via  $CFD$ .

A Fig. 1.1 ilustra a aplicação de  $CFD$  em projetos aeronáuticos da Boeing Corporation. É apresentada em uma ordem cronológica a evolução dos métodos numéricos desenvolvidos pela comunidade científica aplicáveis à indústria aeronáutica e ferramentas numéricas desenvolvidas pela Boeing a partir de métodos numéricos desenvolvidos pela comunidade científica. Mostra-se também a evolução dos modelos de aeronaves comercializados pela empresa. Por fim, é mostrado o número de ensaios em túnel de vento necessários à execução de um projeto de uma aeronave até a sua finalização. Nota-se que, com o desenvolvimento dos métodos numéricos, o uso de  $CFD$  contribuiu para uma drástica redução do número de teste em túnel de vento necessários, resultando em projetos menos onerosos e mais dinâmi-

---

<sup>2</sup> $CFD$  - do inglês Computational Fluid Dynamics

cos. Atualmente o uso de *CFD* é grande em estudos de otimização e na redução de ruídos gerados por aeronaves.

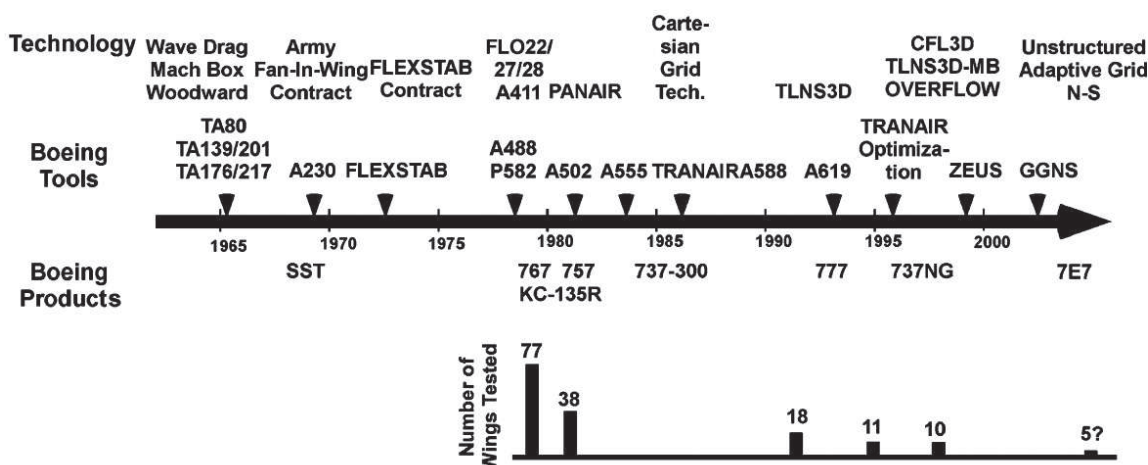


Figura 1.1: Impacto do uso de *CFD* em testes de túnel de vento na indústria aeroespacial (JOHNSON; TINOCO; YU, 2005).

Aliada a este contexto, a capacidade computacional evoluiu muito, possibilitando o estudo de fenômenos complexos que exigem grande poder computacional nas simulações (VOLLER; PORT, 2002). Entretanto, é preciso esclarecer que a pesquisa e o desenvolvimento de novos métodos numéricos, priorizando velocidade de processamento, baixo armazenamento de dados e consumo de memória, bem como resultados mais precisos, é de fundamental importância atualmente. A Fig. 1.2, mostra a evolução computacional ao longo das últimas décadas em Giga Flops<sup>3</sup>. Nota-se que apesar do grande avanço na capacidade de processamento dos computadores devido ao melhoramento do hardware, o ganho efetivo que se tem hoje é em grande parte devido à evolução dos métodos numéricos, que evoluíram em até duas ordens de grandeza a mais que o hardware.

Algumas aplicações podem ser citadas onde o uso de *CFD* para soluções de problemas práticos é muito promissor: nos fenômenos envolvendo aeroacústica (UZUN, 2003), combustão (PITSCH; LAGENESTE, 2008; VEDOVOTO, 2011) e transição à turbulência (LESIEUR; MéTAIS; COMTE, 2005; SILVA, 2001). No caso da aeroacústica é importante dispor de um método que consiga capturar as flutuações de ondas de pressão sonora que em

<sup>3</sup>O Flop é o número instruções de ponto flutuante que um computador consegue realizar em um segundo.

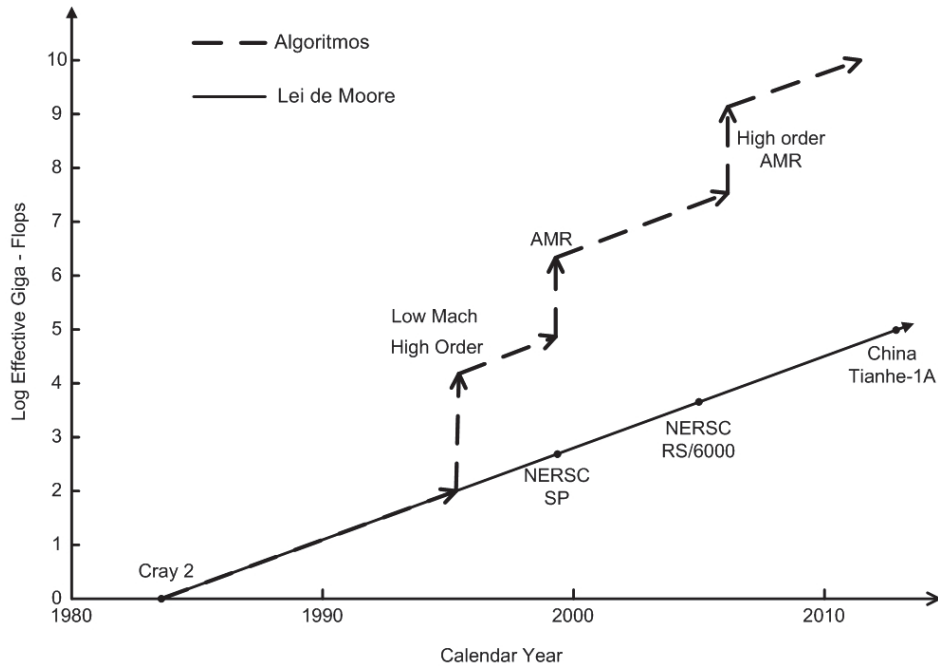


Figura 1.2: Evolução do poder computacional devido a melhoramentos em hardware e nas metodologias; adaptado de U.S. Department of Energy (2004).

grande parte são algumas ordens de grandeza inferior à pressão ambiente. Em fenômenos envolvendo transição à turbulência é preciso estudar as pequenas instabilidades, as quais, devido aos efeitos lineares e não lineares, amplificam-se causando a transição do escoamento para um regime turbulento. Na combustão existem processos que envolvem as pequenas escalas dos escoamentos turbulentos inerentes a esse problema, que necessitam ser analisadas. Nessa gama de problemas, *CFD* exige métodos de alta ordem de acurácia com baixa dispersão e baixa dissipação, para a obtenção de resultados representativos da física dos problemas.

## 1.2 Métodos de alta ordem

A busca por métodos mais acurados para resolver as equações de Navier-Stokes é de grande interesse para estudiosos de *CFD*, pois existem fenômenos físicos para os quais apenas metodologias de alta ordem permitem obter uma solução satisfatória da física que caracteriza o problema. A principal dificuldade encontrada em obter alta acurácia na solução das equações de Navier-Stokes é o custo computacional<sup>4</sup> envolvido (KARNIADAKIS, 1990),

<sup>4</sup>Custo computacional: é o custo relativo ao tempo de processamento (uso da CPU) e armazenamento de dados em disco rígido e uso da memória RAM do computador. Em uma simulação de um escoamento



uma vez que, as metodologias clássicas de alta ordem (diferenças finitas e volumes finitos de alta ordem e esquemas compactos) são onerosas, devido ao tamanho do estêncil e a necessidade de se resolver grandes e numerosos sistemas lineares.

### 1.2.1 Método pseudoespectral de Fourier

Os métodos espectrais destacam-se entre as metodologias de alta taxa de convergência e alta acurácia, especialmente, o Método pseudoespectral de Fourier (*MPEF*), devido a sua alta acurácia e taxa de convergência espectral. Este método proporciona mais de 10 dígitos de acurácia. Já os métodos clássicos, método das diferenças finitas ou método dos elementos finitos, alcançam dois ou três dígitos (TREFETHEN, 2001), podendo chegar ordens superiores aumentando o tamanho do estêncil.

A alta acurácia alcançada pelos métodos espectrais permite obter soluções satisfatórias para problemas de engenharia usando menos pontos na malha em comparação com as metodologias clássicas. Esta alta acurácia é conseguida sempre que o domínio for suficientemente simples (domínios retangulares ou circulares) e o problema for suave, sem a presença de mudanças bruscas, como, por exemplo ondas de choque. Em resumo, para resolver com alta acurácia uma equação diferencial parcial sobre um domínio simples e regular, os Métodos Espectrais são usualmente as melhores ferramentas numéricas (CANUTO et al., 2007, 2006; HUSSEIN; KOPRIVA; PATERA, 1987; GOTTLIEB; ORSZAG, 1977).

Outra motivação para se utilizar o *MPEF* vem do trabalho de Cooley e Tukey (1965), os quais desenvolveram o algoritmo denominado Transformada Rápida de Fourier (FFT<sup>5</sup>). A FFT trabalha com o procedimento denominado rotação de bit, tornando o cálculo da *DFT* muito mais eficiente computacionalmente, pois o número de operações reduz de  $O(N^2)$  para  $O(N \log 2N)$ . Esse custo computacional torna atrativa a utilização do método pseudoespectral de Fourier para resolver equações diferenciais parciais, como pode ser visualizado na Fig. 1.3. A maior limitação do *MPEF* está na necessidade de se usar condições de contorno periódicas, limitando a sua utilização em *CFD* para alguns tipos de escoamentos muito específicos, por exemplo, jatos periódicos, (SILVA, 2001; SOUZA, 2005; MOREIRA, 2007) e

---

turbulento o custo computacional aumenta com  $Re^3$  (POPE, 2000).

<sup>5</sup>FFT - do inglês Fast Fourier Transform

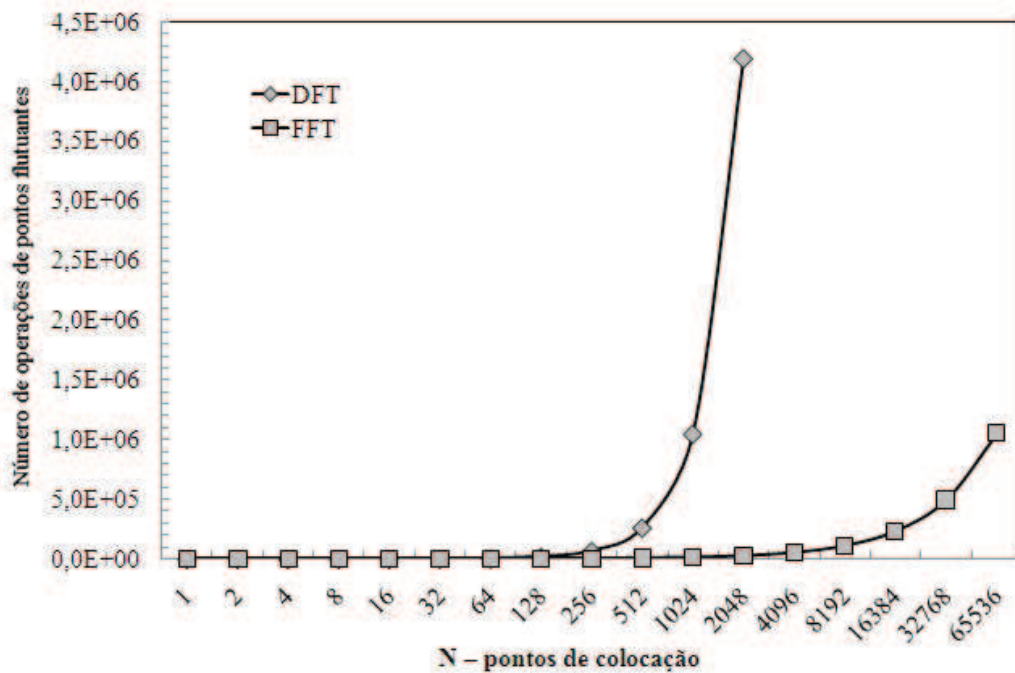


Figura 1.3: Comparação do custo computacional entre a *DFT* e a *FFT*.

turbulência homogênea isotrópica (ESWARAN; POPE, 1988; LANGFORD; MOSER, 1999; YOSHIDA; ISHIHARA; KANEDA, 2003; AOYAMA et al., 2005).

Na Fig. 1.4, Kirby e Karniadakis (2001) apresentam um esboço de como os métodos espectrais estão enquadrados no contexto de *CFD*. Eles mostram escoamentos em uma faixa de número de Reynolds versus a complexidade do domínio utilizado nos cálculos para Simulação Numérica Direta (*DNS*<sup>6</sup>). Observa-se que para se fazer *DNS* em problemas que envolvam domínios simples, alcança-se números de Reynolds muito mais altos utilizando os métodos espectrais. Porém, de acordo com a complexidade do domínio, os métodos espectrais deixam de ser uma alternativa viável, e, conseqüentemente, o número de Reynolds diminui significativamente, o que no atual estado da arte, limita-se aos esquemas de baixa ordem.

Os estudos sobre o método pseudoespectral de Fourier foram iniciados no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), com o trabalho de Souza (2005). Atualmente existem duas frentes de pesquisa em desenvolvimento. Uma delas é o acoplamento do método da fronteira imersa com o método pseudoespectral de Fourier (MARIANO et al., 2010; MARIANO; MOREIRA; SILVEIRA-NETO, 2010a).

<sup>6</sup>*DNS* - do inglês Direct Numerical Simulation

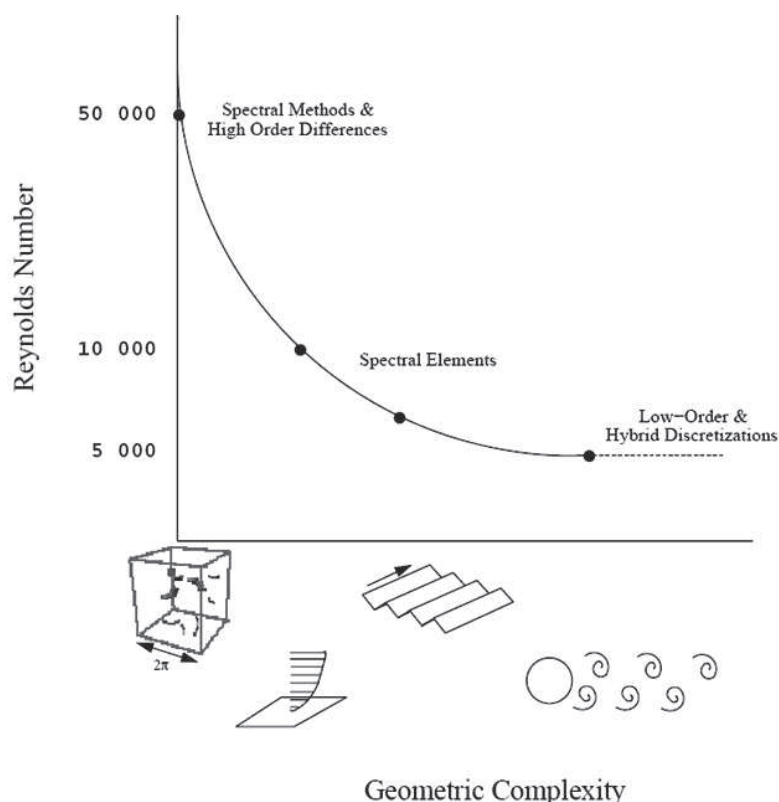


Figura 1.4: Ilustração conceitual dos métodos numéricos versus complexidade geométrica (KIRBY; KARNIADAKIS, 2001).

Para isso foi desenvolvido um código bidimensional, o qual está sendo utilizado para testes desta nova metodologia, denominada IMERSPEC. Dando sequência ao trabalho de Mariano (2007), Villela (2011) estendeu a metodologia IMERSPEC a escoamentos com propriedades físicas variáveis, a qual foi aplicada em simulação de escoamentos bifásicos. A outra linha de estudos está voltada para a análise de escoamentos turbulentos, e utiliza a metodologia de Simulação das Grandes Escalas (LES<sup>7</sup>) para simulação de jatos espaciais e/ou temporais em transição e turbulentos (MOREIRA, 2007). Neste caso utiliza-se um código computacional tridimensional. Ambos os códigos já foram verificados e validados utilizando problemas clássicos de *CFD*. A fusão das metodologias pseudoespectral e de fronteira imersa permitirá a simulação de problemas tridimensionais não periódicos.

<sup>7</sup>LES - do inglês Large Eddy Simulation

### 1.3 Jatos

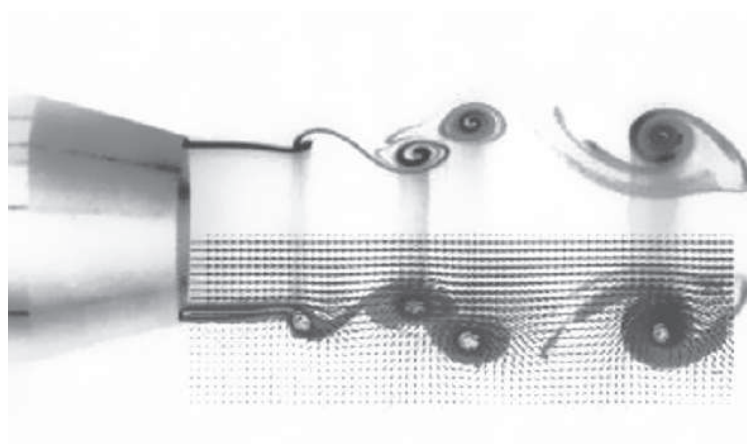
Os jatos são escoamentos cisalhantes livres, que, via de regra, se formam quando uma quantidade de movimento é injetada, pela passagem de um fluido por um bocal ou orifício, descarregando em um ambiente circundante sem a presença de paredes ou qualquer outra estrutura capaz de exercer força externa sobre o escoamento.

A transição deste tipo de escoamento é caracterizada pela formação de estruturas primárias conhecidas como vórtices de Kelvin-Helmholtz, as quais apresentam um importante grau de organização local e promovem anisotropia e não homogeneidade dos escoamentos. Essas estruturas induzem a formação de instabilidades secundárias, que interagem entre si, formando instabilidades transversais que se amplificam e promovem a turbulência tridimensional como mostrado nas Fig. 1.5(a) e (b).

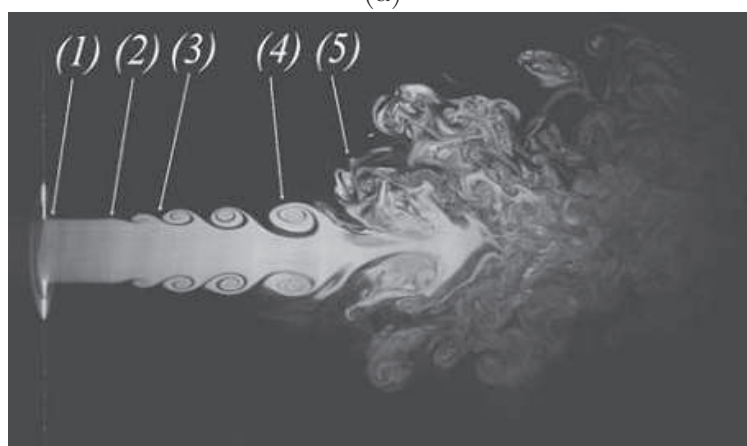
A turbulência em jatos tem sido bastante estudada numérica e experimentalmente por pesquisadores, almejando adquirir maiores conhecimentos sobre os fenômenos físicos envolvidos. A melhor compreensão da formação e evolução das estruturas do escoamento permite um controle mais efetivo sobre jatos para os diferentes interesses industriais, bem como contribui para o refinamento de teorias e modelos existentes para descrição de escoamentos turbulentos (SOUZA, 2005).

Os jatos estão entre os escoamentos cisalhantes livres mais estudados, devido à frequência com que são encontrados na natureza ou em possíveis aplicações industriais. As aplicações industriais envolvem processos de mistura de componentes, transferência de calor, lubrificação e degelo, injeção de combustível em câmaras de combustão, sistemas de propulsão de aeronaves. A melhoria destes processos pode ser obtida através do controle de jatos. Este controle pode ser atingido através da manipulação das estruturas coerentes, as quais são responsáveis por influenciar fortemente a dinâmica do jato, especialmente na região de transição próxima ao bocal (HILGERS, 1999, 2000).

Na busca por um melhor entendimento da dinâmica dessas estruturas coerentes e da turbulência de jatos, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos nos últimos anos. Os experimentalistas buscam identificar a formação das estruturas coerentes e sua caracterização através de médias e momentos de alta ordem. A busca por resultados mais precisos e



(a)



(b)

Figura 1.5: (a) Visualização de fumaça e velocimetria por imagem de partículas de pares de vórtices (Aerodynamics of Segmented Solid Motors - Centre National d'Études Spatiales - França). (b) Evolução espacial de estruturas turbilhonares obtidas por velocimetria por imagem de partículas (TODDE; SPAZZINI; SANDBERG, 2009).

confiáveis, é muitas vezes possibilitada pelo avanço nos instrumentos de medição. Hoje os principais trabalhos utilizam *PIV* em três dimensões e *LDA* e destacam-se os trabalhos de O'Neill, Soria e Honnery (2004), Todde, Spazzini e Sandberg (2009) e Thurow e Lynch (2008, 2009) entre outros.

Os numericistas buscam um melhor entendimento e a modelagem da turbulência visando estudar a dinâmica das estruturas coerentes bem como uma boa representação de médias e momentos de ordem superior. Para isso, esforços têm sido dedicados na busca por desenvolver códigos com alta taxa de convergência e alta acurácia. Essas duas características são necessárias para viabilizar simulações de jatos com boa representatividade da física desse problema. Neste contexto quase sempre os trabalhos buscam utilizar *LES* (URBIN; BRUN; MéTAIS, 1997; SILVA, 2001; SILVA; MéTAIS, 2002a; UZUN; HUSSAINI, 2010) e *DNS* (SILVA; BALARAC; MéTAIS, 2003; WANG et al., 2010) que são conhecidos como simulações de alta fidelidade ou mesmo experimentos numéricos.

#### 1.4 Justificativas do presente trabalho

Em sua tese de doutorado, Souza (2005), fez uma análise física detalhada da evolução de estruturas turbilhonares de jatos circulares tridimensionais em desenvolvimento temporal. Em seu trabalho verificaram-se também a influência de diferentes perturbações na formação das estruturas coerentes. Dando sequência a este trabalho Moreira (2007) apresentou a influência da modelagem submalha da turbulência de jatos em desenvolvimento temporal. A extensão natural dos trabalhos seria simular jatos em desenvolvimento espacial, sendo esse o objetivo principal do presente trabalho. Para isso, seria necessária uma metodologia nova, resultado da hibridação de *MPEF* e da metodologia de fronteira imersa *MFI*. O resultado dessa hibridação é a metodologia denominada IMERSPEC. Ela foi desenvolvida por Mariano (2007) e aplicada na simulação de escoamentos sobre corpo imersos (MARIANO, 2007). Somada a essa metodologia, será utilizada a metodologia de simulação de grandes escalas (*LES*) para a modelagem da turbulência.

Inicialmente foram feitos testes no código desenvolvido por Moreira (2007) e, devido a uma grande influência das condições de contorno periódicas na região de saída do jato, optou-

se pelo desenvolvimento de um novo código que mantivesse as mesmas características do anterior e que possibilitasse estender o domínio de cálculo de forma a minimizar a influência das condições de contorno.

Este novo código computacional possui uma alta taxa de convergência e alta acurácia. O código utiliza a metodologia IMERSPEC em conjunto com a metodologia *LES*. Somado a isto, o código conta com a capacidade de processamento em paralelo, o que possibilita simular casos com domínio suficientemente grande e possibilita realizar simulações com malhas refinadas e em tempos menores, comparando-se com o tempo de processamento serial.

A principal contribuição do presente trabalho é a modelagem matemática e simulações de escoamentos do tipo jatos espaciais de forma “totalmente espectral”. Nenhuma publicação foi encontrada na literatura, mostrando esse tipo de desenvolvimento e aplicação.

A presente tese é organizada da seguinte maneira: primeiro é feita uma revisão bibliográfica, que tem por finalidade mostrar o estado da arte do problema em estudo; na sequência, é descrita a metodologia proposta, seus fundamentos e detalhes de implementação numérica; no capítulo de resultados são apresentados testes de verificação e validação, com o objetivo de quantificar a metodologia e o código computacional. Por fim, as conclusões obtidas até o momento e as considerações para a continuidade do trabalho são expostas.





## **CAPÍTULO II**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E ASPECTOS TEÓRICOS**

O estado da arte de escoamentos do tipo jatos bem como os métodos utilizados no presente trabalho (fronteira imersa e pseudoespectral de Fourier) são apresentados neste capítulo. Faz-se também, uma rápida revisão sobre métodos de alta ordem, procurando mostrar a sua importância, principais características, vantagens e desvantagens.

#### **2.1 Turbulência e escoamentos cisalhantes livres**

A turbulência é um regime de operação de qualquer sistema dinâmico caracterizado por um número de graus de liberdade suficientemente elevado. No atual estágio de conhecimento qualquer tentativa de definição mais detalhada para a turbulência seria incompleta e pouco representativa do fenômeno (SILVEIRA-NETO, 2001). Entre os sistemas dinâmicos encontram-se os escoamentos de fluidos.

A turbulência nos fluidos é um regime de escoamento o qual caracterizada como um fenômeno tridimensional, rotacional, altamente difusivo e dissipativo, contínuo e imprevisível e ocorre a altos números de Reynolds. Estas características conferem à turbulência nos fluidos um caráter totalmente não linear. Além do mais, escoamentos turbulentos apresentam um amplo espectro de energia, possuindo uma larga banda de frequências, ou seja, apresentam estruturas com baixos e altos números de onda. As interações entre estruturas de tamanhos variados constituem um refinado e complexo processo de troca de energia.

Apesar de a turbulência ser classificada como imprevisível, é possível determinar momentos estatísticos de baixa ordem (médias, variâncias) a fim de caracterizar o fenômeno. Segundo Ferziger e Peric (2001), em escoamentos turbulentos isotrópicos identifica-se uma parte determinística constituindo cerca de apenas 10% do escoamento na forma de estruturas coerentes que são responsáveis por aproximadamente 90% do transporte de energia e outra randômica, aproximadamente 90%, que aparece na forma de menores instabilidades.

A transição à turbulência, melhor sistematizada por Reynolds (1883), tem origem no aparecimento de instabilidades num escoamento inicialmente estável (denominado regime laminar). Os efeitos advectivos, altamente não-lineares, são responsáveis pela amplificação de perturbações e geração de instabilidades, as quais se amplificam e interagem entre si, conduzindo o escoamento ao regime turbulento. A forma com que o processo de geração de instabilidades ocorre depende do tipo de escoamento em questão, conduzindo a uma possível classificação dos escoamentos transicionais.

Os escoamentos cisalhantes livres destacam-se entre os escoamentos transicionais e caracterizam-se pela ausência de paredes ou obstáculos e eles podem ser divididos em:

- Camadas de mistura que se desenvolvem devido à existência de campos inflexionais de velocidades.
- Esteiras que se desenvolvem devido à existência de campos de velocidades deficitários inflexionais.
- Jatos que se desenvolvem devido à existência de campos de velocidades superáveils inflexionais.

A Fig. 2.1 ilustra os tipos de escoamentos cisalhantes livres cujo processo de transição é similarmente caracterizado pela presença das denominadas “estruturas coerentes”, as quais apresentam importante grau de organização local, promovendo anisotropia e inhomogeneidade do escoamento. A Fig. 2.1 (a) ilustra uma camada de mistura em desenvolvimento espacial; a Fig. 2.1 (b) mostra uma esteira de Von Kármán formada sobre as Ilhas Juan Fernandez na costa do Chile e a Fig. 2.1 (c) mostra um jato circular livre.

As instabilidades que se desenvolvem nesta classe de escoamentos são ditas de natureza cisalhantes uma vez que, pela teoria da estabilidade linear, elas podem se desenvolver

mesmo na situação hipotética de escoamentos não viscosos. Rayleigh (1880) estabeleceu o critério da inflexionalidade do campo de velocidade como requisito necessário para geração de instabilidades em escoamentos cisalhantes livres. Nos escoamentos cujas instabilidades desenvolvem-se sob a influência de uma parede, a transição ocorre indiferentemente à existência de inflexionalidade, apresentando instabilidades de outra natureza. Assim, a transição pode ter outras origens, nas quais a formação de instabilidades pode ser ocasionada por efeitos viscosos, ou por efeitos de rotação e de convecção térmica.

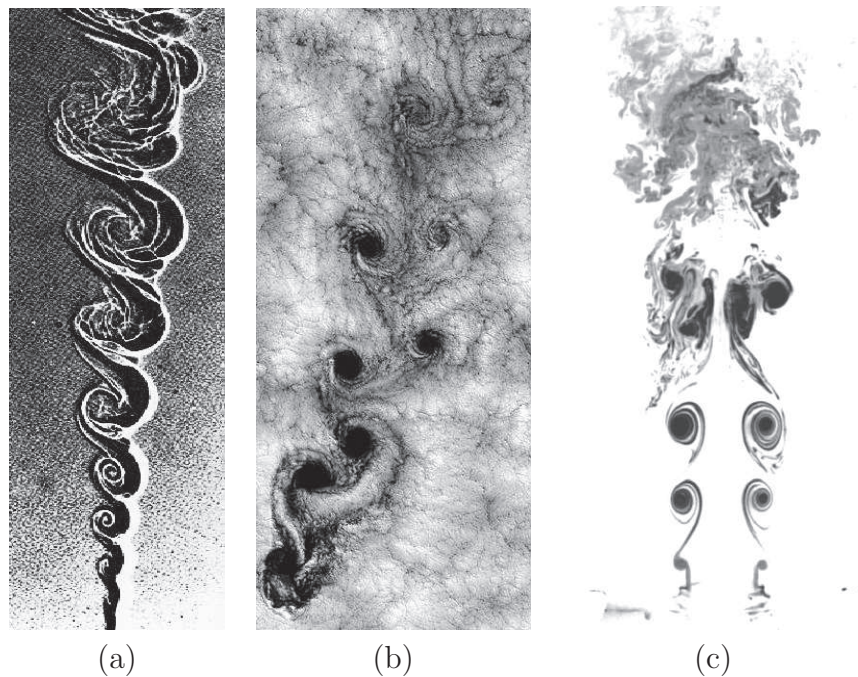


Figura 2.1: Escoamentos cisalhantes livres: (a) camada de mistura espacial (BROWN; ROSHKO, 1974); (b) esteira de Von Kármán; (c) jato circular (SAMIMY et al., 2004).

## 2.2 Jatos

Os jatos são formados quando uma quantidade de movimento é injetada, através de um bocal ou orifício, descarregando em um ambiente circundante, sem a presença de paredes. Em uma configuração ideal de um jato circular, um fluido Newtoniano escoia continuamente através de um bocal de diâmetro ( $d$ ), produzindo um escoamento com um perfil de velocidade de saída ( $u_i$ ) do bocal aproximadamente plano, descarregando em um ambiente em repouso de mesmo fluido. O escoamento formado é estatisticamente constante e simétrico em relação ao eixo de simetria do jato (linha central).

Os jatos podem ser classificados segundo a geometria que os formam, podendo ser planos ou retangulares, se gerados por cavidades retangulares, ou circulares, se gerados por orifícios circulares. Em ambos, a transição para a turbulência é caracterizada pela formação de instabilidades primárias do tipo Kelvin-Helmholtz, as quais induzem a formação de filamentos secundários longitudinais. A interação dos filamentos longitudinais contra-rotativos com as estruturas turbilhonares primárias induzirá a formação de oscilações transversais, as quais se amplificam e finalizam por levar o escoamento à turbulência tridimensional.

A Fig. 2.2 (a) ilustra o processo de transição em um jato em diferentes fases: (1) bocal convergente; (2) núcleo de escoamento potencial; (3) primeiras instabilidades; (4) toróide de alta concentração de vorticidade ou instabilidades de Kelvin-Helmholtz; (5) geração de estruturas turbilhonares toroidais tridimensionais e emparelhamento; (6) oscilações tridimensionais sobre as estruturas toroidais; (7) degeneração em turbulência tridimensional; (8) reorganização da turbulência em estruturas coerentes compostas de múltiplas escalas. A Fig. 2.2 (b) apresenta as mesmas fases da transição e estruturas turbilhonares esquematizadas na Fig. 2.2 (a) porém foram evidenciadas pelo estudo experimental de Thurow e Lynch (2009).

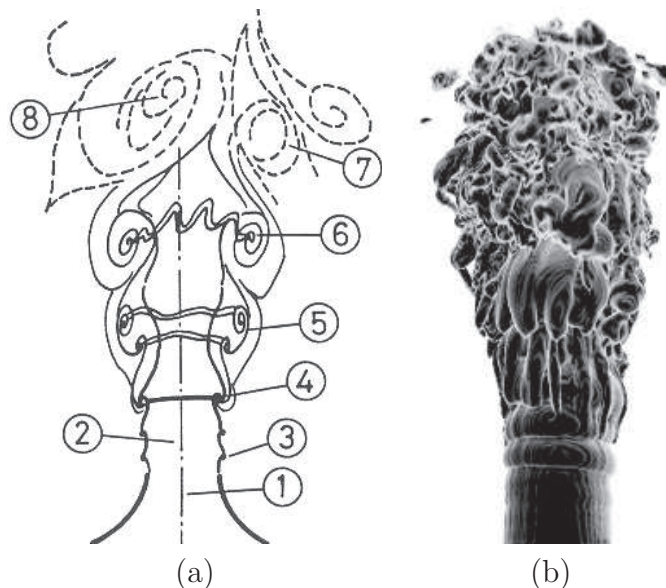


Figura 2.2: (a) Esquema ilustrativo das diferentes estruturas turbilhonares encontradas na transição a turbulência do jato (SILVEIRA-NETO, 2001); (b) Estruturas turbilhonares de jato circular em transição evidenciadas pelo ensaio experimental de Thurow e Lynch (2009).

A Fig. 2.3 mostra esquematicamente as formas características dos perfis médios de

velocidades de um jato em função da distância sobre a linha de simetria em relação ao bocal de saída. Inicialmente o jato se distribui como um perfil aproximadamente plano com velocidade de saída do bocal ( $w_1$ ). O escoamento potencial desaparece rapidamente, a uma distância de cerca de 4 – 7 diâmetros ( $d$ ) da saída do bocal, onde o perfil de velocidade perde sua forma plana. À medida que se avança sobre a linha central do jato, o escoamento começa a se desenvolver dentro de uma forma gaussiana característica. Finalmente, a cerca de 20 diâmetros da saída do bocal, o perfil de velocidade atinge e mantém a forma autossimilar dependendo se o jato é plano ou axisimétrico. A região desenvolvida ou autossimilar parece crescer a partir de uma “origem virtual” ( $z_0$ ), como esquematizado na Fig. 2.4, e que será definida adiante nesta secção.

Uma característica dos jatos circulares é que o perfil de velocidade tem a mesma quantidade de movimento, em diferentes posições longitudinais a jusante do bocal, mas não tem o mesmo fluxo mássico. O jato é realimentado a partir do ambiente circundante e a vazão mássica aumenta no sentido do escoamento (POPE, 2000), este mecanismo é conhecido por “entrainment” e está representado na Fig. 2.4 pelas setas curvas. O “entrainment” arrasta fluido da região irrotacional, pobre em quantidade de movimento, para o núcleo da camada cisalhante, rica em quantidade em movimento. O “entrainment” é provocado por difusão viscosa e aumentado pela presença das estruturas coerentes encontradas nos jatos em transição e turbulentos, de natureza intermitente, essas estruturas engolfam quantidades de fluido na região irrotacional para zona de camada cisalhante (SILVA; MéTAIS, 2002b).

Escoamentos do tipo jato podem ser divididos em três regiões tomando como referência a direção radial do jato: núcleo potencial, camada cisalhante e região de escoamento irrotacional, como ilustra a Fig. 2.4. O núcleo potencial é a região em forma de cone, representada por linha pontilhadas, em que o escoamento conserva a velocidade de saída do bocal  $u_i$ . Nessa região o escoamento é caracterizado por ser livre da influência da viscosidade e não há gradientes de velocidade nas direções longitudinal e radial. Adjacente ao núcleo potencial, movendo na direção radial, há uma região entre a camada cisalhante e o núcleo potencial, representada por uma linha cheia, onde há altos gradientes de velocidade radial, e, conseqüentemente, altas tensões de cisalhamento, causadas pelo crescimento da camada de mistura proveniente da difusão de momento radial. Por fim, a outra região de escoamento é a

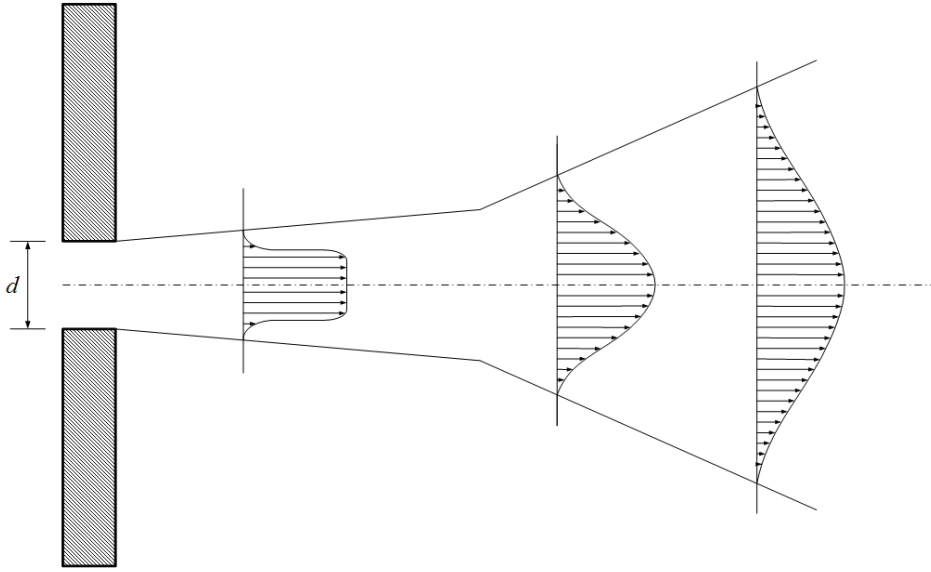


Figura 2.3: Perfis médios de velocidade da componente  $z$  do jato (IPARI; STANSBY, 2011).

irrotacional, com uma velocidade radial negativa ditada pela captura de massa causada pelo crescimento da camada cisalhante (“entrainment”). Próximo ao bocal e para um número de Reynolds suficientemente alto, a espessura da camada cisalhante é muito menor que o raio, o qual forma uma camada cisalhante com intensos efeitos de curvatura.

Tomando como referência a direção longitudinal o jato pode ser dividido em três zonas: o núcleo potencial (1), definido anteriormente; após o núcleo potencial, tem-se a zona transicional (2), que é caracterizada pelo encontro da camada cisalhante com a linha de centro do jato e pelo crescimento radial do escoamento turbulento. Os termos “near field” ou zona de escoamento em desenvolvimento refere-se à junção do núcleo potencial e zona de transição do jato. Por fim, tem-se a zona de escoamento desenvolvido ou “far field”, nesta região o escoamento apresenta autossimilaridade e será apresentada adiante nesta secção. As retas verticais, na Fig. 2.4 representam as fronteiras entre as zonas descritas anteriormente.

São bastante comuns estudos onde, além a velocidade de saída do bocal, tem-se uma velocidade auxiliar chamada de velocidade de co-flow. A velocidade de co-flow é utilizada para facilitar o aparecimento do “entrainment”, e geralmente esta velocidade possui uma magnitude muitas vezes inferior à magnitude da velocidade de saída do bocal. A velocidade média predominante tem a direção axial pois a velocidade média radial é normalmente menor que a velocidade média axial. No eixo de simetria do jato (linha central), a velocidade longitudinal média  $\overline{w_c}$  pode ser definida em termos de uma velocidade longitudinal sobre a

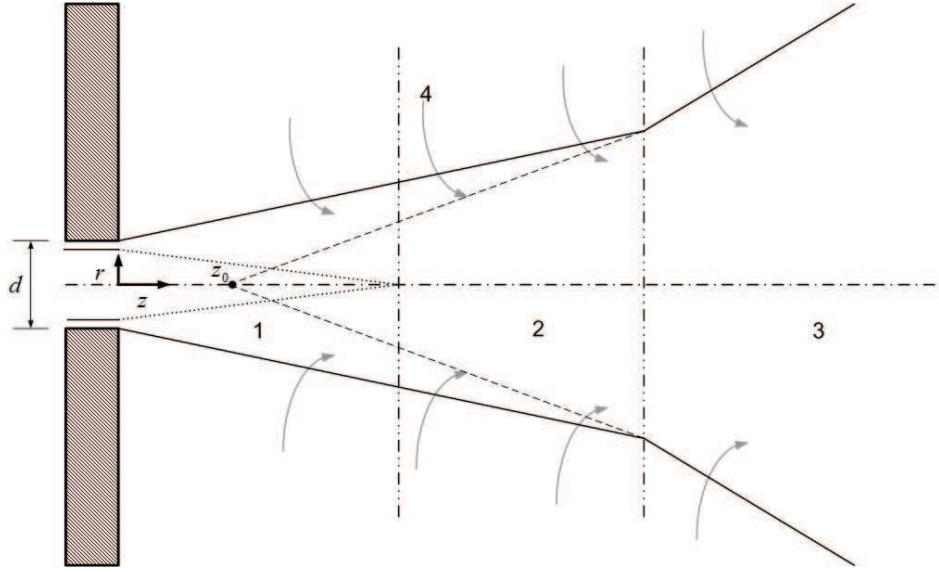


Figura 2.4: Esboço do desenvolvimento de um jato próximo ao bocal: região irrotacional, núcleo potencial (·····) e camada cisalhante (—) (IPARI; STANSBY, 2011).

linha central, e é dada por:

$$\overline{w}_c(z) = \overline{w}(0, 0, z). \quad (2.1)$$

O comprimento radial da linha central do jato até a camada cisalhante é a espessura da camada cisalhante ( $\delta$ ) como ilustrado na Fig. 2.5. Pode se também definir a meia largura do jato ( $\delta_{1/2}$ ) como sendo a distância radial entre a linha central do jato ( $r = 0$ ) até a posição onde a velocidade média na direção axial do escoamento é igual à metade da velocidade média sobre a linha central do jato ( $\overline{w}_c(z)$ ) Fig. 2.5, e é dado por:

$$\overline{w}(\delta_{1/2}(z), 0, z) = \frac{1}{2} \overline{w}_c(z). \quad (2.2)$$

A origem virtual é uma origem hipotética na qual o jato “parece” iniciar a região autosimilar. Para definir a origem virtual, ajusta-se uma reta ao inverso do perfil de velocidade média obtido sobre a linha central do jato adimensionalizado pela velocidade de injeção do bocal  $w_1$ , a partir do final do núcleo potencial. A equação desta reta é dada pela Eq. 2.3 e a origem virtual é obtida pela extrapolação da reta Eq. 2.3 até que  $w_1/\overline{w}_c$  alcance o valor igual a 0 mostrado na Fig. 2.4 pelas linhas tracejadas, onde  $a$  e  $b$  são os coeficientes ajustados da



reta,

$$\frac{w_1}{\overline{w}_c} = az + b. \quad (2.3)$$

Uma vez ajustada a reta da Eq. 2.3, faz-se  $w_1/\overline{w}_c = 0$  e obtém-se a origem virtual,

$$z_0 = \frac{-b}{a}. \quad (2.4)$$

O jato circular espalha-se linearmente com uma taxa definida por:

$$s \equiv \frac{d\delta_{1/2}(z)}{dz}. \quad (2.5)$$

Sendo a taxa de espalhamento uma constante, ela pode ser também dada por:

$$s = \frac{\delta_{1/2}}{z - z_0}, \quad (2.6)$$

uma vez que  $\delta_{1/2}(z_0) = 0$ . Isso é válido na região de autossimilaridade.

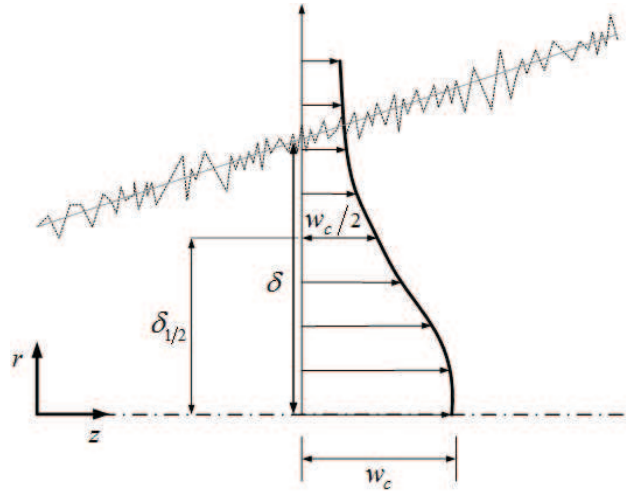


Figura 2.5: Definição da espessura da camada cisalhante, e meia largura em um jato turbulento.

À medida que se desloca na direção longitudinal o jato decai ( $\overline{w}_c(z)$  reduz) e espalha ( $\delta$  e  $\delta_{1/2}$  aumentam). Com o decaimento e o espalhamento, os perfis de velocidade média mudam, mas a forma dos perfis não muda na região longe do bocal. Com isso conclui-se que os



perfis de velocidade média tornam-se autossimilares (POPE, 2000). A autossimilaridade é um importante conceito que surge em diferentes contextos no estudo de escoamentos turbulentos.

Seja  $\phi(r, z)$  uma variável dependente qualquer. Escalas característica  $\phi_c(z)$  e  $\delta(z)$  são definidas como função de  $z$ , respectivamente, para variável dependente  $\phi(z)$  e a variável independente  $r$ , normal à direção principal do escoamento. Então variáveis adimensionalizadas podem ser definidas por:

$$\eta \equiv \frac{r}{\delta(z)} \quad (2.7)$$

$$\Phi(\eta, z) \equiv \frac{\phi(r, z)}{\phi_c(z)}. \quad (2.8)$$

Se a variável dependente adimensionalizada é independente de  $z$ , existe uma função de similaridade  $\tilde{\Phi}$  tal que,

$$\Phi(\eta, z) = \tilde{\Phi}(\eta). \quad (2.9)$$

As escalas  $\phi_c(z)$  e  $\delta(z)$  devem ser apropriadamente escolhidas. O comportamento autossimilar pode ser observado sobre uma certa faixa da coordenada longitudinal  $z$  (POPE, 2000). Tomando a variável de similaridade como:

$$\eta \equiv \frac{r}{\delta_{1/2}(z)}, \quad (2.10)$$

ou ainda,

$$\varsigma \equiv \frac{r}{z - z_0}, \quad (2.11)$$

as duas podem ser relacionadas por  $\eta = s\varsigma$ .

Os perfis de velocidades médias na região de autossimilaridade são definidos por:

$$f(\varsigma) = f(\eta) = \frac{w(x, y, z)}{w_c(z)}. \quad (2.12)$$

As tensões de Reynolds  $(\overline{u'_i u'_j})$  também se tornam autossimilares, após a região de

desenvolvimento, quando os perfis  $(\overline{u'_i u'_j} / w_c^2)$  são traçados contra  $\varsigma$  ou contra  $\eta$  (POPE, 2000). Em termos do perfil de similaridade  $f(\varsigma) = w(x, y, z) / w_c(z)$  com  $\varsigma$ , a solução é dada por:

$$f(\varsigma) = \frac{1}{(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{s^2} \varsigma^2)^2}. \quad (2.13)$$

Dados experimentais indicam que a taxa de espalhamento para jatos planos variam na faixa  $0,10 < s < 0,11$ , e para jato circular na faixa  $0,086 < s < 0,095$  (WILCOX, 2006).

Na região autossimilar de jatos turbulentos, a Reynolds altos, a velocidade média no eixo de simetria deve obedecer a seguinte relação:

$$\frac{u_i}{\overline{w}_c} = \frac{1}{b_u d} (z - z_0) \quad (2.14)$$

onde:  $z$  é a distância do bocal de saída do jato,  $z_0$  é a origem virtual do jato e  $b_u$  é a constante que representa o decaimento do jato.

O jato é completamente definido pela velocidade de entrada,  $u_i$ , pelo coeficiente de viscosidade  $\nu$  e pelo diâmetro  $d$ . Deste modo o único adimensional que rege o escoamento é o número de Reynolds (POPE, 2000) dado por:

$$Re_d = \frac{u_i d}{\nu}. \quad (2.15)$$

É interessante destacar a influência do número de Reynolds neste tipo de escoamento. Com a variação desse parâmetro alguns efeitos são notados nas estruturas coerentes do escoamento e no número de pares de vórtices. Aumentando o número de Reynolds, acelera o mecanismo de transição à turbulência e torna mais difícil a identificação das estruturas coerentes, pois há uma intensificação do processo de fragmentação dos vórtices. Morris (1976) estudou a influência do número de Reynolds em instabilidades características para vários perfis de velocidade pela análise da teoria de estabilidade linear. A influência da viscosidade é um parâmetro importante apenas para um número de Reynolds menor que  $Re_\theta = 100$ . O número de Reynolds torna-se um parâmetro seletivo para o modo mais instável entre  $100 < Re_d < 500$ . Os modos helicoidais são selecionados a baixos números de

Reynolds e os modos axissimétricos a altos números de Reynolds.

A transição de um jato do regime laminar para o regime turbulento acontece, via de regra, próximo do bocal que lhe dá origem, de forma que ela depende da geometria do orifício ou do bocal e também das condições do escoamento a jusante. Desta forma os experimentos são dificilmente comparáveis. Torna-se também difícil comparar simulações numéricas com dados experimentais, exceto do ponto de vista puramente estatístico (SOUZA, 2005).

Embora os escoamentos turbulentos sejam caracterizados como aleatórios por alguns estudiosos, devido a sua difícil predição determinística, a prática tem demonstrado que as já citadas estruturas coerentes podem ser previstas. Assim, a turbulência pode ser considerada coerente para as grandes estruturas e caótica para as menores estruturas. O uso adequado de ferramentas estatísticas permite analisar os escoamentos e definir um comportamento médio, através de campos característicos.

As grandes estruturas dos escoamentos têm recebido muita atenção dos pesquisadores, uma vez que influenciam fortemente a dinâmica dos jatos turbulentos livres. O melhor entendimento das estruturas que compõem este tipo de escoamento e de como elas afetam seu comportamento torna possível um controle mais efetivo do jato (taxa de espalhamento, nível de turbulência, eficiência de mistura) para diversas aplicações em engenharia, e faz-se necessária para o refinamento de teorias e modelos existentes para descrição de escoamentos turbulentos.

Trabalhos comprovando a formação destas estruturas em diferentes tipos de escoamentos turbulentos foram surgindo desde o trabalho de Brown (1935) e desde então, modificando de forma importante a compreensão da física da turbulência. Tais estruturas são extremamente importantes para muitas aplicações práticas, exercendo uma influência direta sobre transporte de fluido, misturas, produção de turbulência e geração de ruídos. Em determinados problemas elas são desejáveis, como por exemplo, para promover o aumento da eficiência em processos de mistura, combustão e em transferência de calor e massa. Em outras situações elas são indesejáveis, por promover aumentos significativos no coeficiente de arrasto, assim como o aumento da potência de bombeamento em sistemas hidráulicos e o aumento do ruído provocado pela emissão de vórtices em aeronaves.

As primeiras investigações sobre jatos incluem os trabalhos de Corrsin (1943), Corrsin

e Uberoi (1950a, 1950b). As falhas das intensidades turbulentas em atingir a autossimilaridades nestes primeiros trabalhos motivaram os esforços de Wygnanski e Fiedler (1969). O trabalho destes autores constituiu um estudo completo da região de autossimilaridade do jato circular e tornou-se a referência para a descrição quantitativa para perfis de velocidade média, tensões turbulentas e coeficientes de correlação tripla.

Embora medidas experimentais de velocidade média e intensidade turbulenta em jatos circulares com perfil plano na saída do bocal tenham sido relatadas por muitos autores, estas apresentam diferenças significativas entre os diferentes estudos. Diante deste contexto, Panchapakesan e Lumley (1993) apresentaram medições feitas em jatos circulares de ar, de diâmetro 0,61[cm] a um número de Reynolds de 11.000 e compararam seus resultados primários aos resultados de Wygnanski e Fiedler (1969), Andreopoulos e Rodi (1984), Hussein, Capps e George (1994a). Os desvios encontrados com relação às medidas de velocidade axial média de Wygnanski e Fiedler (1969) foram explicados pelos efeitos de confinamento do jato, em concordância com as justificativas também apresentadas por Hussein, Capps e George (1994a). Os perfis da velocidade axial média na direção radial foram próximos entre si apresentando apenas divergências próximas à saída do jato.

Há uma diferença sistemática entre as medidas de Panchapakesan e Lumley (1993) e as medidas de outros autores. As medidas dos outros autores diferem entre si, mesmo quando medidas pelas mesmas técnicas. Panchapakesan e Lumley (1993) procuraram explicar a divergência entre suas medidas e medidas Anemometria Laser-Doppler (LDA) com medidas a fio-quente em regiões próximas ao eixo do jato, onde a reversão de fluxo não é um problema. Recaíram em evidências de que a sonda movia-se rápido o suficiente para causar recirculações. Todos estes jatos tiveram perfis planos na saída do bocal com baixas intensidades turbulentas. O número de Reynolds utilizado foi da ordem de grandeza inferior aos dos demais estudos, o que foi considerada uma possível explicação. Wygnanski e Fiedler (1969) sugeriram que as medidas realizadas anteriormente tinham sido feitas com circuitos capacitor-acoplado, e então passaram por quantidades variadas de movimentos de baixa frequência nas grandes escalas.

Hussein, Capps e George (1994b) estudaram escoamentos turbulentos tipo jato circular com perfil plano em um amplo compartimento a um número de Reynolds 95.500. Os

momentos de velocidade até terceira ordem foram obtidos via anemometria a laser e a fio quente. As medidas satisfazem as equações de movimento diferencial e integral para um jato circular em um meio infinito. Os resultados diferem substancialmente dos reportados por investigadores em trabalhos anteriores, na forma e nível dos perfis. Estas diferenças são atribuídas aos pequenos compartimentos usados em trabalhos prévios e como decorrentes da recirculação dentro dos mesmos. Os resultados experimentais de velocidade média, tensores de Reynolds, intensidade turbulenta dos trabalhos experimentais citados são geralmente utilizados para comparação aos resultados de simulações. Os estudos numéricos geralmente englobam, além dessas análises quantitativas, análises qualitativas, envolvendo visualização da formação e evolução das estruturas que compõem o escoamento.

Todde, Spazzini e Sandberg (2009) estudaram as características morfológicas de jatos a baixos e moderados números de Reynolds. São analisados os perfis de velocidade médias e os momentos de ordens superiores sobre a linha central do jato. No trabalho de Todde, Spazzini e Sandberg (2009) é mostrada uma série de características comuns aos jatos realizados a baixos e altos números de Reynolds, como a presença de vórtices próximos à saída do bocal e a existência da camada cisalhantes. Neste trabalho mostra-se também a existência de um núcleo potencial e o fim do núcleo potencial está de acordo com outros autores. Destaca-se também que o emparelhamento de vórtices é evidenciado. Vários regimes de escoamento em função do número de Reynolds é mostrado. Com  $Re$  abaixo de 1.600 o jato apresenta-se comportamento laminar e a dissipação de energia apresenta sob a forma de uma única frequência. Neste regime há uma alternância entre instabilidades helicoidais e azimutais, essa alternância entre as instabilidades é formada pelos mecanismos de geração de vórtices presentes nesse escoamento. Escoamentos com  $1.600 < Re < 4.000$  já tornam-se turbulentos possuindo uma fina camada de mistura, embora em regime turbulento ainda nota-se a presença bem definida de vórtices no início do escoamento. Porém há uma predominância das instabilidades azimutais do escoamento.

O'Neill, Soria e Honnery (2004) em seu trabalho experimental usando PIV estudaram as instabilidades e estruturas de jatos axisimétricos a baixo número de Reynolds. Neste trabalho é evidenciado a existência de um núcleo potencial que permanece laminar a  $Re = 680$ , e ao final do núcleo potencial, há um aumento das instabilidades as quais foram eviden-

ciadas pelo espectro de energia cinética turbulenta, estas instabilidades são de natureza intermitente. À medida que se aumenta o número de Reynolds para 1.030, há um aumento substancial da quantidade de estruturas vorticais e mostra-se que o jato encontra-se em regime instável. À medida que se desloca a jusante sobre o eixo axial, o jato pode ser descrito como instável ou mesmo turbulento.

Stanley e Sarkar (1999) estudaram o efeito do bocal de saída do jato sobre a evolução do perfil central da direção do escoamento. Eles estudaram a evolução do perfil na linha central do jato na direção do escoamento e a intensidade de flutuação na camada cisalhante no bocal, em regimes laminar e turbulento. Eles encontraram que, usando uma camada limite turbulenta, a evolução é insensível às variações do bocal de saída. Já com a camada limite laminar, há uma forte dependência do tipo de bocal. Embora no trabalho essa dependência não tenha sido explicada, ela acontece devido à mudança no  $Re$  local, ou devido à variação no escoamento provocados pela influência do bocal.

Stanley e Sarkar (1999) estudaram a influência de características do bocal no desenvolvimento do jato. Usando DNS, Stanley e Sarkar (1999) analisaram os efeitos da intensidade de flutuações e da espessura da camada cisalhante no desenvolvimento do jato. Especial atenção é dada à taxa de espalhamento e à análise do decaimento da velocidade média na linha de centro do jato. A espessura da camada cisalhante têm uma forte influência sobre o aparecimento das estruturas cisalhantes que se formam próximo ao bocal; à medida que a espessura de cisalhamento diminui a primeiras estruturas surgem mais próximas ao bocal. Uma estreita espessura de cisalhamento diminuiu o núcleo potencial, medido sobre o perfil de velocidade na linha central do jato.

À medida que se aumenta a intensidade das flutuações, o comprimento do núcleo potencial, medido sobre o perfil médio sobre a linha central do jato, diminui drasticamente. Por outro lado, na região autossimilar, na direção do escoamento, os perfis de velocidade são paralelos, o que implica diferentes taxas de espalhamentos.

Escoamentos do tipo jato também têm sido amplamente estudados por pesquisadores em modelagem da turbulência. O estudo de Tollmien 1926 *apud* Souza (2005) baseado no comprimento de mistura de Prandtl foi o primeiro de muitos tratamentos teóricos do jato circular. As dificuldades na predição deste escoamento, utilizando modelos com constantes a

serem determinadas, têm se mostrado um dos problemas mais desafiadores enfrentados por especialistas em turbulência. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos nesta área.

Melander, Hussain e Basu (1991) mostraram, através de DNS, um desenvolvimento temporal de um jato circular, cujas condições de periodicidade criaram um desenvolvimento anormal de vórtices longitudinais. Villiermaux, Rehab e Hopfinger (2003), em seu trabalho experimental sobre jatos confinados, sustentaram a ideia de que jatos circulares podem ser considerados livres quando se mantêm os limites laterais do domínio distantes de mais de cinco diâmetros. Estes resultados foram confirmados pelos experimentos de Djeridane et al. (1996).

Urbin, Brun e Métais (1997) propuseram demonstrar a possibilidade de se realizar uma simulação tridimensional e em desenvolvimento espacial com razoável custo computacional para aplicações de engenharia. Estes autores aplicaram simulações de grandes escalas baseada no modelo de função estrutura seletivo de Lesieur, Métais e Comte (2005), para avaliar o comportamento estatístico e topológico de jatos circulares em evolução espacial. Neste trabalho, foi observado o crescimento do modo de instabilidade axissimétrico, o qual conduziu a vórtices em forma de anéis. Os vórtices anulares originaram também estruturas de vórtices que consistem em pares alternados localizados entre os anéis. Vórtices helicoidais também foram visualizados em alternância com os anulares. Os resultados para velocidades axiais médias e suas flutuações apresentaram uma boa concordância com dados experimentais. Os autores mostraram ainda, em concordância com vários resultados experimentais (CROW; CHAMPAGNE, 2006; ZAMAN, 1985), a alteração do comportamento do jato através de uma excitação específica (axissimétrica, alternada, helicoidal), o que possibilita o controle das estruturas e uma forte modificação da estatística do jato (taxa de espalhamento, nível de turbulência, etc.).

Urbin, Brun e Métais (1997) aplicaram perturbações específicas na entrada de um jato circular em evolução espacial para controle de sua dinâmica. As estruturas obtidas numericamente com a excitação “alternate pairing” foram muito similares às obtidas experimentalmente por Reynolds et al. (2003). No entanto, a natureza altamente dissipativa do esquema numérico usado levantou dúvidas com relação à possibilidade do controle do jato utilizando este esquema de forçagem a elevados números de Reynolds. Danaila e Boersma

(2000) revisaram o trabalho de Urbin, Brun e Métais (1997) usando DNS a baixos números de Reynolds. Eles restabeleceram os resultados de Urbin, Brun e Métais (1997) com um método de forçagem similar chamado excitação “flapping”. Danaila e Boersma (2000) também introduziram uma denominada excitação “bifurcating” resultante da combinação das excitações axissimétrica e “flapping”. Ambas as excitações “flapping” e “bifurcating” causaram aumento drástico na taxa de espalhamento, mas apresentaram características topológicas e estatísticas muito distintas. A excitação “bifurcating” induziu a altas taxas de espalhamento. No entanto, vale ressaltar que Danaila e Boersma (2000) utilizaram maiores amplitudes de perturbação na velocidade de entrada.

Bardina, Huang e Coakley (1997) apresentam resultados de vários modelos de turbulência clássicos para jatos circulares. Nenhum dos modelos utilizados reproduz bem a taxa de espalhamento deste escoamento. Para o jato plano, entretanto, os resultados dos modelos normalmente são satisfatórios.

Lo, Voke e Rockliff (2000) realizaram um interessante trabalho de análise numérica de um jato plano incompressível em desenvolvimento espacial utilizando LES. As animações computacionais permitiram o acompanhamento da evolução das estruturas vorticais, auxiliando na compreensão da topologia tridimensional complexa deste tipo de escoamento. A simulação evidenciou a formação dos vórtices na direção do escoamento e turbilhões na direção da expansão do jato sob condições não forçadas. No regime de transição, modos “flapping” sugerindo formação de anéis, foram observados e o escoamento foi dominado por turbilhões, inicialmente bidimensionais, na direção de expansão do jato. A formação de estruturas tridimensionais foi caracterizada pelo desenvolvimento de ondulações dos turbilhões na direção de expansão. Estes turbilhões eram semelhantes às estruturas vorticais vistas em esteiras e camadas de mistura, mas a orientação era contrária devido à tensão oposta. Nesse trabalho, os autores também identificaram e apresentaram os vórtices em forma de ferradura na região de transição à turbulência, enfatizando que as extremidades destas estruturas pareciam ser conectadas por uma fina camada de vorticidade e limitadas por um plano central. Eles ressaltaram ainda, que os turbilhões na direção de expansão e vórtices na direção do escoamento pareciam interagir entre si, levando ao aparecimento de arranjos complexos de vórtices e subsequente transição para turbulência.



Os primeiros resultados expressivos no controle de jatos foram obtidos por (CROW; CHAMPAGNE, 2006), utilizando alto falantes para imposição de varias frequências na condição de entrada do jato. O jato obteve máxima ampliação das perturbações iniciais na frequência correspondente número de  $St = fd/u_1 = 0,3$  e o final do núcleo potencial na posição  $z/d = 4$ , onde  $d$  é o diâmetro do jato na condição de entrada,  $u_1$  é a máxima velocidade axial de entrada do jato. Consequentemente esta frequência possui um modo preferencial que corresponde ao período de passagem de estruturas vorticais ao final do núcleo potencial.

A literatura apresenta outros estudos (BOERSMA, 1999; BOERSMA; LELE, 1999; DANAILA; BOERSMA, 2000; HILGERS, 1999, 2000) os quais tratam da aplicação de procedimentos de otimização estocástica para a determinação das frequências de forçagem mais eficientes para jatos de mistura em escoamentos a baixos e elevados números de Reynolds. No entanto, estes trabalhos não apresentam análises detalhadas sobre a dinâmica dos vórtices resultantes da excitação do escoamento, e utilizam amplitudes de forçagem muito elevadas.

Silva e Métais (2002b) realizaram simulações numéricas de jatos circulares em desenvolvimento espacial utilizando LES, aplicando um esquema de discretização compacto de sexta ordem na direção de escoamento do jato e métodos pseudo-espectrais nas demais direções. Estes autores objetivaram estudar a dinâmica dos vórtices de jatos bifurcados, tendo como foco as análises da influência da frequência de forçagem e do número de Reynolds sobre a eficiência de controle. Foram estudados diferentes métodos de forçagem utilizando excitação “flapping”, excitação “flapping” à frequência subarmônica, e o denominado “variflap”, o qual combina o modo de excitação vorticoso à frequência preferencial do jato e o modo “flapping”. Foi verificado através da análise detalhada da dinâmica dos vórtices coerentes que o método que combina excitação axissimétrica à frequência preferencial e uma excitação “flapping” à frequência subarmônica é a estratégia de controle mais eficiente para jatos bifurcados mesmo a elevados números de Reynolds. A riqueza de detalhes com relação à dinâmica do escoamento de jatos, apresentada por Silva e Métais (2002b), torna este trabalho uma importante referência para realização de demais estudos, sejam estes focados na aplicação direta no controle de jatos, sejam focados apenas na melhor compreensão das estruturas coerentes que compõem o escoamento.

Sakakibara (2001) estudou um jato incidente e acrescentou informações importantes

sobre o desenvolvimento de instabilidades primárias de Kelvin-Helmholtz e de filamentos longitudinais que os conectam no escoamento de um jato plano. O estudo da dinâmica das estruturas do escoamento para controle de jatos encontra importante aplicação na redução de ruídos. A literatura apresenta muitos trabalhos relacionados ao estudo dos mecanismos geradores de ruídos aplicando metodologias DNS e LES. Os resultados LES são encorajadores e mostram potencial promissor para compreensão de ruídos em jatos. Embora a compreensão dos ruídos não seja o assunto de interesse do presente trabalho, estudiosos, como Freund (2001), Uzun (2003), fornecem resultados e conclusões interessantes, as quais merecem ser ressaltadas.

Freund (2001) estudou um jato com interesse nos mecanismos de geração de som a Mach 0,9, número de Reynolds 3600 através de DNS. Embora a representação teórica da fonte acústica em escoamento turbulento exista há aproximadamente 50 anos (FREUND, 2001), medidas precisas de qualquer fonte teórica em jato turbulento real têm sido impossíveis devido às dificuldades experimentais. Este trabalho apresenta tensores de Reynolds comparados aos dados de Panchapakesan e Lumley (1993). Segundo Freund (2001), os tensores de Reynolds são insensíveis ao número de Reynolds, o que possibilitou a comparação e uma boa concordância pode ser observada. A visualização da vorticidade é apresentada na Fig. 2.6.

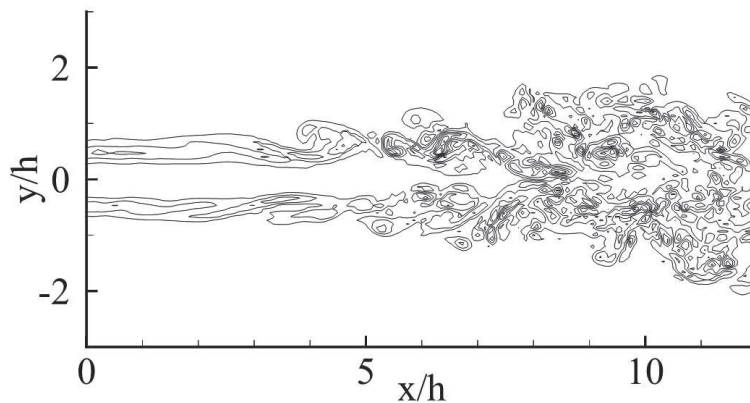


Figura 2.6: Contorno instantâneo da vorticidade (STANLEY; SARKAR, 1999).

Uzun (2003) realizou um estudo de jatos compressíveis com interesse em aerodinâmica e acústica. Este autor desenvolveu um código 3D LES com uma diferenciação finita compacta de alta ordem de precisão e o modelo submalha de Smagorinsky dinâmico para modelar o

efeito das escalas não resolvidas.

O trabalho de Uzun (2003) apresenta resultados da simulação de jatos a número de Mach 0,9 e número de Reynolds 100.000, utilizando uma malha de discretização de 12 milhões de pontos, cuja visualização pode ser observada através da Fig. 2.7. A taxa de espalhamento do jato encontrada por aquele autor mostrou-se dentro da faixa experimental encontrada para jatos incompressíveis (HUSSEIN; CAPPS; GEORGE, 1994b; PANCHAPAKESAN; LUMLEY, 1993; WYGNANSKI; FIEDLER, 1969). Os perfis de velocidade média na direção do escoamento a três localizações a jusante coincidem muito bem entre si e apresentam autossimilaridade consistente com observações experimentais em jatos incompressíveis. Apesar da boa concordância entre dados experimentais e simulados, Uzun ressalta algumas justificativas para as possíveis diferenças entre os dados. Primeiramente, o autor lembra que o tensor de Reynolds calculado por LES é baseado em velocidades filtradas. Ele menciona também a diferença entre as condições iniciais impostas na simulação (flutuações randômicas de velocidade) e as condições iniciais do experimento. Além disso, Uzun argumenta que os tensores de Reynolds experimentais têm sido medidos a regiões distantes a jusante, usualmente 100 raios do bocal ou mais. Tem sido observado experimentalmente que os tensores atingem autossimilaridade assintótica a diferentes localizações a jusante, dependendo das condições iniciais e do número de Reynolds. Os experimentos de Wygnanski e Fiedler (1969) sugerem uma distância de cerca de 100 raios de jato a jusante do bocal para iniciar a região de autossimilaridade a elevados números de Reynolds, enquanto a DNS de Freund mostra que região de autossimilaridade começa a cerca de  $x = 25r_0$  a baixos números de Reynolds. Desta forma, segundo Uzun, como o domínio de 60 raios do bocal de saída do jato é ainda relativamente curto comparado aos experimentos, sendo o número de Reynolds elevado, os tensores podem não ter atingido valores assintóticos verdadeiros.

Ribault et al. (1999) simularam um jato espacial em estado de transição e turbulento para testar modelos de turbulência. Foram analisados os modelos de Smagorinsky, Dinâmico Smagorinsky e modelo de mistura dinâmico. As simulações foram realizadas usando um esquema de discretização espacial compacto de quarta ordem e para avanço no tempo utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem; O avanço temporal do termo viscoso utilizou um esquema de Euler de primeira ordem. Inicialmente as simulações foram realiza-

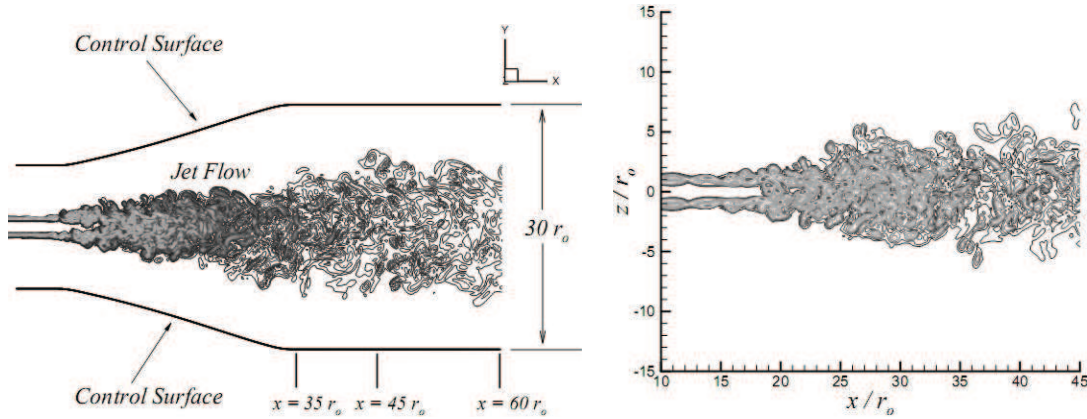


Figura 2.7: Domínio de cálculo e isovalores de vorticidade do jato (UZUN, 2003).

das a um número de  $Re_d = 3000$ , de modo que fosse possível comparar com dados de DNS com mesmo número de Reynolds e, em sequência, simulações com número de  $Re_d = 30000$  foram realizadas. Com maiores números de Reynolds os dados foram comparados com dados experimentais. Nestes testes foram analisados a evolução da meia largura do jato, o decaimento de velocidade na linha central, perfis de velocidade média e intensidade de turbulência. Ribault et al. (1999) mostraram que o modelo de Smagorinsky é bastante dissipativo, quando analisada a evolução temporal do perfil central de velocidade. Os modelos Smagorinsky dinâmico e modelo de mistura dinâmico têm boa comparação com os dados experimentais e DNS.

Silva e Pereira (2004) simularam um jato em decaimento temporal para estudar o efeito dos modelos submalha nos vórtices calculados pela metodologia de simulação de grandes escalas. Os modelos avaliados foram: Smagorinsky, Smagorinsky dinâmico, função estrutura, função estrutura filtrado, escala de similaridade e modelos de mistura. Todas as simulações foram realizadas em um código pseudo-spectral para resolver as derivadas espaciais e para avanço temporal utilizou-se Runge-Kutta de terceira ordem, e em todas as simulações utilizou-se dealising (CANUTO et al., 2006, 2007). Neste trabalho analisou-se a dinâmica dos vórtices resolvidos por DNS e em seguida os modelos submalha foram simulados. Por fim comparam-se os modelos de turbulência com os dados obtidos por DNS. Os modelos de Smagorinsky, função estrutura e modelos de mistura causaram excessiva dissipação dos vórtices, em comparação com os demais modelos, essa dissipação excessiva afetou principalmente as menores escalas resolvidas. Em princípio, os modelos de Smagorinsky dinâmico, fun-

ção estrutura filtrado, apresentaram os melhores resultados, mas em geral todos os modelos apresentam uma boa representação física dos fenômenos.

Souza (2005) realizou um interessante trabalho com foco na análise física de jatos circulares livres em decaimento temporal, através de simulações tridimensionais. A autora estudou também a influência de diferentes tipos de ruídos na formação e evolução das estruturas turbilhonares. As simulações foram realizadas usando um código pseudo-spectral para os termos espaciais e um esquema de avanço temporal Adams-Bashfort de terceira ordem. Nenhum tipo de modelagem de turbulência foi implementado neste código.

Os resultados das simulações realizadas por Souza (2005) permitiram evidenciar a formação de estruturas turbilhonares como também a identificação dos principais mecanismos de geração das estruturas. Nesse trabalho, simulando jatos forçados, fez um estudo sobre os diferentes refinamentos de malhas destacando que, à medida que se aumenta o número de pontos na malha os resultados das simulações se mostram com maior riqueza de detalhes físicos. Outra análise que pode ser destacada é influência de precisão do cálculo. Souza (2005) não encontrou diferenças significativas entre os cálculos com simples e dupla precisão. Destaca-se também no trabalho de Souza o estudo sobre a influência do número de Reynolds em jatos forçados. Percebe-se que à medida que se aumenta o número de Reynolds uma maior quantidade de estruturas podem ser notadas no escoamento, e cabe destacar que Souza (2005) encontrou oscilações numéricas para números de Reynolds moderados. Outro aspecto importante destacado por Souza é a possibilidade do controle do jato pela imposição de diferentes formas de ruído sobre o mesmo.

Wang et al. (2010) realizaram uma DNS de um jato em desenvolvimento espacial a  $Re = 4700$ . Neste trabalho os autores mostraram a comparações com dados experimentais de perfis médios, tensor de Reynolds e momentos de terceira ordem. O espectro de energia cinética turbulenta na região inercial decai com inclinação de  $-5/3$ . Neste trabalho ainda pode-se observar alguns detalhes da fragmentação dos vortices, como pode ser visto na Fig. 2.8.

Muitos dos estudos não-periódicos de DNS e LES encontrados na literatura tratam de escoamentos transicionais. Tal fato deve-se provavelmente a uma melhor definição e maior facilidade de implementação das condições de entrada para o regime de transição do que

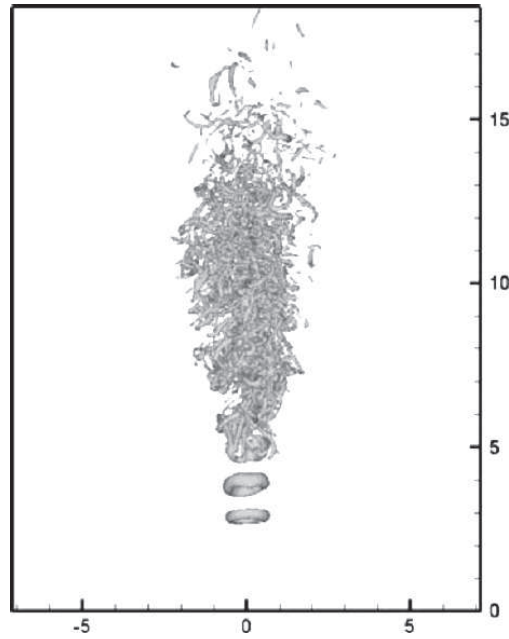


Figura 2.8: Contorno instantâneo de isosuperfície do critério Q (WANG et al., 2010).

para os escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos. Forçagens harmônicas com superposição de flutuações aleatórias de velocidade são comumente usadas para suprir as frequências de excitação necessárias para iniciar a instabilidade da camada cisalhante e a eventual transição à turbulência. Entretanto, este tipo de tratamento não é muito adequado para simular um escoamento completamente turbulento, uma vez que medidas experimentais e numéricas apresentam alta sensibilidade às condições de entrada. Esta é, inclusive, uma das justificativas ressaltadas por Uzun (2003) para as possíveis diferenças entre os resultados de suas simulações e dados experimentais.

Glaze e Frankel (2003) objetivaram seu estudo na comparação do comportamento de duas diferentes metodologias de condições de entrada, as quais foram destinadas a simular uma entrada turbulenta para um jato circular a Reynolds 21.000, utilizando LES e um esquema de discretização espacial finita compacto de sexta ordem. Este trabalho apresentou resultados interessantes em termos de visualização de vórtices. Foram obtidas estruturas instantâneas detalhadas o que possibilitou observar a formação de estruturas toroidais, interação entre filamentos secundários e degeneração em turbulência tridimensional.

Condições de contorno periódicas podem fornecer bons resultados para configurações simples como camadas de mistura em desenvolvimento temporal ou turbulência completamente desenvolvida em escoamentos em tubos ou canais (LING et al., 1998). Mathew e

Basu (2001) mostraram que o uso de periodicidade, bem como o uso de malhas cartesianas, não afetou os resultados obtidos em suas simulações. Estas simulações foram realizadas utilizando um método pseudoespectral baseado em expansões de séries de Fourier em um sistema de coordenadas cartesianas. Os autores verificaram que este método é econômico para estudo da simulação de jatos circulares em DNS, apresentando facilidade computacional, já que não há restrição devida à estrutura da malha cilíndrica próxima ao eixo do jato.

Esta revisão mostrou que o uso de metodologias de alta ordem viabiliza a análise da transição à turbulência, uma vez que métodos de baixa ordem necessita-se de um número de pontos bem superior aos métodos de alta ordem. Neste caso, o método pseudoespectral é uma ferramenta que apresenta bons resultados a um custo computacional baixo, que aliado a um esquema de avanço temporal de alta ordem, permite simular de forma satisfatória a transição a turbulência para escoamentos transicionais, a números de Reynolds baixos ou moderados. Uma alternativa bastante usada é a metodologia *LES* que apresenta bons resultados em casos onde se deseja evidenciar a fases de transição a turbulência.

### 2.3 Método de Fronteira imersa

O Método de Fronteira Imersa (MFI) será utilizado no presente trabalho como uma solução alternativa para contornar o problema das limitações do MPEF em relação às restrições das condições de contorno periódicas. Desta forma, a revisão sobre fronteira imersa será direcionada a trabalhos que de alguma forma estão relacionados com o trabalho desenvolvido nessa tese. Uma revisão atual sobre o assunto pode ser encontrada em (MITTAL; IACCARINO, 2005).

A metodologia da fronteira imersa ganhou visibilidade com o trabalho de Peskin (1972), no qual o autor mostrou simulações de escoamentos em válvulas cardíacas, as quais foram representadas por um campo de força virtual. Este tipo de escoamento é extremamente difícil de ser modelado, uma vez que apresenta uma geometria extremamente complexa (coração humano) e flexível (móvel). Devido à facilidade de lidar com essas características, a metodologia da fronteira imersa começou a ganhar espaço em *CFD*. Desde então a metodologia vem sendo aperfeiçoada e ganhando diferentes variações, dependendo muito do tipo



de problema a ser estudado. As principais pesquisas em Fronteira Imersa são motivadas visando desenvolver metodologias de forma a obter uma melhor precisão e uma ordem de convergência numérica elevada. Nesta busca destaca-se o trabalho de Griffith et al. (2007) que apresenta uma alta ordem de convergência.

A metodologia de fronteira imersa vem sendo desenvolvida no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) desde o trabalho de Lima e Silva (2002). Em sua tese Lima e Silva (2002) propôs o Modelo Físico Virtual (MFV). A ideia principal é modelar a força lagrangiana utilizando a equação de momento aplicada sobre o domínio lagrangiano. Lima e Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003), propõem calcular as derivadas da equação através de interpolações de Lagrange. Para isso faz-se uso de pontos auxiliares e da função interpolação. Depois de calculada a força lagrangiana ela é espalhada para o domínio euleriano através de uma função distribuição. Neste trabalho os autores mostram simulações de escoamentos sobre cilindros.

Arruda (2004), utilizando a mesma metodologia proposta por Lima e Silva (2002), simulou escoamentos em cavidades com tampa deslizante e escoamentos movimentados por um pistão em movimento. Oliveira (2006) estendeu a metodologia a problemas com altos números de Reynolds, simulando escoamentos sobre aerofólio. Além disso, o autor também fez a otimização de forma de aerofólios de uma maneira eficiente computacionalmente. Campregher (2005) estendeu a metodologia para problemas tridimensionais, mostrando simulações de problemas de interação fluido-estrutura em esferas ancoradas por molas. Vedovoto (2007) habilitou o código desenvolvido por Campregher (2005) a importar qualquer geometria; o autor mostra simulações sobre protótipos de veículos e aeronaves.

No MFLab também existe um grupo que desenvolve uma plataforma numérica para a simulação de canais anulares (PADILLA; MARTINS; SILVEIRA-NETO, 2010; BORGES, 2011) o qual possui aplicações de problemas presentes em engenharia de perfuração e da indústria de gás e petróleo. A plataforma numérica por esse grupo utiliza o método de discretização dos volumes finitos, emprega métodos e esquemas de segunda ordem. Em grande parte dos desenvolvimentos desse grupo foca-se na melhoria de metodologia de fronteira imersa de forma a operacionalizar a utilização do método de fronteira imersa para a representação de estruturas que definem esses problemas.



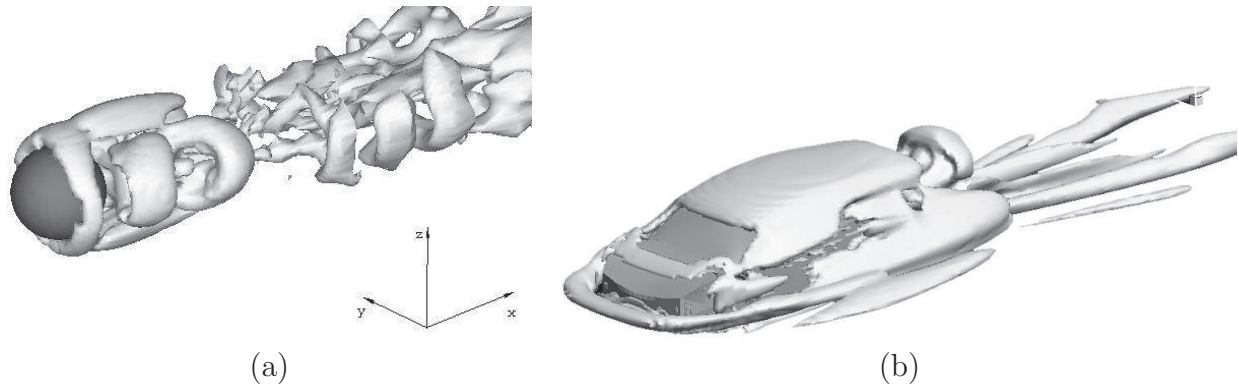


Figura 2.9: (a) Estruturas turbilhonares sobre uma esfera (CAMPREGHER, 2005) e (b) escoamento sobre um modelo de automóvel (VEDOVOTO, 2007).

Na dissertação de Mariano (2007) é proposta uma alternativa para aumentar a ordem de convergência numérica do MFV. Para isso o autor utilizou o *MPEF* para realizar simulações em cavidades com tampa deslizante. A principal vantagem do modelo físico virtual frente aos anteriores é que não se precisa determinar constantes ad-hoc. No entanto, o modelo precisa de pequenos passos de tempo para convergir com uma precisão aceitável.

Uhlmann (2005) mostrou simulações de sedimentação de partículas; para isso utilizou o método do passo fracionado, onde o campo de velocidade estimado é calculado sem o campo de força. Na sequência calculou-se o campo de força lagrangiano interpolando as velocidades estimadas para a malha lagrangiana. A força foi então espalhada para a malha euleriana, através de uma função distribuição, depois disso resolveu-se a equação de Poisson para garantir a conservação da massa. Com esquema proposto por Uhlmann (2005) conseguiu-se estabilidade e precisão com passos de tempos consideravelmente maiores que aos utilizados pelos *MFV*.

Su, Lai e Lin (2007) utilizaram a mesma ideia de Uhlmann (2005) e simularam escoamentos sobre cilindros e cavidades com tampa deslizante. Ambos os trabalhos mostram que os resultados convergem com segunda ordem, além de apresentarem uma boa precisão numérica. Wang, Fan e Luo (2008) propuseram um procedimento denominado de múltipla imposição da força (“multi-direct forcing”), o qual utiliza um processo iterativo para melhorar o cálculo da força. Além disso, os autores utilizaram diferenças finitas de quarta ordem para simular sedimentação de particulados.

Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2009) acoplaram a método de múltipla imposição

da força em um código que usa MPEF. Neste trabalho os autores, obtiveram uma alta ordem de convergência em seus testes de verificação e para validar a metodologia foram simulados escoamentos sobre cilindros com boa concordância dos resultados com a literatura a baixos números de  $Re$ .

## 2.4 Métodos de alta ordem

Os métodos de alta ordem são aqueles que apresentam ordem de convergência numérica maior que dois. Estes métodos são mais caros computacionalmente quando comparados com métodos de baixa ordem, no entanto conseguem atingir uma acurácia muito maior. São muito utilizados em problemas de aeroacústica (UZUN, 2003) e em estudos relacionados à turbulência, em especial DNS e LES.

Os principais métodos são os de diferenças finitas e volumes finitos de alta ordem, nos quais as derivadas são discretizadas com mais pontos no estêncil; diferenças finitas e volumes finitos compactos (FERZIGER; PERIC, 2001); e métodos espectrais (CANUTO et al., 2006, 2007). Também existe a possibilidade de trabalhar com métodos híbridos, isto é, utilizam-se os métodos espectrais para calcular as derivadas em direções onde se pode utilizar periodicidade e métodos compactos de alta ordem nas demais direções (SILVA; MéTAIS, 2002b). No campo da aeroacústica (UZUN, 2003)(Fig. 2.10) e (FREUND, 2001) fizeram simulações de grandes escalas para jatos, utilizando diferenças finitas compactas de alta ordem.

Pinho (2006) simulou cavidades com tampa deslizante bidimensionais e tridimensionais comparando os métodos de diferenças finitas de segunda e quarta ordens, mostrando a importância dos métodos de alta ordem para simulação de grandes escalas. A Fig. 2.11 mostra o campo médio obtido por Pinho (2006) com discretização de segunda e de quarta ordens, respectivamente. Não há grandes diferenças entre os dois, a não ser pelo pequeno vórtice no canto inferior esquerdo, que se apresenta muito menor na solução com discretização de segunda ordem. Porém quando se comparam os perfis de velocidade (Fig. 2.12) verifica-se que, apesar de captar o formato da curva de forma coerente, na discretização de segunda ordem os perfis de velocidades não atingem os máximos e mínimos mostrados pela

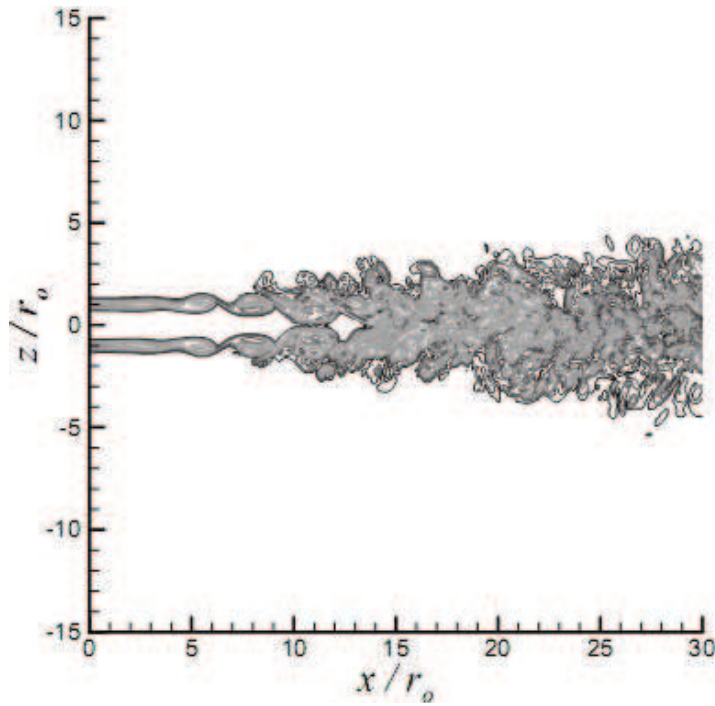


Figura 2.10: Jato simulado por Uzun (2003), contornos instantâneos de vorticidade para  $Re_d = 36.000$ .

referência. Já no caso da discretização de quarta ordem a solução chega bem próximo dos resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982).

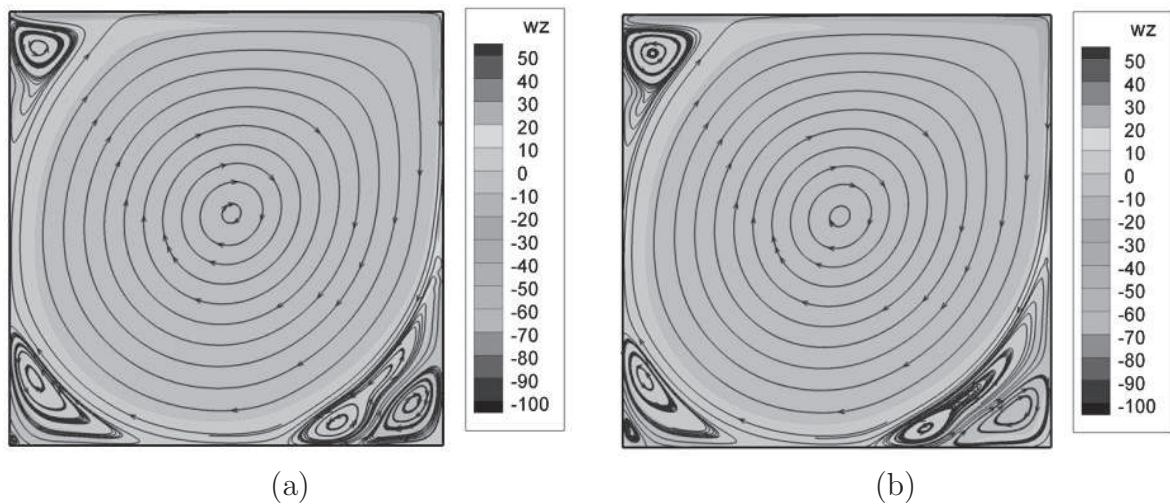


Figura 2.11: Campo médio de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com a) discretização de segunda ordem e b) discretização de quarta ordem e malha 95x95 (PINHO, 2006).

Shukla, Tatineni e Zhong (2007) utilizando diferenças finitas compactas de 4<sup>a</sup> a 20<sup>a</sup>

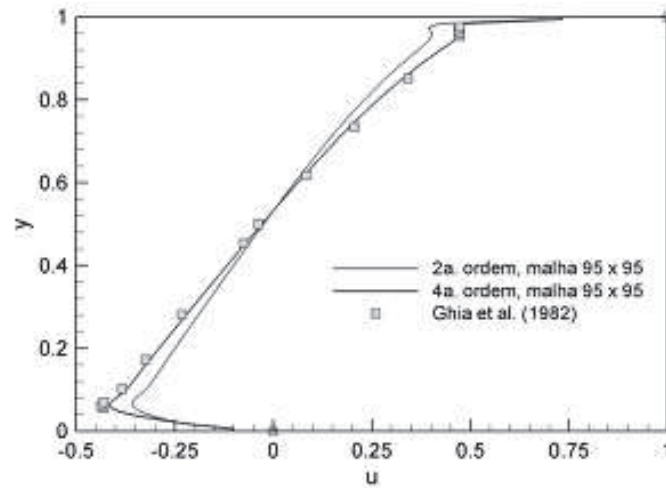


Figura 2.12: Comparação dos perfis da componente  $u$  de velocidade média, Reynolds igual a 10.000, obtidos com malha de 95x95 (PINHO, 2006).

ordem, em malha não uniforme, resolveram o movimento de uma onda e atingiram níveis de precisão elevados. Neste mesmo trabalho os autores também simularam escoamentos passando sobre cilindros utilizando diferenças finitas compactas de 20<sup>a</sup> ordem.

Piller e Stalio (2004) simularam uma cavidade com tampa deslizante comparando o método dos volumes finitos compactos de várias ordens de precisão. Os resultados mostram que, com poucos pontos na malha, utilizando um método de alta ordem, é possível atingir níveis de precisão tão significativos quanto usar malhas refinadas com métodos de baixa ordem. Dentre os métodos de alta ordem o MPEF é particularmente importante, pois possui alta acurácia e alta taxa de convergência espectral. Desta forma, esta metodologia foi utilizada para simular jato em desenvolvimento espacial a  $Re$  moderados.

#### 2.4.1 Método pseudoespectral de Fourier

Os métodos espectrais de Fourier tem como base nas transformadas de Fourier, as quais possuem como grande vantagem, quando comparados com outros métodos de alta ordem, o baixo custo computacional, devido à utilização da transformada rápida de Fourier ( $FFT$ <sup>1</sup>), algoritmo que calcula as transformadas de Fourier de forma muito eficiente. Canuto et al. (2006, 2007) mostraram que enquanto o custo computacional do método de diferenças finitas é  $O(N^2)$  o custo computacional dos métodos espectrais utilizando a  $FFT$  é  $O(N \log_2 N)$ ,

<sup>1</sup>do inglês Fast Fourier Transform -  $FFT$

onde  $N$  é o número de pontos da malha.

Além da utilização da FFT, também foi desenvolvido o método da projeção, que possibilita eliminar o campo de pressão dos cálculos. Este procedimento contribuiu enormemente para o baixo custo computacional na resolução das equações de Navier-Stokes utilizando os métodos espectrais. Existem algumas restrições com relação ao uso desse método. Ele sofre influência do fenômeno de Gibbs quando há descontinuidades no domínio de cálculo e as condições de contorno devem ser periódicas.

Para contornar esses inconvenientes surgiram diferentes técnicas: uma das mais conhecidas é a Técnica de Decomposição do Domínio que tem sido empregada com o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos. Delves e Hall (1979) introduziram um método que foi chamado de Método do Elemento Global; Gottlieb e Orszag (1977) em seu trabalho intitulado “Métodos Espectrais em Geometrias Complexas”, propôs pela primeira vez a combinação dos Métodos Espectrais com um pré-condicionamento de Elementos Finitos para resolver um sistema de equações mal condicionado. Também neste trabalho, o autor descreveu uma nova técnica para remendar (Patching) as interfaces entre subdomínios não sobrepostos (Non-Overlapping), a qual foi chamada de Método Espectral de Decomposição do Domínio (também conhecido como Método Multidomínio Espectral), desenvolvida para superar as limitações dos Métodos Espectrais com relação às condições de contorno periódicas. Este método consiste em dividir o domínio em subdomínios contíguos ou adjacentes mais simples. A maioria das versões dos Métodos Espectrais de Decomposição do Domínio usa variações ou extensões desta Técnica de Remendo (Patching), originalmente sugerida por Gottlieb e Orszag (1977).

Morchoisne (1984) desenvolveu um método baseado na sobreposição (Overlapping) de múltiplos domínios para estudar escoamentos incompressíveis em geometrias bi e tridimensionais simples, usando as formulações de função de corrente-vorticidade ou variáveis primitivas.

Patera (1984) usou uma formulação variacional para atender à continuidade de fluxo nas interfaces dos elementos, ao qual chamou de Método dos Elementos Espectrais. Ele testou este método com polinômios de Chebyshev na equação advecção-difusão unidimensional e aplicou-o na simulação de escoamentos laminares bidimensionais sobre um canal com degrau.

Deville e Mund (1985) usaram um tipo de pré-condicionamento baseado no Método dos Elementos Finitos para resolver equações diferenciais parciais elípticas de 2<sup>a</sup> ordem, pela técnica pseudoespectral de Chebyshev com condições de remendo nas interfaces dos subdomínios. Precisão espectral foi alcançada no problema elíptico de uma região bidimensional em forma de  $L$  com um esforço computacional mínimo. Hussein, Kopriva e Patera (1987) mostraram os progressos alcançados no estudo e compreensão dos escoamentos turbulentos com altos números de Reynolds usando processamento paralelo. Algumas simulações paralelas de escoamentos incompressíveis e compressíveis turbulentos em geometrias complexas foram apresentadas.

Henderson e Karniadakis (1995) apresentaram um Método dos Elementos Espectrais Legendre-Fourier para estudar escoamentos turbulentos incompressíveis em geometrias complexas com uma direção de escoamento homogênea. As equações de Navier-Stokes incompressíveis foram escritas em uma forma apropriada tanto para DNS como para LES.

Rizales (2005) apresentou um Método Multidomínio Espectral, o qual se baseia no Método de Colocação Espectral e em um Método de Decomposição do Domínio tipo Remendo (Patching), onde se utiliza a Técnica da Matriz de Influência para impor as condições de continuidade nas interfaces. O código numérico desenvolvido pelo autor permitiu simular um canal com degrau, cavidades com tampa deslizante e escoamentos sobre cilindros. Os resultados de Rizales (2005) mostram uma boa concordância quando comparados com outros dados da literatura.

No MFLab da Universidade Federal de Uberlândia, os estudos sobre métodos espectrais começaram com o trabalho de Souza (2005). A autora comparou diferentes metodologias e obteve resultados excelentes utilizando o método pseudoespectral de Fourier nas simulações de jatos periódicos temporais. Os resultados obtidos conseguem capturar um grande número de detalhes, principalmente com o jato na fase turbulenta. A Fig. 2.13 mostra um jato natural experimental utilizando a técnica PIV de visualização Matsuda e Sakakibara (2005) comparado com um jato em desenvolvimento temporal simulado via MPEF Souza (2005). É possível observar, em ambas as visualizações, detalhes do estiramento das estruturas, bem como a formação de estruturas do tipo grampo de cabelo ao redor do núcleo do jato. Essa comparação ilustra o grande potencial do método pseudoespectral de Fourier, uma vez que



capturar essas estruturas numericamente é uma tarefa que exige uma metodologia de alta acurácia ou um grande refinamento de malha.

A extensão do trabalho de Souza (2005) foi realizada por Moreira (2007), o qual implementou diversos modelos de turbulência propiciando simulações de grandes escalas em jatos turbulentos.

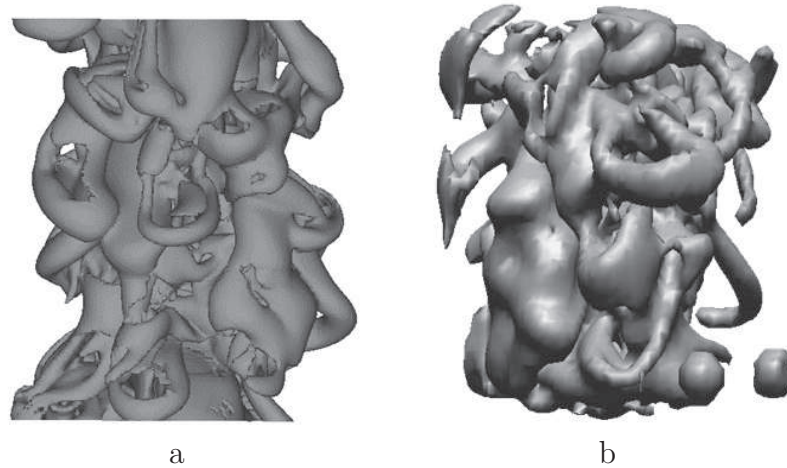


Figura 2.13: Visualizações da vorticidade no jato natural: (a) Isosuperfície de vorticidade =  $1, 3s^{-1}$  (SOUZA, 2005), (b) visualização experimental via PIV (MATSUDA; SAKAKIBARA, 2005).

Ainda em 2007, foi proposta uma metodologia resultante da hibridação das metodologias pseudoespectral de Fourier e fronteira imersa por Mariano (2007). Na dissertação de Mariano (2007) foram feitas as primeiras implementações e foram simulados escoamentos em cavidades com tampa deslizante (Fig. 2.14) e no trabalho de Mariano et al. (2010) são mostradas simulações de escoamentos sobre cilindros de base quadrada (Fig. 2.15). Em ambos os trabalhos são utilizados o método pseudoespectral de Fourier juntamente com o modelo físico virtual (Lima e Silva; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003). Essa metodologia permitiu, de forma original, modelar e simular problemas com condições de contorno não periódicas, utilizando a metodologia pseudoespectral de Fourier em todas as direções do domínio, sendo denominada IMERSPEC pelos autores (MARIANO et al., 2010).

A primeira versão da metodologia IMERSPEC, devido ao cálculo das derivadas para obter a força lagrangiana do modelo físico virtual serem feitas no espaço espectral, impossibilitava a utilização da metodologia em problemas de escoamentos sobre geometrias não

cartesianas. Além disso, também apresentou primeira ordem de convergência espacial. No entanto, a metodologia IMERSPEC se mostrou eficiente computacionalmente, além de apresentar uma acurácia satisfatória.

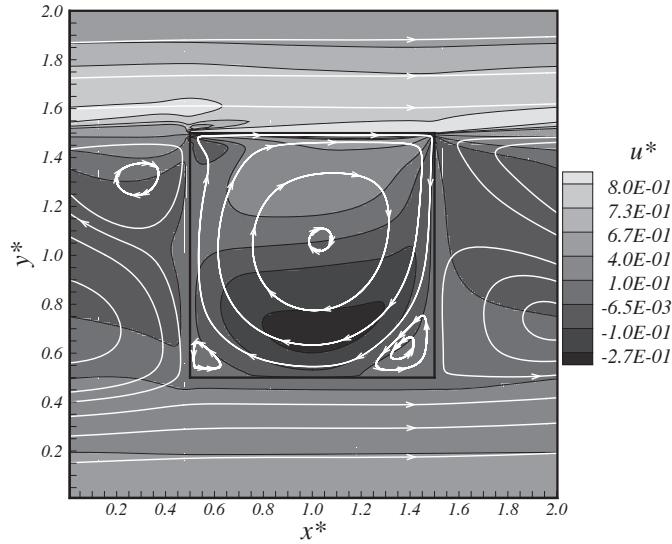


Figura 2.14: Simulação do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante utilizando o método pseudoespectral de Fourier acoplado com o método da fronteira imersa - modelo físico virtual (MARIANO, 2007).

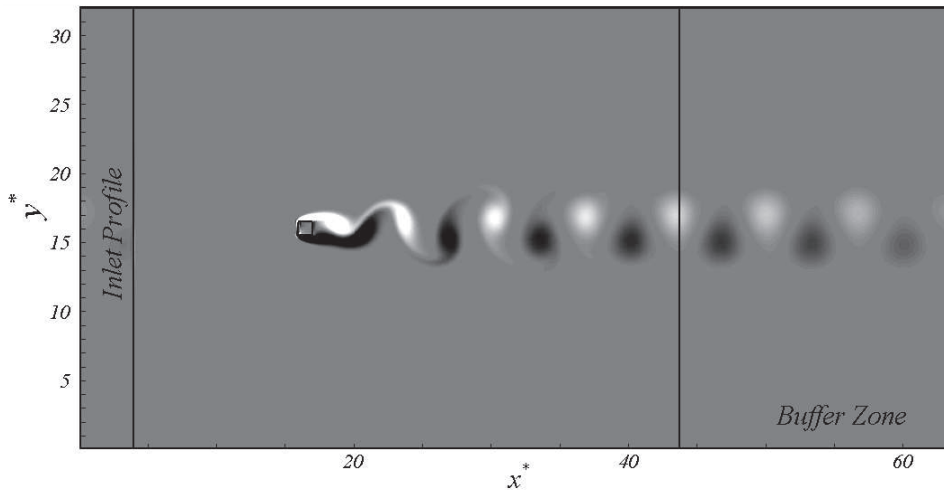


Figura 2.15: Simulação de escoamento sobre um cilindro de base quadrada (MARIANO; MOREIRA; SILVEIRA-NETO, 2010a).

Dando sequência aos desenvolvimentos da metodologia IMERSPEC, o modelo físico virtual foi substituído pelo método da múltipla imposição da força, adaptado do trabalho



de Wang, Fan e Luo (2008). Desta forma obteve-se uma metodologia de alta ordem de convergência, elevada acurácia e alta eficiência computacional. Possibilitou, também, aplicar a metodologia em escoamentos sobre geometrias não cartesianas.

As principais características da metodologia IMERSPEC, resultantes do trabalho de (MARIANO, 2011), são as seguintes: inteiramente pseudoespectral de Fourier; sem acoplamento pressão-velocidade; sem sistema linear; fronteira imersa para a solução de geometrias complexas utilizando de malhas cartesianas; o campo de pressão pode ser recuperado, sem solução de sistemas lineares (para escoamentos incompressíveis), com a mesma ordem de convergência espacial que a velocidade, o erro no balanço de massa é sempre da ordem dos erros de arredondamento da máquina (“round-off errors”).

As características apresentadas acima, são mostradas nos trabalhos de Mariano et al. (2010), Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2009), nos quais resultados de simulações de escoamentos sobre geometrias complexas foram apresentados. Pela primeira vez, foi obtida quarta ordem de taxa de convergência, para problemas suaves utilizando a metodologia de fronteira imersa, que utilizam funções de distribuição de força, tendo em conta a revisão bibliográfica. No trabalho de Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2010b) apresentaram-se simulações de escoamentos bidimensionais sobre uma expansão brusca, os resultados concordam muito bem com os dados experimentais. Também foi mostrado que a metodologia suporta altos números de Reynolds. No trabalho de Mariano, Moreira e Silveira-Neto (2010c) simulou-se a queda livre de partículas em um fluido, mostrando que é possível resolver problemas de interação fluido-estrutura de forma eficiente com a metodologia IMERSPEC.

Ainda, como extensão da metodologia IMERSPEC, uma nova abordagem, em desenvolvimento no MFLab, o método pseudoespectral de Fourier está sendo utilizado para simulações de escoamentos bifásicos, conforme apresentado no trabalho de Villela (2011).

O presente trabalho visa mostrar a viabilidade de usar a metodologia IMERSPEC em escoamentos cisalhantes livres em transição e turbulentos. Para tanto, foi implementada a metodologia IMERSPEC em um novo código 3D, paralelo, com modelagem sub-malha da turbulência. Uma vez desenvolvido o código, será apresentada a verificação utilizando o método de soluções manufaturadas e a validação da metodologia pela simulação de jatos tridimensionais em desenvolvimento espacial e comparação com resultados experimentais

e numéricos de outros autores. Também serão apresentados resultados para turbulência homogênea e isotrópica como forma de validar modelagem sub-malha da turbulência.

# CAPÍTULO III

## METODOLOGIA

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação matemática que modela os problemas envolvidos na dinâmica de escoamentos incompressíveis e Newtonianos, bem como as hipóteses e os métodos numéricos utilizados. Será apresentada uma forma alternativa de modelagem matemática e uma nova metodologia numérica, resultantes do acoplamento entre os métodos pseudoespectral de Fourier (MPEF) com o método da fronteira imersa (MFI). Primeiramente, apresenta-se a formulação base para escoamentos turbulentos. Apresenta-se em seguida a formulação para a modelagem de turbulência. Apresenta-se o método da imposição direta da força (“direct forcing” - DF), desenvolvendo a formulação matemática inerente, bem como os principais detalhes de implementação numérica. No que se refere ao MPEF, procede-se à transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier e estabelece-se o algoritmo básico associado ao método. De posse dos fundamentos teóricos dos dois métodos, desenvolve-se a metodologia proposta, IMERSPEC.

### 3.1 Equações de Navier-Stokes filtradas

As equações de transporte de quantidade de movimento linear para fluidos é o resultado da aplicação da segunda lei de Newton sobre uma partícula de fluido com um referencial euleriano e da aplicação da relação estabelecida por Stokes para as tensões viscosas de fluidos Newtonianos, proporcionais à taxa de deformação do fluido. Estas equações são conhecidas

como equações de Navier-Stokes. O desenvolvimento dessas equações na sua forma completa pode ser encontrado em (WHITE, 1991). Para tanto, é utilizada a notação tensorial de Einstein, na qual os índices repetidos no mesmo termo indicam um somatório. Neste trabalho restringe-se aos escoamentos em regime incompressível, isotérmicos de fluidos Newtonianos, sendo acrescido um termo de força de corpo. Desta forma a equação de balanço de massa é dada pela Eq. 3.1, e as equações de Navier-Stokes pela Eq. 3.2:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{f_i}{\rho}. \quad (3.2)$$

Nas equações de Navier-Stokes as propriedades que caracterizam o fluido são: a massa específica  $\rho$  [ $kg/m^3$ ] e a viscosidade cinemática  $\nu$  [ $m^2/s$ ], e as que caracterizam o escoamento são as componentes do vetor velocidade  $u_i$  [ $m/s$ ], o campo de pressão estática  $p$  [ $N/m^2$ ] e o termo de força  $f_i$  [ $N/m^3$ ] que representa todas as forças de corpo que atuam sobre o escoamento, por exemplo: a força da gravidade, ou uma força eletromagnética.

As equações de Navier-Stokes podem ser adimensionalizadas com base em escalas temporais e espaciais. Utiliza-se como parâmetros uma velocidade de referência  $u_0$  e um comprimento característico  $l$ . Em sua forma adimensional, essas equações dependem somente de um parâmetro adimensional, o número de Reynolds ( $Re$ ) e um parâmetro associado a força de corpo. O número de  $Re$  é particularmente importante, pois ele caracteriza o regime do escoamento, relacionando as forças inerciais com as forças viscosas. Devido à natureza não linear das Eq. 3.2 um aumento do número de Reynolds implica um aumento do número de graus de liberdade presentes no escoamento, tornando o espectro de energia cinética turbulenta cada vez mais largo, o que significa o aumento da importância dos fenômenos relacionados à turbulência.

Considerando uma abordagem tridimensional, as equações acima representam um sistema de quatro equações e quatro incógnitas ou seja, um sistema fechado. Porém a solução dessas equações de forma analítica só é possível em poucos casos muito simples. Uma alternativa é a soluções numérica das equações de Navier-Stokes.

Uma solução numérica das Eqs. 3.1 e 3.2, a princípio, deve possibilitar a solução de forma satisfatória de todas as escalas temporais e espaciais do escoamento. Este processo é conhecido como Simulação Numérica Direta-DNS<sup>1</sup>. Entretanto, devido ao elevado número de graus de liberdade dos escoamentos turbulentos, este tipo de resolução apresenta, quase sempre, custos computacionais proibitivos, sendo viável apenas para escoamentos a números de Reynolds moderados (POPE, 2000). No entanto, para números de Reynolds mais elevados, onde o espectro de energia se torna bastante largo, não é possível refinar a malha de modo a captar todas as escalas espaciais. Nesse momento, torna-se atraente a metodologia de Simulações das Grandes Escalas-LES<sup>2</sup>, separando o escoamento em duas bandas de escalas espaciais e temporais, as resolvidas (grandes escalas) e as modeladas (escalas submalha, as pequenas escalas) através de um processo de filtragem.

As variáveis presentes nas Eqs. 3.1 e 3.2 são decompostas em escalas filtradas  $\bar{\phi}(\vec{x}, t)$  e escalas flutuantes ou submalha  $\phi'(\vec{x}, t)$ :

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}, t) + \phi'(\vec{x}, t). \quad (3.3)$$

A parte filtrada é definida como sendo o produto de convolução da função a ser filtrada com a função filtro  $G(\vec{x}, t)$ , ou seja:

$$\bar{\phi}(\vec{x}, t) = \int \phi(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (3.4)$$

onde a função filtro  $G(\vec{x}, t)$ , é escolhida, na grande maioria dos trabalhos, na forma de um filtro *cut-off*:

$$\bar{G}(|\vec{k}|) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\vec{k}| \leq k_c \\ 0 & \text{se } |\vec{k}| > k_c \end{cases}, \quad (3.5)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor número de onda,  $k_c$  é o tamanho do filtro e  $G(\vec{k})$  é a função filtro no espaço físico.

Nesse ponto é interessante ressaltar que, em metodologias numéricas, o simples fato

---

<sup>1</sup>do inglês Direct Numerical Simulation-DNS

<sup>2</sup>do inglês Large Eddy Simulation-LES

de discretizar ou mesmo resolver as equações em pontos de colocação específicos, como nos métodos espectrais, já caracteriza um processo de filtragem que é intrínseco aos métodos numéricos. Aplicando o processo de filtragem nas Eqs. 3.1 e 3.2 (LESIEUR, 1997), elas assumem as formas:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (3.7)$$

Devido ao processo de filtragem, o termo não linear torna-se o produto filtrado de duas variáveis, impossibilitando a solução direta do sistema. Para resolver esse problema, Germano, Piomelli e Moin (1991), definiram o tensor de Reynolds global pela Eq. 3.8, e aplicando na Eq. 3.7 chega-se a Eq. 3.9 que são conhecidas como as Equações Globais Filtradas para a turbulência (SILVEIRA-NETO; MANSUR; SILVESTRINI, 2002):

$$\bar{\tau}_{ij} \equiv \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{\tau}_{ij} \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (3.9)$$

O tensor  $\bar{\tau}_{ij}$ , definido dessa forma, incorpora os tensores cruzado, o tensor de Leonard e o tensor de Reynolds submalha. O tensor  $\bar{\tau}_{ij}$  é colocado junto ao termo difusivo para ressaltar o papel da modelagem de turbulência no aumento da difusividade das grandezas envolvidas no escoamento, em particular na quantidade de movimento.

A consequência imediata da decomposição das escalas e da transformação das equações de Navier-Stokes nas Equações Globais Filtradas para a turbulência é o aparecimento do tensor de Reynolds Global Submalha, onde o sistema formado pelas equações da conservação de massa filtrada e equações globais filtradas para a turbulência, possui mais incógnitas que equações. Este é o famoso problema de fechamento da turbulência.

### 3.1.1 Modelagem da turbulência

Uma alternativa para resolver o problema de fechamento da turbulência é conhecida por hipótese de Boussinesq, que propôs modelar o tensor submalha de forma análoga ao modelo de Stokes para as tensões viscosas. Para tanto, utilizou-se o conceito de viscosidade turbulenta em analogia à viscosidade molecular. Kolmogorov (1941) propôs uma forma generalizada da hipótese de Boussinesq e esta tem sido a forma utilizada até os dias atuais. Através da hipótese de Boussinesq, propõe-se expressar o tensor de Reynolds submalha ( $\bar{\tau}_{ij}$ ) em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado:

$$\bar{\tau}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{\tau}_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_t\bar{S}_{ij} \quad (3.10)$$

sendo  $\nu_t$  a viscosidade cinemática turbulenta e  $\bar{S}_{ij}$  o tensor deformação filtrado, dado por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.11)$$

Aplicando a hipótese de Boussinesq na Eq. 3.9 tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{kk} \delta_{ij} \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho} \quad (3.12)$$

A ausência de modelagem ou uma modelagem incorreta deste tensor implica ausência ou transferência incorreta de energia entre as estruturas turbilhonares resolvidas e as escalas sub-malhas ou escalas menores que o número de onda de corte que pode ser observado no artigo de Moreira, Mariano e Silveira-Neto (2011) que se encontra em fase de publicação. Observa-se que do divergente do termo envolvendo a energia cinética turbulenta e o delta de Kronecker resulta no gradiente da energia cinética turbulenta:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{3} \bar{\tau}_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\tau}_{kk}}{\partial x_i}, \quad (3.13)$$

o que permite incorporar este termo ao termo da pressão, gerando uma pressão modificada

$(\bar{p}^*)$  na equação modelada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}, \quad (3.14)$$

em que

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{1}{3} \rho \bar{\tau}_{kk}, \quad (3.15)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}, \quad (3.16)$$

onde  $\nu_{ef}$  é a viscosidade efetiva  $\nu_{ef} = \nu + \nu_t$ .

Ressalta-se que a viscosidade turbulenta  $\nu_t$  é propriedade do escoamento e a viscosidade molecular  $\nu$  é uma propriedade do fluido, para fluidos newtonianos. Esta característica implica maior dificuldade de avaliação desta propriedade, uma vez que ela depende da natureza do próprio escoamento, constituindo-se numa forte não linearidade na solução das equações. Trata-se de uma propriedade que depende do espaço e do tempo.

Observa-se que esta equação de transporte para as componentes filtradas da velocidade tem uma natureza fechada, sendo composta de um mesmo número de equações que de incógnitas. No entanto resta ainda o cálculo da viscosidade turbulenta, o que tem papel fundamental dos chamados modelos de turbulência.

Para recuperar o verdadeiro campo de pressão torna-se necessário modelar também a energia cinética turbulenta, o que deve ser feito simultaneamente com o cálculo da viscosidade turbulenta. Quando se resolve as equações da turbulência modeladas, o que se chama de pressão não é a pressão termodinâmica, mas uma pressão modificada pela energia cinética turbulenta.

Uma questão importante em relação à validade desta hipótese de Boussinesq é o fato de que a viscosidade molecular modela a troca de quantidade de movimento entre partículas de fluido, implicando, em nível do contínuo, uma difusão molecular, o que permite modelar macroscopicamente os fenômenos moleculares. Esta separação não ocorre entre as maiores



escalas da turbulência e as escalas dissipativas de Kolmogorov  $k_\eta$  onde se observa um espectro contínuo de energia (Fig. 3.1). A principal carência desta hipótese está no fato da viscosidade turbulenta não levar em conta os efeitos de memória. No entanto, os resultados obtidos com modelos baseados nesta suposição permitem aproximar os resultados teóricos dos resultados experimentais, o que tem justificado a ampla utilização deste tipo de modelo pela comunidade científica. Em Lesieur e Métais (1996), Lesieur, Métais e Comte (2005), encontram-se esta e outras discussões relacionadas aos modelos de turbulência e suas utilizações. Na Fig. 3.1 mostra-se também o número de onda característico  $k_i$ , que caracteriza os turbilhões de tamanho da mesma ordem que a escala integral do escoamento, o qual representa uma banda de números de onda nos quais a maior parte da energia é injetada no espectro.

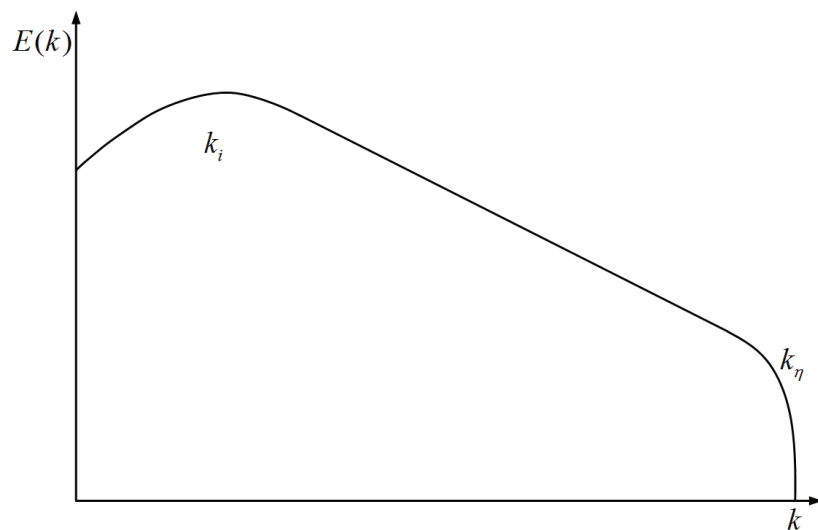


Figura 3.1: Modelo de espectro de energia cinética turbulenta ( $E(k)$ ) em função do número de onda para um escoamento turbulento, em escala log-log.

#### 3.1.1.1 Modelo de Smagorinsky

Proposto por Smagorinsky (1963), trata-se de um modelo que tem por base a hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, sendo a produção de tensões turbulentas igual à dissipação:

$$\wp = \varepsilon, \quad (3.17)$$

onde a produção pode ser escrita em função da taxa de cisalhamento do campo filtrado de velocidade e a dissipação em função da escala de velocidade e do comprimento característicos submalha. A viscosidade turbulenta proposta por Smagorinsky é dada por:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}, \quad (3.18)$$

em que:

$$\Delta = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 \Delta x_i}, \quad (3.19)$$

onde  $C_s$  é a constante de Smagorinsky,  $\Delta$  é o comprimento característico e  $\bar{S}_{ij}$  o tensor taxa de deformação filtrado.

A constante de Smagorinsky deve ser ajustada para cada método numérico e para cada tipo de escoamento. Esta tarefa, na maioria das vezes, é onerosa em termos computacionais, porém na literatura alguns valores dessa constante são de consenso como,  $C_s = 0,16$  para turbulência homogênea isotrópica (LESIEUR; MÉTAIS; COMTE, 2005; SILVA; MÉTAIS, 2002b), e  $C_s = 0,13$  para escoamentos cisalhantes livres (SILVA; MÉTAIS, 2002b). Entretanto, dependendo da aplicação,  $C_s$  pode variar na faixa de  $0,05 \leq C_s \leq 0,30$  (WILCOX, 2006).

O ajuste da constante de proporcionalidade de Smagorinsky não resolve os efeitos negativos em escoamentos parietais, causando uma excessiva viscosidade turbulenta nessa região do escoamento. Nesse modelo não se faz nenhuma consideração com relação à proximidade às paredes, sendo necessário adicionar uma função de amortecimento que compute e leve a viscosidade turbulenta a zero nessas regiões.

As principais desvantagens do modelo de Smagorinsky é que o modelo é puramente de natureza de cascadeamento direto, não permitindo a cascata inversa de energia cinética turbulenta. Além disso, em escoamentos complexos como, por exemplo, em escoamentos rotativos ou em regiões próximas à separação de camada limite, a hipótese de equilíbrio global não é verdadeira. Outra deficiência é que o modelo não é aplicável à transição a turbulência e sim à turbulência completamente desenvolvida. Contudo o modelo de Smagorinsky

representa muito bem o espectro de energia cinética turbulenta e a cascata de energia em escoamentos cisalhantes livres, desde que sua constante seja corretamente ajustada.

### 3.1.1.2 Modelo dinâmico de Smagorinsky

O modelo dinâmico de Smagorinsky (GERMANO; PIOMELLI; MOIN, 1991; LILLY, 1992) é uma evolução do modelo proposto por Smagorinsky (1963), onde a constante de proporcionalidade ( $C_s$ ) é substituída por uma função de proporcionalidade  $C_{sd}(\vec{x}, t)$  que é calculada para cada instante e para cada posição do domínio Eq. 3.21, dinamicamente. Essa função deve ser calculada a partir da solução obtida para o campo de velocidade, a qual é submetida a um filtro teste. O filtro teste, simbolicamente representado por  $(\bar{\bar{\cdot}})$ , possui um número de onda de corte  $k_t$ , o qual deve ter um tamanho superior ao tamanho do filtro dado pela malha  $(\bar{\cdot})$ , o qual possui um número de onda de corte  $k_c$  (Fig. 3.2). Desta forma, todas as variáveis necessárias para processo de cálculo da função de proporcionalidade estão disponíveis:

$$\nu_t = C_{sd}(\vec{x}, t) \Delta^2 \sqrt{2\bar{\bar{S}}_{ij}\bar{\bar{S}}_{ij}}, \quad (3.20)$$

$$C_{sd}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{\langle \bar{\bar{M}}_{ij} \bar{\bar{L}}_{ij} \rangle}{\langle \bar{\bar{M}}_{ij} \bar{\bar{M}}_{ij} \rangle}, \quad (3.21)$$

$$\bar{\bar{L}}_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j}, \quad (3.22)$$

e

$$\bar{\bar{M}}_{ij} = \overline{\bar{\Delta}^2 \|\bar{\bar{S}}\| \bar{\bar{S}}_{ij}} - \overline{\bar{\Delta}^2 \|\bar{\bar{S}}\|} \overline{\bar{\bar{S}}_{ij}}, \quad (3.23)$$

onde a norma do tensor taxa de deformação é  $\|\bar{\bar{S}}\| = \sqrt{2\bar{\bar{S}}_{ij}\bar{\bar{S}}_{ij}}$ .

O símbolo  $\langle \rangle$  refere a qualquer tipo de média. O valor da função de proporcionalidade  $C_{sd}$  negativa é uma fonte de desestabilização de esquemas numéricos. Para contornar este problema o valor da função é limitado de forma que a soma da viscosidade turbulenta com a viscosidade molecular seja maior ou igual a zero. Esse fato não implica comprometimento na fidelidade do modelo, mas operacionalizar apenas parcialmente a transferência inversa de energia. Na modelagem de escoamentos parietais e anisotrópicos a função de pro-

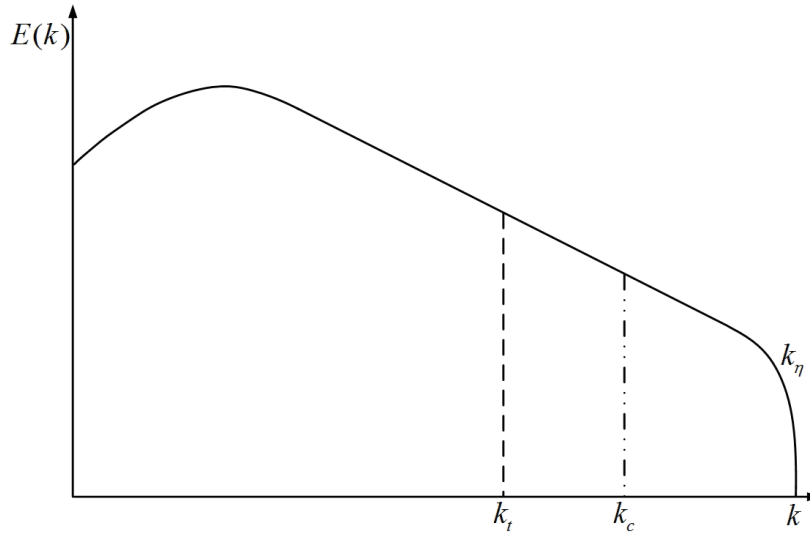


Figura 3.2: Modelo de espectro de energia cinética turbulenta ( $E(k)$ ) em função do número de onda para um escoamento turbulento, em escala log-log.

porcionalidade leva o tensor sub-malha para zero automaticamente, uma vez que o tensor  $L_{ij}$  só depende das velocidades, as quais se anulam nas paredes. Isto é uma grande vantagem, evitando a necessidade de modelos de amortecimento adicionais.

### 3.2 Metodologia da fronteira imersa

A modelagem matemática via fronteira imersa, para facilitar o entendimento, será dividida em três etapas: o tratamento dos domínios euleriano e lagrangiano, a transferência de informação entre esses domínios e, por último, o cálculo da força lagrangiana.

#### 3.2.1 Domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano

O MFI trabalha simultaneamente com dois domínios de cálculo. Um, denominado euleriano ( $\Omega$ ), cartesiano e fixo, onde são resolvidas as equações para o fluido, e o outro é denominado lagrangiano ( $\Gamma$ ), o qual representa a interface imersa no escoamento. No caso de escoamentos bidimensionais, ele é representado por uma linha e, no caso tridimensional, por uma superfície (vide Fig. 3.3). É importante notar que as equações para o fluido são resolvidas em todo o domínio euleriano ( $\Omega$ ), mesmo na sua região delimitada pelo domínio lagrangiano. O domínio lagrangiano ( $\Gamma$ ) representa uma fronteira entre dois tipos de fluidos, ou a fronteira entre um fluido e um sólido.

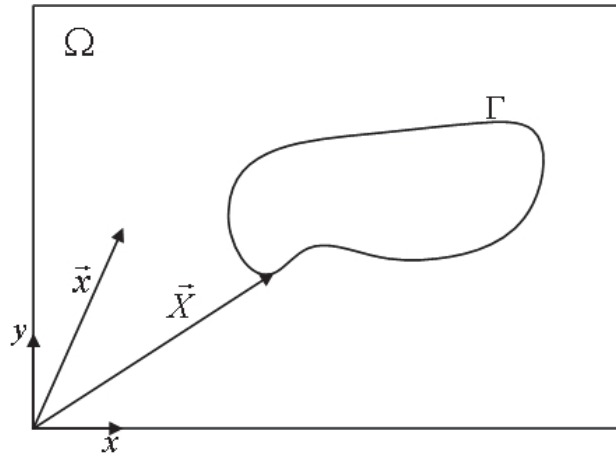


Figura 3.3: Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa, onde  $\vec{x}$  posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano ( $\Omega$ ) e  $\vec{X}$  posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano ( $\Gamma$ ).

Sendo o domínio lagrangiano independente do domínio euleriano, consegue-se modelar e simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando domínios cartesianos para o fluido. No trabalho de Vedovoto (2007), é mostrada a capacidade de se importar qualquer geometria lagrangiana para o interior do domínio euleriano, como ilustra a Fig. 3.4, onde se visualiza um trem de pouso imerso em uma malha cartesiana. Outra vantagem a ser considerada é que, no caso de problemas de interação fluido-estrutura, a malha euleriana é fixa, não havendo necessidade de remalhagem. Mesmo com a estrutura se movendo, apenas a interface lagrangiana se move. O fato de se trabalhar sempre com um domínio cartesiano fixo é a principal vantagem apontada pelos pesquisadores (Lima e Silva; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003; MITTAL; IACCARINO, 2005), quando a comparam com metodologias que utilizam malha não-estruturada, ou metodologias que precisam remalhar o domínio fluido.

O próximo passo a ser compreendido é como a comunicação entre os dois domínios é realizada. Para isso, são consideradas as equações de Navier-Stokes globais da turbulência (Eq. 3.16) e a equação da continuidade (Eq. 3.6), descritas nos itens 3.1 e 3.1.1 válidas no domínio  $\Omega$  e para  $t \geq 0$ , onde  $t$  é o tempo.

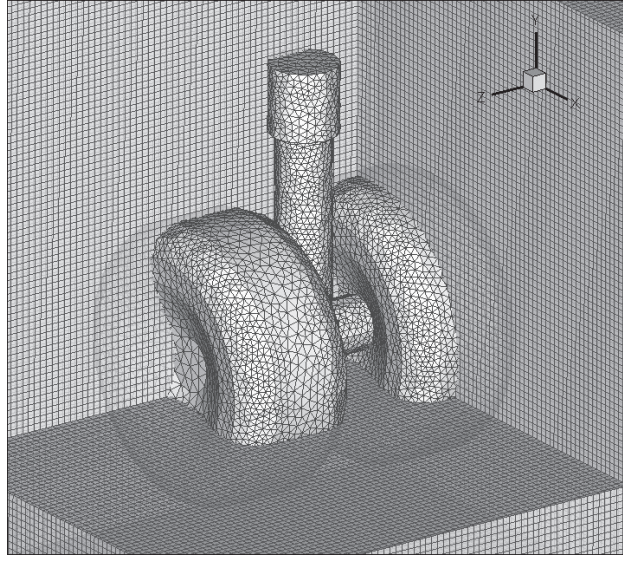


Figura 3.4: Trem de pouso imerso em um domínio euleriano (VEDOVOTO, 2007).

### 3.2.2 Modelo para o acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano

Na Eq. 3.16 aparece o termo  $f_i$ , o qual pode ser considerado, fisicamente, como um termo que representa as forças de campo, como por exemplo, a força gravitacional ou uma força eletromagnética. No caso do MFI, este termo é o responsável por representar a interface imersa no domínio euleriano ( $\Omega$ ). Matematicamente ele é representado pela Eq. 3.24 (ENRIQUEZ-REMIGIO; SILVEIRA-NETO, 2007):

$$f_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases}, \quad (3.24)$$

onde  $F_i(\vec{X}, t)$  é a força lagrangiana definida no domínio  $\Gamma$ .

Esta definição leva a um campo  $f_i(\vec{x}, t)$  descontínuo, o qual pode ser resolvido numericamente apenas quando houver coincidência dos pontos que compõem a interface com algum dos pontos que compõem o domínio fluido. Caso não haja coincidência, o que, para geometrias complexas é muito frequente, deve-se distribuir a função  $F_i(\vec{x}, t)$  sobre a sua vizinhança. Para tanto, faz-se uso da função distribuição de força,  $D_h(\vec{x} - \vec{X})$ , proposta por Peskin (1972), e transcrita aqui pelas Eqs. 3.25, 3.26 e 3.27.

$$f_i(\vec{x}) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_i(\vec{X}) \Delta s^2, \quad (3.25)$$

$$D_h(\vec{x} - \vec{X}) = \frac{1}{h^2} W_g(r_x) W_g(r_y), \quad (3.26)$$

$$W_g(r) = \begin{cases} \frac{3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4|r|^2}}{8} & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ \frac{5-2|r|-\sqrt{-7+12|r|-4|r|^2}}{8} & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 0 & \text{se } 2 < |r| \end{cases}, \quad (3.27)$$

onde,  $r_x = \frac{x-X}{h}$  e  $r_y = \frac{y-Y}{h}$ , sendo  $h$  o espaçamento entre os nós de colocação do domínio euleriano, quando esse é discretizado e  $\Delta s$  é o espaçamento entre os nós discretizados do domínio lagrangiano. Se o problema for tridimensional usa-se  $h^3$ ,  $\Delta s^3$  e  $r_z = \frac{z-Z}{h}$ . A função  $W_g$  é ilustrada na Fig. 3.5. Ela tem a forma similar a uma gaussiana e atende à propriedade de integral unitária no intervalo de  $[-\infty, \infty]$ .

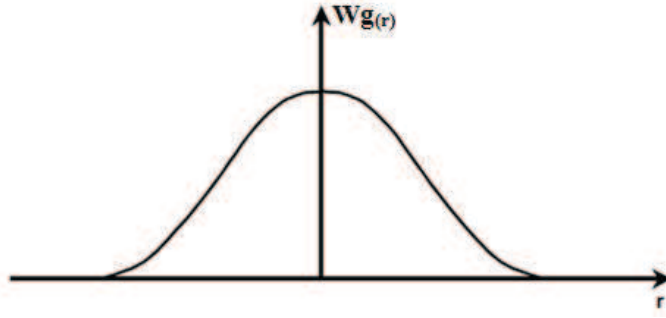


Figura 3.5: Função distribuição do tipo gaussiana  $W_g$  (Eq. 3.27) proposta por Peskin (1972).

O campo de força euleriano,  $f_i(\vec{x}, t)$ , é nulo em todo domínio, exceto quando se aproxima dos pontos lagrangianos, onde ele passa a modelar virtualmente a presença da membrana imersa, simulando a presença de um corpo ou a interface entre dois fluidos. Com isso não é necessário fazer uma adaptação da malha euleriana para localizar a interface (Lima e Silva; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003).

Uma vez calculado o campo de força lagrangiano,  $F_i(\vec{X}, t)$ , este pode ser distribuído e, assim, transmitir a informação da presença da geometria para a malha euleriana.

No presente trabalho, os processos de interpolação e distribuição são desnecessários pois trabalha-se sempre com a coincidência entre os pontos dos domínios Eulerianos e Lagrangianos. Um estudo detalhado sobre a utilização de diversos esquemas de interpolação e distribuição pode ser encontrado em Mariano (2011).

### 3.2.3 Cálculo da força lagrangiana

No contexto da explicação da metodologia da fronteira imersa, é necessário descrever o modelo para o cálculo da força lagrangiana,  $F_i(\vec{X}, t)$ . Neste ponto também existem variações de tipos de métodos de fronteira imersa, porém o presente trabalho ficará restrito ao método da imposição direta da força (“Direct Forcing” - DF) proposto por Uhlmann (2005) e também apresentado nos trabalhos de Shu, Liu e Chew (2007), Su, Lai e Lin (2007) e Wang, Fan e Luo (2008), entre outros. Todos esses apresentam diferentes tipos de discretização espacial e temporal das equações de Navier-Stokes, porém o conceito do modelo DF é sempre o mesmo. No presente trabalho, é aplicada uma nova forma desse modelo para a metodologia IMERSPEC proposta Mariano (2011).

Primeiramente, determina-se o campo de força euleriano, isolando  $f_i$  na Eq. 3.16:

$$\bar{f}_i(\vec{x}, t) = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}^*}{\rho \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.28)$$

ou ainda,

$$\bar{f}_i(\vec{x}, t) = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + rhs_i^t, \quad (3.29)$$

em que,

$$rhs_i^t(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}^*}{\rho \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.30)$$

Como a Eq. 3.28 foi desenvolvida a partir da hipótese do contínuo e o domínio  $\Gamma$  está contido em  $\Omega$ , pode-se definir a força lagrangiana através da Eq. 3.31:

$$\bar{F}_i(\vec{X}, t) = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_j} (\bar{U}_i \bar{U}_j) + \frac{\partial \bar{P}^*}{\rho \partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_i} \right) \right], \quad (3.31)$$

onde as variáveis maiúsculas dizem respeito ao domínio lagrangiano. A Eq. 3.31 representa a segunda lei de Newton aplicada às partículas de fluido que estão localizadas na interface fluido-fluido ou fluido-sólido. Discretizando a derivada temporal da Eq. 3.31 através de um



esquema de Euler explícito (WANG; FAN; LUO, 2008), obtém-se:

$$\bar{F}_i(\vec{X}, t) = \frac{\bar{U}_i^{t+\Delta t} - \bar{U}_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (3.32)$$

onde

$$RHS_i(\vec{X}, t) = \frac{\partial}{\partial X_j} (\bar{U}_i \bar{U}_j) + \frac{\partial \bar{P}^*}{\rho \partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_i} \right) \right], \quad (3.33)$$

e  $\Delta t$  é o passo de tempo.

O método “direct forcing” consiste em somar e subtrair um parâmetro temporário  $U_i^*$  no operador discretizado do tempo (WANG; FAN; LUO, 2008), ou seja:

$$\bar{F}_i(\vec{X}, t) = \frac{\bar{U}_i^{t+\Delta t} - \bar{U}_i^* + \bar{U}_i^* - \bar{U}_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t. \quad (3.34)$$

O próximo passo é decompor a Eq. 3.34 em duas outras (Eqs. 3.35 e 3.36), no mesmo passo de tempo:

$$\frac{\bar{U}_i^* - \bar{U}_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t = 0, \quad (3.35)$$

$$\bar{F}_i(\vec{X}, t) = \frac{\bar{U}_i^{t+\Delta t} - \bar{U}_i^*}{\Delta t}. \quad (3.36)$$

A Eq. 3.35 é definida tanto no domínio lagrangiano, quanto no domínio euleriano. Desta forma, consegue-se determinar o parâmetro temporário  $\bar{u}_i^*$  resolvendo-se a Eq. 3.37,

$$\frac{\bar{u}_i^* - \bar{u}_i^t}{\Delta t} + rhs_i^t = 0. \quad (3.37)$$

Fazendo uma analogia com um método preditor-corretor (CHORIN, 1968), este parâmetro temporário  $\bar{u}_i^*$ , pode ser entendido como um campo de velocidade predita, ou estimada, ou seja, a Eq. 3.37 é a equação de Navier-Stokes (Eq. 3.16) sem a influência do termo fonte  $f_i$ . Em um segundo momento, após obter o termo fonte, faz-se a “correção” do campo  $\bar{u}_i^*$ , usando-se a Eq. 3.38, isto é, o campo de velocidade euleriano recebe a informação do campo

de força:

$$\bar{u}_i^{t+\Delta t} = \bar{u}_i^* + \Delta t \bar{f}_i. \quad (3.38)$$

A Eq. 3.38 é derivada da Eq. 3.36, reescrita para o domínio euleriano.

A Eq. 3.36 requer o cálculo de  $\bar{U}_i^*$ , o que vem do processo de transferência de informação do domínio euleriano para o domínio lagrangiano. Para isso, é utilizada, ou a Eq. 3.39, quando há coincidência entre os pontos do domínio lagrangiano com os pontos do domínio euleriano, ou a função de interpolação, dada pela Eq. 3.40:

$$\bar{U}_i^*(\vec{X}, t) = \begin{cases} \bar{u}_i^*(\vec{x}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases}, \quad (3.39)$$

$$\bar{U}_i^* = \sum_{\Omega} \bar{u}_i^* D_h(x_i - X_i) h^2. \quad (3.40)$$

A função de interpolação pode ser entendida como um processo oposto ao de distribuição, isto é, enquanto na operação de distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os vizinhos eulerianos, na operação de interpolação transfere-se a informação dos pontos eulerianos vizinhos para um ponto lagrangiano. Essas transferências são ponderadas pela distância entre esses pontos,  $|x_i - X_i|$ , através da função  $D_h$ , dada por Eq. 3.27.

O termo  $\bar{U}_i^{t+\Delta t}$  que aparece na Eq. 3.36, diz respeito à velocidade da fronteira imersa no tempo  $t + \Delta t$ . Normalmente essa velocidade é conhecida para problemas para os quais é possível especificar  $\bar{U}_i^{t+\Delta t}$ . Para problemas de interação fluido-fluido, ou fluido-estrutura,  $\bar{U}_i^{t+\Delta t} = \bar{U}_{FI}$ , onde  $\bar{U}_{FI}$  deve ser obtida do modelo que rege o movimento da interface. Por exemplo, utilizando a abordagem particionada para a solução de problemas de interação fluido-estrutura (CAMPREGHER, 2005), primeiramente, resolve-se as equações que regem o movimento da estrutura, obtendo-se a nova posição e a velocidade estrutural. Esta velocidade é, então, passada para o cálculo da força lagrangiana.

### 3.2.4 Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de imposição direta da força

A fim de facilitar o entendimento desta metodologia, apresenta-se um resumo das equações descritas até agora, na sequência em que elas são utilizadas no algoritmo implementado:

$$\frac{\bar{u}_i^* - \bar{u}_i^t}{\Delta t} = -\frac{\rho \partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\rho \partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.41)$$

$$\bar{U}_i^*(\vec{X}, t) = \sum_{\Omega} \bar{u}_i^* D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2, \quad (3.42)$$

$$\bar{F}_i(\vec{X}, t) = \frac{\bar{U}_{FI} - \bar{U}_i^*}{\Delta t}, \quad (3.43)$$

$$\bar{f}_i(\vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) \bar{F}_i(\vec{X}, t) \Delta S^2, \quad (3.44)$$

$$\bar{u}_i^{t+\Delta t} = \bar{u}_i^* + \Delta t \bar{f}_i. \quad (3.45)$$

A Eq. 3.41 serve para calcular o parâmetro temporário,  $\bar{u}_i^*$ . Para facilitar o entendimento, a derivada temporal discretizada foi aproximada através do esquema de Euler de primeira ordem. Ela pode ser discretizada de outra maneira, como, por exemplo, em Uhlmann (2005) e Wang, Fan e Luo (2008) que utilizaram um esquema de Runge-Kutta de terceira ordem de convergência temporal. Su, Lai e Lin (2007) usaram um esquema de Crank-Nicolson. No presente trabalho é utilizado um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal otimizado (ALLAMPALLI et al., 2009), o qual será explicado com mais detalhes no decorrer deste capítulo.

A Eq. 3.42 modela o processo de transferência de informação do domínio euleriano  $\bar{u}_i^*$ , para o domínio lagrangiano, sendo que no caso mostrado, os pontos eulerianos não coincidem com os pontos lagrangianos. Assim faz-se necessário o uso de interpolação. A Eq. 3.43 fornece a força lagrangiana,  $\bar{F}_i(\vec{x}, t)$ , onde  $\bar{U}_{FI}$  é a velocidade que a fronteira deve ter (imposta ou fornecida por um modelo estrutural). A Eq. 3.44 é o processo de distribuição da força  $\bar{F}_i(\vec{x}, t)$ , que pertence ao domínio lagrangiano, para a obtenção de  $\bar{f}_i(\vec{x}, t)$ , definida em todo domínio euleriano. Caso haja coincidência entre os pontos lagrangianos e eulerianos, a interpolação e a distribuição é desnecessária, sendo a transferência de informação entre os

domínios dada pela aplicação da Eq. 3.24.

Na Eq. 3.45 é feita a atualização do campo de velocidade, ou seja, nesta etapa do algoritmo o “campo de velocidade estimado” recebe a informação da fronteira, ou seja, ele recebe a influência do campo de força euleriano ( $\bar{f}_i$ ). Também nesta etapa o operador temporal foi discretizado através de um esquema de Euler de primeira ordem de convergência temporal, apenas para entendimento do algoritmo.

Cabe ressaltar que este é um algoritmo simplificado da metodologia da fronteira imersa usando o modelo DF (“direct-forcing”). Ainda falta o cálculo do campo de pressão de forma a utilizar a equação da continuidade (Eq. 3.6). Quando se resolvem as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis no espaço físico, é necessária a resolução da equação de Poisson para a pressão (FERZIGER; PERIC, 2001). Entretanto, como no presente trabalho é utilizado o método pseudoespectral de Fourier que permite aplicar o operador projeção no campo de velocidade. desta forma, não é necessário calcular a pressão no processo de integração espaço-temporal, assim, a pressão passar a ser obtida através de pós-processamento. Será visto que a projeção do campo de velocidade também garante o balanço de massa.

### 3.2.5 *Múltipla imposição da força (Multi-Direct Forcing - MDF)*

A velocidade do fluido sobre a interface imersa, teoricamente, deveria ser igual a  $\bar{U}_{FI}$  (velocidade que a fronteira deve ter). Porém, devido aos processos de discretização temporal e espacial, além dos processos de interpolação e distribuição, essa condição não é absolutamente satisfeita. Nos estudos de Wang, Fan e Luo (2008), é proposto um processo iterativo para o cálculo da força e da velocidade corrigida, denominado “Multi-Direct Forcing”, onde se busca melhorar a precisão deste cálculo. Para isto, na Eq. 3.45, faz-se:

$$\bar{u}_i^{t+\Delta t} = \bar{u}_i^{it}, \quad (3.46)$$

onde  $it$  é o número da iteração dentro do processo iterativo.

O campo de velocidade  $\bar{u}_i^{it}$ , antes de avançar para o próximo passo de tempo, é nova-

mente interpolado, ou seja, a Eq. 3.42 é resolvida novamente:

$$\bar{U}_i^{it} = \sum_{\Omega} \bar{u}_i^{it} D_h(x_i - X_i) h^2. \quad (3.47)$$

Assim, obtém-se um novo campo de força  $\bar{f}_i^{it}$  (distribuição de  $\bar{F}_i^{it}$ , obtido da Eq. 3.43) do qual se obtém novamente:

$$\bar{u}_i^{it+1} = \bar{u}_i^{it} + \Delta t \bar{f}_i^{it}, \quad (3.48)$$

o qual se aproxima ainda mais da condição de não deslizamento. Assim, repetindo este procedimento de  $it = 1$  até  $it = NL$ , onde  $NL$  é o número total de iterações, tem-se que:

$$\bar{U}_{FI} - \bar{U}_i^{it+1} \rightarrow 0. \quad (3.49)$$

Com isso, a força lagrangiana da  $N$ -ésima iteração tende a zero. Wang, Fan e Luo (2008) utilizaram um número de iterações  $NL$  fixo. No presente trabalho, optou-se por utilizar a máxima diferença das forças lagrangianas entre duas iterações consecutivas, adimensionalizadas pela diferença entre as forças calculadas nas duas primeiras iterações, ou seja:

$$\frac{\max |\bar{F}_i^{it+1} - \bar{F}_i^{it}|}{\max |\bar{F}_i^1 - \bar{F}_i^2|} \leq \varepsilon. \quad (3.50)$$

Utilizando a Eq. 3.50 o processo iterativo fica independente de  $NL$ . Em princípio, não se sabe qual o número de iterações necessário para se obter um resultado fiel a física, pois em determinados momentos, principalmente no início de cada simulação ou mesmo quando o escoamento está na fase transiente, são necessárias mais iterações para representar bem a fronteira. Já na etapa em que o escoamento está em regime permanente não se precisa de tantas iterações. Por outro lado, a Eq. 3.50 fica dependente da máxima diferença entre as velocidades lagrangianas em iterações consecutivas, ou seja, quando a velocidade tender a não se alterar mais entre duas iterações consecutivas, o processo iterativo é finalizado.

Para calcular quantidades que dependem da força sobre o corpo, por exemplo, forças de

arrasto e de sustentação sobre corpos imersos em escoamentos e para problemas de interação fluido-estrutura, em que o movimento da estrutura depende da força gerada pelo fluido utiliza-se o somatório de todas as  $NL$  iterações:

$$\bar{F}c_i = - \sum_{it=1}^{NL} \int_{\Gamma} \bar{F}_i(\vec{X}, t) ds. \quad (3.51)$$

A integral apresentada na Eq. 3.51, normalmente, é substituída pelo somatório da força lagrangiana (Eq. 3.43), dado em cada ponto do domínio lagrangiano, isto é:

$$\bar{F}c_i = - \sum_{it=1}^{NL} \sum_{p=1}^{Np} \bar{F}_i^p(\vec{X}, t) \Delta s, \quad (3.52)$$

onde  $Np$  é o número de pontos lagrangianos utilizados para a discretização da interface imersa  $it$  representa o número da iteração do imposição direta da força e o índice  $p$  representa cada um dos pontos lagrangianos que compõem a interface.

### 3.3 Transformação das equações de Navier-Stokes para espaço espectral

Nesta seção é apresentada a transformação das Eqs. 3.6 e 3.16 para o espaço espectral ou espaço de Fourier (CANUTO et al., 2006). Para proceder essa transformação, as variáveis primitivas (velocidade e pressão) passam por um processo de transformação linear, chamado de transformada de Fourier (BRIGGS; HENSON, 1995). As transformadas direta e inversa de Fourier de uma função qualquer, em três dimensões, são dadas por:

$$\hat{\phi}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}, t) e^{-\iota 2\pi \vec{k} \vec{x}} d\vec{x}, \quad (3.53)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\vec{k}, t) e^{\iota 2\pi \vec{k} \vec{x}} d\vec{k}. \quad (3.54)$$

Nestas equações  $\hat{\phi}(\vec{k}, t)$  é a função transformada e  $\vec{k}$  é o vetor número de onda, parâmetro de transformação espacial de Fourier e  $\iota = \sqrt{-1}$  é o número imaginário. O campo transformado,  $\hat{\phi}(\vec{k}, t)$ , está no chamado espaço de Fourier ou espaço espectral (simbolizado por  $\hat{\phantom{x}}$ ). Em contrapartida, o campo não transformado está no espaço físico.

A grande vantagem dessa transformação é que algumas operações matemáticas são simplificadas no domínio espectral, por exemplo, a operação de derivada. Outra vantagem é que, normalmente, uma equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária. Por outro lado, outras operações tornam-se mais complicadas, como o produto entre duas funções. No livro de Briggs e Henson (1995), essas propriedades são apresentadas em detalhes.

A transformação do modelo diferencial (Eqs. 3.6 e 3.16) para o espaço espectral pode ser encontrada com detalhes em Moreira (2007), porém essa transformação será apresentada de forma breve. Aplica-se a transformada de Fourier sobre a equação da continuidade (Eq. 3.6):

$$\widehat{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}} = 0. \quad (3.55)$$

Então, aplicando a propriedade das transformadas de Fourier sobre a derivada da Eq. 3.6, obtém-se:

$$\iota k_i \widehat{\bar{u}_i} = 0. \quad (3.56)$$

Da geometria analítica sabe-se que, se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então eles devem ser ortogonais entre si. Portanto, observando a Eq. 3.56, tem-se que o vetor número de onda,  $\vec{k}$ , é ortogonal ao campo de velocidade transformada  $\widehat{\bar{u}_i}(\vec{k}, t)$ . Define-se, então, um plano perpendicular ao vetor número de onda, denominado plano  $\pi$  ou plano de divergência nula, no qual está contido o campo de velocidade transformado de divergente nulo. Portanto, o vetor velocidade transformado,  $\widehat{\bar{u}_i}(\vec{k}, t)$ , está contido no plano  $\pi$ , conforme ilustrado na Fig. 3.6.

Transformando a Eq. 3.16 para o espaço de Fourier, aplicando as propriedades definidas em Briggs e Henson (1995), tem-se:

$$\frac{\partial \widehat{\bar{u}_i}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{\bar{p}^*} - \iota k_j (\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}) + \iota k_j \left[ \widehat{2\nu_{ef} \bar{S}_{ij}} \right] + \frac{\widehat{\bar{f}_i}}{\rho}. \quad (3.57)$$

Deve ficar claro que a transformada de Fourier é aplicada sobre as funções espaciais, ou

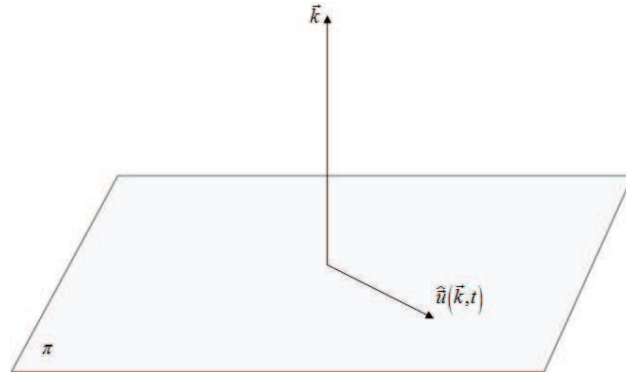


Figura 3.6: Definição do plano  $\pi$ .

seja, as Eqs. 3.6 e 3.16 passam a ser definidas no domínio dos números de onda,  $\vec{k}$ , diferenciando de problemas relacionados a análise de sinais, em que a transformada, normalmente, é aplicada sobre o tempo, recaindo no domínio da frequência.

A Eq. 3.57 pode ser manipulada matematicamente, a fim de desacoplar o campo de pressão do campo de velocidade. Para entender esse procedimento, cada um dos termos transformados são relacionados com o plano  $\pi$  e, posteriormente, é aplicado o operador projeção sobre esses termos.

O termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear,  $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}$  pertence ao plano  $\pi$ . O gradiente de pressão,  $\iota k_i \hat{p}^*$ , é colinear ao vetor número de onda,  $\vec{k}$ , sendo, portanto ortogonal ao plano  $\pi$ . E nada se pode afirmar sobre a posição do termo fonte em relação ao plano  $\pi$ .

Os termos não lineares advectivo e difusivo no espaço de Fourier, (Eq. 3.57), aparecem sob uma transformada do produto entre duas funções. No espaço de Fourier, a solução desses termos passa por resolver uma integral de convolução para cada um deles, e assim não se sabe quais são as posições dos termos não lineares em relação ao plano  $\pi$ . Desta forma a Eq. 3.57, torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho} \iota k_i \hat{p}^* - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_i(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \\ & + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \hat{u}_i + (k_i - r_i) \hat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} + \frac{\hat{f}_i}{\rho}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde  $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$ , fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda  $\vec{k}$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ .



Manipulando os termos da Eq. 3.58, mostram-se as posições conhecidas de cada termo em relação ao plano  $\pi$

$$\underbrace{\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t}}_{\in \pi} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p}^*}_{\perp \pi} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} - \frac{\widehat{f}_i}{\rho} = 0. \quad (3.59)$$

Analisando a Eq. 3.59 não se sabe *a priori* em que posição se encontram os termos não-lineares advectivo e difusivo e o termo fonte em relação ao plano  $\pi$ . No entanto como o termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear pertence ao plano  $\pi$ , a soma entre os demais termos também deve pertencer ao plano  $\pi$ . Isto se deve ao fato que, se a soma de dois vetores é nula, então eles devem ser colineares. Assim conclui-se que:

$$\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p}^* + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} - \frac{\widehat{f}_i}{\rho} \in \pi. \quad (3.60)$$

O próximo passo é definir o tensor projeção:

$$\wp_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (3.61)$$

onde  $\delta_{ij}$  é tensor delta de Kronecker, dado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.62)$$

O tensor projeção,  $\wp_{ij}$ , projeta qualquer vetor,  $a_i$ , sobre o plano  $\pi$  (SILVEIRA-NETO, 2001). Para verificar esta propriedade, toma-se um vetor  $a_i$  qualquer, e faz-se a projeção dele, obtendo-se o seguinte:

$$\wp_{ij} a_j = a_j \delta_{ij} - a_j \frac{k_i k_j}{k^2} = a_i - a_j k_j \frac{k_i}{k^2} = a_i^p. \quad (3.63)$$

onde  $a_i^p$  é o vetor  $a_i$  projetado por  $\wp_{ij}$ . Fazendo-se o produto escalar da projeção,  $a_i^p$ , pelo vetor número de onda,  $k_i$ , tem-se:

$$a_i^p k_i = a_i k_i - a_j k_j \frac{k_i k_i}{k^2} = 0, \quad (3.64)$$

logo, verifica-se que o tensor  $\wp_{ij}$  projeta um vetor  $a_i$  qualquer sobre o plano  $\pi$ . De posse da definição do tensor projeção, e aplicando-o na Eq. 3.60, e sabendo que o termo  $\iota k_i \widehat{p}^*$  é ortogonal a  $\pi$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p}^* &= \frac{\widehat{f}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \\ &= \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \\ &= \wp_{im} \left[ -\frac{\widehat{f}_m}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\ &\quad \left. - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_m + (k_m - r_m) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nota-se, na Eq. 3.65, que o termo referente ao gradiente de pressão no espaço de Fourier,  $\iota k_i \widehat{p}^*$ , desaparece no lado direito do sinal de igualdade, pois a projeção, sobre um dado plano, de um vetor ortogonal a esse plano é nula. Este resultado é ilustrado na Fig. 3.7 que mostra a representação geométrica dos termos da Eq. 3.58 em relação ao plano  $\pi$ . Nela têm-se os vetores do termo fonte e dos termos não lineares advectivo e difusivo projetados sobre o plano  $\pi$ . Já o vetor que representa o gradiente de pressão desaparece quando projetado. Este procedimento faz o desacoplamento dos campos de pressão e das velocidades das equações de Navier-Stokes incompressíveis.

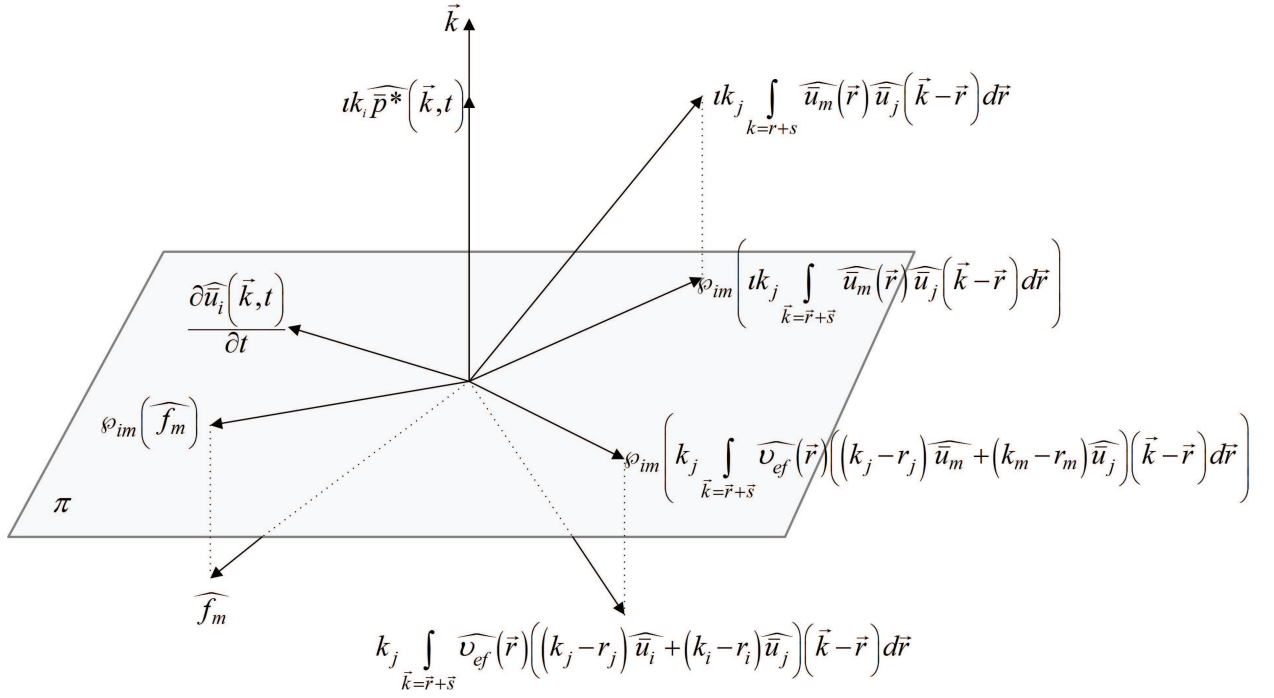


Figura 3.7: Representação dos termos da Eq. 3.58 no espaço de Fourier e sua apresentação em relação ao plano  $\pi$ .

Assim, a Eq. 3.58 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \widehat{u}_i(\vec{k}, t)}{\partial t} = & \varphi_{im} \left\{ -\iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\
 & + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) (k_j - r_j) \widehat{u}_m(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \\
 & \left. + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) (k_m - r_m) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} + \frac{\widehat{f}_m}{\rho} \right\}. \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Algumas observações devem ser feitas a respeito da Eq. 3.66. A primeira é a sua independência do termo de pressão, o qual foi substituído pela projeção dos termos fonte, advectivo e difusivo. Comparando com esquemas clássicos, esse procedimento equivale a substituir a solução de uma equação de Poisson por um produto vetor-matriz, que, em termos numéricos, é mais barato e mais acurado. Em termos físicos, ambos têm a mesma função de garantir o balanço da massa.

Uma segunda observação é a presença de integrais de convolução, necessárias para a resolução dos termos não lineares advectivo e difusivo, que rigorosamente, devem ser resolvi-

das através de algum esquema de integração numérica. Caso isso seja feito, provavelmente, o ganho computacional obtido pela operação de projeção seria perdido na resolução dessas integrais. Todavia, como será visto posteriormente, essas integrais de convolução são substituídas pelo método pseudoespectral, tornando-se a resolução da Eq. 3.66 muito atrativa quando comparada com os métodos clássicos.

Desta forma, quando se trabalha com as equações globais filtradas para a turbulência no espaço de Fourier (Eq. 3.66), elas não dependem do campo de pressão após a projeção, diferentemente do que acontece no espaço físico. Portanto, o método da projeção minimiza o custo dos cálculos para a resolução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, já que não é necessário trabalhar com o acoplamento pressão velocidade. Assim a solução de sistemas lineares é eliminada, o que, normalmente, demanda o maior esforço computacional nas metodologias convencionais. Por outro lado a acurácia é muito alta, chegando à ordens dos erros de arredondamento de máquina, uma vez que todas as derivadas são avaliadas na forma de produtos. As integrais de convolução que aparecem no processo de transformação dos termos não lineares são computacionalmente caras de serem realizadas. Para contornar esse problema, a metodologia pseudoespectral será apresentada.

### 3.3.1 Recuperação do campo de pressão

Apesar do campo de pressão não aparecer nas equações de Navier-Stokes transformadas (Eq. 3.66), ele pode ser recuperado por meio de um pós-processamento a partir da Eq. 3.65. Isolando-se o termo referente ao gradiente de pressão, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p}^* &= \\
&= \wp_{im} \left[ -\frac{\widehat{f}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\
&\quad - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \left. \right] \\
&\quad - I_{im} \left[ -\frac{\widehat{f}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\
&\quad - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \left. \right]. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

observa-se que o tensor identidade ( $I_{im}$ ), foi introduzido por conveniência, sem alterar a Eq.

3.67. Colocando em evidência os termos entre colchetes; tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p}^* &= (\wp_{im} - I_{im}) \left[ -\frac{\widehat{f}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\
&\quad - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \left. \right].
\end{aligned}$$

Fazendo o produto escalar da Eq. 3.68 pelo vetor número de onda  $k_i$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \iota k^2 \widehat{p}^* &= (\wp_{im} - I_{im}) k_i \left[ -\frac{\widehat{f}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\
&\quad - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \left. \right]. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Observando que:

$$(\wp_{im} - I_{im}) k_i = \left( \delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} - I_{im} \right) k_i = -k_m, \tag{3.69}$$

então substituindo a equação Eq. 3.69 na Eq. 3.68 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \iota k^2 \widehat{p}^* &= k_m \left[ \frac{\widehat{f}_i}{\rho} - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\ &\quad \left. + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Assim, o campo de pressão pode ser obtido usando a Eq. 3.71:

$$\begin{aligned} \widehat{p}^* &= \frac{k_m \rho}{\iota k^2} \left[ \frac{\widehat{f}_i}{\rho} - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_i(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right. \\ &\quad \left. + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu}_{ef}(\vec{r}) [(k_j - r_j) \widehat{u}_i + (k_i - r_i) \widehat{u}_j] (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

aplicando a operação transformada inversa (Eq. 3.54) sobre  $\widehat{p}^*(\vec{k}, t)$ , obtém-se o campo de pressão modificado pela energia cinética turbulenta ( $\kappa$ ) no espaço físico.

### 3.3.2 Metodologia pseudoespectral de Fourier

A principal ideia do método pseudoespectral de Fourier (MPEF) consiste em não calcular diretamente os termos não lineares advectivo e difusivo da Eq. 3.66 no espaço de Fourier, o que implicaria na resolução de integrais de convolução. A solução de uma integral de convolução é muito cara computacionalmente. Para contornar esse problema, todas as derivadas espaciais dos termos não lineares advectivos e difusivos são calculadas no espaço de Fourier e são transformadas para o espaço físico onde todos os produtos são realizados.

O método pseudoespectral de Fourier consiste em realizar o produto de duas funções no espaço físico e transformar o produto já realizado para o espaço de Fourier, ao invés de transformar as duas funções separadamente e realizar a integral de convolução no espaço de Fourier. A vantagem desse processo é não ter que resolver a integral de convolução, sem, no entanto, perder a precisão do método espectral. A manutenção da alta precisão do método espectral de Fourier se dá pela possibilidade de se fazer os produtos no espaço físico e de se fazer o cálculo das derivadas no espaço espectral. A desvantagem do método pseudoespectral

é ter que fazer as transformadas direta e inversa de Fourier a cada passo de tempo. Para ilustrar o método pseudo espectral, toma-se duas funções  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  e  $\vec{h}(\vec{x}, t)$ . O produto dessas duas funções no espaço físico resulta em uma terceira função  $\vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{g}(\vec{x}, t) \vec{h}(\vec{x}, t)$ . No espaço espectral esse produto é dado por:

$$\widehat{\vec{f}}(\vec{k}, t) = \widehat{\vec{g}\vec{h}}(\vec{k}, t) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\vec{g}}(\vec{r}) \widehat{\vec{h}}(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r}. \quad (3.72)$$

Outra forma de calcular esse produto é efetuar o produto no espaço físico,  $\vec{g}$  por  $\vec{h}$  gerando uma nova função  $\vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{g}(\vec{x}, t) \vec{h}(\vec{x}, t)$ , a qual é então transformada para o espaço de Fourier:

$$\widehat{\vec{f}}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(\vec{x}, t) e^{-i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}. \quad (3.73)$$

A transformada de  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  (Eq. 3.73) é equivalente a fazer a integral de convolução da Eq. 3.72. Por consequência, a transformada de uma derivada de um produto é dada por:

$$\frac{\partial(\vec{g}\vec{h})}{\partial x_i} = i k_i \widehat{\vec{g}\vec{h}} = i k_i \widehat{\vec{f}}. \quad (3.74)$$

Assim, sempre que se tiver  $\widehat{\vec{g}}(\vec{k}, t)$  e  $\widehat{\vec{h}}(\vec{k}, t)$  no espaço de Fourier, para calcular a derivada de um produto, faz-se a transformada inversa para o espaço físico, obtendo-se  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  e  $\vec{h}(\vec{x}, t)$ .

Faz-se então o produto  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  por  $\vec{h}(\vec{x}, t)$  obtendo-se  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ , transforma-se  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  para o espaço de Fourier e obtendo-se  $\widehat{\vec{f}}(\vec{k}, t)$ , em consequência obtêm-se a derivada  $i k_i \widehat{\vec{f}}(\vec{k}, t)$ .

### 3.3.3 DFT e FFT

Para finalizar a compreensão sobre o método pseudoespectral de Fourier alguns detalhes numéricos devem ser comentados. A versão discreta da transformada de Fourier é denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT), e é definida na Eq. 3.75 (BRIGGS;

HENSON, 1995):

$$\hat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}, \quad (3.75)$$

onde  $\phi_n$  é o campo de velocidade discretizado com  $N$  nós de colocação, os quais representam os nós da malha;  $n$  fornece a posição  $x_n$  dos nós de colocação,  $x_n = n\Delta x$ ;  $\Delta x$  é o espaçamento entre dois nós de colocação; e  $k$  é o número de onda (Eq. 3.77).

A Eq. 3.75 é a aproximação numérica da transformada de Fourier, a qual é aplicada sobre os nós de colocação de um domínio discretizado. Deve-se notar que para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada necessariamente deve ser periódica, ou seja:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + \vec{L}, t), \quad (3.76)$$

onde  $\vec{L}$  é o comprimento do domínio na direção considerada. As rotinas *DFT* impõem automaticamente a condição de periodicidade. Esta propriedade é a grande restrição da metodologia pseudoespectral de Fourier limitando o seu uso a problemas com condições de contorno periódicas. Entretanto, com a fusão da metodologia da fronteira-imersa com a MPEF, busca-se resolver esta restrição.

Em termos de programação, para se resolver a Eq. 3.75, utiliza-se o algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1965), denominado transformada rápida de Fourier - *FFT*<sup>3</sup>. Pode-se encontrar disponíveis várias sub-rotinas que calculam a *FFT*. Existem disponibilizados vários pacotes para *FFT* na WEB como por exemplo o site <http://www.fftw.org/benchfft/ffts.html>, os quais levam em conta diversos parâmetros a serem escolhidos, como por exemplo, trabalhar com dados reais ou complexos; precisão simples ou dupla; *FFTs* unidimensionais, bidimensionais, ou tridimensionais; programação em serial ou paralelo; que utiliza potências de 2, 3, 5, 7, 11 e 13; diversas linguagens de programação (Fortran, C e C++).

Especificamente, no presente trabalho, foi utilizada a versão 4.0 da sub-rotina *FFTe* de Takahashi (2006), que pode ser encontrada em <http://www.fte.jp>. É uma sub-rotina escrita no padrão FORTRAN 77, com dupla precisão. Seu melhor desempenho ocorre para

---

<sup>3</sup>do inglês Fast Fourier Transform



$2^N$  nós de colocação, onde  $N$  é um número inteiro. Foram utilizadas as versões tridimensional com variáveis complexas.

Um último detalhe a ser comentado, quanto à implementação do método pseudoespectral, é o cálculo dos números de onda, que são usados na resolução das equações transformadas. Para utilizar a *FFTe*, os vetores número de onda são calculados da seguinte forma:

$$k_i(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_i}(n-1) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_i}(n-1-N) & \frac{N}{2} + 2 \leq n \leq N \end{cases} . \quad (3.77)$$

onde  $k_i$  é a componente  $i$  do vetor número de onda;  $N$  é o número de nós de colocação numa dada direção;  $L$  é o comprimento físico do domínio nessa dada direção e  $n$  é a posição no vetor em uma dada direção do domínio.

### 3.4 Acoplamento entre as metodologias pseudoespectral de Fourier e fronteira imersa - IMERSPEC

Os fundamentos básicos das metodologias da fronteira-imersa e pseudoespectral foram comentados nas seções anteriores. Nesta etapa é desenvolvida a metodologia proposta por Mariano (2011). Como já comentado, visa-se contornar a restrição das condições de contorno periódicas necessárias para a utilização do método pseudoespectral e, ao mesmo tempo, obter um método de fronteira-imersa de alta acurácia e com alta ordem de convergência espacial.

A última característica importante da metodologia é a ideia de se utilizar um domínio complementar. As definições dos domínios são apresentadas na Fig. 3.8. O domínio físico  $\Omega_{PhD}$ , dito euleriano, é delimitado pela fronteira imersa  $\Gamma_{PhD}$ , a qual também é considerada como um domínio lagrangiano. No interior de  $\Omega_{PhD}$  ocorre toda a fenomenologia física a qual se interessa modelar e simular. Nesse domínio, pode-se inserir um ou mais subdomínios delimitados pelas fronteiras imersas  $\Gamma_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Sobre a fronteira imersa  $\Gamma_{PhD}$  pode-se modelar quaisquer condições de contorno, mesmo que sejam não periódicas.

O domínio complementar euleriano  $\Omega_{PeD}$  é delimitado pela fronteira  $\Gamma_{PeD}$ , e serve para impor as condições de contorno periódicas diretamente, para a solução das equações de Navier-Stokes transformadas (Eq. 3.58). Esse domínio,  $\Omega_{PeD}$ , engloba o domínio  $\Omega_{PhD}$

e possibilita estender a solução do problema não periódico até a fronteira periódica  $\Gamma_{PeD}$ . As condições de contorno periódicas são impostas diretamente sobre  $\Gamma_{PeD}$  através dos procedimentos pseudoespectral. Por outro lado, as “condições de contorno” não periódicas são impostas sobre a fronteira imersa  $\Gamma_{PhD}$ , de forma indireta, através do campo de força euleriano  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ . Na Fig. 3.8 o vetor  $\vec{x}$  define qualquer ponto pertencente ao domínio euleriano, enquanto o vetor  $\vec{X}$  define qualquer ponto pertencente a uma interface lagrangiana.

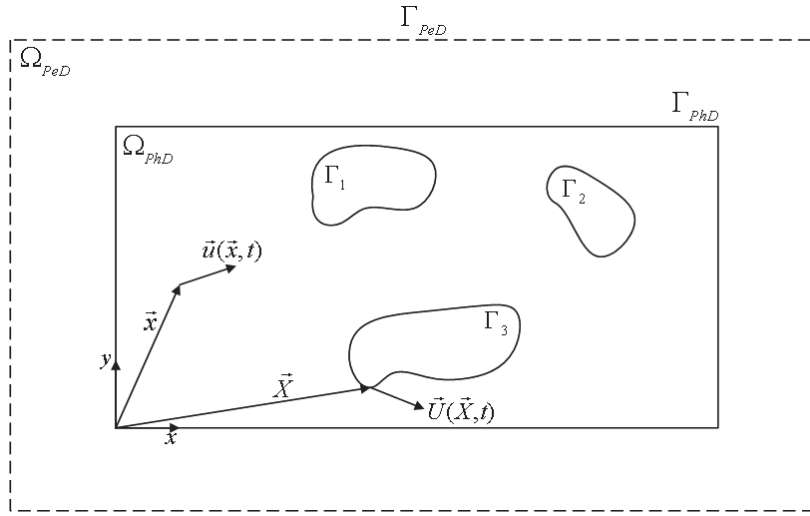


Figura 3.8: Representação esquemática dos domínios de cálculo: euleriano e lagrangiano.

Para finalizar, o algoritmo da metodologia IMERSPEC é apresentado abaixo:

1. Inicia-se o campo de velocidade no espaço físico, no tempo  $t$ ,  $\bar{u}_i^t$ ;
2. Aplica-se a *FFT* (Eq. 3.75) sobre o campo de velocidade,  $\bar{u}_i^t$ , obtendo-se o campo transformado,  $\hat{u}_i^t$ ;
3. A fim de garantir a equação da continuidade, aplica-se a o tensor projeção sobre o campo de velocidade, obtendo:  $\hat{u}_{i\pi}^t = \wp_{ij} \left( \hat{u}_i^t \right)$ ;
4. Calculam-se os termos do lado direito (*RHS*), necessários para resolver a Eq. 3.66:
  - Termo difusivo:
    - (a) Calculam-se as derivadas no espaço espectral,  $(\widehat{Du})_i^t = \iota k_i \hat{u}_{i\pi}^t$ ;
    - (b) Calcula-se  $\widehat{\sigma}_{ij} = \iota (k_j \hat{u}_i + k_i \hat{u}_j)^t$
    - (c) Aplica-se a transformada inversa de Fourier sobre  $\widehat{\sigma}_{ij}$  obtendo-se  $\sigma_{ij}$

- (d) Calcula-se o produto  $\sigma_{ij}\nu_{ef}$
- (e) Aplica-se a transformada direta de Fourier sobre  $\sigma_{ij}\nu_{ef}$  obtendo-se  $\widehat{\sigma_{ij}\nu_{ef}}$
- (f) Calcula-se o termo difusivo, (termo não-linear):  $\widehat{visc_i^t} = \iota k_i \widehat{\sigma_{ij}\nu_{ef}}$
- (g) Projeta-se o termo não-linear usando o tensor projeção (Eq. 3.63):
 
$$\widehat{visc_{i\pi}^t} = \wp_{ij} \left( \widehat{visc_j^t} \right)$$

- Termo advectivo na forma “anti-simétrica”; o termo difusivo também é calculado pelo método pseudoespectral:

- (a) Calcula-se o produto:  $(Pu)_i^t = \bar{u}_{i\pi}^t \bar{u}_{j\pi}^t$  no espaço físico;
- (b) Transforma-se o produto  $(Pu)_i^t$  para o espaço espectral usando a *FFT* (Eq. 3.75), obtendo-se  $(\widehat{Pu})_i^t$ ;
- (c) Calculam-se as derivadas no espaço espectral,  $(\widehat{Du})_i^t = \iota k_i \widehat{u}_{i\pi}^t$ ;
- (d) Aplica-se a transformada inversa de Fourier sobre as derivadas,  $(\widehat{Du})_i^t$ , obtendo-se  $(Du)_i^t$ ;
- (e) Calcula-se o produto das velocidades no espaço físico, com as derivadas, também no espaço físico,  $(PDu)_i^t = \bar{u}_{i\pi}^t (Du)_i^t$ ;
- (f) Transforma-se o produto das velocidades com as derivadas para o espaço de Fourier, obtendo-se  $(\widehat{PDu})_i^t$ ;
- (g) Calcula-se o termo advectivo não-linear:  $\widehat{tnl_i^t} = \frac{1}{2} \left[ (\widehat{Pu})_i^t + (\widehat{PDu})_i^t \right]$ ;
- (h) Projeta-se o termo não-linear usando o tensor projeção (Eq. 3.63):
 
$$\widehat{tnl_{i\pi}^t} = \wp_{ij} \left( \widehat{tnl_j^t} \right);$$

5. Aplica-se o esquema de Runge-Kutta, dado pela Eq. 3.87 e, após os seis passos, obtém-se o parâmetro temporário,  $\widehat{u}_i^*$ ;
6. Aplica-se a transformada inversa de Fourier em  $\widehat{u}_i^*$ , obtendo-se o parâmetro temporário no espaço físico,  $\bar{u}_i^*$ ;
7. Se os pontos lagrangianos coincidem com os eulerianos, usa-se a Eq. 3.39. Caso contrário, interpola-se o parâmetro temporário no espaço físico, usando a Eq. 3.40, obtendo-se a velocidade sobre os pontos lagrangianos,  $\bar{U}_i^*$ ;

8. Calcula-se a força lagrangiana,  $\bar{F}_i$ , através da Eq. 3.36, onde  $\bar{U}_i^{t+\Delta t} = \bar{U}_{Fi}$ , isto é, a velocidade que a fronteira imersa deve ter;
9. Calcula-se a força euleriana,  $\bar{f}_i$ , usando a Eq. 3.24, quando os pontos lagrangianos coincidem com os nós de colocação eulerianos, ou utiliza-se o processo de distribuição, dado pela Eq. 3.25, quando não existe coincidência;
10. Transforma-se o campo de força euleriano,  $\bar{f}_i$ , para o espaço espectral e aplica-se o tensor projeção  $\wp_{ij}$ , obtendo:  $\hat{\bar{f}}_{i\pi} = \wp_{ij} \left( \hat{\bar{f}}_j \right)$ ;
11. Com o parâmetro temporário obtido no passo 5 e a força euleriana projetada no passo 10, atualiza-se o campo de velocidade  $\hat{u}_i^{t+\Delta t} = \Delta t \wp_{im} \left( \hat{f}_m \right) + \hat{u}_i^*$ .
12. Até o passo 11 têm-se o método da imposição direta da força, isto é, após o campo de velocidade receber a informação do campo de força euleriano e, conseqüentemente, receber as informações das condições de contorno. A próxima etapa é retornar ao passo inicial;
13. Caso o método da múltipla imposição da força seja utilizado, entra-se no processo de ciclagem. Então, faz-se  $\hat{u}_i^{*it+1} = \hat{u}_i^{t+\Delta t}$ , atualizando o parâmetro temporário da seguinte maneira:  $\hat{u}_i^{*it+1} = \hat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left( \hat{f}_i^{it} \right)$ ;
14. Com  $\hat{u}_i^{*it+1}$  calculado, retorna-se ao passo 6, obtendo  $\bar{u}_i^* = \bar{u}_i^{*it+1}$ ;
15. Repete-se os passos 6 até 11 até satisfazer um dos critérios de parada, seja a Eq. 3.50 ou o número máximo de iterações,  $NL$ ;
16. Após o critério de parada ser satisfeito, retorna-se ao passo 1 e avança no tempo.

Note-se que, no processo de ciclagem, atualiza-se a velocidade com o campo de força projetado no plano  $\pi$ , o qual leva a propagação da informação das condições de contorno da seguinte maneira:

$$\hat{u}_i^{*it+1} = \hat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left( \hat{f}_j^{it} \right). \quad (3.78)$$

Na próxima iteração, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*it+2} = \widehat{u}_i^{*it+1} + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it+1} \right). \quad (3.79)$$

Substituindo a Eq. 3.78 na Eq. 3.79, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*it+2} = \widehat{u}_i^{*it} + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it} + \widehat{f}_j^{it+1} \right). \quad (3.80)$$

Generalizando, ao final das  $NL$  iterações, obtém-se:

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^* + \Delta t \sum_{it=1}^{NL} \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{it} \right) = \widehat{u}_i^* + \Delta t \wp_{ij} \sum_{it=1}^{NL} \left( \widehat{f}_j^{it} \right). \quad (3.81)$$

Define-se a força total:

$$\widehat{f}_i^{total} = \sum_{it=1}^{NL} \widehat{f}_i^{it}. \quad (3.82)$$

Logo, no espaço físico, tem-se:

$$\bar{f}_i^{total} = \sum_{it=1}^{NL} \bar{f}_i^{it}. \quad (3.83)$$

Se essa força total fosse conhecida *a priori*, a velocidade poderia ser determinada sem o processo iterativo, ou seja:

$$\widehat{u}_i^* = \widehat{u}_i^t + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{RHS}_j \right), \quad (3.84)$$

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^* + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{total} \right). \quad (3.85)$$

Somando-se as Eqs. 3.84 e 3.85, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{t+\Delta t} = \widehat{u}_i^t + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{RHS}_j \right) + \Delta t \wp_{ij} \left( \widehat{f}_j^{total} \right). \quad (3.86)$$

Assim, fica demonstrado que o campo de velocidade determinado ao final do processo iterativo, dado pelos passos 1 ao 16, satisfaz simultaneamente as equações da continuidade

e de Navier-Stokes.

### 3.5 O Código IMERPEC3DP

O código IMERSPEC3DP é uma ferramenta desenvolvida no Laboratório de Mecânica de Fluidos, que faz uso da metodologia IMERSPEC, descrita anteriormente, com o objetivo de se trabalhar em três dimensões e que faz uso de técnicas de paralelização. Com essa ferramenta é possível simular escoamentos em transição e turbulentos com uma alta acurácia e alta taxa de convergência. No tópico seguinte serão apresentados os detalhes sobre a discretização espacial e temporal. Também é apresentado o tratamento sobre as condições de contorno e a paralelização utilizada.

#### 3.5.1 Discretização espacial e temporal

A metodologia IMERSPEC consiste em resolver o domínio euleriano (Eq. 3.16) no espaço de Fourier. Isso é feito transformando cada um dos termos dessa equação para o espaço espectral de Fourier, pela aplicação da DFT como mostrado.

O domínio euleriano, no espaço físico, possui um comprimento  $L_i$  na direção  $x_i$ , onde o índice  $i$  varia de 1 a 3 para cada um dos eixos do sistema de coordenadas. O comprimento do domínio é dividido em  $N_i$  pontos de colocação igualmente espaçados, a uma distância  $\Delta x_i = L_i/N_i$ . Assim o vetor posição é  $x_i = n\Delta x_i$  onde  $1 \leq n \leq N_i$ .

No domínio espectral, define-se um vetor número de onda, cuja componente  $i$  é  $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$ , onde  $\lambda_i$  é o comprimento de onda e o espaçamento no domínio espectral é dado por  $\Delta k_i = \frac{2\pi}{L_i}$ . Assim, o número de onda de corte ( $k_c$ ) é o maior número de onda resolvido, igual a  $\max[k_i] = \frac{\pi N_i}{L_i} = \frac{\pi}{\Delta x_i}$ , e o menor  $\min[k_i] = \frac{2\pi}{L_i}$ . A menor estrutura física fluido dinâmica (estrutura turbilhonar) resolvida tem tamanho  $2\Delta x_i$  e a maior tem tamanho  $L_i$ .

Resolvendo a Eq. 3.16, obtém-se o parâmetro temporário no espaço espectral,  $\widehat{u}_i^* \left( \vec{k}, t \right)$ . Para facilitar o entendimento, a discretização temporal utilizada foi de primeira ordem de convergência temporal (Euler). Nos trabalhos de Mariano (2007) e Souza (2005) foi mostrado que quando um método com alta acurácia e com alta ordem de convergência é usado na discretização espacial também deve-se utilizar um método compatível na discretização do

tempo. Portanto, na presente tese optou-se pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal, com seis passos (RK46), otimizado no espaço espectral, com redução do custo de armazenamento de variáveis, baixa dispersão e baixa dissipação numérica. Para maiores detalhes deste método ver o trabalho de Allampalli et al. (2009). O algoritmo RK46 é mostrado abaixo, aplicado à Eq. 3.16:

$$\begin{cases} \widehat{AUX}_l = \alpha_l \widehat{AUX}_{l-1} + \Delta t \widehat{RHS}_l^t \\ \widehat{u}_{l+1}^* = \widehat{u}_{l+1}^* + \beta_l \widehat{AUX}_l \end{cases} \quad (3.87)$$

onde  $l = 1, 2, \dots, 6$  é o passo do Runge-Kutta;  $AUX$  é uma variável auxiliar,  $\alpha^l$  e  $\beta^l$  são constantes dadas na Tab. 3.1.

Além disso, foi utilizado passo de tempo variável, baseado no critério  $CFL$ , proposto por (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967):

$$\Delta t = CFL \min \left[ \min \left[ \frac{\Delta x}{\max[|u|]}; \frac{\Delta y}{\max[|v|]}; \frac{\Delta z}{\max[|w|]} \right]; \frac{1}{2\nu_t} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1} \right], \quad (3.88)$$

onde  $CFL$ , normalmente, é um número entre 0 e 1, o qual depende do esquema de integração temporal e do próprio escoamento que se está analisando.

Fazendo as seis iterações propostas na Eq. 3.87, obtém-se o parâmetro temporário no espaço de Fourier,  $\widehat{u}_i^*$ , necessário para a metodologia IMERSPEC. De posse deste parâmetro dá-se sequência ao algoritmo já descrito.

Tabela 3.1: Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46.

$it$	$\alpha$	$\beta$
1	0,0	0,122
2	-0,691750960670	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381941220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

Quando se trabalha com métodos de alta ordem de convergência, em particular o

método espectral de Fourier, a solução das equações que apresentam descontinuidades no domínio de cálculo é influenciada pelo fenômeno de Gibbs (CANUTO et al., 2006; BRIGGS; HENSON, 1995), o qual produz erros numéricos nos pequenos comprimentos de onda na forma de oscilações espúrias. Para contornar esse problema, a literatura aponta para processos de filtragem dos campos onde aparecem as descontinuidades (CANUTO et al., 2006).

Na metodologia proposta, o processo de filtragem pode ser imposto no campo de força euleriano quando este está no espaço espectral de Fourier, ou no próprio campo de velocidade, pois são campos que apresentam fortes derivadas. O processo de filtragem aplicado à metodologia IMERPEC foi estudada por Mariano (2007) e como não é aplicada no presente trabalho, não será apresentada.

### 3.5.2 *Tratamento das condições de contorno*

O código computacional utiliza as condições de contorno periódicas em todas as direções para as variáveis primitivas, ou seja, as componentes da velocidade, devido às restrições do MPEF. Para contornar este inconveniente de periodicidade, dois artifícios numéricos são utilizados, são eles: a metodologia IMERSPEC, já apresentada na seção 3.4, e a zona de amortecimento.

A zona de amortecimento, embora não seja exatamente uma imposição de uma condição de contorno, será descrita como parte desta seção, por sua estreita relação com a imposição das condições de contorno não periódicas propriamente ditas, que será feita pela metodologia IMERSPEC. A zona de amortecimento será utilizada como uma forma suave de forçar o escoamento que sai do domínio de interesse a recuperar a condição de entrada do escoamento sem infringir a condição de periodicidade necessária ao MPEF.

Já o método de fronteira imersa é utilizado em conjunto com o MPEF e o acoplamento de ambos resulta na metodologia IMERSPEC descrita na seção 3.4. Neste método a função do método de fronteira imersa é impor condições de contorno no interior do domínio de forma a garantir que se resolvam escoamentos não periódicos utilizando MPEF, tendo-se assim um domínio de interesse e um domínio complementar, o qual será a região formada pela MFI e a zona de amortecimento, como já foi mostrado na seção 3.4.



### 3.5.2.1 Zona de amortecimento

A zona de amortecimento (Buffer Zone ou Sponge Zone) é um procedimento numérico muito utilizado principalmente na fluido-acústica para minimizar a influência da reflexão de ondas quando os vórtices atravessam as fronteiras do domínio, evitando, ou pelo menos, reduzindo ao mínimo possível, influências nos campos de velocidade e pressão (UZUN, 2003). Essa zona funciona como um sumidouro de vórtices.

A função amortecimento foi utilizada no presente trabalho para minimizar as influências das condições de contorno periódicas, intrínsecas ao método pseudoespectral de Fourier. Ela pode ser utilizada para estabilizar o escoamento externo ao domínio de interesse, principalmente, para as simulações com valores elevados do número de Reynolds.

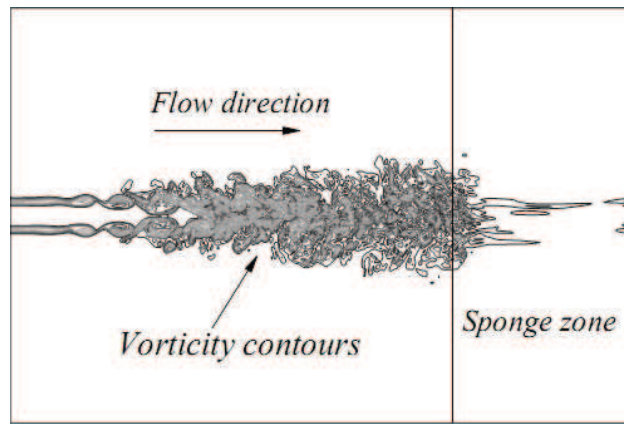


Figura 3.9: Isovalor de vorticidade de um jato em desenvolvimento espacial. Zona de amortecimento atuando como um sumidouro de vorticidade na parte final do domínio (UZUN, 2003).

A função amortecimento é dada pela Eq. 3.89:

$$ZA = \Psi(Q - Q_t), \quad (3.89)$$

onde  $Q$  é a solução do problema na região de interesse, ou seja, as velocidades calculadas,  $Q_t$  é a solução alvo, ou seja, a solução que se pretende obter ao final da zona de amortecimento. Pode-se utilizar a zona de amortecimento para aproximar a solução da condição de entrada do jato, por exemplo. Enfatiza-se que o código utiliza condições de contorno periódicas em todas as direções.  $\Psi$  é o parâmetro de amortecimento dos vórtices, o qual deve ser ajustado

de acordo com o problema, para que se possa atingir a solução alvo de maneira suave. Essa função de amortecimento de vórtices é dada pela Eq. 3.90:

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \left( 4 - 8 \frac{z_{za} - z}{z_{za} - z_f} \right) \right], \quad (3.90)$$

onde  $z_{za}$  e  $z_f$  são, respectivamente, o início e o fim da zona de amortecimento. A Fig. 3.10 ilustra a função de estiramento de vórtices para  $z_{za} = 0,03$  e  $z_f = 16,0$ .

Uma vez calculada, a função  $ZA$  é subtraída ao  $RHS$  na equação já discretizada (Eq. 3.66). No caso de se trabalhar com o método pseudoespectral o cálculo de  $ZA$  é feito no espaço físico, o que torna a imposição da zona de amortecimento onerosa.

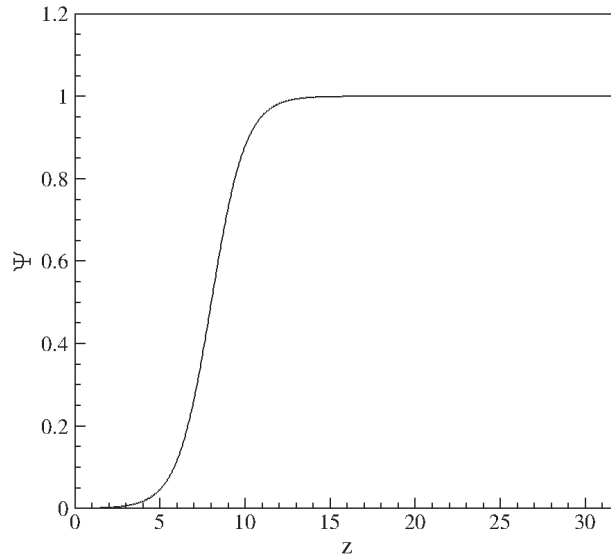


Figura 3.10: Função de estiramento de vórtices  $\Psi(z)$ .

### 3.5.3 Metodologia de paralelização

A utilização de recursos computacionais para se resolver problemas reais de engenharia se mostrou viável desde a década de 50 com o desenvolvimento dos primeiros computadores. A complexidade dos problemas estudados, na maioria das aplicações, necessita de domínios tridimensionais para que as soluções sejam bem representativas. Além disso, não raro, envolvem geometrias de topologias complexas. Assim, soluções numéricas dos fenômenos associados requerem, em grande parte, o emprego de enorme quantidade de células computacionais para serem atingidas com precisão aceitável.

Além do mais, a única opção computacional disponível aos pesquisadores dos anos 50 era o emprego de supercomputadores caros e, frequentemente, de acesso restrito. No entanto, a evolução dos computadores pessoais - PC<sup>4</sup> deu-se a taxas muito maiores do que os computadores de grande porte, estendendo o leque de opções em recursos. Cabe salientar, ainda, que a potência dos computadores está crescendo, desde 1945, a uma taxa de 10 vezes a cada 5 anos como mostrada Fig. 1.2. Porém, mesmo com o crescente aumento da capacidade de processamento, comparável àquela disponível somente aos supercomputadores de poucos anos atrás, os microcomputadores atuais ainda não são capazes de armazenar e processar todos os dados necessários que são gerados em grande parte dos problemas reais.

Na tentativa de resolver os problemas reais utilizando métodos numéricos, surgiu então o conceito de processamento paralelo. A tecnologia de processamento paralelo foi movida amplamente por suporte governamental, visando resolver grandes problemas numéricos, como por exemplo a previsão meteorológica. Entende-se por processamento paralelo o emprego de mais de uma Unidade de Processamento de Dados - CPU<sup>5</sup> trabalhando em conjunto para resolver um único problema. Esta definição, apesar de precisa, abrange desde o uso de dois computadores pessoais interligados por uma rede local, até milhares de processadores unidos formando um supercomputador paralelo. Porém, todo o embasamento teórico para o emprego de processamento paralelo já havia sido proposto anos antes da efetiva construção dos supercomputadores e dos *clusters* de PCs.

Durante várias décadas as tecnologias relacionadas ao processamento se desenvolveram, mas foi durante a década de 90 que a tecnologia empregada na troca de mensagens entre computadores adquiriu índices de confiabilidade e compatibilidade que permitiram o surgimento de agrupamentos (*clusters*) de computadores dedicados à execução de uma determinada tarefa. Tais características, aliadas à diminuição dos custos do equipamento, impulsionaram o estudo da viabilidade do emprego de *clusters* de computadores, popularizando a tecnologia e fomentando a pesquisa de novas arquiteturas e ferramentas de paralelização. O mercado atual de PCs é maior que o mercado de estações de trabalho, empurrando os preços dos equipamentos para baixo e, ao mesmo tempo, aumentando sua performance. Entretanto,

---

<sup>4</sup>do inglês Personal Computers - PC

<sup>5</sup>do inglês Central Processing Unit - CPU

quando se visa um estudo refinado da física de problemas complexos, como por exemplo a turbulência, é exigido um poder de cálculo e de armazenamento de dados, tornando inevitável o uso de estações trabalho ou de um cluster de estações.

Deve-se atentar, ainda, para a possibilidade de construção de *clusters* empregando tanto máquinas homogêneas (quando todas possuem as mesmas características e estão interligadas pela mesma rede) quanto máquinas heterogêneas. Evidentemente, existem vantagens e desvantagens em se empregar cada uma das configurações. Planejar a distribuição de carga em um ambiente homogêneo requer menos preocupação com a quantidade de carga que cada nó deve receber. *clusters* homogêneos tendem a ser mais rápidos que os heterogêneos, pois não há a necessidade de conversão de dados. Entretanto, mais cedo ou mais tarde, no momento em que um cluster homogêneo for ampliado, certamente ele se tornará heterogêneo, pois encontrar máquinas exatamente iguais é muito difícil, devido ao avanço tecnológico atual.

A quantidade de áreas que vêm se beneficiando do emprego de processamento paralelo, e aquelas que poderiam se beneficiar, cresce constantemente. Alguns exemplos a serem citados incluem os servidores de internet (onde *clusters* podem distribuir a carga e aumentar a capacidade de resposta), bancos de dados (redução do tempo nas pesquisas intensivas), computação gráfica (diminuição do tempo de renderização de imagens), inteligência artificial (reconhecimento de padrões de voz, visão artificial, etc.), engenharia genética, astrofísica (simulação da formação de galáxias e dinâmica estelar), meteorologia, pesquisa militar (simulação de explosões nucleares, processamento de sinais de radares, geração automática de mapas, etc.) e diversas outras aplicações.

Algumas vantagens de se empregar *clusters* de computadores são:

- Capacidade de se resolver problemas complexos, diminuindo o tempo de resolução;
- Possibilidade de adicionar novos componentes à medida que cresce a demanda por poder computacional;
- Aumento da confiabilidade do *cluster* em caso de falha em algum equipamento;
- Excelente relação custo/benefício;

- Uso de softwares livres e de hardware convencional, caracterizando independência de fornecedores.

Pode-se ainda, dividi-los em *clusters* classe I, que são inteiramente construídos a partir de componentes de *hardware* e de *software* disponíveis no mercado comum e empregando tecnologias padronizadas (como IDE, SCSI e Ethernet) e, também, os *clusters* classe II, que podem empregar programas e equipamentos feitos sob encomenda, visando aumentar sua performance.

A forma como o problema contido no domínio original é subdividido entre os diversos subdomínios é uma decisão que pode refletir de maneira decisiva no desempenho do programa paralelo. Alguns tipos de problemas não apresentam grandes dificuldades na paralelização, pois não há a necessidade de se trocar informações entre os subdomínios. A avaliação de uma integral ou, de outra forma, o cálculo da área sob uma curva, ao ser executado paralelamente é um exemplo clássico desta classe de problema, pois os resultados obtidos em cada processador são independentes uns dos outros, sendo agrupados somente ao final dos seus resultados individuais, para obter a área total (e, é claro, o resultado da integral). Tais tipos de problemas são conhecidos como *embarrassingly parallel*.

Entretanto, para a grande maioria dos casos, os problemas são resolvidos ao mesmo tempo em todos os processadores, mas não de forma independente, ou seja, para se obter a solução em um subdomínio, é necessário utilizar as informações armazenadas nos outros subdomínios. Esta troca de informações ou, mais especificamente, troca de mensagens é uma tarefa fundamental no sucesso de um processamento paralelo demandando enorme tempo no projeto de um código numérico.

Pode-se efetuar a divisão do problema a partir da decomposição do domínio original em outros subdomínios menores e/ou a divisão das tarefas, ou seja, das instruções do código a serem efetuadas no programa original. A primeira alternativa é a mais empregada em sistemas de memória distribuída, enquanto que a segunda é mais utilizada em sistemas de memória compartilhada. Entretanto é possível, e comumente utilizado pelos programadores, empregar ambas abordagens a um mesmo problema. Porém, somente a decomposição do domínio foi abordada no presente trabalho.

A decisão sobre qual topologia ideal de paralelização, ou seja, a quantidade e a forma

dos subdomínios empregados na decomposição, não é uma tarefa trivial. Com relação à quantidade de volumes em cada subdomínio (que se associa diretamente ao balanço de carga) é possível escolher a divisão de acordo com a dimensão do domínio ou com a quantidade de volumes contidos nele. Em domínios discretizados por malhas regulares, não há diferença no balanço de carga, quaisquer que sejam as opções. Entretanto, para malhas irregulares, uma divisão baseada nas dimensões do domínio original resulta em subdomínios dotados de quantidades diferentes de volumes. Algumas vezes, este efeito é desejável como em certas configurações de *clusters* heterogêneos, mas, na maioria das situações, este desbalanço é difícil de ser contornado e foi, no presente trabalho, preterido em relação à divisão por número de volumes.

Para o presente trabalho, o domínio original é subdividido em sub-domínios menores, de forma a se particionar a carga de trabalho do modo mais igualitário possível entre os processadores. Assim, a comunicação entre os subdomínios torna-se necessária para que o problema avance, satisfazendo às condições de contorno exigidas. Cada processador executa basicamente o mesmo código, porém sobre uma base de dados diferente. A Fig. 3.11(a) ilustra o domínio do problema a ser resolvido e as possíveis decomposições de domínios para malhas cartesianas regulares Fig. 3.11(b), (c) e (d). Esse domínio pode ser dividido em cada uma das direções coordenadas. A Fig. 3.11(b) ilustra a divisão do domínio em três subdomínios na direção  $z$ , e, neste caso, a topologia de decomposição de domínios é chamada de unidimensional. A Fig. 3.11(c) mostra a decomposição de domínio nas direções  $z$  e  $x$  e a decomposição é bi-dimensional e por fim a Fig. 3.11(d) ilustra a decomposição tridimensional.

No presente trabalho será adotada a decomposição unidimensional. A escolha dessa decomposição foi motivada pelo fato da subrotina *FFTe* utilizada fazer uso desse tipo de decomposição. Outra razão que motivou a escolha da decomposição unidimensional é a facilidade de programação da mesma em relação às demais. Decomposições de domínios em topologias de dimensões maiores que a unitária são, em geral, mais trabalhosas para o programador, pois demandam um controle mais sofisticado e cuidadoso da seleção e agrupamento dos pacotes a serem enviados, bem como o controle e manipulação dos pacotes recebidos. A Fig. 3.12 ilustra um domínio em serial e a decomposição desse domínio em

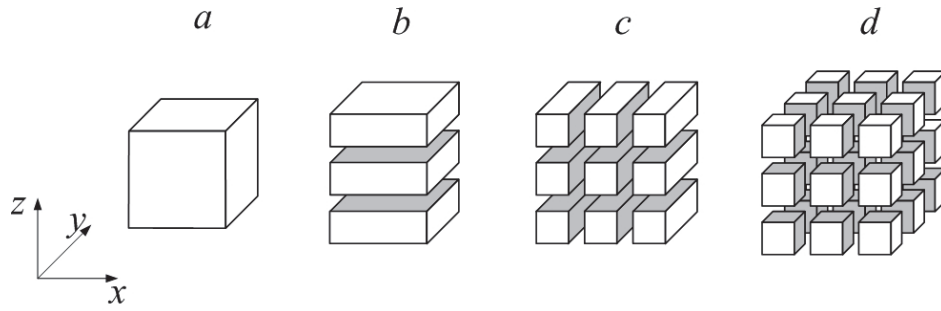


Figura 3.11: Topologias possíveis para a troca de mensagens: (a) programa serial, (b) particionamento unidimensional, (c) particionamento bidimensional e (d) particionamento tridimensional.

$n + 1$  subdomínios, onde toda a comunicação entre os subdomínios é realizado pela FFT, sem a necessidade de se compartilhar informações adicionais, externa a FFT. Essa comunicação será mostrada na Fig. 3.13.

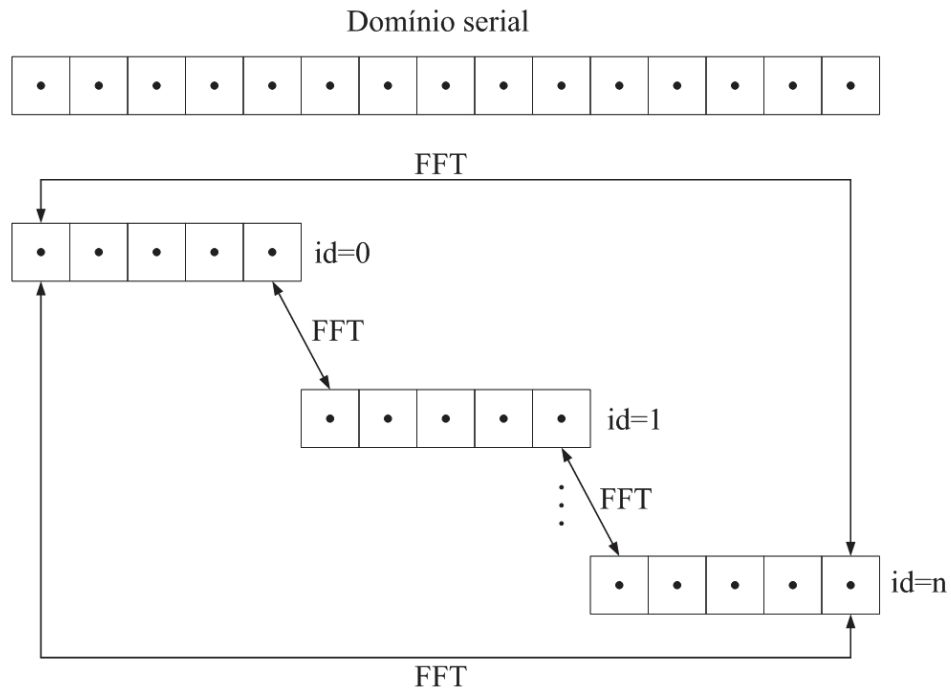


Figura 3.12: Domínio em serial e a decomposição em  $n + 1$  processos.

A comunicação entre os subdomínio podem ser divididas em comunicação local/global, estruturada/não-estruturada, estática/dinâmica e sincronizada/não-sincronizada. Na comunicação local, cada processo se comunica apenas com seus processos “vizinhos”, enquanto na comunicação global exige-se uma comunicação com vários processos ao mesmo tempo.

Na forma estruturada, os dados a serem trocados formam um conjunto regular, como uma grade ou árvore por exemplo, e no modelo não-estruturado, os dados podem formar padrões completamente arbitrários.

Entende-se como comunicação estática quando as identidades dos dados a serem trocados não variam ao longo do tempo. Por outro lado, quando as estruturas se alteram constantemente ao longo da simulação, temos uma comunicação dinâmica. Em uma comunicação sincronizada, as operações de troca entre os processadores são executadas de uma maneira coordenada entre as partes envolvidas, onde cada uma das partes não realiza sua operação sem a contrapartida da outra. No modo não-sincronizado, um processador pode receber ou enviar informações sem que haja a cooperação do outro.

A comunicação global é o tipo de comunicação utilizado pela *FFTe*, sendo essa comunicação necessária quando se faz uso de *FFT*'s e toda informação deve-se estar disponível em cada subdomínio do problema. A Fig. 3.13 ilustra a comunicação global entre os  $n + 1$  processos. Nessa comunicação toda a informação a ser compartilhada é representada pelas linhas tracejadas, a qual é enviada de cada um dos processos, mostrados na parte superior da Fig. 3.13. Desta forma toda informação estará disponível a cada um dos processos, pois a comunicação é feita entre todos os processos.

A comunicação entre os domínios, juntamente com a quantidade de cálculos processados em cada um deles, requer um cuidado especial, pois afeta não somente o desempenho da simulação mas, também, a integridade dos resultados. Infelizmente, ainda não existe um software que seja capaz de paralelizar automaticamente, de forma eficiente e com segurança, todas as situações possíveis encontradas em processamento paralelo. Programas de maior desempenho ainda necessitam da intervenção do programador para se chegar ao resultado desejado.

Dentre os diversos detalhes a serem explorados está a forma como os dados trafegarão entre os subdomínios. Em sistemas de processamento distribuído, esta tarefa fica a cargo de ferramentas que promovem a troca de mensagens. Felizmente, encontra-se disponível e de forma gratuita na internet algumas excelentes bibliotecas que podem ajudar nesta tarefa. Podem-se citar, como mais populares, a PVM (Parallel Virtual Machine) e a MPI (Message Passing Interface) sendo esta última empregada no presente trabalho.



Com o intuito de ser padrão em ambientes de memória distribuída, foi lançada em novembro de 1992 a primeira versão da biblioteca de paralelização MPI. Seu desenvolvimento foi realizado como um trabalho conjunto de cerca de 80 pesquisadores provenientes de, aproximadamente, 40 organizações industriais, acadêmicas e governamentais, principalmente americanas e europeias. A biblioteca fornece um conjunto de rotinas para comunicação entre processos de memória, possui em torno de 125 funções, embora seja possível escrever vários códigos com apenas 6 delas, além de ser portátil para diversas plataformas. Suporta, ainda, linguagens C/C++ e Fortran 77/90 nas quais suas bibliotecas são compiladas e linkadas.

Finalmente, pode ser dito que o MPI apresenta-se como um padrão para processamento paralelo, o que garante constante manutenção e atualização. Além do mais, a MPI é considerada uma biblioteca que combina portabilidade, interoperabilidade e alta performance. Possui ainda capacidade de lidar com máquinas heterogêneas e SMP (Symmetric Multi Processors), ou seja, máquinas individuais com dois ou mais processadores. Outras vantagens importantes são a disponibilidade de diversos recursos, que podem ser explorados visando melhorar o rendimento dos códigos e a sua excelente portabilidade.

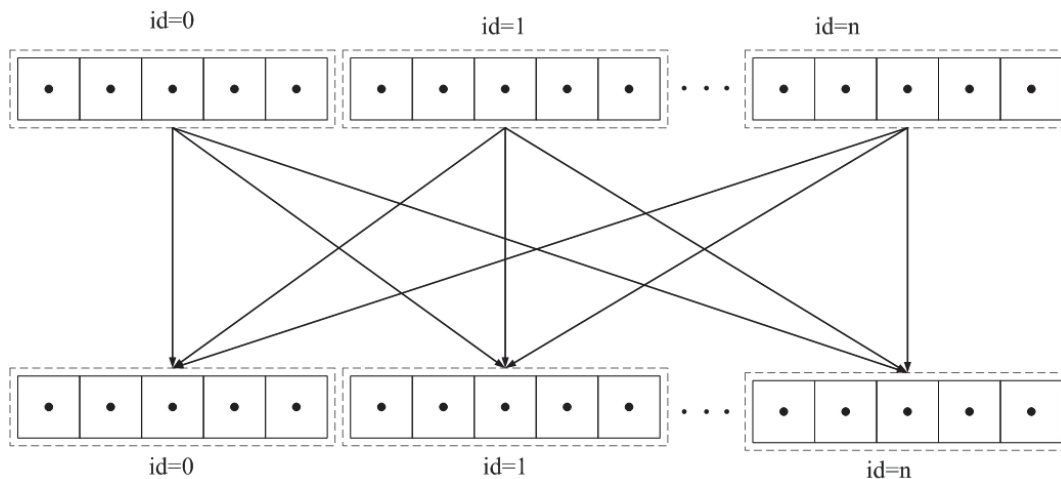


Figura 3.13: Comunicação global entre  $n + 1$  subdomínios.

Não é uma tarefa fácil determinar a performance de um programa paralelo, devido às diversas configurações de hardware e software possíveis. Entretanto, de forma a padronizar as relações de desempenho entre os diferentes algoritmos paralelizados, algumas definições se fazem necessárias, como, por exemplo, o *speedup*, a eficiência e o desempenho.

O *speedup* ( $s_p$ ) pode ser entendido como a razão entre o tempo de processamento para

o programa em serial ( $t_s$ ) e o tempo para  $n$  processadores ( $t_n$ ). Entretanto, cabe salientar que todo programa paralelo possui uma parte serial, impossível de ser paralelizada. Esta parcela serial do programa e o *speedup* estão intimamente ligados pela lei de Amhdal. Segundo esta lei, se um programa possui uma parte serial, e todo o programa a possui, que representa  $1/s_p$  do tempo total de execução, diz-se que o *speedup* máximo que pode ser atingido por este mesmo programa é  $s_p$ . A título de exemplo, se um determinado programa possui 5% de seu código serial o que já é um tanto difícil de se obter, podemos dizer, a partir da lei de Amhdal, que o *speedup* máximo a ser atingido é 20%. Uma expressão matemática prática para o *speedup* poder ser:

$$s_p = \frac{t_s}{t_p} \quad (3.91)$$

onde  $t_s$  é o tempo necessário para a execução da tarefa realizada por um programa serial,  $t_p$  é o tempo necessário para o mesmo programa realizar a mesma tarefa dividida em  $n$  processadores. A Fig. 3.14 mostra o *speedup* realizado com o programa IMERSPEC3DP desenvolvido no presente trabalho.

Muitas vezes o programa em serial pode não estar disponível, assim é comum a substituição do tempo de execução em serial pelo tempo de execução com um único processador ( $t_1$ ), assim o *speedup* torna-se:

$$s_p = \frac{t_1}{t_p}. \quad (3.92)$$

Com o intuito de determinar o *speedup* do presente trabalho, é possível propor soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes, através da imposição de um termo fonte a “priori” conhecido, de forma que seja obedecida a equação de conservação da massa do sistema, como será apresentado nas sessões 4.1.1.1 e 4.1.1.2. Este tipo de abordagem é bastante útil pois possibilita a comparação da solução numérica com uma solução analítica previamente conhecida. Este método é conhecido como método de soluções manufaturadas. Estes métodos são utilizados, principalmente, para a verificação da existência de erros na implementação ou mesmo no algoritmo implementado. Outra aplicação é na determinação

da taxa de convergência do método de discretização tanto espacial quanto temporal.

A escolha deste método para realizar a verificação se dá devido ao fato de que nessas soluções os valores das variáveis são conhecidos em todo domínio para todos os instantes de tempo. Isso permite verificar o algoritmo, seja ele serial ou mesmo paralelo, bem como a troca de mensagens e sincronismos entre os processos, caso tenha a decomposição de domínios implementada. A utilização desse método ainda possui a vantagem de apresentar um balanço homogêneo de carga entre os processos, uma vez que a quantidade de operações realizadas por cada processo é conhecida.

Para todas as simulações, foi utilizado um *cluster* de alta performance SGI/Altix XE1300 Linux, que composto por 30 processadores Intel Xeon sendo 26 processadores E5650 2.67GHz e 4 E5520 2.27GHz, o que resulta em 344 núcleos, os quais são conectados por uma rede InfiniBand: Mellanox Technologies MT26428 [ConnectX VPI PCIe 2.05GT/s - IB QDR / 10GigE]. Uma importante característica dessas famílias de processadores é a possibilidade de utilização da tecnologia de *Hyper-threading*. *Hyper-threading* é uma tecnologia da Intel usada para aumentar ou não comprometer a capacidade computacional de cada processador. Em termos práticos, para cada núcleo de processador conectado a placa-mãe, o sistema operacional cria mais um núcleo virtual, resultando em dois núcleos, um virtual e outro real. Nesse caso, o *cluster* usando a tecnologia *Hyper-threading* passa a possuir 344 núcleos físicos e 344 núcleos virtuais, resultado em 688 núcleos.

Fazendo teste de *speedup* na mesma máquina, Vedovoto (2011) mostra uma queda no desempenho quando se usa a tecnologia de *hyper-threading* para processamento. Isso pode ser explicado pois a tecnologia *hyper-threading* não foi criada para processamento propriamente dito. Além do mais, essa tecnologia compartilha recursos entre dois núcleos, sendo um real e outro virtual, com por exemplo a cache do processador, o que tornaria o acesso a esse recurso mais lento. O fato é que, mesmo ligeiramente mais lento que os núcleos reais o uso de núcleos virtuais ainda promove um ganho na capacidade de processamento.

Em virtude da queda de desempenho constatada por Vedovoto (2011) o *speedup* do presente trabalho será realizado usando apenas os núcleos reais de processamento, e é mostrado na Fig. 3.14 através uma curva característica de *speedup* em função do número de processadores. Nesta figura, a reta a 45° representa o *speedup* ideal ou teórico, ou seja,

aquele que aumenta o poder de cálculo na mesma proporção que se aumenta o número de processadores. Nota-se que no presente trabalho o *speedup* obtido é muito próximo de *speedup* ideal mesmo para um número alto de processadores. Porém, sabe-se que, à medida que os processadores são incluídos nos cálculos, a curva de *speedup* apresenta um padrão aproximadamente parabólico. Após o *speedup* atingir o máximo possível, seu valor começa a cair, de forma que o acréscimo de novos processadores pode prejudicar o desempenho do código. Na situação apresentada não foi possível observar esse comportamento do código, um vez que, para constatá-lo seria necessário executar os cálculos utilizando um número maior de processadores. A limitação do número de processadores se dá devida a quantidade de recursos computacionais disponíveis no Laboratório de Mecânica de Fluidos (MFLab).

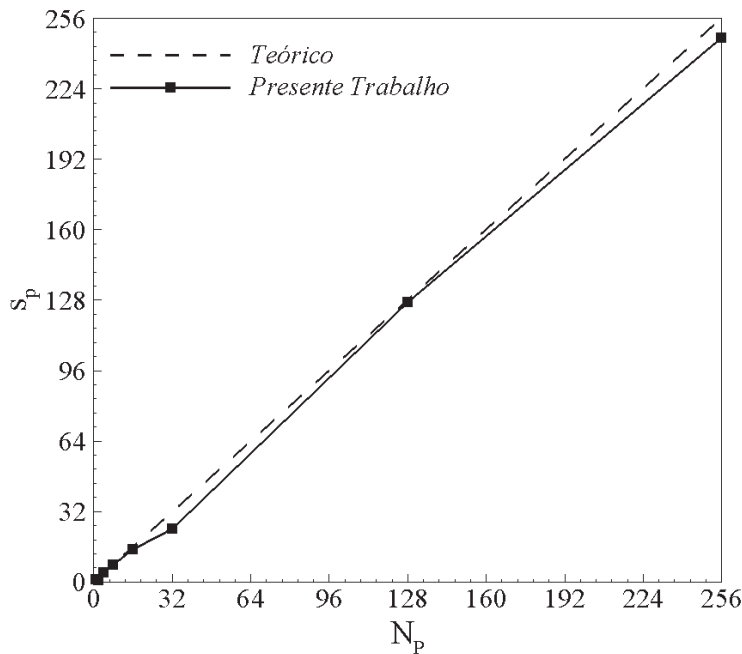


Figura 3.14: Avaliação do *speedup* do presente trabalho.

A capacidade que os programas possuem de aumentar seu *speedup* à medida que mais processadores são adicionados é definida como escalabilidade. Esta propriedade é muito significativa a ponto de se tornar peça de propaganda das empresas de softwares comerciais, ao dizerem que seus produtos possuem a escalabilidade de centenas ou mesmo milhares de processadores. A escalabilidade perfeita, ou seja a capacidade de manter a eficiência constante, não importando o número de processadores que são adicionados, é o “Santo Graal” do processamento paralelo.

A eficiência ( $e$ ) pode ser definida como sendo o quanto de desempenho é obtido à medida que novos processos  $p$  são adicionados. Uma expressão para o seu cálculo é dada por:

$$e = \frac{t_s}{t_p p}. \quad (3.93)$$

ou

$$e = \frac{t_1}{t_p p}. \quad (3.94)$$

Na Fig. 3.15, os resultados da eficiência presente do trabalho podem ser observadas. A reta paralela ao eixo das abscissas e que cruza o eixo de eficiência no valor igual a 1, representa o desempenho de 100%, considerado ideal. Nota-se também que para um número de 2 processadores a eficiência foi bem inferior aos demais números de processadores testados. Para explicar esse fato mais testes necessitam ser feitos, mas não são prioridade do presente trabalho. Outra observação importante é que a eficiência é superior a 0,8 para maior parte do número de processadores testados, mantendo-se alta à medida que se aumenta o número de processadores.

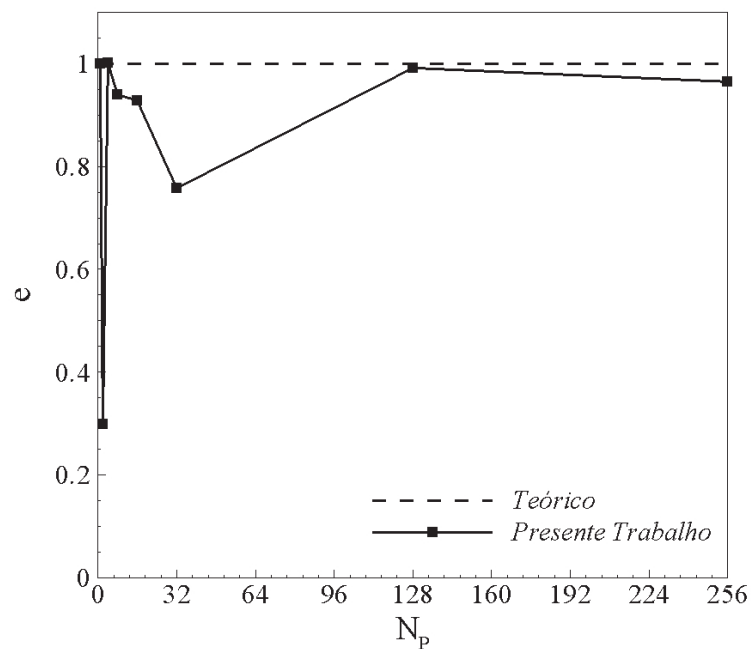


Figura 3.15: Avaliação a eficiência para o presente trabalho.



## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS

É bastante comum e desejável fazer o uso de códigos computacionais para simular problemas de engenharia. Para se obter sucesso, ou seja, garantir que a física do problema em questão seja bem representada, é imprescindível que o código computacional, antes da solução do problema propriamente dito, passe por duas etapas básicas: a verificação (4.1) e a Validação (4.2). Estas etapas são descritas a seguir.

#### 4.1 Verificação

A verificação de códigos computacionais é um estudo que visa garantir que as equações escolhidas para representar o problema físico estão sendo resolvidas corretamente, e que é garantida a ausência de erros na implementação e no algoritmo. A verificação é um exercício puramente matemático (SILVA; SOUZA; MEDEIROS, 2007), o qual não necessariamente está associado um problema físico. Por outro lado, um teste de verificação não garante que o modelo implementado responderá à física do problema de interesse.

Um dos métodos mais comuns para se verificar um código é conhecidos como Método das Soluções Manufaturadas que será descrito na seção a seguir (4.1.1).

#### 4.1.1 Método das soluções manufaturadas

O método das soluções manufaturadas é um conceito interessante que permite sintetizar soluções analíticas para um modelo diferencial, permitindo-se obter uma solução de referência segura, para fins de verificação de metodologias e algoritmos. A sintetização consiste em determinar um termo fonte, a partir de uma solução analítica plausível, e acrescentar a uma equação diferencial. Aplicando a solução analítica no modelo diferencial, determina-se o termo fonte.

Dessa maneira, passa-se a ter um modelo diferencial cuja solução analítica é conhecida (SILVA; SOUZA; MEDEIROS, 2007), válida em todo domínio de cálculo e para qualquer tempo, servindo, então, como referência para os resultados numéricos dos campos de velocidade e de pressão. Assim, torna-se possível verificar uma nova metodologia, bem como corrigir erros de implementação do algoritmo proposto e do código computacional desenvolvido.

Em especial, em um problema de mecânica dos fluidos, isotérmico e com propriedades físicas constantes, devem-se conhecer as componentes de velocidade e de pressão. Existem soluções manufaturadas de várias formas para problemas de mecânica de fluidos bidimensionais (TAYLOR; GREEN, 1937), tridimensionais (CANUTO et al., 2007; MOREIRA, 2007), com propriedades físicas variáveis (NóS, 2007).

No presente trabalho, a solução analítica proposta por Henshaw (1994) será usada, para as equações de Navier-Stokes com propriedades físicas constantes, acrescidas dos termos fonte, determinados a partir da solução analítica:

$$u^a(x, y, z, t) = \sin(x) \cos(y) \cos(z) \cos(2\pi t), \quad (4.1)$$

$$v^a(x, y, z, t) = \cos(x) \sin(y) \cos(z) \cos(2\pi t), \quad (4.2)$$

$$w^a(x, y, z, t) = -2 \cos(x) \cos(y) \sin(z) \cos(2\pi t), \quad (4.3)$$

$$p^a(x, y, z, t) = \sin(x) \sin(y) \sin(z) \cos(2\pi t), \quad (4.4)$$

onde,  $u^a$ ,  $v^a$  e  $w^a$  são as componentes de velocidade analíticas,  $p^a$  é o campo pressão analítico,  $a$  e  $b$  são constantes,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas cartesianas,  $t$  é o tempo.



Os termos-fonte a serem somados às equações de quantidade de movimento linear são obtidos resolvendo as derivadas que aparecem na Eq. 4.5:

$$f_i = \frac{\partial u_i^a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^a u_j^a) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^a}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} \right) \right], \quad (4.5)$$

onde  $\nu$  e  $\rho$  são a viscosidade cinemática e massa específica do fluido, o super-índice  $a$  representa a solução analítica para as componentes de velocidade e pressão dadas pelas Eqs. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

Os campos  $u^a$ ,  $v^a$  e  $w^a$  satisfazem à Eq. 3.6. Desta forma tem-se um problema dado pelas Eqs. 3.6 e 3.7 com um termo fonte  $\vec{f}(\vec{x}, t)$  conhecido e cuja solução analítica é dada pelas Eqs. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. Ressalta-se que as derivadas que compõem os termos-fonte (Eq. 4.5), são obtidas analiticamente a partir das equações Eqs. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. Desta forma, quando se resolvem numericamente as equações de Navier-Stokes com estes termos-fonte, o resultado deve ser comparável as soluções analíticas, Eqs. 4.1 a 4.4, a menos de erros numéricos promovidos, por exemplo, pelas discretizações temporais, espaciais e erros de arredondamento.

Para avaliar quantitativamente os resultados, foi utilizada a norma  $L_2$  que mede o erro entre a variável calculada numericamente ( $\phi^c$ ) e a variável calculada analiticamente ( $\phi^a$ ), ou seja:

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} [\phi^c(x_i, y_j, z_k, t) - \phi^a(x_i, y_j, z_k, t)]^2}, \quad (4.6)$$

onde  $x_i = (i - 1) Lx/N_x$ ,  $y_j = (j - 1) Ly/N_y$  e  $z_k = (k - 1) Lz/N_z$ , e  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  são os números de nós de colocação em cada direção.

Nota-se que, embora a norma tenha sido definida com relação a uma função genérica  $\phi$ , ela pode ser usada para todas as componentes de velocidade e para o campo de pressão. Para isso basta substituir  $\phi$  pela variável de interesse na Eq. 4.6. Onde tem-se o super-índice  $c$  utilizam-se os campos calculados numericamente e o super-índice  $a$  é utilizado para os campos calculados analiticamente.

Os parâmetros de referência que regem o problema são o diâmetro de um vórtice,

$L_r = \pi [m]$ , a velocidade máxima do escoamento que acontece no tempo  $t = 0 [s]$ ,  $U_r = \max [u^a(\vec{x}, t = 0), v^a(\vec{x}, t = 0), w^a(\vec{x}, t = 0)] = 1,0 [m/s]$ , onde o operador  $\max [ ]$  representa o máximo valor entre os colchetes e o tempo de referência é dado por  $t_r = L_r/U_r = \pi [s]$ . O número de Reynolds é definido para esse escoamento de acordo com a Eq. 4.7 e tomado  $Re = 10$ :

$$Re = \frac{U_r L_r}{\nu}, \quad (4.7)$$

permitindo calcular a viscosidade cinemática  $\nu$  do fluido.

#### 4.1.1.1 Código base - 1 processo

Esta seção tem por objetivo verificar o comportamento de código IMERSPEC3DP (versão 3D paralelo) utilizando apenas um processo na decomposição do domínio. Objetiva-se também verificar e demonstrar a acurácia do método pseudoespectral de Fourier MPEF. Esta verificação faz-se necessária pois para determinar o *speedup* 3.14 utiliza-se como referência o tempo de execução do programa utilizado um processo para comparação com os demais tempos de execução referentes aos números de processos superiores, como já descrito.

Destaca-se ainda que os testes com apenas um processo é a maneira mais simples de verificar a existência de erros no envio e recebimento de mensagens entre os domínios, porém o uso de um só processo não garante a inexistência de erros de comunicação entre os subdomínios. Ao final deste tópico, pode-se concluir que o código “base” estará verificado quando faz-se uso de apenas um processo na decomposição de domínios.

Para tal tarefa, resolvem-se as Equações de Navier-Stokes sem a presença da fronteira imersa e sem usar qualquer tipo de modelo de turbulência. Assim, usa-se apenas MPEF. Uma vez verificado o código com apenas uma decomposição de domínio, o código será verificado usando mais de um subdomínio e por fim, é apresentada a verificação do metodologia de fronteira imersa MFI em conjunto com o MPEF. Assim a metodologia IMERSPEC estará verificada.

As diferenças entre os campos de velocidade calculados e os analíticos foram quantificados pela Norma  $L_2$ , definida na Eq. 4.6. Todas as simulações apresentadas nesta seção

foram realizadas em um domínio de cálculo de  $L_x = L_y = L_z = 2\pi$ . As condições iniciais são dadas pelas Eqs. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 , fazendo  $t = 0$ . Neste caso, todas as condições de contorno são periódicas. A Fig. 4.1 apresenta os isovalores do campo de pressão (a) e da componente  $w$  de velocidade (b), nota-se que em ambos os casos há periodicidade em todas as direções.

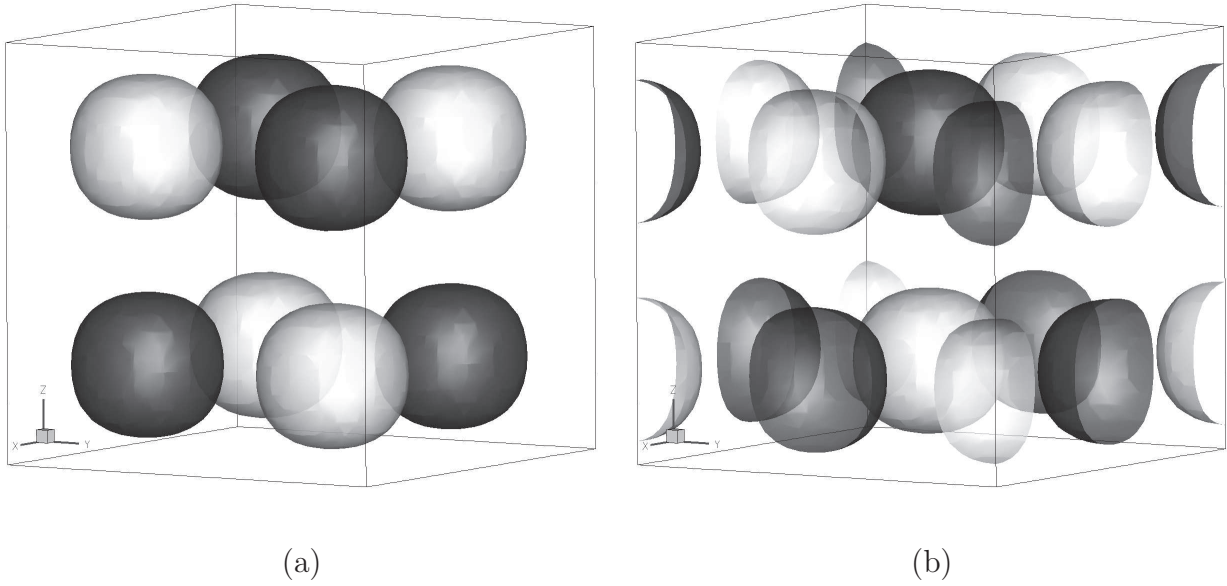


Figura 4.1: (a) Isovalores do campo de pressão. (b) Isovalores da componente  $u$  de velocidade.

Nas primeiras simulações foi utilizado um passo de tempo constante de  $\Delta t = 10^{-4}$  [s], o tempo simulado foi fixado em 10[s] e foram testados  $8^3$ ,  $16^3$  e  $32^3$  nós de colocação, como mostra a Fig. 4.2. Não se observam diferenças relevantes nos resultados para as diferentes malhas. Isso caracteriza uma metodologia com taxa de convergência espectral. Obteve-se ainda erros de arredondamento de máquina para todas as malhas testas. Assim, optou-se por utilizar um domínio discretizado com  $32^3$  nós de colocação, para as demais simulações.

Com o objetivo de se estudar a influência do passo de tempo, foram simulados três casos com  $\Delta t = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  [s]. Nota-se que os erros encontrados com os  $\Delta t = 10^{-4}$  e  $10^{-5}$  [s] são da ordem de  $10^{-15}$  o que está próximo do erro de arredondamento de máquina. Nota-se que para  $\Delta t = 10^{-3}$  [s] os erros são maiores em relação aos demais passos de tempo. Porém o objetivo deste gráfico era apenas demonstrar que os passos de tempo utilizados não contaminam a solução espacial. Os resultados da Fig. 4.3 dispensam uma investigação mais profunda deste assunto, uma vez que, para os passos de tempo  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  [s] os erros são

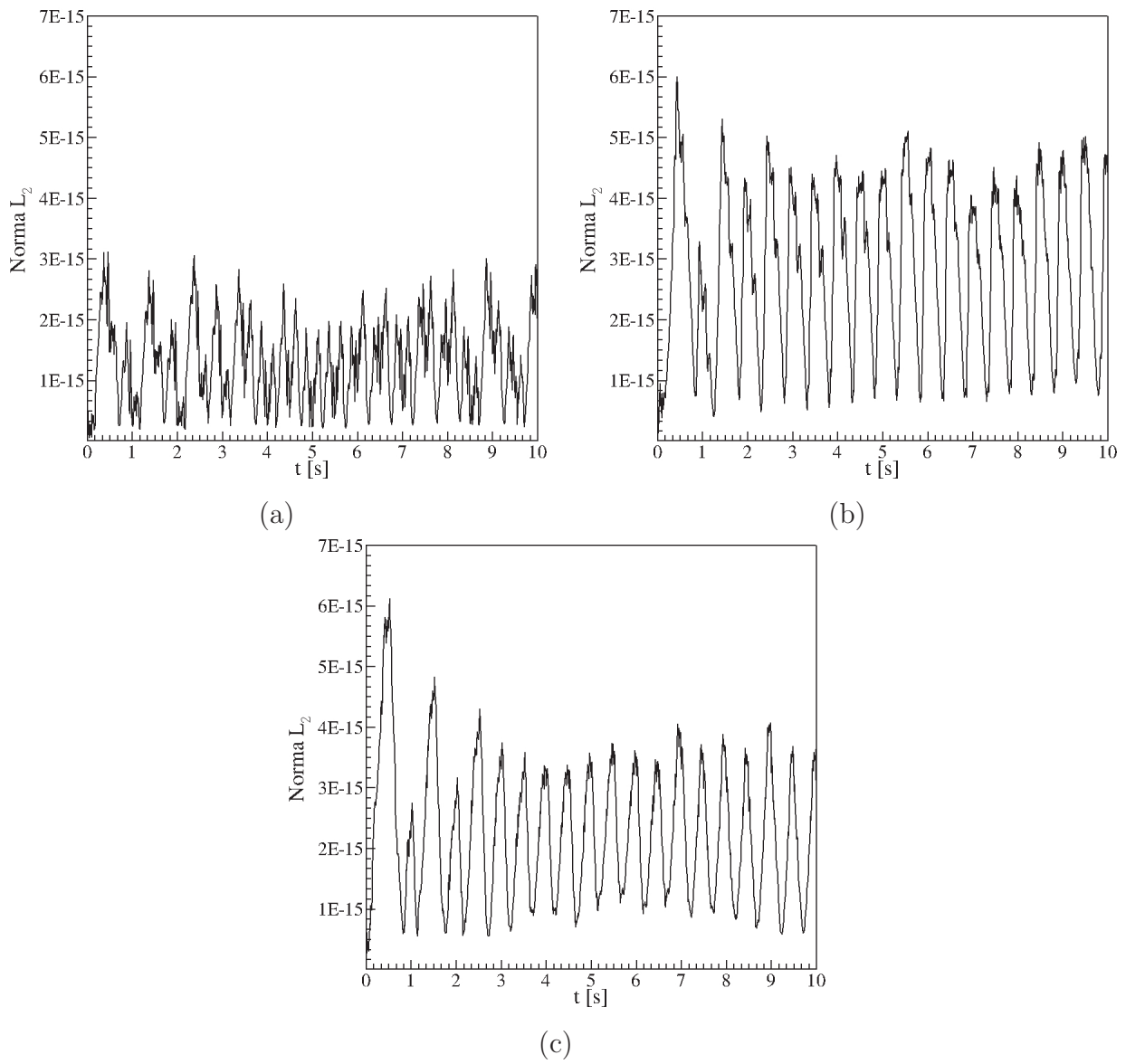


Figura 4.2: Influência do número de pontos de colocação na evolução temporal da norma  $L_2$  da componente  $w$  de velocidade com (a)  $8^3$  (b)  $16^3$  e (c)  $32^3$  nós de colocação.

da ordem dos erros de truncamento de máquina. Assim, será utilizado um  $\Delta t = 10^{-4}$  [s] para as demais simulações.

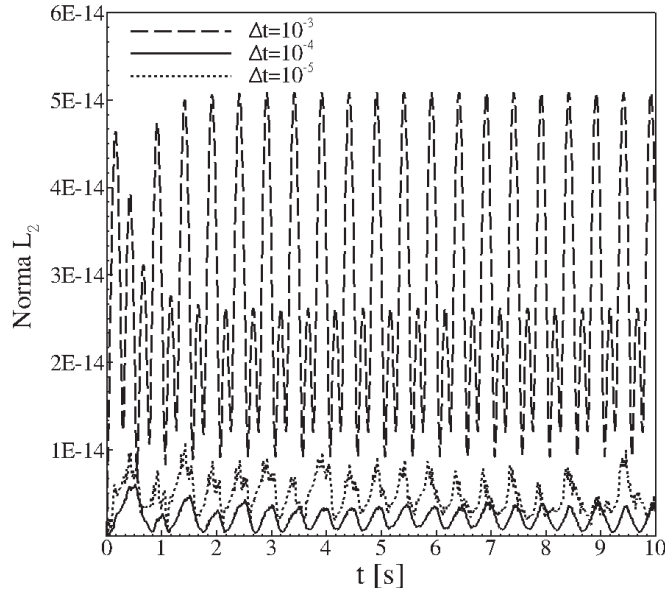


Figura 4.3: Influência do passo de tempo na evolução temporal da norma  $L_2$  da componente  $w$  de velocidade.

A Fig. 4.4 ilustra a evolução temporal da norma  $L_2$  para a componente  $z$  de velocidade e para a pressão. Nota-se que, tanto para a componente de velocidade Fig. 4.4(a) quanto para a pressão Fig. 4.4(b), a norma  $L_2$  ficou da ordem de  $10^{-15}$ , o que corresponde ao arredondamento de máquina, utilizando dupla precisão. As componentes de velocidade nas direções  $x$  e  $y$  também apresentaram erros da ordem de arredondamento de máquina, como mostrado na Fig. 4.5, demonstrando a alta acurácia da MPEF. É muito difícil um método numérico utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes, para escoamentos incompressíveis, manter a mesma acurácia para a pressão, quando comparada com a velocidade.

#### 4.1.1.2 Código base - $n$ processos

Uma vez verificado o código IMERSPEC3DP frente aos métodos de solução manufaturados usando um processo na decomposição do domínio, é natural que se faça uma verificação comparando a solução obtida com um processo e outra em processamento paralelo usando  $n$  processos. Para isso, foram realizadas e comparadas simulações idênticas às do item 4.1.1.1.

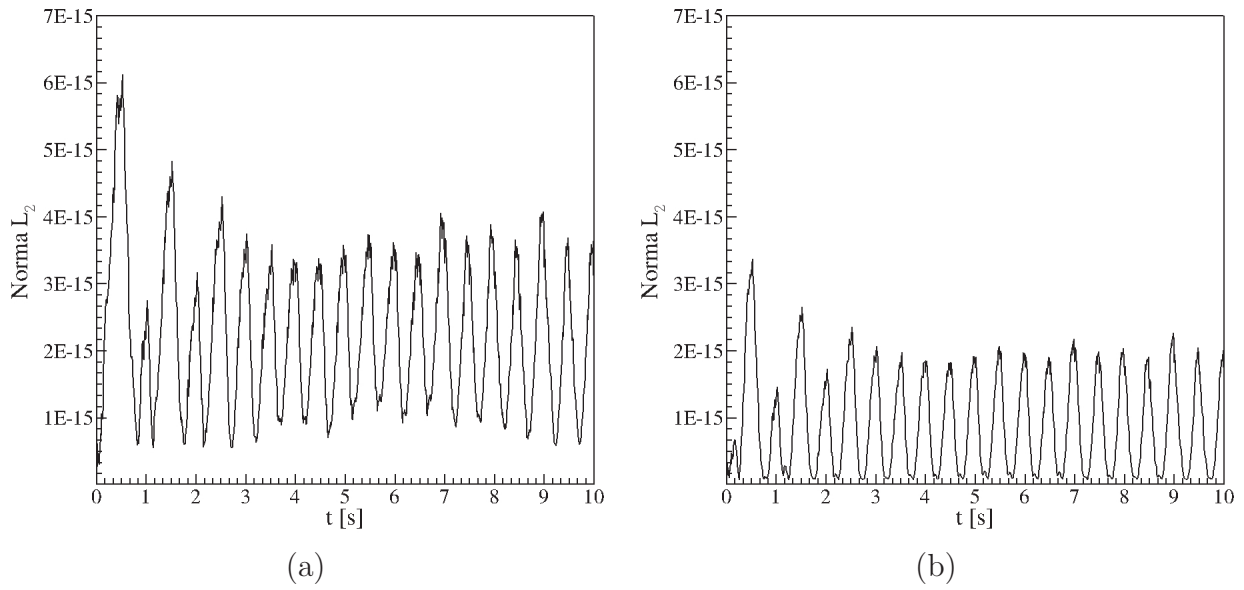


Figura 4.4: (a) Evolução temporal da norma  $L_2$  para a: (a) componente de velocidade na direção  $z$  e (b) pressão.

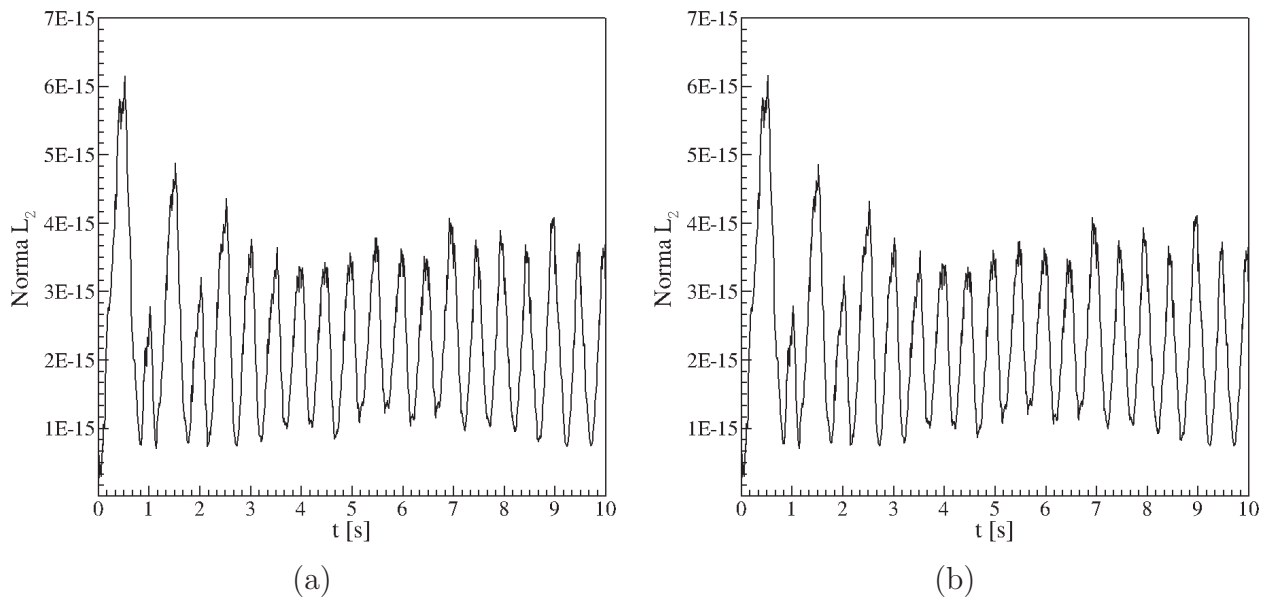


Figura 4.5: Norma  $L_2$  para as componentes de velocidade na direção: (a)  $x$  e (b)  $y$ .

A Fig. 4.6 mostra o domínio simulado cujo contorno é delimitado pelos segmentos de retas, o qual é decomposto em quatro subdomínios, cujas fronteiras são mostradas pelos segmentos de retas horizontais. A figura mostra os isovalores  $(-0,5,0,5)$  da componente  $u$  de velocidade. É interessante destacar que nos isocontornos de velocidade a transição entre subdomínios é contínua. Caso houvesse algum erro de comunicação entre os processos na paralelização essa figura mostraria alguma descontinuidade ou imperfeição em um dos isovalores.

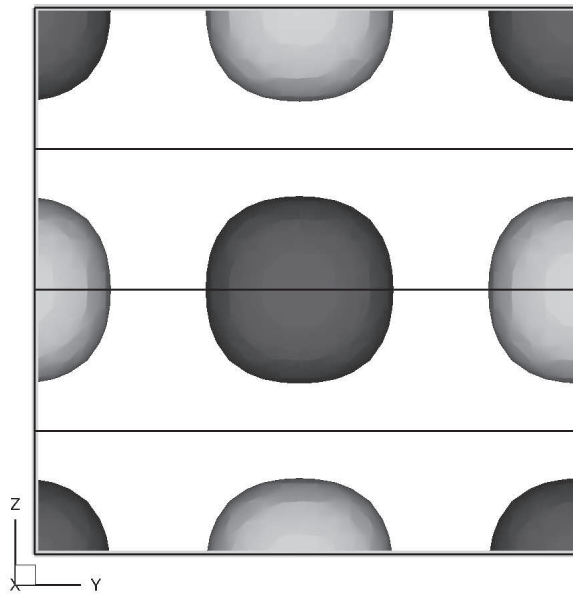


Figura 4.6: Isovalor da componente  $u$  de velocidade em domínio paralelizado em quatro processos.

Porém, apenas a análise qualitativa não é suficiente para a verificação. Para a análise qualitativa são utilizadas sondas para as duas decomposições de domínios simuladas. Uma mostra as sondas da componente  $w$  de velocidade e para a pressão com um e quatro processos (Fig. 4.7 e Fig. 4.8)). Nota-se que para as duas simulações os resultados apresentam soluções idênticas, mostrando que o processo de paralelização foi realizado com sucesso.

Por fim é apresentada na Fig. 4.10 a norma  $L_2$  calculada nos dois casos, nota-se que as soluções mais uma vez são praticamente idênticas. Caso houvesse um erro de paralelização, este erro causaria uma divergência entre as duas simulações.

Assim, com esses testes, a base do código desenvolvido pôde ser verificada. Porém resta ainda a verificação do módulo de fronteira imersa que será discutida no próximo tópico.

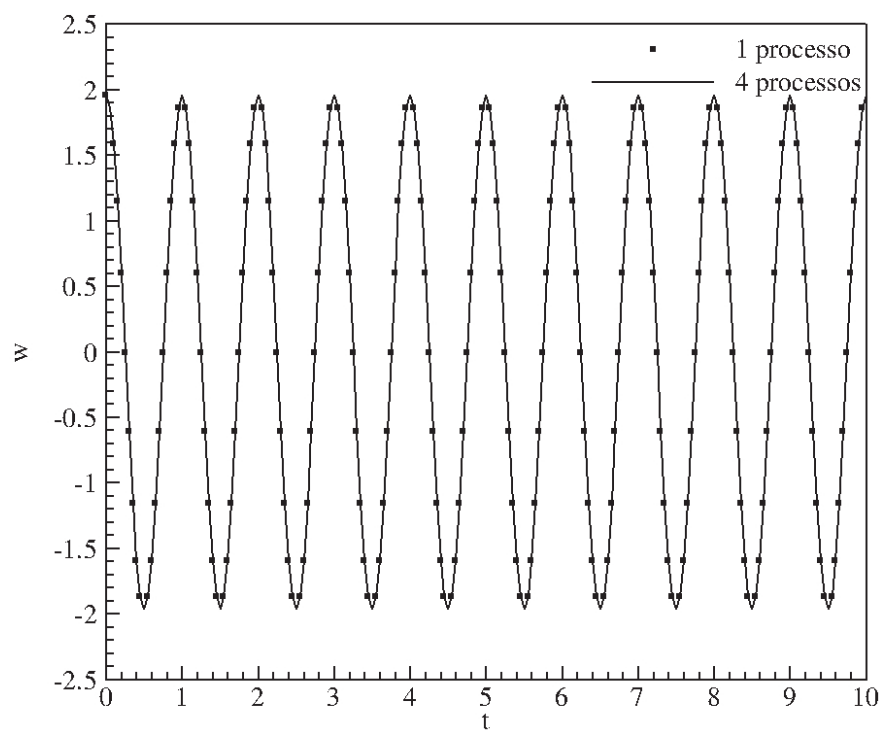


Figura 4.7: Sonda da componente  $w$  de velocidade na versão com um processo e quatro processos.

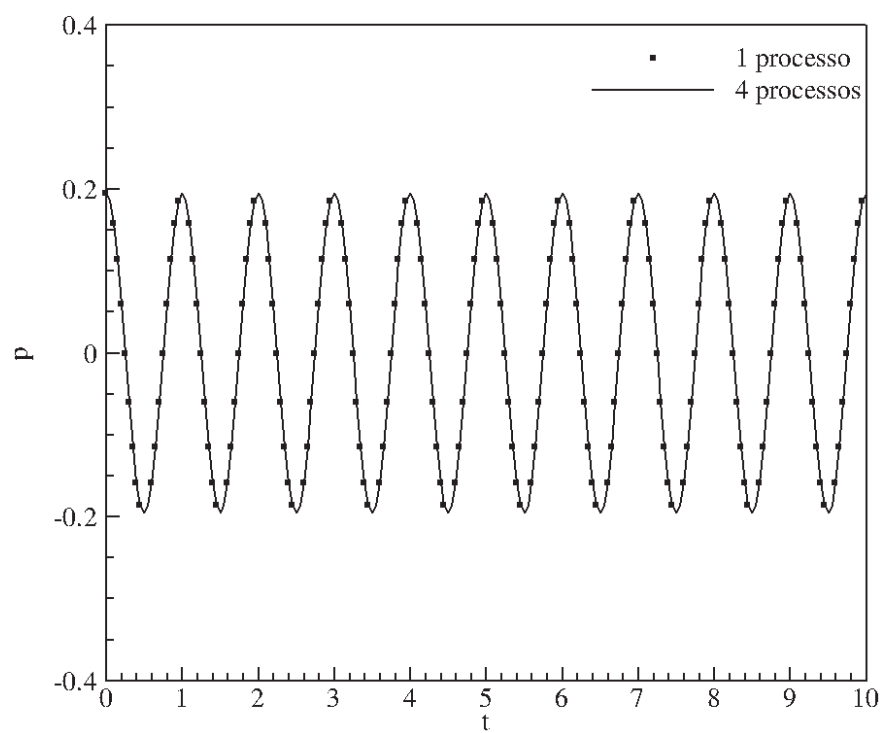


Figura 4.8: Sonda da pressão na versão com um processo e quatro processos.



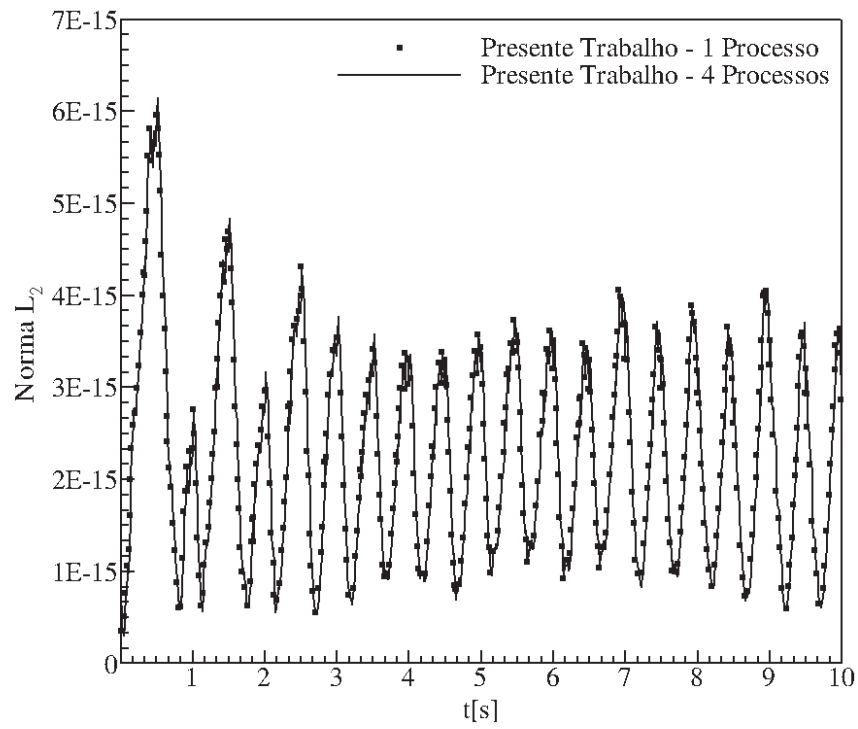


Figura 4.9: Norma  $L_2$  da componente  $w$  de velocidade na versão com um processo e quatro processos.

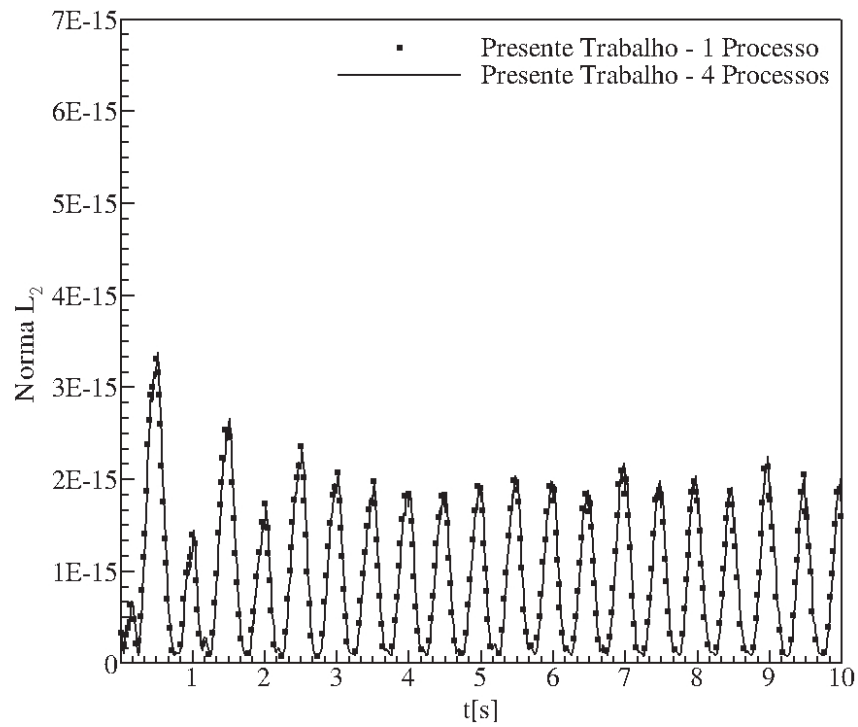


Figura 4.10: Norma  $L_2$  da pressão  $p$  de velocidade na versão com um processo e quatro processos.

#### 4.1.1.3 Fronteira imersa

Uma vez verificados tanto a base do código computacional quanto a MPEF, parte-se para a verificação do módulo que acopla a MFI ao código base. Assim, serão apresentados dois casos de verificação, sendo um com o método de soluções manufaturadas e outro o escoamento de Poiseuille. Para testar a MFI usando o método de soluções manufaturadas será imposto um plano no meio do domínio euleriano, o qual faz o papel de um corpo imerso, como proposto nos trabalhos Uhlmann (2005) e Kim (2001).

O procedimento para testar o acoplamento consiste em definir a velocidade da fronteira imersa ( $U_{FI}$ ) igual à velocidade analítica nos pontos lagrangianos no tempo  $\left(U^a\left(\vec{X}, t + \Delta t\right)\right)$ , que é a velocidade da fronteira depois de decorrido um passo de tempo  $(t + \Delta t)$ . Conhecidas as velocidades lagrangianas, calcula-se a força lagrangiana,  $F_i\left(\vec{X}, t + \Delta t\right)$ .

Com a força lagrangiana calculada, os campos de força eulerianos são obtidos. Deste modo, o termo-fonte da fronteira imersa “leva” a velocidade euleriana sobre os pontos da interface para a velocidade analítica no tempo  $(t + \Delta t)$ , a menos de erros numéricos promovidos. Se os modelos para esses dois processos fossem perfeitos a força seria nula. Nota-se que nenhum comentário sobre as funções interpolação e distribuição é feito, comum em trabalhos que envolvem MFI, pois no presente trabalho todos os pontos da malha lagrangiana são coincidentes com pontos da malha euleriana, dispensando os processos de interpolação/-distribuição.

Foram realizados dois testes como mostrado na Fig. 4.11, o primeiro deles, um plano é forçado, porém com uma diferença, o domínio de cálculo é paralelizado usando a decomposição de domínio, usando a biblioteca Message Passing Interface-MPI. No segundo teste um cubo é forçado via MFI. Em ambos os casos os resultados foram similares em termos de acurácia. Desta forma serão apresentados apenas os resultados do segundo caso onde um cubo é forçado.

A Fig. 4.12 apresenta a evolução temporal de uma sonda de velocidade para componente  $u$  e a Fig. 4.13 para a pressão em uma simulação com e sem utilizar o módulo da fronteira imersa. Ambos os domínios são particionados em quatro subdomínios computacionais. Nota-se que as soluções são coincidentes.

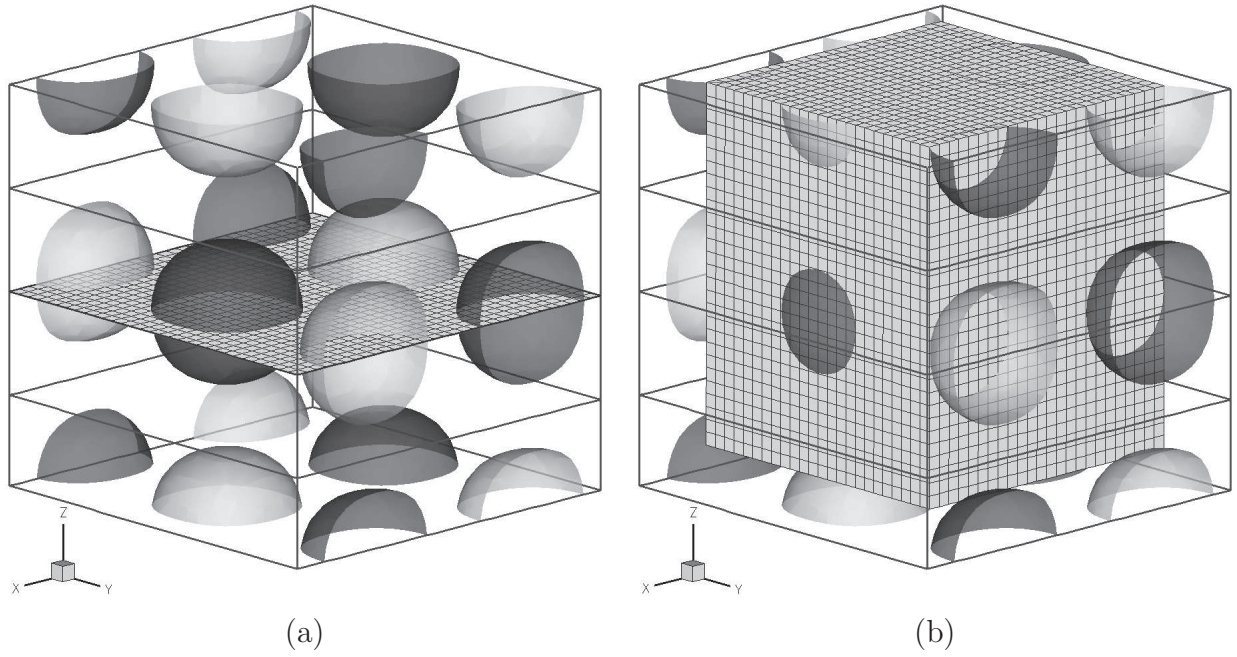


Figura 4.11: Domínio de Cálculo euleriano colorido pela isovalores de  $u$  sobreposto a malha lagrangiana: (a) plano e (b) cubo.

Com o intuito de verificar, foram calculadas as normas  $L_2$  para os casos com e sem a fronteira imersa para todas as componentes de velocidade. A Fig. 4.12 mostra a norma  $L_2$  da componente  $u$  de velocidade e a Fig. 4.13 mostra para a pressão. Também é mostrado na Fig. 4.14 o cálculo da norma  $L_2$  sobre os pontos lagrangianos para as componentes de velocidade. Nota-se que para todas as componentes de velocidade a norma é da ordem de  $10^{-17}$ , comprovando a alta acurácia do acoplamento entre MPEF e MFI quando se utilizam pontos coincidentes entre as duas malhas. Quando não há coincidência é esperado que a taxa de convergência e a acurácia diminuam, em virtude da necessidade do uso de interpolação e distribuição. No trabalho de Mariano (2011) foram feitos diversos estudos sobre a acurácia e a convergência do acoplamento entre as metodologias.

## 4.2 Validação

Uma vez verificado o código computacional, agora é necessária a validação que envolve comparações dos resultados entre as soluções numéricas e alguma solução de referência, seja ela numérica, analítica ou experimental. Neste caso, objetiva-se avaliar se as equações usadas no modelo são adequadas para representar o problema físico de interesse. Enquanto a veri-

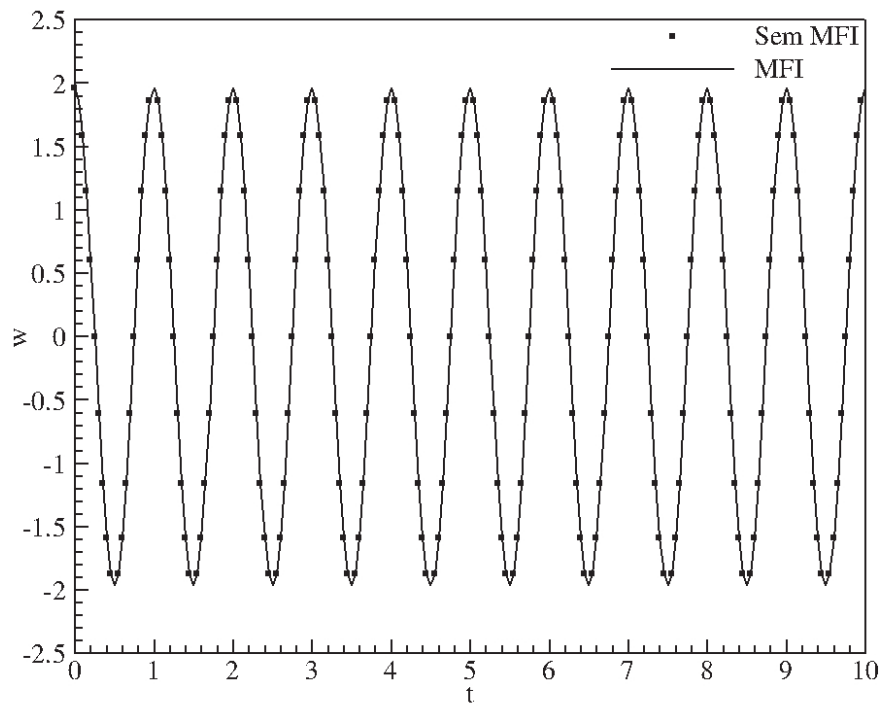


Figura 4.12: Sonda da Componente  $w$  de velocidade simulando com e sem MFI.

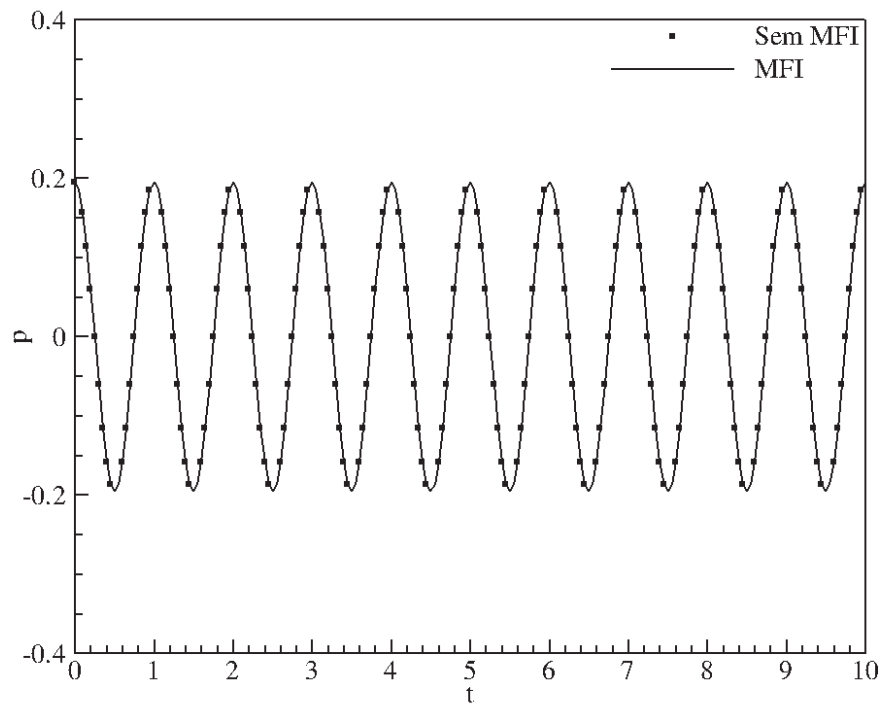


Figura 4.13: Sonda da pressão  $p$  simulando com e sem MFI.

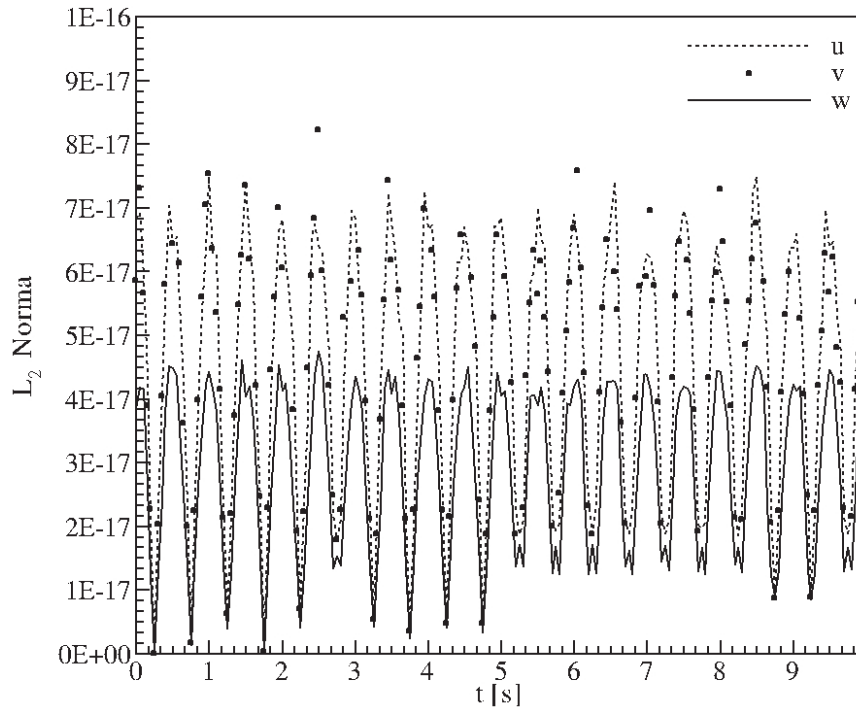


Figura 4.14: Norma  $L_2$  calculada sobre os pontos lagrangianos para as componentes do vetor velocidade.

ficação é um exercício matemático, na validação a representação física é o mais importante.

#### 4.2.1 Escoamento de Poiseuille

O escoamento de Poiseuille é mais um teste de verificação/validação de códigos, uma vez que, além de obedecer a um modelo matemático, neste caso ele também deve obedecer à física deste tipo de escoamento como, por exemplo, as condições de contorno de não deslizamento sobre as paredes do canal. O perfil de velocidade, o qual tem a vantagem de possuir uma solução analítica, é derivada da solução analítica encontrada para o escoamento sobre duas placas planas, as quais podem mover diferentes velocidade  $v_1$  e  $v_2$ , e é dada por:

$$u_a(z) = c_1 z^2 + c_2 z + c_3, \quad (4.8)$$

onde os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são dadas por:

$$c_1 = \frac{\Delta P}{2\rho\nu Ly}, \quad (4.9)$$

$$c_2 = \frac{1}{d} [(v_{\max} - v_{\min}) - c_1 (z_{\max}^2 - z_{\min}^2)], \quad (4.10)$$

$$c_3 = v_{\max} - c_1 z_{\max}^2 - \frac{1}{d} [(v_{\max} - v_{\min}) z_{\max} + c_1 z_{\max} (z_{\max}^2 - z_{\min}^2)]. \quad (4.11)$$

onde:  $z_{\max}$  e  $z_{\min}$  são as posições superior e inferior das placas,  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades impostas sobre as paredes superior e inferior respectivamente  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $d$  é a largura do canal e  $\Delta P$  é o gradiente de pressão dado por:  $\Delta P = P(x + Lx) - P(x)$ .

No presente caso o termo forçante é substituído por uma constante, a qual representa um gradiente de pressão. Este procedimento permite verificar a acurácia e a convergência sobre as condições de não deslizamento. No domínio complementar um gradiente inverso de pressão é imposto. No trabalho de Mariano et al. (2010) diversos tipos de gradiente de pressão são testados.

Os pontos de colocação são mostrados na Fig. 4.15(a), onde cada traço forte/fraco representa subdomínios os quais contém os pontos de colocação que serão resolvidos por cada processo. O domínio de cálculo é mostrado na Fig. 4.15(b) e as paredes são representadas pelas cores claras e são impostas via MFI, caracterizando a metodologia IMERSPEC. Entre as paredes está o escoamento de interesse, Fig. 4.15(c), e ao exterior tem-se os domínios complementares.

Todas as simulações foram realizadas com um domínio de  $Lz = 2[m]$  e as condições de contorno são impostas nas posições  $z_{\min} = 0,5$  e  $z_{\max} = 1,5[m]$ , com um passo de tempo calculado utilizando o critério de convergência com  $CFL = 0,95$ , Eq. 3.88, e as simulações foram realizadas até que o escoamento entrasse em regime permanente como mostrado na Fig. 4.16. Note-se que todas as condições de contorno são periódicas, inerentes ao MPEF. A velocidade máxima que se deseja atingir no centro do canal é  $v_{\max} = 1[m/s]$ , a largura do canal  $d = 1[m]$  e  $Re = 1$ . Assim calcula-se a viscosidade,

$$\nu = \frac{v_{\max} d}{Re}. \quad (4.12)$$

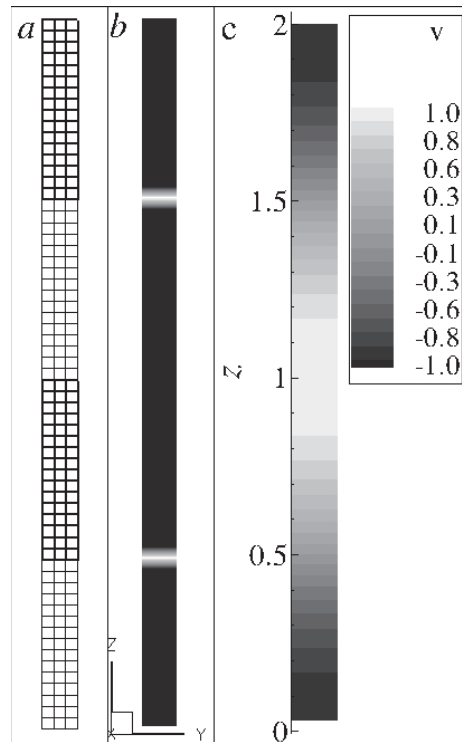


Figura 4.15: a) Pontos de colocação de cada processo; b) Domínio de cálculo e as condições de não deslizamento; c) Campo de velocidade desenvolvido.

Na primeira simulação utilizou-se uma malha de  $4 \times 4 \times 256$  pontos de colocação, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. Dentro do domínio de interesse tem-se  $4 \times 4 \times 128$ .

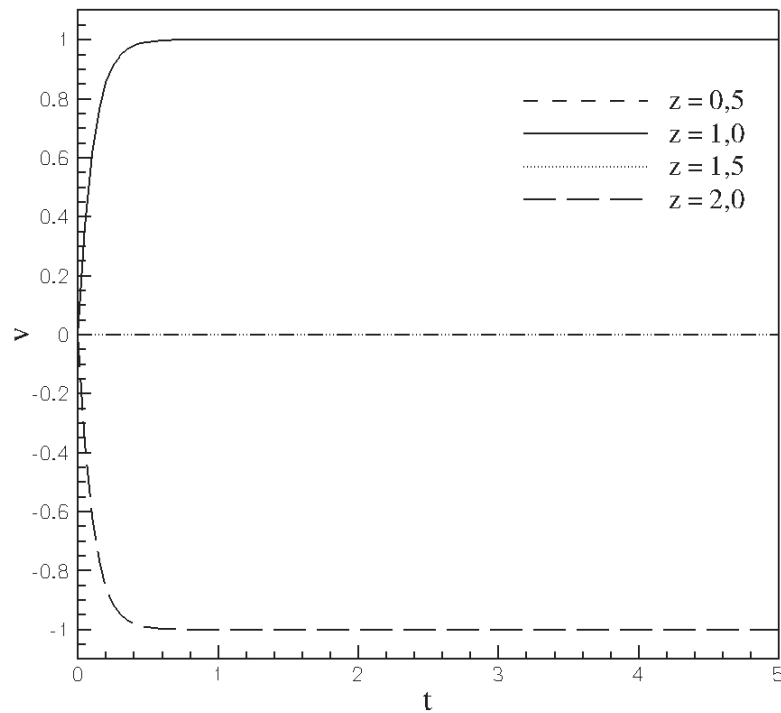


Figura 4.16: Sonda  $v$  em diferentes posições em relação a coordenada  $z$ .

A Fig. 4.17 ilustra a boa concordância do perfil de velocidade entre a solução numérica e a solução analítica. Fora do domínio de interesse ( $0,5 \leq z \leq 1,5$ ) a solução analítica é naturalmente, zero.

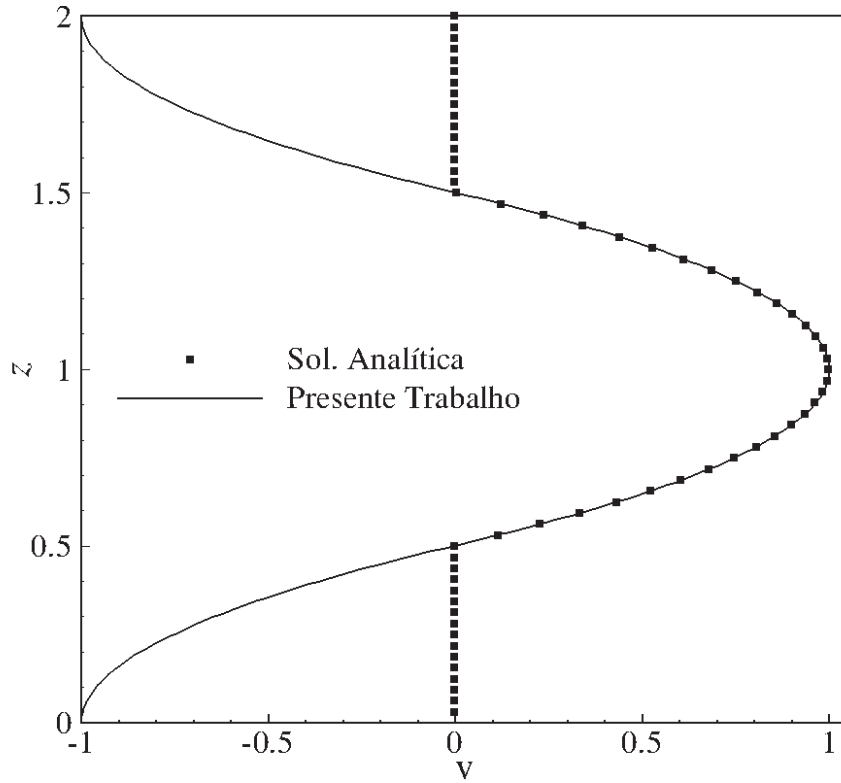


Figura 4.17: Perfil de velocidade analítica versus solução numérica.

A Fig. 4.18 ilustra a alta acurácia da metodologias IMERSPEC quando os pontos entre as duas malhas são coincidentes. Neste gráfico a norma  $L_2$  é calculada sobre os pontos lagrangianos e obtêm-se resultados da ordem de  $10^{-17}$  o que corresponde à acurácia da máquina quando se trabalha com dupla precisão. Esse resultado mostra que a condição de contorno não periódica de não deslramento dos escoamentos de Poiseuille são forçadas com a MFI com a acurácia de erro de máquina.

A Fig. 4.19 ilustra a taxa de convergência da norma  $L_2$  para o campo euleriano. O gráfico da Fig. 4.19 foi construído dobrando-se, na direção  $z$ , o número de pontos de colocação eulerianos (32, 64, 128 e 256), porém apenas dentro do domínio de interesse foi analisado, isso representa a metade dos número total de pontos de colocação. Para cada simulação realizada, após o escoamento entrar em regime, calculou-se o valor da norma  $L_2$  da componente de velocidade horizontal, e plotou-se em função do número de pontos de



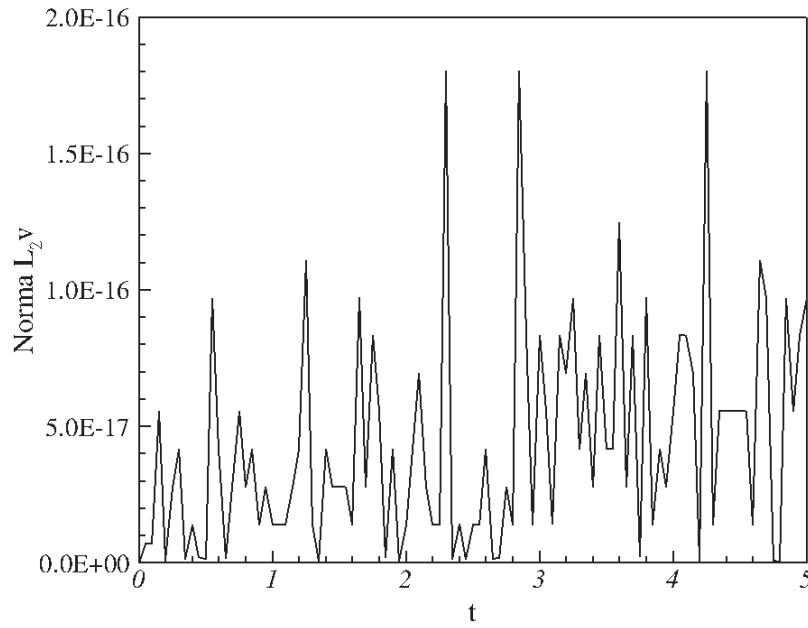


Figura 4.18: Norma  $L_2$  sobre os pontos Lagrangianos.

colocação dentro do domínio de interesse. Cabe destacar que o código IMERSPEC3DP obteve a máxima ordem possível, pois a solução analítica limita-se a derivadas de segunda ordem, limitando a ordem do problema.

Cabe ressaltar a diferença entre acurácia e taxa de convergência numérica. Entende-se por taxa de convergência o quão rápido a solução numérica converge para a solução analítica, em função do refinamento da malha formada pelos nós de colocação, ou seja, é a inclinação das retas que aparecem no gráfico da Fig. 4.19. Já acurácia está ligada à magnitude do erro (Fig. 4.19). Pode-se, por exemplo, ter uma metodologia com alta acurácia e taxa baixa convergência. A taxa de convergência da metodologia pode ser definida de acordo com as Eq. 4.13 (VILLAR, 2007), ou Eq. 4.14 (FERZIGER; PERIC, 2001),

$$q = \frac{\log \left( \frac{\|\phi_{2h} - \phi_e\|}{\|\phi_h - \phi_e\|} \right)}{\log(2)} \quad (4.13)$$

e

$$q = \frac{\log \left( \frac{\phi_{4h} - \phi_{2h}}{\phi_{2h} - \phi_h} \right)}{\log(2)} \quad (4.14)$$

onde  $\phi$  é a variável de interesse. No caso da Fig. 4.19 mostra-se a norma  $L_2$  calculada da

componente de velocidade horizontal,  $h$  é o espaçamento da malha,  $q$  é a taxa de convergência. O fator  $\log(2)$  aparece uma vez que dobra-se o refinamento da malha. Se o refinamento fosse triplicado apareceria  $\log(3)$ . O operador  $\| \cdot \|$  representa a norma  $L_2$ .

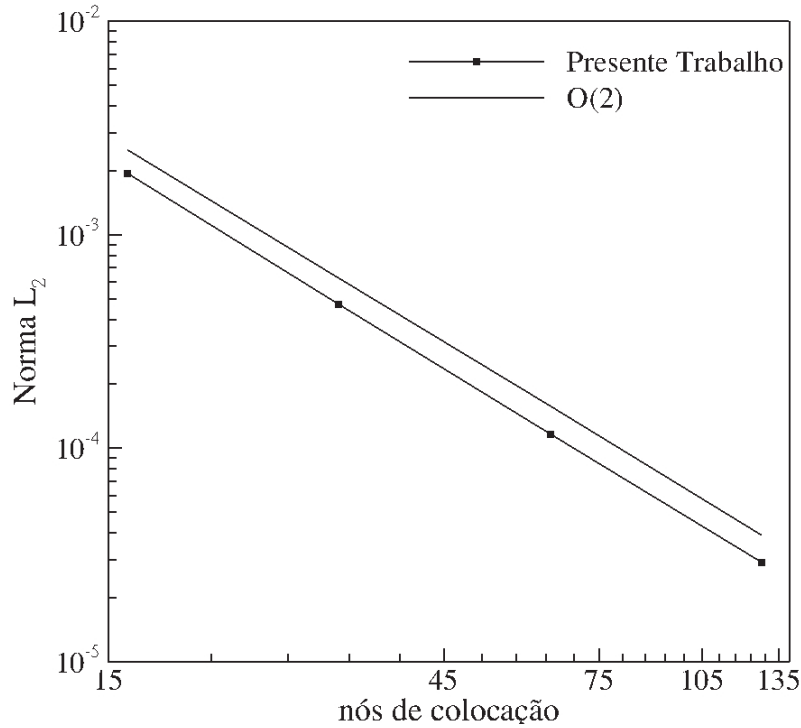


Figura 4.19: Taxa de convergência para a norma  $L_2$  euleriana.

#### 4.2.2 Turbulência homogênea e isotrópica

Uma vez verificado o código frente a uma solução analítica sintetizada e frente a um problema físico, apresenta-se a validação, que testa o código frente a resultados de referência, neste caso, para turbulência homogênea e isotrópica.

O autor do presente trabalho tem particular interesse em estudos sobre escoamentos turbulentos. Um dos meios mais comuns de estudar a turbulência é pela simulação de um escoamento conhecido como turbulência isotrópica, que se caracteriza pela ausência de paredes e que possui velocidade média zero. Além disso, pode-se adotar periodicidade para todas as variáveis sobre todas as fronteiras.

Uma das formas de simular a turbulência isotrópica é pela soma de uma força de corpo nas equações de Navier-Stokes Eq. 4.15, de forma a injetar uma quantidade de energia próxima aos menores números de onda do espectro de energia (ESWARAN; POPE, 1988;

ALVELIUS, 1999; SMIRNOV; SHI; CELIK, 2001):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_{bi}}{\rho}. \quad (4.15)$$

Este tipo de imposição de força é vantajoso quando se trabalha no espaço de Fourier, pois é necessária a restrição da aplicação da força a uma banda de números de onda. Essa tarefa não é trivial de ser realizada no espaço físico, porém no espaço de Fourier basta anular a essa força fora do intervalo de número de onda desejado (Eq.4.17). Para tanto, será adotada a forçagem proposta por Eswaran e Pope (1988). Esta forma foi escolhida dentre outras possíveis por permitir uma análise espectral em regime estatisticamente permanente. Ela é dada por:

$$\widehat{f}_{bi}(\vec{k}, t) = \wp_{ij}(\vec{k}) W_j(\vec{k}, t) \theta(\vec{k}), \quad (4.16)$$

onde  $\wp_{ij}(\vec{k})$  é o tensor projeção, definido na Eq. 3.61 e  $\theta(\vec{k})$  é um limitador da atuação do campo de força aos números de onda de interesse, dado por:

$$\theta(\vec{k}) = \begin{cases} 1 & \text{se } k_{\text{inf}} \leq |\vec{k}| \leq k_{\text{sup}} \\ 0 & \text{se } |\vec{k}| \leq k_{\text{inf}} \text{ ou } k_{\text{sup}} \leq |\vec{k}| \end{cases} \quad (4.17)$$

onde  $k_{\text{inf}}$  é o limite inferior,  $k_{\text{sup}}$  é o limite superior dos número de onda de imposição da força e  $W_j(\vec{k}, t)$  é o processo de Uhlenbeck-Örnstein de difusão estocástico (ESWARAN; POPE, 1988). Este processo é caracterizado por uma escala de decorrelação temporal ( $T_L$ ) e um parâmetro que regula a amplitude ( $\sigma$ ) das variações.

A equação para a densidade espectral de energia cinética turbulenta  $\left(E_k(\vec{k}, t)\right)$  para um escoamento com turbulência isotrópica é dado pela Eq. 4.18 (LESIEUR; MÉTAIS; COMTE, 2005):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E_k(\vec{k}, t) = T(\vec{k}, t) + f_{bk}(\vec{k}) \quad (4.18)$$

onde  $f_{bk}(\vec{k})$  é a energia injetada pelo termo fonte  $f_{bi}(\vec{k})$  dada pela Eq. 4.16 e  $T(\vec{k}, t)$  é

a taxa de transferência não linear de energia cinética turbulenta, entre as estruturas turbulentas de tamanho  $1/\vec{k}$  com as demais estruturas do espectro. Quando o espectro não é completamente resolvido, esse termo é decomposto em:

$$T(\vec{k}, t) = T_r(\vec{k}, t) + T_{sg}(\vec{k}, t), \quad (4.19)$$

onde  $T_{sg}(\vec{k}, t)$  representa a contribuição da transferência de energia entre as escalas resolvidas e as escalas sub-malha o qual normalmente é modelado por  $T_{sg}(\vec{k}, t) = -\widehat{2\nu_t}(\vec{k}, t) k^2 E_k(\vec{k}, t)$  e  $T_r(\vec{k}, t)$  representa a taxa de transferência de energia não linear entre uma estrutura resolvida de número de onda  $\vec{k}$  com as demais estruturas, também resolvidas, do espectro. Assim, ao se computar todos os números de ondas resolvidos:

$$\int_0^{k_c} T_r(\vec{k}) d\vec{k} = 0. \quad (4.20)$$

Assumindo que o regime seja estatisticamente estabelecido, que a energia seja injetada em uma banda do espectro ( $k_{inf} \leq k_i \leq k_{sup}$ ) e contabilizando a contribuição de todos os números de onda  $\vec{k}$ , a Eq. 4.18, torna-se:

$$\int_0^{k_c} (\widehat{2\nu} k^2) E_k(\vec{k}) d\vec{k} + \int_{k_c}^{\infty} (\widehat{2\nu_t} k^2) E_k(\vec{k}) d\vec{k} = \int_{k_{inf}}^{k_{sup}} f_{bk}(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (4.21)$$

Uma vez injetada energia no espectro, devido à transferência não linear, a energia é transferida para estruturas menores até chegar às escalas dissipativas e, quando atinge o regime permanente, o espectro de energia é sustentado, pois a injeção supre, na mesma taxa, a energia dissipada do espectro (Eq. 4.21). O mecanismo não linear de transferência de energia, promove um importante mecanismo físico conhecido como cascata de energia, onde as estruturas que compõem o espectro transfere energia de forma não linear, até as escalas dissipativas de Kolmogorov onde são dissipadas por efeitos viscosos.

Nos estudos de escoamentos homogêneos e isotrópicos, a teoria de Kolmogorov (1941) assume a hipótese de equilíbrio, onde toda a energia injetada no espectro deve ser dissipada por efeitos viscosos. O equilíbrio só pode ser atingido para escoamentos turbulentos estatísti-

camente estacionário. Da teoria de Kolmogorov (1941), estabelece-se também que o espectro de energia cinética turbulenta, em sua região inercial, assume a seguinte forma:

$$E_k(\vec{k}) = C_k \varepsilon^{2/3} \|\vec{k}\|^{-5/3}, \quad (4.22)$$

onde  $E_k(\vec{k})$  é o espectro de energia,  $\varepsilon$  é a taxa de dissipação viscosa,  $C_k$  é a constante de Kolmogorov e  $\|\vec{k}\|$  é a norma do vetor número de onda. Assim, comparar o espectro de um escoamento turbulento com a lei de Kolmogorov é uma das formas mais utilizadas para se validar uma modelagem da turbulência, por exemplo a modelagem via metodologia de simulação das grandes escalas-*LES*.

Esta validação tem como objetivo principal a avaliação do espectro de energia na zona inercial, em regime estatisticamente permanente. Para isso a força de corpo deve ser aleatória e restrita a maiores escalas (baixos números de onda), de forma a não interferir no restante do espectro, onde se busca simular a lei de  $-5/3$  de Kolmogorov. Somada a isso, uma verificação qualitativa de grandezas como o módulo de vorticidade são comparadas com dados de referência (LESIEUR, 1997).

A Tab. 4.1 apresenta os valores utilizados para os parâmetros anteriormente descritos. Estes valores foram escolhidos também por (SAMPAIO, 2006) e utilizados para a validação de uma nova modelagem de turbulência, proposta por ele. No presente trabalho os mesmo valores foram utilizados, uma vez que, não é objetivo deste trabalho um estudo detalhado sobre a influência de cada parâmetro no escoamento.

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados nas simulações de Turbulência Homogênea e Isotrópica.

Parâmetro	Valor utilizado
$k_{\text{inf}} [m^{-1}]$	$\Delta k$
$k_{\text{sup}} [m^{-1}]$	3
$T_L [s]$	0, 1
$\sigma [m/s^2]$	50
$\nu [m^2/s]$	$10^{-6}$

Em todas as simulações realizadas nesta seção, o domínio de cálculo utilizado é dado por  $Lx = Ly = Lz = 2\pi$ , com condições de contorno periódicas em todas as direções. O passo de tempo ( $\Delta t$ ) é calculado usando o critério *CFL* (Eq. 3.88) que fornece estabilidade

ao avanço temporal (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967). Nas simulações do presente trabalho, nesta seção, foi utilizado  $CFL = 0,95$ .

Desta forma, partindo de um campo velocidade nulo, utilizando uma força de corpo ( $f_{bi}$ ) para acelerá-lo, grandes estruturas turbulentas são formadas no interior do domínio. Essas estruturas transferem energia para todo espectro de estruturas turbilhonares, levando a energia injetada até as escalas dissipativas de Kolmogorov. Até que se alcance as escalas de comprimento de Kolmogorov, praticamente nenhuma energia é dissipada, sendo apenas transferida para estruturas de tamanhos diferentes por mecanismo não linear. Esse é um processo físico que pode ser simulado usando a metodologia *DNS*. Quando a metodologia *LES* é utilizada o modelo de turbulência faz o papel de transferir a energia pelas escalas de corte determinadas pelo filtro da malha utilizada. Ao se atingir o regime permanente, no sentido estatístico, a energia injetada deve ser igual à energia dissipada, a uma taxa de dissipação  $\varepsilon$ .

Outra opção é, ao invés de partir de um campo em repouso, parte-se de um campo de velocidade gerado por perturbações aleatórias, restritas a uma pequena banda de baixos números de onda do espectro de energia. Este artifício pode ser usado para diminuir o tempo de processamento.

As análises qualitativas do escoamento em cada caso estudado foram feitas através de visualizações de isosuperfície do módulo da vorticidade. A análise quantitativa foi realizada sobre os espectros de energia cinética turbulenta das simulações em diferentes instantes de tempo, calculados, segundo a metodologia proposta por (POPE, 2000), a partir dos campos de velocidade no espaço de Fourier.

A Fig. 4.20 mostra a evolução temporal do espectro de energia cinética turbulenta para uma simulação onde não se utilizou nenhum tipo de modelagem de turbulência. Para tal caso, parte-se dos campos de velocidade gerado por perturbações aleatórias, descritos anteriormente e a partir daí, uma quantidade de energia é injetada via termo forçante, de forma constante no tempo. Nota-se que a energia se acumula nos altos números de onda do espectro, até a divergência da simulação. Nota-se que, sem o uso de uma modelagem sub-malha da turbulência, esse comportamento era esperado. Isso é devido ao fato que o código pseudoespectral desenvolvido apresenta baixíssima difusão numérica, o que, quando