

ADAILTON SILVA BORGES

**DESENVOLVIMENTO DE PROCEDIMENTOS DE
MODELAGEM DE INTERAÇÃO
FLUIDO-ESTRUTURA COMBINANDO A TEORIA DE
VIGAS DE COSSERAT
E A METODOLOGIA DE FRONTEIRA IMERSA**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

B732d Borges, Adailton Silva, 1981-
Desenvolvimento de procedimentos de modelagem de interação fluido-estrutura combinando a Teoria de Vigas de Cosserat e a metodologia de fronteira imersa [manuscrito] / Adailton Silva Borges. - 2010. 207 f. : il.

Orientadores: Domingos Alves Rade e Aristeu da Silveira Neto.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Dinâmica dos fluidos - Métodos computacionais - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. I.Rade, Domingos Alves. II. Silveira Neto, Aristeu da, 1955- III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 532.51:519.6

AGRADECIMENTOS

A Deus pela presença constante em meu caminhar.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica por toda a estrutura fornecida para a realização deste trabalho.

Aos profs. Domingos e Aristeu, pela oportunidade, pelo exemplo de força, determinação e profissionalismo.

Aos amigos dos laboratórios LMest e MFlab pela amizade e discussões que muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo Felipe que colaborou de única e essencial para a concretização deste trabalho.

A minha noiva Jaqueline pelo amor, dedicação e paciência.

Ao meu irmão Adriano pelo incentivo, motivação e apoio integral.

Aos meus pais e minha família, pelo apoio ao longo de todo este caminho.

A CNPq, Capes e Petrobras pelo apoio financeiro.

Borges, A. S. **Desenvolvimento de procedimentos de modelagem de interação fluido-estrutura combinando a teoria de vigas de Cosserat e a metodologia de fronteira imersa.** 2010. 207 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

A presente tese descreve o trabalho de pesquisa realizado, com o objetivo de desenvolver, implementar e avaliar um procedimento de modelagem tridimensional de fenômenos fluido-estruturais que envolvem estruturas esbeltas, tais como vigas, barras e cabos. A nova abordagem adotada consiste na combinação da teoria de vigas de Cosserat aplicada a estruturas esbeltas, que leva em consideração as não-linearidades geométricas, e a metodologia de fronteira imersa, que é usada para representar a interação entre os domínios estrutural e fluido. O estudo está incluído no âmbito de *Vortex-Induced Vibrations*, que é um tema de grande interesse para a indústria petrolífera, especialmente em relação a modelagem de *risers* utilizados para exploração de petróleo em águas profundas. Segundo a teoria de vigas de Cosserat, a configuração deformada da viga é descrita através do vetor deslocamento da curva de centróides, e uma base móvel, rigidamente unida à seção transversal da viga, em relação a um referencial inercial. A principal vantagem desta teoria é que esta é geometricamente exata. E o método de elementos finitos é empregado para a discretização das equações do movimento. De acordo com a metodologia de fronteira imersa, a força sobre a interface sólido-fluido é calculada dinamicamente através das equações de balanço da quantidade de movimento sobre uma partícula de fluido na interface. As principais características da metodologia proposta são avaliadas por meio de uma série de simulações numéricas, tanto em regime estático como dinâmico, sobre o modelo estrutural, numa primeira fase, e o completo modelo fluido-estrutura, em uma segunda etapa. Os resultados obtidos permitem avaliar a precisão, as principais vantagens e limitações da metodologia, especialmente quanto aos aspectos numéricos. Além disso, eles permitiram colocar em evidência alguns aspectos fenomenológicos relevantes relacionados com o comportamento dinâmico de estruturas cilíndricas com diferentes níveis de flexibilidade, sujeitas ao escoamento caracterizado por diferentes valores de número de Reynolds.

Palavras-chave: Interação Fluido-estrutura, Teoria de vigas de Cosserat, Metodologia de Fronteira imersa, Elementos Finitos, Dinâmica de Fluidos computacional.

Borges, A. S. **Developing procedures for modeling fluid-structure interaction by combining the Cosserat beams theory and immersed boundary methodology**. 2010. 207 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Abstract

The present report describes the research work carried-out with the aim of developing, implementing and evaluating a three-dimensional modeling procedure of fluid-structure phenomena involving slender structures, such as beams, bars and cables. The novel approach adopted consists of the combination of the Cosserat theory applied to slender beams, which accounts for geometrical nonlinearity, and the Immersed Boundary methodology, which is used to represent the interactions between the structural and fluidic domains. The study is included in the scope of Vortex-Induced Vibrations, which is a topic of great interest in the oil industry, especially as related to the modeling of risers used for oil exploitation in deep seas. According to the Cosserat theory, the deformed configuration of the structure is described in terms of the displacement vector of the curved formed by the cross-sections center of area, and the orientation of a vector bases fixed to each cross-section, with respect to an inertial reference frame. The main advantage of this theory is that is geometrically exact. Finite element is employed for discretization of the equations of motion. According to the Immersed Boundary methodology, the solid-fluid interface forces are calculated by enforcing momentum balance to the fluid particles over the interface. The main features of the proposed methodology are evaluated by means of a number of numerical simulations, both in static and dynamic regimes, regarding the structural model, in a first step and the complete fluid-structure model, in a second step. The results obtained enable to evaluate the accuracy and the main advantages and shortcomings of the methodology, especially regarding the numerical aspects. Also, they enabled to put in evidence some relevant phenomenological aspects related to the dynamic behavior of cylindrical structures with various levels of bending flexibility, subjected to transverse flows characterized by different values of the Reynolds number.

Keywords: Fluid-structure interaction, Cosserat Theory, Immersed Boundary Methodology, Finite Elements, Computational Fluid Dynamics.

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS LATINOS

a	extremidade do elemento de viga de Cosserat
$Axyz$	eixos auxiliar móvel, movimento de translação
$Ax_1y_1z_1$	eixos auxiliar móvel, movimento de rotação
b	extremidade do elemento de viga de Cosserat
$\mathbf{d}_i(s, t)$	vetores diretores da base móvel
$D_h(\mathbf{X} - \mathbf{x})$	função distribuição de força
\mathbf{e}_i	vetores unitários da base inercial
E	módulo de elasticidade
F	base inercial
\mathbf{F}	vetor de força
\mathbf{F}^{NC}	resultante das forças não conservativas
$F_i(\mathbf{X}, t)$	força lagrangiana
$\mathbf{F}_{acc}(\mathbf{X}, t)$	força lagrangiana de aceleração
$\mathbf{F}_{inert}(\mathbf{X}, t)$	força lagrangiana inercial
$\mathbf{F}_{visc}(\mathbf{X}, t)$	força lagrangiana viscosa
$\mathbf{F}_{press}(\mathbf{X}, t)$	força lagrangiana de pressão
$\mathbf{f}(s, t)$	força externa por unidade de comprimento
$f_i(\mathbf{x}, t)$	força lagrangiana euleriana
$\mathbf{f}_a^c(t), \mathbf{f}_b^c(t)$	forças externas
$\mathbf{f}_a^i(t), \mathbf{f}_b^i(t)$	forças internas
$\mathbf{f}^{d(e)}(t, \mathbf{q}^{(e)})$	forças carregamento distribuído
G	módulo de cisalhamento

$\mathbf{g}^{(e)}(\mathbf{q}^{(e)})$	vetor elementar não linear que contém os termos quadráticos e cúbicos de $\mathbf{q}^{(e)}$
$\mathbf{g}(\mathbf{q}^G)$	vetor não linear global que contém os termos quadráticos e cúbicos de \mathbf{q}^G
$\mathbf{h}(s, t)$	quantidade de momento angular por unidade de comprimento.
h	espaçamento do domínio euleriano discretizado
$\mathbf{I}(s)$	matriz de inércia de massa
J_1	rigidez à flexão na direção x
J_2	rigidez à flexão na direção y
J_3	representa a rigidez à torção
$\mathbf{K}^{(e)}$	matriz elementar de rigidez linear
\mathbf{K}	matriz de rigidez global
K_1	rigidez ao cisalhamento direção x
K_2	rigidez ao cisalhamento direção y
K_3	resistência ao alongamento
$L(\mathbf{q}^{(e)}, \dot{\mathbf{q}}^{(e)})$	lagrangiano
L	comprimento do elemento de viga de Cosserat
L_2	norma que relaciona velocidade da fronteira.
$\mathbf{l}(s, t)$	momento externo por unidade de comprimento
l	pontos lagrangianos.
$\mathbf{l}_a^i(t), \mathbf{l}_b(t)$	momentos de interação interna
$\mathbf{l}_a^c(t), \mathbf{l}_b^c(t)$	momentos externos concentrados
$\mathbf{M}^{(e)}$	matriz de massa elementar (linear)
\mathbf{M}	vetor de momentos
$\mathbf{m}(s, t)$	momento de contato por unidade de comprimento
$\mathbf{n}(s, t)$	forças de contato por unidade de comprimento

$OXYZ$	sistema de eixos inercial
P_j	campo de pressão lagrangiano
p	campo de pressão euleriano
Q_j	esforços generalizados
\mathbf{q}_a	deslocamento generalizado na extremidade a
\mathbf{q}_b	deslocamento generalizado na extremidade b
$\mathbf{q}^{(e)}$	vetor de deslocamentos generalizados
\mathbf{q}^G	vetor de deslocamentos globais
$\mathbf{r}(s, t)$	vetor posição da linha de centróides
$\bar{\mathbf{r}}(\bar{s})$	vetor posição da linha de centróides adimensional
$r_{B/A}^l$	representa a posição do l -ésimo ponto lagrangeano em relação ao eixo $Axyz$
r'_i	posição dos pontos lagrangianos por “fatia” no eixo $Ax_1y_1z_1$.
\mathbf{r}_B^l	posição do ponto lagrangeano
S	base móvel
s	posição da seção transversal ao longo da linha de centróides
\bar{s}	posição adimensional seção transversal ao longo da linha de centróides
\mathbf{T}	matriz de transformação
${}^F\mathbf{T}^S$	matriz de transformação
T	energia cinética total do sistema
T^*	energia cinética por unidade de comprimento
t	variável temporal
U_i	componentes do vetor velocidade das partículas de fluido no domínio lagrangiano
U^*	energia potencial elástica por unidade de comprimento
U_i^*	velocidade estimada domínio lagrangiano
$\mathbf{u}(s, t)$	deformação angular

u_i	componentes do vetor velocidade das partículas de fluido no domínio euleriano
u_i^*	velocidade estimada domínio euleriano
V	energia potencial associada às forças e momentos impostos conservativos
$\mathbf{v}(s, t)$	deformação linear
W_g	função peso da distribuição
$x(s, t), y(s, t), z(s, t)$	posição do centróide
$\bar{x}(\bar{s}), \bar{y}(\bar{s})$ e $\bar{z}(\bar{s})$	posição adimensional do centróide
$x_i(s, t), y_i(s, t), z_i(s, t), \phi_i(s, t)$	aproximações das funções de forma de ordem i

SÍMBOLOS GREGOS

δ	representa o operador variacional
δW^d	trabalho virtual realizado por um carregamento distribuído
δW_{NC}^F	trabalho realizado por forças e momentos impostos não conservativos
ε	parâmetro de perturbação
$\boldsymbol{\eta}^d$	momentos distribuídos
ν	viscosidade cinemática
$\boldsymbol{\xi}^d$	forças distribuídas
ρ	massa específica
τ	variável adimensional de tempo
φ	ângulo de torção da seção transversal
ϕ_x, ϕ_y e ϕ_z	ângulos de rotação da seção transversal
$Y_i(s)$	momentos principais de inércia
ΔS	espaçamento do domínio lagrangiano discretizado

Ω	vetor velocidade angular da seção transversal
$\omega(s, t)$	vetor de velocidade angular

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	01
1.1. Contextualização do trabalho de pesquisa	01
1.2. Objetivos da tese	10
1.3. Organização da tese	11
CAPÍTULO II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1. Interação fluido-estrutura	13
2.2. Vibrações induzidas pelo escoamento	15
2.3. Vibrações induzidas por desprendimentos de vórtices em risers de exploração de petróleo	18
2.4. Método da fronteira imersa	26
2.5. Teoria de vigas de Cosserat	29
CAPÍTULO III - TEORIA DE VIGAS DE COSSERAT	33
3.1. Hipóteses básicas e suposições cinemáticas	34
3.2. Equações do Movimento	40
3.3. Funções de forma para elementos de viga de Cosserat	44
3.4. Análise dinâmica pelo método de elementos finitos	53
3.4.1. <i>Energias cinética e potencial da viga</i>	54
3.4.2. <i>Trabalho virtual das forças e momentos não conservativos</i>	57
3.5. Montagem das equações de movimento em nível global	61
CAPÍTULO IV	
 MODELAGEM DO FLUIDO E ACOPLAMENTO DOS DOMÍNIOS	63
4.1. Método da fronteira imersa	63
4.1.1. <i>Formulação para domínio euleriano</i>	65
4.1.2. <i>Cálculo da força lagrangiana</i>	66
4.1.3. <i>Discretização das equações do domínio euleriano e lagrangiano</i>	67

4.2. Modelo matemático para a interface fluido-sólido	69
4.2.1. <i>Comunicação entre os domínios euleriano e lagrangiano</i>	69
4.2.2. <i>Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de imposição direta da força</i>	72
4.2.3. <i>Múltipla imposição da força (Multi Forçagem Direta)</i>	74
4.3. Acoplamento entre os domínios fluido e estrutural	76
4.3.1. <i>Compatibilização entre as diferentes malhas - domínio fluido e domínio estrutural</i>	78
4.3.2. <i>Transferência das forças aplicadas da malha langrangiana para os pontos nodais</i>	81
4.3.3. <i>Transferência de dados do ponto nodal para malha lagrangiana</i>	84
CAPÍTULO V RESULTADOS	87
5.1. Análise Estática	88
5.2. Análise Dinâmica	91
5.2.1. <i>Avaliação e validação da metodologia</i>	91
5.2.2. <i>Avaliação de métodos numéricos de integração das equações do movimento</i>	99
5.2.3. <i>Comparação entre a teoria de vigas Euler-Bernoulli e de Cosserat</i>	108
5.3. Interação Fluido-estrutura	113
5.3.1 - <i>Caso 1 – Estrutura estática</i>	113
5.3.2 - <i>Caso 2 - Estrutura Flexível I</i>	124
5.3.3. <i>Caso 3 – Estrutura Flexível II</i>	149
5.3.4. <i>Caso 4 – Estrutura Flexível III</i>	155
5.3.5 <i>Comparação dos coeficientes de arrastos normal para diferentes números de Reynolds</i>	168

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	173
CAPÍTULO VII - REFERÊNCIAS	177

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. Contextualização do trabalho de pesquisa

Problemas de interação fluido-estrutura aparecem em diferentes áreas da Engenharia onde o sistema estrutural considerado ou alguns de seus componentes estão diretamente em contato com fluidos. São numerosos os exemplos, como aeronaves, motores a jato, tubulações, reatores nucleares e químicos, pontes, torres, plataformas *off-shore*, etc. Por esta razão, existe um crescente interesse da comunidade científica mundial pela busca de soluções cada vez mais acuradas dos problemas de interação fluido-estrutura.

Nota-se a preocupação em buscar técnicas eficientes para a determinação das respostas dinâmicas de estruturas na presença de fluidos em movimento. No passado esta análise computacional era feita confiando em um total ou substancial desacoplamento entre os fenômenos relacionados ao fluido e aqueles pertinentes aos sistemas estruturais. Hoje em dia, sabe-se que para uma análise mais refinada dos efeitos fluido-estruturais é necessário contabilizar os efeitos provocados por estes dois meios de forma acoplada. Modernas técnicas de modelagem e maior poder computacional fizeram com que novas metodologias se tornassem viáveis.

Dentro deste contexto destacam-se os problemas existentes na área petrolífera, em que praticamente todos os tipos de plataformas de exploração de reservas submarinas possuem estruturas cilíndricas expostas às correntes marítimas. Plataformas com torres rígidas de sustentação, plataformas flutuantes ou tracionadas, SPAR e TLP (*Tension-Led Platform*), cascos de embarcações convertidos em unidades FPSO (*Floating, Production, Storage and Offloading*) que apresentam cabos, amarrações e dutos submersos no escoamento marítimo, são alguns exemplos de interesse na indústria de petróleo (Figura 1.1). Outro exemplo

clássico são as plataformas do tipo SPAR, as quais são, em essência, um grande casco cilíndrico flutuando, equilibrado por cabos tensionados (ASSI, 2005).

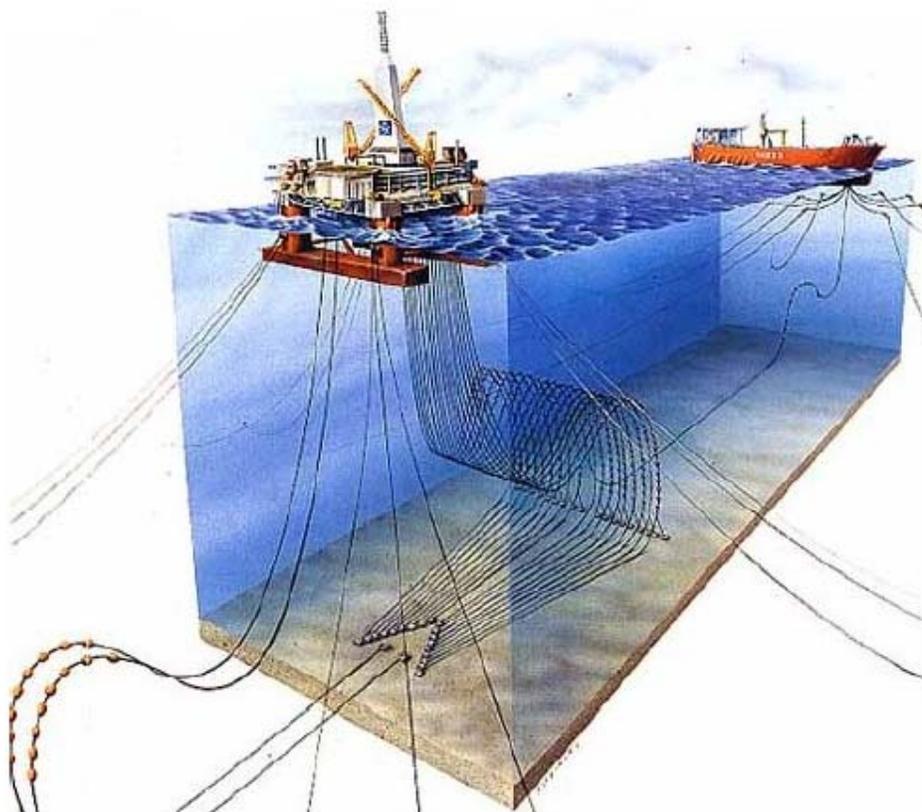


Figura 1.1. Plataforma semi-submersível e uma embarcação FPSO.

(fonte: www.offshore-technology.com)

Dentre os problemas fundamentais relacionados ao projeto e à manutenção de estruturas *offshore*, destaca-se o fenômeno de vibrações induzidas por desprendimento de vórtices (em inglês, *Vortex-Induced Vibrations* - VIV), que constitui em uma excitação estrutural resultante da interação hidroelástica entre o fluido e a estrutura. Estas vibrações podem levar a estrutura à ruína por fadiga ou através do aumento dos esforços estruturais decorrentes das cargas adicionais transmitidas pelo fluido durante seu movimento.

Por se tratar de um fenômeno hidroelástico, a abordagem mais adequada, embora seja mais complexa, para a modelagem do fluido na análise de VIV é aquela baseada em CFD (*Computational Fluid Dynamics*), isto é, a utilização de modelos computacionais calcados na resolução numérica das equações da dinâmica dos fluidos e da dinâmica estrutural. Através desses modelos, é possível considerar o comportamento do fluido e da estrutura de forma

acoplada, ou seja, possibilita levar em conta que o fluido aplique cargas sobre a estrutura e que o movimento desta influencie o escoamento. Geralmente, as análises em CFD são usadas para melhor entender o fenômeno e determinar os coeficientes hidrodinâmicos.

A principal desvantagem destes métodos é seu alto custo computacional, fato que tem resultado no uso de técnicas alternativas de modelagem simplificada. Entretanto, com os recentes avanços obtidos, tanto nas metodologias numéricas, quanto no aumento da capacidade computacional, estas técnicas vêm se tornando viáveis ao estudo de problemas de crescente complexidade.

Do ponto de vista da implementação computacional, uma dificuldade encontrada em se simular escoamentos utilizando CFD aplicada a estruturas de geometrias complexas, móveis ou deformáveis é fazer com que estas geometrias sejam identificadas adequadamente ao longo do tempo, no interior do escoamento. Duas abordagens básicas são possíveis para simulação de corpos imersos em um escoamento: malhas que se adaptam ao corpo (chamadas de *Body-Fitted Meshes*) e malhas que não se adaptam ao corpo, mas que são utilizadas no contexto de novas metodologias do tipo fronteira imersa. Os exemplos mais comuns da primeira abordagem são as malhas não estruturadas, como exemplifica a Figura 1.2. Com relação à segunda abordagem, a Figura 1.3 ilustra uma geometria muito complexa imersa em uma malha cartesiana. Nesta última, dá-se uma idéia de dois domínios acoplados, porém com malhas não coincidentes.

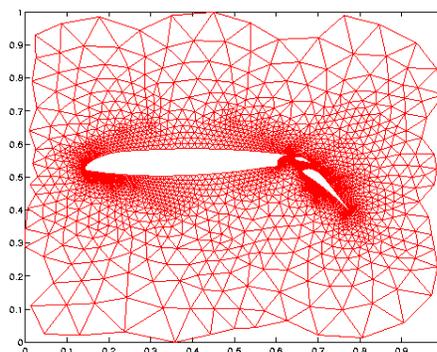


Figura 1.2 - Exemplo de malha não estruturada
(fonte: <http://www.nada.kth.se/~mihai/airfoil1.gif>).

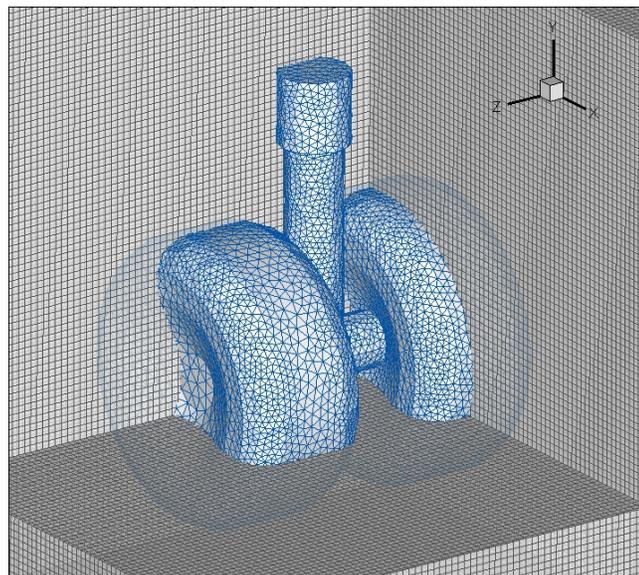


Figura 1.3 - Exemplo de malha que não se adapta ao corpo imerso (VEDOVOTO, 2007).

No caso das malhas que não se adaptam ao corpo, a técnica numérica mais utilizada é a dos domínios fictícios (*Fictitious Domains* - FD) (YU, 2005), que foi primeiramente desenvolvida pelos soviéticos, que vem sendo utilizada há mais de 30 anos (GLOWINSKI e PÉRIAUX, 1998).

A técnica FD engloba três tipos de modelos: i) modelos que não se baseiam em forças de corpo; ii) modelos que usam forças de corpo e usam multiplicadores de Lagrange Distribuídos (*Distributed Lagrange Multipliers* – DLM), com o intuito de obter uma pseudo-força de corpo. Este método é muito utilizado em escoamentos contendo particulados (OLIVEIRA, 2006); iii) modelos baseados no conceito de Fronteira Imersa, que utilizam forças de corpo, porém não utilizam DLM.

O método de fronteira imersa (*Immersed Boundary Method* – IBM) surgiu como uma alternativa eficiente aos métodos cujas malhas se ajustam às fronteiras para tratamento de problemas envolvendo geometrias complexas, móveis e deformáveis. No método de fronteira imersa o corpo é representado por um campo de forças que é inserido nas equações do fluido, fazendo com que o corpo seja modelado indiretamente. O método foi desenvolvido por Peskin (1972), *apud* Peskin (2002), cuja motivação era simular o escoamento de sangue em válvulas cardíacas.

Nos problemas envolvendo interação fluido-estrutura, no que diz respeito à modelagem do comportamento da estrutura, duas possibilidades existem: 1^a) ela é considerada idealmente rígida, o que se justifica nos casos em que são esperadas pequenas deformações. Neste caso, a estrutura modelada com base nas equações da dinâmica dos corpos rígidos, a partir das equações de Newton-Euler, cuja resolução permite determinar um conjunto de coordenadas que caracterizam o movimento do centro de massa e o movimento angular da estrutura (MERIAM, 1990, SHAMES, 1997); 2^a) a estrutura é considerada como um sólido deformável. Neste caso, seu comportamento deve ser modelado com base nos conceitos da mecânica dos sólidos, sendo representado por um conjunto de coordenadas que representam a posição espacial de cada ponto individual do corpo, considerando ainda as características mecânicas específicas do material que o constitui (BORGES, et al., 2009; ALAMO, 2006).

Tradicionalmente, a modelagem da estrutura é feita com base em sua geometria, em função das hipóteses específicas adotadas. Os tipos estruturais mais comuns são cabos flexíveis, barras, vigas, placas planas finas ou espessas, cascas cilíndricas ou esféricas, e sólidos maciços (BATHE, 1996). Considerando o tipo particular de estrutura enfocada neste trabalho, serão abordadas, resumidamente, a seguir, as características estruturais envolvidas na análise de tubos cilíndricos sujeitos a excitação proveniente do desprendimento de vórtices.

Dentro das várias estruturas cilíndricas utilizadas em plataformas de exploração de reservas submarinas destacam-se os *risers*. Estas estruturas cilíndricas ligam as plataformas de extração de petróleo ao leito oceânico, em seu interior circulando principalmente o óleo extraído, gases, água e detritos sólidos provenientes da perfuração do solo. São confeccionados em dois tipos: *risers* rígidos, construídos com chapas de aço sem costuras (para diâmetros de 12 a 18 polegadas) ou costuradas com solda (com diâmetro acima de 18 polegadas), e *risers* flexíveis confeccionados com malhas estruturais de aço e fibras poliméricas revestidos interna e externamente com capas de polímeros de alta densidade. Nota-se que, em ambos os casos, os *risers* têm diâmetro aproximado de 20 a 50 centímetros, sendo estas dimensões muito pequenas quando comparadas ao seu comprimento, que é da ordem de centenas de metros ou mesmo de quilômetros. A razão entre o comprimento e o diâmetro de um *riser* é denominada *razão de aspecto*. Devido à ação das correntes marítimas e do movimento oscilatório da plataforma, provocado por ondas e pelo vento, estas estruturas respondem com comportamentos dinâmicos variados, oscilando em diferentes frequências, amplitudes, direções e modos.

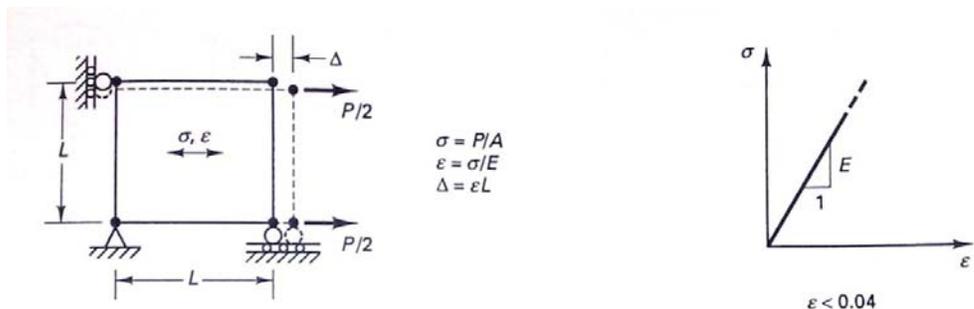
Pesce (1997) discute que o comportamento de um *riser* longo, nestas condições, pode ser melhor compreendido pela teoria de linhas flexíveis do que pela teoria clássica de vigas, devido à grande razão de aspecto.

Como mostrado na Figura 1.1, uma plataforma dispõe de vários *risers*. Um conjunto destes pode ter sua vida útil de operação reduzida quando são danificados por colisões com *risers* vizinhos ou sofrem trincas por fadiga estrutural. Uma extensa linha de pesquisa se desenvolve para compreender o comportamento de uma linha flexível lançada em arranjos do tipo catenária sob o efeito de correntes marítimas (PESCE, 1997; RAMOS, 2001; MARTINS, 2000).

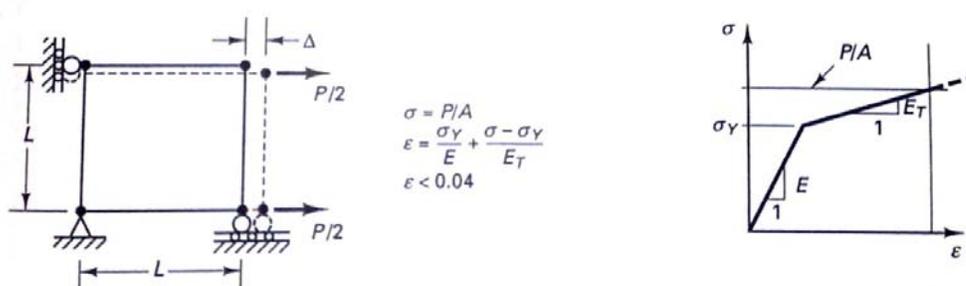
Além da geometria da estrutura considerada, a modelagem estrutural requer a representação adequada do comportamento no que diz respeito à relação entre os esforços aplicados e a deformação exibida. Neste sentido, dois tipos de comportamento podem ser identificados no âmbito da mecânica estrutural: linear e não linear. O comportamento mais simples é o comportamento linear, que se caracteriza pela proporcionalidade entre as cargas aplicadas e os deslocamentos e deformações da estrutura, verificando-se, ainda, que a deformação não altera a forma de aplicação do carregamento. Estas condições são condicionadas à ocorrência de pequenas deformações, no domínio das quais prevalece a Lei de Hooke, e pequenos deslocamentos e rotações, que não influenciam a forma de aplicação das cargas. Por outro lado, o comportamento não linear pode ocorrer de duas formas distintas, a saber (BATHE, 1996):

- a) **Não linearidade física ou material**, que ocorre quando não existe proporcionalidade entre os esforços aplicados e as deformações. Conforme mostrado na Fig.1.4b, isto ocorre devido a uma característica intrínseca do material que compõe a estrutura. Note-se que, para uma ampla gama de materiais metálicos como o aço de baixo carbono e o alumínio, o comportamento é linear para pequenas deformações, passando a ser não linear para deformações maiores.
- b) **Não linearidade geométrica**, que ocorre quando os deslocamentos e rotações sofridas pela estrutura influenciam a forma como as cargas externas são aplicadas. E ainda, esta forma de aplicação, por sua vez, influencia a deformação da estrutura. Este tipo de não linearidade pode ocorrer de duas formas, mostradas na Fig.1.4c e 1.4d. No primeiro caso, têm-se grandes deslocamentos, grandes rotações e

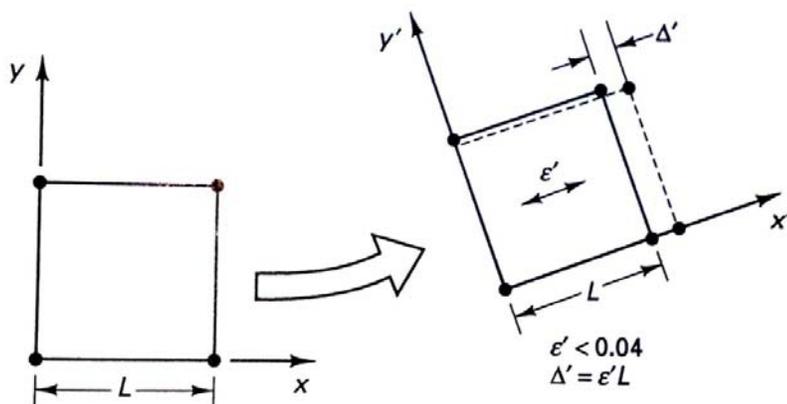
pequenas deformações. Nota-se que em essência o material está sujeito a deformações infinitesimais medidas em uma base móvel solidária à estrutura $x'y'$. Entretanto essa base realiza grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Já o segundo caso representa uma análise mais geral, em que o material está sujeito a grandes deslocamentos e grandes deformações (BATHE, 1996).



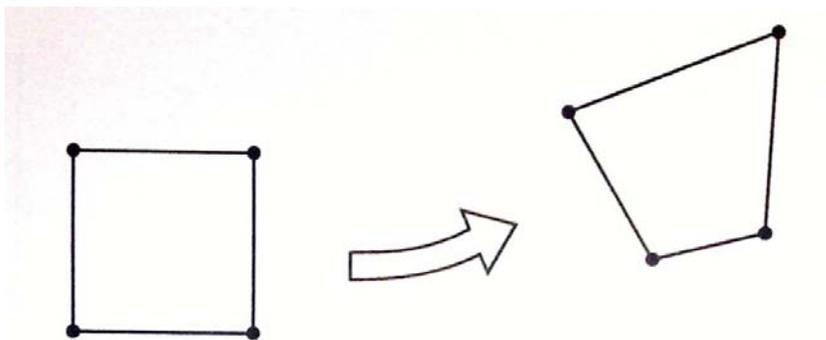
(a) Comportamento linear: pequenos deslocamentos e pequenas deformações.



(b) Não linearidade física: pequenos deslocamentos e grandes deformações



(c) Não linearidade geométrica: grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações.



(d) Não linearidade física e geométrica: grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações.

Figura 1.4 - Ilustração de tipos de comportamento linear e não linear

Note-se que, considerando a discussão acima, que no âmbito da teoria clássica de modelagem por elementos finitos assume-se que os deslocamentos e as deformações são infinitesimalmente pequenos e o material é linearmente elástico, conforme mostrado na Figura 1.4(a), teoria de vigas de Euler e Timoshenko (BATHE, 1996). Em alguns casos esta condição não pode ser satisfeita, o que acarreta a inclusão de não linearidades ao modelo. A Figura 1.4(b-d) ilustra os principais tipos de não linearidades.

Considerando novamente as estruturas de interesse deste trabalho, os *risers* de exploração de petróleo, tem-se que estes podem ser enquadrados, devido a sua grande razão de aspecto, em estruturas que possuem grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações (PESCE, 1997), ou seja, como estruturas que apresentam exclusivamente não linearidade geométrica. Deve-se, então, fazer a escolha adequada da teoria subjacente aos procedimentos de modelagem que levem em conta este tipo de não linearidade.

Dentre as diversas variantes discutidas, existem algumas técnicas que podem ser aplicadas a estes tipos de estruturas, dentre elas pode-se citar a teoria de vigas de Cosserat. Uma das principais bibliografias recorrentes a esta teoria, pode ser encontrado no livro de Antman (1995). Antes de entrar propriamente nesta metodologia, torna-se necessário fazer um ressalvo sobre a terminologia empregada. Em parte dos textos em inglês, incluindo o livro citado, esta teoria é denominada *theory of Cosserat rods*. O termo *rod* é geralmente traduzido por *barra*. Entretanto, entende-se que o termo *viga* é mais apropriado para designar elementos estruturais que trabalham em flexão. Desta forma, opta-se, neste trabalho, pela denominação *vigas de Cosserat*.

A teoria de Cosserat foi desenvolvida pelos Irmãos Eugene e François Cosserat em 1909 e ficou de certa forma esquecida por certo tempo, provavelmente devido à falta ou inexistência de ferramentas computacionais capazes de resolver as equações não lineares inerentes a esta teoria. A recente retomada desta teoria se deve, por um lado, ao incremento drástico da capacidade computacional e também ao crescente interesse da comunidade científica em estudar sistemas não lineares.

Conforme será detalhado mais adiante, a teoria tridimensional de vigas de Cosserat é exata geometricamente, ou seja, não está baseada em aproximações geométricas ou suposições mecânicas. Nesta teoria, a configuração da viga deformada é descrita através do vetor deslocamento da curva de centróides das seções transversais, e bases móveis, rigidamente unidas às seções transversais da viga. A orientação de uma dada base móvel, relativa a um sistema de referência inercial, é parametrizada usando três rotações elementares consecutivas.

A principal vantagem do uso desta teoria, em associação com a discretização por elementos finitos, está no fato que as funções de forma podem ser obtidas a partir de equações diferenciais de equilíbrio estático, e por isso levam em conta todas as não linearidades do sistema. Conseqüentemente, pode-se aumentar a precisão da resposta dinâmica dividindo a estrutura em poucos elementos, cujo número é geralmente muito menor do que o que se faz necessário em métodos tradicionais de elementos finitos, nos quais as funções de interpolação são usualmente simples, como polinômios de baixa ordem. Entretanto, será também evidenciado que os ganhos proporcionados pela teoria de Cosserat são obtidos às custas de uma maior complexidade analítica e numérica.

Inserida no contexto delineado acima, a presente tese foi realizada dentro de uma colaboração entre o Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst) e o Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab), ambos da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU, buscando combinar as experiências dos grupos de pesquisa de ambos os laboratórios no estudo de problemas de fluidodinâmica e de dinâmica estrutural, respectivamente. O trabalho de pesquisa foi planejado de modo a dar continuidade aos estudos anteriores desenvolvidos por Lima e Silva (2002), Campregher (2005), Vedovoto (2007), Lisita (2007), Silva (2008) e Kitatani Jr. (2009), fazendo-se, naturalmente, uso das ferramentas computacionais desenvolvidas no âmbito daqueles estudos.

O interesse no estudo de estruturas unidimensionais esbeltas foi motivado pela existência de projetos de pesquisa desenvolvidos em parceria entre, o LMEst, o MFlab e o

CENPES/PETROBRAS, dedicados à modelagem da interação fluido-estrutura em sistemas de exploração e refino de petróleo.

1.2 Objetivos da tese

Inserida no contexto delineado acima, a presente tese de doutorado tem por objetivo geral o desenvolvimento, implementação computacional e avaliação, com base em simulações numéricas, de um procedimento de modelagem de fenômenos de interação fluido-estrutura envolvendo estruturas unidimensionais esbeltas, combinando a metodologia de fronteira imersa e a teoria não linear de vigas de Cosserat.

Foram estabelecidos, como objetivos específicos do estudo:

- a) Desenvolvimento, implementação computacional e validação de procedimentos numéricos de modelagem estrutural baseada na teoria de vigas de Cosserat, que não estavam disponíveis no início do estudo. Para este efeito, foi desenvolvido um extenso estudo da formulação com intensa utilização de programas de manipulação simbólica;
- b) Proposição, implementação e validação de um procedimento computacional para a resolução acoplada dos domínios fluido e estrutural, mediante a integração do código de modelagem estrutural desenvolvido e um código previamente existente, porém devidamente adaptado, operando com base na metodologia de fronteira imersa. Com relação a este objetivo, particular esforço foi empreendido em testes de diversos algoritmos de integração numérica para a escolha do algoritmo melhor adaptado à integração das equações do movimento do domínio sólido;
- c) utilização dos procedimentos de modelagem desenvolvidos para a caracterização do comportamento estático e dinâmico de estruturas sujeitas a ações fluidodinâmicas. Neste sentido, é importante destacar que o principal objeto de enfoque é o comportamento estrutural, e não o comportamento do fluido;

- d) aplicação dos procedimentos de modelagem desenvolvidos à simulação do comportamento dinâmico de *risers* de exploração de petróleo considerando diferentes graus de simplificação, tanto no tocante ao fluido, quanto no tocante à estrutura, chegando até à modelagem tridimensional de *risers* com razões de aspecto relativamente elevadas;

É importante destacar que a metodologia consiste na associação da técnica de Fronteira Imersa com a teoria de vigas de Cosserat. Essa metodologia é inédita e constitui a principal contribuição do presente trabalho de pesquisa. A aplicação desta metodologia à modelagem de *risers* submarinos é outra contribuição considerada relevante.

1.4. Organização da tese

Este memorial de tese está dividido em 7 capítulos, com o seguinte conteúdo:

Este primeiro capítulo apresentou a contextualização em que o trabalho foi inserido, bem como suas motivações e seus objetivos. O Capítulo 2 abrange uma revisão da literatura acerca dos principais aspectos envolvidos no estudo realizado, destacando os principais grupos de pesquisa voltados ao estudo de estruturas flexíveis imersas. Ainda, nesta seção, também são apresentadas as referências utilizadas no domínio fluido, assim como, uma evolução temporal sobre os principais trabalhos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa a qual está imerso este trabalho. Ao final, são apresentadas as principais referências utilizadas para o desenvolvimento do algoritmo estrutural, cuja implementação consiste em um dos principais objetivos desta tese. Já no capítulo 3 serão abordados os principais conceitos da teoria de vigas de Cosserat, a fim de proporcionar o embasamento científico necessário para a modelagem.

O capítulo 4 apresenta uma sucinta revisão da metodologia de CFD para modelagem do domínio fluido. Em particular serão abordados os principais conceitos envolvidos no método da fronteira imersa, bem como, a metodologia utilizada para o acoplamento dos códigos estrutural e fluido. Posteriormente, no capítulo 5 serão apresentadas algumas simulações numéricas para avaliação e validação do algoritmo estrutural, e posteriormente, também serão apresentadas algumas simulações numéricas utilizando os códigos acoplados para aplicações de interação fluido-estrutura voltadas a estruturas flexíveis imersas. No

capítulo 6 será apresentada as conclusões e sugestões para trabalhos futuros, e por fim, no capítulo 7 são apresentadas as referências bibliográfica apresentadas no decorrer do texto deste trabalho.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão apresentados alguns tipos de vibrações induzidas pelo escoamento, e as estruturas de interesse, os *risers*, serão incluídos neste estudo. Posteriormente, os principais grupos de pesquisa voltados ao estudo de vibrações induzidas por vórtices, aplicadas a *risers*, serão apresentados, fazendo-se uma rápida revisão sobre os trabalhos realizados por estes grupos. Por fim, serão abordadas as principais referências, tanto no domínio estrutural como no domínio fluido.

2.1. Interação fluido-estrutura

Para que uma estrutura possa atender às condições de alta produção e desempenho e ainda operar com segurança é fundamental, além do conhecimento dos esforços e carregamentos estáticos envolvidos, o estudo do seu comportamento dinâmico estrutural, incluindo os efeitos das condições de operações e, também, eventuais interações com o ambiente. Em alguns problemas típicos de engenharia em que a estrutura está imersa em um meio fluido, esse problema é crítico, visto que é praticamente impossível separar o comportamento da estrutura das influências do meio. Isso ocorre principalmente quando os efeitos do meio não são somente fontes de excitação estrutural, sendo caracterizado o sistema acoplado resultante da interação recíproca dos meios fluido e estrutural.

Os problemas de interação fluido-estrutural, embora não tenham recebido tanta atenção no passado, são bastante comuns nas diferentes áreas da engenharia moderna. Eles ocorrem em situações em que a estrutura ou alguns de seus componentes estão diretamente em contato com o fluido e o seu comportamento dinâmico estrutural é influenciado pelo

mesmo. Por esta razão, existe um crescente interesse da comunidade científica mundial na modelagem desses problemas, buscando formulações e técnicas de modelagem numérico-computacional que levem a soluções mais representativas dos problemas de interação fluido-estrutural.

Nos últimos anos, é notória a preocupação em buscar técnicas eficientes para a determinação de características estruturais, em particular, frequências naturais, fatores de amortecimento e resistência à fadiga de estruturas na presença de fluidos em movimento (RODRIGUEZ, et al., 2006; LIANG, et al., 2000; TRIM; BRAATEN; TOGNARELLI, 2005; LIANG, et al., 2007; ANDRIANARISON; OHAYON, 2005; MARIANI; DESSI, 2006; DESSI, MARIANI, 2005; DEVRIENDT; GUILLAUME, 2008; FAROOP; FEENY, 2008; PEDERSEN; BRINCKER, 2008; JACOBSEN; ANDERSEN; BRINCKER, 2007).

Existem diversas situações práticas em que esse fenômeno é encontrado, ele pode ocorrer em aeronaves, motores a jato, passagem de óleo em tubos, reatores nucleares e químicos, plataformas *off-shore*, entre outras. Na área de engenharia civil este problema também tem despertado muita atenção, principalmente, para se conhecer melhor os efeitos dos ventos sobre edifícios e pontes. Em casos extremos, esses efeitos podem se tornar desastrosos, como observado no exemplo ilustrado na Fig. 2.1.



Figura 2.1 – Ponte Tacoma Narrows, efeito de ventos provocaram a sua destruição em 1940. (fonte: www.lmc.ep.usp.br).

A seguir serão apresentadas as vibrações induzidas pelo escoamento em estruturas imersas.

2.2. Vibrações induzidas pelo escoamento

Fontes de excitação para corpos sólidos ou fluidos são numerosas e de difícil caracterização. De acordo com Naudascher e Rockwell (1994), estas excitações são classificadas em três tipos:

- Indução externa de excitação (EIE);
- Excitação induzida por instabilidade (IIE);
- Excitação induzida por movimento (MIE).

A indução externa de excitação (EIE) é causada por flutuações da velocidade de escoamento ou pressão, independentes de qualquer instabilidade fluida originada da estrutura analisada ou movimento estrutural, exceto pelos efeitos de massa adicionada e amortecimento provocado pelo fluido. Um exemplo é mostrado na Fig. 2.2a, em que um corpo foi impactado por um escoamento turbulento a montante, o que produziu a indução de vibrações. Outro exemplo deste tipo de excitação é mostrado na Fig. 2.2b, em que um tubo cheio de fluido compressível é excitado por um alto falante. Observa-se que nos dois casos apresentados, a fonte de excitação é externa, ou seja, independente da estrutura que está sendo excitada. Esta força de excitação, na maioria das vezes, é de natureza aleatória; em raros casos, é possível encontrá-la na forma periódica.

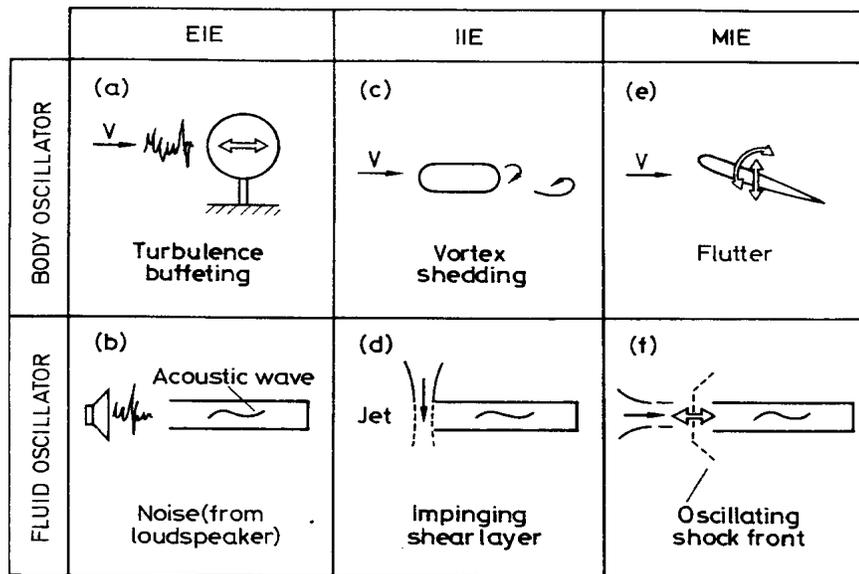


Figura 2.2 – Exemplo de corpos e fluidos oscilantes (NAUDASCHER e ROCKWELL, 1994)

Excitação induzida por instabilidade (IIE) é provocada na maioria das vezes por instabilidades oriundas do escoamento. Como regra, esta instabilidade é intrínseca ao sistema fluido. Em outras palavras, o escoamento instável é inerente ao escoamento criado pela estrutura considerada. Neste tipo de excitação enquadram-se os casos mais comuns encontrados na indústria. Podem-se citar os mais variados exemplos, como o escoamento através de pilares de pontes, *risers* usados na indústria petrolífera, etc. Na Fig. 2.2c é possível observar que a vibração é induzida pelo desprendimento de vórtices (*Vortex-Induced Vibration* VIV) formado a jusante de um cilindro. E na Fig. 2.2d observam-se oscilações de um jato livre próximo a um bocal. A força de excitação é produzida por meio de um processo fluido (ou fluido instável) que leva à formação de oscilações fluidas locais. O mecanismo de excitação pode, conseqüentemente, ser descrito como auto-excitável, ou seja, a excitação é provocada pelo escoamento ao passar pela estrutura submersa, diferentemente do caso anterior (NAUDASCHER e ROCKWELL, 1994).

Excitação induzida por movimento (MIE) é devida à flutuação de forças que surgem de movimentos de corpos vibratórios ou fluidos oscilatórios. Esta situação pode ser descrita em termos de uma instabilidade dinâmica de um corpo oscilante, dada por um aumento de energia transferida de um fluxo principal para o oscilador, conforme ilustra a Fig. 2.2e para o problema de aeroelasticidade. A Fig. 2.2f mostra um tubo aberto sujeito a um escoamento

supersônico, no qual uma onda estacionária é mantida por MIE envolvendo movimento oscilatório de um choque frontal.

Freqüentemente, as vibrações induzidas pelo escoamento em sistemas complexos são formadas pela composição de: (a) oscilações envolvendo ao mesmo tempo corpos e fluidos, ou ainda (b) EIE, IIE, e MIE, simultaneamente. Por exemplo, a estrutura cilíndrica da Fig. 2.2c pode ser excitada por uma turbulência, além da excitação provocada pelo despreendimento de vórtices (excitações provocadas por EIE e IIE).

Em casos raros, a vibração induzida pelo escoamento é devida à excitação paramétrica. Estes casos envolvem a variação com o tempo de um ou mais parâmetros do sistema vibratório como massa, amortecimento e rigidez. Esta excitação pode ser de ambas as variedades EIE ou MIE.

Em resumo, a caracterização de possíveis vibrações induzidas por escoamento em um sistema envolve primeiramente uma completa busca por:

- a) Todos os corpos oscilantes;
- b) Todos os fluidos oscilantes;
- c) Todas as fontes de excitação externa;
- d) Todas as fontes de excitações provocadas por instabilidades;
- e) Todas as fontes de excitações provocadas por movimentos induzidos;
- f) Todas as fontes de excitações paramétricas.

Em segundo lugar é necessário fazer uma busca de todas as possíveis combinações de oscilações estruturais e fluidas que surgem a partir de (a) e (b) em conjunto com (c) por meio de (f). Estas combinações, quando coincidem com suas freqüências naturais, podem provocar efeitos indesejáveis. A estimativa destas freqüências naturais, bem como a freqüência dominante de possíveis EIE e IIE pode, conseqüentemente, se tornar uma parte integral de uma avaliação fluido-estrutural.

Na literatura é possível encontrar diversas referências em que os autores estudaram uma vasta gama de casos de vibrações induzidas pelo escoamento. Dentro deste contexto, pode-se citar o trabalho de Habaul et al. (2003), em que os autores mostram como modos ressonantes podem ser usados para expressar o comportamento vibratório de uma estrutura imersa em um fluido. Neste artigo, os autores propuseram um exemplo mostrando que os modos de ressonância são descritos na resposta no tempo do sistema fluido/estrutura. Em Rodriguez et

al. (2006) foram determinados experimentalmente as frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de uma turbomáquina.

Já Gabbai e Benaroya (2004) faz uma revisão na literatura de modelos matemáticos utilizados para investigar indução de vibração provocada por vórtices (VIV) em cilindros. Modelos de ondas de oscilação de um grau de liberdade, decomposição de forças e outras aproximações são discutidas com detalhes neste trabalho.

Em Mittal e Kumar (2001) aplica-se o método de elementos finitos, utilizando um modelo de espaço de estado, para investigar a indução de vibração provocada por vórtices em um cilindro circular sujeito ao escoamento incompressível uniforme com número de Reynolds variando de 10^3 a 10^4 .

Dentre os vários tipos de vibrações induzidas pelo escoamento citados acima, neste trabalho será abordado mais detalhadamente as excitações induzidas por instabilidades (IIE), mais especificamente aplicadas a *risers* de exploração de petróleo. Por isso, a seção a seguir será dedicada a esse tipo de excitação.

2.3. Vibrações induzidas por desprendimentos de vórtices em *risers* de exploração de petróleo.

Um dos problemas a serem resolvidos na implantação de uma plataforma de exploração de petróleo é justamente o fenômeno de vibrações induzidas por desprendimento de vórtices (VIV), que constitui um problema hidroelástico dos mais difíceis no escopo da Física clássica devido à interação fluido-estrutura.

A passagem de um fluido por uma estrutura cilíndrica pode causar vibrações transversais ao fluxo oriundas do desprendimento de vórtices. Essas vibrações podem levar a estrutura à ruína por fadiga ou através do aumento dos esforços das correntes marítimas e/ou ondas, devido ao aumento do coeficiente de arrasto.

Dentre as estruturas que estão sujeitas a este tipo de excitação tem-se os *risers* de exploração de petróleo. Por isso, o estudo de escoamentos em *risers* é de grande interesse e tem recebido atenção de diversos grupos de pesquisa. De acordo com Baarholm et al. (2006), duas abordagens têm sido adotadas nos desenvolvimentos atuais, as baseadas em modelos empíricos e as baseadas em dinâmica dos fluidos computacional (CFD).

Um estudo recente, apresentado na OMAE2006 por Constantinides e Oakley (2006), apresenta uma contribuição ao desenvolvimento dos modelos baseados em CFD, sem colocá-los, no entanto, como ferramenta de projeto. Neste artigo, apresentam-se simulações numéricas de um cilindro rígido, adotando-se duas abordagens de modelagem da turbulência (RANS e DES). Estes modelos são tridimensionais e se propõem a analisar correntes não uniformes, números de Reynolds da ordem de 10^6 , cilindros flexíveis e com supressores de vórtices helicoidais. A conclusão do artigo é que estes modelos são capazes de prever com razoável precisão a resposta para um cilindro rígido, comparando os resultados numéricos com resultados experimentais. No entanto, deve-se salientar que ainda é alto o tempo de integração necessário para se atingir o estado estatisticamente independente e que os resultados dependem do modelo de turbulência adotado.

Para resolver problemas reais utilizam-se procedimentos numéricos baseados em ensaios experimentais em tanques de prova (FRANK et al., 2004; VENUGOPAL, 1996), e em dados de monitoração de estruturas reais *offshore* em condições normais de produção (CHEZHIAN et al., 2006; COOK et al., 2006; FRANCISS; SANTOS, 2004; SANTOS, 2005). Nota-se que estes modelos empíricos, conforme discutido por Lopes (2006) podem apresentar algumas divergências entre si devido ao forte acoplamento fluido-estrutura e à escassa fonte de dados experimentais, seja de modelos reduzidos ou de estruturas reais monitoradas.

Dentro deste contexto, Chaplin et al. (2005) apresentam onze diferentes códigos, desenvolvidos por oito grupos de pesquisa voltados ao estudo de vibrações induzidas pelo escoamento em *risers*. Os autores fazem uma breve discussão sobre os modelos utilizados em cada código computacional, e os subdivide em três grupos: o primeiro, composto pelos códigos da Norsk Hydro, da Universidade de São Paulo (USP), do Institut Français du Pétrole (IFP) e do Imperial College, que fazem uso da CFD para calcular o escoamento bidimensional em volta de *risers* num grande número de planos horizontais distribuídos sobre seu comprimento. Dessa forma, a única comunicação entre os escoamentos de diferentes planos é através do movimento do *riser*, que é modelado na maioria dos casos utilizando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli associada a um modelo que leva em conta a pré-tensão axial, e a partir daí sua posição é atualizada a cada passo de tempo, em resposta à força instantânea induzida pelo escoamento em cada plano. Esta abordagem, ilustrada na Fig. 2.3, é conhecida como “Strip Theory”.

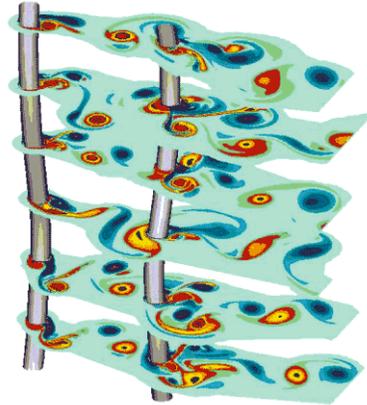


Figura 2.3-Ilustração da abordagem por camadas (Strip Theory) (fonte:www.ifp.com)

Já o segundo grupo é composto por dois códigos da Orcina Ltd. (*Orcina Vortex Tracking* e *Orcina Wake Oscillator*), que também adotam a abordagem por CFD, mas utiliza dados experimentais para ajustar o cálculo das forças no *riser* em cada plano.

E por fim, o terceiro grupo é constituído pelos dois códigos do Massachusetts Institute of Technology (MIT) (VIVA e SHEAR7), dois da SINTEF-NTNU (VIVANA e ViCoMo) e um da Technip (ABAVIV). Nestes modelos, os dados experimentais de cilindros rígidos sob forças induzidas por vórtices são utilizados para identificar a amplitude do modo (ou modos) mais prováveis de serem excitados (CHAPLIN et al., 2005).

Uma breve descrição dos modelos desenvolvidos por estes grupos será dada a seguir, e ao final serão apresentadas as contribuições do grupo da UFU no qual está inserido o presente trabalho.

a. O código da Universidade de São Paulo

O código da USP é baseado em simulações de CFD bidimensionais utilizando o método dos vórtices discretos, que é basicamente uma técnica numérica lagrangiana desenvolvida para simular escoamentos viscosos incompressíveis bidimensionais, associada a uma abordagem de camada integral baseada em função corrente que incorpora o método de núcleo crescente ou expansão do núcleo para modelar a difusão de vorticidade (LISITA, 2007; CHAPLIN et al. 2005). Neste código, o *riser* é discretizado em número definido de planos em seu comprimento, e em cada circunferência e cada passo tempo um vórtice discreto

é criado (*Strip Theory*). As forças no corpo são calculadas integrando as tensões viscosas e pressão.

Já o modelo estrutural é feito através de um modelo discreto de elementos de finitos com base na teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Alguns dos trabalhos realizados por este grupo de pesquisa são descritos abaixo.

Yamamoto et al. (2004) realizam algumas simulações, entre elas pode-se citar: a simulação de uma viga flexível engastada, na qual os resultados são comparados com os dados experimentais obtidos na tese de Fugarra (1997). Em uma segunda simulação, uma estrutura que se assemelha a um *riser* real, bi-engastada, de comprimento total de 120 metros, sendo 100 m submerso em água, discretizado por 50 elementos igualmente espaçados, é submetido a escoamentos na faixa $4,0 \times 10^4 \leq Re \leq 2,3 \times 10^5$.

Já no trabalho de Meneghini et al. (2004) são apresentadas três outras simulações. A primeira delas trata de um modelo em balanço, em que seus resultados são também comparados com resultados experimentais obtidos por Fugarra (1997). Em uma segunda simulação, um *riser* com comprimento de 120 metros, com razão de aspecto de aproximadamente 480, é discretizado com 100 elementos igualmente espaçados, estando sujeito a correntes uniformes que variam de $5,8 \times 10^4 \leq Re \leq 2,0 \times 10^8$. Por fim, um *riser* com comprimento de total de 1500 metros, e razão de aspecto de 4600, é discretizado com 600 elementos, e sujeito a escoamento com velocidade de referência v_0 de 1,10 m/s.

b. O código do Institut Français du Pétrole

Neste código, segundo Chaplin et al. (2005), no domínio em volta do cilindro, para cada plano do escoamento, as equações médias de Reynolds bidimensionais são formuladas, baseadas na função corrente-vorticidade, e os efeitos turbulentos com o modelo $K-\omega$. A equação de transporte de vorticidade e a função corrente são resolvidas sobre o domínio euleriano em volta do *riser*. A equação de Poisson é dada em coordenadas polares com um método espectral na direção angular e com esquema de diferenças finitas de Hermite de quarta ordem na direção radial. A equação de transporte da vorticidade é discretizada por volumes finitos; já os termos convectivos são tratados utilizando os esquemas QUICK e TDV, enquanto o termo difusivo é desenvolvido através de diferenças finitas centradas de segunda ordem. Maiores informações são encontradas no trabalho de Etienne et al. (2001).

Para se obter a resposta dinâmica estrutural é utilizado o software comercial Deeplines (<http://www.principia.fr/eng/logiciels/deeplines>). Segundo Etienne et al. (2001) essa resposta é obtida através do princípio do trabalho virtual, discretizado através do esquema implícito de Newmark. A formulação das forças internas é baseada na teoria de Mindlin, sendo a solução do sistema não linear obtida através do algoritmo iterativo de Newton-Raphson.

c. O código do Imperial College

Segundo Chaplin et al. (2005) o código utilizado por este grupo é denominado VIVIC. Neste código, para o domínio fluido, a formulação velocidade-vorticidade das equações bidimensionais incompressíveis de Navier-Stokes são resolvidas em cada plano de simulação utilizando um método Euleriano-Lagrangeano de vórtices de células híbrido.

Já no domínio estrutural a resposta do *riser* é obtida a partir da modelagem de elementos finitos utilizando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Alguns trabalhos desenvolvidos pelos pesquisadores deste grupo de pesquisa são citados abaixo.

Em seus trabalhos, Huera Huarte; Bearman; Chaplin (2005) apresentam um estudo investigando a distribuição de forças em um *riser* vertical, com comprimento de 13,12 m, diâmetro de 28 mm, sujeito a uma força de topo variando entre 400 e 2000N e Reynolds entre 2800 a 28000. Os autores utilizam, neste caso, dados experimentais como a posição e aceleração do *riser* para alimentar um modelo de viga de Euler-Bernoulli e assim determinar as forças atuantes. A estrutura é discretizada por elementos finitos na condição biengastada com quatro graus de liberdade por elemento.

Já no trabalho de Huera Huarte e Bearman (2010) é construído experimentalmente um modelo de *riser* flexível em escala, excitado de forma análoga ao real, e, assim, as respostas estruturais são estudadas e utilizadas para avaliar e validar os modelos numéricos implementados. Essa pesquisa busca, entre outras questões, definir quais modos de vibração serão excitados sob determinada condição de escoamento, assim como os modos dominantes e, portanto, definir a contribuição de cada modo para a resposta estrutural.

d. Os códigos da Orcina Ltd.

Chaplin et. al. (2005), utilizam as subrotinas desenvolvidas neste grupo de pesquisa, o Vortex Tracking Model e o Orcina Wake Oscillator presentes no *software* Orcaflex, para análise de VIV (ORCINA, 2007).

De acordo com Chang e Isherwood (2003) o Vortex Tracking é baseado no modelo de vórtices discretos que, segundo o autor, trata-se de uma forma mais barata computacionalmente de CFD, quando comparada com os modelos convencionais. Neste mesmo trabalho, o autor descreve o código como composto por dois modelos. O primeiro trata-se de um modelo de camada limite utilizado para determinar a posição angular dos pontos de separação. Já o segundo trata-se de um modelo de advecção de fluido utilizado para determinar os movimentos subsequentes dos vórtices e as forças atuantes sobre o corpo. Para cada um destes modelos é utilizado uma metodologia de rastreamento de vórtices, e os cálculos hidrodinâmicos são realizados para cada plano bidimensional, seccionado no comprimento do *riser* e acoplado unicamente pelo modelo estrutural.

Quanto ao código Orcina Wake Oscillator, trata-se de um modelo de onda responsável por excitar um cilindro rígido, segundo uma equação diferencial que modela o movimento de onda em função do movimento de corpo do cilindro (LISITA, 2007, *apud* ORCINA TECHNICAL SPEC, 2007).

E ainda, segundo os desenvolvedores, o pacote estrutural presente neste *software* (<http://www.orcina.com/SoftwareProducts/OrcaFlex>) trata-se de um modelo tridimensional não linear discretizado utilizando a teoria de elementos finitos e capaz de simular estruturas flexíveis sujeitas a grandes deslocamentos.

e. Os códigos do SINTEF-NTNU

Em Chaplin et al. (2005), são apresentados dois códigos baseados em modelos empíricos desenvolvidos por este grupo de pesquisa e denominados VIVANA e VICoMO.

Segundo os desenvolvedores, o modelo hidrodinâmico utilizado no código VIVANA é baseado em modelos empíricos, enquanto o modelo estrutural é baseado na formulação não linear tridimensional de elementos finitos. Segundo Chaplin et al. (2005), este algoritmo não utiliza superposição modal para análise dinâmica e a solução aparece em uma frequência discreta. (<http://www.sintef.no/upload/MARINTEK/PDF-iler/Software/Vivana%20brosjyre.pdf>)

Já no *software* VICoMo desenvolvido pelo mesmo grupo, segundo Chaplin et al. (2005), também utilizam-se dados empíricos obtidos a partir de um modelo de teste para construção de uma base de dados em função dos coeficientes de força (arrasto e sustentação), em função da velocidade reduzida, amplitude e número de Reynolds. Estes coeficientes são aplicados com método *Strip Theory*, em que as interações entre os escoamentos nas seções vizinhas, discretizadas no comprimento do *riser*, são negligenciadas. Maiores detalhes sobre esse código são encontrados em Moe et al. (2001).

f. O código da Norsk Hydro

Segundo Chaplin et al. (2005) neste código são utilizados dois programas básicos, o Navsim para os cálculos de CFD em cada plano e o Usfos para o cálculo estrutural, sendo a comunicação entre estes códigos realizada por um módulo acoplador.

O código Navsim é um código que utiliza o método de elementos finitos aplicado à solução bidimensional das soluções de Navier-Stokes. Neste algoritmo a discretização espacial é feita através de elementos triangulares.

Da mesma forma, o *software* Usfos, responsável pela análise estrutural, é baseado no método de elementos finitos. Segundo Soreide et al. (1993), o código permite realizar análises estáticas e dinâmicas com a utilização de não linearidade de material e geométrica.

Um dos trabalhos que utiliza este código é apresentado por Sagatun et al. (2002), em que foi apresentado um estudo sobre a interação dinâmica de dois *risers* cilíndricos adjacentes com movimento relativo entre eles, utilizando o Navsim e o TRICE (um simulador para análise de colisões); o número de Reynolds utilizado foi de 200 e cada *riser* foi discretizado por 10 elementos de viga.

Holmas et al. (2002), em relatório técnico da MARINTEK à Norsk-Hydro, apresentam estudos sobre metodologia de predição de interferência e contato entre *risers*. Eles utilizaram o Navsim juntamente com dados experimentais para gerar um banco de dados sobre as forças hidrodinâmicas atuando sobre os *risers* em interferência em várias posições relativas. Estas forças pré-calculadas são então utilizadas na simulação temporal; o sistema mecânico é simulado com um *solver* de elementos finitos, sendo cada *riser* modelado por elementos de viga, utilizando o *software* Usfos.

g. Os códigos do Massachusetts Institute of Technology

Segundo Chaplin et al. (2005), o grupo de pesquisa do MIT desenvolveu dois códigos para simulações de *risers* sujeitos a VIV, que são denominados VIVA e SHEAR7.

O código VIVA calcula somente as vibrações transversais a que estão sujeitos os *risers*, baseado na formulação empírica do estudo de VIV. O código usa as regiões de *lock-in* para identificar a probabilidade de cada modo ser excitado, e a amplitude das respostas dinâmicas é calculada a partir de uma base de dados em função dos coeficientes de arrasto.

Já o código SHEAR7 é baseado no método de superposição modal, que avalia quais modos têm maior probabilidade de serem excitados pelo desprendimento de vórtices e estima a resposta estrutural; neste algoritmo também são modeladas as tensões de flexão e diversas condições de contorno para cabos e vigas. Alguns dos trabalhos desenvolvidos nesta instituição são listados abaixo.

Liao e Vandiver (2000) apresentam simulação das respostas de *risers* de 1270 metros, com 992 m sob a água, em operação no campo de Allegheny, no Golfo do México, com o SHEAR7 versão 3. Para tal, eles utilizam dez perfis de velocidades medidos. Como resultados, são mostrados os deslocamentos e acelerações médios e os danos causados por fadiga.

Hover; Miller; Triantafyllou (1997) estudam experimentalmente a vibração induzida por vórtices em cilindros, com Reynolds variando entre 7200 a 11500. As forças medidas são utilizadas para calcular, em tempo real, o deslocamento transversal da estrutura e um servomotor atualiza a posição do corpo no tanque de provas. De acordo com os autores, esta abordagem difere das utilizadas até então, que impunham um movimento forçado à estrutura ou utilizavam sistemas massa-mola simples, não considerando as respostas multimodais.

O mesmo aparato experimental é utilizado por Hover; Techet; Triantafyllou (1998), Hover; Tvedt; Triantafyllou (2001) e Hover; Davis; Triantafyllou (2004) para estudar, respectivamente, movimentos harmônicos forçados e livres com Reynolds de 3800, alterações na esteira de vórtices gerados por protuberâncias do corpo e modos de vibração do cilindro sujeitos a escoamento com Reynolds de 3.05×10^4 .

h. O código da Technip

As simulações apresentadas por Chaplin et al. (2005) utilizam dois códigos, o ABAVIV e o ABAQUS. O ABAVIV é um código no domínio do tempo que considera não linearidades estruturais. Ele utiliza o código computacional ABAQUS como programa base, e uma metodologia VIV baseada em modelos disponíveis na literatura. De acordo com o número de Reynolds, um número de Strouhal é utilizado para a análise. Um coeficiente de massa adicionada é assumido, negligenciando-se sua dependência da velocidade reduzida. Um coeficiente de arrasto é utilizado com amplificação por VIV, e as respostas *in-line* derivam da força de Morison

i. O código da Universidade Federal de Uberlândia

O grupo multidisciplinar da Universidade Federal de Uberlândia, no qual está inserido este trabalho, trabalha na realização de simulações 3D com uso do *software* desenvolvido pelo próprio grupo, denominado FLuids3D, o qual é baseado em métodos de CFD. Este código incorpora a experiência adquirida ao longo de vários anos de pesquisas enfocadas neste tipo de simulações, que serão descritas na seção a seguir.

2.4. Método da fronteira imersa

Como já citado no capítulo anterior, o desenvolvimento do método da fronteira imersa deveu-se à Charles Peskin e colaboradores, os quais tinham por motivação simular o escoamento, em domínios bidimensionais, do sangue através de válvulas cardíacas. De acordo com seus trabalhos (PESKIN, 1972; PESKIN, 1977), a natureza do termo de força adicional é proveniente da taxa de deformação da fronteira, cujos pontos são unidos por forças elásticas.

No trabalho de Lai (1998), o método da fronteira imersa foi melhorado, empregando discretizações de ordem mais alta, que propiciou melhor estabilidade numérica em relação ao passo de tempo. Mais tarde, Roma; Peskin; Berger (1999) reformularam o modelo apresentado originalmente, introduzindo malhas adaptativas e uma nova função de interpolação.

Unverdi e Tryggvason (1992) aplicaram a metodologia da fronteira imersa em escoamentos bifásicos, onde a força inserida no termo-fonte era modelada com base na tensão

superficial presente na interface entre os dois fluidos. Com essa metodologia, os autores realizaram simulações do movimento de bolhas em domínios bi e tridimensionais, onde uma linha reta unindo os pontos nos problemas 2D é substituída por um elemento triangular nos casos 3D, nos moldes das formulações em Elementos Finitos. Uma importante contribuição apresentada pelos autores é o uso de uma função indicadora para localizar as regiões ocupadas pela interface entre os diferentes fluidos.

Mohd-Yusof (1997) propôs que o cálculo da força lagrangiana fosse realizado com base na equação da quantidade de movimento do fluido na interface, sem o emprego de constantes que necessitem de ajuste. Este método foi chamado de *direct forcing method*. Entretanto, esta técnica requer algoritmos complexos, de modo a localizar a geometria no interior do domínio, além de interpolar os valores das propriedades nas partículas de fluido adjacentes usando B-splines, o que encarece os cálculos.

Kim e Choi (2001) realizaram experimentos com a metodologia de Mohd-Yusof em domínios discretizados por Volumes Finitos. Porém, procuraram empregar interpolações lineares e bilineares para a velocidade na avaliação do campo de força. Os autores incluíram, na equação da continuidade, termos fonte ou sumidouro de massa na tentativa de melhorar a precisão do método e obter soluções fisicamente mais consistentes. Conseguiram assim impor a condição de não-deslizamento para a fronteira e também a equação da continuidade nas células Eulerianas da interface. Funções de interpolação de segunda ordem lineares e bilineares foram utilizadas para a velocidade.

No Laboratório de Mecânica de Fluidos da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU (MFlab) foram desenvolvidos vários trabalhos utilizando a metodologia de fronteira imersa. Seguindo a evolução temporal, pode-se citar o trabalho base que foi utilizado como referência aos trabalhos seguintes, em que Lima e Silva (2002) propôs uma nova forma para cálculo do campo de força devido à interação dos escoamentos com os corpos imersos, denominada de Modelo Físico Virtual. Sucintamente, neste método a força sobre a interface é calculada dinamicamente através das equações de balanço da quantidade de movimento sobre uma partícula de fluido na interface. A força calculada é inserida como termo fonte nas equações de Navier-Stokes. Assim, impõe-se, de maneira indireta, a condição de contorno desejada sobre a fronteira. O método tem a capacidade de se auto-ajustar ao escoamento uma vez que a força necessária para frear as partículas de fluido próximas à interface é calculada de maneira automática. Por fim, o autor utiliza esta metodologia para simulações bidimensionais sobre diversas geometrias isoladas e compostas, e os resultados são

comparados com resultados experimentais, analíticos e numéricos de outros autores, ficando demonstrada a mesma ordem de consistência física, o que garantiu a confiabilidade da metodologia apresentada.

Na sequência, este modelo foi testado em domínios bidimensionais, para diversos problemas práticos de engenharia, além de problemas clássicos em mecânica dos fluidos. escoamentos ao redor de obstáculos a altos números de Reynolds podem ser encontrados em (OLIVEIRA et al., 2004b), escoamentos ao redor de geometrias complexas em (LIMA E SILVA et al., 2005). escoamentos ao redor de obstáculos móveis, objetos em queda livre (constituindo um excelente teste de interação fluido-estrutura) podem ser vistos em (VILAÇA et al., 2004) e, ainda, escoamentos sobre cilindros de diâmetro variável foram simulados por Oliveira et al. (2004a). escoamentos forçados em condutos e cavidades de fundo móvel podem ser encontrados nos trabalhos de Arruda (2004) e Arruda et al. (2004).

Campregher (2005) estendeu o Modelo Físico Virtual para domínios tridimensionais, e simulando escoamentos a baixos números de Reynolds, conseguiu ótimos resultados tanto para esferas estáticas imersas quanto com interação fluido-estrutura. Neste último caso, o sistema dinâmico escolhido foi composto de uma esfera imersa no escoamento e ancorada por molas. Foi estudado o efeito provocado pela ação do escoamento sobre a dinâmica do sistema e o conseqüente movimento da esfera sobre a geração e emissão de estruturas turbilhonares. Como extensão do trabalho de Campregher (2005), Vedovoto (2007) e Vedovoto; Campregher; Silveira Neto (2006), generalizam a metodologia de importação de geometrias do código computacional desenvolvido no trabalho de Campregher (2005), tornando o Método da Fronteira Imersa, associado ao Modelo Físico Virtual, capaz de simular quaisquer tipos de geometrias complexas e/ou móveis, dentro dos limites computacionais descritos por Vedovoto (2007).

Como aplicação industrial, Padilla (2007), implementou o método da fronteira imersa para simulação de escoamentos translacionais em canais cilíndrico-anulares com excentricidade variável. Estes tipos de escoamentos estão presentes em condutos de perfuração de poços de extração de petróleo.

Lisita (2007) desenvolveu um código para o modelo estrutural acoplado ao código de escoamento tridimensional desenvolvido em trabalhos anteriores. Neste trabalho foi empregado um modelo estrutural baseado na teoria clássica de elementos finitos, sendo utilizada a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Dentro do contexto dos trabalhos no MFLab, este foi o primeiro desenvolvimento voltado à análise de estruturas cilíndricas sujeitas a

escoamentos, com o intuito de associá-las a *risers* de pequenas razões de aspecto. Os resultados foram promissores e motivaram o presente trabalho.

Silva (2008), trabalhando a partir dos desenvolvimentos de Lima e Silva (2002), estudou a vibração induzida por vórtices utilizando a metodologia da Fronteira Imersa com o Modelo Físico Virtual, para a simulação de escoamentos incompressíveis, bidimensionais sobre cilindros circulares ancorados por molas; foram analisadas as respostas do cilindro em função da velocidade reduzida, e os resultados foram comparados com resultados experimentais e numéricos obtidos na literatura, mostrando-se consistentes.

Kitatani (2009), com base nos trabalhos de Uhlann (2005) e de Wang; Fan; Luo (2008), utilizou uma variação do modelo físico virtual usado para o cálculo do campo de força na metodologia de fronteira imersa, denominado de método multiforçagem (MMF), que consiste basicamente em realizar processos iterativos para garantir as condições de não-escorregamento na região de fronteira imersa, ou seja, que o fluido tenha mesma velocidade da estrutura na interface.

2.5. Teoria de vigas de Cosserat

Um número crescente de publicações têm sido observado na literatura, nas quais são apresentados novos conceitos e algoritmos para modelar estruturas mecânicas com grande flexibilidade (ARGYRIS et al, 1978) (CARDONA; GERADIN, 1988) (DUTTA; WHITE, 1992). Revisões abrangentes sobre este tópico podem ser encontradas em Shabana, (1998) e (Belytschko; Liu; Moran, 2000). Dentre as técnicas utilizadas para a modelagem de estruturas unidimensionais esbeltas encontra-se a teoria de Cosserat. Esta teoria pode proporcionar uma boa aproximação do comportamento não linear de estruturas complexas compostas de materiais com diferentes propriedades, geometrias e amortecimento (GREEN; NAGHDI; WENNER, 1974; ANTMAN, 1995; TUCKER; WANG, 1999; ANTMAN; MARLOW; VLAHACOS, 1998).

A teoria de Cosserat foi desenvolvida no início do século XX pelos irmãos Eugene e François Cosserat em 1909, mas sua recente retomada é devida, por um lado, ao incremento da capacidade computacional e, por outro lado, ao interesse crescente de estruturas não lineares, motivado por diversos tipos de aplicações práticas. Nesta teoria, o movimento tridimensional no espaço pode ser representado pelo comportamento da curva de referência e três vetores perpendiculares (diretores). Portanto, a configuração deformada da viga é descrita

através de um vetor de deslocamento da curva de centróides e uma base móvel, rigidamente unida à seção transversal da viga. A orientação da base móvel, relativa a um sistema inercial, pode ser parametrizada usando três rotações elementares consecutivas.

Antman; Marlow; Vlahacos (1998) generaliza esta formulação para a inclusão da deformação de cisalhamento.

Simo (1985), Vu-Quoc; Simo (1986) e Rubin (1986) associaram a teoria de elementos finitos a esta formulação. Assim as equações de movimento são equações diferenciais em função do tempo e de uma variável espacial. Por outro lado, para problemas estáticos, obtêm-se equações diferenciais ordinárias não lineares, em função da variável espacial que pode ser aproximadamente resolvida utilizando técnicas padronizadas, como o método de perturbação, para satisfazer às condições de contorno. Desta condição, obtêm-se as funções de deslocamento da viga, em função dos deslocamentos e rotações nodais. É importante ressaltar que estas funções de deslocamento obtidas com o equilíbrio estático serão posteriormente utilizadas na análise dinâmica, o que elimina um dos principais problemas normalmente encontrados em técnicas clássicas de elementos finitos, que é o de definir convenientemente as funções de deslocamento.

Em contraste, para problemas dinâmicos, torna-se necessário introduzir um procedimento numérico e discretizar as equações de movimento. Na estratégia para modelagem dinâmica do elemento de viga de Cosserat, utiliza-se a formulação variacional das equações de movimento e uma expansão das quantidades cinemáticas em termos das funções de forma e valores nodais para modelagem estrutural (WANG et al., 2004).

No trabalho de Cao et al. (2006) é desenvolvida a estratégia de modelagem estrutural para elementos de vigas de Cosserat objetivando a análise dinâmica em três dimensões de estruturas esbeltas e utilizando como referência as funções de forma obtidas por Wang et al. (2004).

Atualmente, a teoria de Cosserat está sendo amplamente utilizada para modelar diferentes sistemas, entre eles podendo-se citar: colunas verticais de poços de petróleo (TUCKER; WANG, 1999), cabos para aplicações cirúrgicas (PAI, 2002), componentes de Micro-ElectroMechanical Systems - MEMS (LIU; CAO; WANG, 2004), cadeias de DNA (MADDOCKS, 2004), fluxo sanguíneo em vasos (CARAPAU, 2006), entre outros.

Dentre os casos citados acima se destaca o trabalho desenvolvido por Tucker; Wang (1999), no qual foi utilizado o contínuo de Cosserat para estudar as propriedades dinâmicas de componentes ativos de um modelo integrado da coluna de perfuração. Os autores propõem

um modelo analítico baseado na teoria unidimensional do contínuo de Cosserat. Dando continuidade a este trabalho, Alamo (2006) desenvolve o elemento de Cosserat para a modelagem destas estruturas utilizando técnicas de elementos finitos. A modelagem considera os tubos de perfuração como sistemas discretos. Neste trabalho, adicionalmente aos efeitos giroscópios e ao acoplamento axial, lateral e torcional, o modelo leva em conta o impacto da coluna com as paredes do poço. É importante ressaltar que o autor restringe as funções de forma aos termos de segunda ordem, o que implica algumas restrições ao modelo, diretamente associadas à estabilidade e convergência dos métodos numéricos de integração, e ao número mínimo de elementos que podem ser utilizados para se obter uma resposta satisfatória.

Ribeiro (2007) utiliza o mesmo elemento de viga com algumas particularidades, sendo a principal delas a adoção de funções de forma previamente definidas, para descrever o comportamento dinâmico de estruturas unidimensionais flexíveis utilizadas pela indústria *offshore*. O principal enfoque deste trabalho foi simular o comportamento dinâmico de estruturas sujeitas ao movimento da plataforma e às forças hidrodinâmicas devidas à ação das correntes marítimas. É importante ressaltar que as forças hidrodinâmicas devidas à interação fluido-estrutural foram adicionadas ao modelo utilizando a formulação proposta por Morison, na qual o carregamento foi calculado através das equações que definem as forças de arrasto transversal e tangencial.

Por meio desta sucinta revisão bibliográfica é possível notar a crescente aplicação da teoria de vigas de Cosserat para a modelagem de estruturas esbeltas. Dentre as várias aplicações, inclusive na área petrolífera, nota-se que poucos trabalhos utilizam esta metodologia aplicada à modelagem de *risers* submarinos, principalmente quando são utilizadas modernas técnicas tridimensionais de CFD para a modelagem do fluido, como observado acima. Por outro lado, a constatação de que em grande número de casos os *risers* desenvolvem grandes deslocamentos, justifica-se o uso de uma teoria não linear para a modelagem de seu comportamento mecânico.

Nota-se ainda que quando são utilizados modelos não lineares para modelagem estrutural, os autores tendem a simplificar o modelo na modelagem do domínio fluido, usando na maioria das vezes métodos empíricos. O contrário também é observado em estudos em que os autores utilizam técnicas tridimensionais de CFD para modelagem do domínio fluido e simplificam o domínio estrutural ou mesmo o negligenciam por meio da imposição de um movimento estrutural.

Isso abre espaço para uma abordagem mais abrangente e fisicamente justificada utilizando ambas as técnicas, ou seja, definindo um modelo estrutural eficaz associado a um modelo de CFD. Este tipo de abordagem é proposta no estudo desenvolvido no âmbito desta tese.

CAPÍTULO III

TEORIA DE VIGAS DE COSSERAT

Neste capítulo é apresentada a formulação pertinente à teoria de vigas de Cosserat, sendo inicialmente demonstradas as características cinemáticas para descrição espacial deste elemento, pois nesta metodologia, a viga deformada é descrita através do vetor deslocamento da curva de centróides, e bases móveis, rigidamente unidas às seções transversais da viga. A troca de informações entre essas duas bases é feita através de duas parametrizações, uma utilizando o vetor de Euler e outra utilizando três rotações elementares consecutivas.

Após definidas estas características, os conceitos associados aos procedimentos baseados na discretização por elementos finitos são introduzidos a fim de se obter as funções de forma para este tipo de elemento. Destaca-se que essas funções são responsáveis por definir o campo de deslocamento no interior do elemento. Na teoria clássica de elementos finitos, essas funções são normalmente adotadas pelo usuário e usualmente simples, o que não acontece nesta metodologia, em que são obtidas utilizando o método da perturbação para a resolução das equações diferenciais de equilíbrio estático para um elemento de viga de Cosserat.

E por fim, serão demonstradas as equações diferenciais não lineares do movimento da viga de Cosserat baseadas na discretização por elementos finitos, a partir das equações de Lagrange e utilizando as funções de forma obtidas anteriormente.

Vale ressaltar que os desenvolvimentos aqui apresentados são baseados nos trabalhos de Antman (1995b), Alamo (2006), Cao et al.(2005), Cao et al. (2006), Cao et al. (2008) e Wang et al. (2004), sendo feita a devida compatibilização das notações empregadas por estes autores.

3.1. Hipóteses básicas e suposições cinemáticas

A teoria tridimensional de vigas de Cosserat, diferentemente da teoria clássica de vigas, é exata geometricamente, ou seja, não está baseada em aproximações geométricas ou suposições mecânicas. Outra característica importante é o modo como a viga é definida espacialmente, em termos do movimento da linha que passa pelos centróides de suas seções transversais, definidas pelo vetor $\mathbf{r}(s,t)$ na base cartesiana fixa (inercial) representada por $F = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ com vetores unitários \mathbf{e}_i , e por um conjunto de vetores unitários ortogonais presos à seção transversal, formando a base $S = \{\mathbf{d}_1(s,t), \mathbf{d}_2(s,t), \mathbf{d}_3(s,t)\}$, onde a variável s representa a posição da seção transversal ao longo da linha de centróides e t indica o tempo. Portanto, para cada ponto da curva de centróides tem-se uma base móvel S , formada pelos vetores diretores $\mathbf{d}_i(s,t)$, que são definidos de forma externa ao vetor $\mathbf{r}(s,t)$. Na Fig. 3.1 tem-se a representação esquemática de um segmento de viga de Cosserat, no qual são representadas as duas bases de vetores mencionadas.

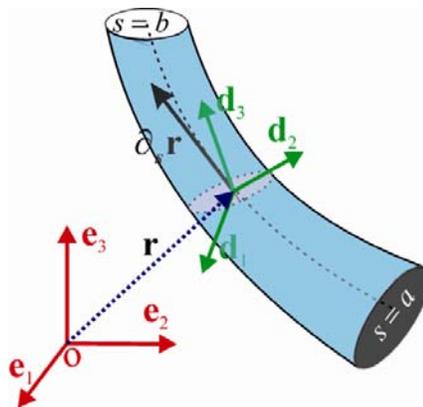


Figura 3.1 – Modelo esquemático de um elemento de viga de Cosserat.

Por conveniência, adotam-se $\mathbf{d}_1(s)$ e $\mathbf{d}_2(s)$ contidos no plano da seção transversal e, conseqüentemente, $\mathbf{d}_3(s)$ resulta perpendicular a este plano. É importante ressaltar que esta definição implica que: a) na condição de flexão pura, o vetor normal à seção transversal, $\mathbf{d}_3(s)$, em cada ponto da curva de centróides, coincide com a tangente a esta curva, determinada pela direção do vetor $\frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s} = \partial_s \mathbf{r}$; b) na condição de cisalhamento puro, o

mesmo não ocorre, ou seja, o vetor $\mathbf{d}_3(s)$ não coincide com a direção da derivada espacial da curva de centróides, devido à distorção causada pelo cisalhamento. Admite-se, em ambos os casos, que a seção transversal permanece plana.

A linha de centróides $\mathbf{r}(s,t)$ pode ser escrita na base inercial F como:

$$\mathbf{r}(s,t) = x(s,t)\mathbf{e}_1 + y(s,t)\mathbf{e}_2 + z(s,t)\mathbf{e}_3 \quad (3.1)$$

Já as deformações podem ser definidas como: deformações lineares, denotadas por $\mathbf{v}(s,t)$ e deformações angulares, indicadas por $\mathbf{u}(s,t)$. As componentes das deformações lineares $v_1(s,t)$ e $v_2(s,t)$ representam deformações de cisalhamento, e a componente $v_3(s,t)$ corresponde à deformação de alongamento. De forma análoga, as componentes $u_1(s,t)$ e $u_2(s,t)$ representam as deformações de flexão, enquanto a componente $u_3(s,t)$ representa a deformação de torção da seção transversal. A seguir serão definidos esses dois tipos de deformações.

Primeiramente, pode-se definir o vetor de deformação linear $\mathbf{v}(s,t)$ a partir da variação da linha de centróides ao longo da coordenada s :

$$\mathbf{v}(s,t) = \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s} \quad (3.2)$$

Com relação à Eq. (3.2) é importante ressaltar que, em virtude da deformação de cisalhamento da viga, a seção transversal deformada não permanece perpendicular à linha de centróides. Todavia, para vigas esbeltas, o efeito de cisalhamento pode ser negligenciado (WANG et al., 2004). Consequentemente, a seção transversal do elemento é assumida ser perpendicular à tangente da linha de centróides, ou seja:

$$\mathbf{v}(s,t) = \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s} = |\mathbf{r}'(s,t)| \mathbf{d}_3(s,t) \quad (3.3)$$

onde o apóstrofo indica a derivação em relação à coordenada s .

Portanto, como demonstrado em Wang et al. (2004), as componentes da deformação linear normalizada são dadas por :

$$\mathbf{d}_3(s,t) = \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{|\mathbf{r}'(s,t)|} \triangleq v_1(s,t)\mathbf{e}_1 + v_2(s,t)\mathbf{e}_2 + v_3(s,t)\mathbf{e}_3 \quad (3.4)$$

Além disso, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$v_1^2(s,t) + v_2^2(s,t) + v_3^2(s,t) = 1 \quad (3.5)$$

Desta forma, a deformação linear pode ser escrita a partir da Eq.(3.4) da seguinte forma:

$$v_1(s,t) = \frac{x'(s,t)}{|\mathbf{r}'(s,t)|}, \quad v_2(s,t) = \frac{y'(s,t)}{|\mathbf{r}'(s,t)|}, \quad v_3(s,t) = \frac{z'(s,t)}{|\mathbf{r}'(s,t)|} \quad (3.6)$$

O vetor das deformações angulares $\mathbf{u}(s,t)$ é definido a partir da derivada espacial da base móvel $\mathbf{d}_i(s,t)$, como:

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i(s,t)}{\partial s} = \mathbf{u}(s,t) \times \mathbf{d}_i(s,t) \quad (3.7)$$

A partir da Eq. (3.7) é possível encontrar a seguinte relação (CAO et al., 2006):

$$\sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial s} \right) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{d}_i \times (\mathbf{u} \times \mathbf{d}_i)) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u} (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i) - \mathbf{d}_i (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u})) = 2\mathbf{u} \quad (3.8)$$

Ao se rearranjar a Eq.(3.8) obtém-se a seguinte relação:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial s} \right) \quad (3.9)$$

Definidas as duas deformações a que está sujeito um segmento de viga de Cosserat, deve-se, para a completa descrição cinemática da viga, determinar o campo de rotações das seções transversais. Deste modo, pretende-se relacionar as componentes do vetor de deformação linear como os ângulos de rotação da seção transversal. Este procedimento pode ser feito a partir de dois métodos de parametrização. Na literatura, diversos métodos de parametrização são adotados para este fim, entre os quais pode-se citar ângulos de Euler, vetor rotacional (vetor de Euler), parâmetros quaternizados e transformada de Cayley, que podem ser encontradas nos trabalhos de Alamo (2006), Cao et al. (2006) e Rubin e Brand (2007). Entretanto, como as transformadas mais usuais são os vetores de Euler e ângulos de Euler, optou-se por estas abordagens neste trabalho.

Na parametrização utilizando os vetores de Euler, a matriz de transformação é definida utilizando apenas um ângulo e um vetor, que são representados, no caso presente, pelo ângulo de torção da seção transversal φ e o vetor de deformação linear \mathbf{v} . Este procedimento conduz à matriz de transformação dada na Eq.(3.10). Devido ao fato dos desenvolvimentos algébricos serem longos e de se tratar de um método conhecido de transformação, optou-se por não apresentar o detalhamento neste trabalho. Mais informações podem ser encontradas na tese de Alamo (2006).

$${}^F \mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \frac{(v_2^2 + v_3 v_1^2) \cos \varphi + (v_3 - 1) v_1 v_2 \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \cos \varphi - (v_2^2 + v_3 v_1^2) \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} & v_1 \\ \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \cos \varphi + (v_1^2 + v_3 v_2^2) \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{(v_1^2 + v_3 v_2^2) \cos \varphi - (v_3 - 1) v_1 v_2 \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} & v_2 \\ -v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi & v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi & v_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Ressalta-se que, para simplificar a notação, a dependência das grandezas cinemáticas em relação a t e s foi omitida.

Utilizando esta transformação, obtêm-se as seguintes relações entre os vetores da base de vetores inercial e da base de vetores não inercial:

$$\mathbf{d}_1 = \left[\frac{(v_2^2 + v_3 v_1^2) \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} \right] \mathbf{e}_1 + \left[\frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{(v_1^2 + v_3 v_2^2) \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} \right] \mathbf{e}_2 +$$

$$-(v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi) \mathbf{e}_3 \quad (3.11)$$

$$\mathbf{d}_2 = \left[\frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} - \frac{(v_2^2 + v_3 v_1^2) \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} \right] \mathbf{e}_1 + \left[\frac{(v_1^2 + v_3 v_2^2) \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} - \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} \right] \mathbf{e}_2 +$$

$$+(v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi) \mathbf{e}_3 \quad (3.12)$$

$$\mathbf{d}_3 = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.13)$$

A fim de facilitar os procedimentos de cálculo simbólico das funções de forma, devido à grande quantidade de termos envolvidos e alto custo computacional, e dado que nas próximas seções as deformações lineares serão relacionadas com os ângulos de rotação da seção transversal, expandiram-se as Eqs.(3.11), (3.12) e (3.13) em série de Taylor de terceira ordem em termos de v_1 , v_2 , φ , e eliminou-se o termo v_3 com auxílio da Eq. (3.5), obtendo-se as seguintes relações:

$$\mathbf{d}_1 \approx \left(1 - \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} v_1 v_2 \varphi \right) \mathbf{e}_1 + \left(\varphi - \frac{1}{2} v_1 v_2 - \frac{1}{2} v_2^2 \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) \mathbf{e}_2 + \left(-v_1 - v_2 \varphi + \frac{1}{2} v_1 \varphi^2 \right) \mathbf{e}_3 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{d}_2 \approx \left(-\varphi - \frac{1}{2} v_1 v_2 + \frac{1}{2} v_1^2 \varphi + \frac{1}{6} \varphi^3 \right) \mathbf{e}_1 + \left(1 - \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{1}{2} v_1 v_2 \varphi \right) \mathbf{e}_2 + \left(-v_2 + v_1 \varphi + \frac{1}{2} v_2 \varphi^2 \right) \mathbf{e}_3 \quad (3.15)$$

$$\mathbf{d}_3 \approx (v_1) \mathbf{e}_1 + (v_2) \mathbf{e}_2 + \left(1 - \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} v_2^2 \right) \mathbf{e}_3 \quad (3.16)$$

Depois de obtida a relação entre a base móvel e a base inercial utilizando o vetor de Euler, e a fim de relacionar a deformação linear com ângulos de rotação da seção transversal, faz-se uso de outro método de parametrização que relaciona de forma análoga essas duas bases. Neste caso, o método de parametrização utilizado foi baseado nos ângulos de Euler.

Ressalta-se que apesar desta nova matriz de transformação levar ao mesmo espaço vetorial, o procedimento para sua obtenção difere completamente do procedimento referente à transformação precedente. Assim, as relações entre a base móvel e inercial são obtidas através

de três rotações sucessivas em torno dos eixos inerciais, até que estes sejam coincidentes com os vetores unitários pertencentes à base móvel. Os ângulos de rotação são definidos como ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z , dados em torno dos eixos \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 respectivamente. Essas relações são dadas na Eq.(3.17), e por conveniência, a demonstração desta matriz não será mostrada neste trabalho. Informações detalhadas sobre a obtenção desta matriz podem ser encontradas no trabalho de Cao et al. (2006).

$${}^F\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos\phi_z \cos\phi_y + \text{sen}\phi_z \text{sen}\phi_x \phi_y & \text{sen}\phi_z \cos\phi_x & -\cos\phi_z \text{sen}\phi_y + \text{sen}\phi_z \text{sen}\phi_x \cos\phi_y \\ -\text{sen}\phi_z \phi_y + \cos\phi_z \text{sen}\phi_x \phi_y & \cos\phi_z \cos\phi_x & \text{sen}\phi_z \text{sen}\phi_y + \cos\phi_z \text{sen}\phi_x \cos\phi_y \\ \cos\phi_x \text{sen}\phi_y & \text{sen}\phi_x & \cos\phi_x \phi_y \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

De forma análoga à anterior, expandindo as relações trigonométricas apresentadas na Eq.(3.17) em séries de Taylor truncadas na terceira ordem, e igualando as expressões resultantes com as Eq.(3.14)-(3.16), tem-se as seguintes relações (CAO et al., 2006):

$$\phi_x(s,t) = -v_2 + \frac{1}{2} \varphi(s,t) v_1(s,t) - \frac{1}{6} \left(v_1^2(s,t) + v_2^2(s,t) - \frac{1}{2} \varphi^2(s,t) \right) v_2(s,t) \quad (3.18)$$

$$\phi_y(s,t) = v_1(s,t) + \frac{1}{2} \varphi(s,t) v_2(s,t) + \frac{1}{6} \left(v_1^2(s,t) + v_2^2(s,t) - \frac{1}{2} \varphi^2(s,t) \right) v_1(s,t) \quad (3.19)$$

$$\phi_z(s,t) = \varphi(s,t) - \frac{1}{12} \left(v_1^2(s,t) + v_2^2(s,t) \right) \varphi(s,t) \quad (3.20)$$

Ao se fazer algumas manipulações matemáticas nas Eqs. (3.18)-(3.20) e utilizando as relações obtidas na Eq. (3.6), obtêm-se as seguintes expressões:

$$v_1(s,t) = \frac{x'(s,t)}{|\mathbf{r}'(s,t)|} = \phi_y(s,t) + \frac{1}{2} \phi_x(s,t) \phi_z(s,t) - \frac{1}{6} \left(\phi_x^2(s,t) + \phi_y^2(s,t) + \phi_z^2(s,t) \right) \phi_y(s,t) \quad (3.21)$$

$$v_2(s,t) = \frac{y'(s,t)}{|\mathbf{r}'(s,t)|} = -\phi_x(s,t) + \frac{1}{2} \phi_y(s,t) \phi_z(s,t) + \frac{1}{6} \left(\phi_x^2(s,t) + \phi_y^2(s,t) + \phi_z^2(s,t) \right) \phi_x(s,t) \quad (3.22)$$

$$\varphi(s,t) = \phi_z(s,t) + \frac{1}{12}(\phi_x^2(s,t) + \phi_y^2(s,t))\phi_z(s,t) \quad (3.23)$$

É importante ressaltar que as Eqs. (3.21)-(3.23) serão de grande importância na obtenção das funções de forma do elemento de viga de Cosserat, para fins de discretização por elementos finitos, conforme procedimento detalhado mais adiante.

3.2. Equações do Movimento

O comportamento dinâmico local de um elemento diferencial de viga de Cosserat com densidade $\rho(s)$ e área de seção transversal $A(s)$, conforme deduzido em Antman (1995) é dado pelas equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial \mathbf{h}(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{m}(s,t)}{\partial s} + \mathbf{v}(s,t) \times \mathbf{n}(s,t) + \mathbf{l}(s,t) \quad (3.24)$$

$$\rho(s)A(s) \frac{\partial^2 \mathbf{r}(s,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{n}(s,t)}{\partial s} + \mathbf{f}(s,t) \quad (3.25)$$

Observa-se que as Eqs.(3.24)-(3.25) resultam da aplicação dos princípios de Newton-Euler ao elemento diferencial de viga. Nestas equações, $\mathbf{n}(s,t)$, $\mathbf{m}(s,t)$, $\mathbf{h}(s,t)$, $\mathbf{f}(s,t)$ e $\mathbf{l}(s,t)$ são, respectivamente, a força de contato, o momento de contato, a quantidade de momento angular, a força externa e o momento externo, todos por unidade de comprimento.

Neste ponto, vale notar que a terminologia “forças de contato” e “momentos de contato”, utilizada frequentemente na literatura referente à teoria de Cosserat, designa os esforços internos que, na terminologia da mecânica estrutural, são designados por momentos fletores e torção e esforços normais e cortantes.

A fim de definir as variáveis vetoriais como: forças de contato, momentos de contato, quantidade de movimento angular e o produto vetorial dado no lado direito da Eq.(3.24), todas estas variáveis serão definidas mais detalhadamente a seguir, a partir das seguintes relações:

$$\mathbf{n}(s,t) = \sum_{i=1}^3 n_i(s,t) \mathbf{d}_i(s,t) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{h}(s,t) = \sum_{i=1}^3 h_i(s,t) \mathbf{d}_i(s,t) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{m}(s,t) = \sum_{i=1}^3 m_i(s,t) \mathbf{d}_i(s,t) \quad (3.28)$$

Nota-se que, as forças de contato $\mathbf{n}(s,t)$ estão relacionadas com as deformações de extensão e de cisalhamento das componentes do vetor de deformação linear $\mathbf{v}(s)$, enquanto os torques de contato $\mathbf{m}(s,t)$ estão relacionados com as deformações de flexão e de torção das componentes do vetor de deformação angular, $\mathbf{u}(s)$. Já a quantidade de momento angular $\mathbf{h}(s,t)$ está relacionada com a inércia de rotação e com o vetor de velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(s,t)$.

Para obter a equação diferencial parcial do movimento em função dos deslocamentos $x(s,t)$, $y(s,t)$ e $z(s,t)$ e dos ângulos $\phi_x(s,t)$, $\phi_y(s,t)$ e $\phi_z(s,t)$, faz-se uso das relações entre o vetor de deformação angular $\mathbf{u}(s,t)$ e as derivadas dos diretores $\mathbf{d}_1(s,t)$, $\mathbf{d}_2(s,t)$ e $\mathbf{d}_3(s,t)$ com relação à variável espacial s , e a relação entre o vetor de velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(s,t)$ e as derivadas dos diretores $\mathbf{d}_1(s,t)$, $\mathbf{d}_2(s,t)$ e $\mathbf{d}_3(s,t)$ com relação à variável temporal t , que são dadas a seguir (CAO et al., 2006):

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{d}_i(s,t) = \mathbf{u}(s,t) \times \mathbf{d}_i(s,t) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}_i(s,t) = \boldsymbol{\omega}(s,t) \times \mathbf{d}_i(s,t) \quad (3.30)$$

Assim, com base nos termos dados no lado direito das Eq.(3.24)-(3.25), começando com a derivada espacial da força de contato, e com auxílio das Eqs. (3.26) e (3.29), pode-se escrever a Eq.(3.31).

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial s} (n_i \mathbf{d}_i) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial n_i}{\partial s} \mathbf{d}_i + n_i \mathbf{u} \times \mathbf{d}_i \right] \quad (3.31)$$

Desenvolvendo e rearranjando a Eq.(3.31), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{n} = \left(\frac{\partial}{\partial s} n_1 - n_2 u_3 + n_3 u_2 \right) \mathbf{d}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s} n_2 - n_3 u_1 + n_1 u_3 \right) \mathbf{d}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial s} n_3 - n_1 u_2 + n_2 u_1 \right) \mathbf{d}_3 \quad (3.32)$$

De forma análoga a derivada do momento de contato é calculada por:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{m} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial s} (m_i \mathbf{d}_i) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial m_i}{\partial s} \mathbf{d}_i + m_i \mathbf{u} \times \mathbf{d}_i \right] \quad (3.33)$$

E assim, após algumas manipulações matemáticas, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{m} = \left(\frac{\partial}{\partial s} m_1 - m_2 u_3 + m_3 u_2 \right) \mathbf{d}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s} m_2 - m_3 u_1 + m_1 u_3 \right) \mathbf{d}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial s} m_3 - m_1 u_2 + m_2 u_1 \right) \mathbf{d}_3 \quad (3.34)$$

A derivada temporal da quantidade de movimento angular é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} (h_i \mathbf{d}_i) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial t} (h_i) \mathbf{d}_i + h_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i \right] \quad (3.35)$$

ou ainda, após desenvolvimentos algébricos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h} = \left(\frac{\partial}{\partial t} h_1 - h_2 \omega_3 + h_3 \omega_2 \right) \mathbf{d}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t} h_2 - h_3 \omega_1 + h_1 \omega_3 \right) \mathbf{d}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} h_3 - h_1 \omega_2 + h_2 \omega_1 \right) \mathbf{d}_3 \quad (3.36)$$

Além disso, tem-se:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \left(\sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{d}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{d}_j \right) = (v_2 n_3 - v_3 n_2) \mathbf{d}_1 + (v_3 n_1 - v_1 n_3) \mathbf{d}_2 + (v_1 n_2 - v_2 n_1) \mathbf{d}_3 \quad (3.37)$$

Definidas as principais quantidades vetoriais envolvidas nas Eqs.(3.24)-(3.25), tem-se agora que expressar os esforços $\mathbf{m}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ em termos das deformações $\mathbf{u}(s)$ e $\mathbf{v}(s)$. Isso é obtido através das relações constitutivas do material. Para isso é assumida nesta modelagem que o módulo de elasticidade E , o módulo de cisalhamento G e a massa específica do material ρ ao longo do elemento de viga de Cosserat sejam funções somente da variável espacial s , e que o centro de massa coincide com o centróide da área da seção transversal em s .

Outra hipótese empregada é que a viga pode realizar grandes deslocamentos, mas mantendo pequenas deformações em cada ponto ao longo da viga. Assim, efeitos não-lineares importantes devidos à mudança na geometria são levados em consideração, inclusive se o material for não linear.

Entretanto, neste trabalho, será usado um modelo constitutivo em que são abordadas as características de um material linear e elástico, baseado nas relações constitutivas de Kirchhoff (CAO, et al., 2005). Com esse intuito, definem-se para materiais elásticos homogêneos e isotrópicos, as seguintes componentes da diagonal principal das matrizes $\mathbf{K}(s)$ e de $\mathbf{J}(s)$, que representam a rigidez mecânica estrutural:

$$\begin{aligned} J_1(s) &= E \Upsilon_1(s), & K_1(s) &= G A(s) \\ J_2(s) &= E \Upsilon_2(s), & K_2(s) &= G A(s) \\ J_3(s) &= G \Upsilon_3(s), & K_3(s) &= E A(s) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Os componentes $\Upsilon_i(s)$ ($i=1, 2, 3$) são os momentos principais de inércia de área da seção transversal, portanto J_1 e J_2 representam a rigidez à flexão e J_3 representa a rigidez à torção. Já os componentes K_1 e K_2 representam a rigidez ao cisalhamento e K_3 a resistência ao alongamento. Assim, utilizando as relações constitutivas para os materiais lineares de Kirchhoff, as forças e momentos de contato são dados em função das deformações lineares e angulares, respectivamente, pelas seguintes relações (CAO et al., 2006):

$$\mathbf{n}(s) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(s,t) \\ v_2(s,t) \\ v_3(s,t)-1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_1 v_1(s) \\ K_2 v_2(s) \\ K_3 [v_3(s)-1] \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{m}(s) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(s,t) \\ u_2(s,t) \\ u_3(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_1 u_1(s,t) \\ J_2 u_2(s,t) \\ J_3 u_3(s,t) \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

As relações demonstradas até o momento serão utilizadas, com base nos procedimentos de discretização do método de elementos finitos, para a obtenção das funções de forma utilizando a condição de equilíbrio estático. Estas funções serão posteriormente utilizadas para a definição do modelo discreto dinâmico.

3.3. Funções de forma para elementos de viga de Cosserat

Um dos principais problemas associados com o método de elementos finitos é a escolha consistente das funções de forma. Estas funções são responsáveis por determinar o campo de deslocamentos no interior do elemento a partir dos deslocamentos nodais. No método clássico, estas funções são geralmente aproximadas utilizando polinômios de baixa ordem. Em contrapartida, na teoria de vigas de Cosserat, as funções de forma podem ser obtidas a partir de equações diferenciais de equilíbrio estático, e por isso, levam em conta todas as não linearidades do sistema. Conseqüentemente, pode-se aumentar a precisão da resposta dinâmica dividindo a estrutura em poucos elementos, cujo número é geralmente muito menor do que se faz necessário em métodos tradicionais de elementos finitos. Entretanto, os ganhos proporcionados pela teoria de Cosserat são obtidos a custas de uma maior complexidade analítica e numérica.

As funções de deslocamento da viga, em função dos deslocamentos e rotações nodais, são obtidas a partir da resolução da equação de equilíbrio estático. No entanto, para o equilíbrio estático, as equações do movimento tornam-se equações diferenciais ordinárias, tendo exclusivamente s como variável independente. Na literatura, o equilíbrio estático é entendido como a ausência das forças externas, e a partir da Eq. (3.25), tem-se que as forças de contato devem satisfazer:

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = 0 \quad (3.41)$$

E, ainda a partir da Eq.(3.24), os momentos de contato satisfazem:

$$\frac{d\mathbf{m}(s)}{ds} + \mathbf{v}(s) \times \mathbf{n}(s) = 0 \quad (3.42)$$

Reescrevendo a Eq. (3.32) na forma matricial e combinando-a com a Eq. (3.41), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} n'_1(s) \\ n'_2(s) \\ n'_3(s) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u_3(s) & u_2(s) \\ u_3(s) & 0 & -u_1(s) \\ -u_2(s) & u_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} n'_1(s) - u_3(s)n_2(s) + u_2(s)n_3(s) \\ n'_2(s) + u_3(s)n_1(s) - u_1(s)n_2(s) \\ n'_3(s) - u_2(s)n_1(s) + u_1(s)n_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Analogamente, escrevendo as Eqs. (3.34) e (3.37) na forma matricial e combinando-as com a Eq. (3.42), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} m'_1(s) \\ m'_2(s) \\ m'_3(s) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u_3(s) & u_2(s) \\ u_3(s) & 0 & -u_1(s) \\ -u_2(s) & u_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1(s) \\ m_2(s) \\ m_3(s) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -v_3(s) & 0 \\ v_3(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas na Eq.(3.45), escreve-se:

$$\begin{cases} m_1'(s) - u_3(s)m_2(s) + u_2(s)m_3(s) - v_3(s)n_2(s) \\ m_2'(s) + u_3(s)m_1(s) - u_1(s)m_3(s) + v_3(s)n_1(s) \\ m_3'(s) - u_2(s)m_1(s) + u_1(s)m_2(s) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

As componentes da força de contato $n_1(s)$ e $n_2(s)$ são calculadas pelas duas primeiras linhas da equação matricial dada na Eq. (3.46):

$$n_1(s) = \frac{1}{v_3(s)} \left[-m_2'(s) - u_3(s)m_1(s) + u_1(s)m_3(s) \right] \quad (3.47)$$

$$n_2(s) = \frac{1}{v_3(s)} \left[+m_1'(s) - u_3(s)m_2(s) + u_2(s)m_3(s) \right] \quad (3.48)$$

As equações diferenciais ordinárias de equilíbrio estático são encontradas a partir da resolução do seguinte sistema não linear formado pelas três componentes da Eq. (3.44) e a terceira componente da Eq.(3.46):

$$n_1'(s) = u_3(s)n_2(s) - u_2(s)n_3(s) \quad (3.49)$$

$$n_2'(s) = u_1(s)n_3(s) - u_3(s)n_1(s) \quad (3.50)$$

$$n_3'(s) = u_2(s)n_1(s) - u_1(s)n_2(s) \quad (3.51)$$

$$m_3'(s) = u_2(s)m_1(s) - u_1(s)m_2(s) \quad (3.52)$$

Para encontrar as funções de forma torna-se necessária a resolução do sistema não linear dado pelas Eq.(3.49)-(3.52). Nota-se que estas equações não podem ser resolvidas através de uma integração direta. Portanto, o método da perturbação será empregado para obtenção da solução aproximada. Nayfeh (1985) aplica alguns métodos de perturbação para a resolução dos mais variados tipos de sistemas de equações não lineares. Particularmente, neste trabalho, se está interessado na resolução do sistema dado pelas Eqs. (3.49)-(3.52) que é formado por equações diferenciais ordinárias. Para isso, foi empregado um método da

perturbação voltado para resolução desta natureza, e dentre os vários métodos, optou-se pelo método de Frobenius (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2000).

Para a aplicação deste método, torna-se necessário introduzir parâmetros adimensionais. Por conveniência, considere-se um elemento uniforme e inicialmente reto de comprimento L ($s = a = 0$ e $s = b = L$), conforme mostrado na Fig. 3.2.

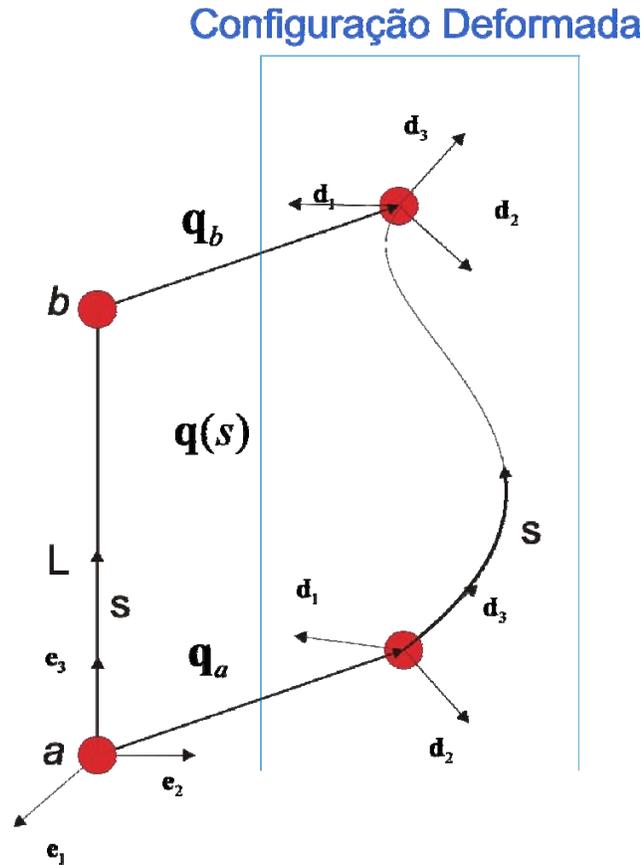


Figura 3.2 - Representação esquemática do elemento de viga de Cosserat.

Assim, as seguintes variáveis adimensionais, indicadas por barras sobrepostas, são introduzidas:

$$\bar{s} = \frac{s}{L}, \quad \bar{\mathbf{r}}(\bar{s}) = \frac{\mathbf{r}(s)}{L}, \quad \bar{x}(\bar{s}) = \frac{x(s)}{L}, \quad \bar{y}(\bar{s}) = \frac{y(s)}{L}, \quad \bar{z}(\bar{s}) = \frac{z(s)}{L}, \quad \tau = \omega_0 t \quad (3.53)$$

onde ω_0 é a frequência utilizada para tornar adimensional a variável temporal. Pode-se expressar os vetores de deslocamentos e rotações nodais nas extremidades de um elemento de viga, indicados pelos símbolos a e b , em função em um parâmetro de perturbação independente ε segundo:

$$\mathbf{q}_a = \left[\varepsilon x_a \quad \varepsilon y_a \quad \varepsilon z_a \quad \varepsilon \phi_{xa} \quad \varepsilon \phi_{ya} \quad \varepsilon \phi_{za} \right]^T \quad (3.54)$$

e:

$$\mathbf{q}_b = \left[\varepsilon x_b \quad \varepsilon y_b \quad \varepsilon z_b \quad \varepsilon \phi_{xb} \quad \varepsilon \phi_{yb} \quad \varepsilon \phi_{zb} \right]^T \quad (3.55)$$

de modo que o vetor de deslocamentos generalizados para o elemento pode ser descrito da forma:

$$\mathbf{q}^{(e)} = \left[\mathbf{q}_a^T \quad \mathbf{q}_b^T \right]^T \quad (3.56)$$

Aplicando as condições de contorno para as extremidades do elemento, obtêm-se:

$$\bar{x}(0) = \varepsilon x_a, \quad \bar{x}(1) = \varepsilon x_b \quad (3.57)$$

$$\bar{y}(0) = \varepsilon y_a, \quad \bar{y}(1) = \varepsilon y_b \quad (3.58)$$

$$\bar{z}(0) = \varepsilon z_a, \quad \bar{z}(1) = L + \varepsilon z_b \quad (3.59)$$

Pode-se ainda obter mais seis condições de contorno envolvendo as deformações lineares e o ângulo de torção, v_1 , v_2 e φ , respectivamente. Para isso, substituem-se os componentes do vetor de coordenadas generalizadas para os extremos a e b dados nas Eqs. (3.54)-(3.55) nas Eqs.(3.21)-(3.23) e obtêm-se as seguintes condições de contorno referentes ao nó a :

$$v_1(0) = \frac{\bar{x}'(0)}{|\bar{\mathbf{r}}'(0)|} = \varepsilon \phi_{ya} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \phi_{xa} \phi_{za} - \frac{1}{6} \varepsilon^3 (\phi_{xa}^2 + \phi_{ya}^2 + \phi_{za}^2) \phi_{ya} \quad (3.60)$$

$$v_2(0) = \frac{\bar{y}'(0)}{|\bar{\mathbf{r}}'(0)|} = -\varepsilon \phi_{xa} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \phi_{ya} \phi_{za} + \frac{1}{6} \varepsilon^3 (\phi_{xa}^2 + \phi_{ya}^2 + \phi_{za}^2) \phi_{xa} \quad (3.61)$$

$$\varphi(0) = \varepsilon \phi_{za} + \frac{1}{12} \varepsilon^3 (\phi_{xa}^2 + \phi_{ya}^2) \phi_{za} \quad (3.62)$$

Da mesma forma, para a extremidade b tem-se:

$$v_1(1) = \frac{\bar{x}'(1)}{|\bar{\mathbf{r}}'(1)|} = \varepsilon \phi_{yb} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \phi_{xb} \phi_{zb} - \frac{1}{6} \varepsilon^3 (\phi_{xb}^2 + \phi_{yb}^2 + \phi_{zb}^2) \phi_{yb} \quad (3.63)$$

$$v_2(1) = \frac{\bar{y}'(1)}{|\bar{\mathbf{r}}'(1)|} = -\varepsilon \phi_{xb} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \phi_{yb} \phi_{zb} + \frac{1}{6} \varepsilon^3 (\phi_{xb}^2 + \phi_{yb}^2 + \phi_{zb}^2) \phi_{xb} \quad (3.64)$$

$$\varphi(1) = \varepsilon \phi_{zb} + \frac{1}{12} \varepsilon^3 (\phi_{xb}^2 + \phi_{yb}^2) \phi_{zb} \quad (3.65)$$

Observa-se que algumas dessas condições de contorno são dadas em termos das derivadas espaciais do vetor de deslocamento nas direções x e y , divididas pelo módulo da derivada espacial do vetor de posição. Portanto, as duas primeiras expressões obtidas do lado esquerdo das Eqs.(3.60)-(3.61) e Eq.(3.63)-(3.64) não podem ser diretamente utilizadas como condições de contorno. Tomando como exemplo a extremidade a e a Eq.(3.60), tem-se:

$$\frac{\bar{x}'(0)}{|\bar{\mathbf{r}}'(0)|} = \frac{\frac{\partial}{\partial s} \bar{x}(0)}{\sqrt{\left(\frac{d}{ds} \bar{x}(0)\right)^2 + \left(\frac{d}{ds} \bar{y}(0)\right)^2 + \left(\frac{d}{ds} \bar{z}(0)\right)^2}} \quad (3.66)$$

Com intuito de facilitar a manipulação matemática, faz-se a seguinte substituição na Eq.(3.66):

$$\frac{\bar{x}'(0)}{|\bar{\mathbf{r}}'(0)|} = \frac{a}{\left((A)^2 + (B)^2 + (C)^2\right)^{1/2}}, \quad (3.67)$$

de modo que:

$$A = \left(\varepsilon \frac{d}{ds} \bar{x}_1(0) + \varepsilon^2 \frac{d}{ds} \bar{x}_2(0) + \varepsilon^3 \frac{d}{ds} \bar{x}_3(0) \right)$$

$$B = \left(\varepsilon \frac{d}{ds} \bar{y}_1(0) + \varepsilon^2 \frac{d}{ds} \bar{y}_2(0) + \varepsilon^3 \frac{d}{ds} \bar{y}_3(0) \right)$$

$$C = \left(1 + \varepsilon \frac{d}{ds} \bar{z}_1(0) + \varepsilon^2 \frac{d}{ds} \bar{z}_2(0) + \varepsilon^3 \frac{d}{ds} \bar{z}_3(0) \right)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas na Eq.(3.67) e sua expansão em série de Taylor em termos do parâmetro independente de perturbação ε e truncando na terceira ordem, tem-se:

$$\frac{\bar{x}'(0)}{|\bar{\mathbf{r}}'(0)|} = \frac{d}{ds} \bar{x}_1(0) \varepsilon + \left(-\frac{d}{ds} \bar{x}_1(0) \frac{d}{ds} \bar{z}_1(0) + \frac{d}{ds} \bar{x}_2(0) \right) \varepsilon^2 + \left(\frac{d}{ds} \bar{x}_1(0) \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \bar{x}_1(0) \right)^2 - \frac{\partial}{\partial s} \hat{z}_2(0) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \hat{z}_1(0) \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \hat{y}_1(0) \right)^2 \right) + \frac{d}{ds} \bar{x}_3(0) - \frac{d}{ds} \bar{x}_2(0) \frac{d}{ds} \bar{z}_1(0) \right) \varepsilon^3 \quad (3.68)$$

De forma análoga pode-se obter as expressões para $\frac{\bar{y}'(0)}{|\bar{\mathbf{r}}'(0)|}$, $\frac{\bar{x}'(l)}{|\bar{\mathbf{r}}'(l)|}$ e $\frac{\bar{y}'(l)}{|\bar{\mathbf{r}}'(l)|}$.

Portanto, definidas as condições de contorno nos extremos a e b , torna-se necessário definir todas as variáveis do sistema não linear dado na Eq.(3.49). Para isso, define-se a força de contato e o momento de contato em coordenadas escalares com auxílio das relações constitutivas dadas na Eq.(3.39) e Eq.(3.40), sob a forma:

$$m_1 = J_1 u_1 \quad (3.69)$$

$$m_2 = J_2 u_2 \quad (3.70)$$

$$m_3 = J_3 u_3 \quad (3.71)$$

$$n_1 = K_1 v_1 \quad (3.72)$$

$$n_2 = K_2 v_2 \quad (3.73)$$

$$n_3 = K_3 (v_3 - 1) \quad (3.74)$$

Como já mencionado anteriormente, em vigas esbeltas pode-se desprezar as deformações de cisalhamento, como mostrado na Eq. (3.3). Portanto, tem-se que $v_1 = v_2 = 0$ e $v_3 = \left| \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}(s) \right|$. Conseqüentemente, substituindo estes valores nas Eqs.(3.72) e (3.73) obtêm-se $n_1 = n_2 = 0$. Entretanto, optou-se por desprezar essas relações e utilizar, como recurso matemático para o cálculo destas duas forças de contato, as Eqs. (3.47) e (3.48). Ressalta-se que o uso destas equações não altera o modelo e ainda são validadas as relações em que são desprezados os esforços de cisalhamento.

Nota-se ainda que as deformações angulares, \mathbf{u} , são dadas na Eq.(3.9), em termos dos vetores diretores da base móvel, os quais, por sua vez, são definidos na Eqs.(3.14)-(3.16), em função dos deslocamentos e rotações. Portanto, todas as variáveis envolvidas no sistema não linear dado nas Eqs.(3.49)-(3.52) são funções das coordenadas generalizadas elementares e da variável s . Utilizando as condições de contorno dadas nas Eq.(3.57)-(3.65), aplicadas ao sistema definido nas Eqs.(3.49)-(3.52), pode-se obter, segundo o método de Frobenius, as seguintes aproximações para as funções de forma:

$$\bar{x}(\bar{s}) = \varepsilon \bar{x}_1(\bar{s}) + \varepsilon^2 \bar{x}_2(\bar{s}) + \varepsilon^3 \bar{x}_3(\bar{s}) + \dots \quad (3.75)$$

$$\bar{y}(\bar{s}) = \varepsilon \bar{y}_1(\bar{s}) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(\bar{s}) + \varepsilon^3 \bar{y}_3(\bar{s}) + \dots \quad (3.76)$$

$$\bar{z}(\bar{s}) = \bar{s} + \varepsilon \bar{z}_1(\bar{s}) + \varepsilon^2 \bar{z}_2(\bar{s}) + \varepsilon^3 \bar{z}_3(\bar{s}) + \dots \quad (3.77)$$

$$\varphi(\bar{s}) = \varepsilon \bar{\varphi}_1(\bar{s}) + \varepsilon^2 \bar{\varphi}_2(\bar{s}) + \varepsilon^3 \bar{\varphi}_3(\bar{s}) + \dots \quad (3.78)$$

Ressalta-se que estas funções podem ser aproximadas para a ordem desejada pelo usuário, notando-se que, com o aumento da ordem também é aumentado drasticamente o custo computacional. Neste trabalho, em um primeiro momento foi adotado o truncamento

nos termos de segunda ordem. E, posteriormente, usaram-se funções de forma truncadas em terceira ordem, quando se observou um aumento expressivo no número de termos presentes nestas funções. Entretanto, o algoritmo mostrou-se mais preciso para a representação de sistemas sujeitos a grandes deslocamentos. Estes pontos são evidenciados nas simulações numéricas apresentadas no Capítulo 5.

Observa-se que as funções de forma definidas na Eq.(3.75)-(3.78) se apresentam na forma adimensional. Entretanto, para sua utilização nas seções seguintes optou-se por torná-las novamente dimensionais.

$$x(s) = \bar{x}(\bar{s})L = \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \varepsilon^3 x_3(s) \quad (3.79)$$

$$y(s) = \bar{y}(\bar{s})L = \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \varepsilon^3 y_3(s) \quad (3.80)$$

$$z(s) = \bar{z}(\bar{s})L = s + \varepsilon z_1(s) + \varepsilon^2 z_2(s) + \varepsilon^3 z_3(s) \quad (3.81)$$

$$\varphi(s) = \bar{\varphi}(\bar{s})L = \varepsilon \varphi_1(s) + \varepsilon^2 \varphi_2(s) + \varepsilon^3 \varphi_3(s) \quad (3.82)$$

A título de ilustração, a seguir são apresentadas as funções de forma de primeira ordem:

$$x_1(s) = x_a + \phi_{ya}s - \frac{(3x_a - 3x_b + 2L\phi_{ya} + L\phi_{yb})s^2}{L^2} + \frac{(2x_a - 2x_b + L\phi_{ya} + L\phi_{yb})s^3}{L^3} \quad (3.83)$$

$$y_1(s) = y_a + \phi_{xa}s - \frac{(3y_a - 3y_b + 2L\phi_{xa} - L\phi_{xb})s^2}{L^2} + \frac{(2y_a - 2y_b - L\phi_{xa} - L\phi_{xb})s^3}{L^3} \quad (3.84)$$

$$z_1(s) = \frac{(z_b - z_a)s}{L} + z_a \quad (3.85)$$

$$\varphi_1 = \frac{(\phi_{zb} - \phi_{za})s}{L} + \phi_{za} \quad (3.86)$$

Ressalta-se que todas as soluções aqui apresentadas foram obtidas utilizando um programa de resolução simbólica. Devido ao tamanho destas soluções, só serão dados, no

presente trabalho, alguns exemplos destas funções. A seguir é dado um exemplo de uma função de forma de segunda ordem, particularmente a função $x_2(s)$.

$$x_2(s) = C_5 s^5 + C_4 s^4 + C_3 s^3 + C_2 s^2 + C_1 s^1 \quad (3.87)$$

onde o termo C_5 é dado, por exemplo, por:

$$C_5 = \frac{K_{33}(z_b - z_a)(L\phi_{yb} - 2x_b + \phi_{ya}L + 2x_a)}{20L^4 J_{22}} \quad (3.88)$$

Nota-se que as constantes são independentes da variável s no interior do elemento.

É importante ressaltar que estas funções de deslocamento obtidas com o equilíbrio estático serão posteriormente utilizadas na análise dinâmica, o que elimina um dos principais problemas normalmente encontrado em técnicas clássicas de elementos finitos, que é definir convenientemente as funções de forma.

3.4. Análise dinâmica pelo método de elementos finitos

Partindo do princípio de Hamilton estendido, é possível chegar às equações de Lagrange, as quais constituem uma forma bastante elegante para a obtenção das equações do movimento de sistemas dinâmicos (BATHE, 1996). Nesta seção, as equações de Lagrange são empregadas para formular as equações diferenciais de movimento do elemento de viga de Cosserat.

O princípio de Hamilton estendido é dado através da seguinte equação variacional:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{NC}^F dt = 0 \quad (3.89)$$

onde T é a energia cinética total do sistema, V é a energia potencial associada às forças e momentos impostos conservativos, δ representa o operador variacional e δW_{NC}^F é o trabalho realizado por forças e momentos impostos não conservativos.

3.4.1. Energias cinética e potencial da viga

A partir da Fig. 3.1 é possível notar que o movimento da viga envolve dois tipos de velocidades: as velocidades dos centróides das seções transversais, $\frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial t}$, e as velocidades angulares das seções transversais $\boldsymbol{\omega}(s,t)$. Logo, a energia cinética por unidade de comprimento é dada pela seguinte relação:

$$T^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial t} \right]^T \rho(s) A(s) \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}(s,t)]^T \mathbf{I}(s) \boldsymbol{\omega}(s,t) \quad (3.90)$$

em que $\mathbf{I}(s)$ é a matriz de inércia de massa, em relação a um conjunto de eixos ortogonais baricêntricos.

Por outro lado, considerando pequenas deformações, a energia potencial elástica por unidade de comprimento pode ser expressa em termos dos vetores de deformação $\mathbf{v}(s,t)$ e $\mathbf{u}(s,t)$ da seguinte forma:

$$U^* = \frac{1}{2} [\mathbf{v}(s,t)]^T \mathbf{K}(s) \mathbf{v}(s,t) + \frac{1}{2} [\mathbf{u}(s,t)]^T \mathbf{J}(s) \mathbf{u}(s,t) \quad (3.91)$$

dado que $\mathbf{K}(s)$ e $\mathbf{J}(s)$ são determinadas pelas relações constitutivas mostradas na Eq.(3.38).

Nota-se que tanto a densidade de energia cinética quanto a de energia potencial são funções das variáveis de tempo (t) e espaço (s). Portanto, para se encontrar as equações de movimento discretizadas, partindo do princípio de Hamilton e das equações de Lagrange, torna-se necessária a utilização das funções de forma dimensionais encontradas na seção anterior, Eq.(3.79)-(3.82). Ressalta-se que as funções de forma também poderiam ser utilizadas na forma adimensional; para tanto bastaria reescrever estas energias em função das variáveis adimensionais. Optou-se por usar variáveis dimensionais para facilitar a compreensão do uso das funções de forma no cálculo das matrizes de massa e rigidez do sistema. Nota-se ainda que alguns autores (CAO et al., 2006; WANG et al., 2004) optaram

por trabalhar com variáveis adimensionais. Entretanto, os dois procedimentos são equivalentes.

Dado que a variação temporal de um deslocamento genérico em um ponto no interior do elemento pode ser expressa baseada nas funções de forma encontradas na seção anterior, como uma função da variável s e do vetor de deslocamento nodal $\mathbf{q}^{(e)}(t)$, dados na Eq.(3.75) e truncados na terceira ordem, e fazendo $\varepsilon = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_1(s,t) + x_2(s,t) + x_3(s,t) \\ y(s,t) &= y_1(s,t) + y_2(s,t) + y_3(s,t) \\ z(s,t) &= s + z_1(s,t) + z_2(s,t) + z_3(s,t) \\ \varphi(s,\tau) &= \varphi_1(s,t) + \varphi_2(s,t) + \varphi_3(s,t) \end{aligned} \quad (3.92)$$

É importante ressaltar que o índice i ($i = 1, 2, 3$), na equação acima, representa a ordem das funções de forma que são dadas em função do deslocamento nodal temporal $\mathbf{q}^{(e)}(t)$. Consequentemente, o deslocamento em um ponto qualquer no interior do elemento pode ser escrito como:

$$x = x(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)), \quad y = y(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)), \quad z = z(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)), \quad \varphi = \varphi(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \quad (3.93)$$

E o vetor de posição pode ser escrito na base inercial da seguinte forma:

$$\mathbf{r}(s,t) = x(s,t)\mathbf{e}_1 + y(s,t)\mathbf{e}_2 + z(s,t)\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \quad (3.94)$$

Assim, o vetor de velocidade do centróide da seção transversal é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, \dot{\mathbf{q}}^e(t)) = \frac{\partial x}{\partial t}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial t}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial t}\mathbf{e}_3 = (\dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + \dot{z}\mathbf{e}_3) \quad (3.95)$$

Deve-se observar que foi introduzida a notação \dot{x} , \dot{y} e \dot{z} indicando as derivadas temporais das variáveis em questão.

Partindo da Eq.(3.30), tem-se:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{d}_i \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}_i \right) = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{d}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i)] = \sum_{i=1}^3 [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i) - \mathbf{d}_i (\mathbf{d}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] = 2\boldsymbol{\omega} \quad (3.96)$$

Rearranjando a Eq.(3.96), tem-se:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(s, \dot{\mathbf{q}}^e(t)) = \frac{\sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{d}_i \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}_i \right)}{2} \quad (3.97)$$

Rearranjando a expressão da energia potencial, Eq. (3.91), e considerando que a viga não está sujeita ao cisalhamento, tem-se (TUCKER e WANG, 1999):

$$U^* = \frac{1}{2} \left[J_1 u_1 u_1 + J_2 u_2 u_2 + J_3 u_3 u_3 + K_3 (v_3 - 1)^2 \right] \quad (3.98)$$

E ainda, a deformação angular é dada por:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_i \times \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{d}_i \quad (3.99)$$

Observa-se, nas Eqs.(3.14)-(3.16), que os vetores \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 e \mathbf{d}_3 são expressos em função das deformações lineares. E estas, por sua vez, são definidas a partir das derivadas espaciais do vetor posição. Portanto, efetuando as derivadas espaciais das Eq.(3.93), (3.94) e substituindo-as na Eq. (3.6), obtêm-se as seguintes relações:

$$v_1 = \frac{x'(s, \mathbf{q}^{(e)}(t))}{\left| \mathbf{r}' = \mathbf{r}'(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \right|} = v_1(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \quad (3.100)$$

$$v_2 = \frac{y'(s, \mathbf{q}^{(e)}(t))}{|\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(s, \mathbf{q}^{(e)}(t))|} = v_2(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \quad (3.101)$$

$$v_3 = \left| \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r} \right| = |\mathbf{r}'(s, \mathbf{q}^{(e)}(t))| = v_3(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \quad (3.102)$$

Substituindo as equações acima nas Eqs.(3.14)-(3.16), obtem-se:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad (3.103)$$

que, uma vez substituídos na Eq. (3.98), resulta na expressão da energia de deformação em função dos descolamentos e rotações nodais. Em resumo, o procedimento descrito leva à densidade de energia cinética, Eq.(3.90), e à densidade de energia potencial, Eq.(3.98), expressas como:

$$T^* = T^*(s, \dot{\mathbf{q}}^{(e)}(t)), \quad U^* = U^*(s, \mathbf{q}^{(e)}(t)) \quad (3.104)$$

Pode-se definir a grandeza conhecida como lagrangiano por:

$$L(\mathbf{q}^{(e)}, \dot{\mathbf{q}}^{(e)}) = T(\dot{\mathbf{q}}^{(e)}) - U(\mathbf{q}^{(e)}) = \int_0^L [T^*(s, \dot{\mathbf{q}}^{(e)}) - U^*(s, \mathbf{q}^{(e)})] ds \quad (3.105)$$

3.4.2. Trabalho virtual das forças e momentos não conservativos

Neste momento, torna-se necessário desenvolver o termo $\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{NC}^F dt$ dado na Eq. (3.89)

em função das coordenadas generalizadas. É importante ressaltar que este termo refere-se ao trabalho virtual realizado por forças e momentos não deriváveis de alguma função potencial. O deslocamento virtual pode ser expresso em termos de coordenadas generalizadas da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.106)$$

Portanto, a expressão do trabalho virtual dos esforços não conservativas é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{NC}^F dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^{NC} \cdot \delta \mathbf{r}_i) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i^{NC} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j dt \end{aligned} \quad (3.107)$$

em que \mathbf{F}^{NC} representa a resultante das forças não conservativas e $Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$ são os chamados esforços generalizados.

Assume-se que as forças que atuam no elemento são compostas de três partes aditivas: a primeira é proveniente da interação entre elementos vizinhos; a segunda é devida à ação de forças externas concentradas nos pontos nodais; e finalmente, a terceira representa as forças externas distribuídas com direções fixas e de intensidade prescrita.

Neste trabalho, a interação dos elementos vizinhos será denominada de forças e momentos internos. As forças internas nos nós das extremidades do elemento (a , $s=0$, e b , $s=L$) são dadas por:

$$\mathbf{f}_a^i(t) = [f_{ax}(t) \quad f_{ay}(t) \quad f_{az}(t)]^T, \quad \mathbf{f}_b^i(t) = [f_{bx}(t) \quad f_{by}(t) \quad f_{bz}(t)]^T \quad (3.108)$$

Os momentos de interação interna são dados por:

$$\mathbf{l}_a^i(t) = [l_{ax}(t) \quad l_{ay}(t) \quad l_{az}(t)]^T, \quad \mathbf{l}_b(t) = [l_{bx}(t) \quad l_{by}(t) \quad l_{bz}(t)]^T \quad (3.109)$$

Analogamente, as forças e momentos externos concentrados são dados por:

$$\mathbf{f}_a^c(t) = [f_{xa}^c(t) \quad f_{ya}^c(t) \quad f_{za}^c(t)]^T, \quad \mathbf{f}_b^c(t) = [f_{xb}^c(t) \quad f_{yb}^c(t) \quad f_{zb}^c(t)]^T \quad (3.110)$$

$$\mathbf{l}_a^c(t) = [l_{xa}^c(t) \quad l_{ya}^c(t) \quad l_{za}^c(t)]^T, \quad \mathbf{l}_b^c(t) = [l_{xb}^c(t) \quad l_{yb}^c(t) \quad l_{zb}^c(t)]^T \quad (3.111)$$

Finalmente, as forças distribuídas (ξ^d) e os momentos distribuídos (η^d) são dados por:

$$\xi^d = [\xi_x^d \quad \xi_y^d \quad \xi_z^d]^T, \quad \eta^d = [\eta_x^d \quad \eta_y^d \quad \eta_z^d]^T \quad (3.112)$$

O trabalho virtual realizado por um carregamento distribuído (CAO et al., 2006) é dado por:

$$\delta W^d = \int_0^l (\xi_x^d \delta x + \xi_y^d \delta y + \xi_z^d \delta z + \eta_x^d \delta \phi_x + \eta_y^d \delta \phi_y + \eta_z^d \delta \phi_z) ds \quad (3.113)$$

Portanto, levando em conta as aproximações das funções de forma obtidas na seção anterior, dadas na Eq.(3.92) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{d(e)}(t, \mathbf{q}^{(e)}) = \int_0^l & \left[\xi_x^d \frac{\partial x(s, \mathbf{q}^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \xi_y^d \frac{\partial y(s, \mathbf{q}^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \xi_z^d \frac{\partial z(s, \mathbf{q}^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \dots \right. \\ & \left. + \eta_x^d \frac{\partial \phi_x(s, \mathbf{q}^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \eta_y^d \frac{\partial \phi_y(s, \mathbf{q}^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \eta_z^d \frac{\partial \phi_z(s, \mathbf{q}^{(e)})}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} \right] \delta \mathbf{q}^{(e)} ds \end{aligned} \quad (3.114)$$

Agrupando as forças internas e momentos internos na forma elementar, tem-se:

$$\mathbf{f}^{i(e)}(t) = \left[\mathbf{f}_a^i(t) \quad \mathbf{l}_a^i(t) \quad \mathbf{f}_b^i(t) \quad \mathbf{l}_b^i(t) \right]^T \quad (3.115)$$

Analogamente, as forças e momentos externos elementares são dados por:

$$\mathbf{f}^{c(e)}(t) = \left[\mathbf{f}_a^c(t) \quad \mathbf{l}_a^c(t) \quad \mathbf{f}_b^c(t) \quad \mathbf{l}_b^c(t) \right]^T \quad (3.116)$$

Portanto o trabalho virtual total realizado pelas forças aditivas é dado por:

$$\delta W_{NC}^F = \left(\mathbf{f}^{i(e)} + \mathbf{f}^{c(e)} + \mathbf{f}^{d(e)} \right)^T \cdot \delta \mathbf{q}^{(e)} \quad (3.117)$$

Substituindo as Eqs. (3.105) e (3.117) na Eq. (3.89), utilizando a regra da cadeia, e a integração por partes, tem-se a equação de Lagrange para o movimento de um elemento de Cosserat (CAO et al., 2005).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j^{(e)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j^{(e)}} = \mathbf{f}_j^{i(e)} + \mathbf{f}_j^{c(e)} + \mathbf{f}_j^{d(e)} \quad (3.118)$$

Fazendo algumas manipulações matemáticas na Eq. (3.118) pode-se encontrar as equações de movimento com não linearidades da mesma ordem das funções de deslocamentos, representada pela Eq. (3.119). No estudo apresentado nesta tese, estas operações foram realizadas com o auxílio de programas computacionais de manipulação simbólica.

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) + \mathbf{g}^{(e)} \left(\mathbf{q}^{(e)}(t) \right) = \mathbf{f}^{i(e)}(t) + \mathbf{f}^{c(e)}(t) + \mathbf{f}^{d(e)}(t, \mathbf{q}^{(e)}) \quad (3.119)$$

onde que $\mathbf{M}^{(e)}$ é a matriz de massa elementar (linear), $\mathbf{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez linear, $\mathbf{g}^{(e)} \left(\mathbf{q}^{(e)} \right)$ é o vetor não linear que contém os termos quadráticos e cúbicos de $\mathbf{q}^{(e)}$.

3.5. Montagem das equações de movimento em nível global

Após construídas as matrizes de massa, rigidez e forças nodais equivalentes para cada elemento de viga de Cosserat, deve-se estabelecer a conexão mecânica entre os diferentes elementos, o que é feito através do processo de montagem das equações globais de movimento do sistema, que é um dos procedimentos padrão na modelagem por elementos finitos. Com esse intuito, define-se o vetor de deslocamentos globais \mathbf{q}^G , composto pelos deslocamentos de todos os nós, Eq.(3.120).

$$\mathbf{q}^G = \left[X_1 \quad Y_1 \quad Z_1 \quad \Phi_{x1} \quad \Phi_{y1} \quad \Phi_{z1} \quad X_2 \quad Y_2 \quad Z_2 \quad \Phi_{x2} \quad \Phi_{y2} \quad \Phi_{z3} \dots \right]^T \quad (3.120)$$

A equação de movimento para todo o sistema deve ser construída considerando a contribuição de todos os elementos. Neste sentido, expandindo-se a matriz elementar para fazê-la da mesma dimensão que os deslocamentos globais, como realizado no método de elementos finitos (BATHE, 1996), têm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{e=1}^{ne} {}^G \mathbf{M}^e, \quad \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} {}^G \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}^G) = \sum_{e=1}^{ne} {}^G \mathbf{g}^e(\mathbf{q}^e), \\ \mathbf{f}^c(t) &= \sum_{e=1}^{ne} {}^G \mathbf{f}_e^c(t), \quad \mathbf{f}^d(t) = \sum_{e=1}^{ne} {}^G \mathbf{f}_e^d(t) \end{aligned} \quad (3.121)$$

Na Eq. (3.121), ne representa o número de elementos, $\mathbf{f}^c(t)$ e $\mathbf{f}^d(t)$ são vetores de força nodal concentrada e distribuída, respectivamente. Dado que a contribuição das forças e momentos internos $\mathbf{f}^i(t)$ para o sistema global sempre aparecem aos pares, sendo compostos de ação e reação, esses esforços tem resultante nula e, portanto não aparecem no equacionamento acima. Assim, as equações de movimento para um conjunto de elementos são dadas por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^G + \mathbf{K}\mathbf{q}^G + \mathbf{g}(\mathbf{q}^G) = \mathbf{f}^c(t) + \mathbf{f}^d(t, \mathbf{q}) \quad (3.122)$$

Este sistema de equações de movimento representa todos os deslocamentos nodais, sejam livres, restritos ou impostos. E, para a resolução das equações dinâmicas não lineares, Eq.(3.122), como feito no procedimento padrão na teoria clássica de elementos finitos, será rearranjada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fr} \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_f \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fr} \\ \mathbf{K}_{rf} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}_f) \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^c(t) + \mathbf{f}_f^d(t, \mathbf{q}_f) \\ \mathbf{f}_r^c(t) + \mathbf{f}_r^d(t, \mathbf{q}_r) \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

onde o índice f refere-se aos deslocamentos livres, enquanto que o índice r refere-se aos deslocamentos restritos. Se as restrições são do tipo bloqueio de graus de liberdade, a equação Eq.(3.123) conduz a dois subsistemas de equações:

$$\mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q}_f + \mathbf{g}(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_r) = \mathbf{f}_f^c(t) + \mathbf{f}_f^d(t, \mathbf{q}_f) \quad (3.124)$$

e,

$$\mathbf{M}_{rf} \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{K}_{rf} \mathbf{q}_f + \mathbf{g}(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_r) = \mathbf{f}_r^c(t) + \mathbf{f}_r^d(t, \mathbf{q}_r) \quad (3.125)$$

sendo que o primeiro deve ser resolvido para obter as coordenadas livres, a partir das quais o segundo sistema fornece as forças e momentos de reação nas coordenadas restritas.

Vale ressaltar que estes conjuntos de equações são altamente não lineares e requerem o uso de integradores robustos para determinação dos campos de deslocamento e velocidade, que serão abordados mais adiante.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM DO FLUIDO E ACOPLAMENTO DOS DOMÍNIOS

Neste Capítulo são descritos os procedimentos de modelagem desenvolvidos no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU, e implementados a partir de modificações do código computacional denominado FLUIDS3D. Nesse código computacional utiliza-se o método de volumes finitos para discretizar as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis e sem transferência de calor. Particularmente foi inserida nesta modelagem o método de fronteira imersa para modelagem da interface fluido-estrutura, para que pudesse ser acoplado com o modelo estrutural descrito no Capítulo 3. O objetivo principal deste capítulo é ilustrar os trabalhos desenvolvidos para realização do acoplamento fluido-estrutural, bem como descrever sucintamente o método da fronteira imersa.

4.1. Método da fronteira imersa

Como discutido nos capítulos anteriores, após a definição do modelo estrutural, torna-se necessária a abordagem de uma metodologia de modelagem e simulações numéricas de escoamento tridimensionais. Neste caso, utiliza-se o método da fronteira imersa. Dentro deste contexto, são utilizadas as equações de Navier-Stokes, discretizadas utilizando-se o método dos volumes finitos para a discretização espacial e o método de Crank-Nicolson para a discretização temporal (VEDOVOTO, 2007).

Resumidamente, esta metodologia consiste em representar o fluido por uma malha euleriana, que representa o comportamento do escoamento, e utilizar uma malha lagrangiana que representa a interface entre estes dois meios. Assim, faz-se uso de dois domínios distintos, porém acoplados. Nota-se que esta interface é representada por uma linha, no caso

bidimensional, e por uma superfície, no caso tridimensional. Dentro deste contexto, é também estabelecida uma forma de interação entre o fluido e a interface imersa, ou seja, as duas formulações são acopladas matematicamente (VEDOVOTO; CAMPREGHER; SILVEIRA NETO, 2006).

Assim, consegue-se simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando simplesmente um domínio cartesiano para a modelagem dos escoamentos e uma malha não estruturada para modelagem da interface imersa, como mostrado na Fig.4.1. No trabalho de Vedovoto (2007) é mostrada a capacidade de se importar qualquer geometria lagrangiana para o domínio euleriano. Outra vantagem a ser considerada é que, no caso de problemas de fluido-estrutura, onde a malha euleriana é fixa, não há necessidade de remalhagem, mesmo com a estrutura se movendo, uma vez que apenas a interface lagrangiana se move. O fato de se trabalhar sempre com um domínio cartesiano fixo é a principal vantagem que os pesquisadores, que utilizam o MFI apontam, quando a comparam com simulações que utilizam malha não-estruturada, ou metodologias que necessitam atualização da malha de discretização do domínio fluido.

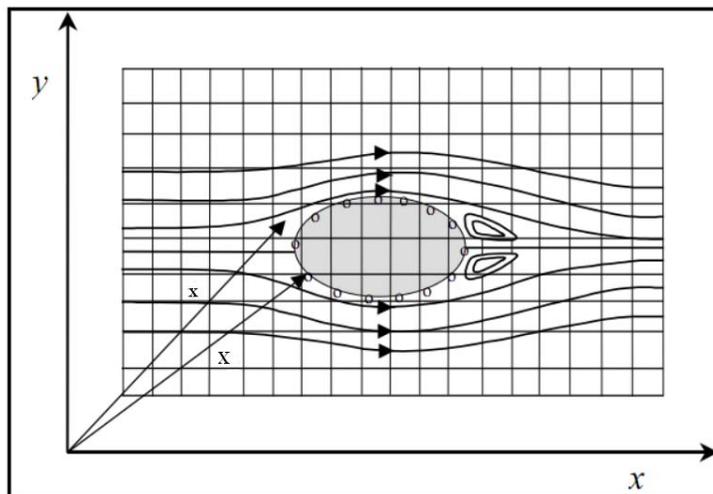


Figura 4.1 - Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa, onde \mathbf{x} representa as coordenadas do domínio euleriano e \mathbf{X} representa as coordenadas do domínio lagrangiano (adaptado de Lima e Silva, 2002).

Observa-se que, como na metodologia são utilizados dois domínios de cálculo, torna-se necessária a utilização de uma formulação matemática que permita o acoplamento entre essas duas malhas. Os modelos de fronteira imersa buscam avaliar este acoplamento pela

inserção de um termo de força às equações para o domínio fluido. Se esse acoplamento entre os domínios for mal construído, podem aparecer sérias inconsistências físicas que comprometem a validade das simulações.

4.1.1. Formulação para o domínio euleriano

As equações de Navier-Stokes são resolvidas em todo o domínio de cálculo. Estas equações podem ser escritas na forma tensorial para escoamentos isotérmicos e incompressíveis, sob a forma (WHITE, 1981):

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_F} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{f_i}{\rho_F} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.2)$$

onde ρ_F e ν são, respectivamente, a massa específica e a viscosidade cinemática, propriedades que caracterizam o fluido. As características do escoamento são representadas por: p (o campo de pressão), u_i (as componentes do vetor velocidade das partículas de fluido) e f_i (as componentes do campo de força através do qual o fluido sente a presença da interface).

No método da fronteira imersa o termo f_i pode ser considerado, fisicamente, como um termo que representa as forças de campo, e é responsável por modelar a interface imersa no domínio euleriano. Assim, este termo deve ter valor diferente de zero apenas nos pontos eulerianos coincidentes com a interface. Para todos os outros pontos, esse termo obrigatoriamente deve ser nulo. Pode-se encontrar essa relação matemática da seguinte forma:

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} F_i(\mathbf{X}, t) & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{X} \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{X} \end{cases} \quad (4.3)$$

em que:

$F_i(\mathbf{X}, t)$ é a força lagrangiana, calculada sobre os pontos da interface.

Esta definição leva a um campo $f_i(\mathbf{x}, t)$ descontínuo, o qual pode ser resolvido numericamente apenas quando houver coincidência entre os domínios lagrangianos e eulerianos. Caso não haja coincidência, o que, para geometrias complexas é muito frequente, deve-se distribuir a função $f_i(\mathbf{x}, t)$ sobre a sua vizinhança. Para tanto, faz-se uso de uma função distribuição de força, $D_h(\mathbf{X} - \mathbf{x})$, proposta por Peskin (1972), *apud* Peskin (2002), conforme será mostrado nas seções seguintes.

4.1.2. Cálculo da força lagrangiana

Para o cálculo da força lagrangiana existem varias metodologias, dentre elas pode-se citar o Modelo Físico Virtual (*Virtual Physical Model* -VPM) proposto por Lima e Silva et al. (2003) e o método da imposição direta da força (“Direct Forcing” - DF) proposto por Uhlmann (2005b) e também apresentado nos trabalhos de Shu et al. (2007), Su et al. (2007) e Wang; Fan; Luo, (2008), entre outros. Pode-se avaliar o método VPM como sendo uma variação do DF, na qual é avaliada dinamicamente a força que o fluido exerce sobre a superfície sólida imersa no escoamento. A força lagrangiana $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ é avaliada fazendo-se um balanço de forças sobre uma partícula de fluido que se encontra junto à interface sólido-fluido, utilizando as próprias equações de Navier-Stokes. Assim a densidade de força lagrangiana pode ser expressa sob a forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}_{acc}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}_{inert}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}_{visc}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}_{press}(\mathbf{X}, t) \quad (4.4)$$

Os termos do lado direito da Eq. (4.4) são denominados, respectivamente, por força de aceleração, força inercial, força viscosa e força de pressão, os quais são definidos pelas equações (4.5) a (4.8), escritas aqui na forma tensorial:

$$\mathbf{F}_{acc} = \rho \frac{\partial(U_i)}{\partial t} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F}_{inert} = \rho \frac{\partial}{\partial X_j} (U_i U_j) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{F}_{visc} = -\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right] \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F}_{press} = \frac{\partial (P_j)}{\partial X_j} \quad (4.8)$$

4.1.3. Discretização das equações do domínio euleriano e lagrangiano

Discretizando a derivada temporal da equação de Navier-Stokes definida no domínio lagrangeano, dado pela Eq.(4.4), através de um esquema de Euler explícito (WANG; FAN; LUO, 2008), escreve-se:

$$F_i(\mathbf{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t \quad (4.9)$$

em que:

$$RHS_i = \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j};$$

sendo Δt é o intervalo discreto de tempo.

No presente trabalho optou-se por utilizar o método DF que consiste em somar e subtrair um parâmetro auxiliar (U_i^*) no operador discretizado do tempo na Eq.(4.9) (WANG; FAN; LUO, 2008), ou seja:

$$F_i(\mathbf{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^* + U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t \quad (4.10)$$

A próxima etapa consiste em empregar o princípio da superposição à Eq.(4.10) e resolvê-la em duas etapas em um mesmo passo de tempo, da forma:

$$\frac{U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t = 0 \quad (4.11)$$

$$F_i(\mathbf{X}, t) = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t} \quad (4.12)$$

É importante ressaltar que o termo $U_i^{t+\Delta t}$ da equação (4.12), está associado à velocidade da fronteira imersa ao instante de tempo posterior $t + \Delta t$. Em se tratando de simulações fluido-estruturais, esta velocidade é conhecida, e dada pela velocidade da estrutura imersa, ou seja, $U_i^{t+\Delta t} = U_i^{FI}$, onde U_i^{FI} deve ser obtida do modelo que rege o movimento da interface, o qual, no presente trabalho, será obtido utilizando a teoria de vigas de Cosserat, apresentada no capítulo anterior.

De forma análoga ao procedimento utilizado na discretização do domínio lagrangiano, pode-se obter as equações no domínio euleriano, dado por:

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} + rhs_i^t = 0 \quad (4.13)$$

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^*}{\Delta t} \quad (4.14)$$

Observando-se as Eq.(4.13) e (4.14), e fazendo uma analogia com relação ao método preditor-corretor definido por Chorin (1968), o parâmetro auxiliar (u_i^*) pode ser entendido como um campo de velocidade predita, ou estimada, que posteriormente, será corrigida levando em conta a velocidade da fronteira.

Após definidas as equações discretas em ambos os domínios, torna-se necessário utilizar a metodologia de acoplamento, para transferir velocidades e forças entre os dois domínios. A seguir, será apresentada uma formulação matemática, para distribuir e interpolar as variáveis que estão definidas nas Eqs.(4.11) a (4.14), que se apresentam no domínio lagrangiano e euleriano, respectivamente.

4.2. Modelo matemático para a interface fluido-sólido

Ao observar a equação (4.3), tem-se uma força proveniente do domínio lagrangiano. Portanto, deve-se promover o acoplamento entre as formulações representativas do domínio fluido (provenientes do campo euleriano) e da fronteira imersa. Este acoplamento é feito pelo processo de distribuição da força lagrangiana para o domínio euleriano e pela interpolação das velocidades eulerianas para a malha lagrangiana. Mais detalhes sobre a modelagem e a implementação do método da fronteira imersa serão apresentados a seguir.

4.2.1. Comunicação entre os domínios euleriano e lagrangiano.

A comunicação entre os dois domínios é feita através das funções de interpolação e distribuição. Em muitos casos, não há pontos coincidentes entre os dois domínios. Portanto, primeiramente serão abordados alguns procedimentos para que se possa distribuir a força lagrangiana, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ sobre a sua vizinhança euleriana, acoplando as Eq.(4.12) e (4.14). Para isso, faz-se uso de uma função distribuição de força, $D_h(\mathbf{X} - \mathbf{x})$, definida pela distância entre os pontos lagrangianos e eulerianos, proposta por Peskin (1972), *apud* Peskin (2002), expressa pelas Eq.(4.15) a (4.17).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\Gamma} D_h(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{X}_i) \Delta S^3 \quad (4.15)$$

$$D_h(\mathbf{X} - \mathbf{x}) = \frac{1}{h^3} W_g\left(\frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}}{h}\right) W_g\left(\frac{\mathbf{Y} - \mathbf{y}}{h}\right) W_g\left(\frac{\mathbf{Z} - \mathbf{z}}{h}\right) \quad (4.16)$$

$$W_g(r) = \begin{cases} \frac{3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4|r|^2}}{8} & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ \frac{5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4|r|^2}}{8} & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 0 & \text{se } 2 < |r| \end{cases} \quad (4.17)$$

onde :

$r = \left| \frac{\mathbf{X} - \mathbf{x}}{h} \right|$, h o espaçamento do domínio euleriano discretizado e ΔS é o espaçamento do domínio lagrangiano discretizado.

Nota-se que a função W_g , ilustrada na Fig. 4.2, tem a forma e propriedades análogas a uma função gaussiana.

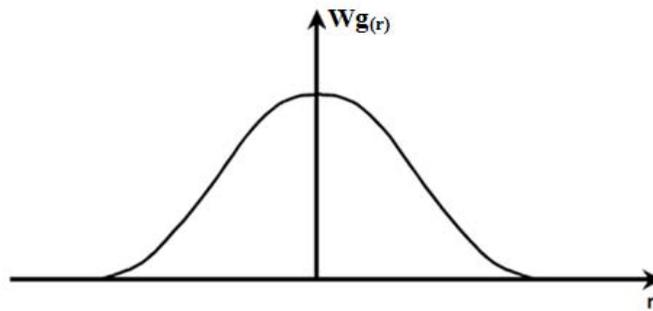


Figura 4.2 - Função distribuição do tipo gaussiana proposta por Peskin (1972) *apud* Peskin, (2002).

Como descrito anteriormente, o campo de força euleriano, $f_i(\mathbf{x}, t)$, é nulo em todo domínio, exceto quando se aproxima dos pontos lagrangianos, onde passa a modelar virtualmente a presença da membrana imersa. Esta modelagem é responsável pela identificação da geometria imersa ao escoamento, e, portanto, simula a presença de um corpo. Com essa abordagem não é necessário fazer uma adaptação da malha euleriana para localizar a interface (LIMA e SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003), já que uma vez calculado o campo de força lagrangiano, $F_i(\mathbf{X}, t)$, este pode ser distribuído e, assim, é transmitida a informação da presença da geometria para a malha euleriana.

Pode-se ainda interpretar a função W_g como uma função peso da distribuição proposta por Peskin, dada na Eq.(4.16). Na literatura é possível encontrar diversos estudos nos quais os autores alteram esta função. As principais funções utilizadas são: a função chapéu (“hat”), W_h , dada pela Eq.(4.18), que é equivalente a uma interpolação bilinear, a qual foi utilizada no trabalho de Su, Lai e Lin (2007); a função denominada *cúbica*, W_c , dada pela Eq.(4.19), que foi proposta por Tornberg e Engquist (2005) *apud* Griffith e Peskin (2005); a função cosseno,

W_{cos} , dada pela Eq.(4.20), que foi proposta no trabalho de Peskin (2002) e utilizada no trabalho de Villar (2008); e por último, a função de seis pontos, W_{6p} , dada pela Eq.(4.21), que foi proposta por Stockie (1997) *apud* Griffith e Peskin (2005).

$$W_h(r) = \begin{cases} 1-|r| & \text{se } 0 \leq |r| \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < |r| \end{cases} \quad (4.18)$$

$$W_c(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3 & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ 1 + \frac{11}{6}|r| + |r|^2 - \frac{1}{6}|r|^3 & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r| \end{cases} \quad (4.19)$$

$$W_{cos}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi|r|}{2}\right) \right] & \text{se } 0 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r| \end{cases} \quad (4.20)$$

$$W_{6p}(r) = \begin{cases} \frac{61}{112} - \frac{11}{42}|r| - \frac{11}{56}|r|^2 + \frac{1}{12}|r|^3 + \\ \frac{\sqrt{3}}{336} (243 + 1584|r| - 748|r|^2 - 1560|r|^3) & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ +500|r|^4 + 336|r|^5 - 112|r|^6)^{1/2} \\ \frac{21}{16} + \frac{7}{12}|r| - \frac{7}{8}|r|^2 + \frac{1}{6}|r|^3 - \frac{3}{2}W_{6p}(|r|-1) & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ \frac{9}{8} - \frac{23}{12}|r| + \frac{3}{4}|r|^2 - \frac{1}{12}|r|^3 + \frac{1}{2}W_{6p}(|r|-2) & \text{se } 2 \leq |r| < 3 \\ 0 & \text{se } 3 \leq |r| \end{cases} \quad (4.21)$$

É importante ressaltar, conforme demonstrado por Griffith e Peskin (2005), que nem todas essas funções peso satisfazem às propriedades matemáticas que uma função distribuição deve ter. Entretanto, os autores provaram que as funções apresentadas acima conduzem a resultados melhores que algumas funções que as satisfazem.

Destaca-se que a função peso, $W(r)$, é fundamental para a precisão e ordem de convergência numérica da metodologia. O trabalho de Mariano; Moreira; Silveira-Neto (2009) apresenta a comparação entre estas diferentes funções distribuição. No presente trabalho, optou-se, devido a sua fácil implementação, razoável precisão e menor custo computacional, por utilizar a função chapéu, dada na Eq.(4.18).

Após apresentado o processo de distribuição, torna-se necessário introduzir os conceitos de interpolação. Nesta etapa, deseja-se transferir a velocidade estimada no domínio euleriano, no qual é representada pela variável u_i^* , e dada pela Eq.(4.13), para o domínio lagrangiano, no qual é representada por U_i^* , que é utilizada em Eq.(4.12) para o cálculo da força lagrangiana, $F_i(\mathbf{X}, t)$. Para isso, é utilizada a função de interpolação dada pela Eq. (4.22):

$$\mathbf{U}^* = \sum u_i^* D_h(\mathbf{X} - \mathbf{x}) h^3 \quad (4.22)$$

A função de interpolação pode ser entendida como um processo oposto ao de distribuição, isto é, enquanto na distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os vizinhos eulerianos, na função interpolação transfere-se a informação dos pontos eulerianos vizinhos para um ponto lagrangiano. Essas transferências são ponderadas pela distância entre estes dois conjuntos de pontos, $(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_i)$, através da função D_h , e por uma das funções pesos apresentadas anteriormente. Para facilitar a compreensão desses procedimentos de transferência de dados entre os dois domínios, a seção a seguir ilustrará esta metodologia que trata dos princípios básicos utilizados no método da fronteira imersa.

4.2.2. Algoritmo básico da metodologia da fronteira imersa baseado no método de imposição direta da força

Na Fig. 4.3 é apresentado um fluxograma no qual se apresentam, de forma sucinta, as principais etapas envolvidas no processo de transferência de dados entre os dois domínios utilizados no método da fronteira imersa. Para facilitar o entendimento, o processo de transferência de informações foi dividido em 4 etapas, em cada uma das quais é apresentado

um resumo das equações a serem resolvidas nos domínios euleriano e lagrangiano, bem como, o acoplamento entre esses dois.

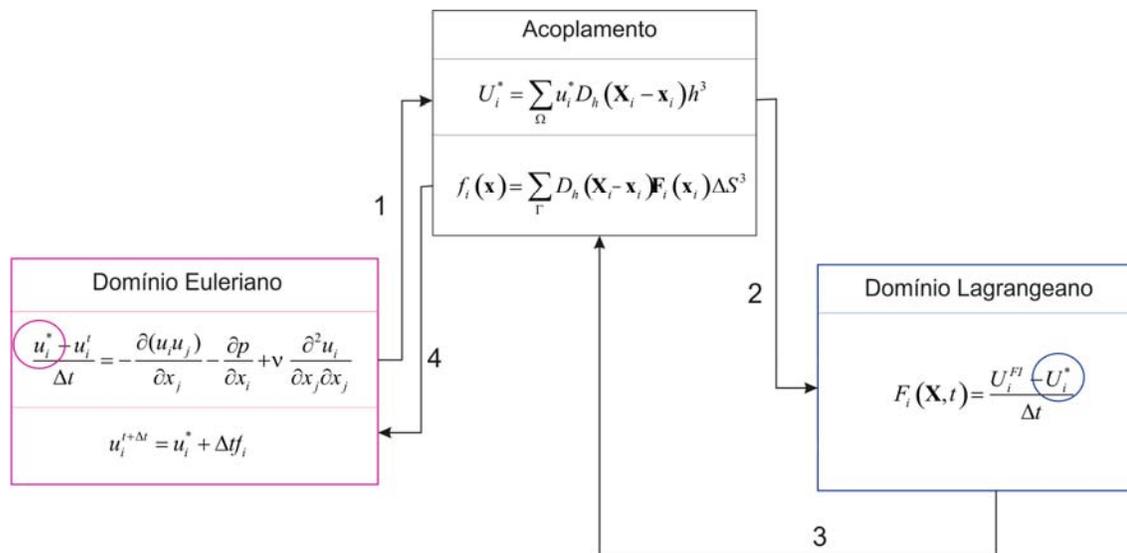


Figura 4.3 - Esquema ilustrativo do acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano em um intervalo discreto de tempo Δt .

A primeira etapa consiste da resolução da Eq. (4.13) a fim de se calcular o parâmetro auxiliar, u_i^* . No equacionamento apresentado acima, para fins didáticos, a derivada temporal discreta foi obtida através do esquema de Euler de primeira ordem a partir da Eq. (4.13). É importante ressaltar que esta operação poderia ser realizada de diversas formas, como por exemplo, as adotadas por Uhlmann (2005a) e Wang; Fan; Luo (2008) que utilizaram o método de Runge-Kutta de terceira ordem. Entretanto, de forma análoga ao trabalho de Lai e Lin (2007), no presente trabalho, nas simulações numéricas, foi utilizado um esquema de Crank-Nicolson (VEDOVOTO, 2007).

Após a obtenção da velocidade estimada u_i^* no domínio euleriano é necessária a utilização de um processo de interpolação, dado pela Eq.(4.22), em que a informação do domínio euleriano é transmitida para o domínio lagrangiano.

Após a conclusão da primeira etapa obtém-se a velocidade estimada U_i^* no domínio lagrangiano; com isso pode-se calcular a força lagrangiana conforme indicado na Fig. 4.3 pelo índice 2, referente à segunda etapa. Vale ressaltar que U_i^{Fl} é a velocidade que a fronteira

deve ter, ou seja, para simulações fluido-estruturais esta velocidade é calculada pela resolução do modelo estrutural.

Já na terceira etapa a força lagrangiana é distribuída para o domínio euleriano. Este processo é feito utilizando a Eq.(4.15). Resumidamente, têm-se transferências de informações do domínio lagrangiano para o euleriano.

Por fim, na última etapa, a força euleriana f_i é utilizada para atualizar o campo de velocidade, por meio da Eq.(4.14). Assim, a velocidade euleriana é calculada através do “campo de velocidade estimado” que recebe a informação da fronteira. Nota-se que o operador temporal foi discretizado através de um esquema de Euler de primeira ordem. No presente trabalho foram feitas algumas simulações utilizando o esquema de Cranck-Nicolson. Informações detalhadas são dadas na dissertação de Vedovoto (2007).

Cabe ressaltar que este é um algoritmo simplificado da metodologia da fronteira imersa usando o modelo DF. Ainda falta o cálculo do campo de pressão de forma a satisfazer a equação da continuidade (Eq.(4.2)). Isso é feito através da resolução da equação de Poisson. Detalhes sobre esta resolução podem ser encontrados na dissertação de Kitatani (2009).

4.2.3. Múltipla imposição da força (Multi Forçagem Direta)

Nesta seção será apresentado um procedimento de modelagem numérica para se estabelecer que a velocidade da partícula de fluido em contato com a interface imersa seja igual à velocidade da fronteira. Em muitos casos essa condição não pode ser satisfeita computacionalmente, dadas às imprecisões inerentes às simulações numéricas (interpolação de valores de velocidade para faces ou centros de volumes de controle). Essa discrepância pode ser quantificada através da norma L_2 , dada na Eq.(4.23).

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^N (|\mathbf{U}_l| - |\mathbf{U}_l^{FI}|)^2}{N}}, \quad (4.23)$$

em que:

N é o número total de pontos da fronteira lagrangiana e l representa os pontos lagrangianos.

Entretanto, no trabalho de Wang; Fan; Luo (2008) é proposto um processo iterativo para o cálculo da força euleriana, denominado “Multi-Direct Forcing”, com o qual se pretende melhorar a precisão deste cálculo. Com esse intuito, faz-se a seguinte modificação na Eq.(4.14):

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^{it} \quad (4.24)$$

onde it é o número da iteração.

Essa modificação faz com que o campo de velocidade euleriano u_i^{it} seja, de acordo com o número de interações, interpolado antes de avançar para o próximo passo de tempo. Portanto, a Eq.(4.22) é resolvida novamente de acordo com:

$$\mathbf{U}^{it} = \sum_{\Omega} u_i^{it} D_h(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_i) h^3 \quad (4.25)$$

Dessa forma, obtém-se um novo campo de força f_i^{it} , conforme a equação a seguir:

$$u_i^{it+1} = u_i^{it} + \Delta t f_i^{it}. \quad (4.26)$$

Assim, repete-se o procedimento ilustrado na Fig. 4.3 de $it=1$ até $it=N_{it}$, em que a variável N_{it} representa o número total de iterações. Portanto, com esse procedimento tem-se a expectativa de que a velocidade da fronteira seja melhor estimada, ou seja:

$$U_i^{FI} - U_i^{it} \rightarrow 0 \quad L_2 \rightarrow 0 \quad (4.27)$$

Teoricamente, a força lagrangiana, bem como a norma L_2 tendem a zero na N_{it} -ésima iteração. Nota-se que no trabalho de Wang; Fan; Luo (2008) foram utilizados um número fixo de iterações. Esse critério de parada pode ser facilmente modificado, como por exemplo, impondo-se a finalização do processo iterativo quando $|L_2| \leq \varepsilon$, sendo ε um parâmetro de convergência pré-definido pelo usuário.

Vale lembrar que após definidos os modelos utilizados por ambas as metodologias: a modelagem estrutural (teoria de vigas de Cosserat) e a modelagem fluida (método da fronteira imersa) torna-se necessária a elaboração de códigos computacionais que sejam capazes de transferir informações entre esse dois meios, dado que, como mostrado nas seções anteriores, a estrutura de dados destas duas simulações são completamente diferentes. Esse assunto será abordado de forma detalhada na seção seguinte.

4.3. Acoplamento entre os domínios fluido e estrutural

Nota-se que os princípios físicos, como leis constitutivas e as equações de equilíbrio ou de movimento, estabelecidas pelos princípios fundamentais da Dinâmica, são, com as devidas adaptações, válidas tanto para fluidos como para estruturas. Esta é a base da abordagem empregada na teoria da Mecânica dos Meios Contínuos. Porém, uma das maiores dificuldades encontradas na resolução de problemas em interação fluido-estrutural reside nas características bastante diferentes das equações discretizadas que representam o escoamento em relação às que descrevem o movimento da estrutura. Portanto, a discretização conjunta desses dois sistemas de equações resulta em sistemas lineares com números extremamente alto de equações, e de alto nível de esparsidade, cujo tratamento nem sempre é fácil. Esta abordagem é conhecida como Simultânea ou Monolítica, e sua principal característica é que todos os domínios avançam ao mesmo tempo (FARHAT; LESOINNE; LETALLEC, 1998).

Outra forma de resolução consiste em empregar procedimentos de resolução distintos e independentes para o problema de dinâmica dos fluidos e para o de mecânica dos sólidos efetuando-se o acoplamento entre eles através da transferência bidirecional de dados cinemáticos e dinâmicos. O tratamento do problema dessa forma é conhecido como Particionado. É possível encontrar, na literatura o termo “métodos diretos” para as abordagens monolíticas e “métodos iterativos” para as abordagens particionadas. A Fig. 4.4 apresenta a evolução do processo de resolução de um problema de interação fluido-estrutural segundo a abordagem particionada. Nota-se que as informações obtidas com a solução de um dos subsistemas são utilizadas como dados de entrada para a resolução do outro. Além disso, o avanço temporal só é realizado a partir do instante em que as soluções são obtidas.

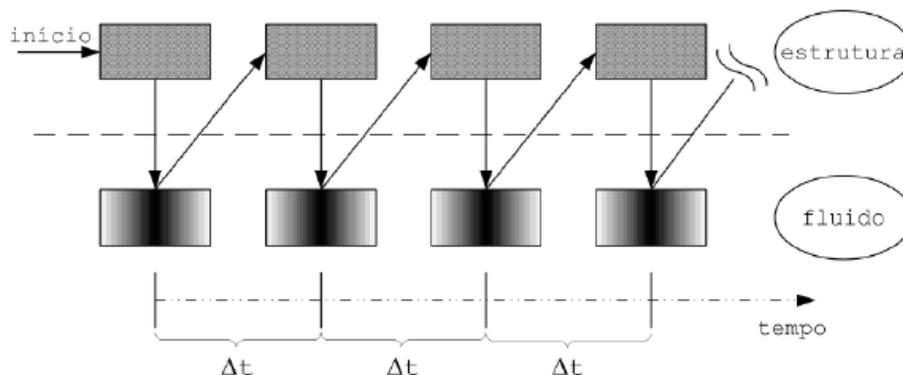


Figura 4.4 – Evolução de um sistema de interação fluido-estrutural segundo a abordagem particionada.

A principal vantagem desta metodologia está diretamente ligada à maior liberdade de manuseio dos códigos computacionais, pois pode-se trabalhar com aqueles específicos para cada necessidade. Isso torna possível utilizar códigos empregados em outras atividades, sejam eles abertos ou comerciais, uma vez que o interesse está na resolução separada de cada domínio. Outra vantagem fundamental do tratamento particionado é a possibilidade de emprego de malhas diferentes para a discretização do domínio fluido e para o sólido.

Entretanto, o esquema particionado possui, em geral, problemas com estabilidade e precisão da solução. Com relação à estabilidade, a solução mais simples adotada é diminuir o passo de tempo empregado e a precisão pode ser melhorada impondo-se um processo iterativo entre os domínios até que a precisão pretendida seja atendida. Por outro lado, um número maior de iterações entre os domínios tende a ser mais caro em comparação com a diminuição do passo de tempo.

Como uma observação final em relação aos sistemas particionados, pode-se dizer que estes são, em geral, acumuladores de energia (devido aos prováveis erros ao se transitar entre um domínio e outro) e, desta forma, tendem a ser instáveis. Assim, na prática, estes modelos induzem ao emprego de passos de tempo bastante reduzidos. Um desenho esquemático, representando as iterações entre os domínios dentro de cada passo de tempo, indicadas pela letra “T”, pode ser visto na Fig. 4.5. Entretanto, neste trabalho, devido ao alto custo computacional envolvido nestas simulações, optou-se por utilizar o sistema de transferência de dados mostrado na Fig. 4.4. Assim, pode-se resumir os procedimentos adotados na resolução de um problema de interação fluido-estrutural, usando o método particionado, dividindo-o de acordo com as seguintes etapas:

1. Transferir o movimento da estrutura para o fluido;
2. Atualizar a posição da malha no fluido;
3. Resolver o problema de fluidodinâmica e recalcular a pressão e a velocidade;
4. Converter a nova pressão do fluido em um carregamento estrutural;
5. Resolver o problema estrutural, conforme o carregamento aplicado e recalcular a posição, velocidade e aceleração da estrutura.

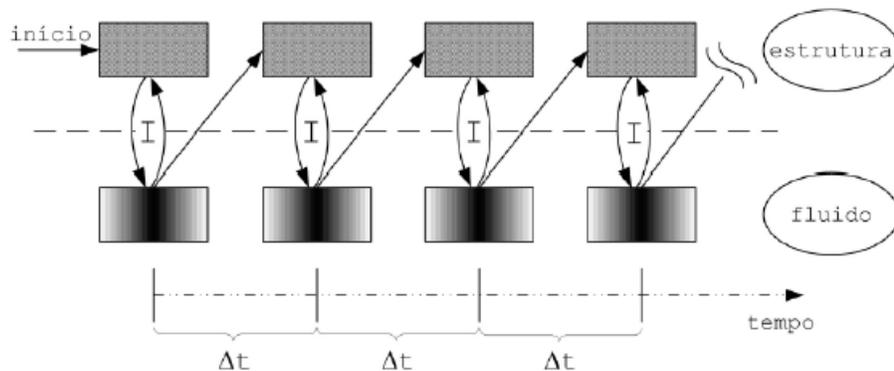


Figura 4.5- Acoplamento entre a resolução estrutural e a resolução para o fluido.

Deve-se dizer, por outro lado, que o maior responsável pela qualidade da solução obtida num problema de interação fluido-estrutura com a abordagem particionada reside no algoritmo empregado na transferência das informações entre um domínio e outro. A operação de transferência realizada por alguns programas avalia, por exemplo, o campo de pressões no fluido, inserindo-o no termo de força no modelo estrutural. Essa abordagem é de fundamental interesse de aplicação deste trabalho especificamente, e essa troca de dados entre os dois domínios bem como a compatibilização entre as diferentes malhas, das duas metodologias de modelagem, fluido e estrutural, será tratada mais detalhadamente na próxima seção.

4.3.1. Compatibilização entre as diferentes malhas – domínio fluido e domínio estrutural

Nesta seção será definida a metodologia utilizada para acoplar os meios fluido e estrutural. Nota-se que a malha nesses dois meios é diferente, conforme ilustrado na Fig. 4.6, na qual se indica a malha de discretização do fluido por elementos retangulares dispostos

sobre a superfície de uma estrutura cilíndrica e a malha de discretização do domínio estrutural que, de acordo com a teoria de Cosserat, abordada no Capítulo 3, é formada por nós posicionados sobre uma linha.

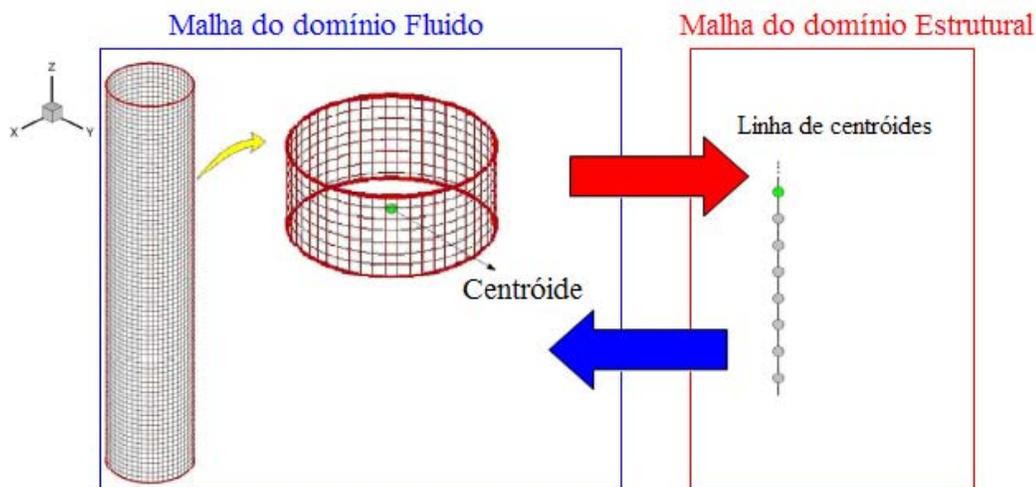


Figura 4.6. Acoplamento entre as malhas do fluido e estrutural.

Um dos principais problemas enfrentados nesta etapa é como transferir as forças e momentos aplicados pelo fluido sobre a superfície do cilindro, calculadas pelo método da fronteira, aos nós da malha estrutural. Este problema também deve ser resolvido no sentido inverso, ou seja, transferência dos deslocamentos, velocidades e acelerações que são calculados usando a teoria de vigas de Cosserat para a superfície do cilindro que estará em contato com o fluido.

O procedimento adotado consiste em considerar “fatias” da malha cilíndrica, na direção do comprimento do cilindro imerso, composto por uma fileira de elementos na direção “z” e associá-lo a um dado ponto nodal da malha estrutural, de modo que a força, assim como o momento aplicado sobre o nó da malha estrutural, sejam as resultantes das solicitações aplicadas em todos os nós da malha de fluido na superfície da “fatia” de cilindro. A Fig. 4.7 ilustra esta abordagem.

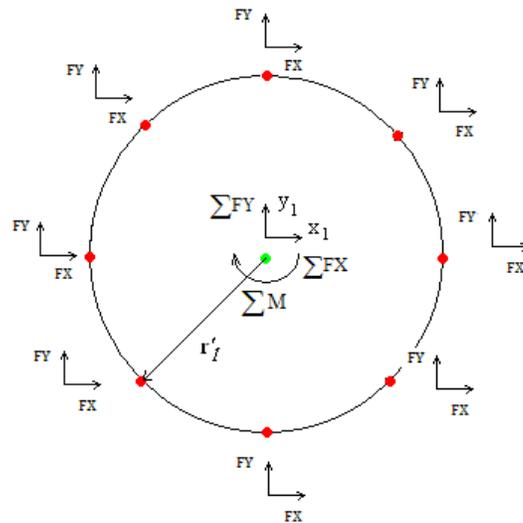


Figura 4.7 – Aplicação das forças exercidas pelo Fluido a um ponto nodal estrutural, plano x-y.

Na Fig. 4.7, os pontos em vermelho representam os pontos lagrangianos da estrutura submersa e o ponto em verde representa o nó da malha estrutural. Para realizar a transferência de informações entre os dois domínios torna-se necessário o uso de eixos auxiliares de referências. Nesta modelagem foram utilizados três eixos, que são mostrados na Fig. 4.8, sendo dois deles móveis ($Axyz$ e $Ax_1y_1z_1$) e um fixo ($OXYZ$).

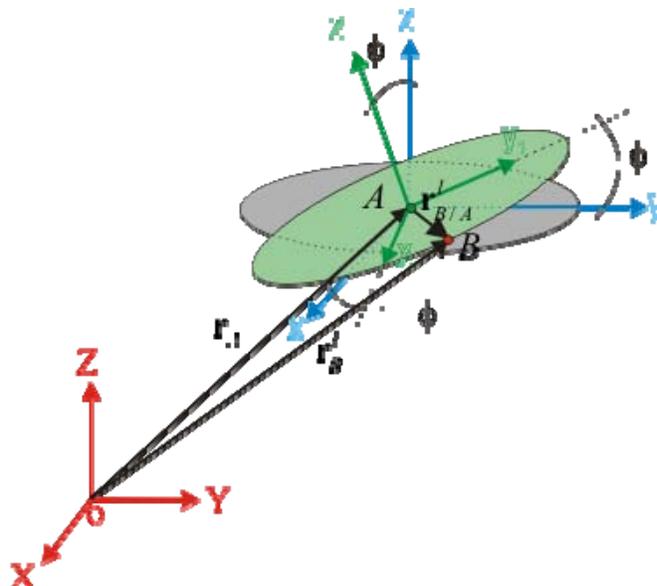


Figura 4.8. – Representação esquemática de uma “fatia” do cilindro simulado e os eixos de referência utilizados.

Os eixos $Axyz$ estão animados com movimento de translação, definido a partir do cálculo estrutural em termos de posição, velocidade e aceleração da linha de centróides que, por sua vez, são representados neste modelo pelas três primeiras componentes dos vetores de coordenadas nodais associadas ao nó estrutural da fatia do cilindro, $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{q}}(t)$. Já o sistema de eixos $Ax_1y_1z_1$ está animado com movimento de rotação, sendo solidário à seção transversal, e seus eixos são orientados de forma que x_1 e y_1 estejam contidos no plano da seção transversal, conforme ilustrado na Fig. 4.7. Assim, sua movimentação está associada às três últimas componentes do vetor de coordenadas nodais, que são definidas pelas variáveis ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z e $\dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y, \dot{\phi}_z$, que representam, respectivamente, as componentes da posição e da velocidade angular.

O sistema de eixos $Ax_1y_1z_1$ foi definido a fim de facilitar a completa descrição dos pontos lagrangianos, pois nas simulações foi admitido que a seção transversal comporta-se como um corpo rígido, o que implica que a distância entre dois pontos no seu interior permanece inalterada durante o movimento. A posição do ponto lagrangiano no eixo móvel $Ax_1y_1z_1$ é definida como r_l' para $l=1$ até $l=N$, dado que N representa o número total de pontos lagrangianos por “fatia”.

Uma vez definidos os dois eixos auxiliares, os procedimentos de transferência de informações serão abordados. Para facilitar a compreensão deste processo, a apresentação será dividida em duas partes. Na primeira parte, as forças lagrangianas definidas na seção 4.1.2, representadas pelo vetor $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$, assim como os momentos produzidos associados serão transferidos. Na segunda etapa, após a realização da simulação estrutural, as novas posições e velocidades do centro de massa serão atualizadas.

4.3.2. Transferência das forças aplicadas da malha lagrangiana para os pontos nodais

As forças lagrangianas calculadas no meio fluido são aplicadas na superfície imersa. Este fato faz com que se tenha que desenvolver algoritmos capazes de transferir esta força de superfície para o ponto nodal estrutural. Conforme esquematizado na Fig.4.7 pode-se escrever:

$$\left(\sum \mathbf{F}\right)_{OXYZ} = \sum_{l=1}^N \left(\mathbf{F}_l(\mathbf{X}, t)\right)_{OXYZ} \quad (4.28)$$

em que N representa o número de pontos lagrangianos e uma fatia, $\mathbf{F}_l(\mathbf{X}, t)$ é o vetor de força lagrangiana para o l -enésimo ponto lagrangiano e \mathbf{F} é o vetor de força transferida ao ponto nodal.

Nota-se que a direção do sistema de eixos $Axyz$, devido ao seu movimento de translação, permanece inalterada em relação ao sistema inercial $OXYZ$. Portanto, sem qualquer transformação, pode-se escrever a Eq. (4.28) da seguinte forma:

$$\sum_{l=1}^N \left(\mathbf{F}_l\right)_{OXYZ} = \left(\sum \mathbf{F}\right)_{Axyz} \quad (4.29)$$

Uma vez definido o vetor de forças aplicadas ao ponto nodal, deve-se definir o momento associado, o qual é calculado da seguinte forma:

$$\sum \left(\mathbf{M}\right)_{Axyz} = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{r}_{B/A}^i\right)_{Axyz} \times \left(\mathbf{F}_i\right)_{Axyz} \quad (4.30)$$

Conforme mostrado na Fig. 4.8 o vetor $\mathbf{r}_{B/A}^i$ representa a posição do i -ésimo ponto lagrangeano e está representado no sistema $Axyz$. Entretanto, os pontos lagrangeanos no interior da “fatia” estão definidos pelo vetor \mathbf{r}_i' no sistema de referencia $Ax_1y_1z_1$, conforme mostrado na Fig. 4.7. Portanto, como as forças também estão representadas nos eixos $Axyz$, optou-se por projetar o vetor \mathbf{r}_i' neste sistema de coordenadas devido ao fato de suas direções serem constantes e paralelas ao sistema inercial, conforme ilustrado na Fig.4.9.

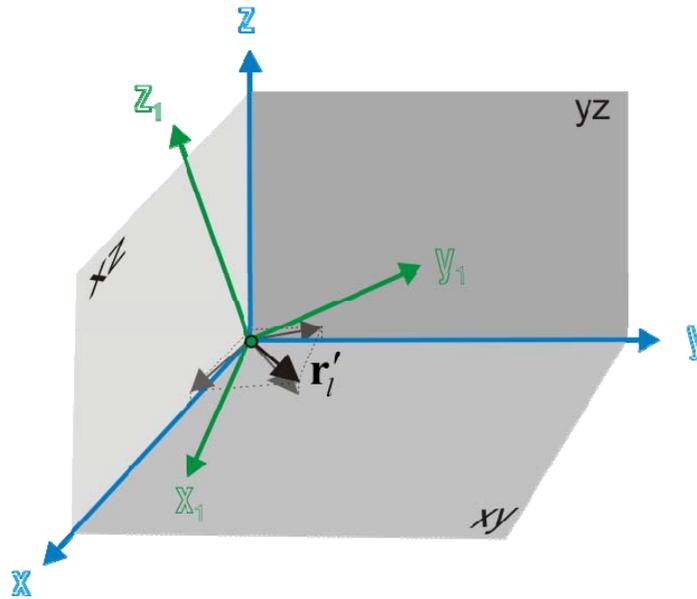


Figura 4.9 – Projeção do vetor r'_i no sistema $Axyz$.

Matematicamente, essa projeção é feita utilizando uma matriz de rotação definida a partir dos ângulos de Euler. Essa transformação consiste basicamente em transpor o movimento giratório de um eixo em outro utilizando três rotações consecutivas, definidas pelos ângulos ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z em torno dos eixos x , y e z respectivamente, conforme definido anteriormente para a parametrização na teoria de vigas de Cosserat na Seção 2.1. Esta matriz de transformação é dada por:

$${}^F\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos\phi_z \cos\phi_y + \text{sen}\phi_z \text{sen}\phi_x \phi_y & \text{sen}\phi_z \cos\phi_x & -\cos\phi_z \text{sen}\phi_y + \text{sen}\phi_z \text{sen}\phi_x \cos\phi_y \\ -\text{sen}\phi_z \phi_y + \cos\phi_z \text{sen}\phi_x \phi_y & \cos\phi_z \cos\phi_x & \text{sen}\phi_z \text{sen}\phi_y + \cos\phi_z \text{sen}\phi_x \cos\phi_y \\ \cos\phi_x \text{sen}\phi_y & -\text{sen}\phi_x & \cos\phi_x \phi_y \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Portanto, pode-se escrever:

$$\left(\mathbf{r}'_i \right)_{Axyz} = \mathbf{T} \left(\mathbf{r}'_i \right)_{A'x_1y_1z_1} \quad (4.32)$$

Substituindo a Eq.(4.32) na Eq.(4.30) tem-se:

$$\sum (\mathbf{M})_{Axyz} = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{T} \cdot (\mathbf{r}'_i)_{Ax_iy_iz_i} \times (\mathbf{F}_i)_{Axyz} \right) \quad (4.33)$$

Deste modo as forças e momentos devidos às forças aplicadas na superfície da estrutura são transportados para os pontos nodais da malha estrutural.

4.3.3. Transferência de dados do ponto nodal para malha lagrangiana

Na seção anterior foram calculadas as forças e momentos a que estarão sujeitos os pontos nodais da malha estrutural. Após a simulação estrutural, os dados percorreram o caminho inverso ao abordado anteriormente, ou seja, os resultados obtidos nos pontos nodais (centróides), como posição, velocidade e aceleração, serão transportados para a superfície do cilindro, sobre o qual está definida a malha langrangiana. Os procedimentos para estes cálculos serão abordados nesta seção.

Com base na Fig.4.8 pode-se escrever o vetor posição do ponto lagrangiano como:

$$\mathbf{r}'_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}'_{B/A} \quad (4.34)$$

em que $\mathbf{r}'_{B/A} = \mathbf{T}\mathbf{r}'_l$

Vale lembrar que o vetor posição que descreve o deslocamento estrutural associado a um ponto nodal genérico é definido como:

$$\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T \quad (4.35)$$

Portanto, o vetor \mathbf{r}_A é atualizado após a simulação estrutural com a variação de deslocamento obtido após a simulação, definida pelas três primeiras componentes do vetor de coordenadas generalizadas, dadas na Eq.(4.35). Já as demais posições são utilizadas para o cálculo da matriz de transformação, e atualização do vetor $r'_{B/A}$, dado na Eq. (4.34), definido no sistema $Axyz$.

Após definidas as novas coordenadas dos pontos lagrangianos deve-se que atualizar sua velocidade. Esse procedimento deve ser feito com precisão, pois influencia diretamente no cálculo da força lagrangiana e, portanto, em todo o comportamento do escoamento em torno da superfície imersa, podendo-se ter a não convergência da simulação do domínio fluido. Assim, fazendo a derivada temporal da Eq. (4.34), escreve-se:

$$\mathbf{U}_l^{FI} = \mathbf{v}_B^l = (\dot{\mathbf{r}}_B^l)_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{r}}_A^l)_{OXYZ} + (\dot{\mathbf{r}}_{B/A}^l)_{OXYZ} \quad (4.36)$$

A velocidade estrutural é definida a partir da derivada temporal do vetor de coordenadas generalizadas, Eq.(4.35), da seguinte forma:

$$\mathbf{q} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\phi}_x \ \dot{\phi}_y \ \dot{\phi}_z]^T \quad (4.37)$$

Diferentemente das coordenadas generalizadas que atualizam um vetor posição, no vetor de velocidade as variáveis representam a própria velocidade do ponto nodal em um determinado instante de tempo. Assim, as três primeiras coordenadas referem-se à velocidade do nó e as três últimas à velocidade angular a que a seção transversal está sujeita, tomando-se como referência o sistema $Axyz$. Portanto, pode-se definir o vetor velocidade angular da seção transversal como:

$$\boldsymbol{\Omega} = [\dot{\phi}_x \ \dot{\phi}_y \ \dot{\phi}_z] \quad (4.38)$$

Dado que a direção do sistema de eixos $OXYZ$ com relação ao sistema $Axyz$ permanece inalterada, pode-se escrever:

$$\mathbf{U}_l^{FI} = (\dot{\mathbf{r}}_B^l)_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{r}}_A^l)_{OXYZ} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_{B/A}^l)_{Axyz} \quad (4.39)$$

Observa-se, na equação acima, que sob o ponto de vista cinemático, o movimento de um corpo rígido por ser considerado como sendo o resultado da combinação de uma translação, segundo um ponto de referência, neste caso o ponto A, mostrado na Fig. 4.8, e um movimento de rotação em torno de um eixo que passa por este ponto de referência.

É importante ressaltar que neste trabalho a aceleração do ponto nodal estrutural foi considerada apenas no modelo estrutural, para o cálculo do tempo posterior no método de integração, não sendo transferida para a superfície da estrutura imersa. Esta simplificação foi feita devido à não implementação do algoritmo fluido para receber esta variável, o que acarretaria em uma aceleração da fronteira imersa. Esta implementação é vista como um aperfeiçoamento do procedimento de acoplamento entre os dois domínios segundo o esquema particionado e será tema de trabalhos futuros.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Nesta seção, em uma primeira etapa, o algoritmo implementado a partir da teoria de vigas de Cosserat foi avaliado e validado estática e dinamicamente. Para a validação estática foram feitas comparações dos resultados obtidos com simulações no *software* ANSYS®, com resultados experimentais e os resultados obtidos a partir da metodologia proposta. Para a validação dinâmica uma estrutura-teste foi utilizada e os resultados do algoritmo implementado foram confrontados com os dados encontrados na literatura. Após esta validação, vários testes foram realizados a fim de se encontrar um método de integração suficientemente robusto para resolução das equações não lineares inerentes à metodologia. Finalmente, utilizando novamente a estrutura-teste, foi possível confrontar os resultados obtidos com a teoria de vigas de Cosserat com a teoria clássica de Euler-Bernoulli.

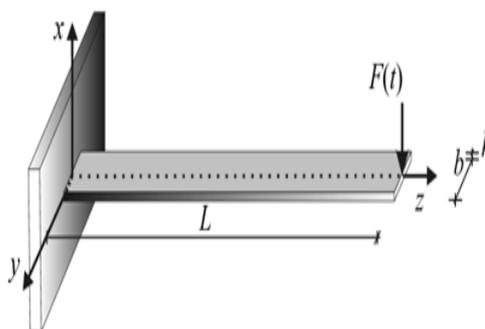
Após validado o algoritmo de simulação estrutural, este foi acoplado ao algoritmo responsável pela simulação do meio fluido. Nestas simulações, uma estrutura que se assemelha a um *riser* de pequena razão de aspecto foi simulada utilizando estes dois códigos de forma paralela. Assim, forças hidrodinâmicas foram calculadas utilizando o método da fronteira imersa, e transferidas através de um algoritmo de acoplamento para o modelo estrutural. Este por sua vez, utilizou como dados de entrada as forças hidrodinâmicas e calculou os deslocamentos e velocidades estruturais, devolvendo os resultados novamente, através do código de acoplamento, para o meio fluido.

5.1. Análise Estática

Nesta seção, a avaliação e validação da teoria de vigas de Cosserat foi realizada utilizando um modelo em regime estático. Optou-se pela utilização de uma bancada de testes experimentais, em que uma viga foi engastada em uma de suas extremidades e uma força estática aumentada gradativamente foi exercida em sua extremidade livre. A bancada de testes foi desenvolvida no laboratório de mecânica de estruturas (LMEst), conforme mostrado na Fig. 5.1a. A estrutura testada é uma régua vendida comercialmente e feita de aço inoxidável. Na Tabela 5.1 são apresentadas as principais características geométricas da estrutura-teste.



(a)



(b)

Figura 5.1 – Bancada experimental: (a) foto da bancada experimental; (b) modelo esquemático.

Tabela 5.1 - Propriedades da régua

Propriedades da Estrutura	Valores
Módulo de Elasticidade [E]	$3,0 \times 10^{11}$ [N/m ²]
Comprimento [L]	0,3178 [m]
Espessura [h]	$0,8 \times 10^{-3}$ [m]
Largura [b]	$28,5 \times 10^{-3}$ [m]
Área da Seção Transversal [A]	$2,28 \times 10^{-5}$ [m ²]
Densidade	7850 [kg/m ³]

Ressalta-se que o módulo de elasticidade foi obtido a partir da medida feita através de um relógio comparador da deflexão imposta a extremidade livre da viga pela adição de pequenos incrementos de peso calibrados, objetivando pequenos deslocamentos. Assim, foi possível obter a relação entre o módulo de elasticidade e o momento plano de inércia da seção transversal (EI). E já que a viga possui seção transversal retangular e constante durante todo seu comprimento, tornou-se fácil obter o momento plano de inércia, e assim calcular o módulo de elasticidade. Esse procedimento foi adotado para facilitar o cálculo da rigidez axial, dada por EA , em que a variável A refere-se à área da seção transversal.

O método de aquisição dos resultados experimentais, como é possível ver na Fig. 5.2, consistiu na impressão da forma fletida da régua em papel milimetrado. Desta forma, quando a posição de equilíbrio estático é atingida, após a aplicação da força por meio de pesos calibrados, um suporte lateral, ao qual a folha de papel milimetrado está fixada, é empurrado de encontro à superfície lateral da viga, que fora previamente impregnada com tinta. Este procedimento permite, assim, obter uma impressão das formas fletidas da viga, para diferentes valores da carga aplicada.

Foi possível, através deste procedimento, medir o deslocamento transversal da régua em todo o seu comprimento. Entretanto, optou-se por confrontar com os dados simulados apenas o deslocamento máximo que ocorre na extremidade livre da viga.

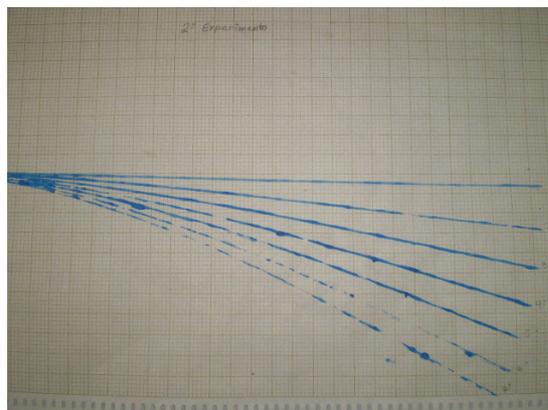


Figura 5.2 – Resultados obtidos experimentalmente.

A simulação foi feita utilizando a teoria de vigas de Cosserat com aproximações de terceira ordem para as funções de forma. Nesta simulação, a estrutura foi discretizada utilizando 10 elementos de mesmo comprimento ao longo do comprimento da barra. Como mostra a Fig. 5.1b, o sistema foi solicitado com forças concentradas $f^c(t)$ de várias intensidades, de acordo com o incremento de peso adicionado a sua extremidade, e uma força distribuída $f^d(t, q)$ para modelagem do peso próprio.

O principal objetivo deste experimento é avaliar a não linearidade imposta ao sistema, dado que, com o aumento da força, os deslocamentos e rotações serão maiores, o que aumenta o grau de não linearidade geométrica imposta ao sistema de equações a ser resolvido. Para resolução deste sistema não linear foi implementado computacionalmente um esquema de Newton-Raphson proposto por Bathe (1996).

Para avaliar os resultados obtidos, em paralelo, também foi implementado um modelo utilizando o *software* comercial ANSYS, análogo ao usado na teoria de vigas de Cosserat. O modelo foi discretizado espacialmente utilizando 10 elementos de viga (BEAM4), de comprimento uniforme. Para a solução não linear fez-se uso de um recurso, presente neste *software*, que possibilita obter respostas considerando não linearidades geométricas. Na geração deste modelo, foi utilizado o valor do módulo de elasticidade do aço $E=3,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

A Tabela 5.2 mostra os resultados obtidos com o algoritmo de Cosserat, com a simulação realizada no ANSYS® e com o experimento realizado. Os valores entre parênteses indicam os desvios percentuais em relação aos resultados experimentais.

Tabela 5.2 – Confrontação entre os deslocamentos obtidos na extremidade da viga.

Carga Aplicada [N]	Deslocamento Experimental [m]	Deslocamento ANSYS® [m]	Deslocamento Cosserat [m]
0	0,0040	0,0057(42,5%)	0,0056(40,0%)
0,353	0,0150	0,0155(3,3%)	0,0156(4,0%)
0,670	0,0250	0,0241(3,6%)	0,0245(2,0%)
0,986	0,0340	0,0327(3,9%)	0,0322(5,3%)
1,306	0,0430	0,0412(4,2%)	0,0415(3,5%)
1,628	0,0500	0,0497(0,6%)	0,0505(1,0%)
1,927	0,0570	0,0574(0,7%)	0,0568(0,3%)

Nota-se que com o aumento gradativo da força aplicada à estrutura, os deslocamentos aumentaram consideravelmente, chegando a atingir, aproximadamente, 20% do comprimento da viga. Conforme discutido no Capítulo 1 tem-se, neste caso, grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações localizadas. Os resultados apresentados tanto pelo *software* Ansys como aqueles obtidos utilizando a teoria de vigas de Cosserat tiveram apenas um pequeno desvio, o que mostra a precisão satisfatória da metodologia proposta para a modelagem estática de vigas esbeltas.

Após validar o algoritmo implementado para análises estáticas, foi necessário verificar se o mesmo fornece respostas satisfatórias para simulações dinâmicas. Estas simulações são descritas na seção a seguir.

5.2. Análise Dinâmica

5.2.1. Avaliação e validação da metodologia

Primeiramente, para validar o algoritmo implementado para análises dinâmicas, foi simulada uma estrutura encontrada na literatura. Uma das grandes dificuldades de simular estruturas não lineares em regime dinâmico é encontrar um integrador suficientemente preciso e estável para longos períodos de tempo de simulação. Por isso, a estrutura de testes foi também

utilizada para avaliação quanto ao método de integração adotado. E por fim, esta mesma estrutura foi modelada através da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e os resultados foram comparados com os obtidos através da teoria de vigas de Cosserat.

A estrutura-teste, que será utilizada nas diversas aplicações numéricas apresentadas neste capítulo é a viga engastada-livre ilustrada na Fig. 5.3.

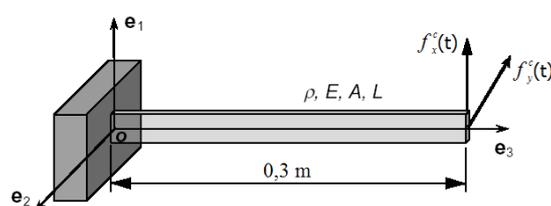


Figura 5.3 – Estrutura de teste.

Este modelo foi primeiramente implementado por Cao et al. (2005), tendo comprimento de 0,3 m, seção transversal constante de largura de 0,01 m e espessura de 0,005 m. São adotados os valores para o módulo de elasticidade e densidade de $2,08 \times 10^8$ Pa e $3,0 \times 10^3$ kg/m³, respectivamente. As forças de excitação nas direções x e y são, respectivamente, $f_x^c(t) = 0,01 \cos(8t)$ e $f_y^c(t) = 0,005 \sin(8t)$, as quais foram aplicadas na extremidade livre, de modo análogo à simulação estática apresentada anteriormente. Ressalta-se que no trabalho de Cao et al. (2005) a estrutura-teste é avaliada utilizando elementos de viga de Cosserat obtidos a partir das aproximações de terceira ordem das funções de forma. Esta mesma abordagem é utilizada para validação da metodologia proposta neste trabalho.

A Fig. 5.4 mostra a confrontação dos deslocamentos obtidos na extremidade da estrutura na direção x, com os correspondentes obtidos por Cao et al. (2005). Já a Fig. 5.6 mostra, de forma análoga, a confrontação dos deslocamentos na direção y. Em ambos os modelos, a estrutura foi discretizada com 10 elementos igualmente espaçados. O método de integração utilizado nestas simulações foi o método de Newmark com imposição da conservação da energia mecânica, proposto por Bathe (2007), e referenciado no presente trabalho como *Newmark conservativo*, e o passo foi de 0.01 s.

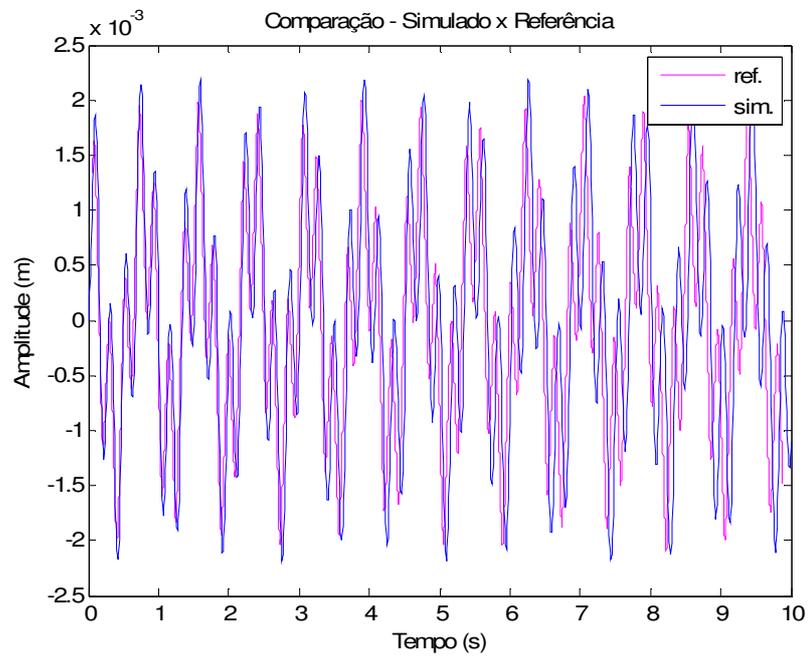


Figura 5.4 – Comparação de deslocamento da estrutura na direção x. (ref: apresentados por Cao et al. (2005); sim: obtidos pelo autor)

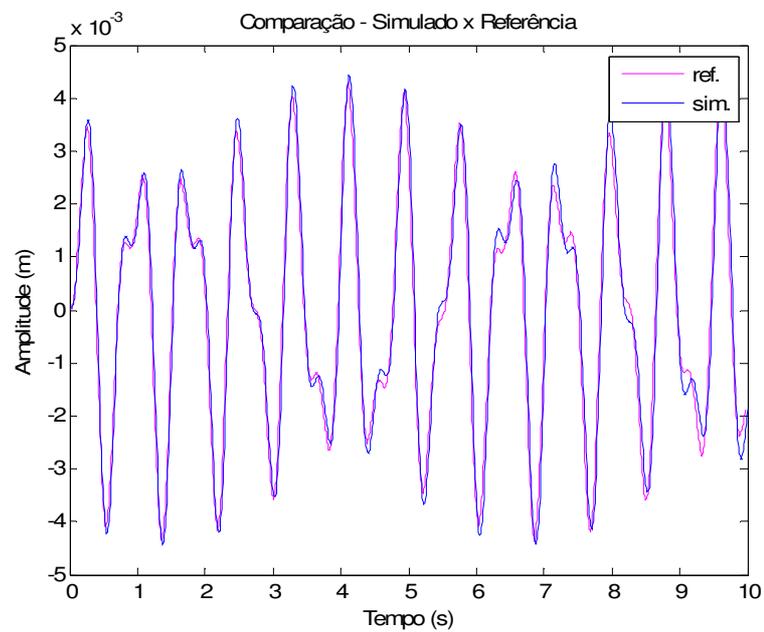


Figura 5.5 – Deslocamento da estrutura na direção y. (ref: apresentados por Cao et al. (2005); sim: obtidos pelo autor).

Ao se observar as Figs. 5.4 e 5.5 notam-se pequenas diferenças entre os dois conjuntos de resultados, o que pode ser atribuído ao uso de diferentes métodos de integração numérica das equações do movimento. Todavia, como os desvios apresentados são desprezíveis, considera-se validada a implementação numérica da teoria de vigas de Cosserat.

A fim de testar a convergência do modelo de elementos finitos em termos da discretização espacial, a estrutura-teste foi modelada utilizando diferentes números de elementos igualmente espaçados. As Figs. 5.6 e 5.7 mostram os resultados da simulação para a estrutura modelada com 1, 2, 3 e 10 elementos e os seus respectivos deslocamentos nas direções x e y .

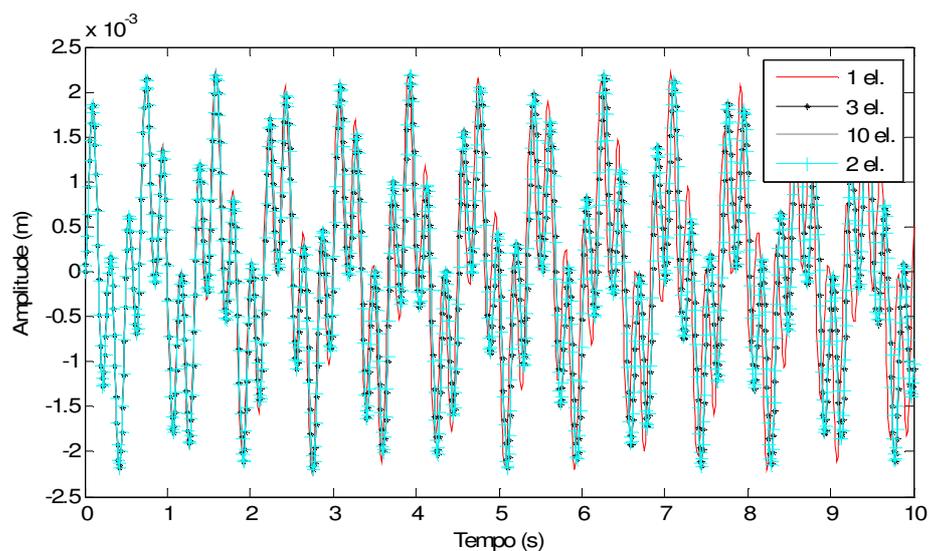


Figura 5.6 - Deslocamentos na direção x da extremidade livre, para a viga modelada com diferentes números de elementos.

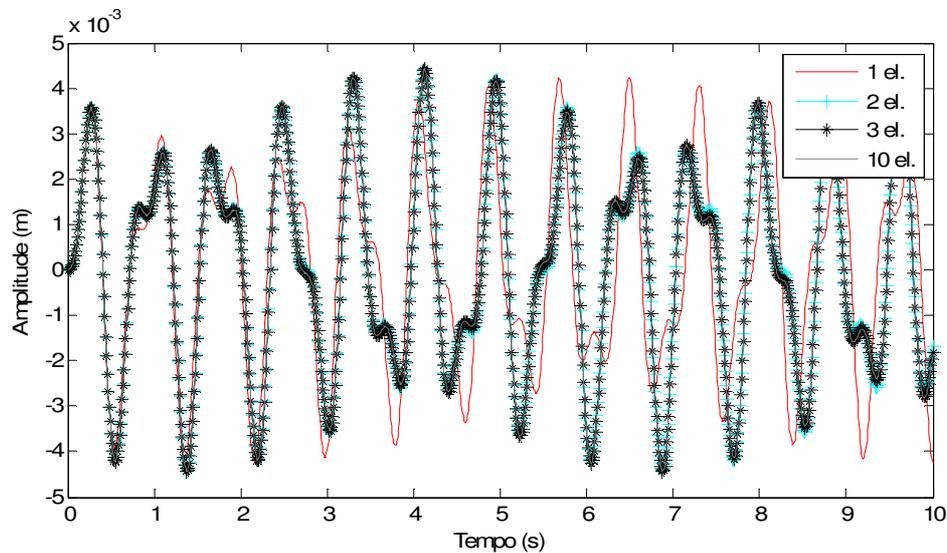


Figura 5.7 - Deslocamentos na direção y da extremidade livre, para a viga modelada com diferentes números de elementos

Observa-se, nas simulações anteriores, que mesmo com apenas um elemento a metodologia foi capaz de obter uma aproximação satisfatória da resposta nas duas direções. E a partir da discretização espacial utilizando dois elementos a diferença entre as respostas passou a ser desprezível. Este resultado mostra uma vantagem importante da modelagem baseada na teoria de vigas de Cosserat em relação à modelagem tradicional utilizando a teoria de Euler-Bernoulli, que é dada pela convergência mais rápida da discretização, que possibilita obter respostas precisas utilizando modelos com menores números de graus de liberdade. Entretanto, para discretizações com pequenos números de elementos, as respostas estruturais ficam conhecidas apenas nos poucos nós da malha de discretização, o que pode não ser adequado nas situações em que se deseja conhecer as respostas em um número maior de estações ao longo do comprimento da viga. Com este objetivo, foi realizada outra simulação em que as funções de forma de terceira ordem são utilizadas para interpolar os deslocamentos no interior dos elementos, dado que são conhecidos os deslocamentos nos pontos nodais. A Fig. 5.8 ilustra essa aplicação, em que podem ser observadas duas malhas de discretização diferentes, a primeira com apenas dois elementos e dois nós livres, e a segunda com 10 elementos e 10 nós livres. São indicadas, em vermelho, as posições de dois pontos nos quais se deseja observar as respostas, sendo estas posições tais, que não correspondem a nenhum dos nós da malha de dois elementos e correspondem a nós da malha

de 10 elementos. Para o primeiro modelo, as respostas nestes pontos são calculadas por interpolação dos deslocamentos nodais ao passo que, para o segundo, as respostas são dadas diretamente pelos deslocamentos nodais calculados.

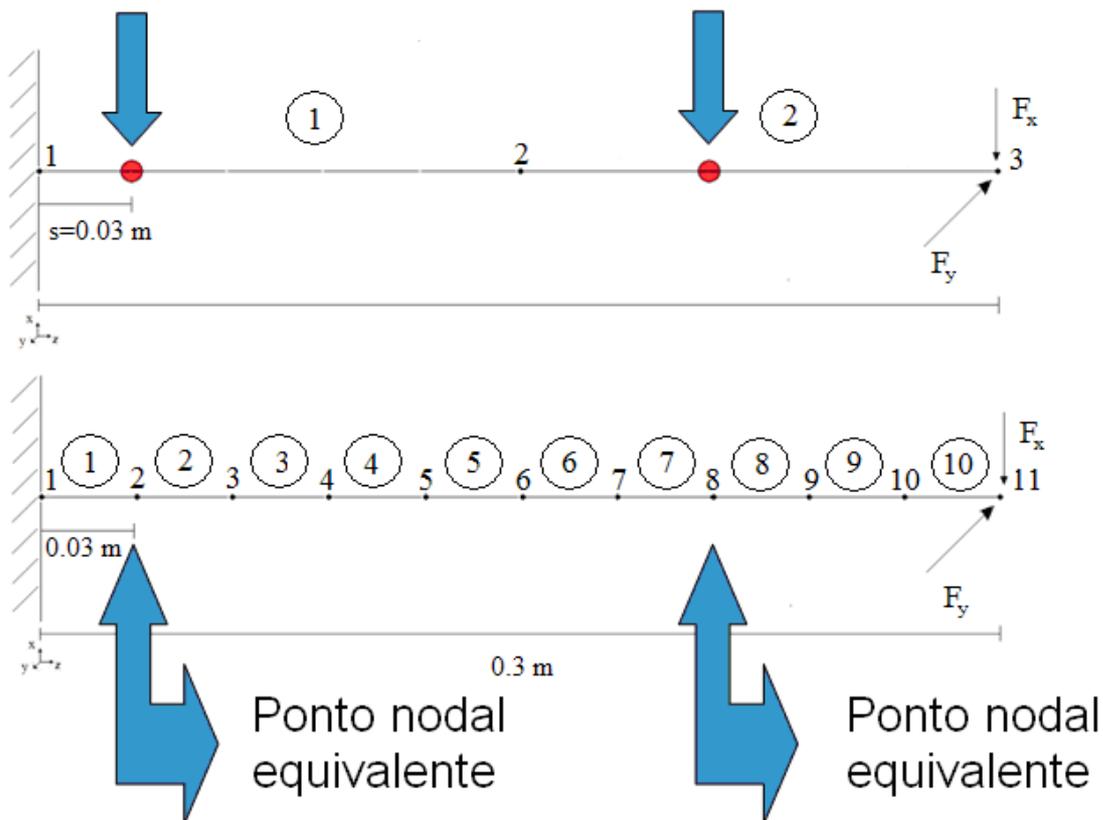
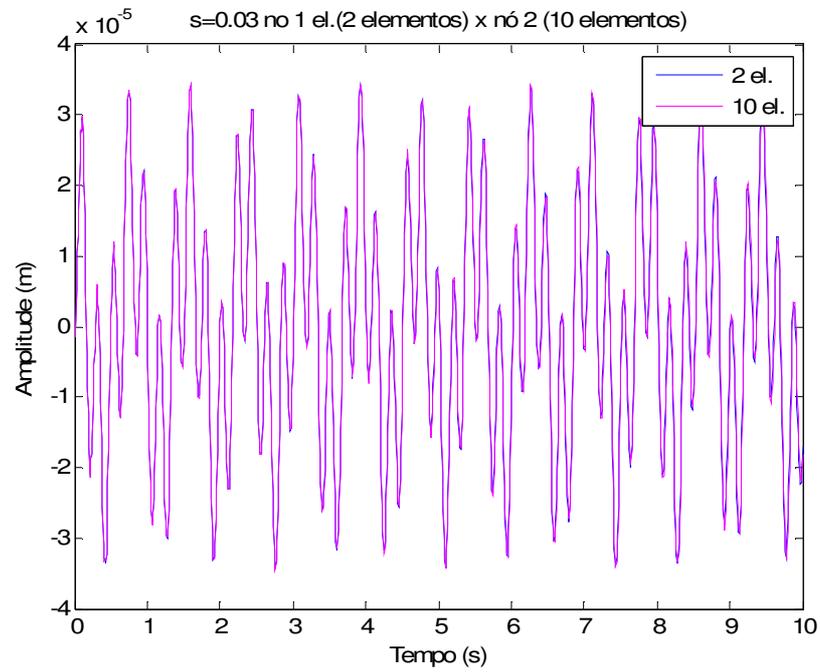
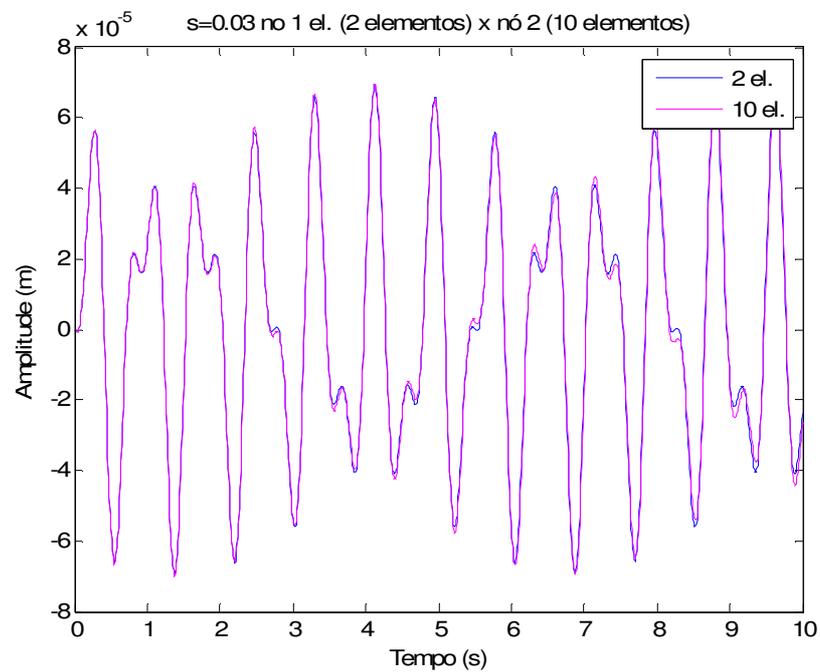


Figura 5.8 – Esquema das discretizações da estrutura com 2 e 10 elementos.

Os deslocamentos no interior do primeiro elemento da viga discretizada com apenas dois elementos, para o ponto posicionado a $0,03 \text{ m}$ do engaste, e coincidente com o nó 2 da viga discretizada com 10 elementos foram calculados por interpolação dos deslocamentos dos nós 1 e 2. A Fig. 5.9 compara os resultados obtidos através deste procedimento, com os correspondentes obtidos para o nó do modelo de malha mais refinada.



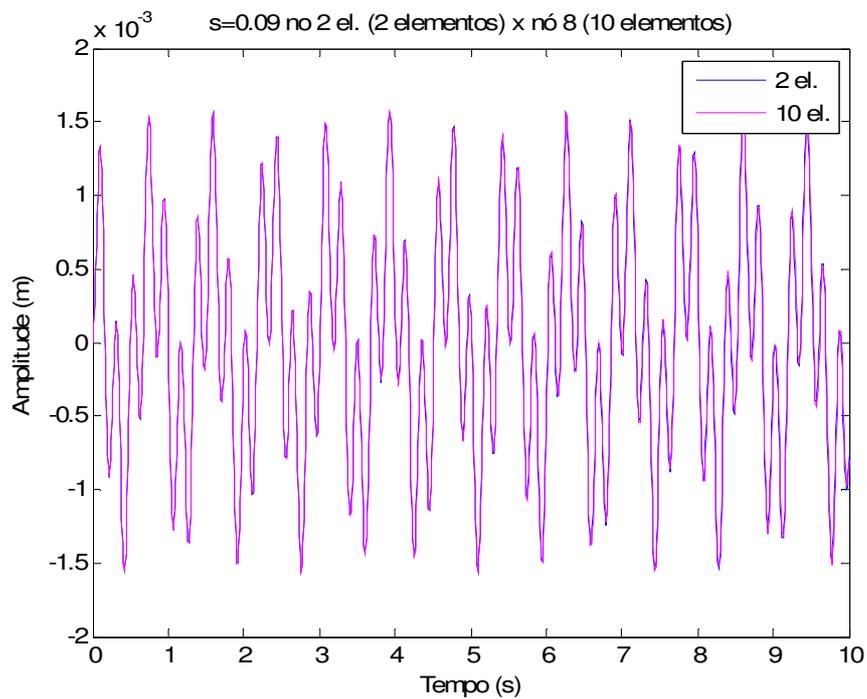
(a)



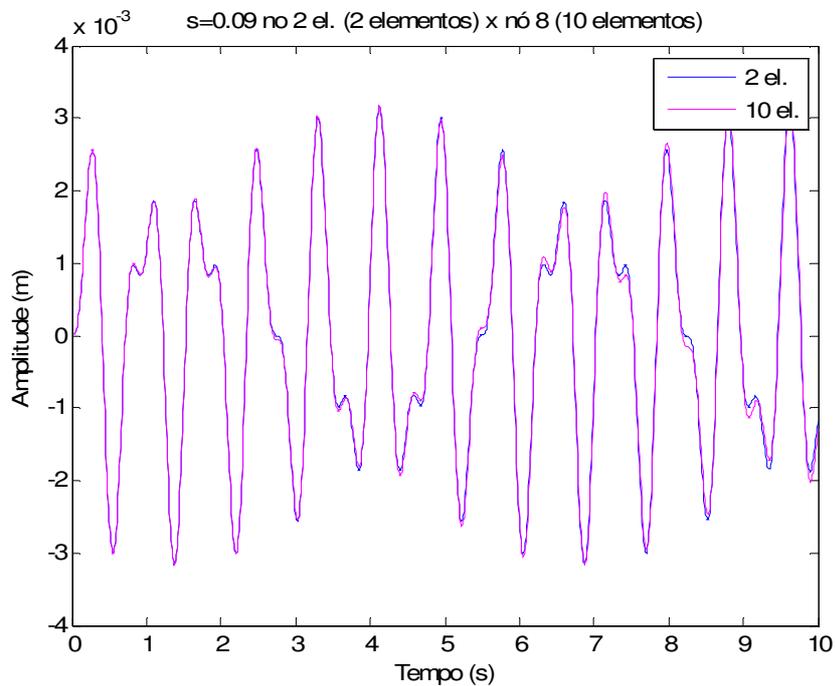
(b)

Figura 5.9 – Avaliação do procedimento de interpolação dos deslocamentos: (a) direção x e (b) direção y.

O mesmo procedimento foi utilizado para o ponto posicionado a 0,09 m do engastamento, posicionado entre os nós 2 e 3 no interior do segundo elemento na barra discretizada com dois elementos, que é equivalente à posição do nó 8 na viga com 10 elementos. A Fig. 5.10 mostra os resultados obtidos.



(a)



(b)

Figura 5.10 – Avaliação das aproximações no interior do elemento: (a) direção x e (b) direção y.

Os resultados obtidos com essas simulações comprovam que se pode obter com alta precisão os deslocamentos no interior do elemento de viga de Cosserat a partir dos deslocamentos nodais. Esta característica se torna importante uma vez que favorece a modelagem com um número reduzido de elementos, especialmente em simulações de problemas de interação fluido-estrutura, onde existe uma dificuldade inerente de lidar com a incompatibilidade de malhas empregadas para a discretização dos dois domínios.

5.2.2. Avaliação de métodos numéricos de integração das equações do movimento

Um aspecto considerado da maior relevância, quando se trata da simulação de sistemas mecânicos não lineares, é o desempenho dos métodos de integração das equações do movimento, especialmente no tocante a precisão e estabilidade. A realização das simulações numéricas reportadas nesta tese demandou um significativo esforço de implementação e teste de diversas

técnicas de integração numérica, com vistas à identificação das técnicas mais adequadas para serem utilizadas em associação com a teoria de Cosserat.

Outro aspecto avaliado nesta seção é a influência da ordem de aproximação das funções de forma, obtidas pela técnica de perturbação (mostrado na seção 3.3), na precisão das respostas obtidas por integração.

Um teste realizado foi com relação aos métodos de integração, e a ordem de aproximação das funções de forma utilizadas nas simulações, considerando que a estrutura-teste foi sujeita a uma força na direção x (conforme mostrado na Fig. 5.3), representada por uma função degrau, ilustrada na Fig. 5.11. Em cada simulação o valor desta força foi gradativamente aumentada e as condições iniciais foram admitidas nulas.

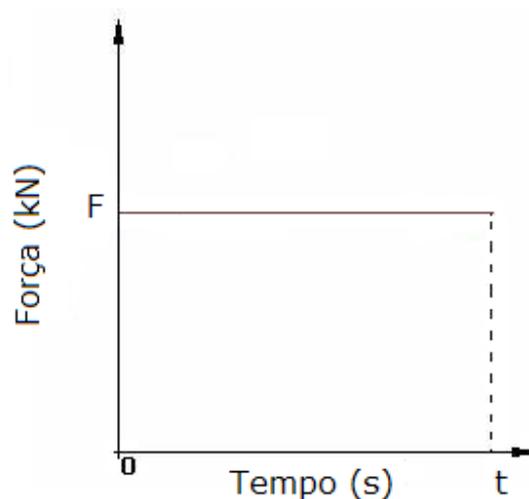


Figura 5.11 – Variação temporal da força aplicada a extremidade livre da estrutura-teste.

Isso proporcionou verificar a convergência dos diferentes métodos de integração quando a estrutura está sujeita a diferentes graus de não linearidade, associados ao aumento crescente das amplitudes dos deslocamentos transversais da viga.

Os métodos de integração considerados neste trabalho foram: o método de Newmark conservativo, referenciado na seção anterior; o método de Newmark combinado com o algoritmo de Newton-Raphson, proposto por G eradin e Rixen (2001), e identificado apenas como

Newmark, e o método de Runge-Kutta de quarta ordem de passo variável que já se encontra disponível no *software* comercial Matlab.

Em uma primeira análise a estrutura-teste foi submetida a uma força de 0,001 N aplicada na direção x , e sua resposta foi obtida através dos três métodos de integração citados acima, para obtenção da resposta temporal. A estrutura foi modelada através das aproximações de terceira ordem das funções de forma, com base na formulação apresentada na Seção 3.3. Por outro lado, apenas o método de Newmark conservativo foi empregado quando foram utilizadas as aproximações de segunda ordem, dado que apenas este método pôde atingir convergência para essas aproximações. Este procedimento foi realizado a fim de mostrar a potencialidade de cada método de integração, bem como avaliar as diferenças entre as aproximações de terceira e segunda ordem da metodologia proposta. A Fig. 5.12 mostra as respostas correspondentes às histórias de deslocamento da extremidade livre da viga na direção x .

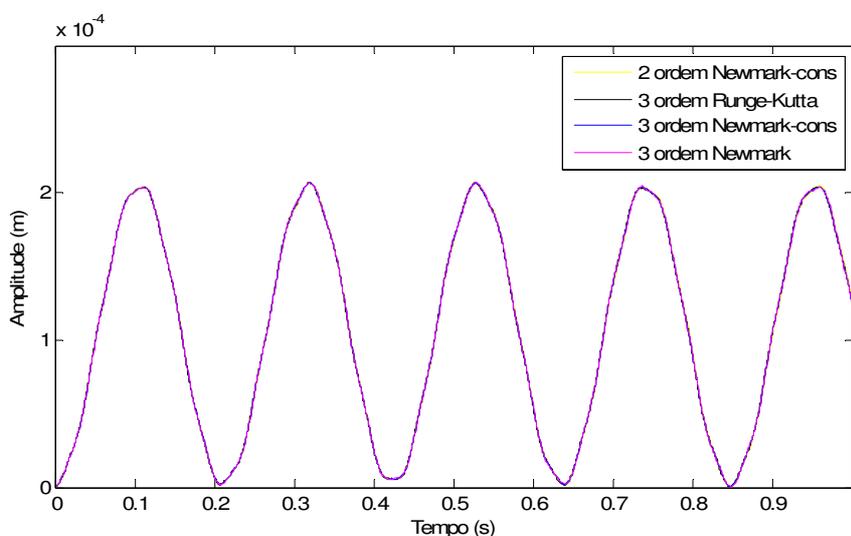


Figura 5.12 – Comparação entre as diferentes aproximações das funções de forma e métodos de integração, para $F=0,001$ N

Na Fig. 5.12 pode-se observar que as duas ordens de aproximação das funções de forma e todos os métodos de integração proporcionaram convergência para o mesmo resultado. Entretanto, foi necessário utilizar passos de tempo diferentes para cada um deles. Isso ocorreu porque em cada passo de tempo, é feita a resolução das equações não lineares, e o resíduo deve

ser minimizado até um valor pré-definido pelo usuário. Assim, o método diverge quando não consegue atingir este critério. Nas simulações realizadas no presente trabalho, a cada vez que o algoritmo divergia outra simulação era iniciada e o passo de tempo era dividido pela metade, e verificava-se novamente a convergência.

Comparando os resultados obtidos utilizando as duas diferentes ordens de aproximações das funções de forma, observaram-se passos de tempo diferentes para um mesmo método de integração, que neste caso, foi utilizado o método de Newmark conservativo. A discretização temporal utilizada foi $1,0 \times 10^{-4}$ s nas aproximações de segunda ordem e $1,0 \times 10^{-2}$ s para o algoritmo que utilizou as aproximações de terceira ordem. Já para os demais métodos de integração que utilizaram as aproximações das funções de forma de terceira ordem, o passo de tempo foi de $1,0 \times 10^{-2}$ s para o método de Newmark, e variou de $1,058 \times 10^{-8}$ s a $1,10 \times 10^{-5}$ s, com passo médio de $5,88 \times 10^{-6}$ para método de Runge-Kutta. Deve-se notar que o passo de tempo é determinante do esforço computacional envolvido nas simulações.

Aumentando a força para $F=0,01$ N, obtiveram-se os resultados mostrados na Fig. 5.13.

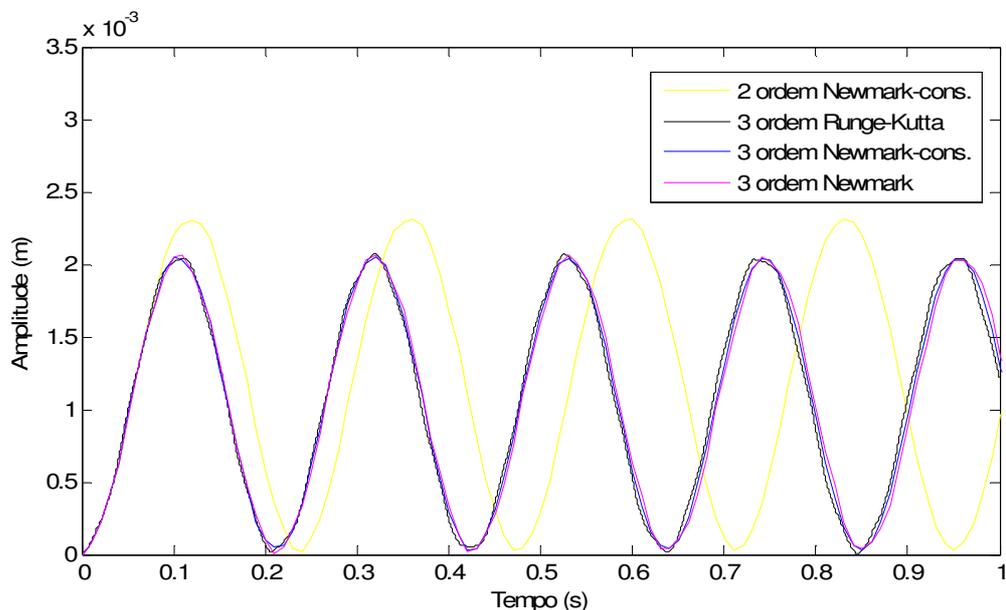


Figura 5.13 - Comparação entre as diferentes aproximações das funções de forma e métodos de integração, para $F=0,01$ N.

Observando a Fig. 5.13 notam-se diferenças significativas entre os resultados obtidos com as aproximações de segunda e de terceira ordem, para um mesmo método de integração. Estas diferenças se pronunciam sobretudo na amplitude e no período da resposta. Os passos de tempo utilizados nestas simulações também foram distintos entre si. Enquanto nas aproximações de terceira ordem o passo de tempo se manteve o mesmo da simulação anterior, para convergência da simulação com base na aproximação de segunda ordem o passo de tempo utilizado teve que ser diminuído para $1,0 \times 10^{-5}$ s, o que acarretou um maior custo computacional. Já os métodos de integração das equações obtidas a partir da aproximação de terceira ordem convergiram para um mesmo resultado. O passo de tempo utilizado no Newmark foi de $1,0 \times 10^{-2}$ s, enquanto o método de Runge-Kutta utilizou um passo de tempo variável de $1,38 \times 10^{-8}$ s a $1,08 \times 10^{-5}$ s com passo médio de $5,70 \times 10^{-6}$ s.

Comparando as Figs. 5.12 e 5.13 nota-se que as amplitudes do deslocamento (com exceção das respostas calculadas com base em aproximações de segunda ordem) são proporcionais ao valor da força aplicada. Este fato mostra que a estrutura apresenta comportamento linear, o que pode ser explicado pelo fato que as forças aplicadas e, conseqüentemente, os deslocamentos resultantes, são pequenos.

Outra constatação importante é que a discretização por elementos finitos utilizando funções de forma de segunda ordem mostrou-se insuficiente, em termos de precisão. Destaca-se ainda que para $F=0,1$ N a metodologia baseada nestas aproximações e utilizando o método de integração de Newmark conservativo não convergiu por mais que se diminuísse o passo de tempo utilizado. Esse fato leva à opção pela formulação baseada nas aproximações de terceira ordem. Portanto, nas simulações seguintes, a amplitude da força foi progressivamente aumentada, assumindo valores de 0,1 N, 1,0 N, 10,0 N e 100,0 N, a fim de testar os algoritmos de integração para a formulação baseada na aproximações de terceira ordem das funções de forma da teoria de vigas de Cosserat. As respostas obtidas a partir de uma força de $F=0,1$ N são apresentadas na Fig. 5.14.

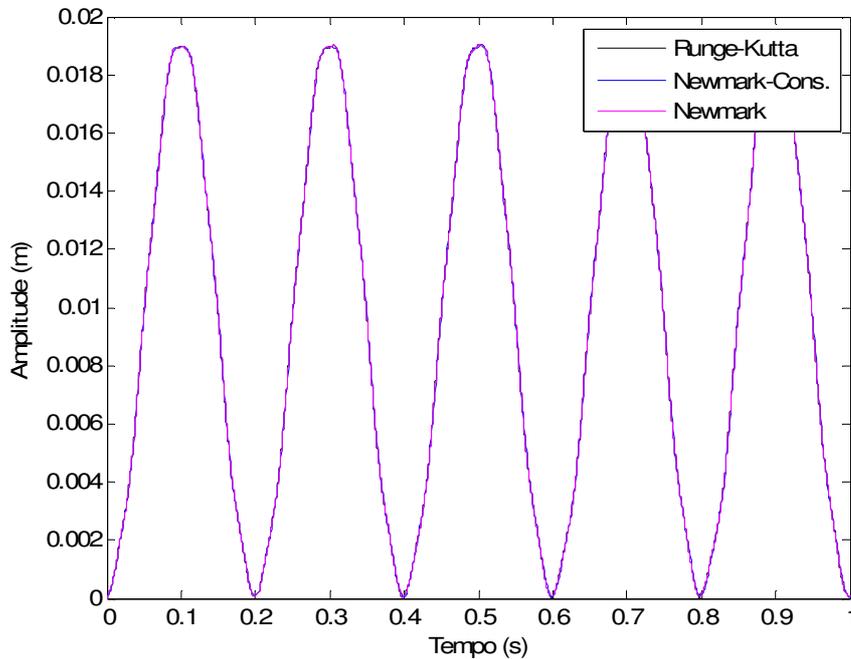


Figura 5.14 – Comparação entre as respostas obtidas com os diferentes métodos de integração, para $F=0,1$ N.

O passo de tempo utilizado no método de Runge-Kutta variou entre $1,38 \times 10^{-9}$ s a $1,10 \times 10^{-5}$ s, com passo de tempo médio de $5,68 \times 10^{-6}$ s. No método de Newmark conservativo o passo de tempo utilizado foi de $1,00 \times 10^{-3}$ s, e com o método de Newmark passo de tempo utilizado foi de $2,0 \times 10^{-4}$ s.

Na Fig. 5.15 são apresentadas as respostas temporais para uma força $F=1,0$ N. Nesta simulação a discretização temporal utilizada no método de Runge-Kutta variou de $1,38 \times 10^{-10}$ s a $1,03 \times 10^{-5}$ s com passo médio de $5,5 \times 10^{-6}$ s. Enquanto que, no Newmark conservativo, o passo de tempo utilizado foi de $1,0 \times 10^{-3}$ s e no Newmark o passo de tempo foi de $2,0 \times 10^{-4}$ s.

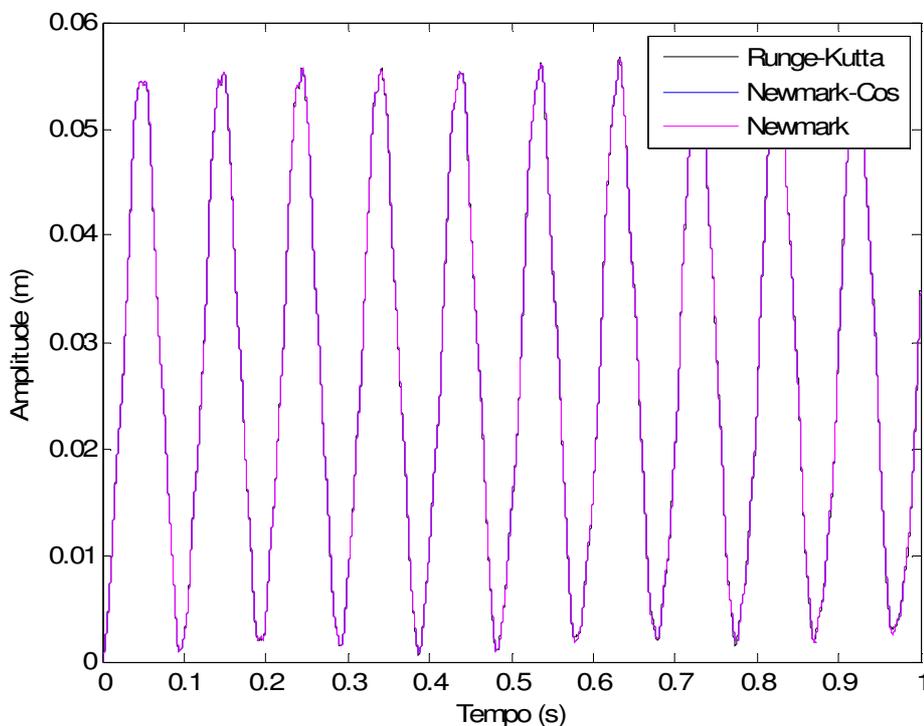


Figura 5.15 – Comparação entre as respostas obtidas com diferentes métodos de integração, para $F=1,0$ N.

Na Fig. 5.16 têm-se as respostas calculadas para a força aplicada de $F=10$ N. Os tempos de discretização temporal para o método de Runge-Kutta variou de $1,38 \times 10^{-11}$ s a $5,5 \times 10^{-6}$ com passo médio de $5,23 \times 10^{-6}$. O método de Newmark conservativo, assim como o método de Newmark apresentaram o mesmo passo de tempo de $1,0 \times 10^{-4}$ s. Nesta figura os resultados apresentaram uma discrepância principalmente em relação ao método de Newmark com os outros dois métodos de integração temporal.

Nota-se claramente que, em relação aos resultados apresentados anteriormente, as respostas são dominadas por componentes de frequências mais altas, e as amplitudes deixam de ser proporcionais à força aplicada, o que revela um desvio do comportamento linear.

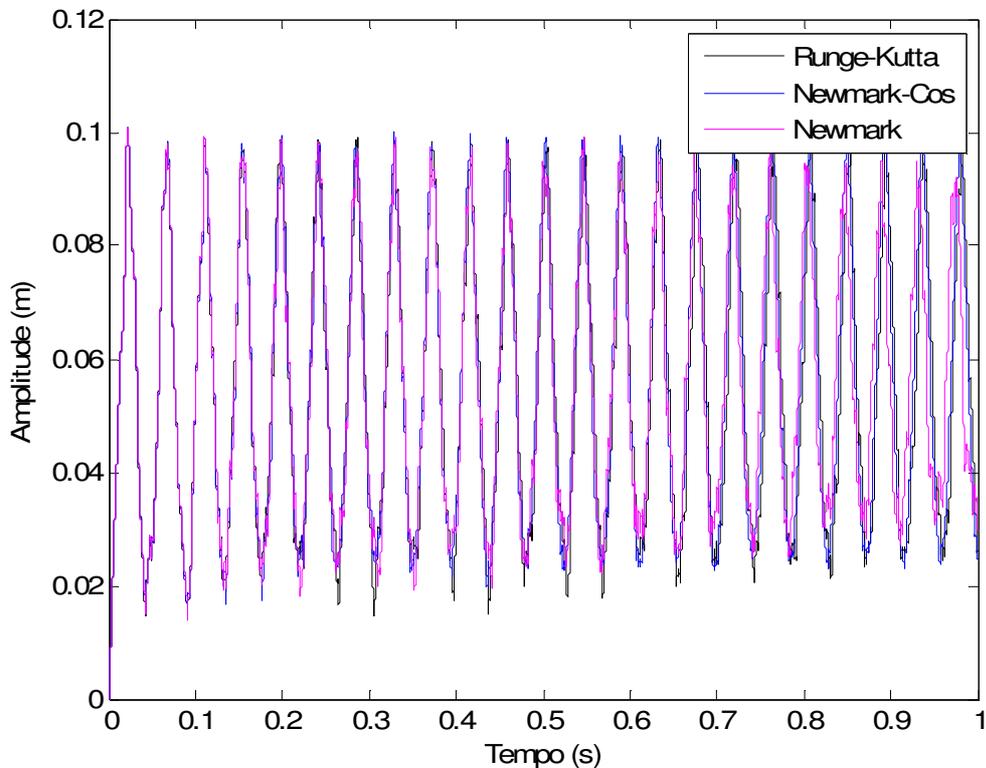
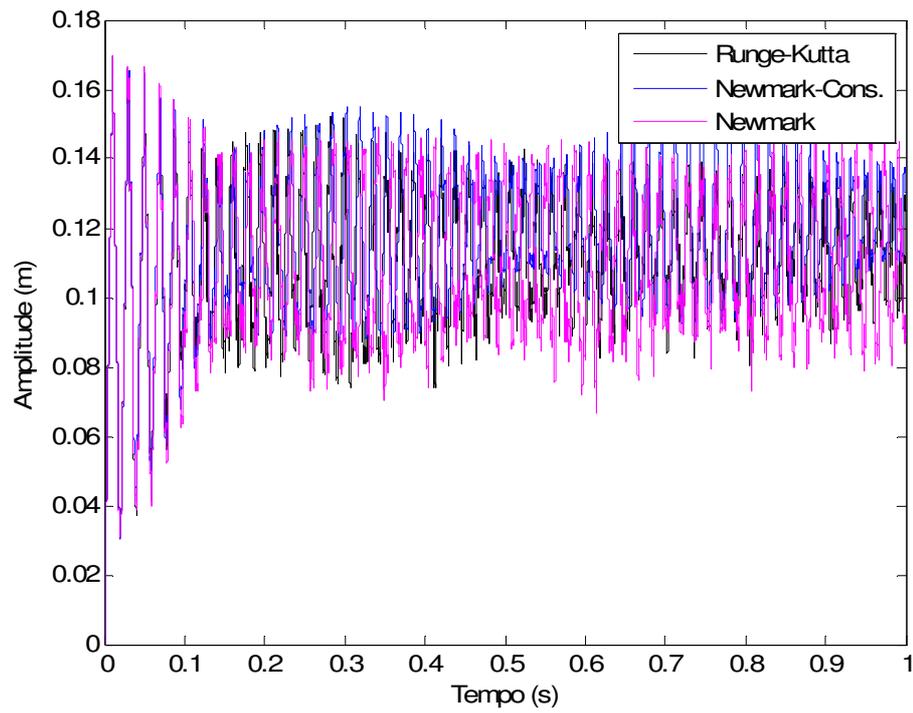


Figura 5.16 – Comparação entre as respostas obtidas com os diferentes métodos de integração para $F=10,0$ N.

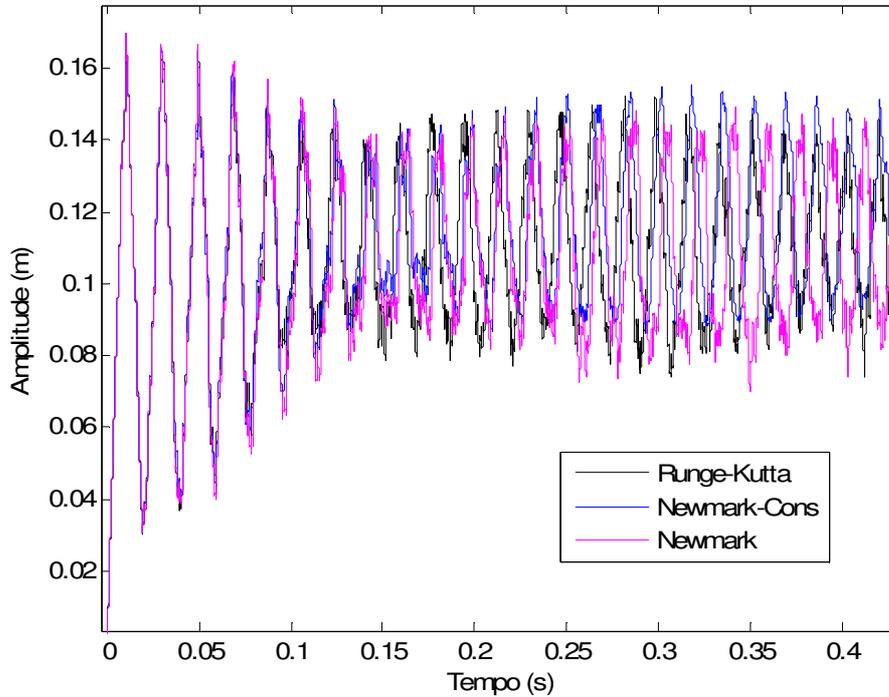
Por fim, na Fig. 5.17 são mostradas as respostas obtidas para a força aplicada $F=100,0$ N. O passo de tempo utilizado no método de Runge-Kutta variou de $1,38 \times 10^{-12}$ s a $7,56 \times 10^{-6}$ s com passo médio de $4,44 \times 10^{-6}$ s. O método de Newmark conservativo obteve convergência com passo de tempo de $5,00 \times 10^{-5}$ s e Newmark/Newton-Raphson de $2,0 \times 10^{-5}$ s. Observa-se que as respostas adquirem um conteúdo espectral mais amplo, e as amplitudes passam a sofrer variações ao longo do tempo, o que pode ser atribuído ao aumento da influência dos efeitos não lineares.

Após testar as aproximações de forma de segunda e terceira ordem e três diferentes métodos de integração, e tendo em vista o tempo computacional gasto nas simulações, dado que, ao se impor grandes deslocamentos, como mostrado nas Figs.5.16 e 5.17, os métodos de integração de Newmark conservativo e de Newmark apresentaram um consumo de tempo computacional de aproximadamente 1,5 horas, enquanto o método de Runge-Kutta, devido ao pequeno passo de tempo requerido para convergência numérica, apresentou um gasto de tempo

computacional de aproximadamente 7 dias. Por esta razão, optou-se por utilizar, devido a sua robustez e precisão, o método de integração de Newmark conservativo em combinação com a metodologia de simulação baseada nas aproximações de terceira ordem.



(a)



(b)

Figura 5.17 - Comparação entre as resposta obtidas por diferentes métodos de integração, para $F=100,0$ N: (a) Visão geral da resposta dinâmica estrutural; (b) Ampliação.

5.2.3. Comparação entre a teoria de vigas Euler-Bernoulli e de Cosserat

Nesta seção a estrutura-teste foi utilizada para confrontar os resultados obtidos com a teoria de vigas de Cosserat com os obtidos com base na teoria de Euler-Bernoulli. De forma análoga aos testes apresentados na seção anterior, foi aplicada à extremidade livre da estrutura uma força concentrada na direção x , cujo valor foi incrementado a cada simulação. A primeira força aplicada a extremidade livre foi de $F=0,01$ N. A Fig. 5.18 mostra a confrontação das respostas obtidas nestas duas simulações.

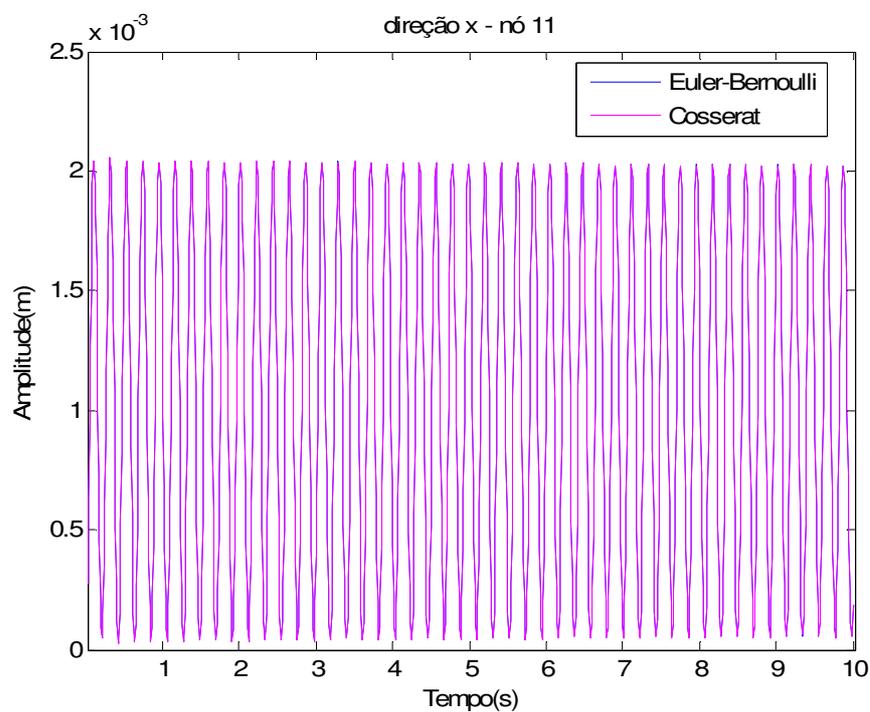


Figura 5.18 - Confrontação entre os resultados obtidos utilizando as teorias de vigas de Cosserat e de Euler-Bernoulli para $F=0,01$.

Na Fig. 5.18 observa-se que os deslocamentos simulados através das duas teorias convergiram para o mesmo resultado. Este fato está diretamente associado à magnitude dos deslocamentos resultantes da força aplicada. Como estes deslocamentos são pequenos, a teoria linear de Euler-Bernoulli é capaz de representar o comportamento dinâmico, fornecendo resultados virtualmente idênticos aos fornecidos pela teoria de Cosserat.

Na Fig. 5.19 é mostrada a resposta da extremidade livre da viga quando é aplicada uma força de $F=0,1$ N.

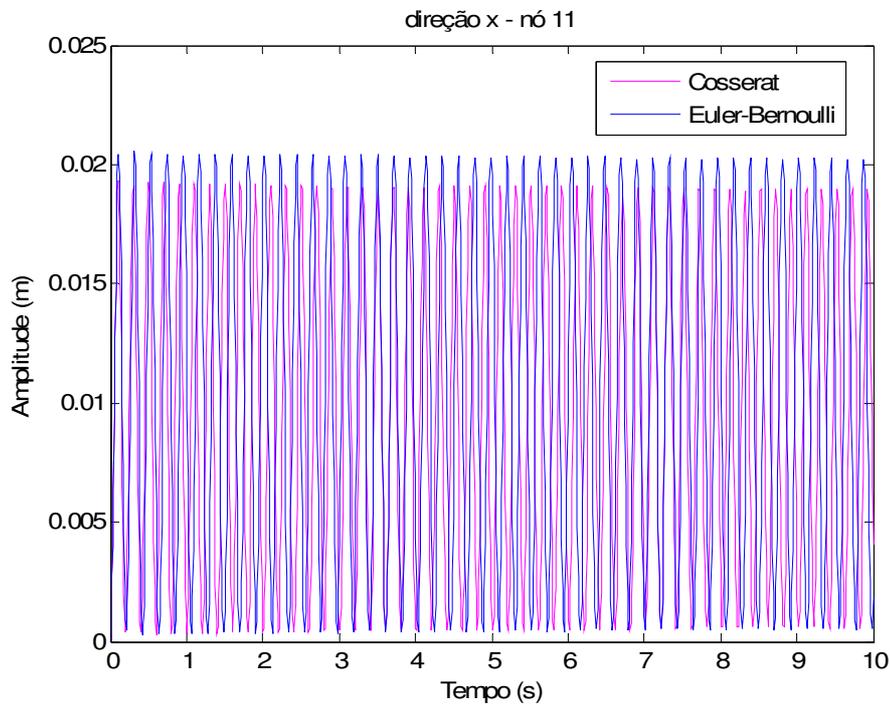
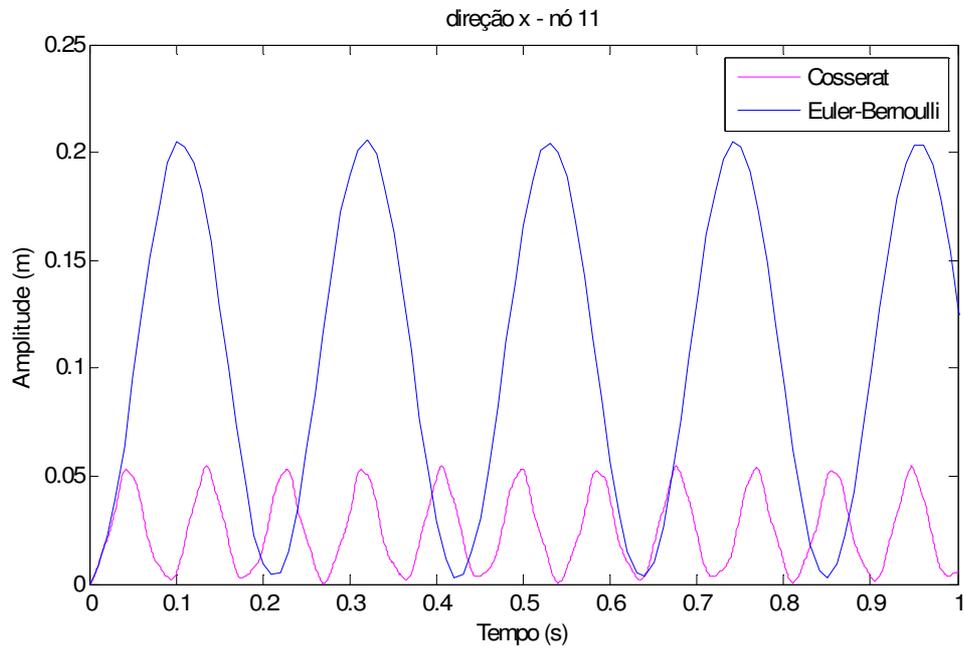


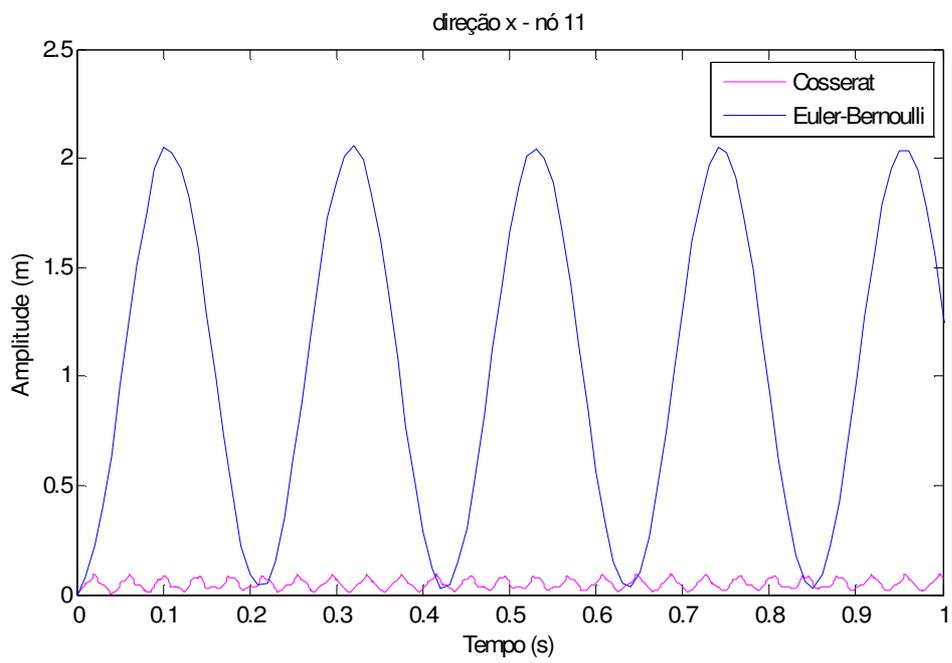
Figura 5.19 - Confrontação entre os resultados obtidos utilizando a teoria de vigas de Cosserat e Euler-Bernoulli para $F=0,1N$.

Observa-se na Fig. 5.19 que com incremento da força aplicada os deslocamentos previstos por ambas as teorias apresentam diferenças, o que pode ser interpretado como uma indicação que a teoria de Euler-Bernoulli deixa de representar adequadamente o comportamento não linear da viga.

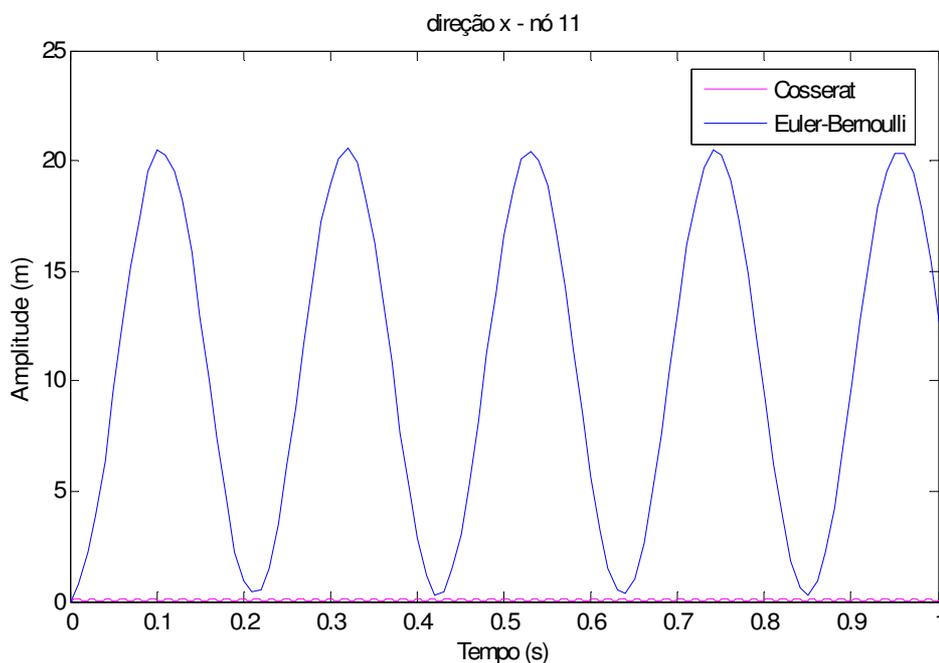
As discrepâncias se tornam ainda mais evidentes na medida em que a magnitude da força aumenta. Esta tendência é confirmada na Fig. 5.20, que apresenta a resposta da extremidade livre da viga para três incrementos de força: 1N, 10N e 100N.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.20 - Confrontação entre os resultados obtidos utilizando a teoria de vigas de Cosserat e Euler-Bernoulli para: (a) $F=1$ N; (b) $F=10$ N e (c) $F=100$ N

Nota-se na Fig. 5.20 que a cada incremento de força, as respostas obtidas utilizando as duas teorias de modelagem de vigas aumentam sua discrepância, tanto no tocante à amplitude, quanto no tocante à frequência. As respostas obtidas utilizando o elemento de viga de Cosserat para as forças aplicadas na extremidade da viga de 1N, 10 N e 100 N já foram mostradas em detalhes na seção anterior, nas Figs. 5.15, 5.16 e 5.17, respectivamente.

Para explicar as diferenças significativas observadas para maiores amplitudes da força aplicada, vale destacar que, com a teoria linear de vigas, não é considerado o efeito do enrijecimento devido à componente axial da força aplicada à extremidade da viga. Essa componente se torna maior com o aumento do deslocamento da extremidade, dado que a força continua sendo aplicada na direção x quando a viga se deforma. E, neste caso, ocorre o aparecimento de uma componente axial de força que, em virtude do acoplamento entre os efeitos longitudinais e transversais, previsto na teoria de Cosserat, enrijece a viga e aumenta sua frequência de oscilação. Este efeito é conhecido na literatura por enrijecimento por tensão (stress-stiffening) (BOKAIAN, (1988); BOKAIAN, (1990))

5.3. Interação Fluido-estrutura

Nesta seção a teoria de vigas de Cosserat, validada anteriormente, foi utilizada de forma acoplada ao método de fronteira imersa para se obter a resposta dinâmica de três diferentes estruturas sujeitas a excitação provocada pelo escoamento. A estrutura em questão se assemelha a um *riser* com pequena razão de aspecto. Para caracterizar a resposta dinâmica estrutural foram simuladas três estruturas diferentes, começando com uma estrutura mais rígida e gradativamente passando para uma mais flexível. Ressalta-se que nas simulações a excitação foi proveniente apenas dos efeitos fluidodinâmicos, considerando três diferentes números de Reynolds.

5.3.1 - Caso 1 – Estrutura estática

A Fig. 5.21a mostra o domínio utilizado em todas as simulações apresentadas neste trabalho. Ressalta-se o uso de dois sistemas de eixos, sendo o primeiro, OXYZ, que é adotado como referencial inercial, e o segundo, Axyz, que está posicionado na extremidade inferior da estrutura. Esse eixo é utilizado para facilitar a identificação das posições nodais do modelo estrutural.

O domínio de cálculo tem dimensões de 30 m na direção X, 20 m na direção Y e 10 m na direção Z, conforme pode ser observado na Fig. 5.21. Ressalta-se ainda, que o domínio de cálculo para as simulações do presente trabalho foi dividido em 750 mil volumes menores, conforme mostrado na Fig. 5.21b.

Nestas simulações o número de Reynolds foi calculado com base na velocidade de entrada e no diâmetro do cilindro, que pode ser obtido utilizando a seguinte relação:

$$\text{Re} = \frac{\rho U D}{\mu} \quad (5.1)$$

Em que:

$\rho \rightarrow$ massa específica do fluido;

$U \rightarrow$ velocidade de corrente livre;

$D \rightarrow$ diâmetro do cilindro;

$\mu \rightarrow$ viscosidade dinâmica.

E as condições de contorno para o domínio fluido são dadas para o plano $X=0$ da seguinte forma:

$$\textit{plano } X = 0 \left\{ \begin{array}{l} U = U_{\infty} = 1,0 [m / s] \\ V = 0 \\ W = 0 \end{array} \right.$$

tal que U, V, e W são as velocidades nas direções X, Y e Z respectivamente.

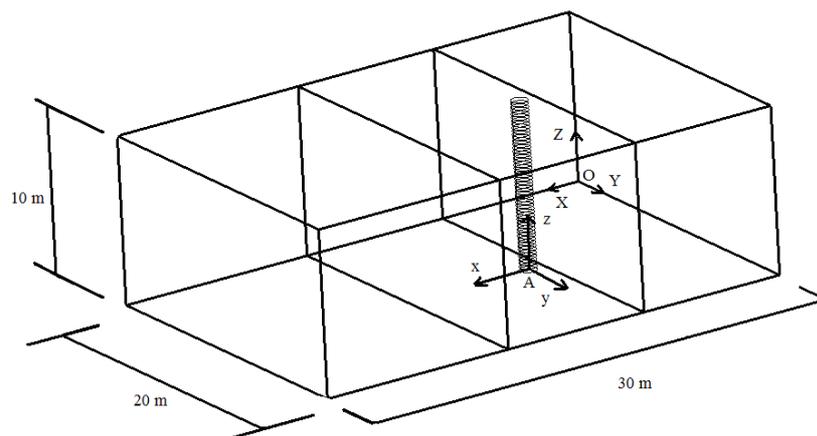
Para o final do domínio, dado pelo plano $X=30$ m, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\textit{plano } X = 30 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = U_{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = U_{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = U_{\infty} \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right.$$

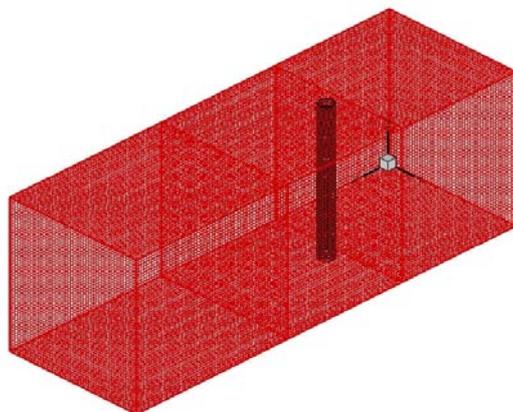
Para os demais planos na fronteira do domínio discretizado são impostas paredes, ou seja, condição de não deslizamento. Vale ressaltar que todas as simulações utilizaram processamento distribuído em três subdomínios, conforme mostrado na Fig. 5.21, com modelo de sub-malha de Smagorisky. Mais detalhes sobre processamento paralelo e modelos de turbulência podem ser encontrados no trabalho Vedovoto (2009).

Com relação à estrutura imersa, a base do cilindro está posicionada no interior do domínio em $X=10$ m, $Y=10$ m e $Z=0$ m no sistema de eixos de referência OXYZ. E, possui diâmetro de 1,0 metro e 10,0 metros de comprimento, sendo orientado na direção z do sistema de eixos auxiliar Axyz. Portanto possui razão de aspecto igual a 10.

Nesta primeira simulação a estrutura em questão é modelada como um obstáculo à passagem do fluido, já que não se considera nenhum movimento da estrutura, ou seja, a estrutura permanece estática durante toda a simulação. Assim, a estrutura imersa estará sujeita ao escoamento vindo da direita para esquerda, ou seja, direção positiva de X. Para facilitar a interpretação dos resultados no decorrer deste trabalho, adotou-se a direção do escoamento, direção X, em relação ao cilindro, como sendo a direção longitudinal, e a direção Y, foi definida como sendo a direção transversal.



(a)

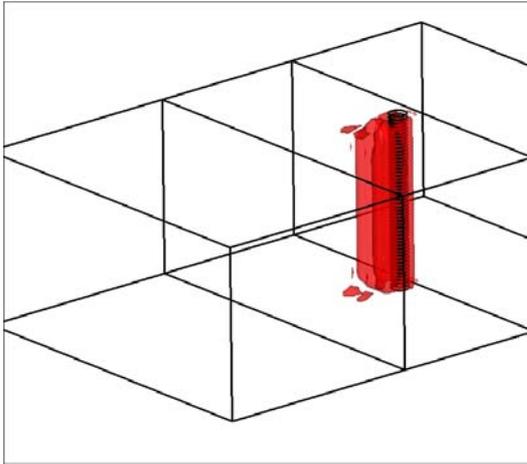
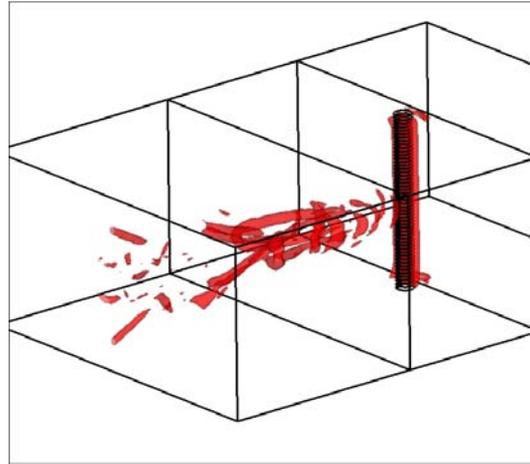
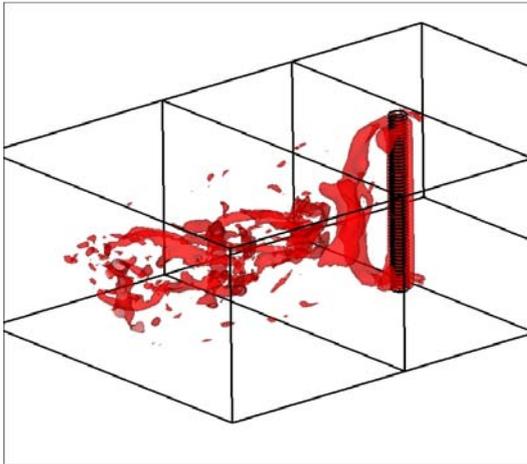
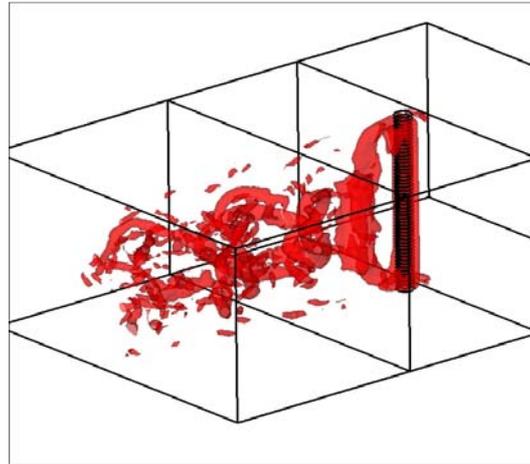
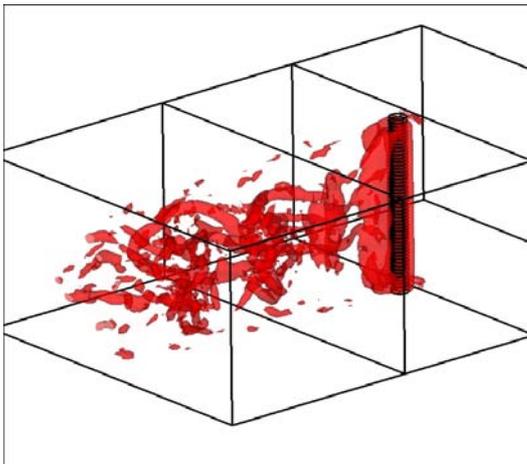
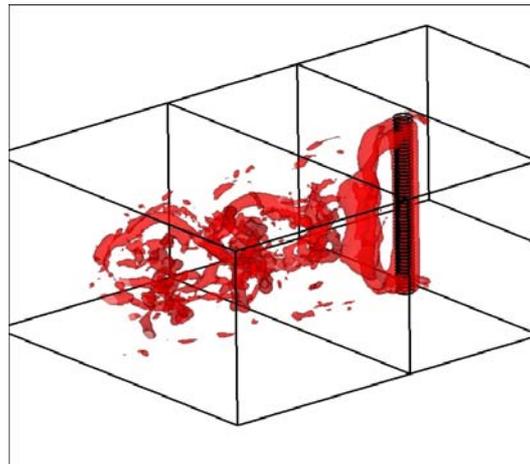


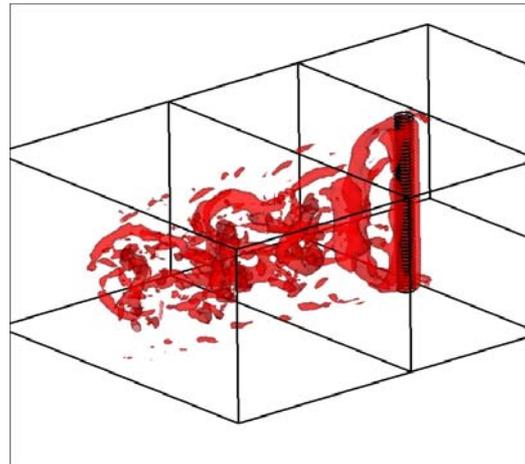
(b)

Figura 5.21 – Domínio Fluido – (a) Domínio utilizado nas simulações e estrutura imersa e (b) discretização espacial com 750 mil volumes.

Assim, baseado na velocidade de entrada e no diâmetro do cilindro pode-se calcular o número de Reynolds do escoamento que é imposto à estrutura imersa. Com auxílio da variação da viscosidade dinâmica de 0,01, 0,02 e 0,001 Kg/m.s e adotando para todas as simulações a massa específica igual a unidade, foi possível obter os seguintes números de Reynolds 100, 500 e 1.000 respectivamente.

A Fig. 5.22 mostra a evolução temporal de isosuperfícies ($Q=0,3$), para um escoamento sobre o cilindro, com número de Reynolds igual a 1.000. Destaca-se que a propriedade Q mostra locais do escoamento onde existe um efeito rotacional pronunciado, isso permite analisar escoamentos tridimensionais através da diferença entre a taxa de deformação e rotação do escoamento, e assim, facilita a visualização de estruturas turbilhonares. Maiores informações sobre o cálculo do parâmetro Q são dadas no trabalho de Krajnović (2000). Ressalta-se ainda, que o passo de tempo utilizado foi de 0,05 s.

(a) $t=0.1$ s(b) $t=20$ s(c) $t=40$ s(d) $t=60$ s(e) $t=80$ s(f) $t=100$ s



(g) t=120 s

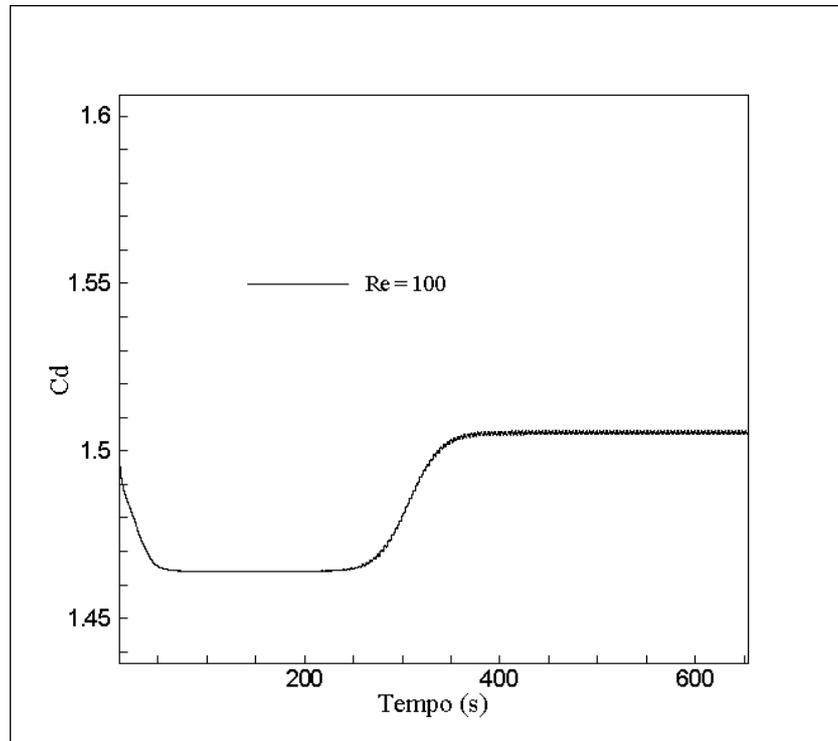
Figura 5.22 – Evolução temporal de isosuperfícies ($Q=0,3$) da estrutura estática sujeita ao escoamento com $Re=1.000$.

Os coeficientes de arrasto e força transversal são obtidos através da somatória das forças resultantes atuantes em todas as “fatias” do cilindro discretizados ao longo do comprimento estrutural. Os coeficientes de arrasto (C_d) e força transversal (Cl) podem ser obtidos pelas seguintes relações:

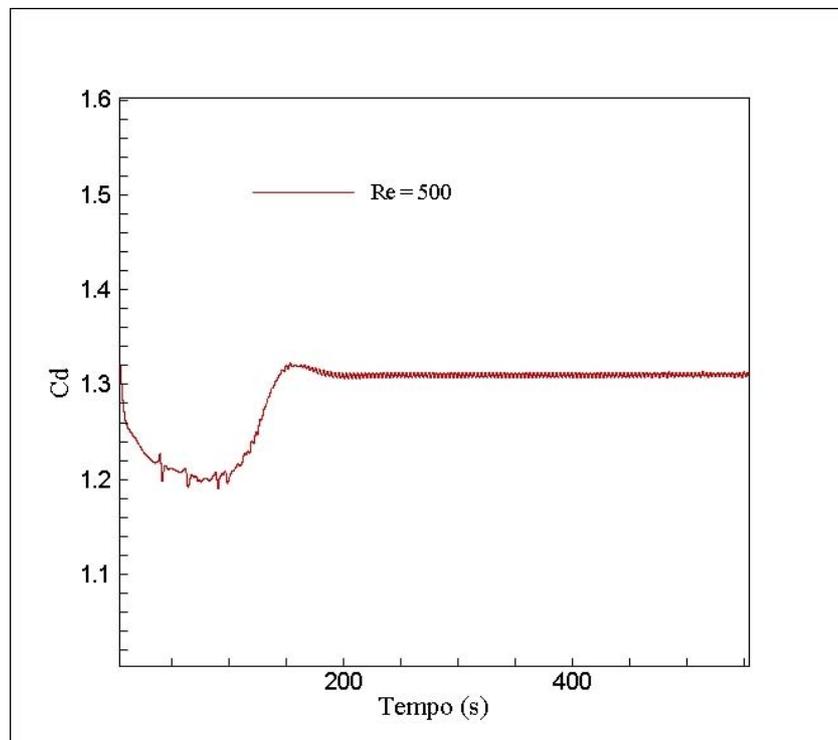
$$C_d = \frac{2 \sum_{i=1}^N F_x}{\rho A_x U_\infty^2} \quad (5.2)$$

$$Cl = \frac{2 \sum_{i=1}^N F_y}{\rho A_y U_\infty^2} \quad (5.3)$$

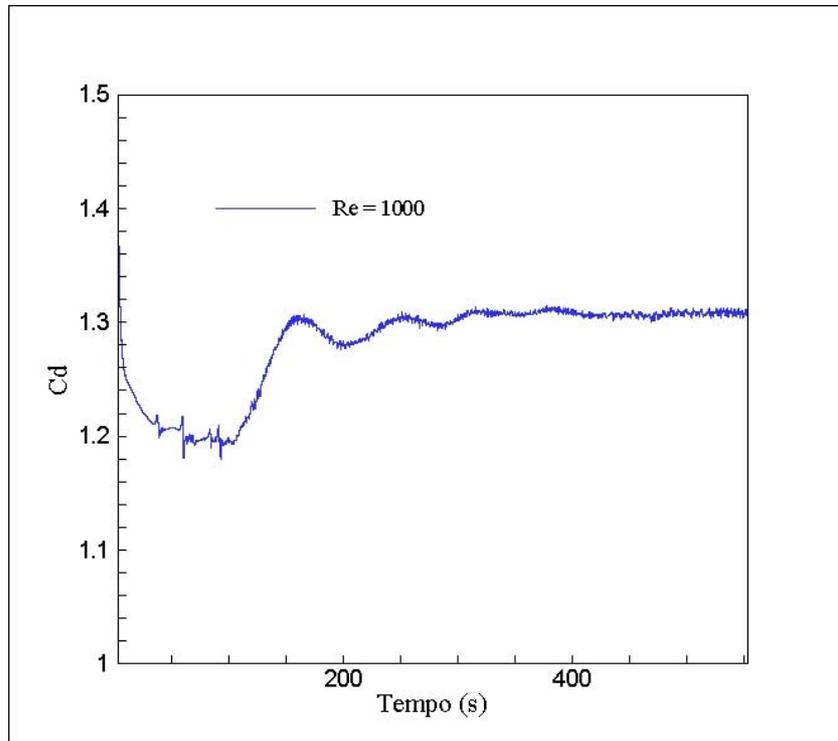
Dado que A_x e A_y são as projeções da área frontal nas direções X e Y, respectivamente. E F_x e F_y são as componentes de forças em cada direção. E por fim, a variável N representa o número de pontos lagrangianos. Na Fig. 5.23 são apresentados os coeficientes de arrasto longitudinal médio para três diferentes números de Reynolds.



(a)



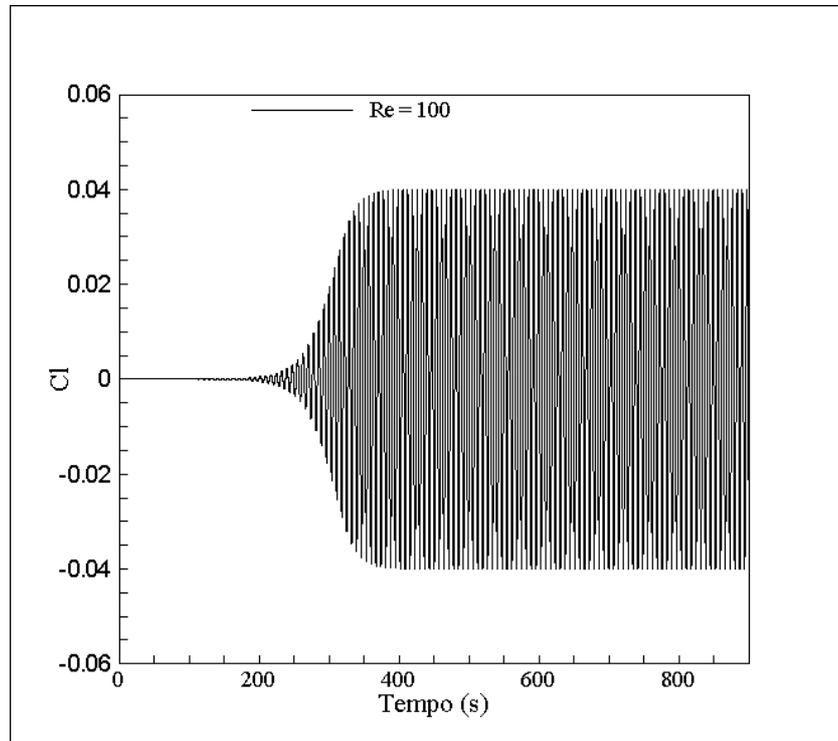
(b)



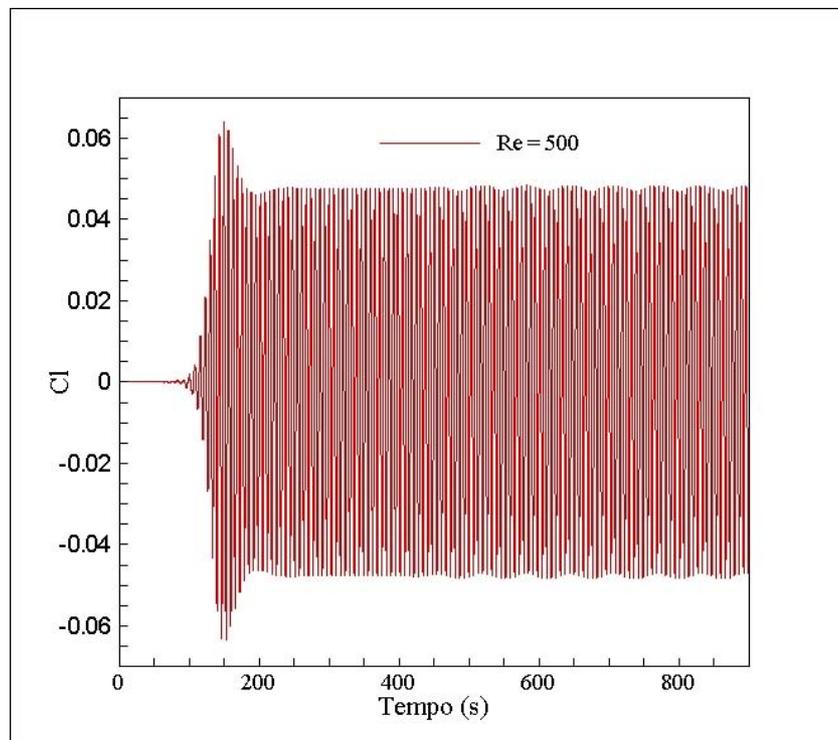
(c)

Figura 5.23 - Coeficientes médios de arrasto longitudinal para estrutura estática com: (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

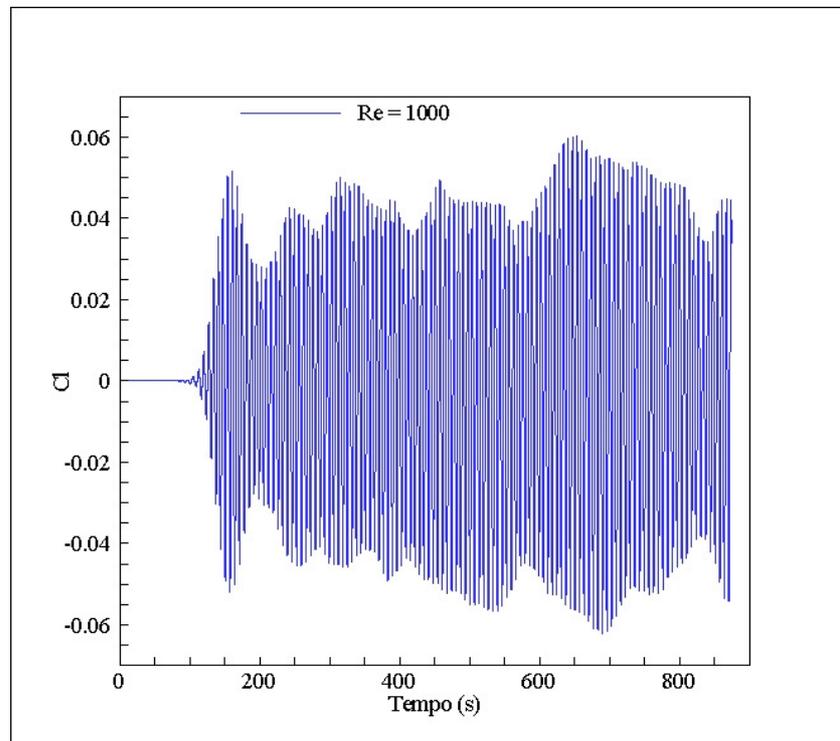
Nas Figs. 5.24(a)-(c) é mostrado o coeficiente de força transversal médio obtido de forma análoga à anterior para três diferentes números de Reynolds.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.24 - Coeficientes médios de arrasto transversal para a estrutura estática, com: (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

Fazendo a transformada de Fourier da somatória de forças atuantes na estrutura na direção Y, obtêm-se as frequências de excitação estrutural média para esta direção, Fig. 5.25. Essas frequências estão diretamente associadas à frequência de desprendimento de vórtices a jusante da estrutura imersa, que ocorre de forma periódica e alternada, cuja configuração regular é conhecida como esteira de Von Karman. Esta configuração pode ser visualizada mais adiante na Fig. 5.27.

Destaca-se, que esta frequência é responsável por excitar transversalmente a estrutura imersa de acordo com o tamanho característico das estruturas turbilhonares mais energizadas presentes no escoamento, esse fenômeno é conhecido na literatura como VIV (*Vortex-Induced Vibration*).

Note-se que, observando as Figs. 5.24 (a)-(c) pode-se dizer que, com o incremento do número de Reynolds o gráfico dos coeficientes de força transversal passam a oscilar em um conjunto de frequência, devido à transição a turbulência e sua característica inerente que é multiplicidade de escalas, conforme pode ser observado na Fig. 5.24c. Ressalta-se ainda, que devido às amplitudes das frequências secundárias de oscilação serem pequenas, elas não podem ser observadas com clareza na figura abaixo.

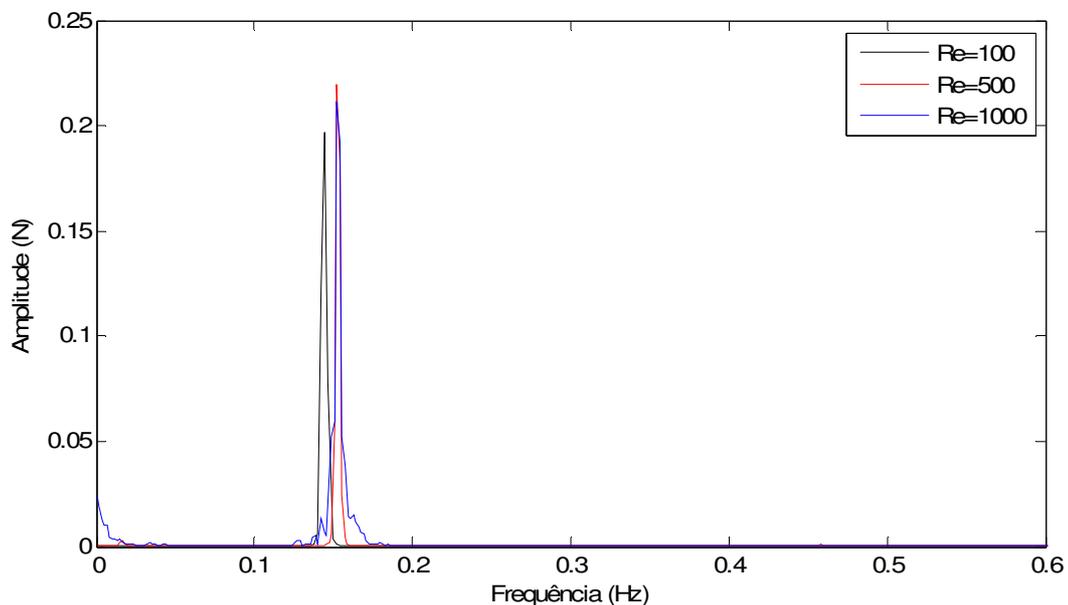


Figura 5.25 – Frequências de desprendimento de vórtices para três diferentes valores do número de Reynolds – estrutura estática.

Os coeficientes de arrasto longitudinal e transversal, assim como a frequência de desprendimento de vórtices em comparação com os resultados apresentados na literatura, como, por exemplo, no trabalho relatado no livro do White (1991), comparado com o presente trabalho para os coeficientes de arrasto longitudinal, se apresentaram dentro do esperado para este tipo de simulação. O que dá embasamento quantitativo para que as próximas etapas sejam realizadas.

Tabela 5.3 - Comparação entre os coeficientes de arrasto

Número de Reynolds	White (1991)	Presente trabalho
100	1,50	1,51
500	1,40	1,32
1000	1,30	1,2

Na seção seguinte, a estrutura imersa passará a ser flexível, e modelada utilizando a teoria de vigas de Cosserat, sendo excitada de acordo com as forças hidrodinâmicas provocadas pelo escoamento e calculadas pelo mesmo algoritmo avaliado nesta seção.

5.3.2 - Caso 2 - Estrutura Flexível I

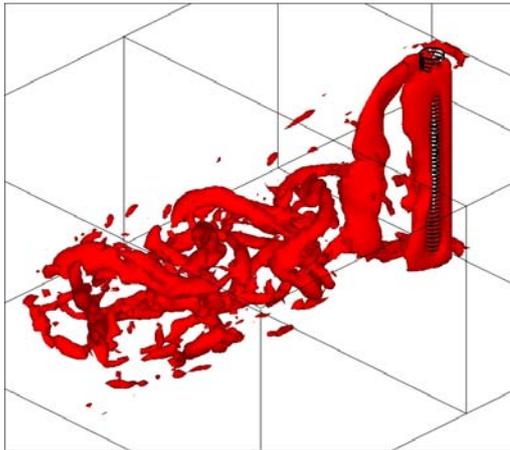
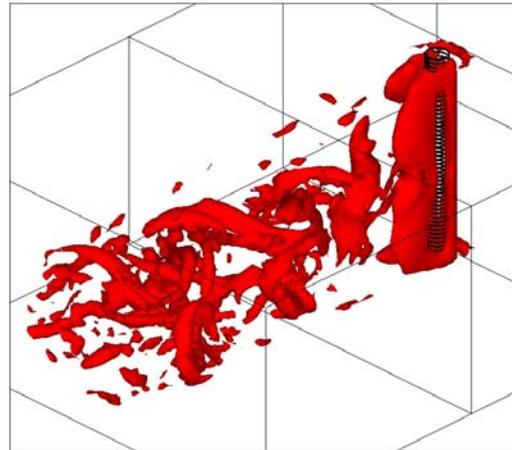
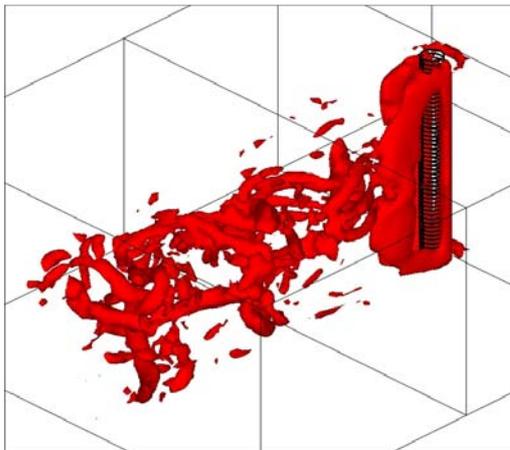
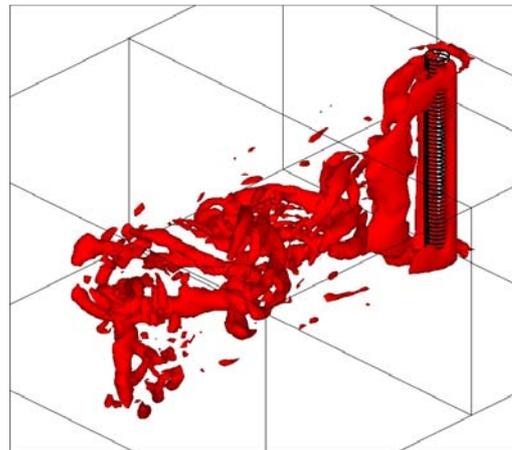
Nesta etapa, uma estrutura flexível é modelada utilizando a teoria de vigas de Cosserat, a qual foi submetida a forças hidrodinâmicas calculadas a partir do método da fronteira imersa. De forma análoga ao caso anterior, as simulações foram realizadas para três diferentes números de Reynolds, dados por 100, 500 e 1.000, mantendo todas as demais características para o domínio fluido. As propriedades físicas e geométricas da estrutura simulada são dadas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Propriedades físicas e Geométricas da Estrutura I

Propriedades da Estrutura	Valores
Razão de aspecto	10
Massa específica	7850 [Kg/m ³]
Rigidez Axial (EA)	5,014x10 ⁴ [N]
Rigidez a flexão (EI)	907,53 [Nm ²]
Rigidez a torção (GJ)	682,55 [Nm ² /rad]

A estrutura imersa ao escoamento encontra-se bi-rotulada, ou seja, nas suas extremidades foram restringidos os deslocamentos em todas as direções, e somente as rotações em torno dos eixos x e y do sistema auxiliar, Axyz, foram permitidas. A estrutura imersa foi discretizada espacialmente utilizando 50 elementos de vigas de Cosserat igualmente espaçados,

contendo 51 nós e 6 graus de liberdade por nó. A Fig. 5.26 mostra a evolução temporal de isosuperfícies $Q=0,25$ do escoamento ao redor de estrutura imersa, para Reynolds =1.000.

(a) $t=800$ s(b) $t=815$ s(c) $t=830$ s(d) $t=845$ s

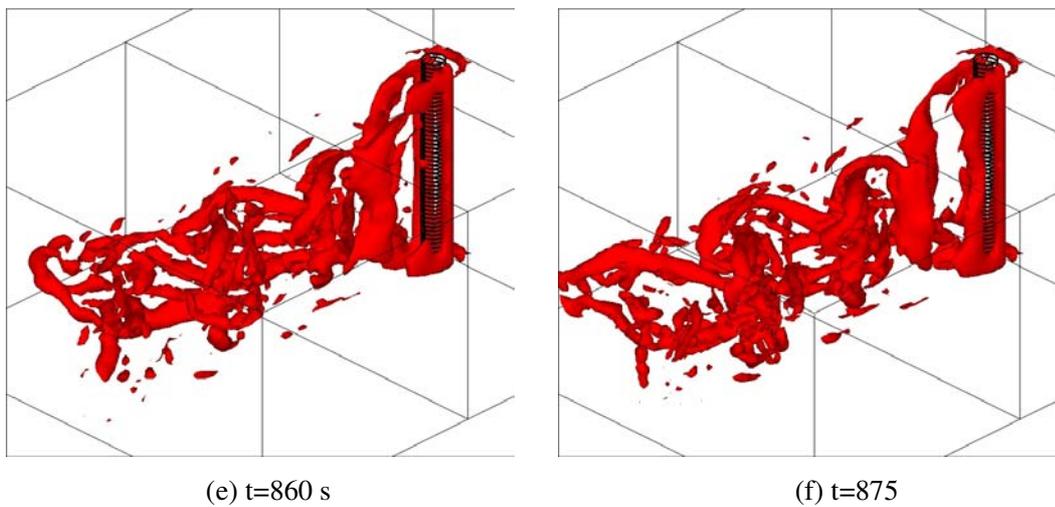
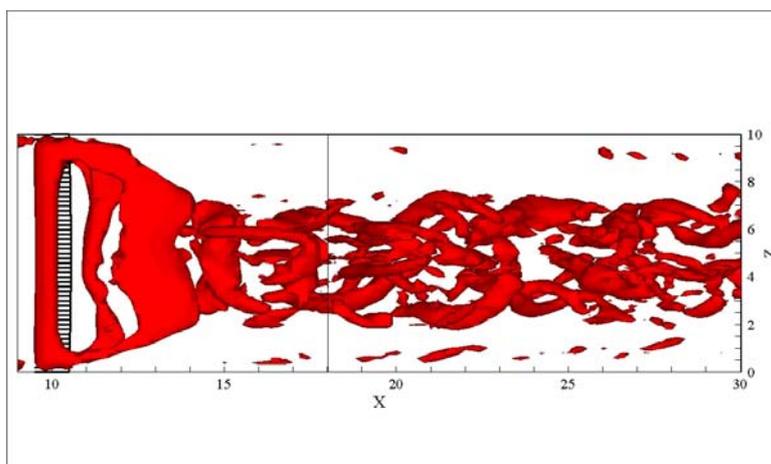


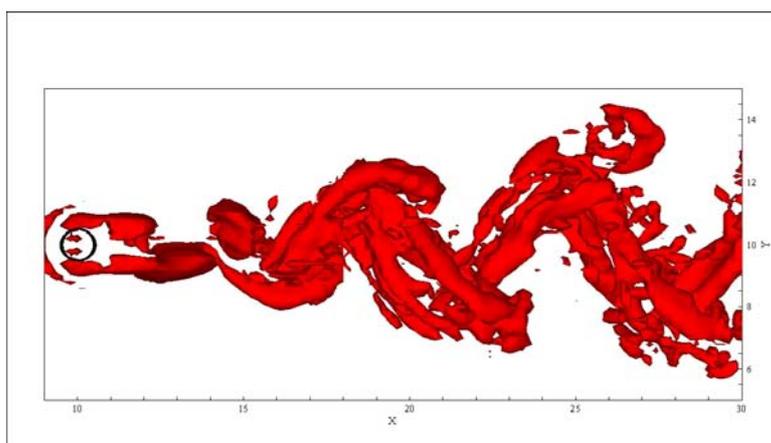
Figura 5.26 – Evolução temporal de isosuperfícies $Q=0,25$ para Estrutura Flexível I sujeito a escoamento com $Re=1.000$.

As imagens mostradas nas Figs. 5.26(a)-(e) foram adquiridas segundo uma evolução temporal de 800 s a 875 s com incremento de tempo de 15 s, em que foi possível observar tridimensionalmente as estruturas turbilhonares formadas pela passagem do escoamento sobre a estrutura imersa. Devido à rigidez estrutural, e a magnitude das forças hidrodinâmicas impostas pelo escoamento, não foi possível observar, neste caso, o deslocamento estrutural provocado por esta excitação. Entretanto, como será mostrada em figuras posteriores, para os mesmo tempo discretos aqui observados, já houve uma variação na posição estrutural no interior do escoamento, que devido a sua pequena magnitude não afetou o escoamento ao seu redor.

Na Fig. 5.27 são detalhados planos bidimensionais, para $t=875$ s, do escoamento passando ao redor da estrutura imersa.



(a)

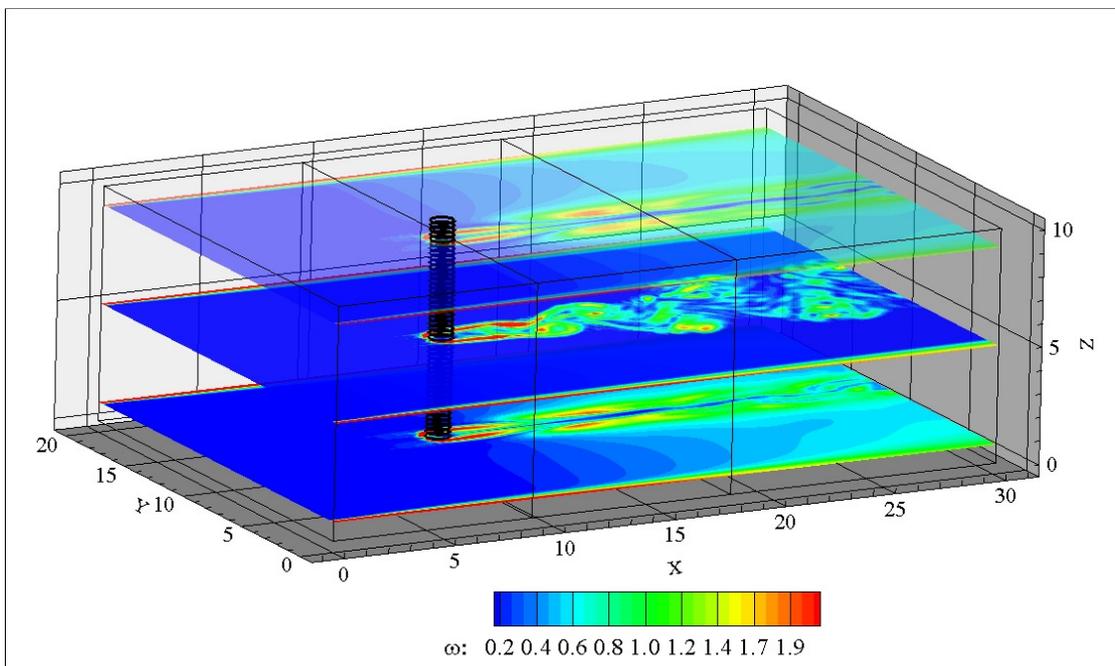


(b)

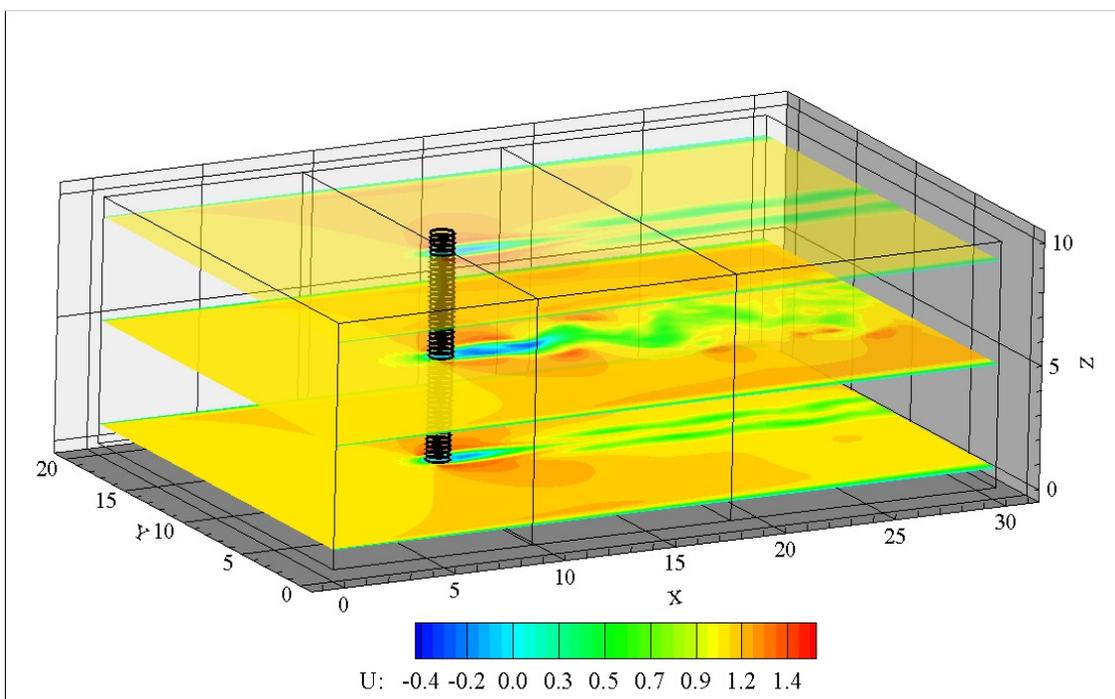
Figura 5.27 - Detalhes do escoamento ao redor da estrutura, $Q=0,25$: (a) Plano XZ e (b) Plano XY.

Observa-se nestas projeções como é formada a esteira de Von Karman, a jusante do cilindro, que caracteriza o desprendimento periódico de vórtices que foi responsável por excitar a estrutura na direção transversal ao escoamento.

Na Fig. 5.28(a) e (b) destacam-se os planos seccionados ao longo do comprimento da estrutura, nas posições de 1, 5 e 9 metros na direção z, mostrando os resultados de vorticidade e velocidade, respectivamente.



(a)

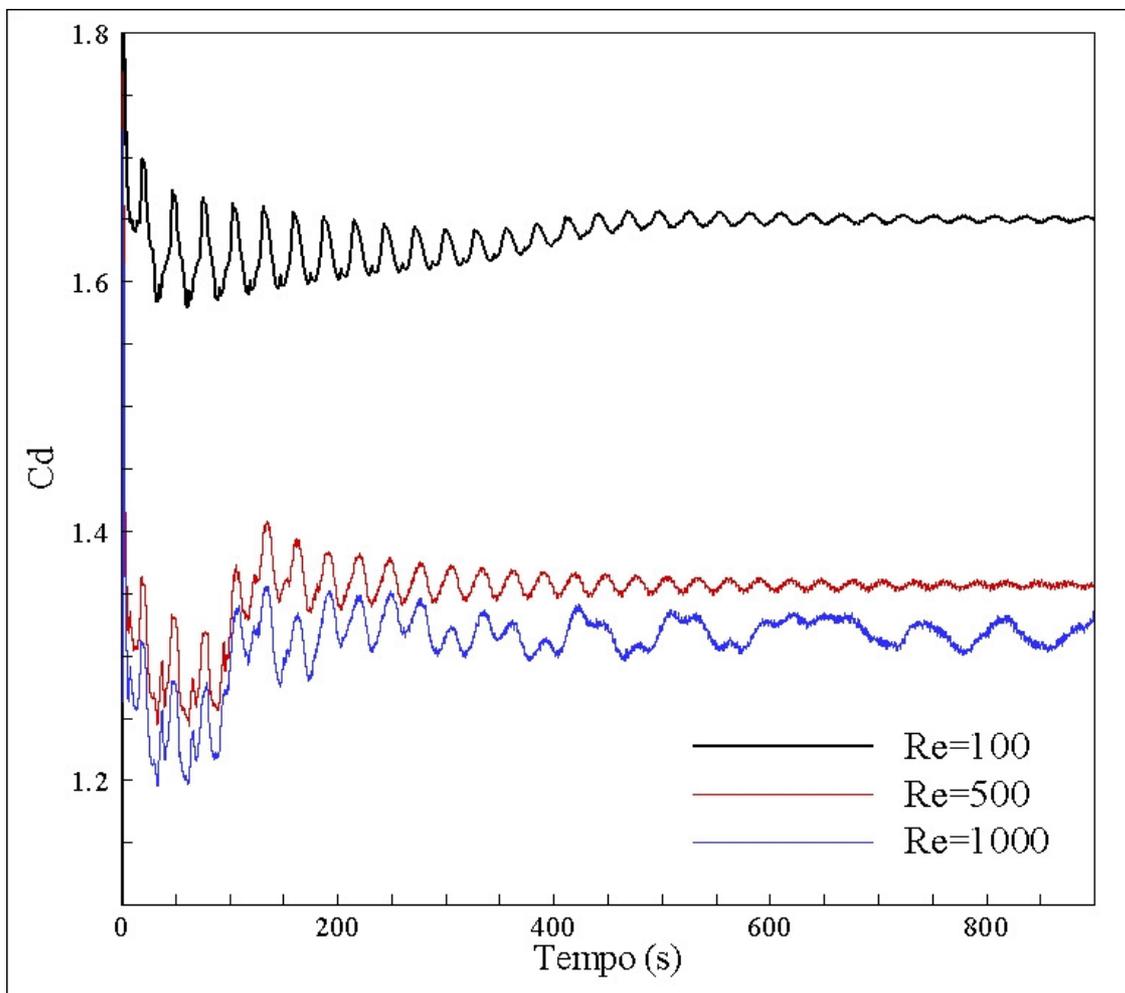


(b)

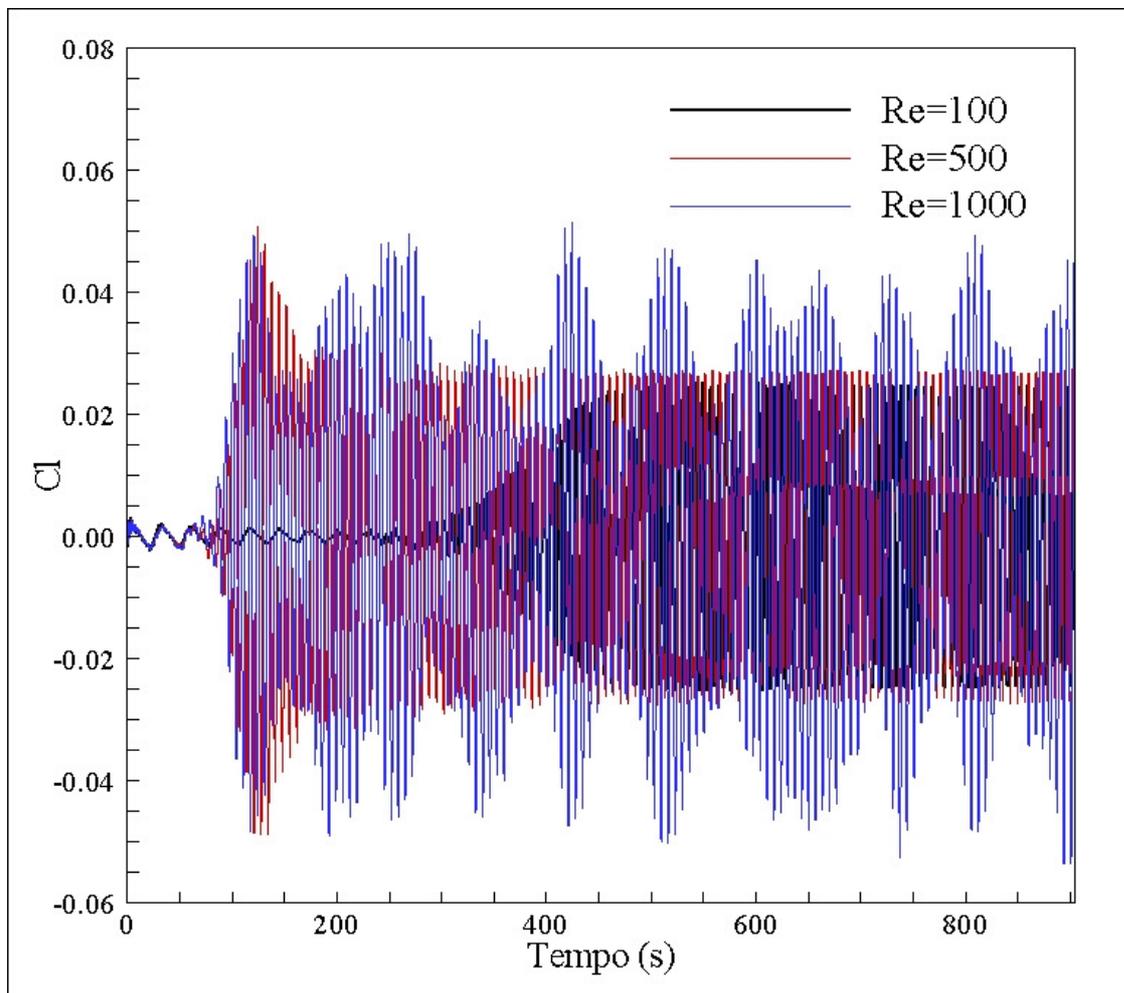
Figura 5.28 – Planos seccionados nas posições 1, 5 e 9 metros da direção z da Estrutura Flexível I sujeito a $Re=1.000$ e $t=875$ s: (a) campo de vorticidade e (b) campo de velocidade.

Observa-se na figura acima que os níveis de velocidade e vorticidade estão maiores na parte frontal do cilindro e a sua jusante devido a esteira formada, que pode ser melhor observada no plano XY posicionada a 5m na direção Z. Outra característica que pode ser observada nos planos inferior e superior é como as condições de contorno afetam o escoamento nesta região, devido à presença de paredes, e sua condição de não deslizamento.

Os coeficientes de arrasto transversal e força longitudinal médio são mostrados na Fig. 5.29.



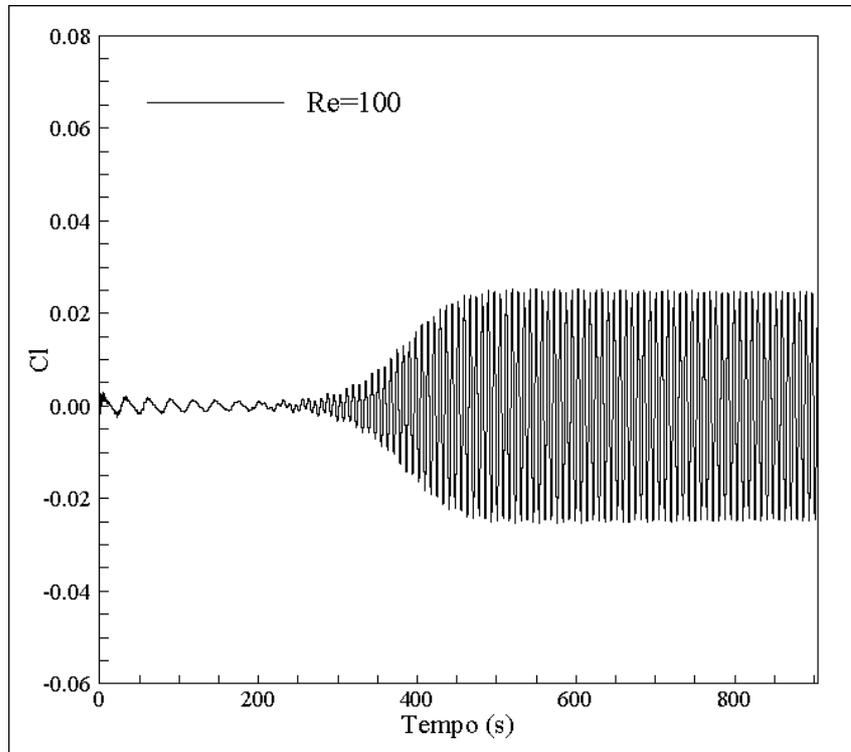
(a)



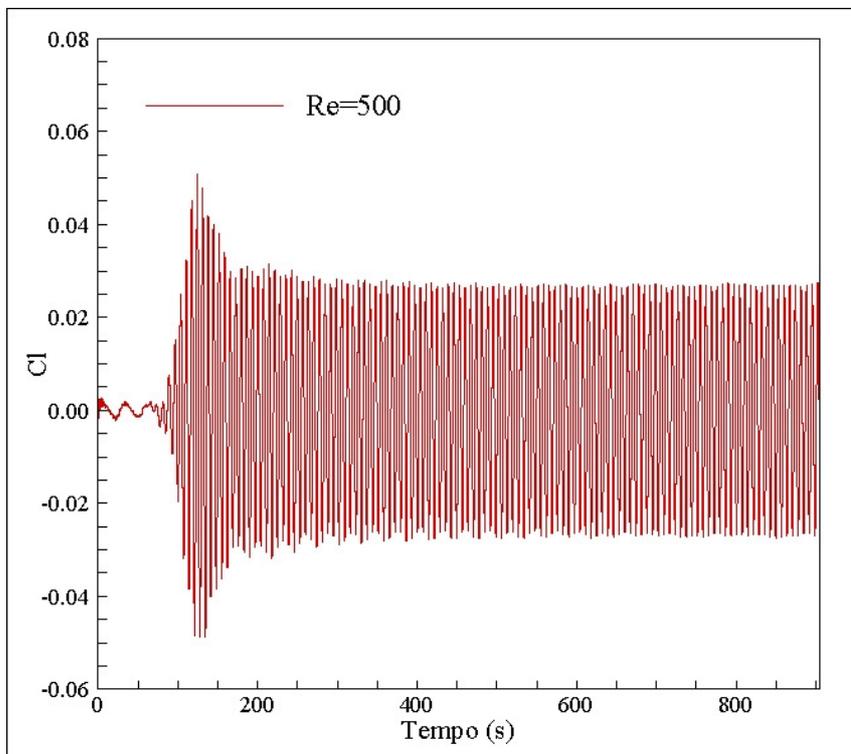
(b)

Figura 5.29 - Coeficientes médios de arrasto para estrutura Flexível I; Coeficientes de arrasto médio: (a) longitudinal e (b) Transversal.

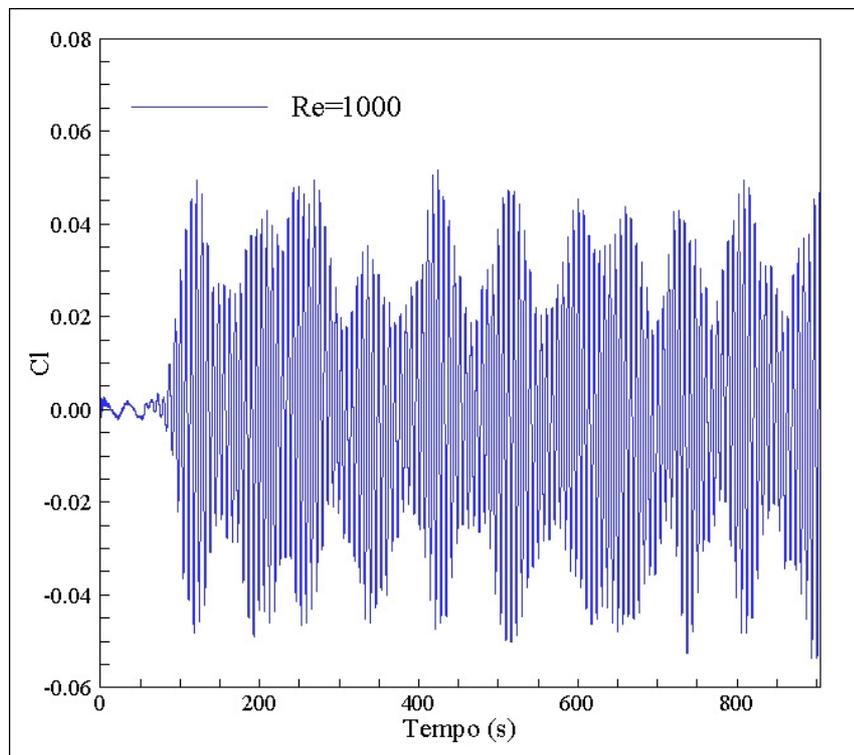
Como visto na Fig. 5.29b o coeficiente força transversal estão sobrepostos, por esta razão são melhores detalhados na Fig. 5.30.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.30 - Coeficientes médios da força transversal para estrutura Flexível I com: (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

Nas Fig. 5.30 (a)-(b) os coeficientes de força transversal são caracterizados pela presença de uma única frequência de oscilação, o que não ocorre na Fig. 5.30 (c), em que se observa que este coeficiente, diferentemente dos demais, é composto de múltiplas frequências. Essas frequências são melhores visualizadas, na Fig. 5.31, que foi construída a partir da transformada de Fourier das forças transversais resultantes, de forma análoga ao caso anterior, e mostra a frequência de excitação na direção transversal ao escoamento, que está associado à frequência de desprendimento de vórtice.

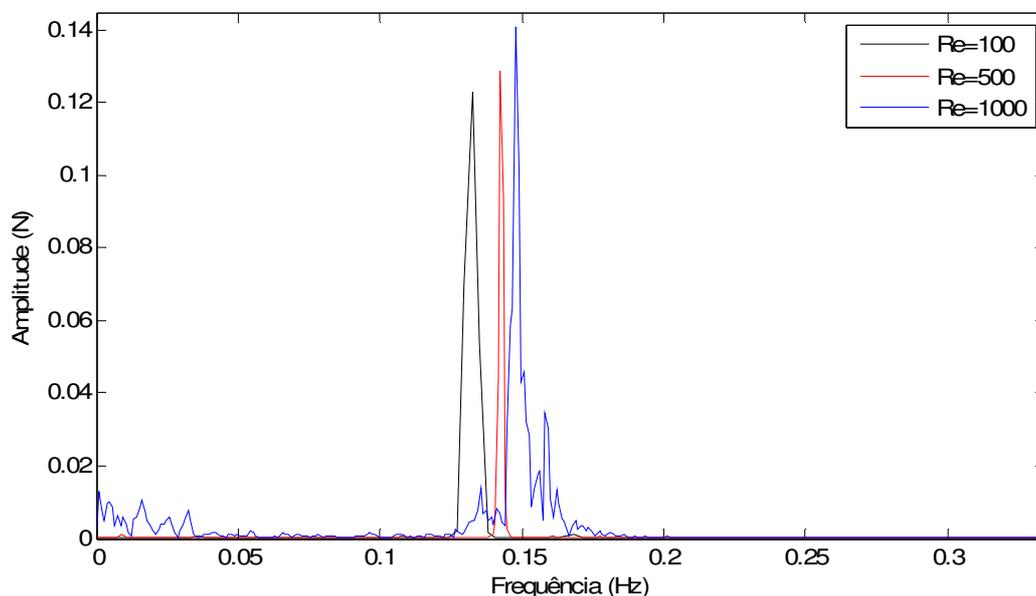


Figura 5.31 – Frequências de desprendimento de vórtices para três diferentes valores do número de Reynolds – Estrutura Flexível I.

No espectro de frequência acima, principalmente para caso em que $Re=1.000$, observa-se uma frequência predominante e alguns picos de frequência de menor amplitude ao seu redor, assim como algumas frequências no início do espectro. Este fenômeno pode ser explicado devido à transição à turbulência do escoamento, e sua multiplicidade de escalas. Destaca-se que, essas frequências influenciam diretamente nos deslocamentos estruturais, visto que a força de excitação é composta por diferentes frequências.

A seguir, serão analisados os dados no domínio estrutural. A evolução temporal para o deslocamento na direção longitudinal, direção X do sistema OXYZ, do ponto nodal posicionado a 4,80 m da extremidade inferior da estrutura pode ser observada na Fig. 5.32.

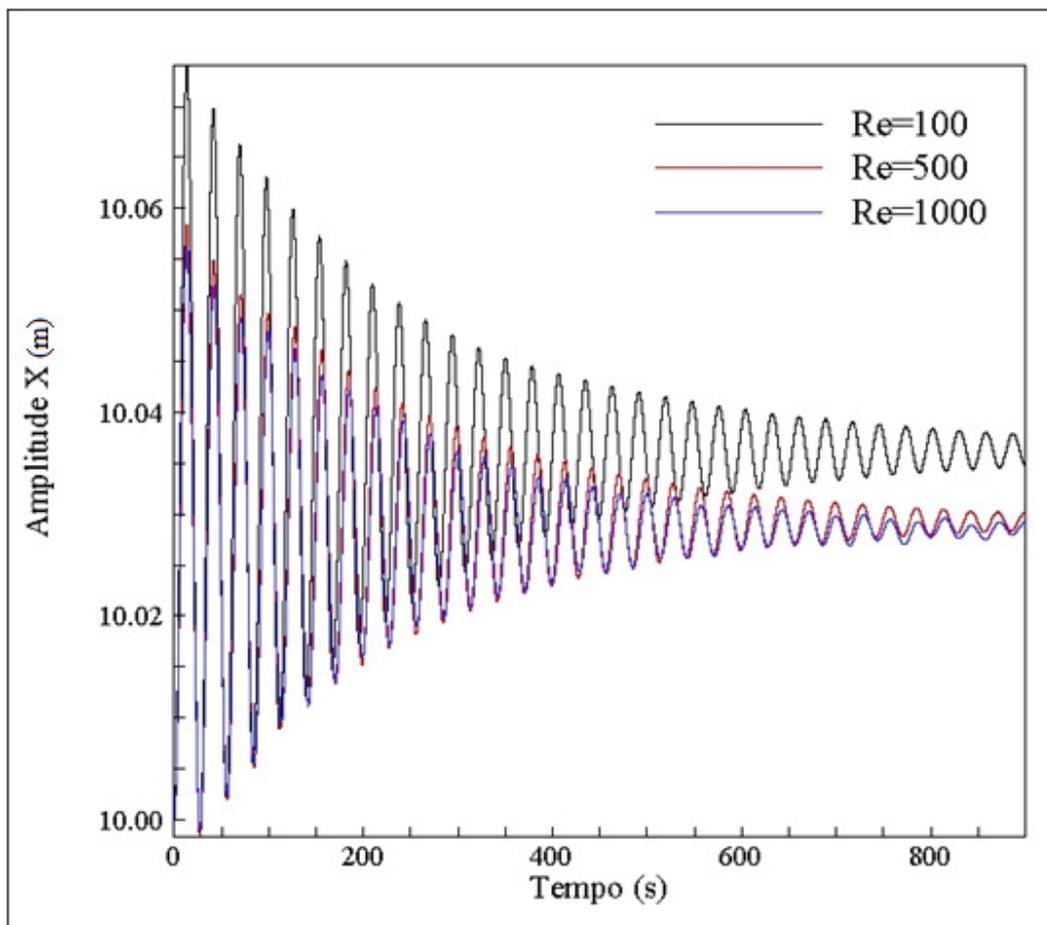


Figura 5.32 – Evolução temporal do deslocamento na direção X da Estrutura Flexível I sujeito ao escoamento com diferentes números de Reynolds.

Observa-se, na Fig. 5.32, que para todos os valores de números de Reynolds considerados, o deslocamento na direção normal apresentou um decaimento exponencial, típico de amortecimento viscoso. Destaca-se que o amortecimento observado deve-se completamente à interação fluido-estrutural, pois no modelo estrutural não foi considerado qualquer amortecimento inerente ao material.

Na Fig. 5.33 é mostrada a evolução temporal do deslocamento do mesmo ponto nodal na direção transversal Y.

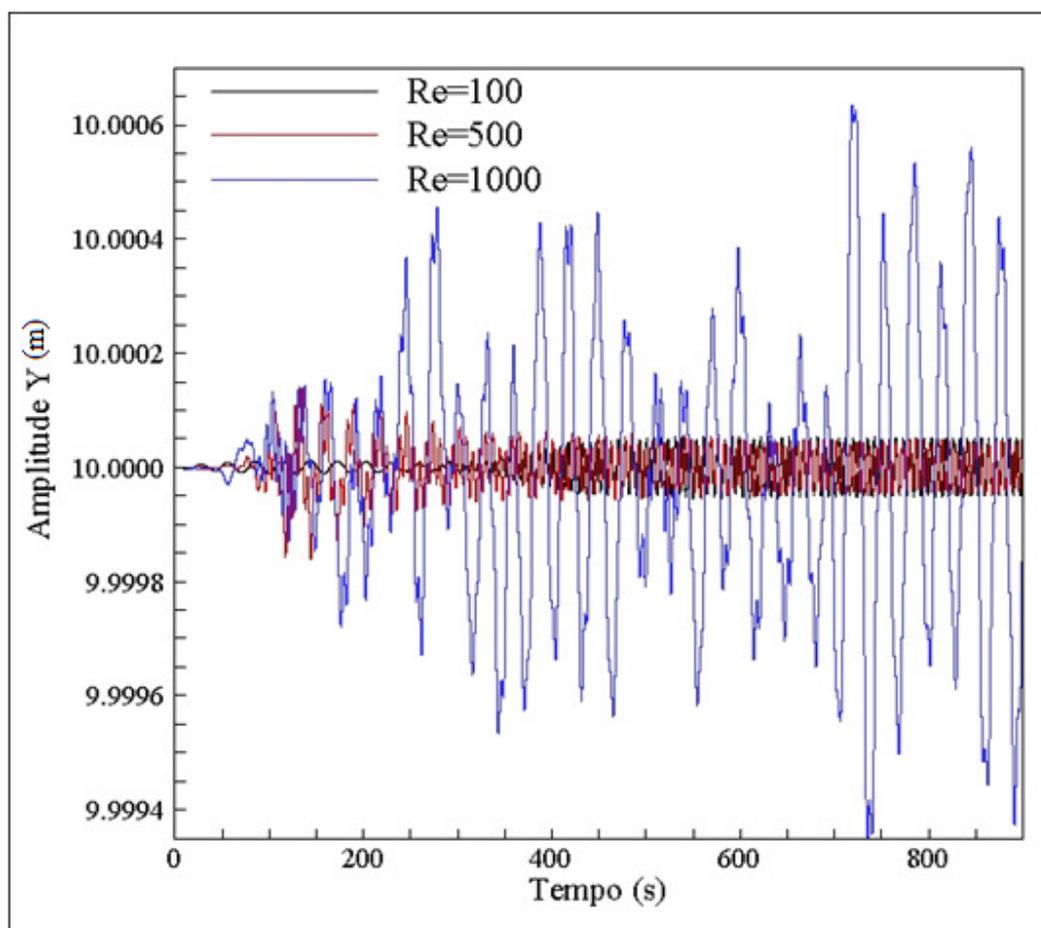
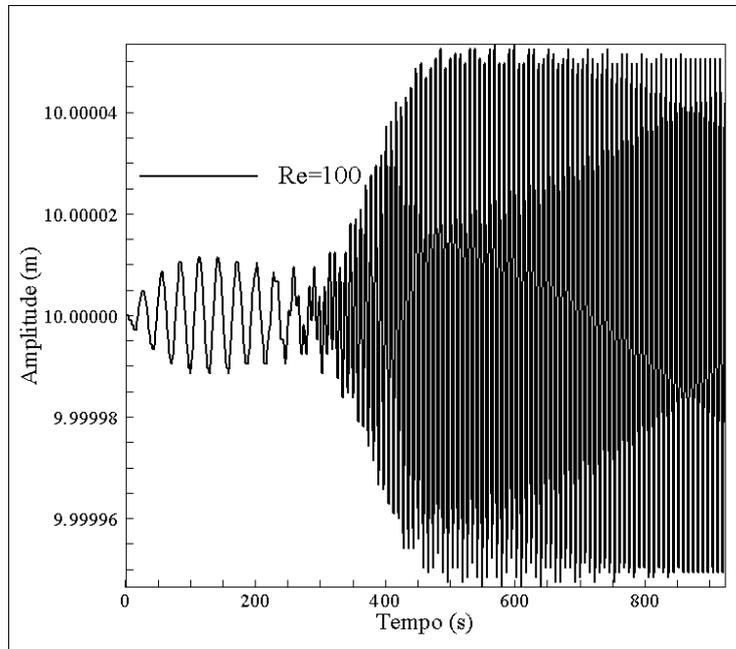


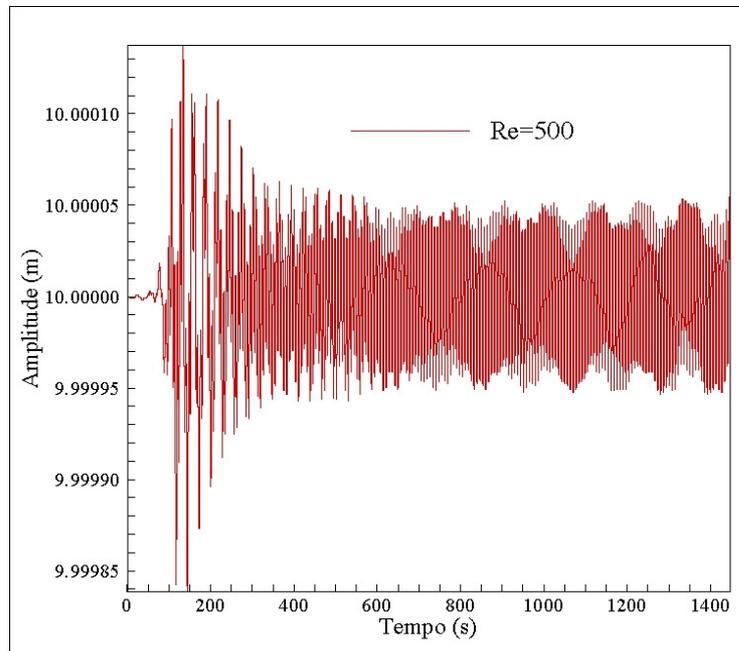
Figura 5.33 – Evolução temporal do deslocamento na direção Y da Estrutura Flexível I sujeito ao escoamento com diferentes números de Reynolds.

Na Fig. 5.33 observa-se que o deslocamento transversal aumentou consideravelmente para $Re=1.000$, devido a maior influência da turbulência, assim como o desprendimento de vórtices a jusante do cilindro que, conseqüentemente, altera o campo de pressão e, portanto, as forças hidrodinâmicas a que estrutura está submetida.

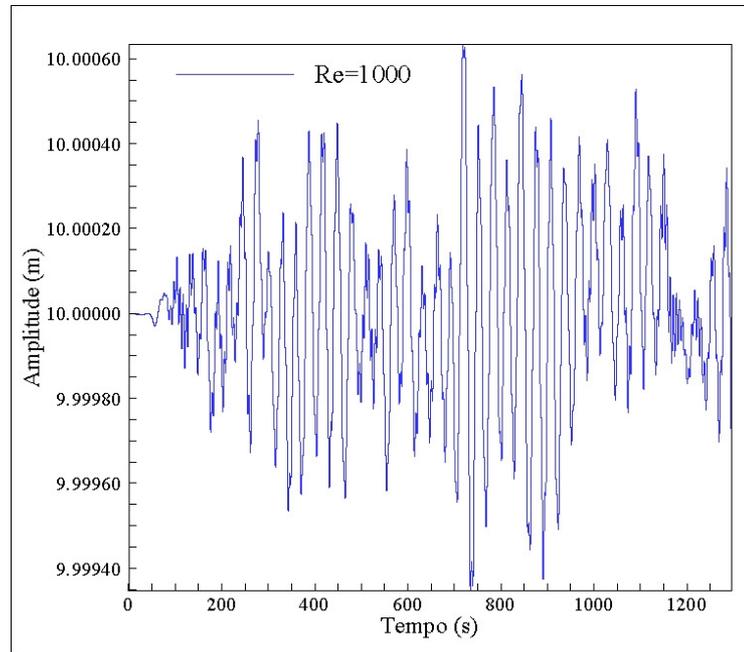
Para melhorar visualização, a Fig. 5.34 mostra em detalhes esses deslocamentos transversais para os diferentes valores do número de Reynolds.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.34 – Deslocamento transversal da Estrutura Flexível I; (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

A força de excitação, apresentada no domínio da frequência na Fig. 5.31 os deslocamentos estruturais para Reynolds igual a 100 e 500 tiveram basicamente apenas uma frequência predominante, o que não ocorreu com o deslocamento transversal provocado pelo escoamento com Reynolds igual a 1.000, em que se observou que o cilindro oscilava em torno de zero em múltiplas frequências. Este fato fica melhor evidenciado na Fig. 5.35 em que se ilustra as amplitudes do espectro em frequência dos deslocamentos transversais mostrados nas Fig. 5.34(a)-(c), permitindo avaliar o conteúdo espectral da resposta.

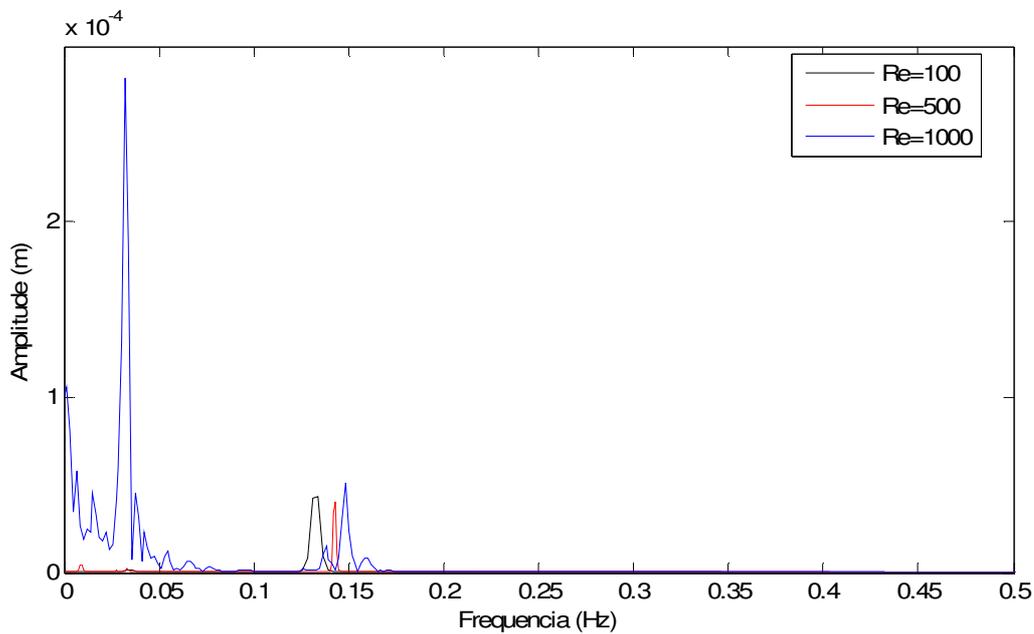


Fig. 5.35 – Frequências de oscilação dos deslocamentos transversais para três diferentes valores do número de Reynolds – Estrutura Flexível I.

Na Fig. 5.35 destaca-se a aparição de uma frequência em torno de 0,05 Hz, que não é visualizada na Fig. 5.31. Este fato está diretamente associado ao ponto de aquisições destes sinais, dado que o espectro mostrado na Fig. 5.31 é gerado a partir da força média, enquanto o espectro mostrado na Fig. 5.35 é obtido a partir do deslocamento pontual.

Na Fig. 5.36 são apresentados os deslocamentos estruturais de forma a coincidirem com os tempos discretos do escoamento ao redor da estrutura, mostrados na Fig. 5.26, para $Re=1.000$.

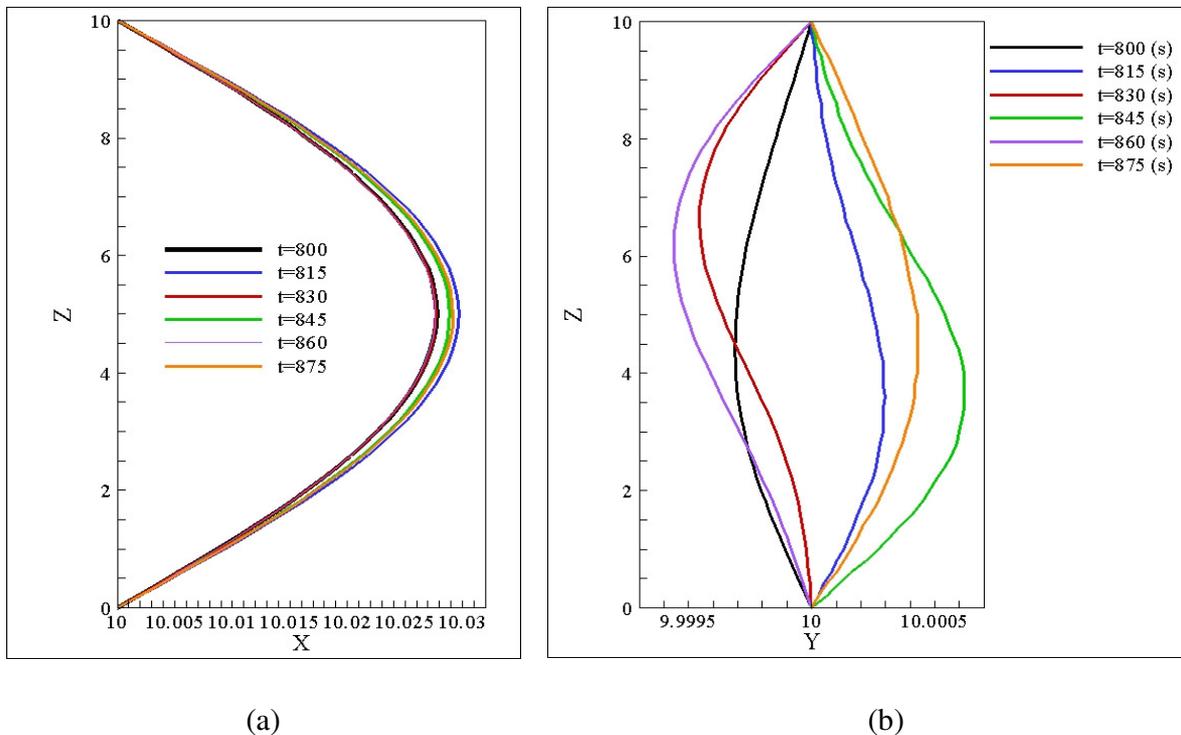


Figura 5.36 - Deslocamentos devidos à interação fluido-estrutural para tempos discretos coincidentes com a Fig. 5.26, para $Re=1.000$ e a Estrutura Flexível I: (a) Plano XZ e (b) Plano YZ.

Na Fig. 5.36 notam-se as diferenças entre os deslocamentos estruturais na direção longitudinal e transversal. O deslocamento longitudinal, devido à força de arrasto faz com que a estrutura se desloque até uma determinada posição e oscile em torno desta. Diferentemente da força transversal, que faz com que a estrutura oscile em torno de zero, de acordo com o desprendimento de vórtice, em uma combinação de frequências. Como já relatado anteriormente, este fenômeno é conhecido como VIV (*Vortex-Induced Vibration*). Ressalta-se ainda que o deslocamento longitudinal foi maior que o transversal para esta simulação.

Por fim, a Fig. 5.37 revela a norma L_2 , que evidencia a condição de não deslizamento entre superfície imersa e a partícula de fluido que está em contato com a interface. Esta propriedade é obtida analisando as velocidades da superfície da estrutura e as velocidades das

partículas de fluido em contato com esta superfície, conforme discutido na seção 4.2.3. Destaca-se que o valor desta norma deveria ser rigorosamente zero, entretanto devido aos erros numéricos, inerentes à discretização espacial e temporal, além da interpolação/distribuição da velocidade e força entre os domínios eulerianos e lagrangianos, esse valor não é atingido.

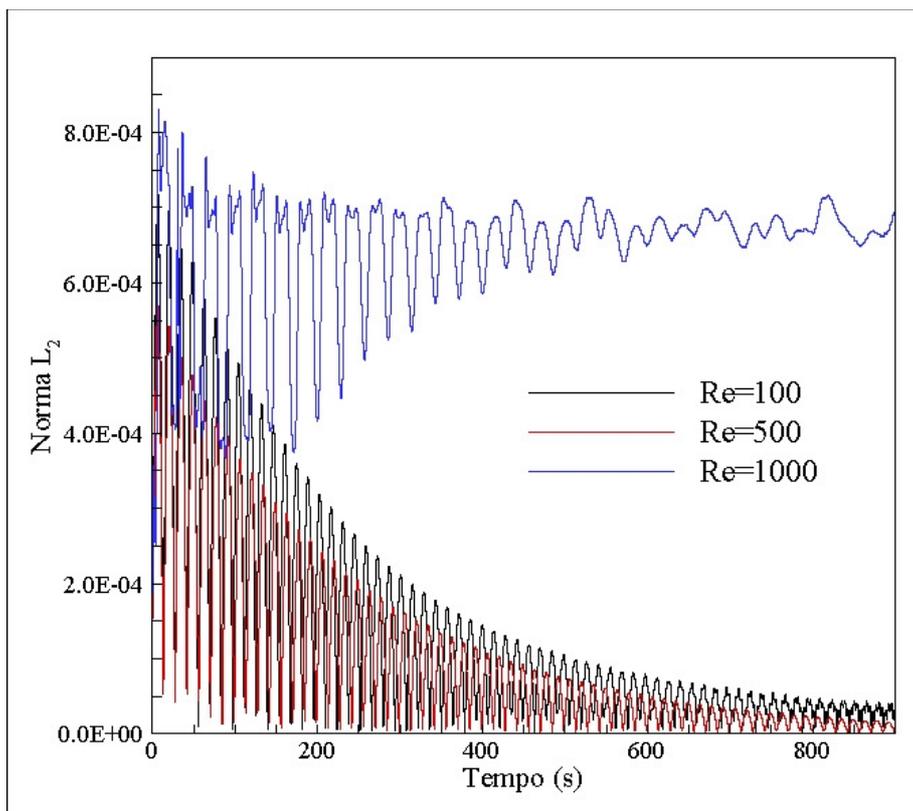


Figura 5.37 – Evolução temporal da norma L_2 para a Estrutura Flexível I sujeita ao escoamento com diferentes números de Reynolds.

Analisando a Fig. 5.37 tem-se que nesta simulação os erros quantificados pela norma L_2 são pequenos. Observaram-se erros menores para os números de Reynolds mais baixos e um maior em torno de $7,0 \times 10^{-4}$, para o número de Reynolds mais alto, o que pode ser explicado devido à magnitude das oscilações estruturais.

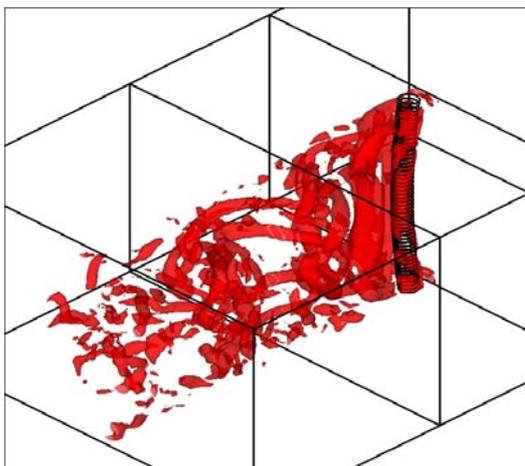
5.3.3. Caso 3 – Estrutura Flexível II

A estrutura simulada nesta seção é mais flexível que a anterior. Nesta simulação objetivou-se avaliar o campo de escoamento ao redor da estrutura, bem como a resposta dinâmica da estrutura sujeita a uma excitação análoga à anterior. As propriedades físicas e geométricas da estrutura simulada são dadas na tabela abaixo.

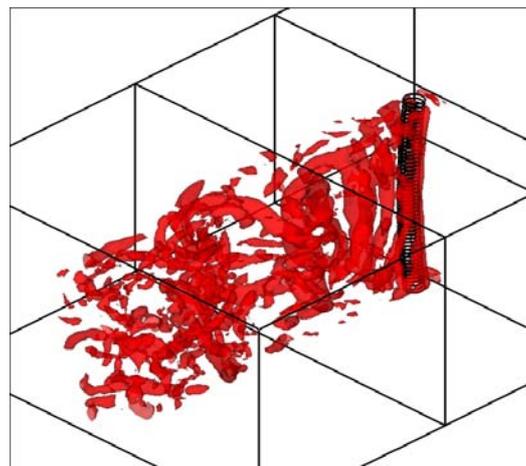
Tabela 5.4 Propriedades físicas e geométricas da Estrutura II

Propriedades da Estrutura	Valores
Razão de aspecto	10
Massa específica	7850 [Kg/m ³]
Rigidez Axial (EA)	5,014×10 ³ [N]
Rigidez a flexão (EI)	90,75 [Nm ²]
Rigidez a torção (GJ)	68,25 [Nm ² /rad]

As condições de contorno, bem como a discretização espacial e temporal são as mesmas empregadas no caso anterior. A Fig. 5.38 mostra a evolução temporal de isosuperfícies $Q=0,25$ do escoamento ao redor da estrutura imersa, para $Re=1.000$.



(a) t=800



(b) t=815

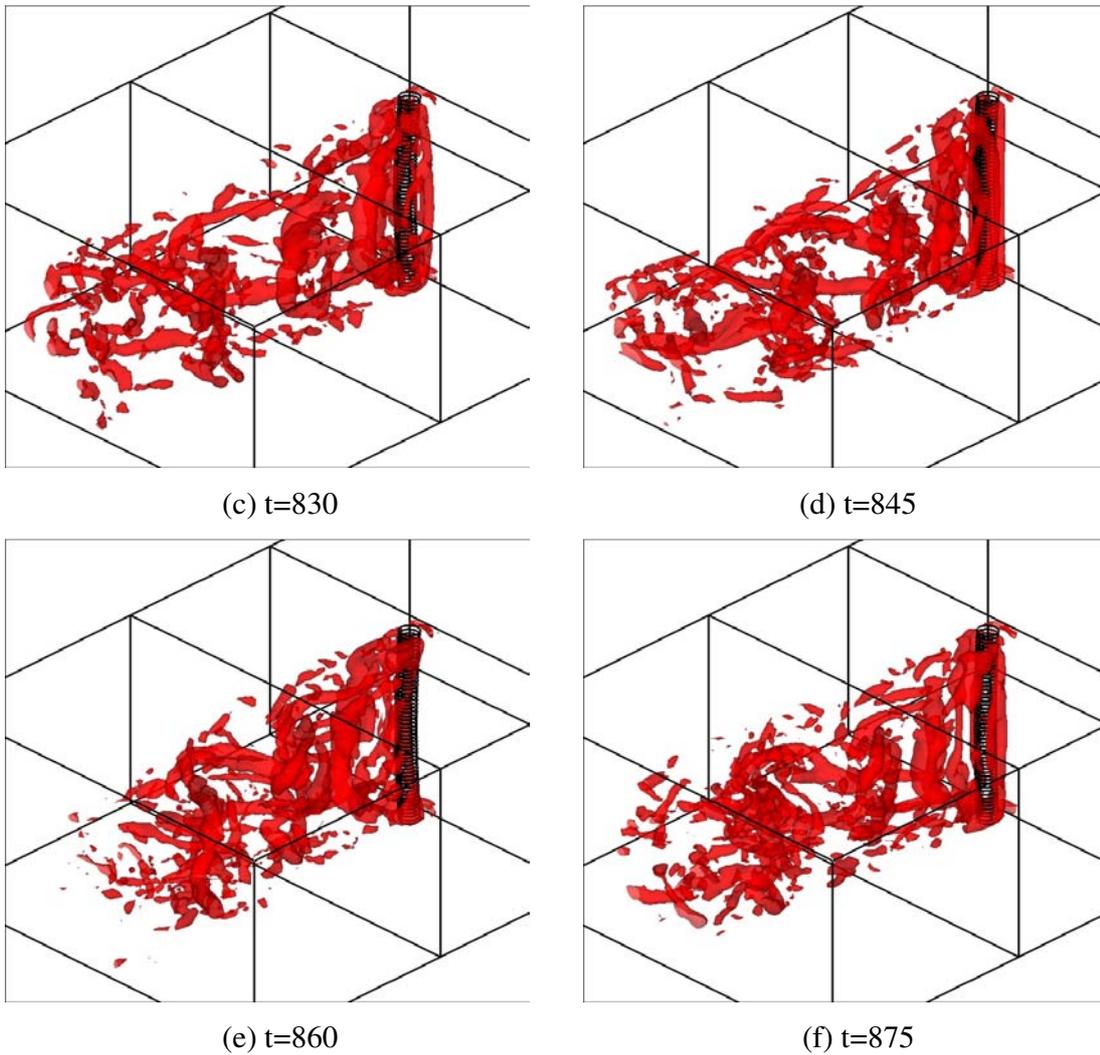
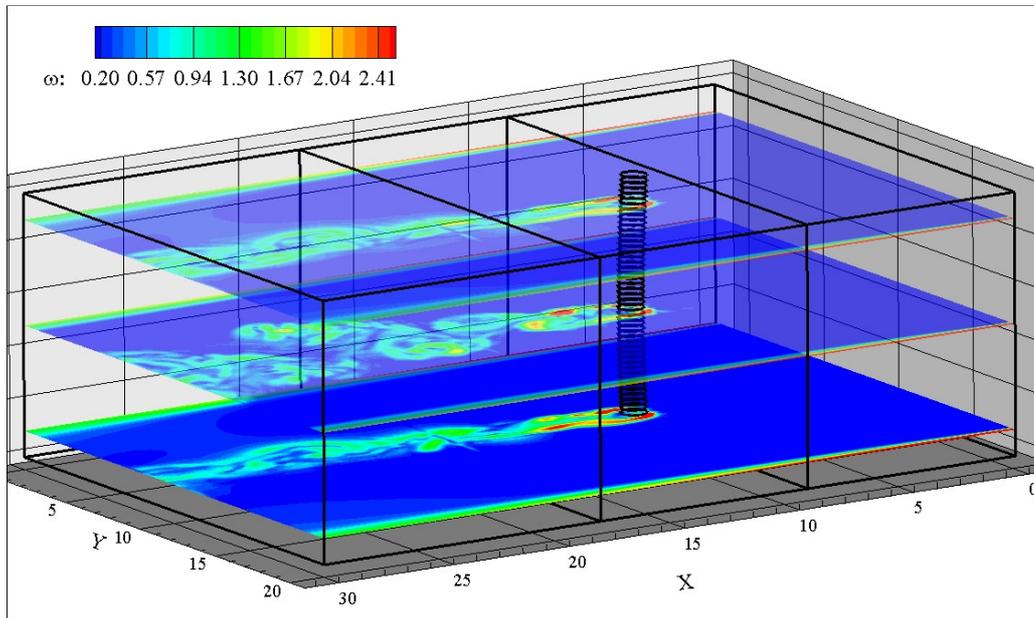


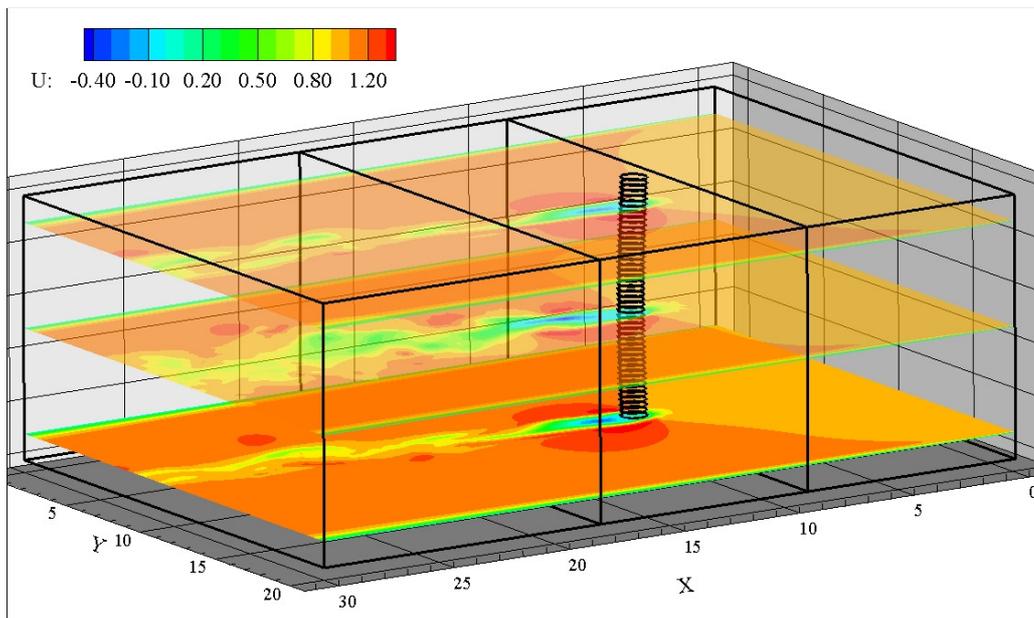
Figura 5.38 - Evolução temporal de isosuperfícies $Q=0,25$ para Estrutura Flexível II sujeito a escoamento com $Re=1.000$.

Diferentemente do caso anterior, em que o deslocamento estrutural era muito pequeno, nesta simulação, os deslocamentos passam a ser consideráveis, conforme pode-se observar na Fig. 5.38, na qual se percebe o movimento da estrutura no interior do fluido. Este movimento afeta, de forma mais pronunciada, a resposta acoplada de ambos os domínios, fluido e estrutural. Esse efeito fica ainda mais evidenciado nas figuras a seguir que são mostrados os coeficientes de arrasto e o deslocamento estrutural.

A Fig. 5.39 mostra em detalhes alguns planos seccionados ao longo do comprimento da estrutura imersa.



(a)

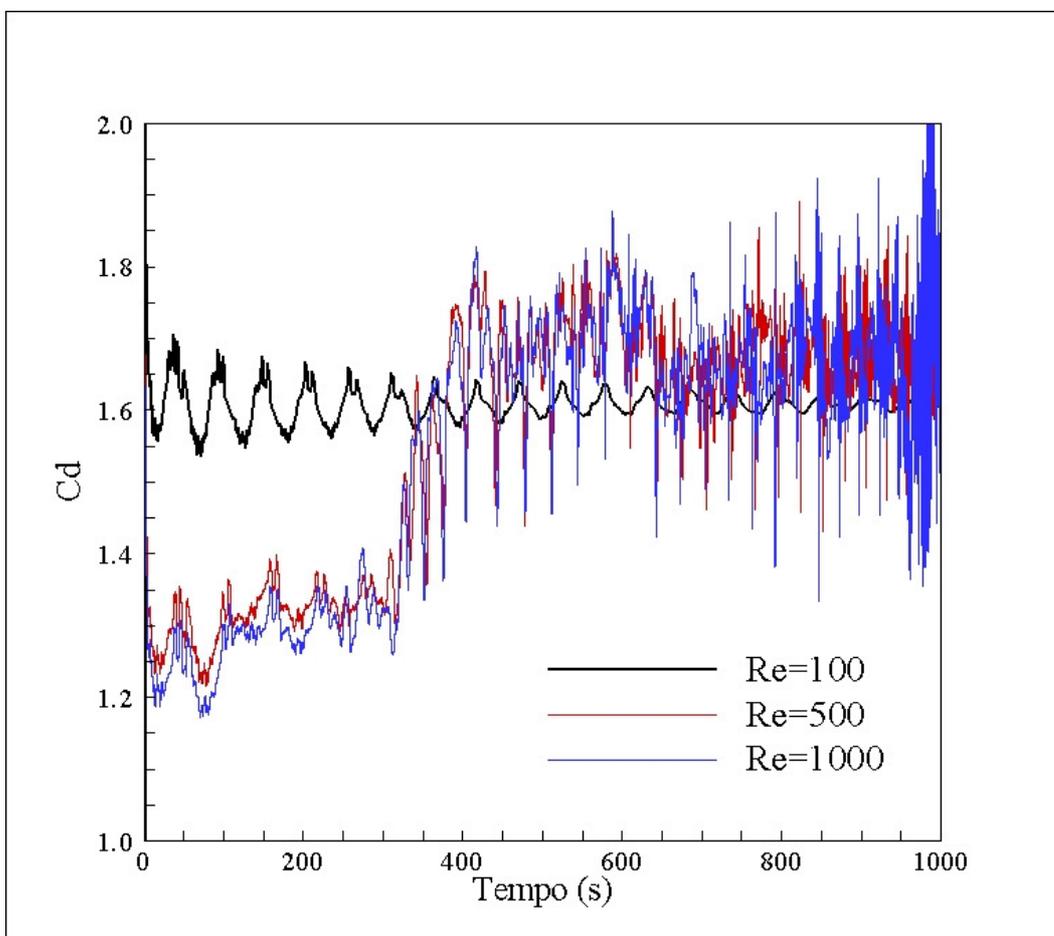


(b)

Figura 5.39 – Planos seccionados nas posições 1, 5 e 9 metros da direção z da Estrutura Flexível II sujeito a $Re=1.000$ e $t=875$ s: (a) campo de vorticidade e (b) campo de velocidade.

Observa-se na figura anterior, que de forma análoga ao caso anterior, o nível de vorticidade está maior no ponto em que o fluido se encontra com a estrutura imersa e a jusante do cilindro, devido à esteira formada, que pode ser observada no plano localizada na posição $Z=5$ m. Destaca-se que, nesta figura, é possível notar, com auxílio deste mesmo plano, com mais clareza do que na simulação anterior, Fig. 5.28, a formação de vórtices contra-rotativos a jusante da estrutura imersa para o campo de vorticidade.

Na Fig. 5.40 são mostradas as evoluções dos coeficientes de arrasto longitudinal e transversal médio, para os diferentes valores do número de Reynolds considerados.



(a)

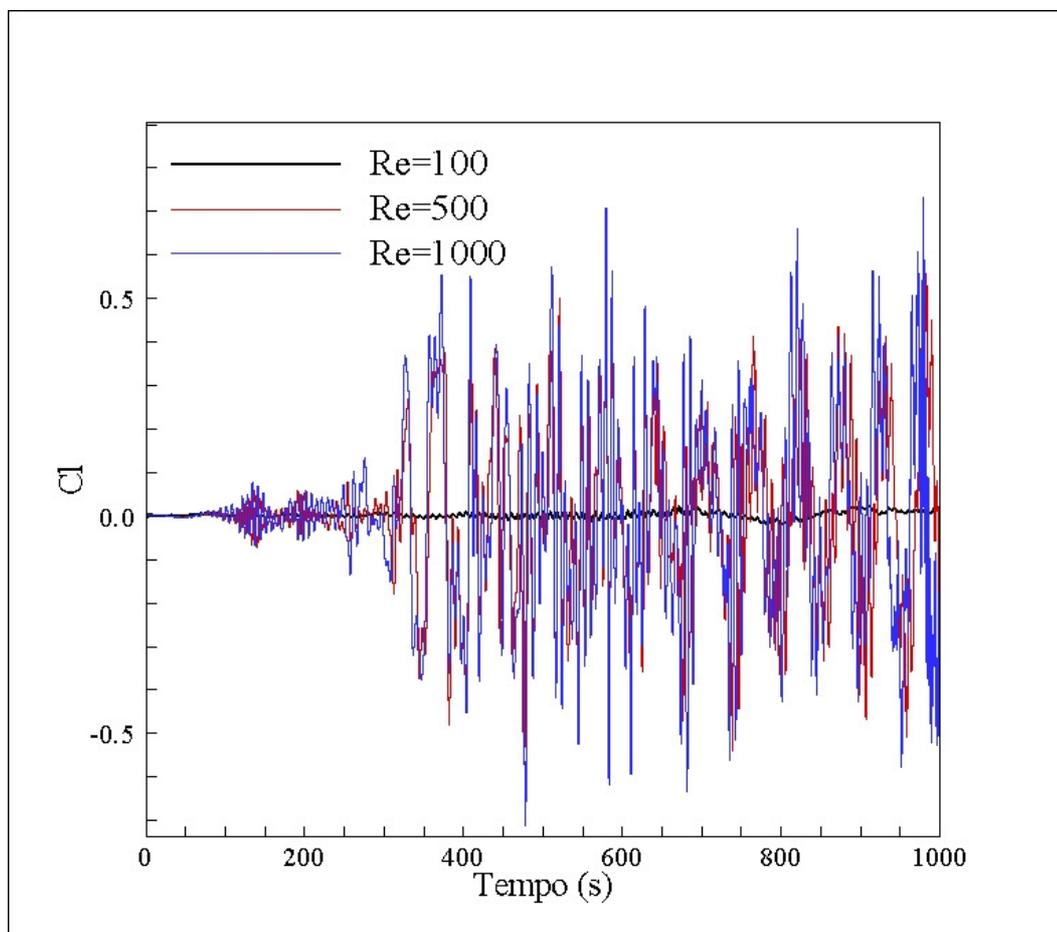
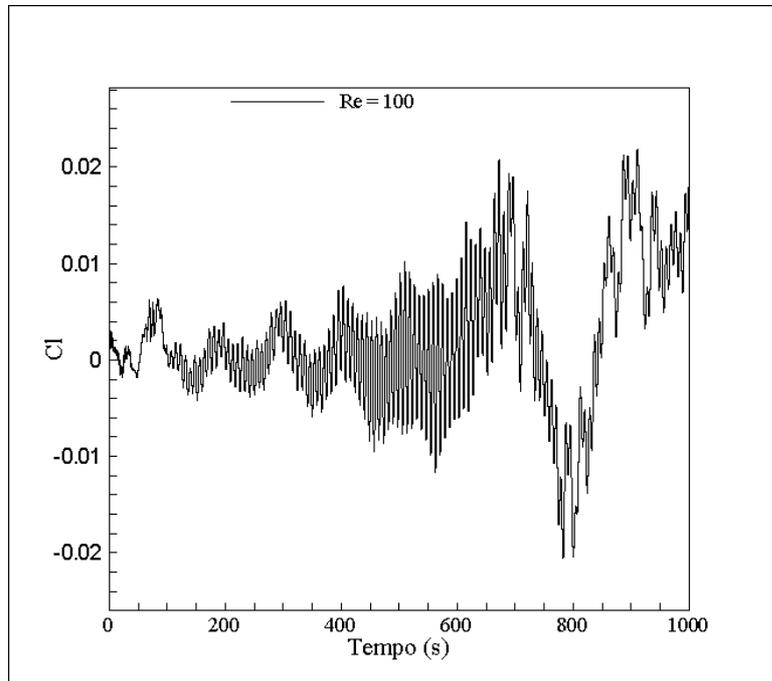
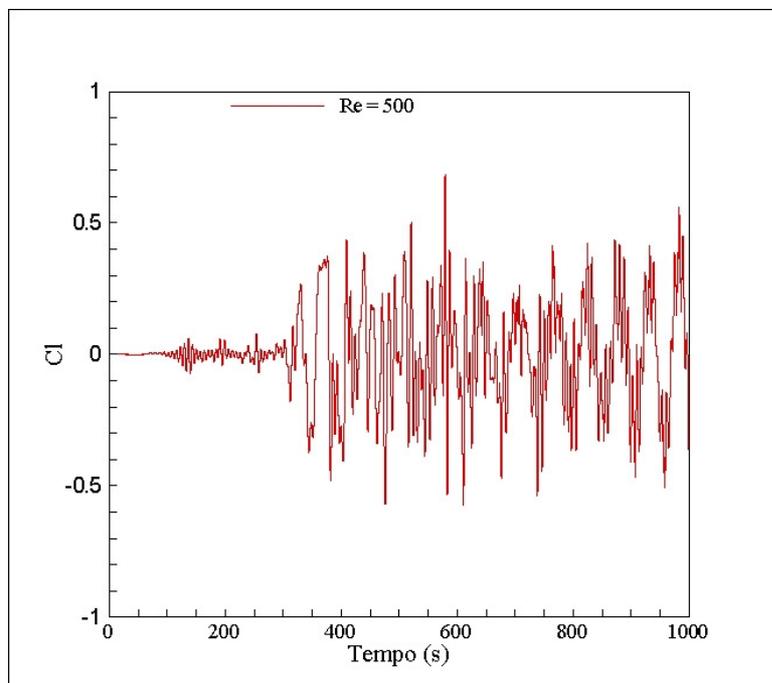


Figura 5.40 - Coeficientes médios de arrasto para estrutura Flexível II; Coeficientes de: (a) arrasto e (b) força transversal.

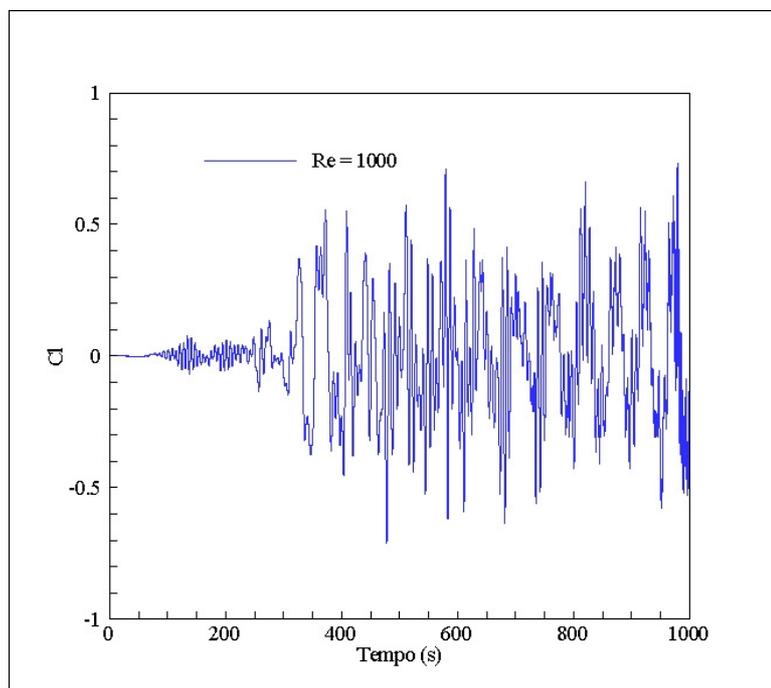
Como visto na Fig. 5.40 os coeficientes de força transversal estão sobrepostos, por esta razão são melhores detalhados na Fig. 5.41.



(a)



(b)

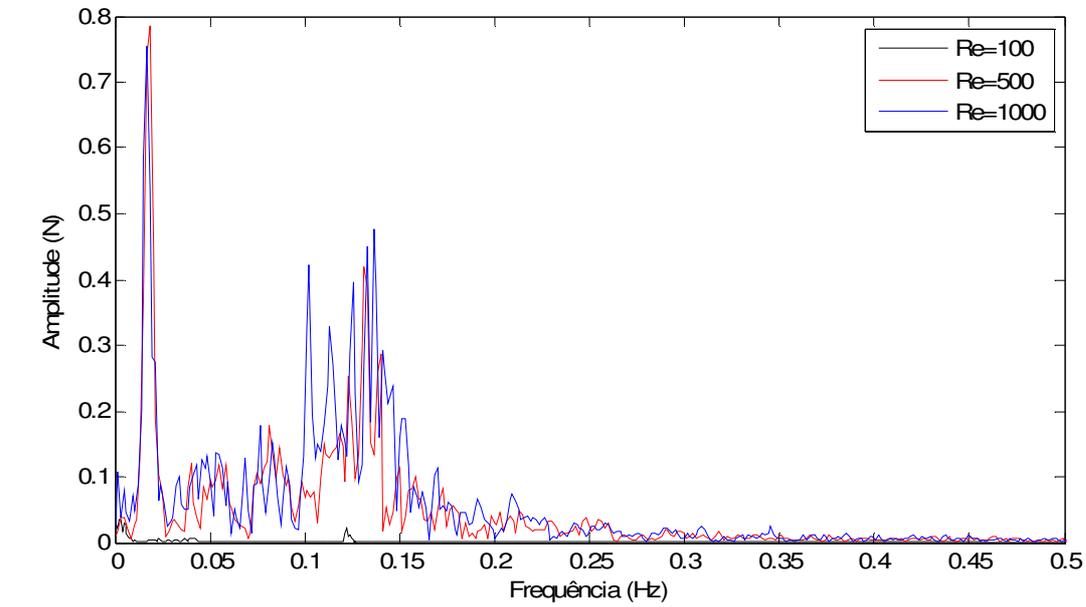


(c)

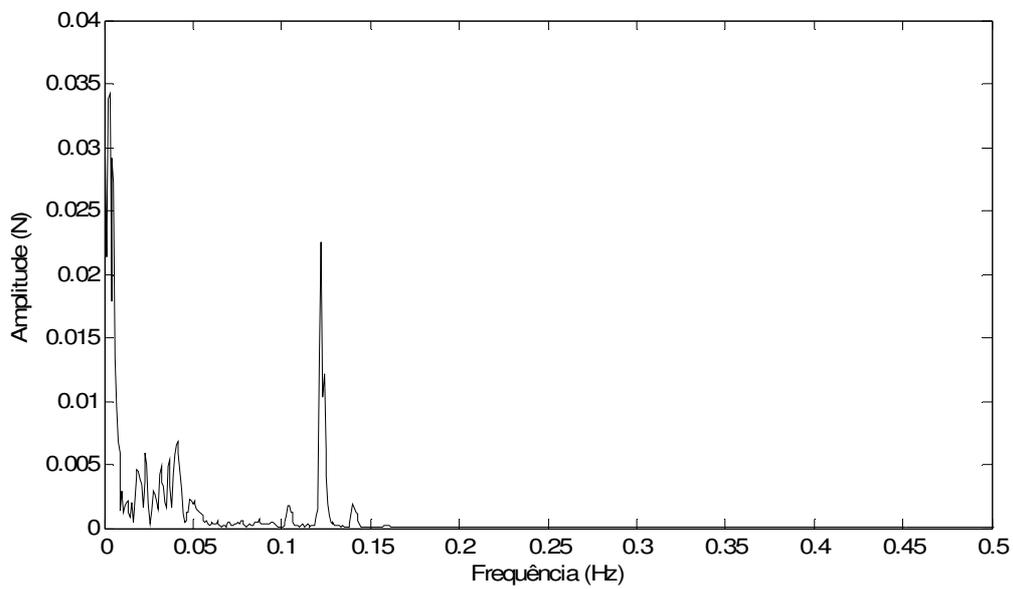
Figura 5.41 - Coeficientes médios da força transversal para estrutura Flexível II com: (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

Nas Fig. 5.41 (a)-(c) os coeficientes de força transversal são caracterizados pela presença de múltiplas frequências. Observa-se que, esta simulação se diferencia do caso anterior, em que apenas na Fig. 5.30 (c) para $Re=1.000$ essa característica foi observada.

Esta constatação fornece subsídios indicativos de como a rigidez estrutural e, portanto, os seus deslocamentos influenciam o escoamento ao seu redor e, assim, os coeficientes de força transversal. As frequência de excitação transversal (desprendimento de vórtices) para diferentes números de Reynolds são mostradas em detalhe na Fig. 5.42



(a)

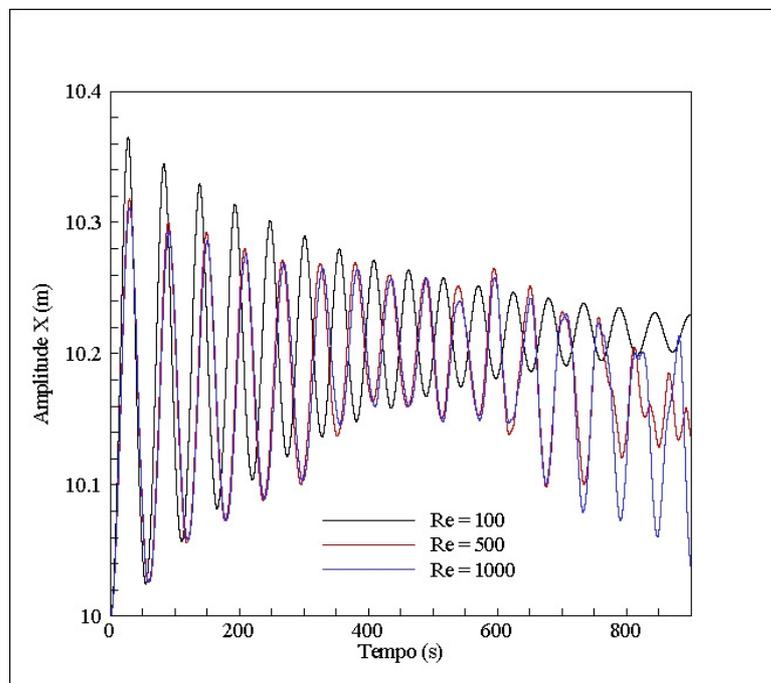


(b)

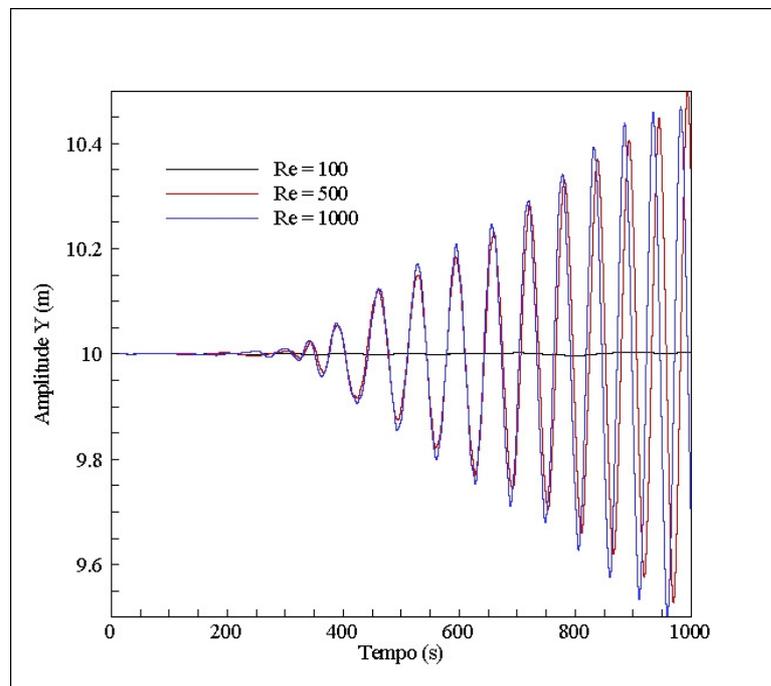
Figura 5.42- Freqüência de excitação obtidas a partir da força transversal média para: (a) $Re=100$, $Re=500$ e $Re=1.000$; (b) $Re=100$ (em detalhe)

No espectro de frequência acima, observa-se que para todos os números de Reynolds existem varias frequências de excitação estrutural, e que as frequências de maior amplitude apresentaram uma frequência mais baixa do às apresentadas no caso anterior, Fig. 5.31. Este fato está diretamente associado com a diminuição da rigidez da estrutura imersa.

A fim de comparar os deslocamentos estruturais obtidos para os três diferentes números de Reynolds, a Fig. 5.43 mostra a evolução temporal do deslocamento de um ponto estrutural posicionado a 4,80 m da extremidade inferior da estrutura, nas direções longitudinal e transversal.



(a)



(b)

Figura 5.43 – Evolução temporal do deslocamento na extremidade da Estrutura Flexível II sujeito ao escoamento com diferentes números de Reynolds: (a) Direção X e (b) direção Y

Observa-se na figura acima que, o deslocamento na direção transversal depende diretamente do número de Reynolds, havendo a tendência de que quando maior for este número, maior serão as amplitudes do deslocamento para uma mesma estrutura imersa, ou seja, as amplitudes aumentam com o incremento do número de Reynolds, como pode ser observado na Fig. 5.43b.

Entretanto, ao contrário do caso anterior, somente para a condição de escoamento com número de Reynolds igual 100 teve-se um decaimento completamente exponencial. Para os demais, entende-se que o incremento de deslocamento na direção transversal tenha afetado a forma de decaimento na direção longitudinal. Esse fenômeno fica melhor evidenciado nas Figs. 5.44, 5.45 e 5.46, em que os deslocamentos nestas duas direções são mostrados.

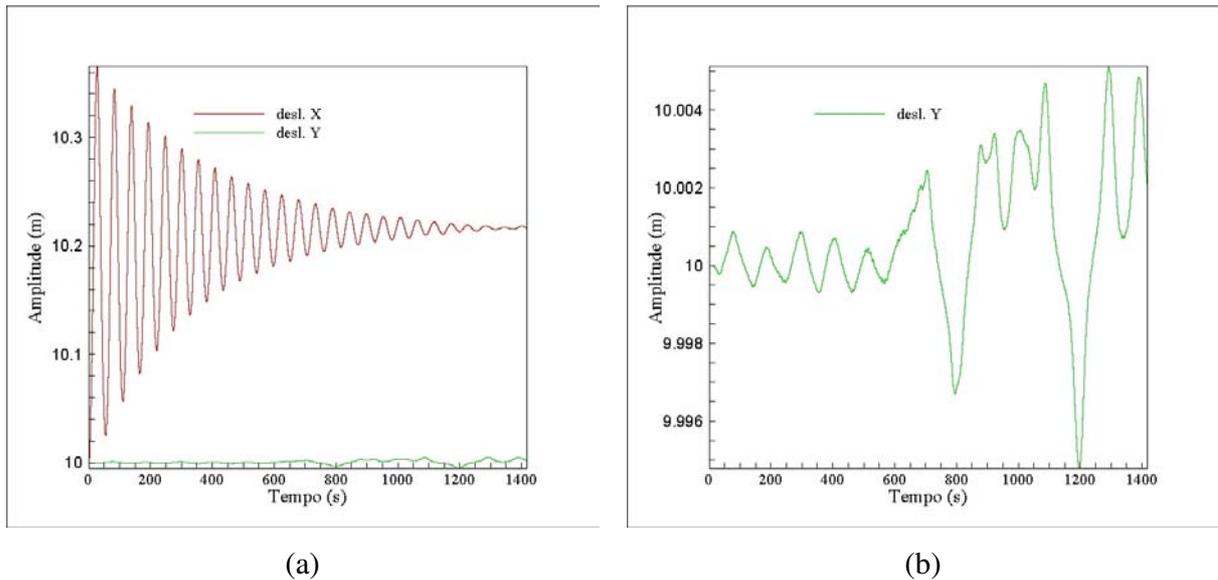


Figura 5.44 – Deslocamento estrutural para estrutura Flexível II para $Re=100$: (a) direção longitudinal e transversal e (b) em detalhe o deslocamento transversal.

Na Fig. 5.44 nota-se que o deslocamento na direção X, para $Re=100$, é muito maior que o deslocamento na direção transversal e, portanto, o deslocamento transversal não afeta substancialmente a resposta na direção normal. Por outro lado, a Fig. 5.45 apresenta os deslocamentos estruturais nestas duas direções para $Re=500$. Observa-se um decaimento exponencial na direção X até aproximadamente 400 s; a partir daí, o aumento das amplitudes de deslocamento na direção transversal, provocado pelo desprendimento de vórtices e as forças hidrodinâmicas associadas a este, descaracterizam o decaimento.

Este fenômeno continua sendo observado na Fig. 5.46, para $Re=1.000$, na qual observa-se um decaimento no deslocamento na direção X até aproximadamente 450 s; a partir daí, com o aumento do deslocamento na direção transversal, o movimento nesta direção passa a não ser mais amortecido.

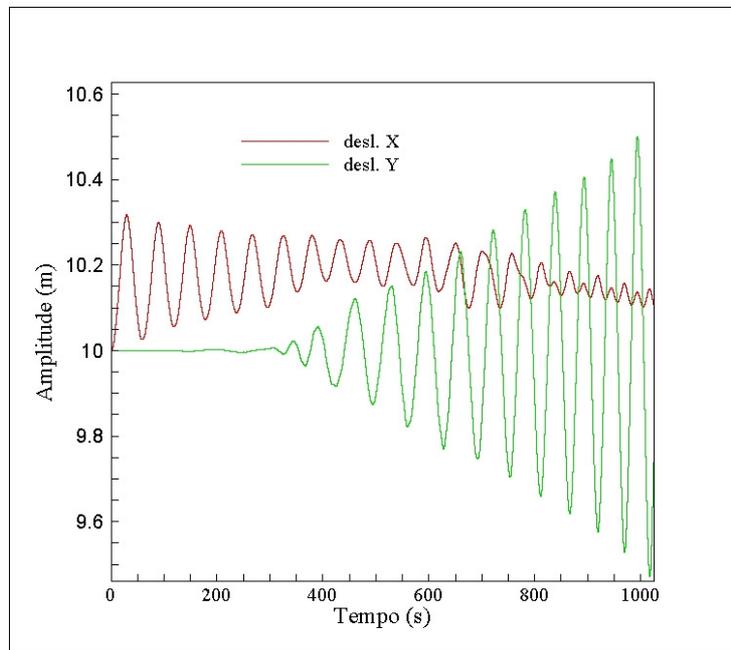


Figura 5.45 - Deslocamento estrutural na direção normal e transversal, para $Re=500$.

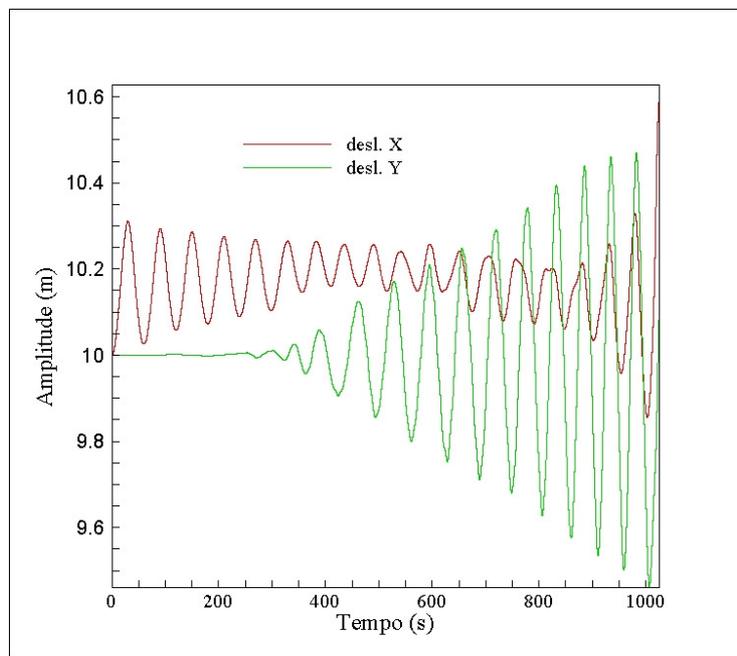
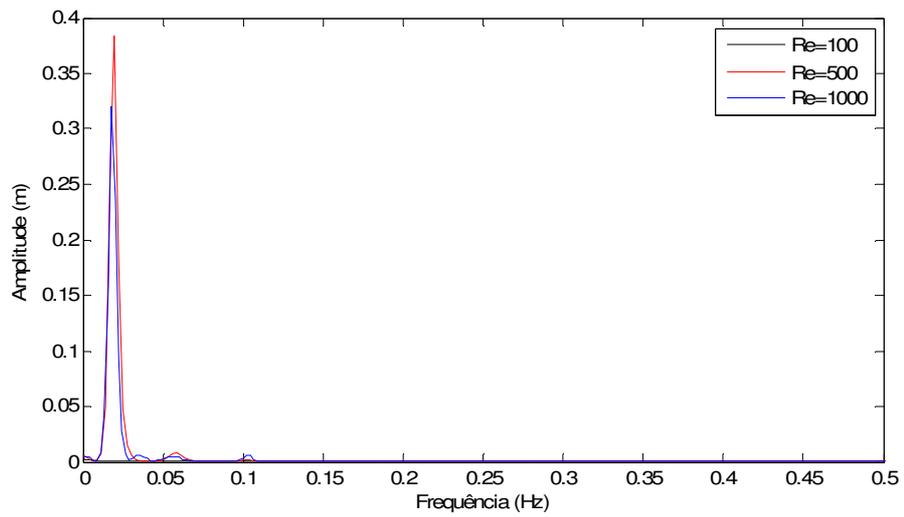
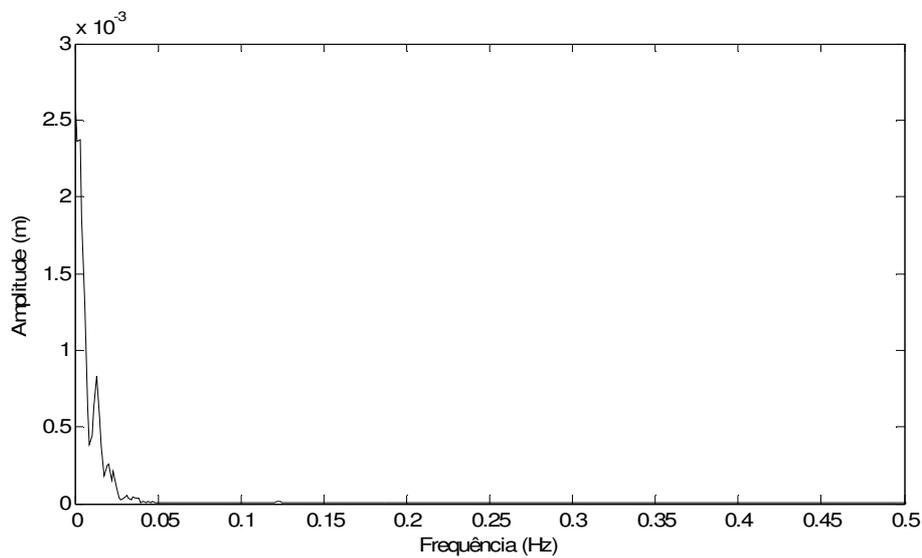


Figura 5.46 - Deslocamento estrutural na direção normal e transversal, para $Re=1.000$.

Os espectros em frequências dos deslocamentos transversais para os três valores do número de Reynolds considerados são mostrados nas Fig. 5.47.



(a)



(b)

Figura 5.47 - Frequências de oscilação dos deslocamentos transversais para: (a) $Re=100$, $Re=500$ e $Re=1.000$ e (b) $Re=100$ (em detalhe)

Na Fig. 5.47 observa-se um espectro em frequência em que algumas das frequências presentes na força de excitação não estão sendo mostradas. Este fato está diretamente associado ao ponto de aquisições destes sinais, dado que o espectro mostrado na Fig. 5.42 é gerado a partir da força média, enquanto o espectro mostrado na Fig. 5.47 é obtido a partir do deslocamento pontual. Ressalta-se ainda, que os coeficientes da força transversal não estavam em regime quando o algoritmo divergiu, e, portanto o deslocamento transversal ainda se apresentava em desenvolvimento, como mostrado nas Figs. 5.45 e 5.46.

Na Fig. 5.48 são mostrados os deslocamentos estruturais em instantes coincidentes com os tempos discretos considerados para apresentação das isosuperfícies na Fig. 5.38.

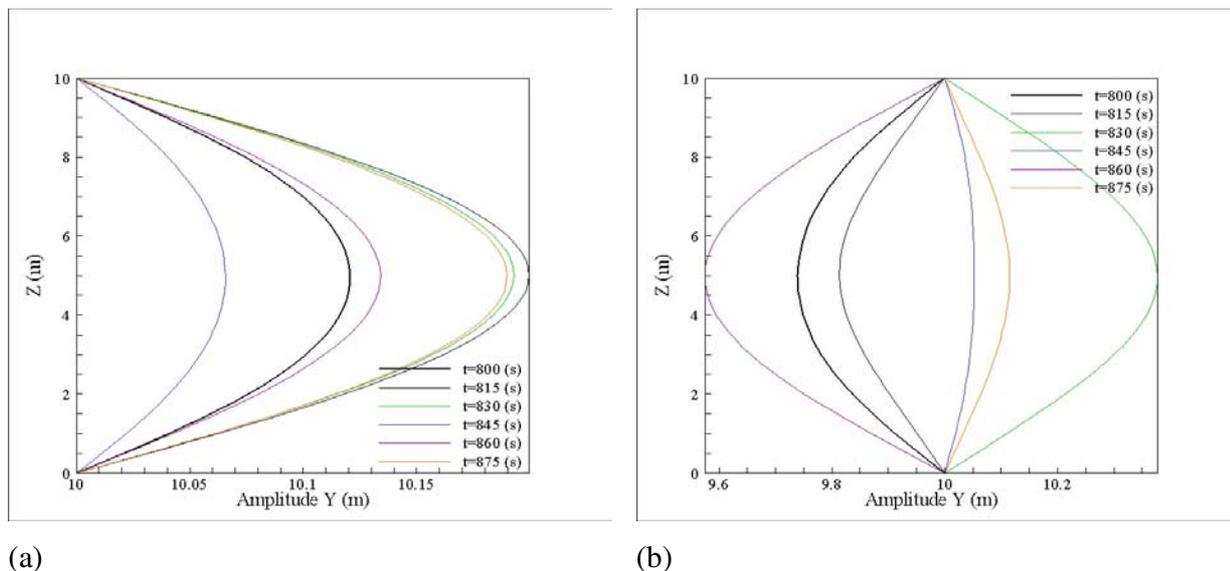


Figura 5.48 - Deslocamentos devidos à interação fluido-estrutural para tempos discretos coincidentes com a Fig. 5.38, para $Re=1.000$ e a Estrutura Flexível II: (a) Plano XZ e (b) Plano YZ

Na figura acima é possível observar que a estrutura imersa está sujeita a grandes deslocamentos e rotações tanto na direção longitudinal quanto na direção transversal, devido à ação das forças hidrodinâmicas provocadas pelo escoamento. Ressalta-se ainda que, os deslocamentos transversais são bem maiores que os longitudinais.

A Fig. 5.49 apresenta a norma L_2 . Nota-se em torno de 1.000 s tem-se o início de instabilidade, e sua propagação faz com que o método de fronteira imersa venha a divergir. Este

fato está diretamente associado ao movimento da estrutura, que devido a sua baixa flexibilidade, e seus grandes deslocamentos e rotações, faz com que a estrutura realize um movimento mais complexo, o que afeta diretamente o comportamento do escoamento que passa ao seu redor. Por esta razão, e devido às condições de discretização temporal e espacial, o algoritmo de resolução do domínio fluido passou a divergir.

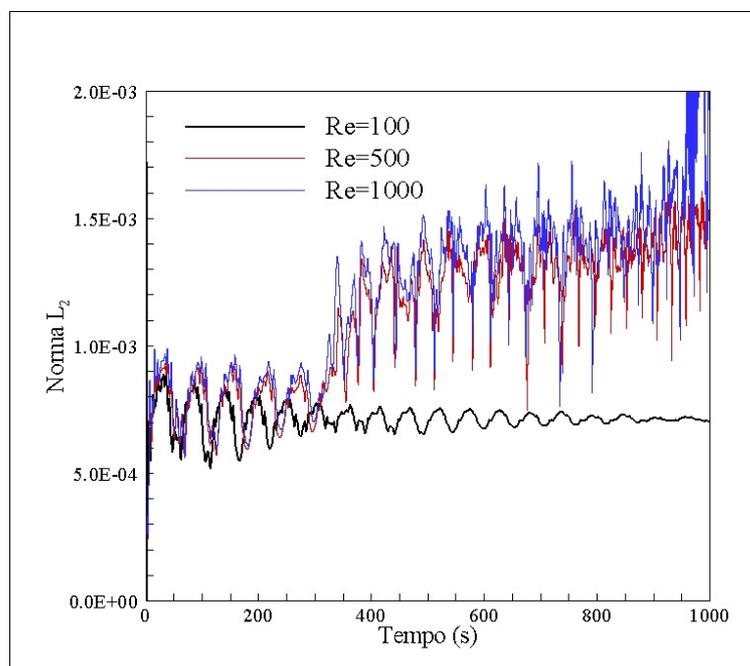


Figura 5.49 – Evolução temporal da Norma L_2 para a Estrutura Flexível II sujeita ao escoamento com diferentes números de Reynolds.

5.3.4. Caso 4 – Estrutura Flexível III

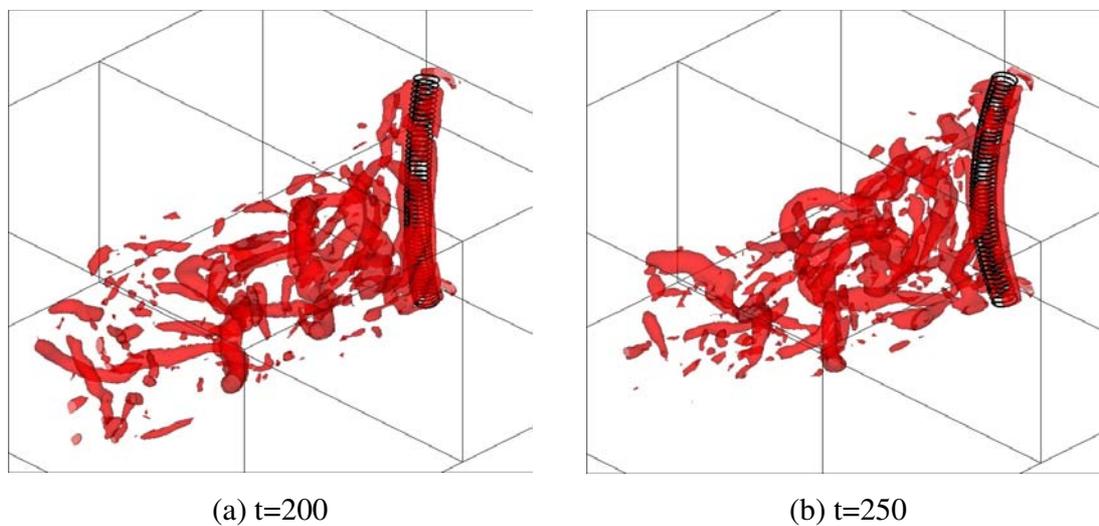
Nesta seção considera-se uma estrutura cilíndrica ainda mais flexível que as anteriores, visando à representação em que as não linearidades e as perturbações provocadas pelo movimento da estrutura sobre o fluido são maiores. De forma análoga ao caso anterior, nesta simulação não é possível atingir a convergência numérica do algoritmo acoplado. Este fato está diretamente associado ao aumento dos deslocamentos da estrutura devido à diminuição da rigidez da estrutura de teste.

As propriedades físicas e geométricas da estrutura simulada são dadas na tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Propriedades físicas e geométricas da Estrutura III

Propriedades da Estrutura	Valores
Razão de aspecto	10
Massa específica	7850 [Kg/m ³]
Rigidez Axial (EA)	501,39 [N]
Rigidez a flexão (EI)	9,07 [Nm ²]
Rigidez a torção (GJ)	6,82 [Nm ² /rad]

As condições de contorno, bem como a discretização espacial e temporal utilizadas nas simulações são idênticas àquelas consideradas no caso anterior. A Fig. 5.50 mostra a evolução temporal de isosuperfícies ($Q=0,5$) do escoamento ao redor de estrutura imersa, para $Re=1.000$.



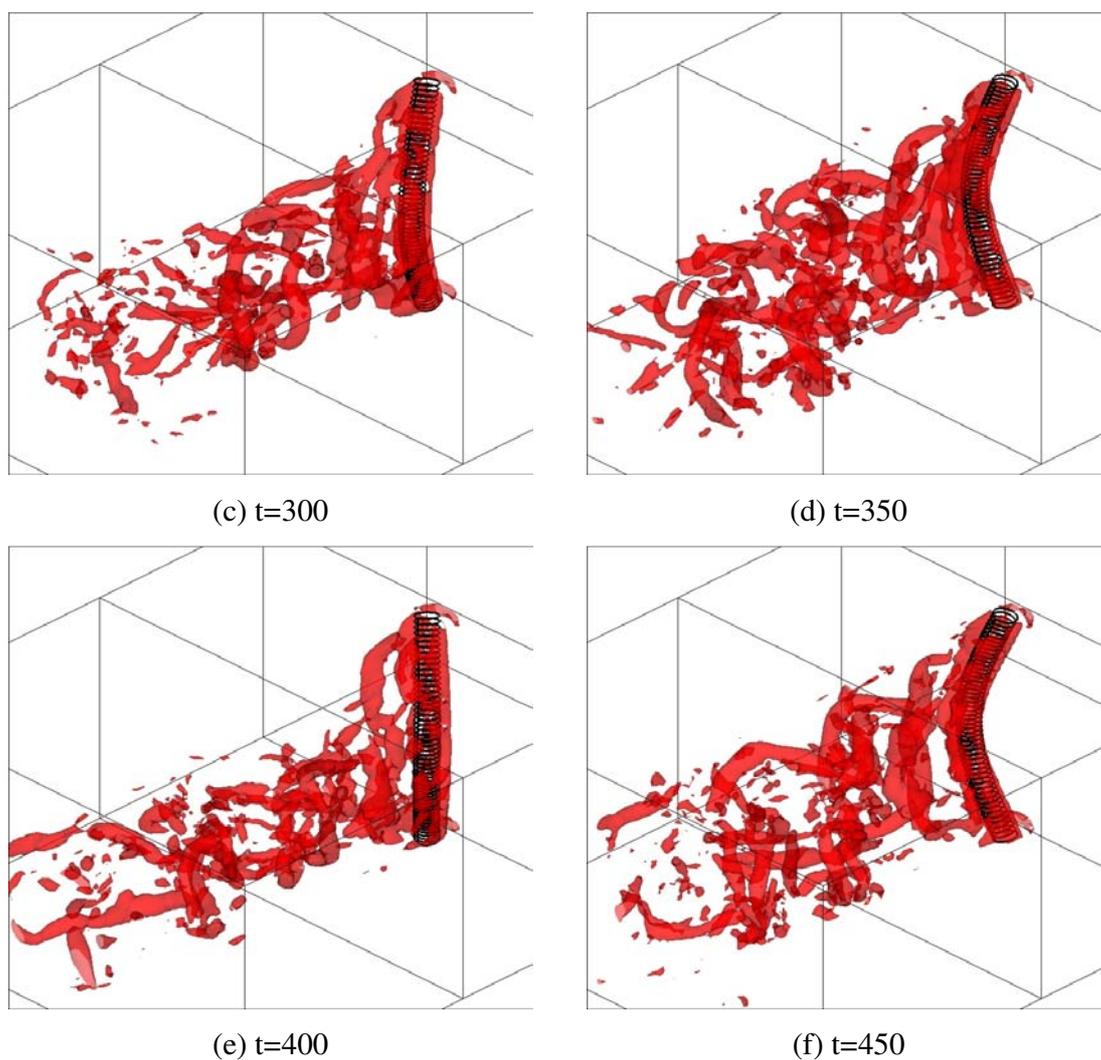
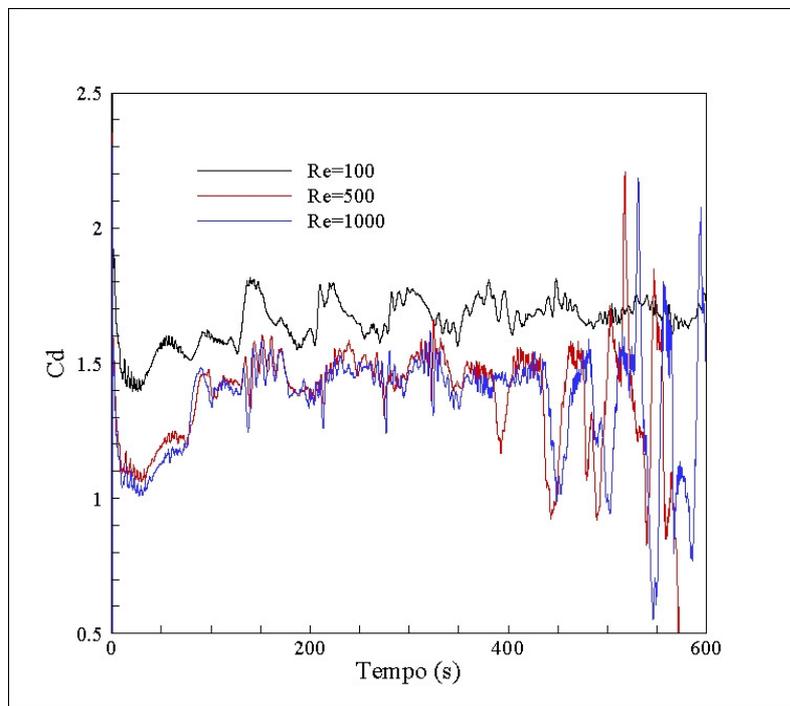


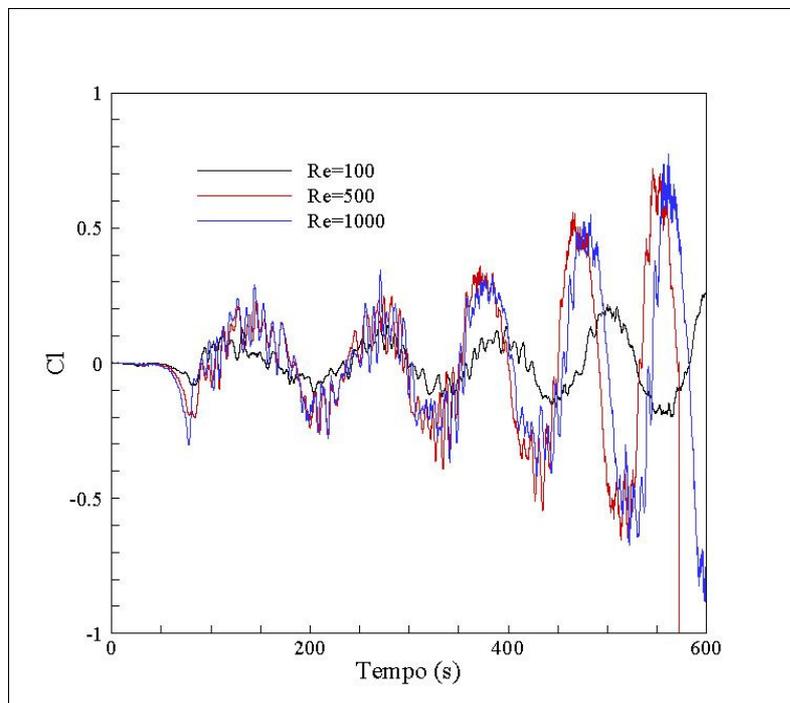
Figura 5.50 – Evolução temporal de isosuperfícies ($Q=0,25$) para Estrutura Flexível III sujeito a escoamento com $Re=1.000$.

Na Fig. 5.50 observam-se os grandes deslocamentos a que a estrutura fica sujeita, devido às forças hidrodinâmicas provocadas pelo escoamento. Nota-se claramente como o movimento estrutural, tanto na direção longitudinal como transversal, está afetando o escoamento à sua volta.

Na Fig. 5.51 são mostradas as evoluções dos coeficientes de arrasto longitudinal e transversal médio, para os diferentes valores do número de Reynolds considerados



(a)



(b)

Figura 5.51 - Coeficientes médios de arrasto para estrutura Flexível III; Coeficientes de: (a) arrasto e (b) força transversal.

Nas Fig. 5.51 (a)-(c) os coeficientes de força transversal são caracterizados pela presença de múltiplas frequências. De forma análoga ao caso anterior, é evidenciado que a diminuição da rigidez estrutural e por sua vez, o aumento dos deslocamentos realizados pela estrutura, influenciaram o escoamento ao seu redor e, assim, os coeficientes de arrasto e força transversal, e a frequências de desprendimento de vórtice para os diferentes números de Reynolds.

Para melhor detalhar as frequências de excitação transversal (desprendimento de vórtices) para diferentes números de Reynolds, a Fig. 5.52 mostra o espectro de frequências obtido a partir da somatória de forças transversais aplicadas a cada “fatia” do cilindro.

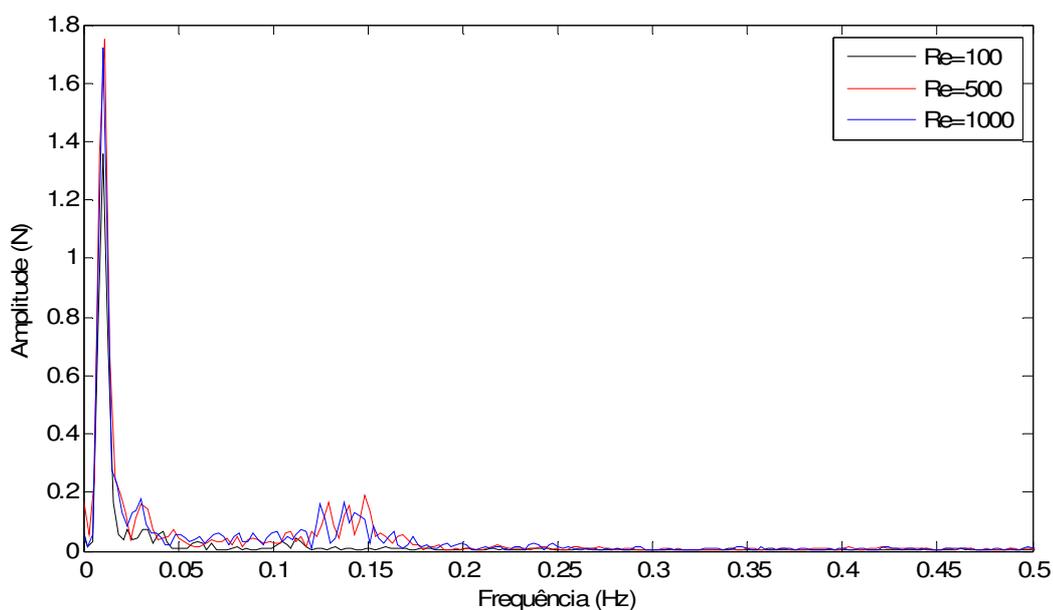


Figura 5.52- Frequências de excitação obtidas a partir da força transversal média para: (a) Re=100, Re=500 e Re=1.000.

Na Fig. 5.53 pode-se observar a evolução temporal do deslocamento na direção X de um ponto nodal posicionado a 4,80 m da extremidade inferior da estrutura, para os três diferentes números de Reynolds considerados.

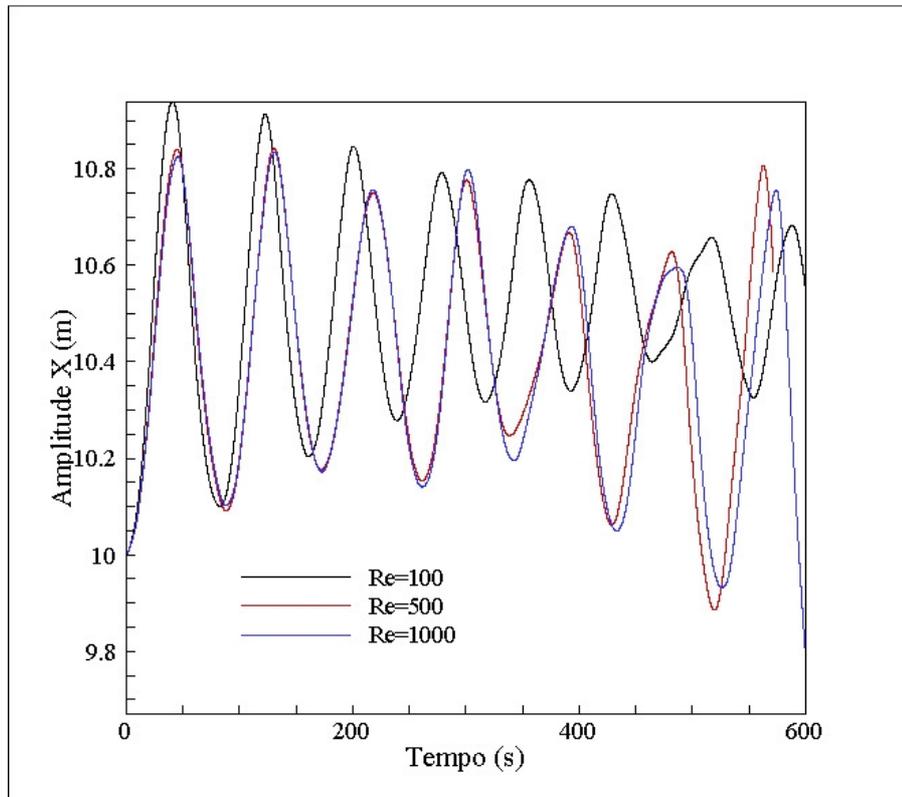
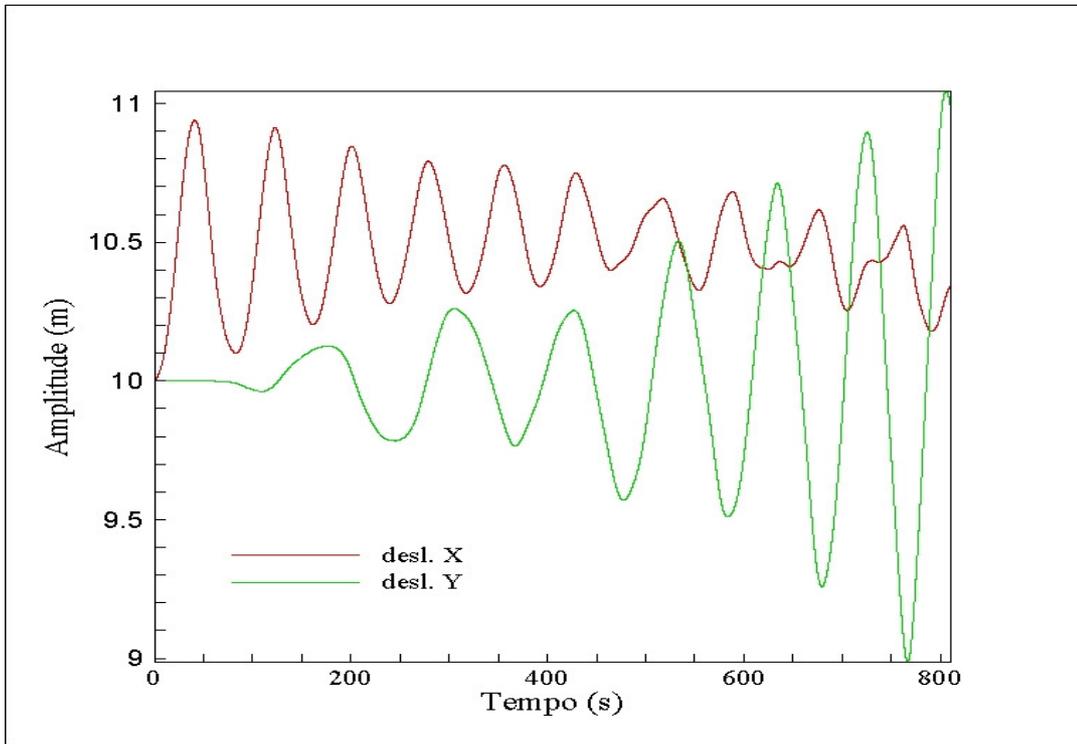


Figura 5.53 - Evolução temporal do deslocamento na extremidade da Estrutura Flexível III sujeito ao escoamento com diferentes números de Reynolds na direção X.

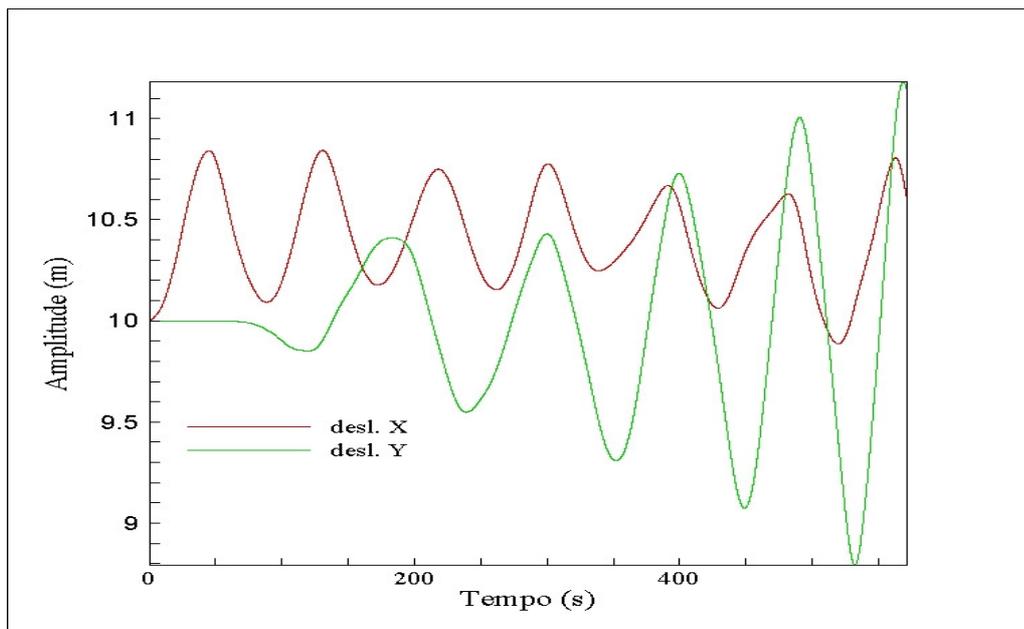
De forma análoga ao observado do caso anterior, somente o deslocamento para a estrutura sujeita ao escoamento com número de Reynolds igual 100 apresentou inicialmente um decaimento exponencial; para os demais casos, o incremento do deslocamento na direção transversal afetou o deslocamento na direção longitudinal, onde não se observou qualquer tipo de decaimento.

Devido à complexidade do movimento estrutural e às condições de discretização temporal e espacial, o algoritmo de resolução do domínio fluido passou a divergir a partir de 550s de simulação. Esta característica será evidenciada mais adiante, observando a evolução da norma L_2 . Entretanto os deslocamentos estruturais no interior do escoamento foram superiores a 15 % do comprimento total do cilindro. Isso evidencia a não linearidade geométrica imposta ao cilindro flexível, devido aos grandes deslocamentos e rotações impostas pelas forças hidrodinâmicas provocadas pelo escoamento.

A magnitude dos deslocamentos transversais em relação aos deslocamentos longitudinais são melhores evidenciados na Fig. 5.54.



(a)



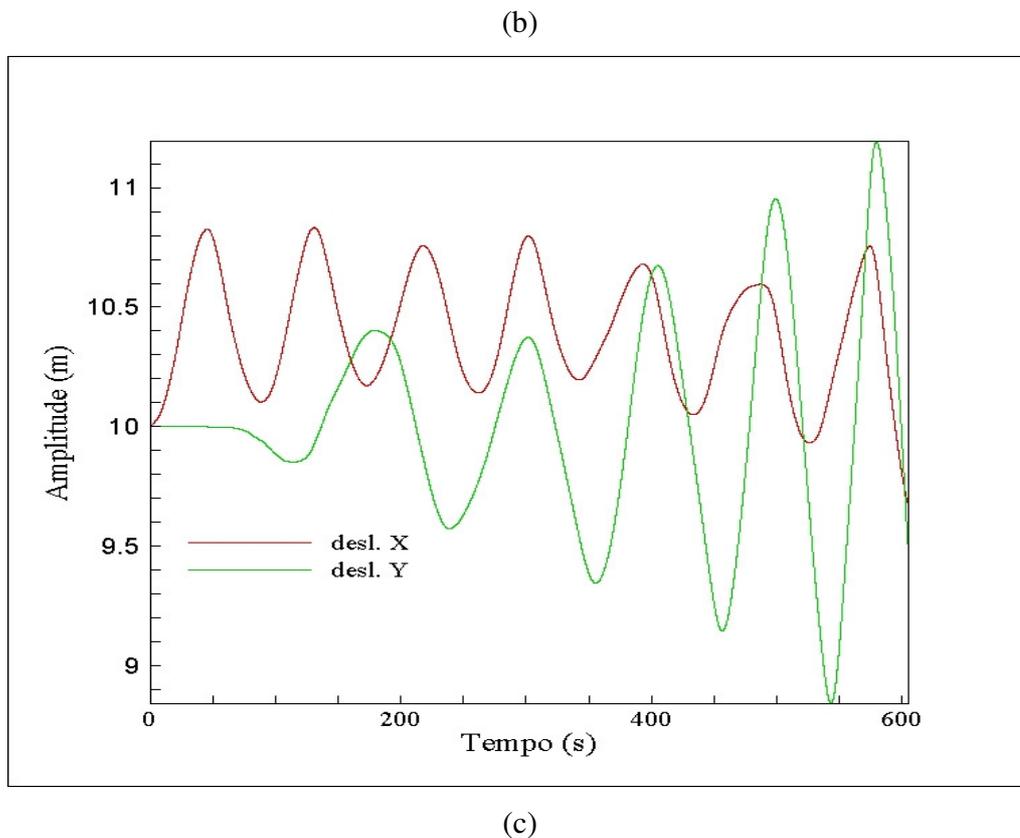


Figura 5.54 - Deslocamento estrutural nas direções normal e transversal: (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

Na Fig. 5.55 é apresentada a comparação dos deslocamentos transversais para os três diferentes números de Reynolds. Assim como nos casos anteriores um aumento no número de Reynolds de 100 para 500 fez com o deslocamento transversal aumentasse consideravelmente. O que não ocorreu quando o número de Reynolds foi aumentado para 1.000. Observa-se no caso anterior, em que a estrutura era um pouco mais rígida, que com esse mesmo aumento no número de Reynolds, mostrado na Fig. 5.44, houve um pequeno incremento no deslocamento transversal. Diferentemente da primeira estrutura simulada, onde esse mesmo incremento provocou um aumento considerável no deslocamento transversal para estrutura. Portanto, nota-se que este aumento de deslocamento transversal também está associado à rigidez da estrutura imersa no meio fluido, dado que as únicas mudanças, nos três casos simulados, dizem respeito apenas à diminuição da rigidez estrutural. Para uma completa caracterização deste fenômeno torna-se necessária a realização de mais algumas simulações, que não serão abordados neste trabalho.

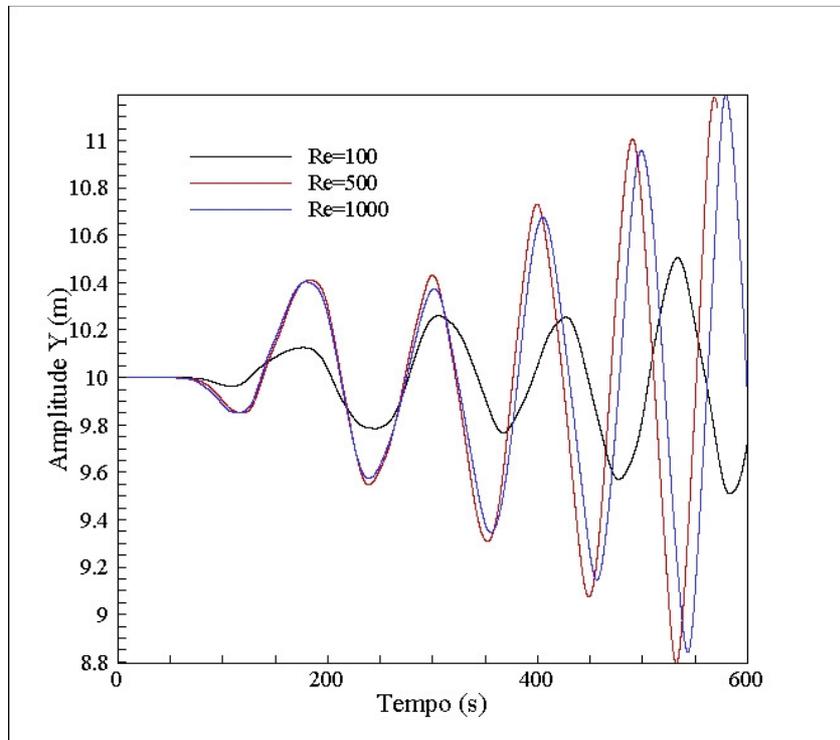


Fig. 5.55- Deslocamento estrutural na direção transversal para diferentes Reynolds.

Os deslocamentos da estrutura nas direções longitudinal e transversal ao escoamento são mostrados nas Figs. 5.55 e 5.56, incluindo as rotações das fatias do cilindro. Este procedimento é utilizado para evidenciar a transferência de informações relativas às grandezas cinemáticas entre os dois meios, estrutural e fluido, e comprovar a coerência dos campos de deslocamentos e rotações obtidos nas simulações. Vale ressaltar que os deslocamentos estruturais foram adquiridos em instantes de tempo coincidentes com os tempos discretos utilizados para ilustrar do escoamento ao redor da estrutura na Fig. 5.50.

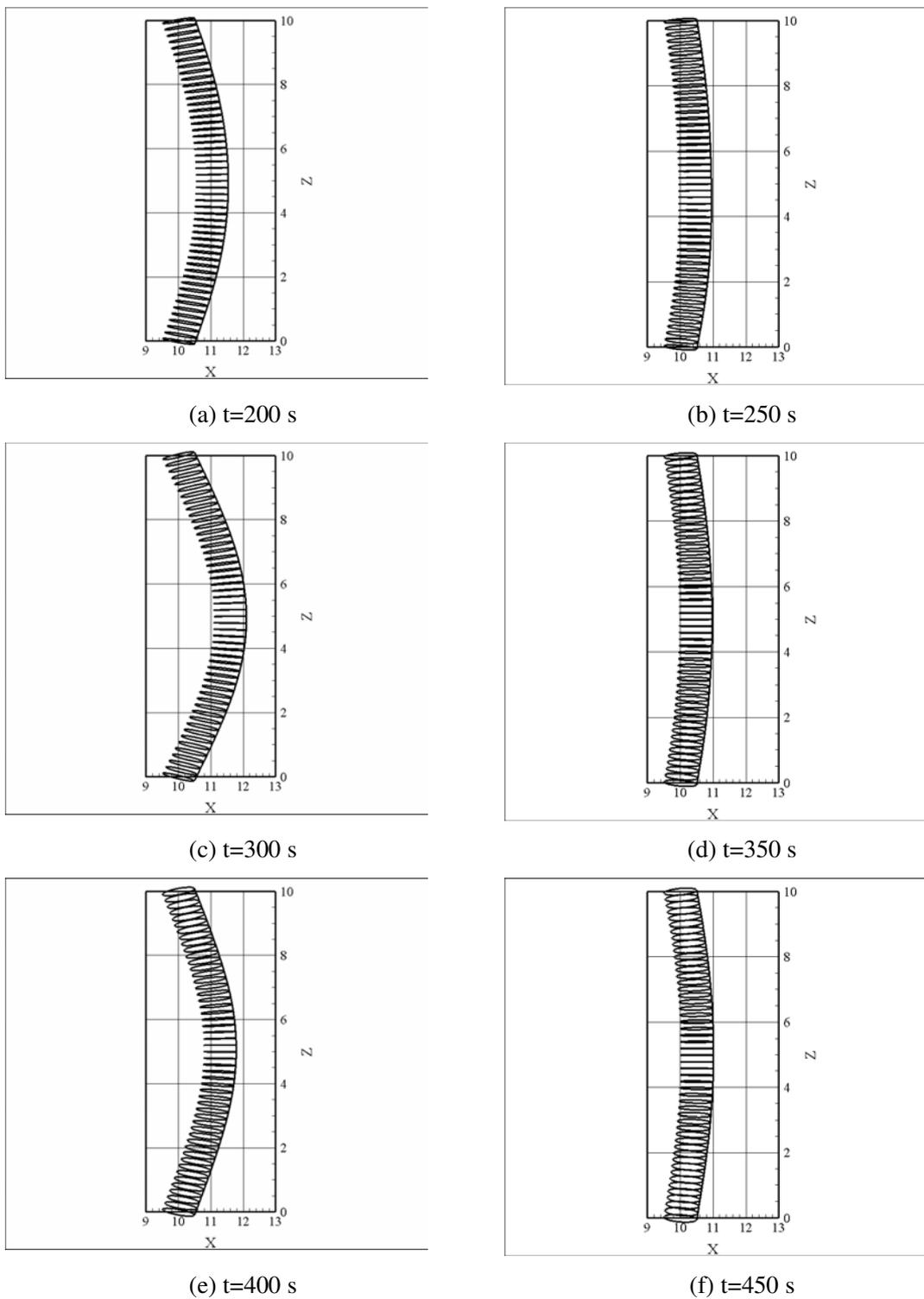


Figura 5.56 – Deslocamentos devidos à interação fluido-estrutural para tempos discretos coincidentes com a Fig. 5.50, para $Re=1.000$ e a Estrutura Flexível III no Plano XZ

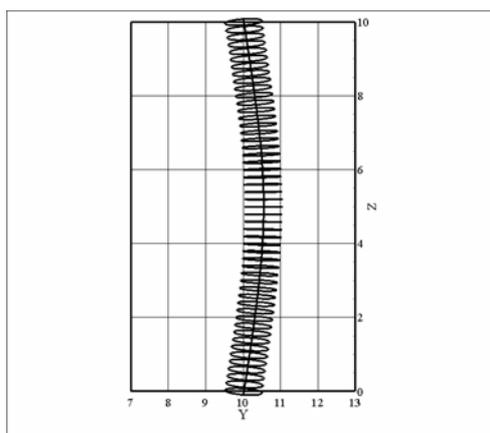
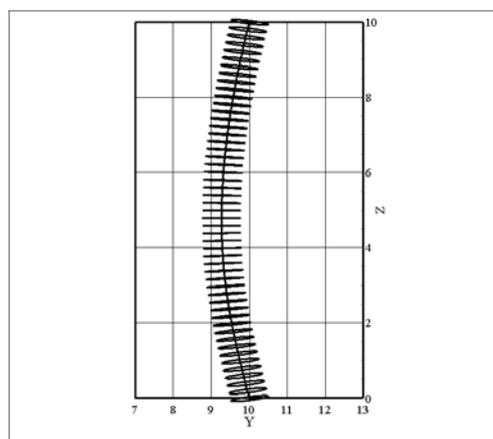
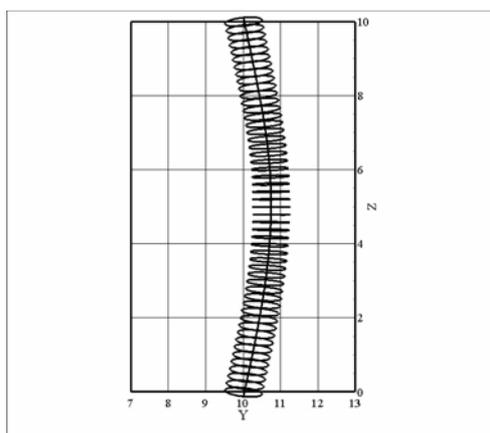
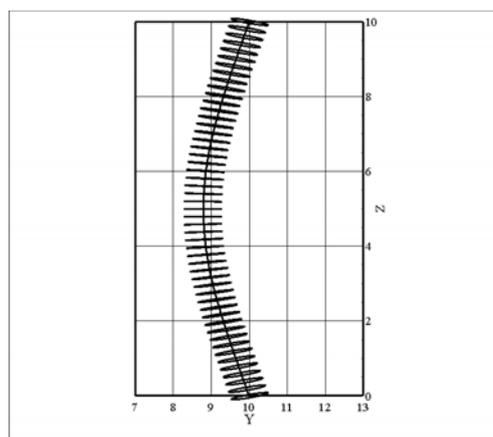
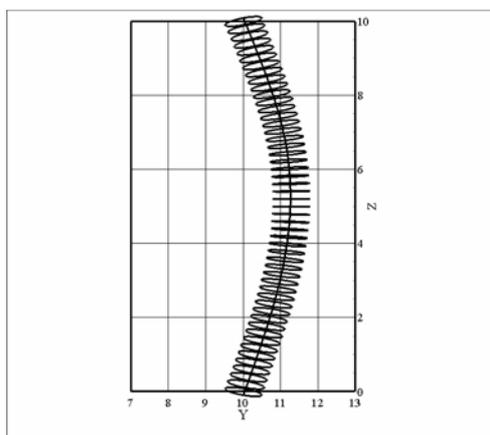
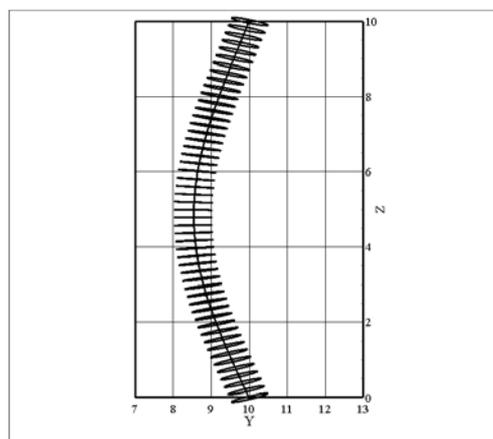
(a) $t=200$ s(b) $t=250$ s(c) $t=300$ s(d) $t=350$ s(e) $t=400$ s(f) $t=450$ s

Figura 5.57 Deslocamentos devidos à interação fluido-estrutural para tempos discretos coincidentes com a Fig. 5.50, para $Re=1.000$ e a Estrutura Flexível III no Plano YZ.

A fim de propiciar uma melhor visualização do deslocamento conjunto nas direções X e Y, na Fig. 5.58 é evidenciado a trajetória do mesmo ponto nodal considerado nas Figs. 5.54 e 5.55.

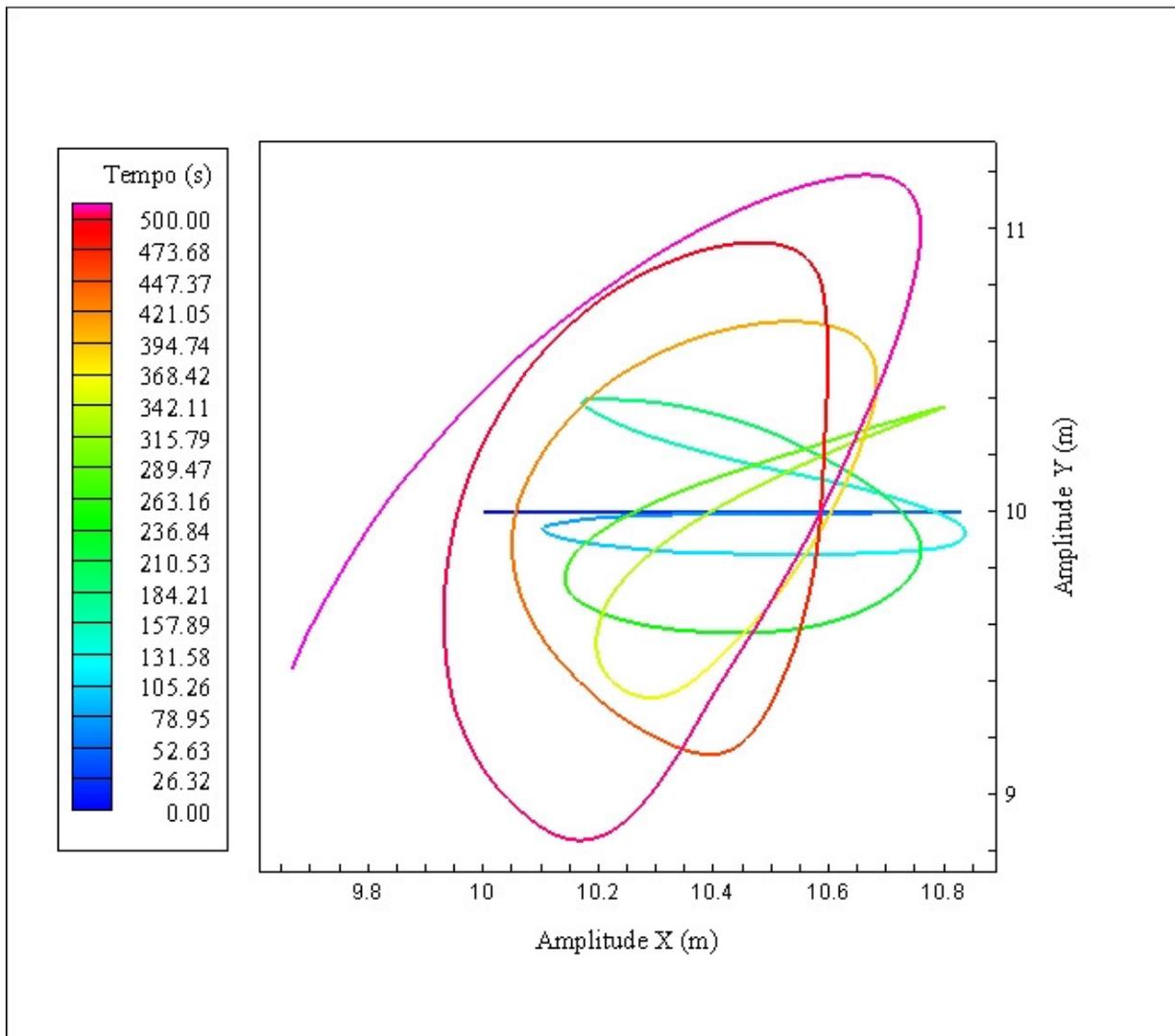


Figura 5.58 – Evolução temporal do deslocamento de um ponto nodal posicionado a 4,80 m da extremidade inferior da estrutura na direção X e Y, para $Re=1000$.

Fazendo o espectro em frequência dos deslocamentos transversais mostrados na Fig. 5.54 obtém-se:

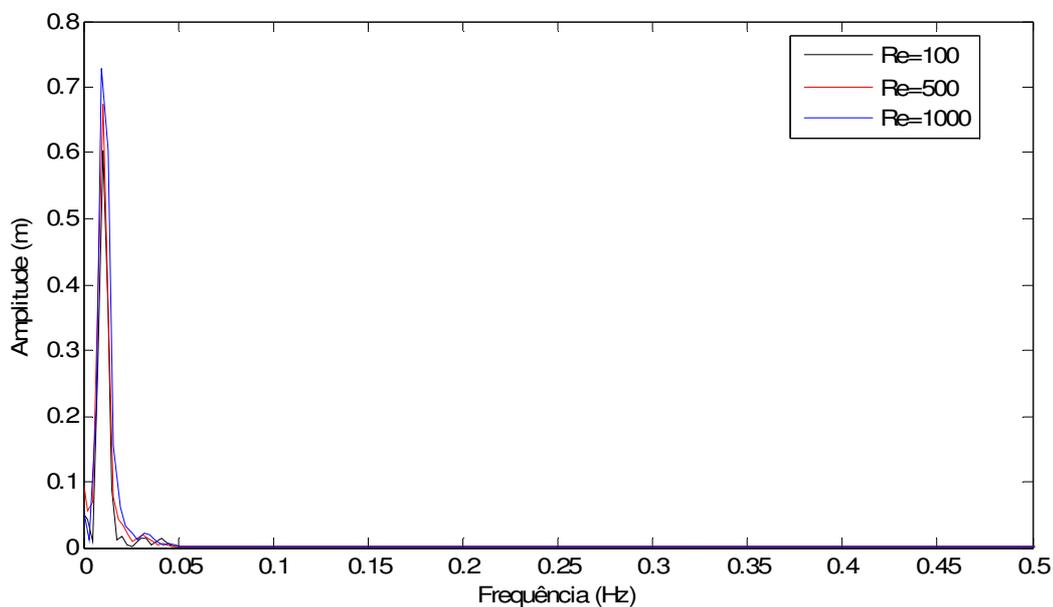


Figura 5.59 - Frequências de oscilação dos deslocamentos transversais para três diferentes valores do número de Reynolds – Estrutura Flexível III.

Observa-se na Fig. 5.59 que as frequências encontradas no deslocamento transversal estão de acordo com as frequências de excitação provocadas pelo desprendimento de vórtice a jusante.

Nota-se, com base na Fig. 5.60, na qual é apresentada a evolução da norma L2, que em torno de 550 s tem-se o início de instabilidades e a propagação destes erros fazem com que o método acoplado de resolução venha a divergir.

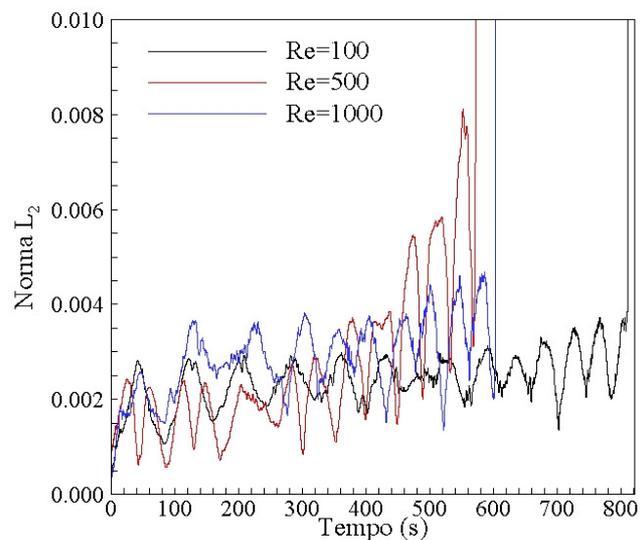
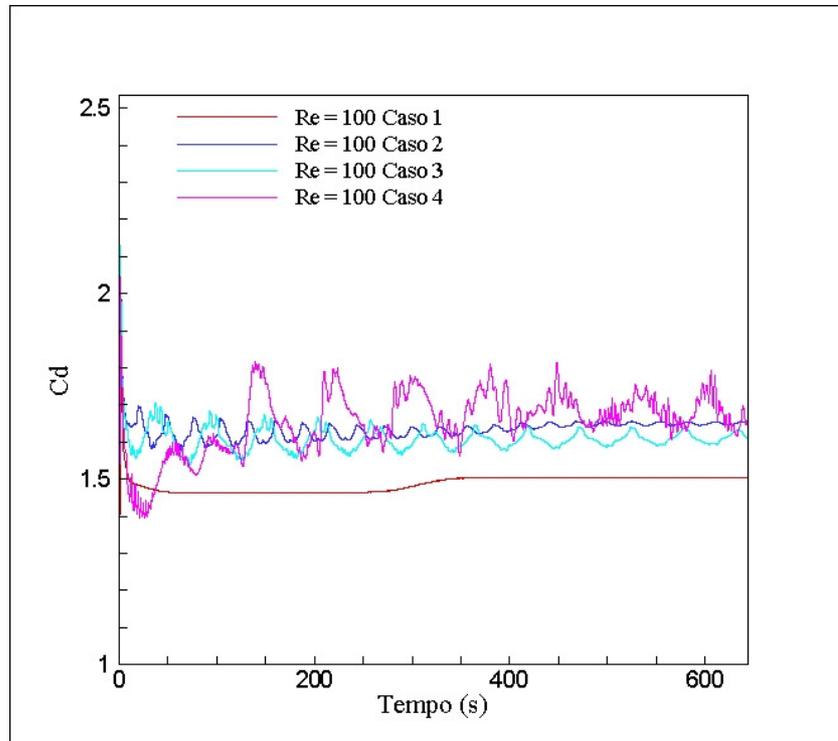


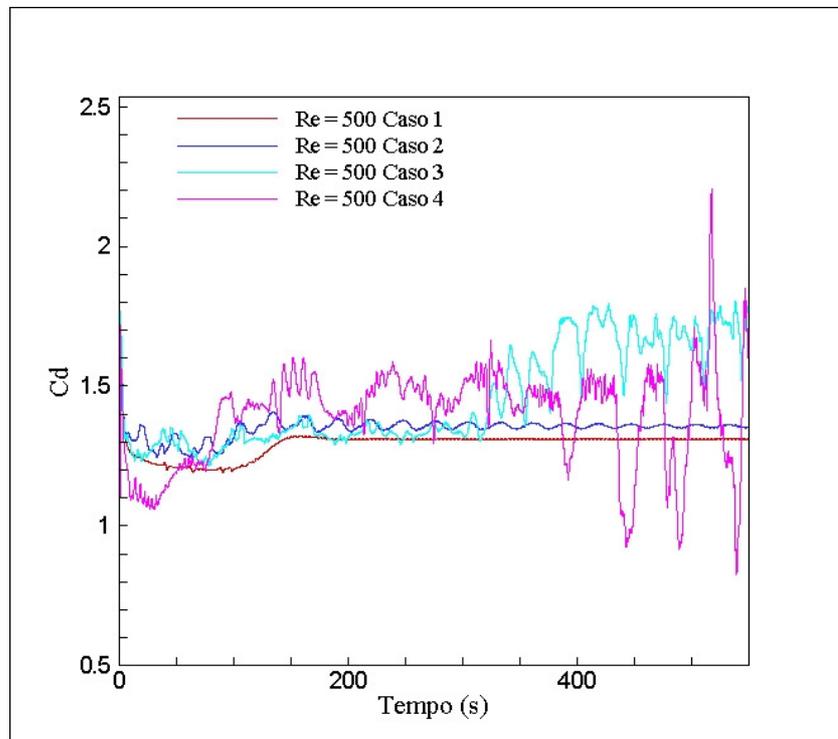
Figura 5.60 – Evolução temporal da Norma L_2 para a Estrutura Flexível III sujeita ao escoamento com diferentes números de Reynolds.

5.3.5 Comparação dos coeficientes de arrastos normal para diferentes números de Reynolds.

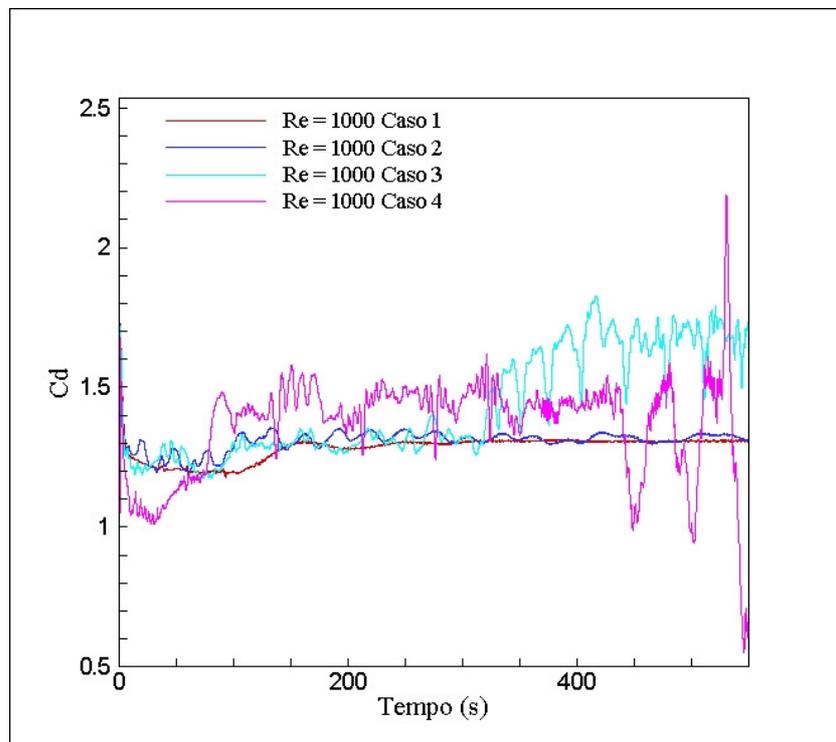
As Fig. 5.61 (a)-(c) mostram os coeficientes de arrasto para a estrutura estática e os três tipos de estruturas imersas que foram sujeitas a forças hidrodinâmicas. Observa-se que na Fig. 5.61 (a) um acréscimo no coeficiente de arrasto, quando a estrutura é flexível, ao se comparar com a estática. Este fato também pode ser evidenciando nas demais simulações para outros números de Reynolds.



(a)



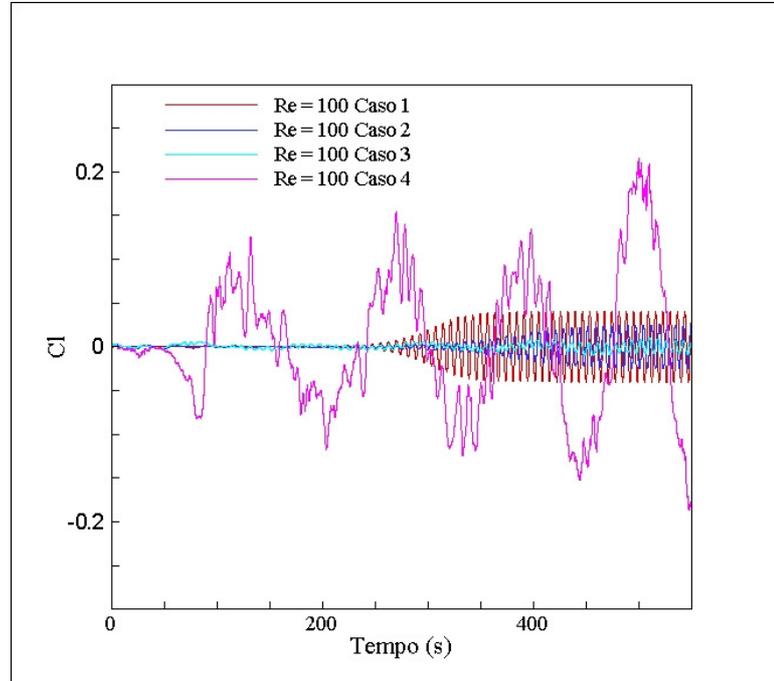
(b)



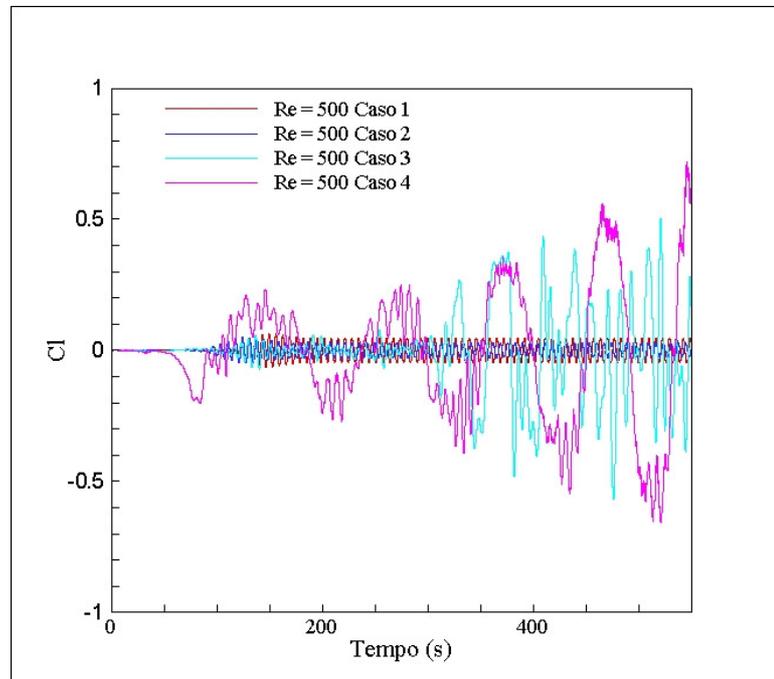
(c)

Figura 5.61 – Comparação entre os coeficientes de arrasto obtidos para os quatro casos simulados com: (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

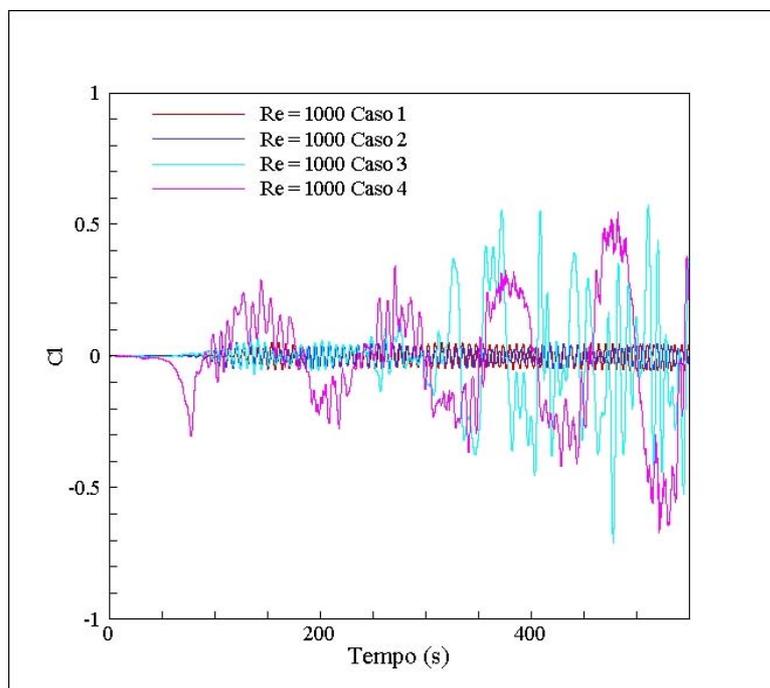
As Figs. 5.62 (a)-(c) mostram o coeficiente da força transversal das diferentes estruturas agrupadas de acordo com o número de Reynolds. Ressalta-se que na simulação para estruturas mais rígidas, caso 2 e caso 3, o coeficiente teve uma pequena diminuição em relação à estrutura estática para número de Reynolds igual a 100. O que não pode ser observado nas estruturas mais flexíveis, em que o coeficiente transversal aumentou consideravelmente. Este fenômeno também pode ser observado quando a estrutura estava sujeita ao escoamento com número de Reynolds igual a 500, Fig. 5.62 (b), quando comparados os casos 1 e 2. Ainda, nesta figura, para os demais casos, devido à interação entre os escoamento e estrutura flexível, observou-se um acréscimo nestes coeficientes. Isso também aconteceu de forma similar quando a estrutura estava sujeita ao escoamento com número de Reynolds igual a 1.000. Em resumo, observa-se que a mudança dos coeficientes, tanto de arrasto como transversal se devem a mudança das características do escoamento devido à interação com a estrutura.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.62 – Comparação entre os coeficientes de força transversal obtidos para os quatro casos simulados com: (a) $Re=100$; (b) $Re=500$ e (c) $Re=1.000$.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O trabalho de pesquisa descrito neste memorial de tese teve por objetivo geral o desenvolvimento, implementação computacional e avaliação, com base em simulações numéricas, de um procedimento de modelagem de fenômenos de interação fluido-estrutura envolvendo estruturas unidimensionais esbeltas, dos tipos vigas, barras e cabos, combinando a metodologia de fronteira imersa e a teoria não linear de vigas de Cosserat.

Em um primeiro momento, foi realizada a implementação computacional de modelos de elementos finitos baseados na teoria de vigas de Cosserat, que não estavam disponíveis no início do estudo. Para este efeito, foi efetuado um extenso estudo da formulação, com o desenvolvimento da formulação utilizando programas computacionais de manipulação simbólica.

Em uma segunda etapa foram apresentadas, de forma sucinta, as principais características da metodologia de fronteira imersa. O principal objetivo deste enfoque foi mostrar os princípios teóricos envolvidos neste método e, assim, fornecer o embasamento para a realização do acoplamento entre os códigos de análise estrutural e resolução do domínio fluido. Assim, foi implementado o procedimento computacional para a resolução acoplada dos domínios, mediante a integração do código de modelagem estrutural desenvolvido e um código previamente elaborado pelo grupo de pesquisa do Laboratório de Mecânica dos Fluidos da UFU, Fluids3D, porém devidamente adaptado.

Na fase de validação dos procedimentos de modelagem desenvolvidos, inicialmente, com auxílio de uma bancada experimental simples, a implementação da teoria de vigas de Cosserat

foi validada, para a condição de equilíbrio estático, através da confrontação de resultados experimentais e simulados. A validação para a condição de regime dinâmico foi feita mediante comparação com resultados obtidos por outros autores, reportados na literatura. A comparação de resultados obtidos nos dois tipos de simulações, estática e dinâmica, permitiram confirmar a confiabilidade das implementações destes dois algoritmos.

Com relação à metodologia de modelagem estrutural baseada na teoria de Cosserat, por se tratar de uma técnica que conduz a equações do movimento não lineares, um particular esforço foi empreendido em testes de diversos algoritmos de integração numérica para a escolha do algoritmo que melhor se adaptasse à integração passo a passo no domínio do tempo. Nestas simulações, observou-se que o algoritmo de Newmark conservativo apresentou-se mais estável e preciso na integração numérica e, portanto, foi escolhido para a utilização nas demais simulações realizadas neste trabalho.

Outro aspecto investigado com relação ao algoritmo estrutural diz respeito à ordem das aproximações empregadas nas funções de forma utilizadas para a discretização das equações pela técnica de elementos finitos. Foram examinadas aproximações de segunda e de terceira ordem. Observou-se que com a utilização de um mesmo método de integração, o uso de aproximações de segunda ordem não permitiu obter convergência numérica, por mais que se diminuísse o passo de tempo utilizado, ao passo que com as aproximações de terceira ordem não se observaram dificuldades de convergência. Há que se ressaltar que poucos são os trabalhos encontrados na literatura que utilizam aproximações de terceira ordem. Isso pode ser explicado pela grande complexidade das equações resultantes, que resultam de um grande volume de manipulações algébricas que seriam impossíveis de serem realizadas sem o recurso de programas computacionais de manipulação simbólica.

Várias simulações numéricas foram realizadas, para uma estrutura-teste previamente escolhida, visando ao evidenciamento de vantagens e inconvenientes da teoria de Cosserat em relação à teoria clássica de Euler-Bernoulli. Constatou-se que, a expensas de uma maior complexidade algébrica e de implementação computacional, a teoria de Cosserat permite, para um mesmo grau de precisão, a utilização de malhas de discretização espacial menos refinadas, com a conseqüente redução dos números de elementos e de graus-de-liberdade dos modelos de elementos finitos. Foi também evidenciado que com a utilização de funções de forma de terceira ordem pode-se obter, com boa precisão, os deslocamentos e rotações no interior dos elementos

por meio da interpolação dos deslocamentos e rotações nodais. Esta propriedade se torna muito útil em simulações de interação fluido-estrutura, dado que em muitos casos as malhas dos dois domínios não são compatíveis, podendo esta dificuldade ser contornada com o procedimento de interpolação. Ressalte-se, com relação a este aspecto que as malhas eulerianas e lagrangianas utilizadas tiveram a mesma discretização espacial na direção do comprimento da estrutura imersa. Entretanto, em trabalhos futuros estas duas malhas poderão ser criadas com diferentes graus de refinamento, e o acoplamento poderá ser feito com a utilização destas interpolações. Esse procedimento diminuiria consideravelmente o tempo computacional despendido na simulação estrutural, principalmente devido à diminuição do número de elementos.

Simulações numéricas evidenciaram também as limitações da teoria clássica de Euler-Bernoulli e a capacidade da teoria de Cosserat para a modelagem do comportamento vibratório em regime não linear, que fica caracterizado quando as amplitudes de deslocamentos e rotação são maiores. Notou-se claramente, nestas simulações, que a cada incremento de força as respostas obtidas utilizando as duas teorias de modelagem de vigas aumentam sua discrepância, não só em amplitude, mas também na frequência observada na resposta dinâmica. Uma das razões destas discrepâncias pode ser o fato de que, na teoria linear de vigas não ser considerado o efeito do enrijecimento devido a forças axiais.

Após a realização de vários testes estruturais, o modelo baseado na teoria de Cosserat foi utilizado em procedimentos de modelagem desenvolvidos para a caracterização do comportamento dinâmico de estruturas tridimensionais cilíndricas esbeltas sujeitas a ações fluidodinâmicas. Nestas simulações buscou-se caracterizar a resposta dinâmica das estruturas sujeitas a escoamento com três diferentes valores de números de Reynolds. Adicionalmente, para possibilitar a observação de diferentes níveis de amplitudes de vibração, foram utilizadas três estruturas, com diferentes valores de rigidez estrutural à flexão. Com isso pode-se observar, para cada condição simulada, as isosuperfícies mostrando qualitativamente a influência, no fluido, provocada pelo movimento estrutural, e as interações do fluido com as respostas estruturais nas direções longitudinal e transversal à direção do escoamento.

Em todas as simulações realizadas, foram consideradas estruturas esbeltas similares a *risers* de exploração de petróleo, que são objeto de particular interesse no âmbito da indústria de exploração de petróleo. Contudo, ainda não foi possível realizar simulações de *risers* com grandes razões de aspecto, devido à grande capacidade computacional requerida. As simulações

apresentadas no presente relatório se referem a fluidos com massa específica unitária, considerando que o código de CFD ainda encontra-se em desenvolvimento, apresentando ainda essa restrição de utilização.

Finalmente, destaca-se que o presente trabalho apresenta contribuição inédita mediante a associação da técnica de Fronteira Imersa com a teoria de vigas de Cosserat, e proporciona uma nova alternativa para a modelagem de problemas de interação fluido-estrutura envolvendo estruturas esbeltas. Essa classe de problemas são de grande interesse na indústria de exploração de petróleo em águas profundas. Neste sentido, ressalta-se que, de acordo com as referências encontradas na literatura que abordam simulações fluido-estruturais, os autores deste trabalho não tiveram conhecimento de nenhuma pesquisa voltada a estruturas *offshore* que realizam suas simulações baseando-se em métodos de CFD associados a modelos estruturais não lineares tridimensionais.

A realização do estudo descrito neste memorial de tese abre amplas perspectivas para a continuidade das investigações, dentre as quais podem ser citadas:

- inclusão, no modelo estrutural de efeitos não considerados neste trabalho, tais como não linearidades físicas (plasticidade) e efeitos dissipativos (amortecimento);
- consideração, na modelagem estrutural, da construção típica de *risers* reais, cujas paredes têm configuração estratificada, formada por camadas com diferentes propriedades mecânicas;
- realização de simulações de *risers* tridimensionais de grande razão de aspecto. Estas simulações requererão o uso eficiente de processamento paralelo e equipamento computacional de alto desempenho.

CAPÍTULO VII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALAMO, F. J. C. **Dinâmica de estruturas unidimensionais esbeltas utilizando o contínuo de Cosserat**. 2006. 124p. Tese de doutorado-Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ANDRIANARISON, O.; OHAYON, R. Reduced Models for Modal Analysis of Fluid-Structure System Taking into Account Compressibility and Gravity Effects. **Computer Methods in applied mechanics and engineering**. v. 21, p. 335–361. 2005.

ANTMAN, S. S., Kirchhoff's problem of nonlinearly elastic rods. **Quart. Appl. Math.** v. 32, p. 221-24, 1995a.

ANTMAN S. S. **Nonlinear Problems of Elasticity, Applied Mathematical Sciences**. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 1995b. 884p.

ANTMAN, S. S.; MARLOW, R. S.; VLAHACOS, C. T. The complicated dynamics of heavy rigid bodies attached to deformable rods". **Quarterly of Applied Mathematics** v.56, p. 431 – 460. 1998.

ARFKEN, G.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. **Mathematical Methods for Physicists**. 5.ed. Academic Press Inc., San Fiego. 2000. 1112p.

ARRUDA, J. **Modelagem Matemática de escoamentos Internos Forçados utilizando o Método da fronteira imersa e o Modelo físico virtual**, 2004. Tese de Doutorado -Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG.

ARRUDA, J.; LIMA E SILVA, A.; ROMA, A. E SILVEIRA-NETO A.; Simulação Numérica de escoamentos sobre Cavidades Abertas Rasas utilizando o Método da fronteira imersa, In: 12th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT, 2004, **Proceedings of the 12th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering**.

ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C.; MALEJANNAKIS, G.; SCHARPF, D. W. On large displacements–small strain analysis of structures with rotational degree of freedom. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v.14, p.99-135, 1978.

ASSI, G. R. S. **Estudo experimental do efeito de interferência no escoamento ao redor de cilindros alinhados**. 2005. Dissertação de Mestrado- USP-SP, São Paulo, SP.

BAARHOLM, G.S.; LARSEN, C.M.; LIE, H. On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers. **Journal of Fluids and Structures**. v. 22, p. 109-127. Jan. 2006.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 2.ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1996. 1029p.

BATHE, K. J.; BAIG M. M. I. On A Composite Implicit Time Integration Procedure For Nonlinear Dynamics. **Computers and Structures**. v.83, p. 2513–2524. 2005.

BATHE, K. J. Conserving Energy And Momentum In Nonlinear Dynamics: A Simple Implicit Time Integration Scheme. **Computers and Structures**. v.85, p. 437–445. 2007.

BATHE, K. J. On Finite Element Methods For Nonlinear Dynamic Response. In: 7th European Conference on Structural Dynamics, Eurodyn 2008, Southampton.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. 1.ed. Chichester, John Wiley & Sons, Ltd, 2000. 300p.

BORGES, A. S.; LUZIANO, W. P. JR.; RADE, D. A.; SILVEIRA-NETO, A. A Numerical Study of Cosserat Beam Theory Applied to the Modeling of Subsea Risers. In: 20th International Congress of Mechanical Engineering, November 15-20, 2009, Gramado, RS, Brazil. **Proceedings of COBEM**.

BOKAIAN, A. Natural frequencies of beams under compressive loads. **Journal of Sound and Vibration**. v. 126, p. 49–65. 1988.

BOKAIAN, A. Natural frequencies of beams under tensile loads. **Journal of Sound and Vibration**. v. 142, p. 481–498. 1990.

CAMPREGHER, R. **Modelagem Matemática Tridimensional Para Problemas de Iteração Fluido-Estrutura**. 2005. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

CAO, D. Q.; DONGSHENG, L.; CHARLES, H.; WANG, T. Nonlinear dynamic modelling for MEMS components via the Cosserat rod element approach. **J. Micromech. Microeng.** v. 15, p. 1334–1343. 2005.

CAO, D. Q.; DONGSHENG, L.; CHARLES, H.; WANG, T. Three Dimensional Nonlinear Dynamics of Slender Structures: Cosserat Rod Element Approach. **International Journal of Solids and Structures**. v. 43, p. 760-783. 2006.

CAO, D. Q.; DONGSHENG, L.; CHARLES, H.; WANG, T. Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation. **International Journal of Solids and Structures**. v. 45, p. 460–477. 2008

CARAPAU, A. S. F. 1d Models For Blood Flow In Small Vessels Using The Cosserat Theory. **WSEAS Transactions on Mathematics**. v. 5, p.54-62. 2006.

CARDONA, A.; GERADIN, M. A Beam Finite Element Non-Linear Theory With Finite Rotations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 26, p. 2403 – 2438. 1988.

CHANG, S.H.M.; ISHERWOOD, M. Vortex-Induced Vibrations of Steel Catenary Risers and Steel Offloading Lines due to Platform Heave Motions. In.: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 2003, Houston, Texas, U.S.A. **Proceedings of OTC 2003**.

CHAPLIN, J.R.; BEARMAN, Y.C; FONTAINE, E.; GRAHAM, J.M.R; HERFJORD, K.; HUERRA HUARC, F.J.; ISHERWOOD, M.; LAMBRAKOS, K. LARSEN, C.M; MENEGHINI, J.R.; MOE, G. PATTENDEN, R.J. TRIANTAFYLLOU, M.S.; WILLDEN, R.H.J. Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. **Journal of Fluids and Structures**. v. 21, p. 25-40. Nov. 2005.

CHEZHIAN, M.; MORK, K.; MELING, T.S.; MAKRYGIANNIS, C.; LESPINASSE, P. 2006, NDP Review of State-of-the-Art in Riser Monitoring: Lessons Learned and Experiences Gained, In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, Houston, Texas, USA. **Proceedings of OTC**. 2006.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. **Mathematics of Computation**, New York, v. 22, p. 745-762, 1968.

CONSTANTINIDES, Y.; OAKLEY, O.H. JR. Numerical Prediction of Bare and Straked Cylinder VIV. In: 25th International Conference on Offshore Marine and Arctic Engineering, OMAE2006-92334, Hamburg, Germany. 2006

COOK, H.H.; DOPJERA, D.E.; THETHI, R.; WILLIAMS, L. Riser Integrity Management for Deepwater Developments. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, Houston, Texas, USA. **Proceedings of OTC**. 2006.

DESSI, D.; MARIANI, R. Structure and Load Identification Using Wave Excitation in Sea-Keeping Tests, INSEAN – Italian Ship Model Basin, Rome, Italy. 2005.

DEVRIENDT, C.; GUILLAUME, P. Identification of Modal Parameters from Transmissibility Measurements. **Journal of Sound and Vibration**. v. 314, Issues 1-2, p. 343-356. Jul. 2008.

DUTTA, A., WHITE, D. W. Large Displacement Formulation Of A Three-Dimensional Beam Element With Cross-Sectional Warping. **Computers and Structures** v. 45, p. 9-24. 1992.

ETIENNE, S.; BIOLLEY, F.; FONTAINE, E.; LE CUNFF, C.; HEURTIER, J.M. Numerical Simulations of Vortex-Induced Vibrations of Slender Flexible Offshore Structures. In: International Offshore mid Polar Engineering Conference, 11, 2001, Stavanger - Norway.

FARHAT,C.; LESOINNE, M; LETALLEC, P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and Energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng**. v. 157, p. 95-114. 1998.

FAROOP, U.; FEENY, B. F. Smooth Orthogonal Decomposition for Modal Analysis of Randomly excited System. **Journal of Sound and Vibration**. v. 316, p. 137–146. 2008.

FRANCISS, R.; SANTOS, C.P. Understanding the Measured VIV Data of a Steel Catenary Riser Installed at P-18 Platform in Campos Basin. OMAE2004-51177. OMAE 2004, The 23rd International Conference on offshore mechanics and arctic engineering Vancouver, Canada, 20-25 June, 2004

FRANK, W.R., TOGNARELLI, M.A., SLOCUM, S.T., CAMPBELL, R.B., BAL SUBRAMANIAN, S. Flow-Induced Vibration of a Long, Flexible, Straked Cylinder in Uniform and Linearly Sheared Currents”, OTC 16340, 2004.Houston, Texas, USA.

FUJARRA, A. L. C. **Estudo em Modelo reduzido de tubo, flexível e liso, submetido ao fenômeno de vibração induzida pela vorticidade “Vortex induced Vibration.** 1997. Dissertação de Mestrado, Escola politécnica da Universidade de São Paulo, USP.

GABBAI R.D.; BENAROYA H. An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. **Journal of Sound and Vibration.** v. 282, p. 575–616. 2005.

GÉRADIN, M.; RIXEN, D. **Theory and application to structural dynamics.** 2.ed.John Wiley & Sons. 2001.

GLOWINSKI, R.; PAN, T.; PÉRIAUX, J. Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.** v. 151, p. 181-194. 1998.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M.; WENNER, M. L. On the theory of rods I: derivations from the three-dimensional equations. Proceedings of the Royal Society. 1974. London A337, p. 451 – 483.

GRIFFITH, B. E.; PESKIN, C. S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. **Journal Computational Physics,** New York, v. 208, p. 75-105, 2005.

HABAULT D.;FILIPPI, P.J.T. A numerical method for the computation of the resonance frequencies and modes of a fluid-loaded plate: application to the transient response of the system. *Journal of Sound and Vibration*. **Journal of Sound and Vibration**. v.270, p. 207-231. 2003.

HOLMAS, T.; HERFJORD, K., LEIRA, B. Riser Interference and Contact. Methodology for prediction. Marintek report. 2002.

HOVER, F. S.; MILLER, S. N.; TRIANTAFYLLOU, M. S. Vortex-Induced vibration of marine cables: experiments using force feedback. **Journal of Fluids and Structures**. v.11, p. 307-326, 1997.

HOVER , F. S.; TECHET, A. H.; TRIANTAFYLLOU, M. S. Forces on oscillating uniform and tapered cylinders in crossflow. **J. Fluid Mech**. v. 363, p. 97-114, 1998.

HOVER, F. S.; TVEDT , H.; TRIANTAFYLLOU, M. S. Vortex-induced vibrations of a cylinder with tripping wires. **J. Fluid Mech**. v. 448, p. 175-195, 2001.

HOVER, F. S.; DAVIS, J. T.; TRIANTAFYLLOU, M.S. Three-dimensionality of mode transition in vortex-induced vibrations of a circular cylinder. **European Journal of Mechanics B/Fluids**. v. 23, p. 29-40, 2004.

HUERA HUARTE, F.J.; BEARMAN, P.W.; CHAPLIN, J.R. 2On the force distribution along the axis of a flexible circular cylinder undergoing multi-mode Vortex-Induced Vibrations. In: Symposium on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations, 4, 2005, Santorini – Greece. **Proceedings of BBVIV4**.

HUERA HUARTE, F; BEARMAN, P.W. Multi mode vortex induced vibration (VIV) of flexible structures. disponível em: www3.imperial.ac.uk/vortexflows. Acesso em: 10 Jan. 2010.

JACOBSEN, N. J.; ANDERSEN, P.; BRINCKER, R. Using Enhanced Frequency Domain Decomposition as a Robust Technique to Harmonic Excitation in Operational Modal Analysis, III IOMAC Conference, 2007.

KIM, J.; KIM, D; CHOI, E. H. An immersed-boundary Finite-Volume method for simulations of flow in complex geometries. **Journal of Computational Physics**. v. 171, p. 132-150. 2001.

KITATANI, S., J. **Modelagem Matemática e Simulação Numérica para Iteração Fluido-Estrutura de um Pêndulo Imerso Utilizando Fronteira Imersa**. 2009. 140 f. Dissertação - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG.

KRAJNOVIÉ, S.; DAVIDSON, L. Flow Around A Three-Dimensional Bluff Body. **9 International Symposium on Flow Visualization**. 2000.

LAI, M. **Simulations of the flow past an array of circular cylinders as a test of the Immersed Boundary Method**. 1998. PhD Dissertation, New York University, New York, USA.

LIANG, C. C; LIAO, C. C.; TAI, Y. S.; LAI, W. H. The Free Vibration Analysis of Submerged Cantilever Plates. *28 Ocean Engineering*, 2000, p. 1225-1245.

LIANG, Q. W.; RODRIGUES C.G.; EGUSQUIZA, E.; ESCALER, X.; FARHAT, M.; AVELLAN, F. Numerical simulation of Fluids added mass effect on a Francis turbine runner. **Computers and Fluids**. v. 36, p.1106-1118. 2007.

LIAO, C.; VANDIVER, J. K. Vortex induced vibration analysis of the Allegheny riser using SHEAR7. 2000. Relatório técnico.

LIMA e SILVA, A. L. F. **Desenvolvimento e Implementação de uma Nova Metodologia para Modelagem de Escoamentos sobre Geometrias Complexas: Método da Fronteira Imersa**

como Modelo Físico Virtual. 2002. 162 f. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG.

LIMA e SILVA, A.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. **Journal of Computational Physics**, New York, v. 189, p. 351-370, 2003.

LIMA E SILVA, A; L. F., SILVA; A. R.; SILVEIRA-NETO A. Numerical simulation of two dimensional complex flows over bluff bodies using the immersed boundary method. **Journal of Fluid and Structures**. 2005.

LISITA, R., R. **Interação fluido estrutura em cilindros utilizando dinâmica dos fluidos computacional.** 2007. 141 p. Dissertação de Mestrado-Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG.

LIU, D.; CAO, D. Q.; WANG, C. Computational cosserat dynamics in mems components modeling. In: WCCM and APCOM'04. 2004. Beijing, China. **Proceedings of Computational Mechanics**.

LOPES, R. K. D. **Análise de Estruturas Sujeitas a Vibrações Induzidas Por Vórtices.** 2006. Dissertação de Mestrado - Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

MADDOCKS, J. H. Mathematical Modelling of DNA. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2004.

MARIANI, R.; DESSI, D. **Nonlinear Hydroelastic Investigation of a Ship Beam Sailing in Waves.** II International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibrating System. 2006.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A. Flow Over Circular Cylinder Simulation Using Fourier Pseudo-Spectral Method With Immersed Boundary. In: 20th

International Congress of Mechanical Engineering, November 15-20, 2009, Gramado, RS, Brazil.
Proceedings of COBEM.

MARTINS, C. A. **Uma ferramenta expedita para estudo de viabilidade de risers rígidos em catenária.** 2000. Resenha de livre docência - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo – SP.

MENEGHINI J.R.; SALTARA; F; FREGONESI, R.A.; YAMAMOTO, C.T; CASAPRIMA, E; FERRARI JR, J.A. Numerical simulation of VIV on long flexible cylinders immersed in complex flow field. **European Journal of Mechanics B/Fluids.** V. 23, issue 1, p.51-63, Fev. 2004.

MERIAM, J.L. **Dinâmica.** Rio de Janeiro. LTC. 1990. 2. ed. 600p.

MITTAL, S.; KUMAR, V. Flow-Induced Vibration Of A Light Circular Cylinder At Reynolds Number 103 To 104. **Journal of Sound and Vibration.** v. 245, p. 923-946. 2001.

MOE, G.; ARNTES, O; HOEN, C. VIV analysis of Risers by Complex Modes. In.: International offshore and Polar Engineering Conference, 11, 2001, Stavanger, Norway. v. 3, p. 426-430.

MOHD-YUSOF, J. Combined immersed boundaries/B-splines methods for simulations of flows in complex geometries. In: CTR Annual Research Briefs, 1997, NASA Ames/Stanford University.

NAUDASCHER, E.; ROCKWELL, D. **Flow-Induced Vibrations - An Engineering Guide Brook.** Dover Publications, 1994. 432p.

NAYFEH, A. H. **Problems in Perturbation.** Wiley-Interscience 1985. 570p.

OLIVEIRA, J.; LIMA E SILVA, A.; GUIMARÃES, G.; SILVEIRA-NETO, A. Simulação numérica do escoamento a baixo Reynolds sobre o cilindro de diâmetro variável usando MFI/MFV. In: 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, 2004a. **Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering.**

OLIVEIRA, J.; LIMA E SILVA, A.; SOUZA, F.; GUIMARÃES, G.; SILVEIRA-NETO, A. Comparative Analysis Between Different Methodologies Of Turbulence Modeling: URANS, DES e LES. In: 4º Escola de Primavera de Transição e Turbulência. 2004b.

OLIVEIRA, J. E. S. **Método de Fronteira Imersa Aplicado à Modelagem Matemática e Simulação Numérica de Escoamentos Turbulentos sobre Geometrias Móveis e Deformáveis.** 2006. 180 f. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG.

ORCINA TECHNICAL SPEC, 2007. Disponível em: www.orcina.com. Acesso em: 08 Jan. 2010.

PADILLA, E. L.M. Aplicações de simulação numérica para análise de escoamentos transicionais em canais cilíndrico-anulares com excentricidade variável. Relatório técnico de convênio FEMEC – PETROBRAS. (Projeto No: 005000007895.04.3). 2007.

PAI, D. K. Interactive Simulation Of Thin Solids Using Cosserat Models. **Eurographics 2002 / G. Drettakis and H.-P. Seidel**, v. 21, n. 3. 2002.

PEDERSEN, L.; BRINCKER, R. Detection of Damage in a Lattice Mast Excited by Wind by Dynamic Measurements. **Journal of Sound and Vibration.** 2008

PESCE, C. P. Mecânica de cabos e tubos submersos lançados em catenária: uma abordagem analítica e experimental. **Journal of Fluid Mechanics** v. 116, p.77-90. 1997.

PESKIN, C. Flow patterns around heart valves: A numerical method. **Journal of Computational Physics**. v. 10, p. 252-271. 1972.

PESKIN, C. Numerical analysis of blood flow in the heart. **Journal of Computational Physics**. v. 25, p. 220-252. 1977.

PESKIN, C.S. The immersed boundary method. **Acta Numerica**, New York, v. 11, p. 479–517. 2002.

RAMOS JR. **Modelos analíticos no estudo de comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais**. 2001. 365 f. Tese de Doutorado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

RIBEIRO L. S. **Modelagem Não-Linear Da Dinâmica De Cabos Submarinos**. 2007. Tese de Doutorado - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

RODRIGUEZ, C.G.; EGUSQUIZA, E.; ESCALER, X.; LIANG, Q.W.; AVELLAN, F.
Experimental Investigation Of Added Mass Effects On A Francis Turbine Runner In Still Water. **Journal of Fluids and Structures**. v. 22, p. 699–712. 2006.

ROMA, A., PESKIN, C. E BERGER, M. An Adaptive Version Of The Immersed Boundary Method. **Jornal of Computational Physics** v. 153, p. 509-534. 1999.

RUBIN, M. B. On The Theory Of A Cosserat Point And Its Application To The Numerical Solution Of Continuum Problems. **ASME J. Appl. Mech.**, v. 52, p. 373-378. 1986.

RUBIN, M.B.; BRAND, M. A constrained theory of a Cosserat point for the numerical solution of dynamic problems of non-linear elastic rods with rigid cross-sections. **International Journal of Non-Linear Mechanics**. v. 42, p.216-232. 2007.

SAGATUN, S. I.; HERFJORD, K; HOLMAS, T. Dynamic Simulation Of Marine Risers Moving Relative To Each Other Due To Vortex And Wake Effects. **Journal of Fluids and Structures**. v. 16, issue 3, p. 375-390, Abr. 2002.

SANTOS, C.M.P.M. **Análise de Estruturas Esbeltas Offshore Sujeitas à Vibrações Induzidas por Vórtices (VIV)**. 2005. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

SHABANA, A. A. **Dynamics of Multibody Systems**. 2.ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

SHAMES, I. H. **Engineering Mechanics: Dynamics**. 4th ed., Upper Saddle River : Prentice Hall, 1997.

SHU, C.; LIU, N.; CHEW, Y. T. A Novel Immersed Boundary Velocity Correction-Lattice Boltzmann Method And Its Application To Simulate Flow Past A Circular Cylinder. **Journal of Computational Physics**, New York, v. 226, p. 1607-1622, 2007.

SILVA, A. R. **Modelagem Matemática de Interação Fluido-Estrutura Utilizando o Método da Fronteira Imersa**. 2008. 214f. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG.

SIMO, J. C. A finite strain beam formulation – the three-dimensional dynamic problem part I. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v.49, p. 55-70. 1985

SOREIDE, T.H.; AMDAHL, J.; EBERG, E.; HORKNAS, T.; HELLAN, O. USFOS – A Computer Program for progressive Collapse Analysis of steel offshore Structures – Theory Manual. 1993. SINTEF Report STF71 F88038.

SU, S. W.; LAI, M. C.; LIN, C. A. An Immersed Boundary Technique For Simulating Complex Flows With Rigid Boundary. **Computers & Fluids**, New York, v. 36, p. 313-324, 2007.

TRIM, A. D.; BRAATEN, H.; LIE, H.; TOGNARELLI, M. A. Experimental Investigation Of Vortex-Induced Vibration Of Long Marine Risers. **Journal of Fluids and Structures**. v. 21, p. 335–361. 2005.

TUCKER, R. W.; WANG, C. An Integrated Model For Drill-String Dynamics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 224, p. 123-165. 1999.

UHLMANN M. An Immersed Boundary Method With Direct Forcing For The Simulation Of Particulate Flows. **Journal of Computational Physics**, New York, v. 209, p. 448-476, 2005a.

UHLMANN M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate. 2005. **Journal of Computational Physics** v.209, p. 448–476. 2005b.

UNVERDI, S. O.; TRYGGVASON, G. A Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-fluid Flows. **Journal of Computational Physics**. v. 100, p. 25-37. 1992

VEDOVOTO, J.M., CAMPREGHER, R, SILVEIRA NETO, A. Mathematical modeling and numerical simulation of a three-dimensional flow over complex geometries using the immersed boundary method. 2006. In: 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT, 2006, **Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering**.

VEDOVOTO, J.M. **Modelagem matemática de simulação numérica de escoamentos incompressíveis sobre geometrias complexas tridimensionais utilizando o método da fronteira imersa**. 2007. 125 f. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

VEDOVOTO, J. M. **Desenvolvimento de uma modelagem da combustão em escoamento turbulento baseada em metodologia híbrida euleriana/lagrangiana e na metodologia da fronteira imersa.** Uberlândia: UFU, 2009. 124 f. Relatório de qualificação para o doutorado em Engenharia Mecânica.

VENUGOPAL, M. Damping and Response Prediction of a Flexible Cylinder in a Current, MIT, Cambridge, Massachusetts, USA. 1996.

VILAÇA, A.; OLIVEIRA, O.; LIMA E SILVA, A.; SILVEIRA-NETO, A. Modelagem matemática e simulação numérica do escoamento sobre uma partícula em queda livre. In: XXXI ENEMP – Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados. 2004.

VILLAR, M. M. **Análise Numérica Detalhada De Escoamentos Multifásicos Bidimensionais.** 2007. 233f. Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

VU-QUOC L.; SIMO, J. C. A Three-Dimensional Finite Strain Rod Model Part II: Computational Aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.** v. 58, p. 79-116. 1986.

WANG C.; LIU D.; ROSING, R.; RICHARDSON A.; DE MASI B. Construction Of Nonlinear Dynamic MEMS Component Models Using Cosserat Theory. **Analog Integrated Circuits and Signal Processing.** v. 40, p. 117-130. 2004.

WANG Z.; FAN J.; LUO, K. Combined Multi-Direct Forcing And Immersed Boundary Method For Simulating Flows With Moving Particles. **International Journal of Multiphase Flow,** New York, v. 34, p. 283-302, 2008.

WHITE, F. M. **Viscous fluid flow.** 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1981. 614p.

YAMAMO, C.T.; FREGONESI, R.A.; MENEGHINI, J.R.; SALTARA F.; FERRARI JR, J.A. Numerical Simulation Of Vortex-Induced Vibration On Flexible Cylinders. **Journal of fluids and structures**. v .19, issue 4, p. 467-489, Mai. 2004.

YU, Z. A DLM/FD Method For Fluid/Flexible-Body Interactions. **Journal of Computational Physics**. v. 207, p. 1-27. 2005.