

GABRIELA VIEIRA LIMA

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE PARA
NAVEGAÇÃO DE UM VEÍCULO AÉREO NÃO
TRIPULADO DO TIPO QUADRICÓPTERO**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

2015

GABRIELA VIEIRA LIMA

**MODELAGEM DINÂMICA E CONTROLE PARA NAVEGAÇÃO DE UM
VEÍCULO AÉREO NÃO TRIPULADO DO TIPO QUADRICÓPTERO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM CIÊNCIAS**.

Banca Examinadora:

Fábio Vincenzi Romualdo da Silva, Dr. (Orientador) - UFU

Aniel Silva de Moraes, Dr. (Co-orientador) - UFU

Márcio José da Cunha, Dr. – UFU

Guilherme Vianna Raffo, Dr. - UFMG

Fábio Vincenzi Romualdo da Silva, Dr.
Orientador

Darizon Alves de Andrade, Ph.D.
Coordenador do Curso de Pós-graduação

UBERLÂNDIA – MG

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

L732m Lima, Gabriela Vieira, 1990-
2015 Modelagem dinâmica e controle para navegação de um veículo aéreo
 não tripulado do tipo quadricóptero / Gabriela Vieira Lima. - 2015.
 119 f. : il.

Orientador: Fábio Vincenzi Romualdo da Silva.
Coorientador: Aniel Silva de Moraes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Veículo aéreo não tripulado -
Teses. 3. Controle preditivo - Teses. I. Silva, Fábio Vincenzi Romualdo
da, 1974- II. Moraes, Aniel Silva de. III. Universidade Federal de
Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV.
Título.

CDU: 621.3

Dedico este trabalho a minha mãe Guênia pelo apoio e estímulo e ao Rafael pelo carinho e companhia constante, os quais foram essenciais para a minha formação e para o desenvolvimento desta dissertação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus** por sempre me dar forças para vencer os obstáculos e nunca desistir dos meus sonhos.

Agradeço aos professores **Fábio Vincenzi Romualdo da Silva** e **Aniel Silva de Moraes** pela grande oportunidade de aprendizado, além da compreensão, confiança e direcionamentos fornecidos durante a execução deste trabalho.

Estendo os meus agradecimentos aos professores **Josué Silva de Moraes** e **Márcio José Cunha** pela disposição em me auxiliar, incentivo e receptividade sempre a mim dispensada.

Agradeço aos meus pais, **Guênia** e **Joel** pelas grandes lições de vida que são a minha fonte de inspiração e motivação. Agradeço também ao **Rafael** pelo carinho, presença, compreensão e apoio que me ajudou a seguir em frente, enfrentar as dificuldades e nunca desistir.

Agradeço, por fim, à **Pós-graduação em Engenharia Elétrica** da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade, à **Cinara** pela atenção e prontidão nos procedimentos juntos à secretaria do programa e à **CAPES** (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

“A melhor maneira de prever o futuro é criá-lo”.

[Renzo Dallimonti, inventor do SDCD].

RESUMO

Avanços tecnológicos em sensores e atuadores microeletromecânicos, no armazenamento de energia, no processamento de informações e em metodologias de controle possibilitaram o desenvolvimento dos veículos aéreos não tripulados (VANT's). O quadricóptero tem emergido como uma destas plataformas de pesquisa devido a sua simplicidade mecânica, a alta manobrabilidade, bem como a capacidade de realizar pairagem e decolagens e pousos verticais.

Contudo, tal veículo apresenta algumas características desafiadoras para a área de controle, como: não linearidades, comportamento variante no tempo, além de pertencer à classe dos sistemas mecânicos subatuados e estar sujeito a distúrbios aerodinâmicos e incertezas paramétricas. Desta forma, este trabalho possui como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento e a implementação de estratégias de controle para solucionar os problemas de posicionamento e rastreamento de trajetória em veículos aéreos não tripulados, focando em um sistema mecânico subatuado.

Com o intuito de obter um modelo dinâmico que represente de forma apropriada e realista o veículo aéreo, suas equações de movimento foram desenvolvidas baseando-se nas leis físicas que regem o sistema mecânico. O modelo obtido é desacoplado, portanto, consideramos a existência de dois subsistemas, o rotacional e o translacional.

Uma estratégia de controle em cascata foi implementada, de modo que, um controle preditivo baseado em modelo (CPBM) foi desenvolvido para o controle da altitude e da orientação do veículo aéreo. Já o controle de posicionamento no eixo xy foi efetuado através de um controlador proporcional integral derivativo (PID).

Tais estratégias permitiram um rastreamento de trajetória suave, além da possibilidade de lidar com as restrições físicas do sistema. Com o intuito de avaliar a robustez da estrutura de controle apresentada, foram realizadas simulações de voo na presença de distúrbios aerodinâmicos e incertezas paramétricas.

Palavras – Chave: Controle Preditivo, Controle PID, Modelagem Dinâmica, Veículo Aéreo Não Tripulado, Rastreamento de Trajetória, Robustez.

ABSTRACT

Technological advances in electromechanical sensor and actuators, energy storage, data processing and control methodology made possible the development of unmanned aerial vehicles (UAVs). The quadrotor has emerged as one of these research platforms due to its mechanical simplicity, high maneuverability, as well as its capability of hovering and perform vertical take-off and landing.

However, such vehicle presents some challenging issues to control area, like: nonlinearity, time-varying behavior, in addition it belongs to the class of underactuated mechanical systems, and it is subject to aerodynamics disturbances and parametric uncertainties. Therefore, this dissertation has as main objective, contribute to development and control strategies implementation to solve the positioning and path tracking problems of unmanned aerial vehicles, focusing on an underactuated mechanical system.

In order to obtain a dynamic model that represents the aerial vehicle properly and realistically, the motion equations were developed based on the physics laws that define the mechanical system. The model we obtained is decoupled, thus we consider the presence of two subsystems, the rotational and the translational ones.

A cascade control strategy was implemented, so that, a model predictive control (MPC) was developed to the altitude and orientation control of the aerial vehicle. However, the positioning control along the xy axis was performed through a proportional integral derivative control (PID).

Such strategies allowed a smooth path tracking, beyond the possibility of dealing with physical constraints of the system. In order to assess the robustness of the control structure shown, we performed flight simulations under the presence of aerodynamics disturbances and parametric uncertainties.

Keywords: Predictive Control, PID Control, Dynamic Modeling, Unmanned Aerial Vehicle, Path Tracking, Robustness.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 -	Diagrama esquemático de um quadricóptero (adaptado de Sanchez <i>et al.</i> , 2010).....	1
Figura 1.2 -	Ângulos de orientação: (a) rolagem, (b) arfagem e (c) guinada (Castillo Lozano e Dzul, 2005a).....	2
Figura 1.3 -	Veículo aéreo <i>Gyroplane No. 1</i> (Leishman, 2000).....	3
Figura 1.4 -	“ <i>Flying Octopus</i> ”, Bothezat, produzido em 1922 (Leishman, 2000).....	4
Figura 1.5 -	Quadricóptero <i>Oemichen</i> (Leishman, 2000).....	4
Figura 1.6 -	(a) AR.Drone; (b) Draganflyer; (c) Starmac (Sá, 2012).....	5
Figura 2.1 -	Esquema representativo de um controlador preditivo (Gonçalves, 2012).	15
Figura 2.2 -	Diagrama de blocos de um controlador PID paralelo.....	26
Figura 2.3 -	Estrutura em blocos de um controlador PID paralelo com filtro derivativo (adaptado de Nicula, 2010).....	28
Figura 2.4 -	Diagrama de blocos de um controlador PID série com filtro derivativo (Nicula, 2010).....	29
Figura 2.5 -	Diagrama de blocos de um controlador PID acadêmico com filtro derivativo (Nicula, 2010).....	30
Figura 3.1 -	Esquema de funcionamento do quadricóptero (adaptado de Carrillo <i>et al.</i> , 2013).....	32
Figura 3.2 -	Sistemas de coordenadas do quadricóptero (adaptado de Bouabdallah, Noth e Siegwart, 2004a).....	34
Figura 4.1 -	Estratégia de controle em cascata aplicada ao quadrirotor.....	52
Figura 4.2 -	Estrutura de controle PID implementada no quadricóptero, tipo paralelo (Aström e Hägglund, 2006).....	64
Figura 5.1 -	Diagrama de blocos do programa desenvolvido para o quadricóptero.....	67
Figura 5.2 -	Representação do bloco <i>Dinâmica</i> presente no simulador (adaptado de Sá, 2012).....	68
Figura 5.3 -	Resposta ao degrau unitário para as coordenadas de posição (x, y, z)	72
Figura 5.4 -	Estabilização das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ)	73
Figura 5.5 -	Valores das variáveis manipuladas para uma entrada degrau.....	74

Figura 5.6 -	Rastreamento de trajetória circular.....	76
Figura 5.7 -	Resposta das coordenadas de posição (x, y, z) para a trajetória circular....	77
Figura 5.8 -	Resposta das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para a trajetória circular.....	77
Figura 5.9 -	Valores das variáveis manipuladas para trajetória circular.....	78
Figura 5.10 -	Erro das coordenadas translacionais para a trajetória circular.....	79
Figura 5.11 -	Erro das coordenadas rotacionais para a trajetória circular.....	80
Figura 5.12 -	Rastreamento de trajetória helicoidal.....	82
Figura 5.13 -	Resposta das coordenadas de posição (x, y, z) para uma trajetória helicoidal.....	83
Figura 5.14 -	Resposta das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para uma trajetória helicoidal.....	84
Figura 5.15 -	Valores das variáveis manipuladas para trajetória helicoidal.....	85
Figura 5.16 -	Erros das coordenadas de posição (x, y, z) para uma trajetória helicoidal.....	85
Figura 5.17 -	Erros das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para uma trajetória helicoidal.....	86
Figura 5.18 -	Rastreamento de trajetória aplicada em tarefas de busca.....	88
Figura 5.19 -	Resposta das coordenadas de posição (x, y, z) para trajetória aplicada em tarefas de busca.....	89
Figura 5.20 -	Resposta das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para trajetória aplicada em tarefas de busca.....	89
Figura 5.21 -	Valores das variáveis manipuladas para trajetória aplicada em tarefas de busca.....	90
Figura 5.22 -	Erros das coordenadas de posição (x, y, z) para uma trajetória aplicada em tarefas de busca.....	91
Figura 5.23 -	Erros das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para uma trajetória aplicada em tarefas de busca.....	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 - Comparativo entre diversos tipos de VANT'S (1 = Ruim; 4 = Muito Bom).....	6
Tabela 3.1 - Principais efeitos físicos que atuam no quadricóptero (Bouabdallah, 2007).....	33
Tabela 3.2 - Relação de parâmetros do quadricóptero.....	51
Tabela 5.1 - Restrições das variáveis manipuladas pelo controlador.....	71
Tabela 5.2 - Parâmetros do controlador PID.....	71
Tabela 5.3 - Análise quantitativa de erros para trajetória circular.....	81
Tabela 5.4 - Análise quantitativa de erros para trajetória helicoidal.....	87
Tabela 5.5 - Análise quantitativa de erros para trajetória de busca.....	92

LISTA DE SÍMBOLOS

Notação

a	Letra minúscula em itálico denota um escalar
\mathbf{a}	Letra minúscula em itálico e negrito denota um vetor
\mathbf{A}	Letra maiúscula em itálico e negrito denota uma matriz

Modelagem Dinâmica

m	Massa total do quadricóptero
b	Coefficiente de empuxo dos rotores
d	Coefficiente de arrasto das hélices
g	Aceleração devido à gravidade
l	Distância entre os rotores e o centro de massa do veículo
Ω_i	Velocidade angular do i -ésimo rotor ao redor do seu eixo de rotação
Ω_r	Velocidade angular residual das hélices
J_r	Momento de inércia do rotor ao redor do seu eixo de rotação
ϕ	Ângulo de rolagem
θ	Ângulo de arfagem
ψ	Ângulo de guinada
f_i	Força gerada pelo i -ésimo rotor
U_1	Força de empuxo total
τ_ϕ	Torque de rolagem
τ_θ	Torque de arfagem
τ_ψ	Torque de guinada
τ_{drag}	Força aerodinâmica das hélices
τ_{Mi}	Esforço de torsão gerado por cada motor elétrico

$I = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$	Sistema de coordenadas inercial
$B = \{\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L\}$	Sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido
L	Função Lagrangeano do sistema
E_{cRot}	Energia cinética rotacional
E_{cTrans}	Energia cinética translacional
E_p	Energia Potencial
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	Momentos de inércia sobre os eixos x, y, z
I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}	Produtos de inércia sobre os eixos x, y, z
$\xi = [x \ y \ z]^T$	Vetor posição do centro de massa do veículo em relação ao referencial inercial
$\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$	Vetor de orientação do veículo (ângulos de Euler)
$\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$	Vetor de velocidade angular do quadricóptero em relação ao sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido
$\dot{\eta} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$	Vetor da derivada temporal dos ângulos de Euler
f_ξ	Vetor de forças generalizadas
f_B	Vetor de forças de translação aplicadas no veículo
τ_η	Vetor de torques generalizados
τ_B	Vetor de torques aplicados no veículo
q	Vetor de coordenadas generalizadas
v_B	Vetor de velocidade linear do veículo em relação ao sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido
v	Vetor de velocidade linear do veículo em relação ao sistema inercial
τ_G	Vetor do momento giroscópico
R_I	Matriz de rotação que descreve a orientação do corpo rígido em relação ao sistema de coordenadas inercial
J	Matriz de inércia do corpo rígido
W_η	Matriz de Euler

Controle

\mathbf{x}	Vetor de estados
\mathbf{u}	Vetor de entradas
\mathbf{A}	Matriz de estados
\mathbf{B}	Matriz de entradas
\mathbf{C}	Matriz de saídas
H_p	Fim do horizonte de predição
H_w	Início do horizonte de predição
H_u	Horizonte de controle
\mathbf{Q}	Matriz de pesos relacionada ao erro de saída
\mathbf{R}	Matriz de pesos relacionada ao esforço de controle
\mathbf{Z}	Matriz das saídas preditas
$\mathbf{\Gamma}$	Vetor de referência de trajetória
$\Delta \mathbf{U}$	Vetor de variação da variável manipulada
V	Função custo
u_x	Entrada virtual para o movimento no eixo x
u_y	Entrada virtual para o movimento no eixo y

LISTA DE ABREVIATURAS

ARIMA	Autoregressivo Integrado de Média Móvel
CPBM	Controle Preditivo Baseado em Modelo
CRHPC	<i>Constrained Receding-Horizon Predictive Control</i>
DMC	<i>Dinamic Matrix Control</i>
EHAC	<i>Extended Horizon Adaptive Control</i>
EPSAC	<i>Extended Prediction Self-Adaptive Control</i>
GPC	<i>Generalized Predictive Control</i>
MAC	<i>Model Algorithm Control</i>
MPHC	<i>Model Predictive Heuristic Control</i>
PD	Proporcional Derivativo
PID	Proporcional Integral Derivativo
QDMC	<i>Quadratic Dinamic Matrix Control</i>
SGPC	<i>Stable Generalized Predictive Control</i>
UPC	<i>Unified Predictive Control</i>
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Histórico.....	3
1.2. Motivação.....	5
1.3. Estado da Arte.....	7
1.4. Objetivos.....	10
1.5. Organização Geral da Dissertação.....	10
1.6. Lista de Publicações.....	11
 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	 13
2.1. Controle Preditivo Baseado em Modelo.....	13
<i>2.1.1. Estratégia do CPBM.....</i>	<i>15</i>
<i>2.1.2. Perspectiva Histórica.....</i>	<i>16</i>
<i>2.1.3. Elementos do Controle Preditivo.....</i>	<i>17</i>
2.2. Controle Proporcional Integral Derivativo.....	24
<i>2.2.1. Perspectiva Histórica.....</i>	<i>24</i>
<i>2.2.2. Algoritmo Básico.....</i>	<i>25</i>
<i>2.2.3. Filtro Derivativo.....</i>	<i>28</i>
<i>2.2.4. Outras Estruturas de Controle PID.....</i>	<i>29</i>
2.3. Conclusões.....	30
 3. MODELAGEM DINÂMICA.....	 31
3.1. Sistemas de Coordenadas.....	33

3.2. Formulação de Euler-Lagrange.....	37
3.2.1. <i>Energia Cinética Translacional.....</i>	38
3.2.2. <i>Energia Cinética Rotacional.....</i>	38
3.2.3. <i>Energia Potencial.....</i>	41
3.2.3. <i>Equações Dinâmicas via Euler-Lagrange.....</i>	42
3.3. Formalismo de Newton-Euler.....	46
3.3.1. <i>Força Translacional e Força Gravitacional.....</i>	47
3.3.2. <i>Torques.....</i>	48
3.3.3. <i>Equações Dinâmicas via Newton-Euler.....</i>	49
3.4. Parâmetros do Quadricóptero.....	50
3.5. Conclusões.....	51
 4. ESTRUTURA DE CONTROLE DO QUADRICÓPTERO.....	 52
4.1. Controle Preditivo Utilizando Espaço de Estados.....	53
4.1.1. <i>CPBM Aplicado ao Subsistema Translacional.....</i>	57
4.1.2. <i>CPBM Aplicado ao Subsistema Rotacional.....</i>	59
4.2. Controle PID para Movimentação no Plano xy.....	62
4.3. Conclusões.....	65
 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	 66
5.1. Simulação Computacional.....	66
5.2. Parâmetros dos Controladores.....	68
5.2.1. <i>Parâmetros do CPBM.....</i>	68
5.2.2. <i>Parâmetros do PID.....</i>	71
5.3. Resultados.....	72

5.3.1. <i>Resposta ao Degrau</i>	72
5.3.2. <i>Rastreamento de Trajetória</i>	75
5.4. Conclusões	93
6. CONCLUSÕES	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97

CAPÍTULO 1

Introdução

Nas últimas décadas, avanços nas áreas de sensoriamento, processamento de informações, armazenamento de energia e em metodologias de controle possibilitaram o grande avanço dos veículos aéreos não tripulados (VANT's). Tais sistemas tem despertado o interesse de pesquisadores, uma vez que podem ser utilizados em importantes aplicações civis e militares, como: tarefas de busca e resgate, inspeções de grandes áreas, segurança, intervenção em ambientes hostis e nas indústrias de filmagem e entretenimento (Sá, 2012).

Dentre os VANT's, a configuração conhecida como quadricóptero (ou quadrirrotor) vem ganhando destaque por apresentar diversas vantagens quando comparado com aviões ou helicópteros convencionais.

O quadricóptero pertence a uma classe de veículos aéreos não tripulados com asas rotativas. O sistema é semelhante a um helicóptero tradicional, porém com quatro conjuntos rotor/hélice, conforme apresentado na Figura 1.1.

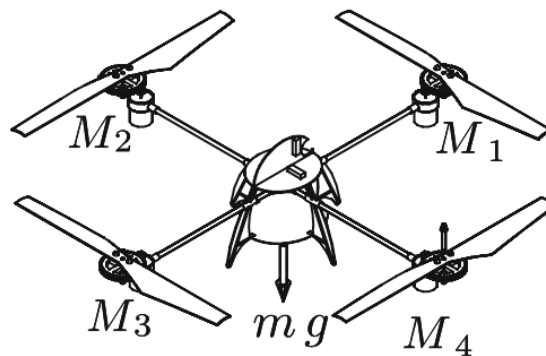


Figura 1.1 – Diagrama esquemático de um quadricóptero (adaptado de Sanchez *et al.*, 2010).

Esta configuração de veículo aéreo apresenta seis graus de liberdade, sendo três coordenadas de posição no espaço tridimensional (x , y , z) e três ângulos de orientação (rolagem, arfagem e guinada – *roll*, *pitch* e *yaw*), conforme observado na Figura 1.2.

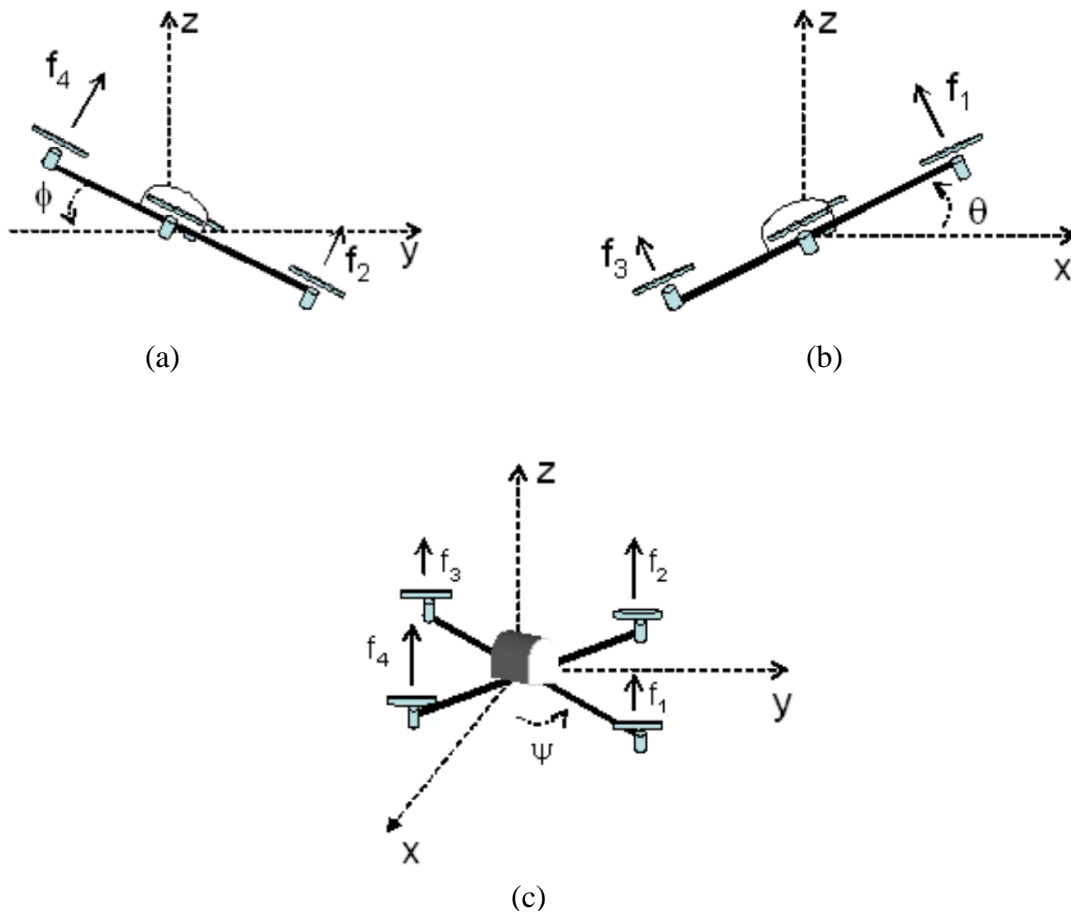


Figura 1.2 – Ângulos de orientação: (a) rolagem, (b) arfagem e (c) guinada (Castillo, Lozano e Dzul, 2005a).

Dois de seus rotores contrários giram em sentido horário, enquanto que os outros dois operam em sentido anti-horário. Desta forma, não se faz necessária a utilização de um rotor de cauda para compensar o torque gerado pelos propulsores.

Este veículo atua através do equilíbrio de forças produzidas pelos quatro rotores. Movimentos longitudinais (arfagem) são gerados pela alteração de velocidade dos rotores dianteiro e traseiro ($f1$ e $f3$), enquanto que deslocamentos laterais (rolagem) resultam da alteração da velocidade dos rotores esquerdo e direito ($f2$ e $f4$). Movimentos de guinada são obtidos através da diferença de contra torque entre cada par de hélices. Já o movimento

ascendente ou descende do quadricóptero é gerado pela soma de forças das quatro hélices (Hoffmann, Goddemeier e Bertram, 2010).

O quadricóptero possui seis graus de liberdade e apenas quatro variáveis de controle (velocidade dos quatro rotores), desta forma, o mesmo caracteriza-se por ser um sistema mecânico subatuado. Isto resulta na impossibilidade de regular todos os graus de liberdade do sistema no mesmo instante de tempo.

Sistemas mecânicos subatuados são mais complexos e se mostram como um desafio na área de controle. Desta forma, faz-se necessária a utilização de técnicas de controle mais avançadas que permitam voos de alta performance, incluindo situações específicas como: pairagem, decolagem e aterrisagem (Raffo, 2011).

1.1. Histórico

O conceito deste tipo de veículo aéreo não é recente. Em 1907, os irmãos Louis e Jacques Breguet, juntamente com o professor Charles Richet construíram a aeronave conhecida como *Gyroplane No. 1*, apresentada na Figura 1.3. Foi o primeiro relato de uma aeronave tripulada com quatro rotores e hélices. Foram registrados vários voos em baixa altitude e com duração de poucos segundos (Leishman, 2000).

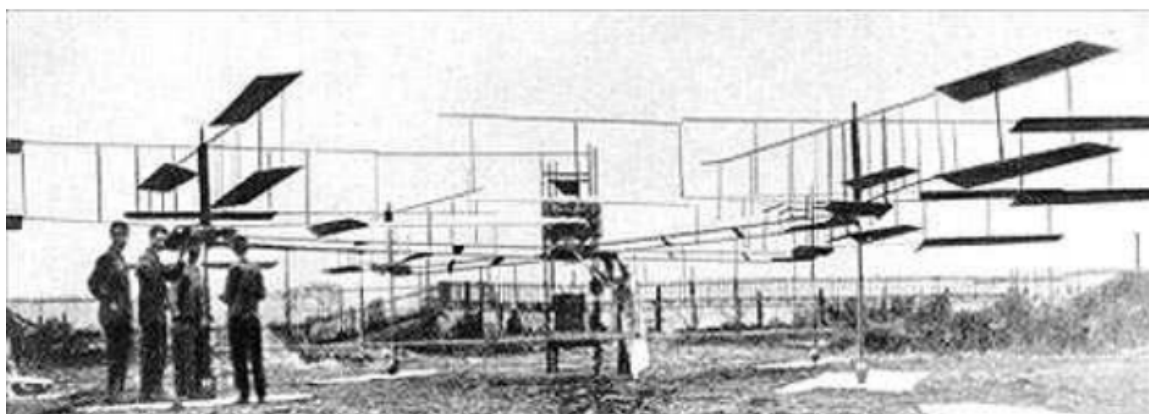


Figura 1.3 – Veículo aéreo *Gyroplane No. 1* (Leishman, 2000).

Este quadrirotor pesava aproximadamente 578 kg, incluindo o peso de dois tripulantes, e contribuiu com a teoria de pares de rotores girarem em sentidos opostos (Leishman, 2000).

Já em 1922, a *US Army Air Corps*, através do Dr. George de Bothezat e Ivan Jerome, desenvolveu um quadricóptero com hélices de seis pás em cada rotor, conforme pode ser observado na Figura 1.4. A aeronave alcançava uma altura máxima de 5 m e possuía um peso de 1700 kg.

Conhecida como “*Octopus Voador*”, a aeronave realizou aproximadamente 100 voos, contudo, devido aos altos custos financeiros, o projeto foi cancelado (Leishman, 2000).



Figura 1.4 – “*Flying Octopus*”, Bothezat, produzido em 1922 (Leishman, 2000).

Ainda em 1922, Etienne Oemichen, um engenheiro da Peugeot, desenvolveu o quadricóptero “*Oemichen*”, que pode ser visualizado na Figura 1.5. Seu peso era de aproximadamente 800 kg (Leishman, 2000).

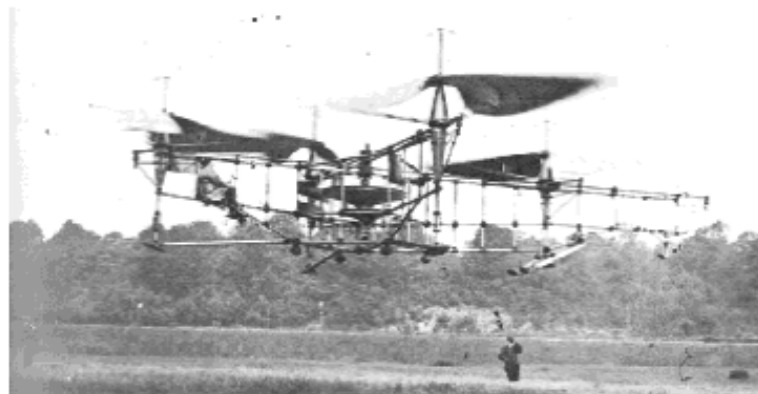


Figura 1.5 – Quadricóptero *Oemichen* (Leishman, 2000).

Contudo, o projeto de quadricópteros acabou sendo esquecido por várias décadas, devido a sua dificuldade de estabilização, bem como ao seu grande porte, o que elevava os

custos de produção. Apenas após a década de 80, com avanços tecnológicos em atuadores e sensores de pequena escala, conhecidos como sistemas microeletromecânicos, e no armazenamento de energia e no processamento de informações, é que eles ressurgiram como veículos não tripulados.

Desde então empresas e universidades vêm pesquisando o tema, contudo, o voo autônomo completo em ambiente interno e externo ainda é um desafio, uma vez que, tais veículos estão sujeitos a distúrbios externos como rajadas de ventos, além de incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas.

Na Figura 1.6 é possível observar a estrutura dos quadricópteros desenvolvidos atualmente.

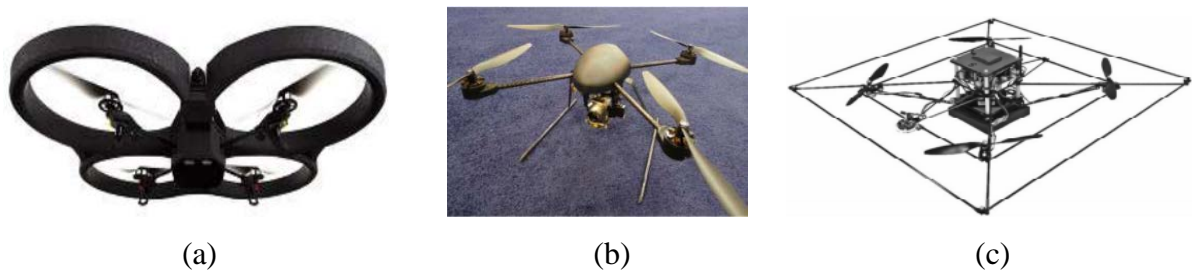


Figura 1.6 – (a) AR.Drone; (b) Draganflyer; (c) Starmac (Sá, 2012).

1.2. Motivação

Diversos estudos foram publicados na área de controle de veículos aéreos não tripulados, sobretudo utilizando aviões e helicópteros, contudo, nos últimos anos o quadricóptero tem ganhado destaque por apresentar grandes vantagens quando comparado com outros veículos, tais como:

- O quadricóptero é sustentado e acionado por quatro rotores, o que possibilita reduzir o tamanho individual de cada rotor e manter ou aumentar a capacidade total de carga;
- A simplicidade mecânica do projeto, que provê controle da movimentação através da variação de velocidade dos quatro rotores. Em um helicóptero convencional, a velocidade angular das hélices é mantida constante e o movimento é controlado

variando-se o ângulo de ataque das pás. Isto requer sistemas de transmissão entre os rotores, bem como, dispositivos mecânicos para alterar os ângulos citados (Raffo, 2011);

- Como estes veículos utilizam motores elétricos ao invés de motores à combustão, torna-se uma boa alternativa para utilizar em ambientes fechados, uma vez que, não poluem o ambiente;
- Tais veículos são baseados no conceito de decolagem e pouso vertical, o que proporciona uma alta manobrabilidade, capacidade de pairagem, e de realizar voos em ambientes hostis (Castillo, Lozano e Dzul, 2005a).

A principal desvantagem do quadricóptero é que ele apresenta um peso e um consumo de energia mais elevado, devido aos motores adicionais.

Na Tabela 1.1 é possível observar uma comparação do quadricóptero com outros VANT's, através de diversos aspectos, tais como: custo energético, manobrabilidade, simplicidade mecânica, entre outros.

Tabela 1.1 – Comparativo entre diversos tipos de VANT'S (1 = Ruim; 4 = Muito Bom).

	A	B	C	D	E	F	G	H
Custo Energético	2	2	2	2	1	4	3	3
Custo de Controle	1	1	4	2	3	3	2	1
Capacidade de Carga	2	2	4	3	3	1	2	1
Manobrabilidade	4	3	2	2	3	1	3	3
Simplicidade Mecânica	1	2	3	1	4	4	1	1
Complexidade Aerodinâmica	1	1	1	1	4	3	1	1
Voo em Baixa Velocidade	4	3	4	3	4	4	2	2
Voo em Alta Velocidade	2	4	1	2	3	1	3	3
Miniaturização	2	3	4	2	3	1	2	4
Voo Estacionário	4	4	4	4	4	3	1	2

A: Helicóptero Convencional; B: Rotor Axial; C: Rotores Coaxiais; D: Rotores Tandem; E: Quadricóptero; F: Dirigível; G: Modelo Pássaro; H: Modelo Inseto. (adaptado de Bouabdallah, 2007).

O quadricóptero pode ser utilizado em diversas atividades civis e militares. Nos últimos anos suas principais aplicações estão voltadas para as seguintes áreas:

- Operações de busca e salvamento em diferentes ambientes;
- Militares, para reconhecimento de ambientes hostis e vigilância de fronteiras;
- Serviços de transporte e entrega de mercadorias;
- Inspeções de linhas de transmissão e distribuição elétrica, não havendo a necessidade de verificação *in loco* de falhas;
- Fotos e filmagens panorâmicas de baixo custo para a indústria cinematográfica e eventos esportivos;
- Monitoramento e vigilância de grandes áreas como: indústrias, plantações e criação de rebanho.

1.3. Estado da Arte

Na literatura encontram-se variadas técnicas de controle aplicadas em VANT's do tipo quadricóptero. Diferentes estratégias têm sido desenvolvidas visando que estes veículos possam realizar tarefas de posicionamento e rastreamento de trajetória em ambientes internos e externos.

Com a intenção de estabilizar os ângulos de orientação do VANT, Bouabdallah *et al.* (2004a), comparou duas técnicas de controle: o proporcional integral derivativo (PID) e o regulador linear quadrático. No projeto do controlador PID foi utilizado um modelo linearizado e o regulador linear quadrático foi baseado em um modelo variante no tempo. Ainda com o mesmo intuito, Azfar e Hazry (2011), observaram que o controle PID se mostrou satisfatório na estabilização da orientação do VANT.

Em Hoffman *et al.* (2010) outras duas técnicas de controle foram comparadas na estabilização do veículo: o PID e o *Integral Backstepping*. Foi realizada uma análise de robustez em relação às incertezas paramétricas e aos distúrbios aerodinâmicos. Os autores observaram que em baixas velocidades e com pequenas perturbações aerodinâmicas um

controlador PID é suficiente para a estabilização do quadricóptero. Contudo, em velocidades mais altas e na presença de distúrbios de vento, a técnica se mostrou inadequada.

Com o objetivo de realizar o voo estacionário (manobra de pairagem), Lara *et al.* (2006) implementou um controle linear proporcional derivativo (PD) e um controle não linear, o *Nested Saturations*. Os autores observaram que o controle não linear foi mais robusto mediante perturbações aplicadas no sistema e ruídos dos sensores.

De acordo com Bouabdallah *et al.* (2004b), um controlador baseado em *Lyapunov* foi projetado para estabilizar o subsistema rotacional e controlar a altitude do veículo aéreo.

Com o intuito de possibilitar a navegação (controle de posição e orientação) do quadricóptero em um espaço tridimensional, controladores PID foram desenvolvidos em: Erginer e Altuğ (2007); Salih *et al.* (2010); Li e Li (2011) e Ghadiok *et al.* (2012). Ainda com este mesmo objetivo, em Zareb *et al.* (2013), foi desenvolvida uma técnica de controle híbrida, o PID-Fuzzy, para voos em ambientes internos.

De acordo com Bouabdallah e Siegwart (2005) duas técnicas de controle não lineares foram comparadas através de resultados simulados e experimentais: o *Backstepping* e o *Sliding-Mode*. Tais técnicas permitiram o controle completo do veículo. Os autores apontaram o *Backstepping* como o melhor resultado obtido.

Ainda em Bouabdallah e Siegwart (2007) um controlador *Backstepping* com ação integral foi implementado para melhorar a performance de rastreamento de trajetória na presença de distúrbios e efeitos não modelados.

Algoritmos de controle adaptativo também têm despertado o interesse no projeto de sistemas de controle de VANT's, devido a sua característica de melhorar o desempenho e lidar com as incertezas de parâmetros aerodinâmicos e imprecisões de modelagem (Bouadi *et al.*, 2011), (Fang e Gao, 2011).

Diversas estratégias de controle foram desenvolvidas, contudo, muitas não avaliam a robustez do controlador na presença de distúrbios externos, dinâmicas não modeladas e incertezas paramétricas.

Com este intuito, Raffo *et al.* (2008), apresentou uma estratégia composta por um controlador H_∞ não linear responsável por estabilizar os movimentos rotacionais e um controlador *Backstepping* para guiar o quadricóptero em uma referência de trajetória. O sistema foi capaz de rejeitar incertezas paramétricas em termos inerciais e distúrbios nos momentos aerodinâmicos (sistema rotacional).

As estratégias de controle apresentadas consideram que as ações de controle nunca alcançarão os limites de saturação dos atuadores, embora na prática isto seja possível. Por exemplo, quando o veículo aéreo estiver longe do seu destino, provavelmente os sinais de controle gerados serão mais elevados que os valores admissíveis. Além disso, os veículos são compostos de partes mecânicas e elétricas, que também estão sujeitas às restrições físicas (Raffo, 2011).

Desta forma, quando as restrições devem ser consideradas no projeto, o controle preditivo baseado em modelo (CPBM) torna-se uma opção interessante. O CPBM tem por objetivo calcular uma sequência de controle futura, em um horizonte definido, de tal maneira que a predição da saída da planta é levada para a referência. Isto é obtido através da minimização de uma função custo em relação às ações de controle futuras (Camacho e Bordons, 2004).

Outras vantagens do CPBM consistem na habilidade de guiar o sistema suavemente e poder ser facilmente estendido para sistemas multivariáveis. Sua desvantagem é a alta carga computacional que pode impossibilitar sua execução em aplicações reais.

Desta forma, Raffo *et al.* (2010; 2011), apresentou uma estratégia composta por um CPBM responsável por guiar o quadricóptero ao longo de uma trajetória e um controlador H_∞ não linear para estabilização do subsistema rotacional. O projeto alcançou erro estacionário nulo na presença de distúrbios sustentados nos momentos e nas forças aerodinâmicas. Além disso, foram consideradas incertezas paramétricas em termos de massa e inércia.

Em Alexis, Nikolakopoulos e Tzes (2010) foi desenvolvida uma estrutura de controle composta pelo CPBM, aplicado no subsistema translacional e no rotacional. A análise foi realizada através de um sistema experimental. Os resultados apontaram que o veículo foi capaz de realizar tarefas de rastreamento de trajetória mediante situações de distúrbios aerodinâmicos, além de lidar com as restrições físicas do sistema.

Segundo Lopes *et al.* (2011) um CPBM foi desenvolvido para rastreamento de trajetória e estabilização da orientação de um quadrirotor. Os resultados foram comparados com as técnicas de controle PID e *Backstepping*. Quando comparado com o PID, o CPBM apresentou uma melhor performance. Em relação ao *Backstepping*, o tempo de resposta do CPBM foi maior, contudo, o veículo rastreou a trajetória de forma mais suave, além da habilidade de incorporar restrições físicas e operacionais do sistema.

1.4. Objetivos

Conforme exposto na sessão anterior, diversas estratégias de controle para o quadricóptero têm sido desenvolvidas na última década. Contudo, grande parte das pesquisas analisou o comportamento do veículo aéreo apenas em ambientes internos, onde não sofrem os efeitos de perturbações aerodinâmicas.

Desta forma, o objetivo principal desta dissertação é contribuir para o desenvolvimento e a implementação de estratégias de controle que possam solucionar o problema de posicionamento e rastreamento de trajetória em ambientes internos e externos.

Assim, a primeira etapa do projeto está relacionada à obtenção de um modelo dinâmico que represente de forma apropriada o quadricóptero. Para tal, a formulação matemática será baseada nas leis físicas que regem o sistema mecânico, levando-se em conta a complexidade e o realismo.

Uma estratégia comum para resolver os problemas de posicionamento e rastreamento de trajetória em sistemas mecânicos subatuados é a utilização de uma estrutura de controle em cascata. Desta forma, a estratégia de controle proposta será constituída por dois subsistemas cascadeados, o subsistema translacional e o rotacional.

As metodologias de controle que serão implementadas no VANT são: o controle preditivo baseado em modelo e o controlador PID. Tais técnicas irão possibilitar que o veículo aéreo realize o rastreamento de trajetória de forma suave, além disso, sua robustez buscará atenuar distúrbios externos e incertezas paramétricas, além de considerar as restrições físicas do sistema no projeto de controle.

Os resultados do trabalho proposto serão analisados através de simulações computacionais desenvolvidas no software Matlab[®]/Simulink.

1.5. Organização Geral da Dissertação

Para melhor compreensão, esta dissertação é dividida nos seguintes capítulos:

- **Capítulo 2:** Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica das técnicas de controle implementadas neste trabalho: controle preditivo baseado em modelo e controlador
-

PID. É realizada uma breve discussão a respeito da estratégia e dos principais elementos pertinentes a cada estrutura de controle.

- **Capítulo 3:** Neste capítulo são apresentadas as equações de movimento de um veículo aéreo não tripulado, do tipo quadricóptero. Inicialmente é realizada uma descrição da operação do veículo, bem como a apresentação das premissas consideradas durante a modelagem. A modelagem dinâmica é obtida através de duas aproximações: de Euler-Lagrange e de Newton-Euler. Os parâmetros do veículo aéreo utilizados nas simulações são apresentados ao final do capítulo.
- **Capítulo 4:** Ao longo deste capítulo é apresentada a estratégia de controle em cascata aplicada ao veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero. O sistema mecânico é dividido em subsistema translacional e subsistema rotacional. São apresentadas as equações e os parâmetros utilizados no projeto dos controladores.
- **Capítulo 5:** Esta seção destina-se a apresentação dos resultados referentes ao controle de posicionamento e rastreamento de trajetória de um VANT, do tipo quadricóptero. Além disso, são apresentados os resultados relacionados à robustez mediante distúrbios aerodinâmicos e incertezas paramétricas.
- **Capítulo 6:** Este capítulo destina-se à apresentação das principais conclusões do trabalho, além de sugestões para projetos futuros.
- **Referências Bibliográficas:** Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas citadas neste trabalho.

1.6. Lista de Publicações

Ao longo do desenvolvimento deste projeto foram publicados os seguintes trabalhos:

1. Lima, G. V.; Souza, R. M. J. A.; Morais, A. S.; Morais, J. S. Modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero. **XII CEEL - Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica**, Universidade Federal de Uberlândia, 2014.
 2. Souza, R. M. J. A.; Lima, G. V.; Morais, A. S.; Morais, J. S. Desenvolvimento de um simulador de quadricópteros em plataforma Matlab[®]. **XII CEEL - Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica**, Universidade Federal de Uberlândia, 2014.
 3. Lima, G. V.; Souza, R. M. J. A.; Da Silva, F. V. R.; Morais, A. S.; Morais, J. S.; Ladeira, G. M. V. PID Control And Analysis of the Robustness in a Quadroter. **23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering**, December 6-11, Rio de Janeiro, Brazil, 2015. (No prelo 2015).
 4. Lima, G. V.; Souza, R. M. J. A.; Da Silva, F. V. R.; Morais, A. S.; Morais, J. S. Modelagem Dinâmica, Controle e Análise de Robustez de um Quadricóptero. **Ciência e Engenharia**, 2015. (Aguardando o aceite).
 5. Lima, G. V.; Souza, R. M. J. A.; Da Silva, F. V. R.; Morais, A. S.; Morais, J. S. Análise Dinâmica e Controle PID de um Quadricóptero. **XIII CEEL - Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica**, Universidade Federal de Uberlândia, 2015. (No prelo 2015).
 6. Lima, G. V.; Souza, R. M. J. A.; Da Silva, F. V. R.; Morais, A. S. Dynamic Modeling and Control for Path Tracking of a Quadroter Helicopter. **Revista IEEE América Latina**, 2015. (Aguardando o aceite).
-

CAPÍTULO 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo trata de alguns temas importantes para a compreensão deste trabalho e para a posterior discussão dos resultados, tais como: controle preditivo baseado em modelo e controle proporcional integral derivativo.

2.1. Controle Preditivo Baseado em Modelo

O controle preditivo baseado em modelo, ou CPBM, surgiu na década de 70 e desde então tem atraído a atenção da comunidade acadêmica e de empresas interessadas em aplicá-lo em seus processos industriais. O termo CPBM não designa uma estratégia de controle específica, mas uma classe de algoritmos de controle que utilizam explicitamente um modelo do processo a ser controlado para prever as respostas futuras da planta (Camacho e Bordons, 2004).

O princípio do CPBM reflete a habilidade humana de tomar decisões que conduzam aos melhores resultados ao longo de um intervalo de tempo futuro. O homem seleciona estas decisões com base no conhecimento do modelo em questão, e reavalia constantemente suas ações à medida que novas observações são realizadas (Gomes, 2006).

Apesar de existirem diversas estratégias de controle preditivo, todas se baseiam em maior ou menor grau, nas seguintes premissas (Camacho e Bordons, 2004):

- A utilização explícita de um modelo do processo para realizar a predição da saída em um intervalo de tempo futuro (horizonte de predição);
- Através da minimização de uma função objetivo é possível obter a sequência de controle a ser aplicada no processo;
- Estratégia de horizonte deslizante, em que a cada instante o horizonte de predição é deslocado em direção ao futuro. Desta forma, apenas o primeiro sinal de controle da sequência calculada é aplicado no sistema.

Os diversos algoritmos de controle preditivo diferem na forma do modelo usado para representar o processo, os ruídos e pela função custo a ser minimizada. Existem diversas aplicações bem sucedidas de controle preditivo, não apenas na indústria química, como nas áreas de processamento de alimentos, automotiva, médica e em aplicações aeroespaciais.

O CPBM apresenta uma série de vantagens em relação a outros métodos de controle, tais como (Malacalza, 2004):

- Facilidade de implementação em sistemas multivariáveis;
 - Desempenho satisfatório ao trabalhar com sistemas que apresentam perturbações mensuráveis ou não;
 - Aplicável em sistemas lineares e não lineares;
 - Utilizado em sistemas com características complexas, tais como instabilidade em malha aberta e fase não mínima;
 - Conceitos intuitivos e ao mesmo tempo, a sintonia é fácil de ser realizada;
 - A extensão para o tratamento de restrições é conceitualmente simples, sendo que podem ser sistematicamente incluídas durante o projeto de controle;
 - Pode ser aplicado em processos onde se conhece os valores futuros de referência, por exemplo, na área da robótica ou em processos por batelada.
-

A lei de controle originada do CPBM é de fácil implementação e requer poucos cálculos, quando a dinâmica do processo não muda e não se consideram as restrições. Porém, no caso de controle adaptativo todos os cálculos devem ser feitos a cada período amostral e, além disto, quando são consideradas restrições, a quantidade de cálculos necessários torna-se bastante elevada (Raffo, 2005).

2.1.1. Estratégia do CPBM

No geral, os controladores preditivos se baseiam na seguinte estratégia, representada pela Figura 2.1.

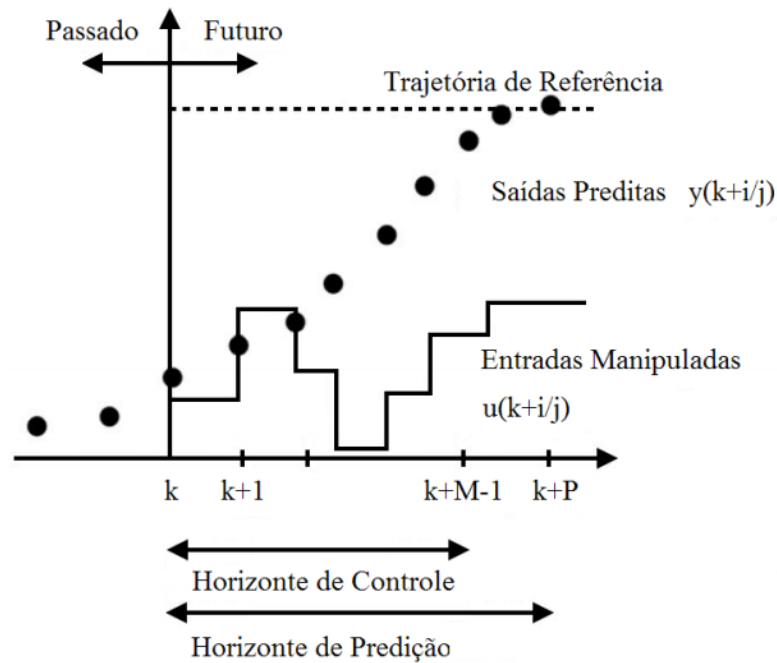


Figura 2.1 – Esquema representativo de um controlador preditivo (Gonçalves, 2012).

Em um determinado instante k de amostragem, o controlador recebe informações sobre o estado atual do sistema, e baseado nestas informações e no modelo do processo, prediz o comportamento dinâmico futuro do sistema em todo um horizonte de predição P . Desta forma, determina-se para todo o horizonte de controle M , com $M \leq P$, o valor das variáveis manipuladas que otimizam uma função objetivo pré-determinada (Garcia *et. al.*, 1989).

Se não ocorressem erros na modelagem do sistema ou perturbações, então todos os valores das variáveis manipuladas, calculadas no instante k , poderiam ser implementadas. No

entanto, isto não é possível, uma vez que, em várias situações o comportamento real do sistema é diferente do comportamento predito pelo modelo. Desta forma, a função obtida para todo o horizonte de controle tem apenas o seu primeiro termo implementado e todo o cálculo é repetido no próximo instante de amostragem e assim sucessivamente (Gonçalves, 2012).

2.1.2. Perspectiva Histórica

Os primeiros estudos envolvendo o CPBM surgiram no final da década de 70, com o propósito de contornar obstáculos impostos pelos problemas multivariáveis. Richalet *et. al.* (1976) desenvolveu o MPHC (*Model Predictive Heuristic Control*), posteriormente conhecido como MAC (*Model Algorithmic Control*), cuja aplicação destinava-se a plantas petroquímicas. Em seguida, Cutler e Ramaker (1979) apresentaram a estratégia DMC (*Dinamic Matrix Control*).

Após as primeiras publicações, surgiram novas formulações do CPBM que contribuíram para o desenvolvimento desta estratégia de controle. Prett e Gillete (1979) desenvolveram novas aplicações para o DMC, enquanto que Cutler *et. al.* (1983) formulou uma extensão do DMC denominada de QDMC (*Quadratic Dinamic Matrix Control*), que foi aprimorada posteriormente por Garcia e Morshedi (1986). Ao final da década de 80, Grosdidier *et. al.* (1988) implementou melhorias no algoritmo MAC, e no começo da década de 90 iniciou-se o estudo de estratégias CPBM com restrições.

As primeiras versões do CPBM foram aplicadas na indústria de processos químicos e obtiveram um grande sucesso devido à simplicidade do algoritmo e o uso da resposta ao impulso ou resposta ao degrau como modelo do sistema em vez de formulações matemáticas mais complexas. Contudo, não foram realizados estudos formais a respeito da estabilidade do sistema em malha fechado ou da robustez do controlador.

Estimulada pelo grande sucesso do CPBM na indústria, a comunidade acadêmica preocupou-se em abordar questões teóricas não estudadas até então. Desta forma, na década de 90 surgiram métodos que garantem a estabilidade do sistema, conforme proposto por Clarke e Scattolini (1991) que desenvolveram o CRHPC (*Constrained Receding-Horizon Predictive Control*) e Kouvaritakis, Rossiter e Chang (1992) com o SGPC (*Stable Generalized Predictive Control*). Ambas as técnicas provaram ser estáveis através da imposição de restrições às saídas após um horizonte finito. O problema da estabilidade tem sido abordado sob diferentes pontos de vista e várias contribuições têm aparecido nos últimos

anos. As condições gerais e suficientes para projetar um CPBM com restrições estável estão reunidas no trabalho de Mayne *et. al.* (2000).

Além disso, foram realizadas análises de projetos de controle robusto com o intuito de lidar com problemas relacionados com: incertezas aleatórias, tempo morto, desvio planta/modelo, modelo estável/planta instável, e modelo linear/planta não linear, como em Kouvaritakis, Rossiter e Schuurmans (2000).

Atualmente, os trabalhos na área de CPBM continuam se diversificando, e algumas questões como identificação de modelo, predição e estimação de perturbações não mensuráveis, tratamento de incertezas e CPBM não linear despontam como os principais desafios a serem confrontados nos trabalhos futuros.

2.1.3. Elementos do Controle Preditivo

Existem várias formulações e diferentes estratégias de implementação de um controlador CPBM. A modelagem de processos pode ser realizada através de funções de transferência, representação em espaço de estados, resposta ao degrau ou impulso. De acordo com Camacho e Bordons (2004) todas estas técnicas apresentam determinados elementos em comum, que são:

- Modelo de predição
- Função objetivo
- Obtenção da lei de controle

Modelo de Predição

O modelo de predição é o elemento mais importante dos controladores preditivos, e deve ser completo o suficiente para capturar a dinâmica do processo, permitir o cálculo das predições de saída, e ao mesmo tempo ser intuitivo e permitir análises teóricas. A utilização de um modelo que represente o processo ocorre pela necessidade de se calcular as saídas preditas em instantes de tempo futuros $\hat{y}(t+k|t)$. O modelo pode ser dividido em duas

partes: o modelo do processo e o modelo dos distúrbios, sendo ambas as partes necessárias para a predição.

Modelo do Processo

Os principais modelos utilizados para representar os processos são:

- Resposta ao impulso: conhecida também como modelo de convolução, ela aparece no MAC e em casos especiais do GPC e EPSAC. A relação entre a entrada e a saída é dada pela equação (2.1).

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(t-i) \quad (2.1)$$

onde h_i são as amostras da saída quando o processo é excitado por um impulso unitário. Esta soma é truncada e somente os N primeiros valores são considerados, desta forma, somente processos estáveis podem ser representados:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N h_i u(t-i) = H(z^{-1})u(t) \quad (2.2)$$

onde $H(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_N z^{-N}$, em que z^{-1} é um operador de atraso unitário. Usualmente N é um valor alto, desta forma, faz-se necessário adquirir uma grande quantidade de parâmetros para descrever o modelo. A predição da saída é dada por:

$$\hat{y}(t+k | t) = \sum_{i=1}^N h_i u(t+k-i | t) = H(z^{-1})u(t+k | t) \quad (2.3)$$

Este método é bastante utilizado devido ao fato de ser intuitivo, a técnica de identificação do modelo é simples, não é necessário um conhecimento *a priori* sobre o processo e é possível lidar com dinâmicas complexas como: comportamento de fases não mínimas e atrasos.

- Resposta ao degrau: presente na estratégia DMC e em suas variantes. Neste modelo um degrau unitário é utilizado como sinal de entrada. Para sistemas estáveis, a resposta truncada é dada por:

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t-i) = y_0 + G(z^{-1})(1 - z^{-1})u(t) \quad (2.4)$$

onde g_i são as amostras da saída quando aplicado o degrau unitário. Considerando que o sistema esteja no ponto de operação y_0 a predição da saída pode ser calculada conforme equação (2.5):

$$\hat{y}(t+k | t) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta u(t+k-i | t) \quad (2.5)$$

Este método apresenta as mesmas vantagens e desvantagens do modelo de resposta ao impulso.

- Função de transferência: é utilizada em diversas metodologias de controle preditivo, como: GPC, UPC, EPSAC, EHAC, entre outras. Utiliza o conceito de função de transferência, ou seja, $G = B / A$, sendo a saída dada por:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) \quad (2.6)$$

com:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Desta forma, a predição da saída é representada pela equação (2.8):

$$\hat{y}(t+k | t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t+k | t) \quad (2.8)$$

Esta representação pode ser aplicada em sistemas instáveis, além de necessitar de poucos parâmetros para a sua formulação. Contudo, faz-se necessário um conhecimento *a priori* do processo, especialmente da ordem dos polinômios A e B .

- Espaço de estados: é utilizado no controle preditivo funcional e possui a seguinte representação:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{2.9}$$

onde \mathbf{x} representa os estados e \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são as matrizes de estados, de entrada e de saída, respectivamente. A predição da saída para este modelo é dada por:

$$\hat{\mathbf{y}}(t+k | t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t+k | t) = \mathbf{C}[\mathbf{A}^k \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(t+k-i | t)] \tag{2.10}$$

Sua grande vantagem é poder ser utilizado diretamente em processos multivariáveis. Contudo, cabe mencionar que em geral alguns estados não tem significado físico e desta forma, é necessário o uso de observadores, aumentando assim a complexidade de cálculo do controle.

- Outros modelos: os modelos listados anteriormente representam sistemas lineares ou linearizados, desta forma, são os mais utilizados devido à simplicidade de formulação. Entretanto, modelos não lineares também podem ser utilizados para representar a dinâmica de um processo, contudo, eles aumentam consideravelmente a complexidade do problema de otimização. Redes Neurais e Lógica Fuzzy são outras formas de representação utilizadas em algumas aplicações.

Modelo dos Distúrbios

Tão importante quanto o modelo do processo, é a escolha do modelo que represente os distúrbios. O modelo mais utilizado para determinação de distúrbios determinísticos e estocásticos é o modelo autoregressivo integrado de média móvel (*Auto-Regressive and Integrated Moving Average* - ARIMA). Desta forma, os distúrbios, que representam a diferença entre a saída medida e a saída calculada pelo modelo, são dados pela seguinte equação (2.11):

$$n(t) = \frac{C(z^{-1})e(t)}{D(z^{-1})} \quad (2.11)$$

onde: o polinômio $D(z^{-1})$ inclui explicitamente um integrador $\Delta = 1 - z^{-1}$, $e(t)$ é um ruído branco de média zero, e o polinômio C é normalmente considerado igual a 1. Este modelo é utilizado para representar mudanças aleatórias, *offsets* e outros fenômenos normalmente encontrados nos meios industriais, sendo usado diretamente no GPC, EPSAC, EHAC e UPC e, com algumas modificações, em outros controladores.

Função Objetivo

Diferentes funções custo são propostas pelos algoritmos CPBM, contudo, em geral elas partem da mesma premissa, que consiste na minimização do erro entre a saída futura (\hat{y}) e a referência desejada (w), penalizando o esforço de controle ($\Delta\hat{u}$). Desta forma, a expressão geral para uma função objetivo é:

$$V = \sum_{i=H_w}^{H_p} Q(i)[\hat{y}(t+i|t) - w(t+i)]^2 + \sum_{i=1}^{H_u} R(i)[\Delta\hat{u}(t+i-1)]^2 \quad (2.12)$$

- Parâmetros: H_w e H_p representam os horizontes de predição mínimo e máximo, enquanto que H_u representa o horizonte de controle. O significado destes parâmetros é bastante intuitivo e definem os instantes em que se deseja que a referência siga a

saída e quando é importante limitar a ação de controle. Desta forma, se H_w é grande, isso implica que não é importante o erro cometido nos primeiros $H_w - 1$ instantes e a resposta obtida tenderá a ser suave.

No caso particular de sistemas com um atraso de valor d , deve-se escolher $H_w > d$, já que não haverá resposta do sistema à entrada até o tempo $k = d$. Através da variação de H_u é possível penalizar, durante mais ou menos tempo, a ação de controle.

Os coeficientes $Q(i)$ e $R(i)$ são as sequências de ponderação do erro e do esforço de controle e geralmente são escolhidas constantes ou exponenciais ao longo do horizonte. Por exemplo, um peso exponencial pode ser uma função conforme a equação (2.13) que permite variar a penalização do erro em diferentes partes do horizonte.

$$Q(i) = \alpha^{H_p - i} \quad (2.13)$$

- Referência de trajetória: uma das vantagens do controlador preditivo é que se a referência de trajetória já é conhecida, o sistema pode atingir mais rapidamente o valor desejado. Em muitas aplicações já se conhece a referência futura, como em: robótica móvel, em servoacionamentos e em processos do tipo batelada.

Na minimização da função objetivo, a referência de trajetória $w(t+k)$ não necessariamente coincide com a referência real (r) do sistema. Normalmente, nas aplicações práticas, utilizam-se estratégias para suavizar as mudanças de referência, conforme apresentado na equação (2.14):

$$w(t) = y(t) \quad w(t+k) = \alpha w(t+k-1) + (1-\alpha)r(t+k) \quad k = 1 \dots N \quad (2.14)$$

onde: α é um parâmetro entre 0 e 1, que é um valor ajustável que influenciará na dinâmica da resposta do sistema. Valores pequenos de α promovem uma baixa suavização da trajetória, sendo que a resposta atingirá a referência real mais rapidamente. Contudo, se o valor de α for aumentado, a convergência para a referência real se torna mais lenta.

- Restrições: na prática todos os processos estão sujeitos a restrições, seja no valor ou na variação da variável manipulada ou mesmo na saída do processo. Além disso, é importante considerar que os processos industriais têm pontos de operação muito próximos destes limites, para o aumento da qualidade e da relação custo-benefício do sistema. Desta forma, faz-se necessária a introdução das restrições na função custo a ser minimizada. Neste sentido, todos os algoritmos de CPBM permitem incluí-las, considerando as restrições como um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq u(t) \leq u_{\max} \\ \Delta u_{\min} &\leq u(t) - u(t-1) \leq \Delta u_{\max} \\ y_{\min} &\leq y(t) \leq y_{\max} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Deve ser mencionado aqui que, nestes casos, a solução do problema de otimização não pode ser obtida analiticamente e requer uma carga de cálculo muito maior que no caso sem restrições. Apesar da complexidade de cálculo, a capacidade do CPBM de levar as restrições em consideração é um dos principais motivos do seu sucesso nas aplicações industriais.

Obtenção da Lei de Controle

A minimização da função objetivo (2.12) nos fornece os valores ótimos da variável manipulada $\hat{u}(t+k|t)$. Para tal, os valores preditos da saída $\hat{y}(t+k|t)$ são calculados como uma função dos valores passados e dos sinais de controle futuros, fazendo uso do modelo de predição escolhido.

Uma solução analítica pode ser obtida se o modelo é linear e não há restrições, caso contrário, um método iterativo de otimização deve ser utilizado. Independente do método utilizado, a solução do problema de otimização é geralmente complexa, devido ao grande número de variáveis envolvidas, principalmente quando os horizontes são grandes.

Neste ponto também existe um grande campo para pesquisas em CPBM, já que os problemas de otimização associados ao cálculo do controle ótimo não têm sido resolvidos de forma geral (Gomes, 2006).

2.2. Controle Proporcional Integral Derivativo

O controle proporcional integral derivativo (PID) é o algoritmo de controle mais utilizado no meio industrial. A popularidade desta metodologia pode ser atribuída a uma série de características observadas em diversos processos industriais, tais como:

- Estratégia de controle de fácil implementação;
- Compatível com diversas aplicações;
- Por ser uma estratégia simples, o sistema de controle PID é de baixo custo;
- Capacidade de fornecer comportamentos transitórios satisfatórios;
- Eliminação do erro em regime permanente.

Deve-se ainda salientar que a familiaridade de muitos engenheiros com esta estratégia de controle, devido a sua longa história, é um fator determinante para a sua prática.

2.2.1. Perspectiva Histórica

Os controladores PID começaram a ser utilizados em plantas de processos químicos na década de 30 na forma de controladores pneumáticos e ainda hoje, mais de oitenta anos após os primeiros trabalhos de ajustes de controladores publicados por Ziegler & Nichols, eles continuam sendo largamente empregados em controles de processos industriais.

De acordo com Aström & Hägglund (1988), estes controladores são suficientes para controlar diversos tipos de processos, particularmente nos quais os requisitos de performance são modestos. Além disso, eles observaram que em uma pesquisa com mais de 11.000 malhas de controle em diversas plantas (refinarias, plantas químicas, de papel) cerca de 97% eram controladas por PID.

Segundo Desoborough, Nordh & Miller (2001), uma pesquisa realizada no setor industrial em países desenvolvidos, e apresentada em trabalhos técnicos e científicos, mais de 90% dos controladores são do tipo PID.

É claro que podemos observar que com todo o avanço tecnológico e os crescentes esforços em estudos e técnicas de controle, surgiram novas metodologias que quando comparadas ao controlador PID são consideradas mais avançadas e complexas. Tais metodologias recebem o nome de controle moderno, como: controle preditivo, adaptativo, robusto, métodos heurísticos, entre outras. De fato são estratégias mais complexas e normalmente são utilizadas em tarefas de otimização, buscando atingir melhores resultados, entretanto, devemos observar que para diversas tarefas ainda é possível a utilização do controlador PID.

2.2.2. Algoritmo Básico

Na literatura podem ser encontrados três algoritmos distintos para implementação do controlador PID. Para a elaboração deste projeto foi utilizado o algoritmo do tipo paralelo, cuja expressão está representada em (2.16):

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.16)$$

em que: $u(t)$ é o sinal de controle e $e(t)$ é o sinal do erro entre a referência (*setpoint*) e a saída do sistema.

É possível observar que o controlador PID é composto pela soma de três parcelas independentes: uma proporcional ao erro, outra relacionada à integral do erro e a última parcela que é associada à derivada do erro. Os parâmetros do controlador PID são: o ganho proporcional K_p , o ganho integral K_i e o ganho derivativo K_d .

Tal estrutura de controle pode ser demonstrada pelo diagrama de blocos apresentado na Figura 2.2.

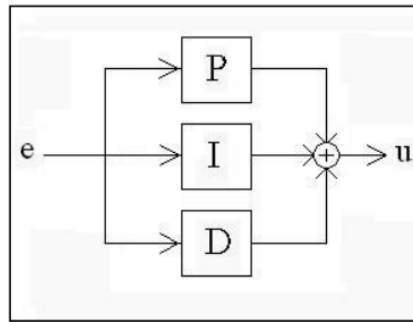


Figura 2.2 – Diagrama de blocos de um controlador PID paralelo (Nicula, 2010).

Ação Proporcional

A parcela proporcional do controlador PID pode ser representada pela seguinte equação:

$$u_p(t) = K_p e(t) \quad (2.17)$$

O objetivo da ação proporcional é estabilizar a variável de processo. O controlador vai atuar para corrigir o erro existente entre o *setpoint* e a saída do sistema. Uma nova posição de equilíbrio é então encontrada. Entretanto, após este equilíbrio e em processos sem pólos na origem, verifica-se a presença de um erro final, conhecido por *offset* ou erro de regime permanente. Este erro torna-se um limitante para o controlador puramente proporcional.

Um aumento no valor do ganho proporcional tem impacto direto na velocidade de resposta do sistema e no valor do erro em regime permanente.

Ação Integral

A ação integral age proporcionalmente à integral do erro do sistema, conforme apresentado na equação (2.18).

$$u_i(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (2.18)$$

Esta atuação é complementar à ação proporcional e seu objetivo é remover qualquer erro de desvio permanente, ou seja, *offset*, deixado pela ação proporcional. Por este motivo é conhecida também como ação *reset* ou reajuste.

A ação integral elimina o desvio permanente, mas não consegue eliminar o pico do erro (*overshoot*), uma vez que o mesmo ocorre antes que ela comece a atuar, pois está atrasada em relação à ação de controle proporcional. Além disso, é importante observar a magnitude da do ganho K_i , uma vez que, quanto mais alto, mais o sistema tenderá a apresentar um comportamento oscilatório além de um sobrepasso elevado (Nicula, 2010).

Ação Derivativa

A ação derivativa age proporcionalmente à derivada do erro do sistema, sendo definida pela equação (2.19). Ela tem por objetivo melhorar o desempenho transitório do sistema em malha fechada (Campestrini, 2006).

$$u_d(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.19)$$

A derivada de uma função esta relacionada intuitivamente com a tendência de variação desta função em um determinado instante de tempo. Desta forma, ao aplicar um sinal proporcional à derivada do erro, estamos nos baseando na tendência de evolução do erro. Assim, a ação derivativa é dita antecipatória ou preditiva e tende a fazer com que o sistema reaja mais rapidamente às variações.

Este fato faz com que a ação derivativa seja utilizada para a obtenção de respostas transitórias mais rápidas, melhorando o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada. É importante observar que em regime permanente o sinal de erro é constante, desta forma, a ação derivativa será igual à zero, ou seja, esta ação atua apenas durante a resposta transitória.

2.2.3. Filtro Derivativo

Durante a implementação de uma estratégia de controle PID, algumas observações devem ser consideradas a fim de que se obtenha um desempenho adequado do sistema controlado. O principal efeito a ser analisado é o ganho do termo derivativo em altas frequências.

A equação (2.16) não pode ser implementada na prática. O ganho da ação derivativa em altas frequências gera a amplificação de ruídos na variável de processo, sendo que, tais ruídos podem causar danos no sistema.

Para contornar este problema é projetado junto à parcela derivativa um filtro passa-baixa de primeira ordem. Neste contexto, podemos verificar que o PID paralelo passa a ser representado pela expressão (2.20). Sua estrutura em blocos pode ser visualizada na Figura 2.3.

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\frac{K_d}{N} s + 1} \quad (2.20)$$

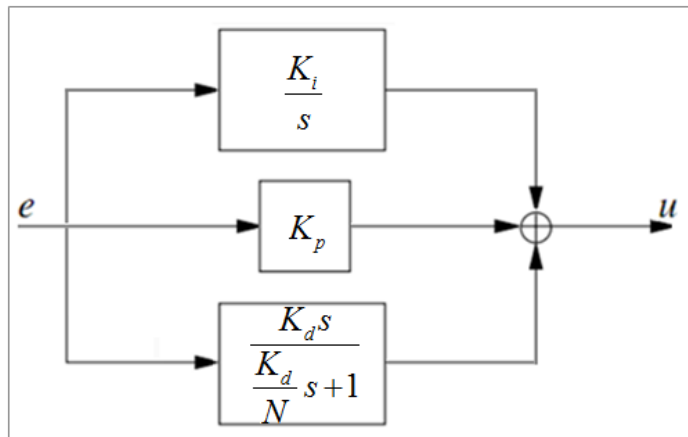


Figura 2.3 – Estrutura em blocos de um controlador PID paralelo com filtro derivativo (adaptado de Nicula, 2010).

O parâmetro de ajuste do filtro derivativo (N) geralmente assume um valor entre 1 e 33, embora na maioria dos casos práticos, ele seja ajustado na faixa entre 8 e 16 (Skogestad e Postlethwaite, 2005).

2.2.4. Outras Estruturas de Controle PID

As outras duas estruturas de controle PID encontradas na literatura são: o tipo série (ou interativo) e o acadêmico (também conhecido como ISA).

Os controladores industriais comumente encontrados são do tipo série, onde há a interferência do tempo integral no tempo derivativo e vice-versa. Esta estratégia é representada pela expressão (2.21), e o seu diagrama pode ser visualizado na Figura 2.4.

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) \left(\frac{1 + sT_d}{\frac{T_d}{N}s + 1} \right) \quad (2.21)$$

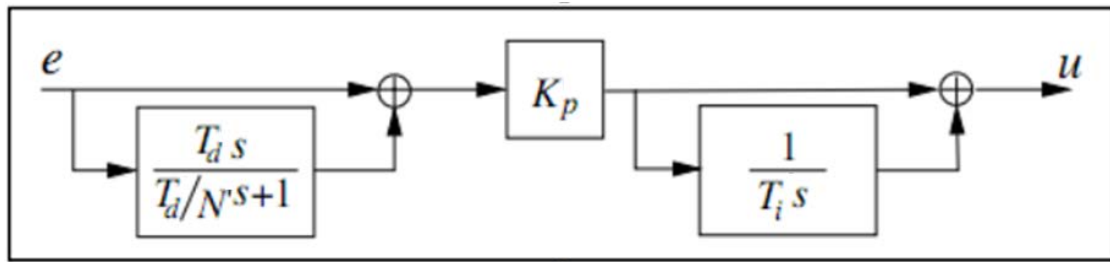


Figura 2.4 – Diagrama de blocos de um controlador PID série com filtro derivativo (Nicula, 2010).

Já o controlador do tipo acadêmico (ou ISA) é demonstrado pela expressão (2.22). Nesta estrutura podemos observar que o ganho proporcional altera os termos integrativo e derivativo. A sua representação em blocos pode ser observada na Figura 2.5.

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N}s + 1} \right) \quad (2.22)$$

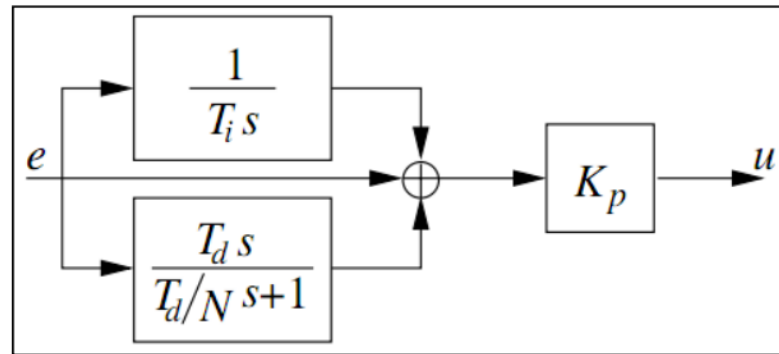


Figura 2.5 – Diagrama de blocos de um controlador PID acadêmico com filtro derivativo (Nicula, 2010).

A razão pela qual o setor industrial prefere a forma de controlador em série se dá ao fato desta ter sido a primeira a ser utilizada, ainda no século passado, em tecnologias pneumáticas. Assim, os fabricantes de controladores preferem manter o *know how* já adquirido. Adicionalmente a estes motivos, por vezes, afirma-se que o PID na forma serial é mais fácil de ser sintonizado (Nicula, 2010).

2.3. Conclusões

Este capítulo apresentou a revisão bibliográfica de duas metodologias de controle implementadas neste trabalho, o controle preditivo baseado em modelo e o controlador proporcional integral derivativo.

Foi realizada uma breve discussão a respeito da estratégia e as principais características, vantagens e desvantagens de cada metodologia de controle.

No capítulo IV serão apresentadas as equações e os parâmetros utilizados para o projeto de controle aplicado ao veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero.

CAPÍTULO 3

Modelagem Dinâmica

Este capítulo apresenta a modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado, o quadricóptero. As equações de movimento são desenvolvidas baseando-se nas leis físicas que descrevem o sistema, utilizando três coordenadas de posição e três ângulos de Euler para especificar a orientação do corpo. As equações dinâmicas do quadricóptero são obtidas através de duas formulações matemáticas: a de Euler-Lagrange e a de Newton-Euler.

Para obtenção do modelo dinâmico supõe-se que o veículo aéreo é um corpo rígido no espaço, sujeito a uma força principal e três torques. Outras premissas que podem ser estabelecidas são (Bouabdallah, 2007):

- A estrutura é supostamente rígida e simétrica;
- O centro de massa do veículo coincide com a origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido;
- As hélices são supostamente rígidas;
- O empuxo e o arrasto são proporcionais ao quadrado de velocidade das hélices.

O quadricóptero é controlado pela variação da velocidade angular de quatro motores elétricos, conforme apresentado na Figura 3.1. Cada motor produz uma força e um torque, que combinados geram uma força principal (empuxo) e três torques (de rolagem, arfagem e guinada – *roll*, *pitch* e *yaw*).

A força de empuxo é denominada como U_1 , o torque de rolagem é representado por τ_ϕ , o momento de arfagem é designado como τ_θ e o momento de guinada é denotado como τ_ψ .

Os motores elétricos operam com sentido de rotação fixo, desta forma, a força gerada por cada motor é sempre positiva. Os motores dianteiro (M1) e traseiro (M3) giram em sentido horário, enquanto que os motores esquerdo (M2) e direito (M4) operam em sentido anti-horário.

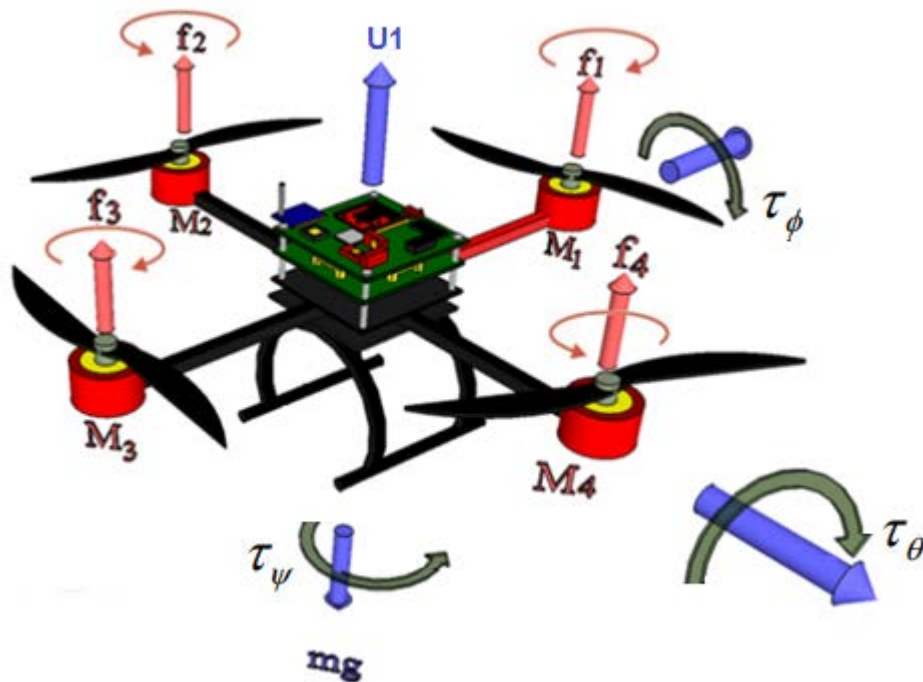


Figura 3.1 – Esquema de funcionamento do quadricóptero (adaptado de García Carrillo *et. al.*, 2013).

A força de empuxo é responsável pelo movimento ascendente e descendente do quadricóptero, e corresponde à soma das forças individuais geradas por cada motor. Já os torques estão relacionados com a diferença de forças entre motores. O torque de rolagem é função da diferença de forças entre os motores esquerdo e direito (f_2-f_4). Já o torque de arfagem relaciona-se com a diferença de forças dos motores traseiro e dianteiro (f_3-f_1). Por fim, o torque de guinada está relacionado ao contra torque gerado em cada motor.

O quadricóptero é um sistema mecânico ultraleve e complexo, desta forma, sua modelagem inclui importantes efeitos físicos como: efeitos aerodinâmicos e giroscópico. Uma breve lista dos principais efeitos que atuam no veículo aéreo está descrita na Tabela 3.1. Onde

C representa os termos constantes, Ω é a velocidade do rotor, J_r é o momento de inércia do rotor ao redor do seu próprio eixo, l é a distância do centro de massa aos rotores, J é o momento de inércia do corpo rígido e ϕ, θ, ψ são os ângulos de Euler (Raffo, 2007).

Tabela 3.1 – Principais efeitos físicos que atuam no quadricóptero (Bouabdallah, 2007).

Efeitos	Fontes	Formulação
Efeitos Aerodinâmicos	- Rotação dos rotores - Giro de Hélices	$C\Omega^2$
Contra Torque Inercial	- Mudança na velocidade de rotação das hélices	$J_r \dot{\Omega}$
Efeito da Gravidade	- Posição do centro de massa	l
Efeito Giroscópico	- Mudanças na orientação do corpo rígido - Mudanças na orientação do plano dos rotores	$J\theta\psi$ $J_r \Omega \theta, \phi$
Fricção	- Todos os movimentos do quadricóptero	$C\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$

Contudo, o quadricóptero é um sistema mecânico subatuado, ou seja, possui seis graus de liberdade e apenas quatro entradas. Devido a esta complexidade, algumas considerações são feitas para o desenvolvimento do modelo matemático. Em Raffo (2007) sugere-se desconsiderar os momentos causados pelo corpo rígido sobre a dinâmica translacional, bem como o efeito solo, além das outras premissas já apresentadas.

3.1. Sistemas de Coordenadas

Esta seção descreve os pontos de referência e os sistemas de coordenadas que são utilizados para estimar a posição e a orientação do corpo rígido no espaço tridimensional.

Inicialmente, deve ser considerado um sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido B , localizado no centro de massa do veículo aéreo, e um sistema de coordenadas inercial I , fixo à Terra, conforme pode ser observado na Figura 3.2.

O sistema de coordenadas fixo ao quadricóptero é definido como $B = \{\vec{x}_L, \vec{y}_L, \vec{z}_L\}$. Sendo, \vec{x}_L o eixo da direção de voo, \vec{y}_L é ortogonal a \vec{x}_L e com o sentido negativo para estibordo, e \vec{z}_L é orientado no sentido ascendente e ortogonal ao plano $\vec{x}_L O \vec{y}_L$. Já o referencial inercial é considerado fixo em relação à Terra, e é designado como $I = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$.

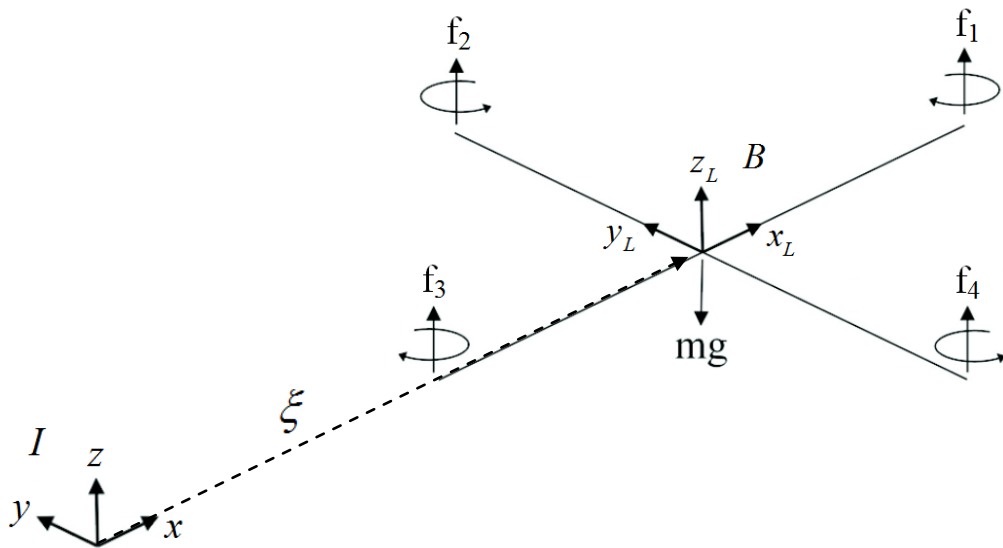


Figura 3.2 – Sistemas de coordenadas do quadricóptero (adaptado de Bouabdallah, Noth e Siegwart, 2004a).

O vetor $\xi = [x \ y \ z]^T$ representa o posicionamento do centro de massa do quadricóptero em relação ao sistema de coordenadas inercial. Já a orientação do veículo aéreo em relação ao referencial inercial é obtida através da matriz de rotação $R_I : B \rightarrow I$.

Ângulos de Euler e quatérnions são as duas principais formas de representar a orientação de um corpo rígido no espaço euclidiano tridimensional. Em aplicações aeroespaciais é mais comumente utilizada uma das representações dos ângulos de Euler, conhecida também como convenção *Tait-Bryan*. Nesta representação, a orientação do corpo rígido é obtida através de três rotações sucessivas em torno dos eixos do sistema móvel, no qual ficam definidos (Raffo, 2007).

1. Rotação ao redor de \vec{x} de ϕ : o primeiro movimento, assumindo que o referencial inercial e o sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido são coincidentes, é dado pela rotação ao redor do eixo \vec{x} pelo ângulo de rolagem (ϕ).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

2. Rotação ao redor de \vec{y} de θ : a segunda rotação corresponde ao ângulo de arfagem (θ) e ocorre ao redor do novo eixo \vec{y} .

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3. Rotação ao redor de \vec{z} de ψ : o terceiro movimento corresponde ao ângulo de guinada (ψ) e ocorre ao redor do novo eixo \vec{z} , levando o quadricóptero a sua posição final.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A rotação destes ângulos é delimitada em: ângulo de rolagem ($-\pi < \phi < \pi$), ângulo de arfagem ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) e ângulo de guinada ($-\pi < \psi < \pi$).

A partir das rotações apresentadas anteriormente, definimos as três matrizes de rotação que representam a orientação do corpo rígido:

$$\mathbf{R}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A matriz de rotação completa que define a orientação do sistema de coordenadas B em relação ao sistema inercial I é conhecida como Matriz dos Cossenos Diretores:

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{R}(z, \psi) \mathbf{R}(y, \theta) \mathbf{R}(x, \phi)$$

$$\mathbf{R}_I = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Já a relação entre a velocidade angular do veículo expressa no sistema fixo ao corpo rígido $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$, e a derivada temporal dos ângulos de Euler ($\dot{\boldsymbol{\eta}}$), pode ser obtida através da seguinte matriz de transformação, conhecida como matriz de Euler (\mathbf{W}_η):

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A velocidade angular expressa no sistema de coordenadas B pode ser fisicamente medida, por exemplo, através de giroscópios. No entanto, geralmente, sistemas aeroespaciais são equipados com Unidades de Medição Inercial que medem a velocidade angular e estimam os ângulos de Euler (Bouabdallah, 2007).

3.2. Formulação de Euler-Lagrange

Nesta seção o modelo dinâmico do quadricóptero é obtido através do formalismo de Euler-Lagrange, que se baseia nos conceitos de energia cinética e energia potencial do veículo aéreo.

Relembrando que o Lagrangeano é $L = E_c - E_p$, temos que a forma geral das equações de movimento pelo método de Lagrange é:

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ \tau_\eta \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.7)$$

onde:

f_ξ - forças generalizadas

τ_η - torques generalizados

q_i - coordenadas generalizadas

E_c - energia cinética total

E_p - energia potencial total

As coordenadas generalizadas de um corpo rígido no espaço tridimensional podem ser definidas como:

$$\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (3.8)$$

onde $\xi = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ é a posição do centro de massa do quadricóptero em relação ao sistema inercial I , e $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ são os ângulos de Euler que descrevem a orientação do veículo aéreo no espaço tridimensional.

A equação do Lagrangeano para o veículo aéreo em questão é definida como:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{cTrans} + E_{cRot} - E_p \quad (3.9)$$

onde:

E_{cTrans} - energia cinética translacional

E_{cRot} - energia cinética rotacional

E_p - energia potencial

3.2.1. Energia Cinética Translacional

A solução do termo referente à energia cinética translacional depende da velocidade das coordenadas generalizadas. A velocidade linear é dada por $\dot{\xi} = \mathbf{v}$, portanto, o quadrado da velocidade é:

$$\dot{\xi}^2(x, y, z) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \dot{\xi}^T \dot{\xi} \quad (3.10)$$

Desta forma, a energia cinética translacional pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$E_{cTrans} = \frac{1}{2} \int \dot{\xi}^2(x, y, z) dm = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} \quad (3.11)$$

3.2.2. Energia Cinética Rotacional

Para a solução do termo referente à energia cinética rotacional, deve ser considerado um ponto (${}^B \mathbf{r}$) fixo e em repouso no sistema de coordenadas B . Este mesmo ponto pode ser determinado em relação ao sistema de coordenadas inercial (${}^I \mathbf{r}$), sendo \mathbf{R}_I a matriz de rotação que relaciona o deslocamento espacial dos sistemas de coordenadas B e I .

$${}^I \mathbf{r} = \mathbf{R}_I {}^B \mathbf{r}$$

$$\begin{cases} {}^I\mathbf{r}_x = (\cos\psi \cos\theta) x_L + (\cos\psi \sin\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\phi) y_L + (\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi) z_L \\ {}^I\mathbf{r}_y = (\sin\psi \cos\theta) x_L + (\sin\psi \sin\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi) y_L + (\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) z_L \\ {}^I\mathbf{r}_z = (-\sin\theta) x_L + (\cos\theta \sin\phi) y_L + (\cos\theta \cos\phi) z_L \end{cases} \quad (3.12)$$

Derivando a posição em relação ao tempo, temos as seguintes velocidades correspondentes:

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{v}_x &= (-\sin\theta \cos\psi \dot{\theta} - \cos\theta \sin\psi \dot{\psi}) x_L \\ &\quad + (-\cos\psi \cos\phi \dot{\psi} + \sin\psi \sin\phi \dot{\phi} - \sin\psi \sin\phi \sin\theta \dot{\psi} \\ &\quad + \cos\psi \cos\phi \sin\theta \dot{\phi} + \cos\psi \sin\phi \cos\theta \dot{\theta}) y_L \\ &\quad + (\cos\psi \sin\phi \dot{\psi} + \sin\psi \cos\phi \dot{\phi} - \sin\psi \cos\phi \sin\theta \dot{\psi} \\ &\quad - \cos\psi \sin\phi \sin\theta \dot{\phi} + \cos\psi \cos\phi \cos\theta \dot{\theta}) z_L \\ {}^I\mathbf{v}_y &= (-\sin\theta \sin\psi \dot{\theta} + \cos\theta \cos\psi \dot{\psi}) x_L \\ &\quad + (-\sin\psi \cos\phi \dot{\psi} - \cos\psi \sin\phi \dot{\phi} + \cos\psi \sin\phi \sin\theta \dot{\psi} \\ &\quad + \sin\psi \cos\phi \sin\theta \dot{\phi} + \sin\psi \sin\phi \cos\theta \dot{\theta}) y_L \\ &\quad + (\sin\psi \sin\phi \dot{\psi} - \cos\psi \cos\phi \dot{\phi} + \cos\psi \cos\phi \sin\theta \dot{\psi} \\ &\quad - \sin\psi \sin\phi \sin\theta \dot{\phi} + \sin\psi \cos\phi \cos\theta \dot{\theta}) z_L \\ {}^I\mathbf{v}_z &= (-\cos\theta \dot{\theta}) x_L \\ &\quad + (\cos\phi \cos\theta \dot{\phi} - \sin\phi \sin\theta \dot{\theta}) y_L \\ &\quad + (-\sin\phi \cos\theta \dot{\phi} - \cos\phi \sin\theta \dot{\theta}) z_L \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tais equações de velocidades podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{v}_x &= {}^I\mathbf{v}_{x_{xL}} x_L + {}^I\mathbf{v}_{x_{yL}} y_L + {}^I\mathbf{v}_{x_{zL}} z_L \\ {}^I\mathbf{v}_y &= {}^I\mathbf{v}_{y_{xL}} x_L + {}^I\mathbf{v}_{y_{yL}} y_L + {}^I\mathbf{v}_{y_{zL}} z_L \\ {}^I\mathbf{v}_z &= {}^I\mathbf{v}_{z_{xL}} x_L + {}^I\mathbf{v}_{z_{yL}} y_L + {}^I\mathbf{v}_{z_{zL}} z_L \end{aligned} \quad (3.14)$$

Desta forma, o quadrado da velocidade do ponto ${}^I\mathbf{r}$ é dado por:

$${}^I v^2(x_L, y_L, z_L) = {}^I \mathbf{v}_x^2(x_L, y_L, z_L) + {}^I \mathbf{v}_y^2(x_L, y_L, z_L) + {}^I \mathbf{v}_z^2(x_L, y_L, z_L)$$

$$\begin{aligned} {}^I v^2(x_L, y_L, z_L) = & x_L^2 \cdot (\cos^2 \theta \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) \\ & + y_L^2 \cdot (\dot{\psi}^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta) + \dot{\psi}(-2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} - 2 \dot{\phi} \sin \theta) + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\ & + z_L^2 \cdot (\dot{\psi}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta) + \dot{\psi}(2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} - 2 \dot{\phi} \sin \theta) + \cos^2 \phi \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\ & + 2x_L y_L \cdot (\dot{\psi}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ & + 2x_L z_L \cdot (\dot{\psi}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ & + 2y_L z_L \cdot (-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \dot{\psi}(\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Reescrevendo a equação (3.15), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} {}^I v^2(x_L, y_L, z_L) = & (y_L^2 + z_L^2) \cdot (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\phi}^2) \\ & + (x_L^2 + z_L^2) \cdot (\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \cos^2 \phi \dot{\theta}^2) \\ & + (x_L^2 + y_L^2) \cdot (\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2) \\ & + 2x_L y_L \cdot (\dot{\psi}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ & + 2x_L z_L \cdot (\dot{\psi}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ & + 2y_L z_L \cdot (-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \dot{\psi}(\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Portanto, resolvendo a expressão da energia cinética rotacional:

$$\begin{aligned} E_{cRot} = & \frac{1}{2} \left(\int (y_L^2 + z_L^2) dm \right) (\dot{\phi}^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} 2 \sin \theta + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \\ & + \frac{1}{2} \left(\int (z_L^2 + x_L^2) dm \right) (\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + \dot{\psi} \dot{\theta} 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta + \dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\ & + \frac{1}{2} \left(\int (x_L^2 + y_L^2) dm \right) (\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta + \dot{\psi}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\ & + \left(\int (x_L y_L) dm \right) (\dot{\psi}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ & + \left(\int (x_L z_L) dm \right) (\dot{\psi}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ & + \left(\int (y_L z_L) dm \right) (-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + \dot{\psi}(\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

É possível observar que na expressão da energia cinética rotacional aparecem momentos de inércia (elementos da diagonal principal da matriz de inércia) e produtos de inércia (elementos fora da diagonal principal). A simetria mecânica do quadricóptero permite negligenciar os produtos de inércia, e considerar a matriz de inércia como uma matriz diagonal (Bouabdallah, 2007).

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int (y_L^2 + z_L^2) dm \\
 I_{yy} &= \int (z_L^2 + x_L^2) dm \\
 I_{zz} &= \int (x_L^2 + y_L^2) dm \\
 I_{xy} &= \int (x_L y_L) dm = 0 \\
 I_{xz} &= \int (x_L z_L) dm = 0 \\
 I_{yz} &= \int (y_L z_L) dm = 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Desta forma, obtemos a expressão final da energia cinética rotacional, representada pela equação (3.19):

$$\begin{aligned}
 E_{cRot} &= \frac{1}{2} I_{xx} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 \\
 &+ \frac{1}{2} I_{yy} (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)^2 \\
 &+ \frac{1}{2} I_{zz} (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta)^2
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.2.3. Energia Potencial

A energia potencial do quadricóptero, expressa em termos das coordenadas generalizadas, é definida como:

$$E_p = mgz \tag{3.20}$$

3.2.4. Equações Dinâmicas via Euler-Lagrange

Após obter as expressões da energia cinética e da energia potencial, as equações de movimento do quadricóptero podem ser apresentadas através da formulação de Lagrange, conforme a expressão (3.7).

O vetor de forças translacionais f_ξ corresponde à entrada de controle U_1 em relação ao sistema de coordenadas inercial:

$$f_\xi = R_I U_1 \quad (3.21)$$

No início do capítulo foi definido que o centro de massa do veículo aéreo coincide com a origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido. Desta forma, o Lagrangeano não contém termos de energia cinética combinando $\dot{\xi}$ e $\dot{\eta}$, ou seja, não há acoplamento cruzado. Portanto, as equações de Euler-Lagrange podem ser divididas em dois subsistemas: o subsistema translacional e o rotacional.

Equações Dinâmicas do Subsistema Translacional

As equações de movimento para o subsistema translacional podem ser definidas como:

$$\begin{aligned} L(\xi, \dot{\xi}) &= E_{cTrans} - E_p \\ \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \xi} &= -mge_3 & \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} &= m\dot{\xi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} \right) &= m\ddot{\xi} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \xi} &= f_\xi \\ m\ddot{\xi} + mge_3 &= f_\xi \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Reescrevendo a equação (3.22) em função do vetor de estados ξ , temos as equações dinâmicas referentes ao sistema de translação:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) U_1 \\ \ddot{y} = \frac{1}{m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) U_1 \\ \ddot{z} = -g + \frac{1}{m}(\cos \theta \cos \phi) U_1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Equações Dinâmicas do Subsistema Rotacional

As equações de Euler-Lagrange para o subsistema rotacional são definidas como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \tau_{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau_{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \tau_{\psi} \end{aligned} \quad (3.24)$$

A seguir é apresentado o desenvolvimento das equações dinâmicas, pelo método de Lagrange, para o subsistema rotacional:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \ddot{\phi} I_{xx} - \ddot{\psi} \sin \theta I_{xx} \\ &\quad - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta (I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})(2 \cos^2 \phi - 1)) \\ &\quad + \dot{\theta}^2 \frac{1}{2} \sin 2\phi (I_{yy} - I_{zz}) \\ &\quad - \dot{\psi}^2 \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos^2 \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\ &\quad + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) \\ &\quad + \int z dm(z) \cdot (g \sin \phi \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = & \ddot{\theta} (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) \\
& + \ddot{\psi} \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
& + \ddot{\psi}^2 \frac{1}{2} \sin 2\theta (-I_{xx} + I_{yy} \sin^2 \phi + I_{zz} \cos^2 \phi) \\
& + \dot{\theta} \dot{\phi} \sin 2\phi (I_{zz} - I_{yy}) \\
& + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta (\cos 2\phi (I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}) \\
& + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
& - \int y dm(y) \cdot (g \sin \theta \sin \phi) \\
& - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = & \ddot{\psi} (\cos^2 \theta (I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta I_{xx}) \\
& - \ddot{\phi} \sin \theta I_{xx} \\
& + \ddot{\theta} \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
& + \dot{\theta} \dot{\psi} \sin 2\theta (I_{xx} - I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) \\
& - \dot{\psi} \dot{\phi} \sin 2\phi \cos^2 \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\
& + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta (I_{xx} + (2 \cos^2 \phi - 1)(I_{yy} - I_{zz})) \\
& - \dot{\theta}^2 \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \theta (I_{yy} - I_{zz})
\end{aligned}$$

(3.25)

Através da matriz de Euler (3.6), as equações (3.25) podem ser simplificadas expressando-se as velocidades e acelerações dos ângulos de Euler em função das velocidades e acelerações em relação ao sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = & I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\
& + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) \\
& + \int z dm(z) \cdot (+g \sin \phi \cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = & -\sin \phi (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy})) \\
& + \cos \phi (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
& + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\
& - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) \\
& - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta) \\
\\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = & -\sin \theta (\dot{\omega}_x I_{xx} - \omega_y \omega_z (I_{xx} - I_{yy})) \\
& + \sin \phi \cos \theta (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
& + \cos \phi \cos \theta (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy}))
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Os torques não conservativos que atuam no quadricóptero são primeiramente devido à diferença de forças entre cada par de motores, e segundo, devido ao efeito giroscópico resultante da rotação das hélices.

$$\begin{aligned}
& bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\
& bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\
& d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \\
\\
& J_r \omega_x (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \\
& J_r \omega_y (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Desta forma, os torques totais são:

$$\begin{aligned}
\tau_\phi &= bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) + J_r \omega_y (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \\
\tau_\theta &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + J_r \omega_x (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \\
\tau_\psi &= d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Os ângulos de rolagem, arfagem e guinada devem ter valores pequenos para não ocorrer à desestabilização do veículo aéreo, portanto, é possível aplicar a aproximação para pequenos ângulos. Desta forma, temos que as equações dinâmicas do subsistema rotacional podem ser definidas como:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{J_r \dot{\theta}(\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)}{I_{xx}} + \frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{J_r \dot{\phi}(-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)}{I_{yy}} + \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)}{I_{zz}} \end{cases} \quad (3.29)$$

3.3. Formalismo de Newton-Euler

Esta seção apresenta as equações dinâmicas do quadricóptero mediante o formalismo de Newton-Euler.

A dinâmica de um corpo rígido, sujeito a forças externas aplicadas em seu centro de massa e definidas no sistema de coordenadas ligadas ao corpo, pode ser determinada através da formulação de Newton-Euler utilizando a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times m\dot{\mathbf{v}}_B \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \boldsymbol{\tau}_B \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{J} \in \Re^{3 \times 3}$ é a matriz de inércia, $\mathbf{I}_{3 \times 3} \in \Re^{3 \times 3}$ é uma matriz identidade, \mathbf{v}_B é o vetor de velocidade translacional (em B), $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor de velocidade angular (em B) e m é a massa total do quadricóptero.

De acordo com as suposições realizadas no início do capítulo, podemos considerar que a dinâmica do veículo aéreo é desacoplada, portanto, existe um subsistema translacional e outro subsistema rotacional. Além disso, devido a simetria do quadricóptero, a matriz de inércia é uma matriz diagonal, conforme equação (3.31).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

A dinâmica do corpo rígido, representada em relação ao sistema inercial I , pode ser definida pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \boldsymbol{v} = \mathbf{R}_I \boldsymbol{v}_B \\ m\dot{\boldsymbol{v}} &= \mathbf{R}_I \boldsymbol{f}_B \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_B \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde \boldsymbol{v} expressa a velocidade linear no sistema de coordenadas inercial. As forças (\boldsymbol{f}_B) e torques ($\boldsymbol{\tau}_B$) que o quadricóptero está sujeito consistem em: força peso, força de empuxo total, ao efeito giroscópico resultante da rotação das hélices e aos torques produzidos pelos rotores.

3.3.1. Força Translacional e Força Gravitacional

As forças que atuam no corpo rígido são: o empuxo total (U_1) gerado pela soma de forças dos quatro motores e a força gravitacional (f_g).

A força de empuxo pode ser determinada pela equação (3.33):

$$U_1 = \left(\sum_{i=1}^4 f_i \right) = \left(\sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \right) \quad (3.33)$$

onde f_i representa a força gerada por cada motor elétrico e tem a direção do eixo z , b é uma constante e denota o coeficiente de empuxo e Ω_i representa a velocidade angular de cada motor ao redor de seu eixo.

A força gravitacional é expressa na equação (3.34):

$$f_g = -mge_3 \quad (3.34)$$

Portanto, reescrevendo as equações (3.33) e (3.34) em relação ao referencial inercial I , temos que:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}_I \mathbf{U}_1 + f_g \quad (3.35)$$

3.3.2. Torques

O vetor de torques aplicados nos três eixos do quadricóptero é expresso pela equação (3.36):

$$\boldsymbol{\tau}_A = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_2 - f_4)l \\ (f_3 - f_1)l \\ \sum_{i=1}^4 \tau_{Mi} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde l representa a distância dos motores até o centro de rotação, e τ_{Mi} é o esforço de torção gerado por cada motor. O esforço de torção do motor é oposto a sua força aerodinâmica $\tau_{drag} = d\Omega_i^2$, onde d representa o coeficiente de arrasto das hélices. Através da segunda lei de Newton temos que:

$$J_r \dot{\Omega}_i = -\tau_{drag} + \tau_{Mi} \quad (3.37)$$

onde J_r é o momento de inércia do rotor ao redor de seu próprio eixo. Em estado estacionário, por exemplo, quando $\dot{\Omega} = 0$ o torque de guinada pode ser reescrito como:

$$\tau_{Mi} = d\Omega_i^2 \quad (3.38)$$

Desta forma, a equação dos torques aplicados (3.36) pode ser reescrita conforme a equação (3.39). A equação representa os torques de rolagem, arfagem e guinada respectivamente.

$$\boldsymbol{\tau}_A = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Adicionalmente, este tipo de sistema é uma estrutura de voo ultraleve, portanto, os efeitos giroscópicos resultantes da rotação das quatro hélices devem ser incluídos no modelo dinâmico.

$$\boldsymbol{\tau}_G = -\sum_{i=1}^4 J_r (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \Omega_i \quad (3.40)$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\tau}_B = \boldsymbol{\tau}_A + \boldsymbol{\tau}_G \quad (3.41)$$

3.3.3. Equações Dinâmicas via Newton-Euler

Reescrevendo a equação (3.32) temos que:

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= -mg\mathbf{e}_3 + \mathbf{R}_I U_1 \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \sum_{i=1}^4 J_r (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \Omega_i + \boldsymbol{\tau}_A \end{aligned} \quad (3.42)$$

Desenvolvendo as equações (3.42) obtemos a modelagem dinâmica do quadricóptero. As três primeiras equações estão relacionadas ao subsistema translacional (3.43), e as outras três ao subsistema rotacional (3.44).

No sistema rotacional foi utilizada a aproximação de pequenos ângulos. Além disso, o desenvolvimento da equação (3.42) para (3.44), utilizou a expressão apresentada em (3.6). Tal equação relaciona a velocidade angular expressa no sistema fixo ao corpo rígido com a derivada temporal dos ângulos de Euler.

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) U_1 \\ \ddot{y} = \frac{1}{m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) U_1 \\ \ddot{z} = -g + \frac{1}{m}(\cos \theta \cos \phi) U_1 \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{J_r \dot{\theta}(\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)}{I_{xx}} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{J_r \dot{\phi}(-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)}{I_{zz}} \end{cases} \quad (3.44)$$

3.4. Parâmetros do Quadricóptero

Os parâmetros utilizados durante as simulações são apresentados na Tabela 3.2. Os valores mencionados abaixo correspondem ao quadricóptero *Draganflyer V Ti*, produzido pela RC Toys.

Tabela 3.2 – Relação de parâmetros do quadricóptero.

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa do quadricóptero (m)	kg	0.47
Distância entre o centro de massa e os rotores (l)	m	0.21
Coefficiente de empuxo dos rotores (b)	Ns ²	2.8 e-5
Coefficiente de arrasto dos rotores (d)	Nms ²	8 e-7
Aceleração da gravidade (g)	m/s ²	9.81
Momento de inércia ao redor do eixo x (I_{xx})	kgm ²	5 e-3
Momento de inércia ao redor do eixo y (I_{yy})	kgm ²	5 e-3
Momento de inércia ao redor do eixo z (I_{zz})	kgm ²	8.9 e-3
Momento de inércia do rotor ao redor do seu eixo de rotação (J_r)	kgm ²	5.51 e-5

3.5. Conclusões

Neste capítulo as equações de movimento do quadricóptero foram desenvolvidas baseando-se nas leis físicas que descrevem o sistema através de três coordenadas de posição e três ângulos de Euler para descrever a orientação do veículo aéreo. A modelagem dinâmica foi obtida através de duas aproximações, a formulação de Euler-Lagrange e a de Newton-Euler.

De acordo com as premissas apresentadas no início do capítulo foi possível obter um modelo dinâmico simplificado e descentralizado, que será utilizado no projeto de controle do quadrirotor.

CAPÍTULO 4

Estrutura de Controle do Quadricóptero

Este capítulo propõe a formulação de uma estratégia de controle para solucionar o problema de rastreamento de trajetória de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero.

Conforme exposto anteriormente, o quadricóptero é um sistema mecânico subatuado, ou seja, é composto por seis graus de liberdade e apenas quatro variáveis de controle (velocidade dos quatro rotores). Isto resulta na impossibilidade de regular todos os graus de liberdade do sistema no mesmo instante de tempo.

Desta forma, uma estrutura de controle comumente utilizada é a estratégia de controle em cascata (Silva, 2014). Esta estratégia é composta por um controlador interno responsável pelo subsistema rotacional, e por um controlador externo que viabiliza os movimentos translacionais. Tal estrutura está representada na Figura 4.1.

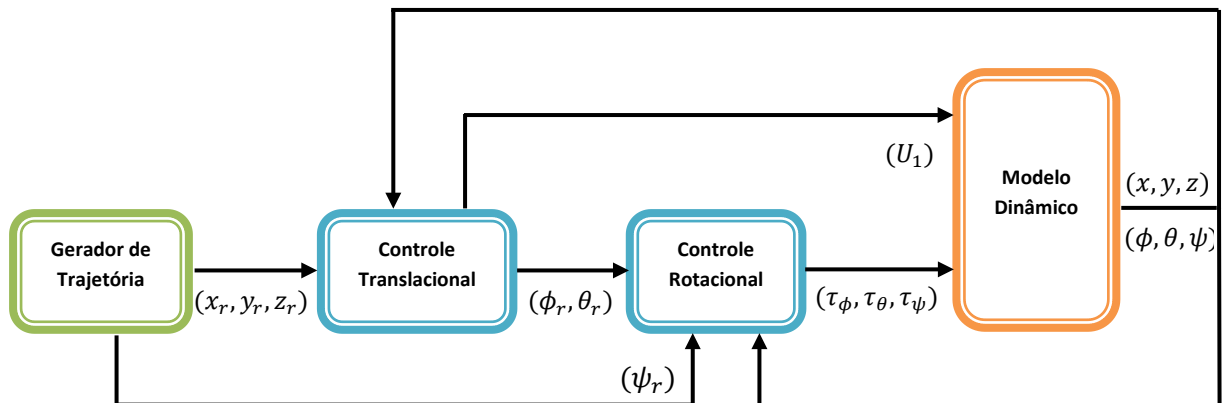


Figura 4.1 – Estratégia de controle em cascata aplicada ao quadricóptero.

A referência de trajetória no espaço cartesiano \mathbb{R}^3 é fornecida pelo bloco *Gerador de Trajetória*. Tal bloco fornece as três coordenadas de posição (x_r, y_r, z_r) para o movimento translacional, além do ângulo de guinada (ψ_r) . O trajeto gerado não considera a presença de distúrbios aerodinâmicos e instabilidades na orientação do veículo, durante o percurso.

A malha de controle externa, representada pelo bloco *Controle Translacional*, viabiliza o rastreamento de trajetória no espaço tridimensional. As duas metodologias de controle implementadas nesta malha foram: controle preditivo baseado em modelo e o controle proporcional integral derivativo.

O controle do movimento translacional é executado em dois estágios. Inicialmente a altitude (z) do quadricóptero é controlada, sendo o empuxo total (U_1) a variável manipulada. Nesta fase o controlador utilizado é o preditivo baseado em modelo.

No próximo estágio é realizado o controle da movimentação no plano xy , sendo que, os valores de *setpoint* para os ângulos de rolagem e arfagem (ϕ_r, θ_r) são gerados através de duas entradas virtuais, computadas para seguir o movimento xy desejado. A metodologia de controle elaborada neste estágio foi o PID.

A malha de controle interna, designada pelo bloco *Controle Rotacional*, proporciona a estabilização dos três ângulos de orientação do veículo aéreo: rolagem, arfagem e guinada. A metodologia formulada nesta seção será o CPBM, sendo que as variáveis manipuladas correspondem aos torques aplicados nos três eixos $(\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$.

Na sequência, a força principal (empuxo) e os três torques são aplicados no bloco designado como *Modelo Dinâmico*. Este bloco incorpora as equações de movimento apresentadas no capítulo III, proporcionando a movimentação do veículo aéreo.

4.1. Controle Preditivo Utilizando Espaço de Estados

Nesta seção é desenvolvido um algoritmo de CPBM linear utilizando o modelo em espaço de estados.

Considerando que a referência de trajetória é conhecida em qualquer instante de tempo futuro, é possível através de linearizações sucessivas ao longo da trajetória, obter uma descrição linear e variante no tempo do modelo do sistema (Kühne, 2005). Assim, o modelo

no espaço de estados discreto e variante no tempo usado pelo algoritmo em questão, para obter as previsões futuras, é escrito conforme a expressão (4.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k) \cdot \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estados, \mathbf{u} é o vetor de entradas, \mathbf{y} corresponde ao vetor de saídas mensuradas, \mathbf{A} é a matriz de estados, \mathbf{B} corresponde a matriz de entradas, \mathbf{C} é a matriz relacionada às saídas e k corresponde ao instante de amostragem.

A função custo é representada pela equação (4.2), sendo que H_p representa o horizonte de predição, H_u é definido como o horizonte de controle e H_w define a partir de qual instante as saídas serão penalizadas. Esta função custo é minimizada de uma norma-2, ponderada por Q e R (Maciejowski, 2000):

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\hat{\mathbf{z}}(k+i|k) - \mathbf{r}(k+i)\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k)\|_{R(i)}^2 \quad (4.2)$$

onde $\hat{\mathbf{z}}(k+i|k)$ corresponde ao valor da saída predita no instante $k+i$, com as informações disponíveis no instante k . A referência de trajetória em cada instante de amostragem é representada por $\mathbf{r}(k+i)$, e $\Delta \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ representa a variação da variável manipulada.

A expressão (4.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V(k) = \|\mathbf{Z} - \mathbf{\Gamma}\|_Q^2 + \|\Delta \mathbf{U}\|_R^2 \quad (4.3)$$

sendo que \mathbf{Z} representa os valores de predição da saída e $\mathbf{\Gamma}$ equivale a referência de trajetória para todo o horizonte de predição H_p . Já $\Delta \mathbf{U}$ corresponde a variação da variável manipulada durante o horizonte de controle H_u . Tais elementos estão descritos pela expressão (4.4).

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \hat{z}(k + H_w | k) \\ \vdots \\ \hat{z}(k + H_p | k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} r(k + H_w | k) \\ \vdots \\ r(k + H_p | k) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k | k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k + H_u - 1 | k) \end{bmatrix}$$

As matrizes de ponderação das saídas (\mathbf{Q}) e das entradas (\mathbf{R}) são matrizes positivas definidas e diagonais, sendo representadas pela equação (4.5):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A predição das saídas controladas é representada pela expressão (4.6):

$$\hat{z}(k+1 | k) = \hat{y}(k+1 | k) = \mathbf{C}\hat{x}(k+1 | k) \quad (4.6)$$

onde:

$$\mathbf{C}\hat{x}(k+1 | k) = \mathbf{C}(\mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}\hat{u}(k)) = \mathbf{C}(\mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}\Delta\hat{u}(k) + \mathbf{B}u(k-1)) \quad (4.7)$$

Desta forma, a junção das equações (4.6) e (4.7) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Upsilon}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{\Theta}\Delta\mathbf{U} \quad (4.8)$$

ou seja, as predições são obtidas relacionando o modelo dinâmico do sistema, com os estados atuais, entradas passadas e variações de entradas futuras. As matrizes $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{\Upsilon}$ e $\mathbf{\Theta}$ estão representadas pela expressão (4.9):

$$\begin{aligned}
\Psi &= C \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ A^{H_u} \\ A^{H_u+1} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix} & \Upsilon &= C \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B \end{bmatrix} \\
\Theta &= C \begin{bmatrix} B & \dots & 0 \\ AB + B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_u-1} A^i B & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{H_u} A^i B & \dots & AB + B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} A^i B & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} A^i B + A^{H_p-(H_u+i)} B \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

A resposta livre do sistema compreende a resposta que ocorreria caso não houvesse mais variações na variável manipulada ($\Delta U = 0$), ou seja, fosse mantido o valor da última entrada aplicada no sistema. Desta forma, podemos considerar que a diferença entre a referência de trajetória futura e a resposta livre do sistema corresponde a matriz E , que representa o erro de trajetória.

$$E = \Gamma - \Psi x(k) - \Upsilon u(k-1) \tag{4.10}$$

Desta forma, substituindo as expressões (4.8) e (4.10) na função custo (4.2), temos uma nova formulação:

$$V = \|\Theta \Delta U - E\|_Q^2 + \|\Delta U\|_R^2 \tag{4.11}$$

Através de manipulações algébricas na função custo (4.11) podemos obter a seguinte expressão (4.12) em função da variação das entradas:

$$V = \text{const} - \Delta U^T G + \Delta U^T H \Delta U \quad (4.12)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} G &= 2\Theta^T Q E \\ H &= \Theta^T Q \Theta + R \end{aligned} \quad (4.13)$$

O valor ótimo de ΔU^* pode ser obtido através do seguinte problema de otimização com restrição (4.14), conhecido como problema de programação quadrática, sendo que algoritmos padrões estão disponíveis para solução.

$$\begin{aligned} \Delta U^* &= \min_{\Delta U} (\Delta U^T H \Delta U - G^T \Delta U) \\ \text{sujeito: } A_{\Delta u} \cdot \Delta U &\leq b_{\Delta u} \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde: $A_{\Delta u}$ e $b_{\Delta u}$, correspondem a uma matriz e um vetor de desigualdades, respectivamente.

Devido à característica de horizonte deslizante do CPBM, somente $\Delta \hat{u}(k)$ é necessário a cada instante k de amostragem (Camacho e Bordons, 2004).

4.1.1. CPBM Aplicado ao Subsistema Translacional

O controle preditivo baseado em modelo, utilizando a formulação em espaço de estados, é aplicado ao subsistema translacional para controlar a altitude (z) do veículo aéreo por intermédio da variável manipulada U_1 (empuxo total). A lei de controle proposta é derivada da equação dinâmica que descreve a movimentação no eixo z (4.15).

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{m} (\cos \theta \cos \phi) U_1 \quad (4.15)$$

Para o projeto do controlador, o subsistema pode ser reescrito no formato de espaço de estados como: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$. Assim, temos o vetor de estados: $\hat{\mathbf{x}}(t) = [z(t) \quad \omega_0(t)]^T$ que corresponde à posição e a velocidade linear do eixo z , em relação ao sistema de coordenadas inercial I . O vetor de entradas equivale à $\hat{\mathbf{u}}(t) = [U_1]^T$ que corresponde à força de empuxo total.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) = \begin{bmatrix} w_0(t) \\ -g + (\cos \phi(t) \cos \theta(t)) \frac{U_1(t)}{m} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

O modelo linearizado pode ser obtido através da expansão em Séries de Taylor em torno de pontos de operação da trajetória de referência. Além disso, são desconsiderados os termos de ordem superior, conforme apresentado na expressão (4.17).

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \left. \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)} \right|_{\substack{\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{ref} \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{ref}}} (\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}_{ref}(t)) + \left. \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t)}{\partial \hat{\mathbf{u}}(t)} \right|_{\substack{\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{ref} \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{ref}}} (\hat{\mathbf{u}}(t) - \hat{\mathbf{u}}_{ref}(t)) \quad (4.17)$$

Logo, obtemos as expressões (4.18) e (4.19) que representam os jacobianos de (4.16) em relação à $\hat{\mathbf{x}}(t)$ e $\hat{\mathbf{u}}(t)$ respectivamente.

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)} \right|_{\substack{\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{ref} \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{ref}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B}(t) = \left. \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t)}{\partial \hat{\mathbf{u}}(t)} \right|_{\substack{\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{ref} \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{ref}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \cos \phi(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Através do método de discretização de Euler é possível obter um modelo linear, discreto e variante no tempo. Assim, a expressão (4.20) representa as matrizes A_z e B_z no domínio de tempo discreto.

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_z(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_1}{m} \cos \phi(k) \cos \theta(k) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde T_1 representa o período de amostragem do sinal, que deve ser suficientemente pequeno para capturar os movimentos translacionais.

Desta forma, é possível observar que a dinâmica translacional do eixo z depende apenas da força de empuxo total U_1 . Sendo assim, o cálculo das predições dos estados do sistema pode ser determinado pela expressão (4.21).

$$\mathbf{x}_z(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ \omega_0(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_1}{m} \cos \phi(k) \cos \theta(k) \end{bmatrix} U_1(k) \quad (4.21)$$

4.1.2. CPBM Aplicado ao Subsistema Rotacional

O controle preditivo baseado em modelo, formulado em espaço de estados, também é aplicado ao subsistema rotacional com o intuito de estabilizar os ângulos de orientação do veículo aéreo (rolagem, arfagem e guinada). Para tal, as variáveis manipuladas correspondem aos torques aplicados nos três eixos do veículo $(\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$. A lei de controle proposta é derivada das equações dinâmicas que descrevem a orientação do quadricóptero (4.22):

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{J_r \dot{\theta} \Omega_r}{I_{xx}} + \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} \\
\ddot{\theta} &= \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{J_r \dot{\phi} \Omega_r}{I_{yy}} + \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} \\
\ddot{\psi} &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{\tau_\psi}{I_{zz}}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde:

$$\tau_\phi = bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)$$

$$\tau_\theta = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)$$

$$\tau_\psi = d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)$$

$$\Omega_r = (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)$$

O subsistema rotacional pode ser reescrito no formato de espaço de estados como:

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$. Desta forma, temos o vetor de estados:

$\hat{\mathbf{x}}(t) = [\phi(t) \ \dot{\phi}(t) \ \theta(t) \ \dot{\theta}(t) \ \psi(t) \ \dot{\psi}(t)]^T$ que representa às posições e velocidades

angulares do veículo aéreo. O vetor de entradas equivale à $\hat{\mathbf{u}}(t) = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$ que

corresponde aos torques aplicados nos três eixos.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{J_r \dot{\theta} \Omega_r}{I_{xx}} + \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} \\ \dot{\theta} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} - \frac{J_r \dot{\phi} \Omega_r}{I_{yy}} + \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} \\ \dot{\psi} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

O modelo linearizado pode ser obtido através da expansão em Séries de Taylor em torno de pontos de operação da trajetória de referência. Além disso, são desconsiderados os termos de ordem superior. Logo, obtemos as expressões (4.24) e (4.25) que representam os jacobianos de (4.23) em relação à $\hat{\mathbf{x}}(t)$ e $\hat{\mathbf{u}}(t)$ respectivamente.

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Por meio do método de discretização de Euler é possível obter um modelo linear, discreto e variante no tempo. Assim, as expressões (4.26) e (4.27) representam as matrizes \mathbf{A}_η e \mathbf{B}_η no domínio de tempo discreto, respectivamente.

$$\mathbf{A}_\eta(t) = \begin{bmatrix} 1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{B}_\eta(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_2 \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

sendo que T_2 representa o período de amostragem do sinal.

Através das matrizes apresentadas é possível obter a predição da saída do sistema rotacional, bem como implementar o controle empregando a metodologia CPBM.

4.2. Controle PID para Movimentação no Plano xy

Com o intuito de controlar a movimentação linear do quadricóptero no plano xy foi implementado um controlador proporcional integral derivativo (PID). As equações dinâmicas que descrevem a movimentação do veículo aéreo no plano xy são representadas pela expressão (4.28).

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) U_1 \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) U_1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Tal sistema pode ser reescrito no formato de espaço de estados como: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t))$. Assim, temos o vetor de estados: $\hat{\mathbf{x}}(t) = [x(t) \ u_0(t) \ y(t) \ v_0(t)]^T$ que correspondem as posições e velocidades lineares nos eixo x e y , em relação ao sistema de coordenadas inercial I . O vetor de entradas equivale à $\hat{\mathbf{u}}(t) = [u_x \ u_y]^T$.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) = \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_x(t) \frac{U_1(t)}{m} \\ v_0(t) \\ u_y(t) \frac{U_1(t)}{m} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

onde:

$$\begin{aligned} u_x(t) &= \cos \psi(t) \sin \theta(t) \cos \phi(t) + \sin \psi(t) \sin \phi(t) \\ u_y(t) &= \sin \psi(t) \sin \theta(t) \cos \phi(t) - \cos \psi(t) \sin \phi(t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Através da representação (4.29) é possível observar que a movimentação através dos eixos x e y dependem da entrada de controle U_1 . De fato, U_1 é projetado como o empuxo total, enquanto que, u_x e u_y podem ser consideradas como as direções de U_1 , responsáveis pelos movimentos através dos eixos x e y , respectivamente.

A entrada de controle U_1 é proveniente do controlador de altitude e, portanto, é considerada como um parâmetro variante no tempo. Além disso, por causa da estrutura de controle descentralizada, os ângulos de rolagem, arfagem e guinada, também são considerados como parâmetros variantes no tempo.

Em cada intervalo de tempo, após a aplicação do controlador PID para a movimentação linear no plano xy , obtemos as entradas virtuais $u_x(k)$ e $u_y(k)$. Logo, através da expressão (4.28) torna-se possível obter os valores de referência dos ângulos de rolagem ($\phi_{ref}(k)$) e arfagem ($\theta_{ref}(k)$) que são utilizados no controle rotacional do quadricóptero. Para este cálculo, assume-se que o ângulo de guinada (ψ) seja o valor mensurável em cada instante.

No capítulo II foi realizada uma breve revisão a respeito das estruturas de controle PID encontradas na literatura. O algoritmo implementado neste trabalho foi o PID paralelo, que está representado pela Figura 4.2.

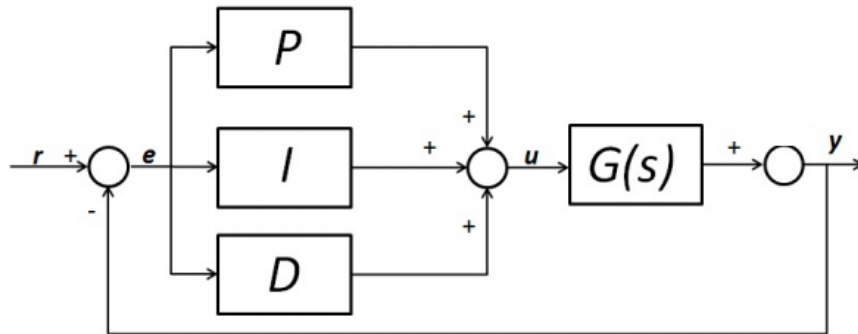


Figura 4.2 – Estrutura de controle PID implementada no quadricóptero, tipo paralelo (Aström e Hägglund, 2006).

A sintonia adequada do controlador exige que se conheça a dinâmica do processo a ser controlado, ou seja, é preciso levantar o máximo de informações possíveis a respeito do processo. Estas informações podem variar desde simples características do processo até um modelo matemático do mesmo. Em seguida, é preciso definir os critérios de desempenho. Alguns exemplos de critérios de desempenho são: valor do *overshoot*, tempo de subida, tempo de acomodação e a razão de declínio.

Neste trabalho, a sintonia foi realizada através do método de aproximações sucessivas ou tentativa e erro.

Tal método consiste em modificar as ações de controle e observar o efeito na variável de processo. As ações são modificadas até que se obtenha uma resposta ótima. Devido a sua simplicidade é um dos métodos mais utilizados, entretanto, seu uso torna-se impraticável em processos de grande inércia.

A sintonia de um controlador PID pelo método das aproximações sucessivas pode ser resumida nos seguintes passos:

- Eliminar as ações integral e derivativa, fazendo-se $T_i = \infty$ e $T_d = 0$.
- Estabelecer um *setpoint*, ajustar o ganho K_p em um valor baixo e acionar o sistema de controle.

- Aumentar o valor de K_p até que o processo apresente uma resposta oscilatória com amplitude constante.
- Reduzir o valor de K_p à metade.
- Diminuir o tempo T_i aos poucos até o processo oscilar continuamente, e em seguida, ajustá-lo para três vezes o valor obtido.
- Aumentar T_d lentamente até o processo oscilar continuamente, e em seguida, ajustá-lo para um terço do valor obtido.

Desta forma, foi realizada a sintonia do controlador PID, sendo que os parâmetros obtidos serão apresentados no capítulo V.

4.3. Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma estratégia comum para solucionar os problemas de rastreamento de trajetória em sistemas mecânicos subatuados, no caso, um helicóptero do tipo quadrirotor.

A dinâmica do veículo aéreo foi dividida em subsistema translacional e subsistema rotacional, sendo apresentados os projetos de controle de altitude, posição e orientação do veículo.

CAPÍTULO 5

Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a implementação de uma estratégia de controle para solucionar os problemas de posicionamento e rastreamento de trajetória em um veículo aéreo não tripulado, do tipo quadricóptero. Ao final, são analisados os resultados para a averiguação da robustez da estratégia de controle proposta. Tal robustez foi verificada mediante simulações na presença de incertezas nos parâmetros do veículo aéreo, e mediante distúrbios aerodinâmicos, como rajadas de ventos.

5.1. Simulação Computacional

Os resultados apresentados nesta dissertação provêm da simulação computacional desenvolvida no ambiente Simulink do *software* MATLAB[®] R2009a. Na Figura 5.1 é possível visualizar o diagrama de blocos do programa desenvolvido.

Tal programa foi estruturado conforme a estratégia apresentada no capítulo 4. De uma forma geral, o mesmo é composto pelos seguintes blocos: *Condições Iniciais*, *Gerador de Trajetória*, *Controle*, *Motor* e *Dinâmica*. Os demais blocos correspondem aos gráficos para a visualização dos resultados.

A estrutura que corresponde às condições iniciais provê os valores iniciais de localização e velocidade do veículo aéreo antes da manobra, ou seja, é possível determinar as condições iniciais de todos os estados do quadricóptero $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})$.

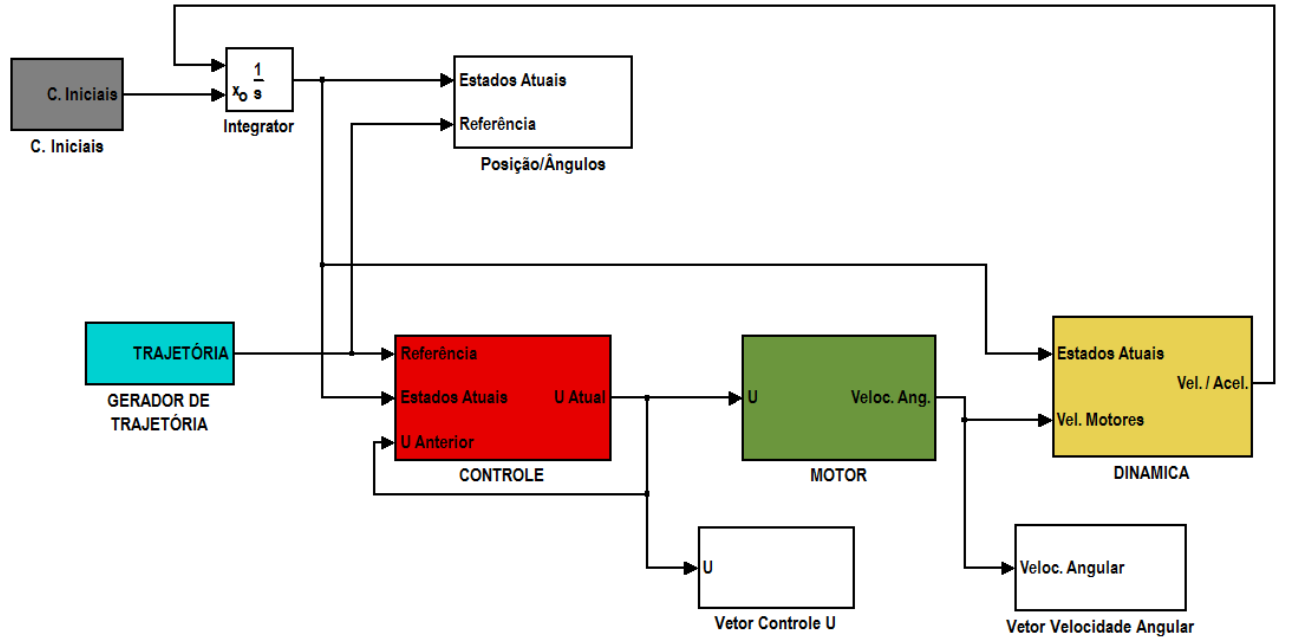


Figura 5.1 – Diagrama de blocos do programa desenvolvido para o quadricóptero.

A trajetória a ser seguida no espaço cartesiano \mathbb{R}^3 é fornecida pelo bloco *Gerador de Trajetória*. Tal bloco fornece a referência das três coordenadas de posição (x_r, y_r, z_r) para o movimento translacional, além do ângulo de guinada (ψ_r) .

A estrutura de controle do quadricóptero abrange a programação do controle preditivo baseado em modelo e do controle proporcional integral derivativo. Inicialmente, ocorre o controle do subsistema translacional e posteriormente, o subsistema rotacional.

O bloco denominado como *Motor* tem por objetivo converter os valores da força principal e dos três torques $(U_1, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$ nas velocidades correspondentes dos motores. Tal conversão é realizada por meio da equação (5.1):

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4b} & 0 & \frac{-1}{2bl} & \frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2bl} & 0 & \frac{-1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & 0 & \frac{1}{2bl} & \frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & \frac{-1}{2bl} & 0 & \frac{-1}{4d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Por fim, o bloco denominado como *Dinâmica* abrange o modelo dinâmico do quadricóptero, apresentado no capítulo 3, através das equações (3.43) e (3.44). As entradas deste bloco são todos os valores de posição e velocidade da estrutura, juntamente com os novos valores de velocidade dos motores. A saída consiste nos valores atualizados de posições/ângulos e velocidades do sistema, conforme apresentado na Figura 5.2.

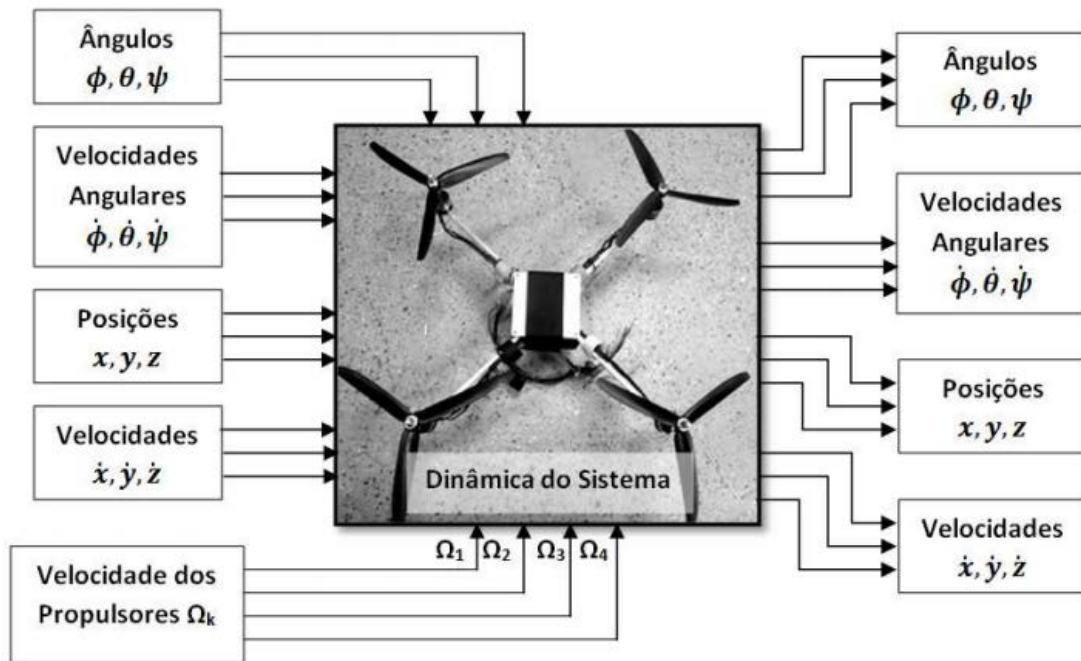


Figura 5.2 – Representação do bloco *Dinâmica* presente no simulador (adaptado de Sá, 2012).

5.2. Parâmetros dos Controladores

Esta seção exibe os parâmetros que foram definidos para o controle do veículo aéreo. Inicialmente são apresentados os parâmetros do CPBM e em seguida, os parâmetros de sintonia do PID.

5.2.1. Parâmetros do CPBM

O controle preditivo responsável pela altitude (z) do veículo aéreo teve seus parâmetros sintonizados conforme exibido a seguir:

$$H_w = 1 \quad H_p = 6 \quad H_u = 3$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [0.01] \quad (5.2)$$

Já o controlador preditivo responsável pelo subsistema rotacional do quadrrorotor teve seus parâmetros sintonizados conforme apresentado na equação (5.3):

$$H_w = 1 \quad H_p = 6 \quad H_u = 3$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Os parâmetros de controle foram sintonizados através de testes computacionais no quadrrorotor. Entretanto, algumas considerações teóricas fizeram-se necessárias.

O valor inferior do horizonte de predição (H_w) foi definido como 1, uma vez que, a dinâmica do veículo aéreo não apresenta tempo morto.

Foi possível observar que quanto maior o valor do horizonte de predição (H_p), mais o erro tende a diminuir assintoticamente. Isto se deve ao fato de que o controlador consegue perceber melhor o efeito futuro de suas ações e com isso, suas decisões de controle são mais adequadas. Por outro lado, deseja-se que o horizonte seja o menor possível, já que o seu tamanho é o principal responsável, neste caso, pelo custo computacional.

As matrizes de ponderação também foram formuladas de tal forma que há uma ponderação maior no erro das saídas controladas do que nos incrementos da variável manipulada. Valores mais elevados na matriz de ponderação das variáveis manipuladas aumentam a robustez do sistema, contudo, tornam a resposta do sistema em malha fechada mais lenta.

Restrições

Em relação às restrições presentes no controle preditivo, podemos determinar que o valor máximo das variáveis manipuladas seja limitado através da velocidade angular máxima dos motores. Conforme apresentado no capítulo 3, a expressão (5.4) relaciona as variáveis manipuladas com as velocidades angulares.

$$\begin{aligned} U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ \tau_\phi &= bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ \tau_\theta &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ \tau_\psi &= d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Logo, os valores de restrições nas variáveis manipuladas podem ser formulados conforme apresentado pelas expressões em (5.5).

$$\begin{aligned} U_1^{\min} = 0 \leq U_1 &\leq b \sum_{i=1}^4 (\Omega_i^{\max})^2 = U_1^{\max} \\ \tau_\phi^{\min} &= -bl(\Omega_4^{\max})^2 \leq \tau_\phi \leq bl(\Omega_2^{\max})^2 = \tau_\phi^{\max} \\ \tau_\theta^{\min} &= -bl(\Omega_1^{\max})^2 \leq \tau_\theta \leq bl(\Omega_3^{\max})^2 = \tau_\theta^{\max} \\ \tau_\psi^{\min} &= -d \left[(\Omega_2^{\max})^2 + (\Omega_4^{\max})^2 \right] \leq \tau_\psi \leq d \left[(\Omega_1^{\max})^2 + (\Omega_3^{\max})^2 \right] = \tau_\psi^{\max} \end{aligned} \quad (5.5)$$

É possível observar que as restrições apresentadas acima correspondem aos limites máximos do sistema. De acordo com a aplicação, valores diferentes podem ser configurados para as restrições. Por exemplo, se o desafio é manter a robustez do quadricóptero, então limites de restrições menores devem ser definidos. Contudo, se é desejado que o veículo realize manobras agressivas, as restrições devem ser setadas em seus limites máximos (Alexis, Nikolakopoulos e Tzes, 2014).

Como a proposta desta dissertação é que o quadricóptero realize um rastreamento de trajetória suave, bem como, seja robusto a incertezas paramétricas e distúrbios aerodinâmicos, as restrições tiveram seus valores definidos abaixo do limite máximo.

Na Tabela 5.1 é possível visualizar os valores máximos e os definidos para o quadricóptero.

Tabela 5.1 – Restrições das variáveis manipuladas pelo controlador.

Restrições	Valores Máximos	Valores Adotados
U_1	$0 \leq U_1 \leq 11.23$	$0 \leq U_1 \leq 8$
τ_ϕ	$ \tau_\phi \leq 0.58$	$ \tau_\phi \leq 0.1$
τ_θ	$ \tau_\theta \leq 0.58$	$ \tau_\theta \leq 0.1$
τ_ψ	$ \tau_\psi \leq 0.16$	$ \tau_\psi \leq 0.16$

5.2.2. Parâmetros do PID

O controle PID é responsável pela movimentação do quadricóptero no plano xy . Nesta dissertação foi aplicado o PID paralelo, sendo que, seus parâmetros foram sintonizados conforme apresentado na Tabela 5.2. Inicialmente foi aplicado o método das aproximações sucessivas, contudo, em seguida, foi realizado um ajuste manual para obtenção de melhores resultados.

Tabela 5.2 – Parâmetros do controlador PID.

Variáveis	K_p	K_i	K_d
X	0.1	0.0005	1.5
Y	0.2	0.0005	2.0

5.3. Resultados

5.3.1. Resposta ao Degrau

A princípio, uma análise do sistema é elaborada com base na resposta ao degrau unitário para as coordenadas de posição (x, y, z) conforme apresentado na Figura 5.3.

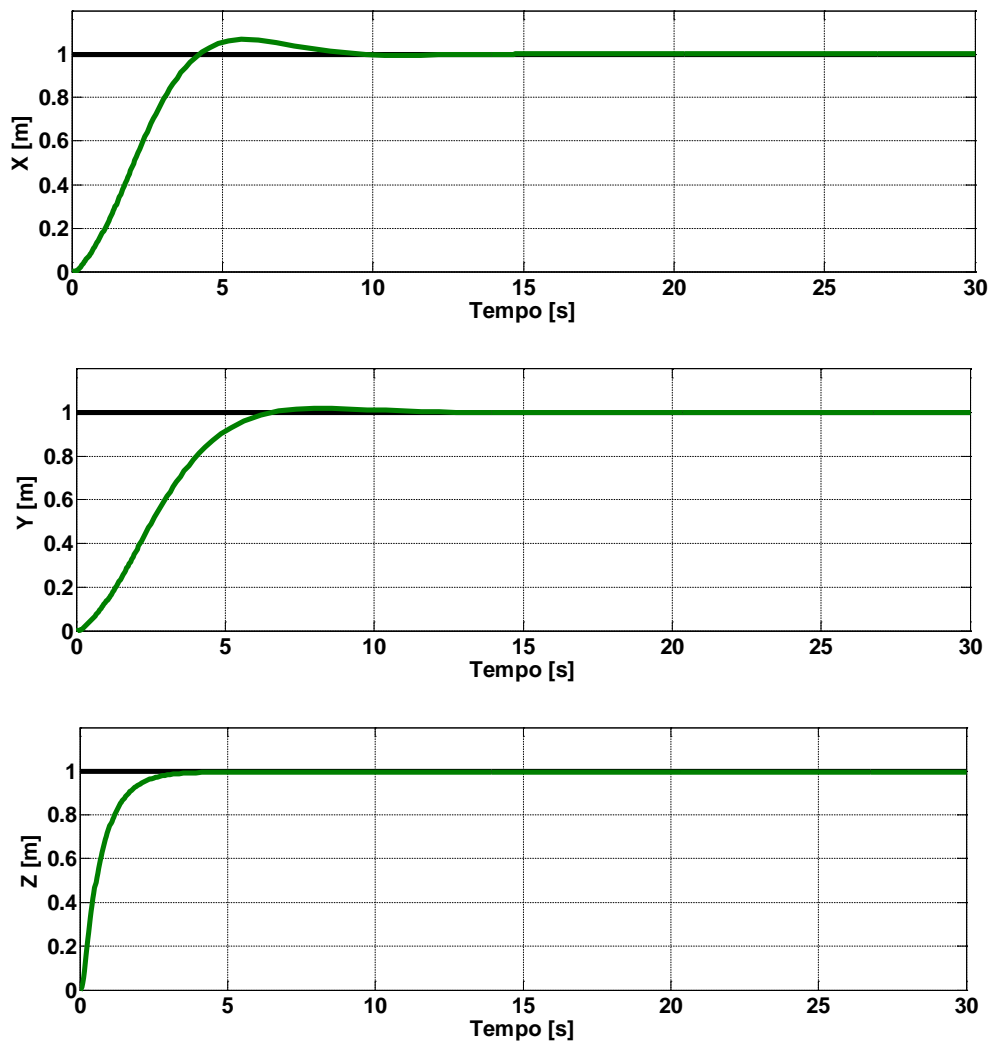


Figura 5.3 – Resposta ao degrau unitário para as coordenadas de posição (x, y, z) .

As coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) foram estabilizadas em torno da origem, conforme pode ser observado na Figura 5.4.

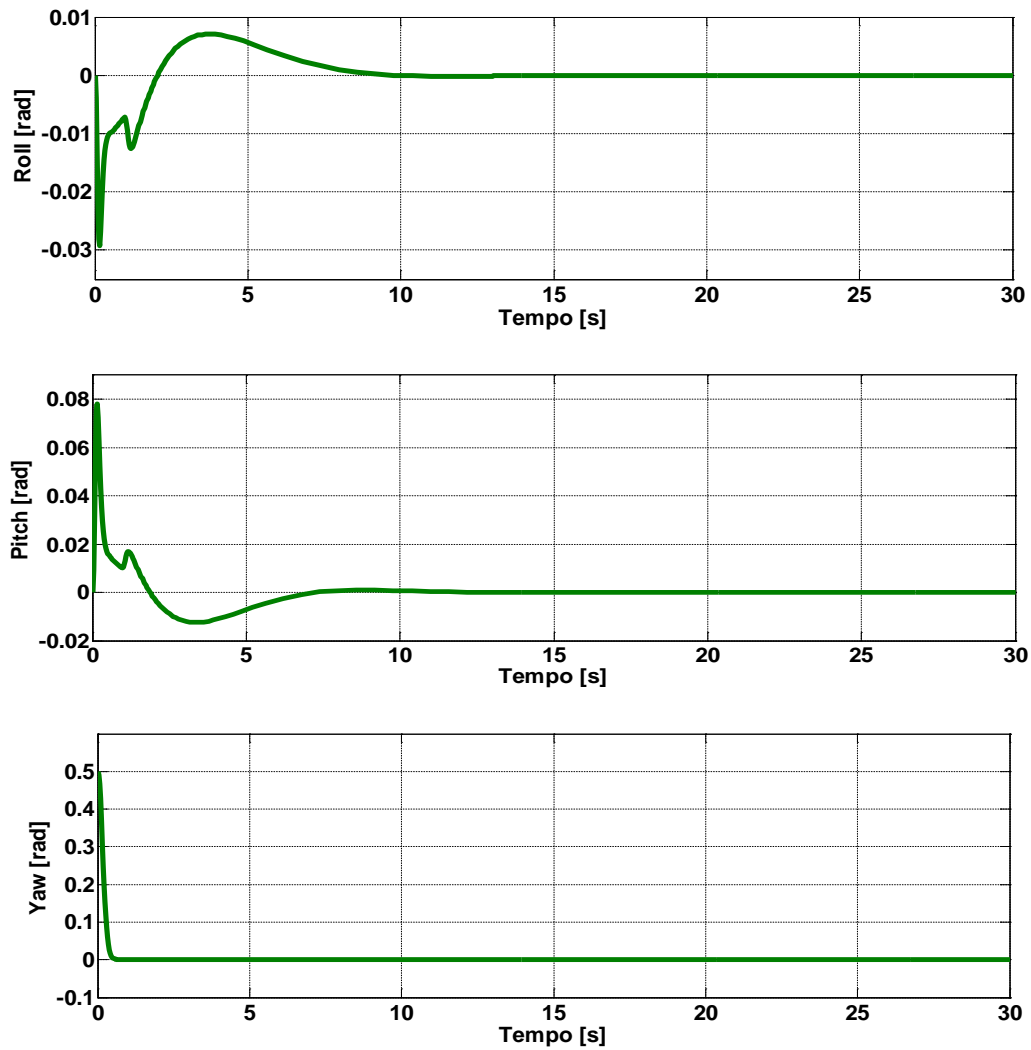


Figura 5.4 – Estabilização das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) .

Através dos gráficos apresentados (5.3) e (5.4), é possível observar que o quadricóptero conseguiu executar a tarefa de posicionamento e estabilização satisfatoriamente.

O veículo apresentou um comportamento estável e com erro estacionário nulo. Para a coordenada x , o tempo de subida é de 3.5 segundos e o tempo de acomodação é de aproximadamente 7 segundos. Houve 10% de sobressinal (*overshoot*), valor considerado baixo quando comparado com as dimensões do veículo.

Para a coordenada y , o tempo de subida é de 5 segundos e o tempo de acomodação é de aproximadamente 6 segundos, não havendo a presença de sobressinal.

A coordenada z não apresentou sobressinal, e o seu tempo de acomodação foi de aproximadamente 3 segundos, ou seja, atingiu o valor final rapidamente. Tal resposta era esperada já que o controle desta coordenada é realizado através do CPBM.

Na Figura 5.5 é possível visualizar os gráficos referentes às entradas manipuladas do quadricóptero, sendo $(\tau_\phi = U2 \quad \tau_\theta = U3 \quad \tau_\psi = U4)$.

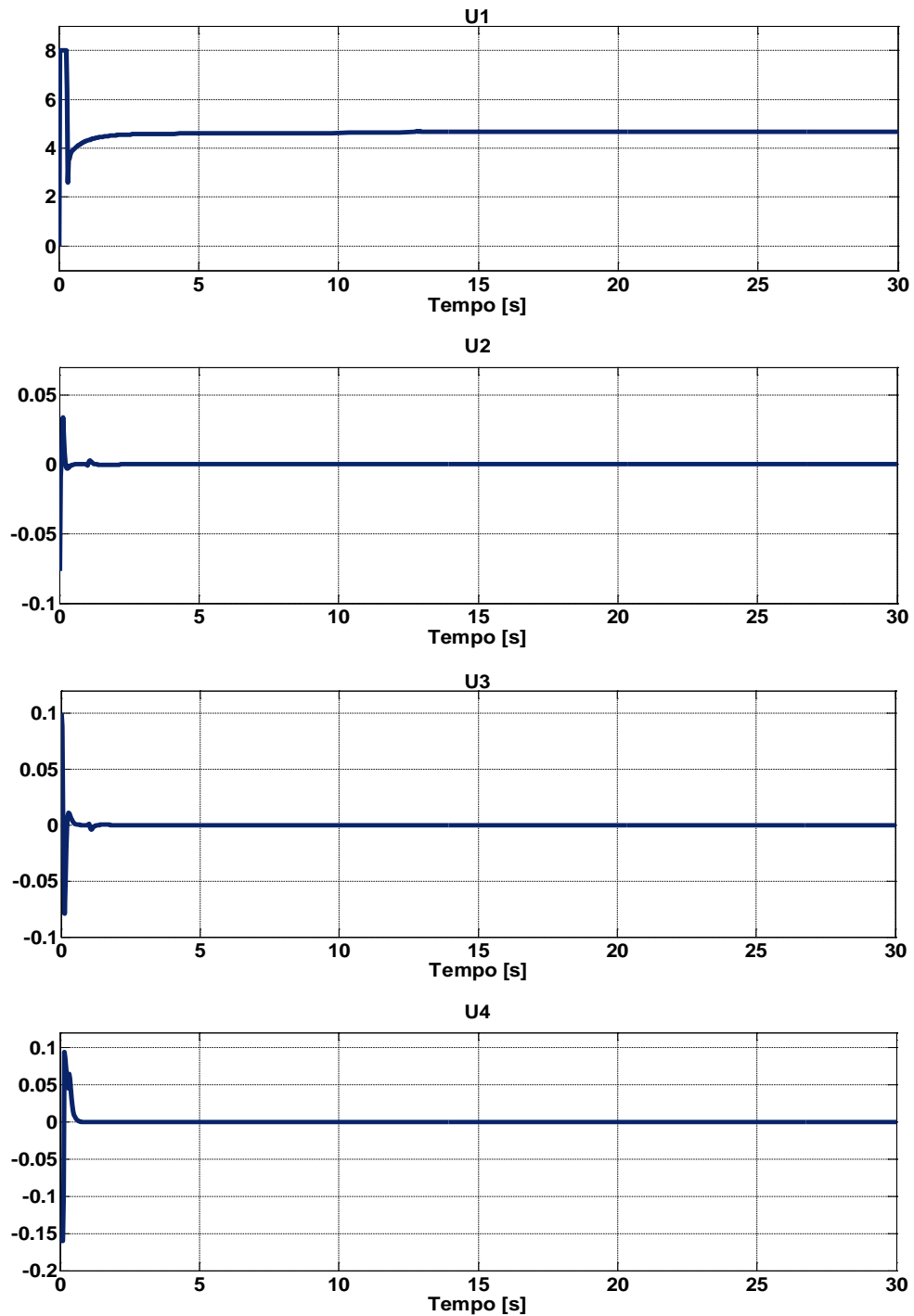


Figura 5.5 – Valores das variáveis manipuladas para uma entrada degrau.

Através destes dados torna-se possível verificar que as variáveis manipuladas tiveram seus valores restringidos pela lei de controle do CPBM, conforme definido na seção 5.2. Desta forma, o veículo não realizou manobras agressivas e não superou os limites físicos do sistema.

5.3.2. Rastreamento de Trajetória

Nesta seção será analisado o problema de rastreamento de trajetória, onde uma trajetória de referência é determinada previamente e indica o caminho no qual o veículo aéreo deve se locomover. Serão avaliadas três referências de trajeto distintas.

Além da análise de rastreamento de trajetória, será avaliado o comportamento do veículo na presença de incertezas paramétricas e de perturbações externas.

Referência de trajetória circular

O primeiro trajeto aplicado na simulação do quadricóptero consiste em um círculo no espaço cartesiano \mathcal{R}^3 , definido pela expressão (5.6).

São configuradas as referências para as três coordenadas de posição (x_r, y_r, z_r) e para o ângulo de guinada (ψ_r) .

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{20}\right) \text{ m} & y_r &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{20}\right) \text{ m} \\ z_r &= 3 - 2 \cos\left(\frac{\pi t}{20}\right) \text{ m} & \psi_r &= 0 \text{ rad} \end{aligned} \tag{5.6}$$

As coordenadas iniciais (posição e orientação) do veículo aéreo para tal trajetória são apresentadas em (5.7):

$$\xi_0 = [0.5, 0, 1] \quad \eta_0 = [0, 0, 0.5] \tag{5.7}$$

As Figuras 5.6 a 5.8 exibem os resultados computacionais para a tarefa de seguimento da trajetória circular.

Uma quantidade de $\pm 20\%$ de incertezas nos valores de massa e na matriz de inércia, foram considerados com o intuito de testar a robustez da estratégia de controle proposta.

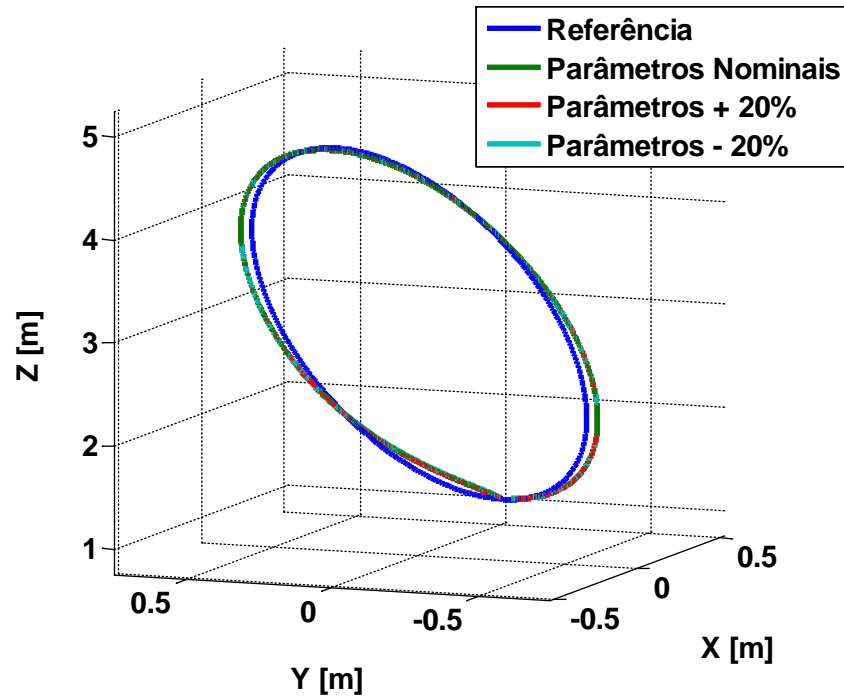
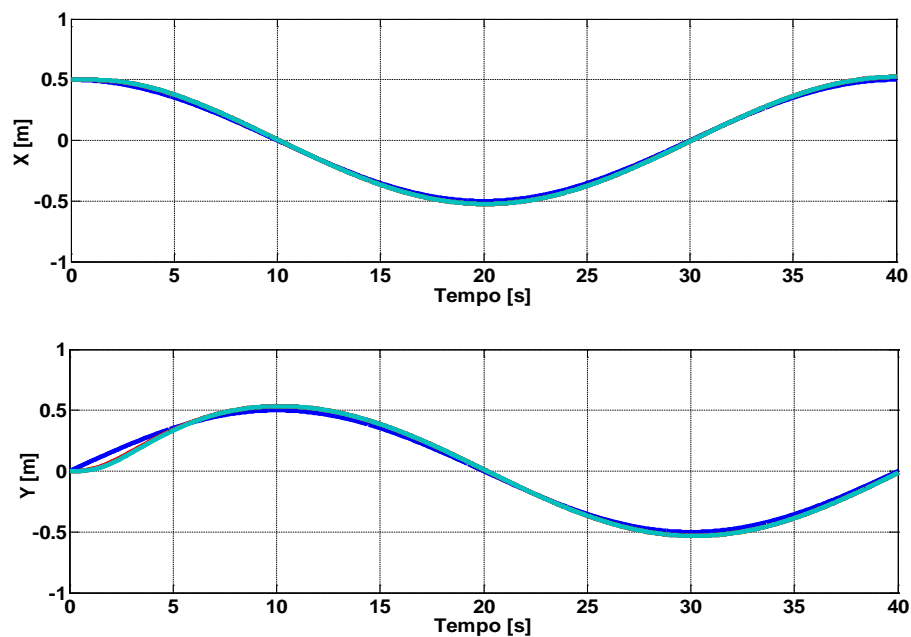


Figura 5.6 – Rastreamento de trajetória circular.



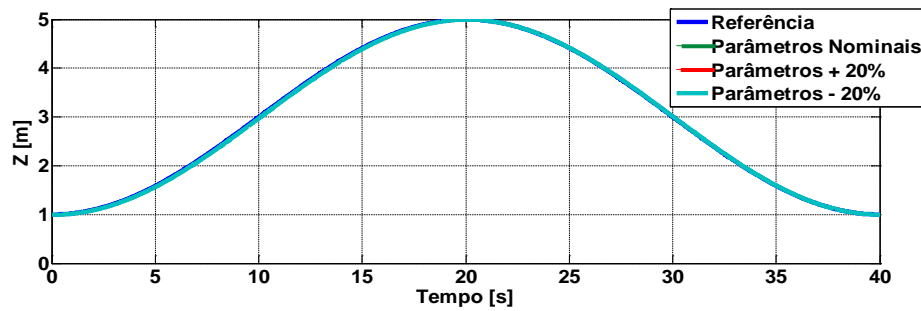


Figura 5.7 – Resposta das coordenadas de posição (x, y, z) para a trajetória circular.

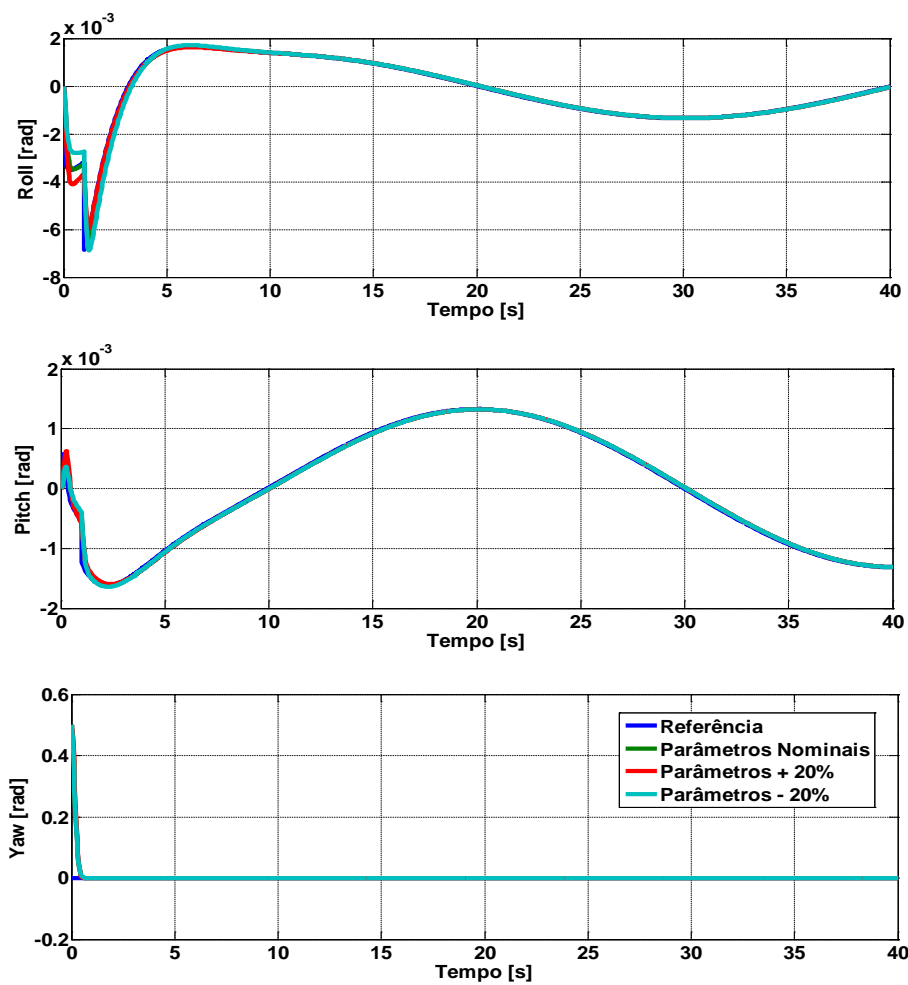


Figura 5.8 – Resposta das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para a trajetória circular.

Através dos gráficos apresentados, é possível perceber que o veículo aéreo foi capaz de realizar a tarefa de rastreamento da trajetória circular de modo satisfatório. Também podemos visualizar que a estratégia de controle apresentou um desempenho robusto na presença de incertezas paramétricas em relação a massa e a inércia.

Na Figura 5.9 é possível visualizar os gráficos referentes às entradas manipuladas do quadricóptero.

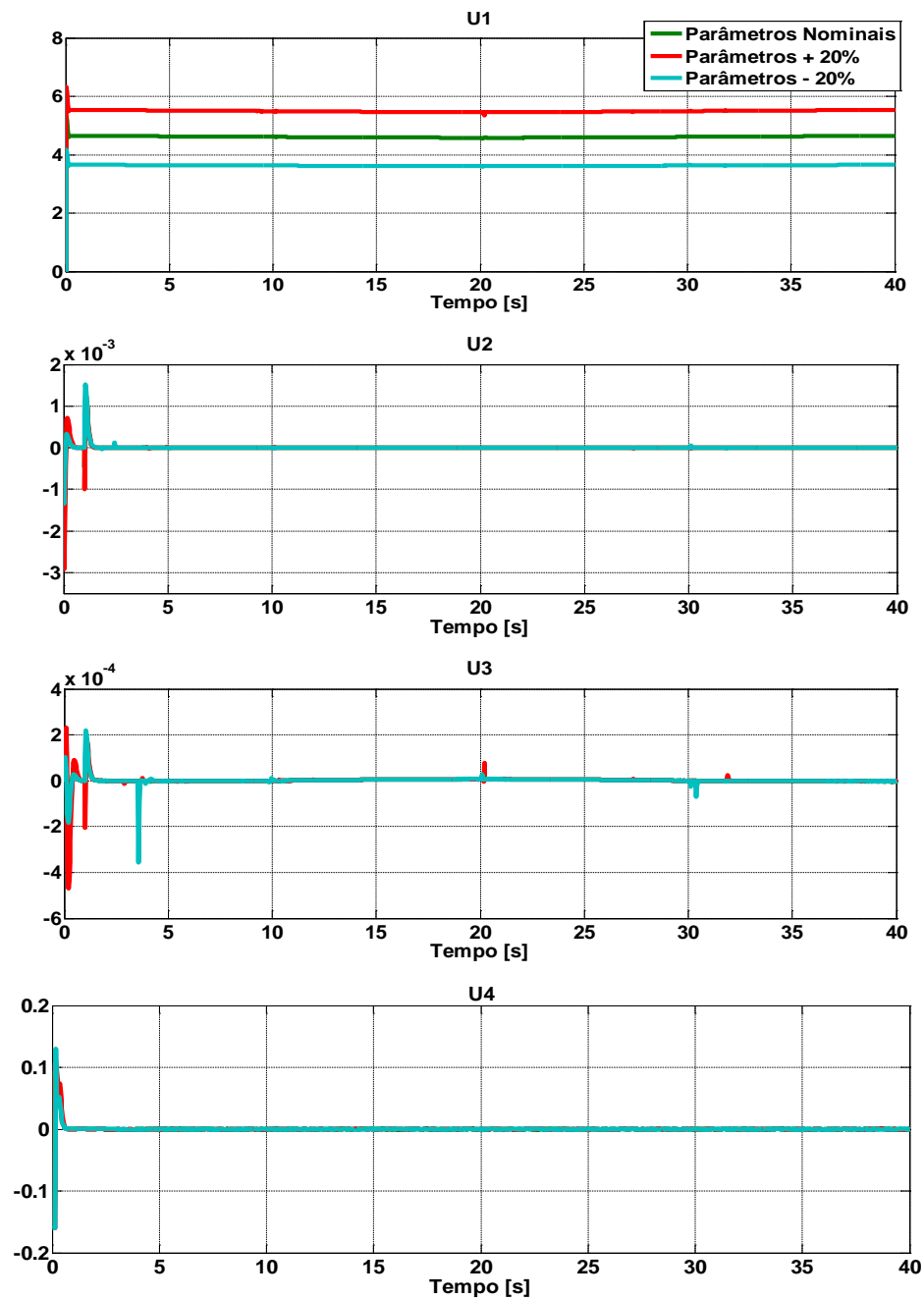


Figura 5.9 – Valores das variáveis manipuladas para trajetória circular.

As Figuras 5.10 e 5.11 exibem os erros referentes às coordenadas translacionais e rotacionais, respectivamente.

Apesar da tarefa de rastreamento de trajetória ter sido plenamente executada, podemos observar a presença de erro em regime permanente nas coordenadas translacionais. Tal erro tem baixa amplitude quando comparado com as dimensões do veículo e é variável ao longo da trajetória. Podemos ainda perceber que as respostas das coordenadas de posição x e y , controladas pelo PID, apresentam uma pequena defasagem no tempo em relação à referência, ou seja, a saída do controlador está atrasada.

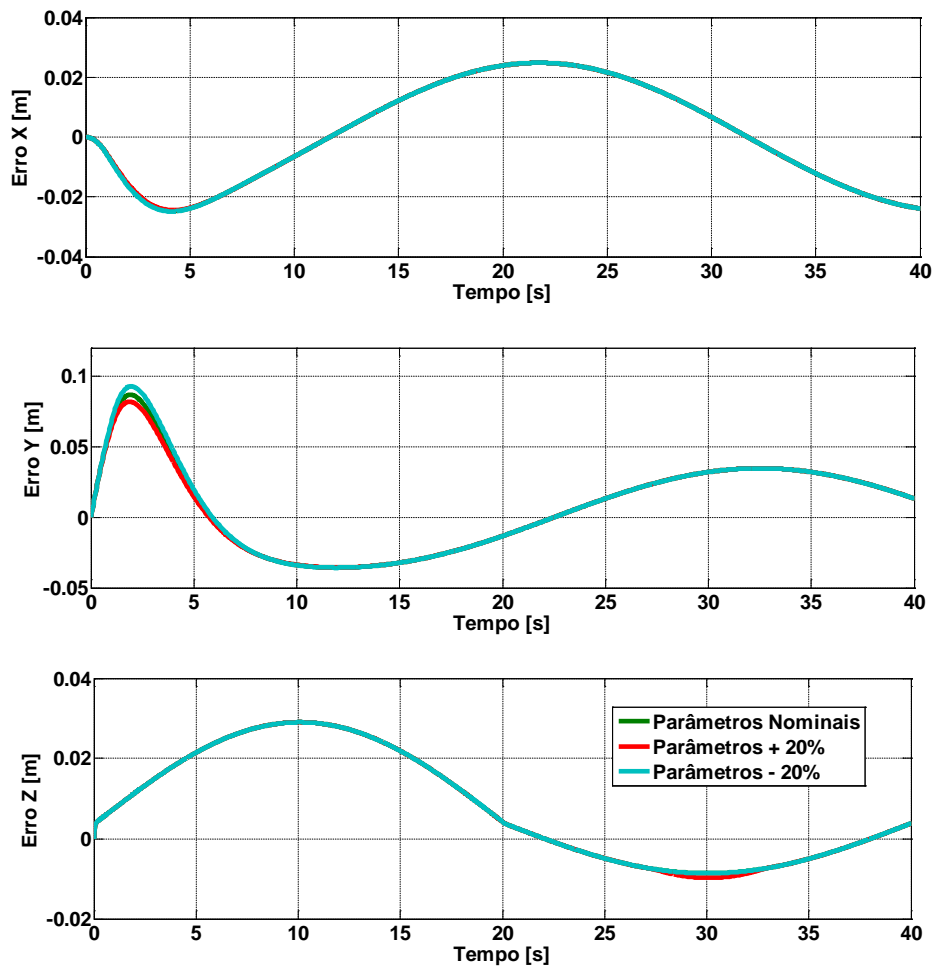


Figura 5.10 – Erro das coordenadas translacionais para a trajetória circular.

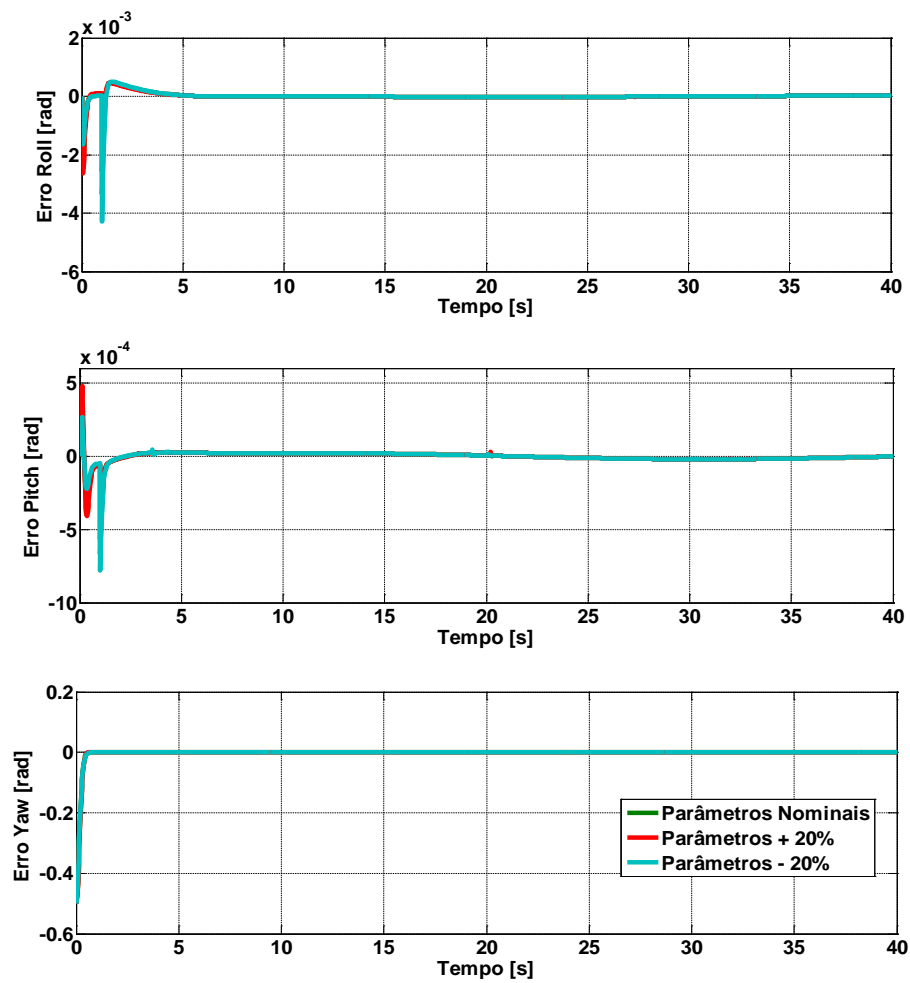


Figura 5.11 – Erro das coordenadas rotacionais para a trajetória circular.

A Tabela 5.3 apresenta uma análise quantitativa dos erros referentes às coordenadas de posição e orientação durante o rastreamento de trajetória. São especificados: o valor do erro médio quadrático (EMS), o valor do erro máximo e do erro mínimo, considerando parâmetros nominais e incertezas de $\pm 20\%$.

Tal tabela nos mostra claramente a robustez da estratégia de controle, uma vez que, os valores dos erros em relação aos parâmetros nominais, se mantém aproximadamente iguais aos erros na presença das incertezas.

Tabela 5.3 – Análise quantitativa de erros para trajetória circular.

Estados	Parâmetros Nominais			Parâmetros + 20%			Parâmetros - 20%		
	EMQ	E. Máx.	E. Mín.	EMQ	E. Máx.	E. Mín.	EMQ	E. Máx.	E. Mín.
$x(m)$	0.0002	0.0248	0	0.0002	0.0248	0	0.0002	0.0249	0
$y(m)$	0.0011	0.0868	0	0.0010	0.0818	0	0.0011	0.0927	0
$z(m)$	0.0002	0.0290	0	0.0002	0.0290	0	0.0002	0.0290	0
$\phi(rad)$	3 e-8	0.0033	0	3 e-7	0.0026	0	4 e-8	0.0043	0
$\theta(rad)$	1 e-9	0.0006	0	2 e-9	0.0005	0	1 e-9	0.0007	0
$\psi(rad)$	0.0009	0.5	0	0.0010	0.5	0	0.0009	0.5	0

Referência de trajetória helicoidal

A segunda referência de trajetória aplicada na simulação consiste em um trajeto helicoidal vertical, cujas expressões são definidas em (5.8).

São configuradas as referências para as três coordenadas de posição (x_r, y_r, z_r) e para o ângulo de guinada (ψ_r) .

$$\begin{aligned}
 x_r &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \text{ m} & y_r &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ m} \\
 z_r &= 1 + \frac{t}{10} \text{ m} & \psi_r &= 0 \text{ rad}
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

As coordenadas iniciais do veículo aéreo para tal trajetória são apresentadas em (5.9):

$$\xi_0 = [0.5, 0, 1] \quad \eta_0 = [0, 0, 0.5]
 \tag{5.9}$$

Assumindo que o quadricóptero precisa, sob condições ideais, de um valor de empuxo de aproximadamente $U_1 = 4,62N$ para realizar um voo estacionário (pairagem), as seguintes

perturbações externas foram consideradas nas forças aerodinâmicas. Também foram considerados distúrbios de aproximadamente 10% nos momentos aerodinâmicos.

$$a_x = 1N \quad em \quad t = 10s$$

$$a_y = 1N \quad em \quad t = 20s$$

$$a_z = 1N \quad em \quad t = 30s$$

$$a_\phi = 5e^{-3}Nm \quad em \quad t = 15s$$

$$a_\theta = 5e^{-3}Nm \quad em \quad t = 25s$$

$$a_\psi = 5e^{-3}Nm \quad em \quad t = 35s$$

Os resultados das simulações são apresentados nas Figuras 5.12 a 5.14.

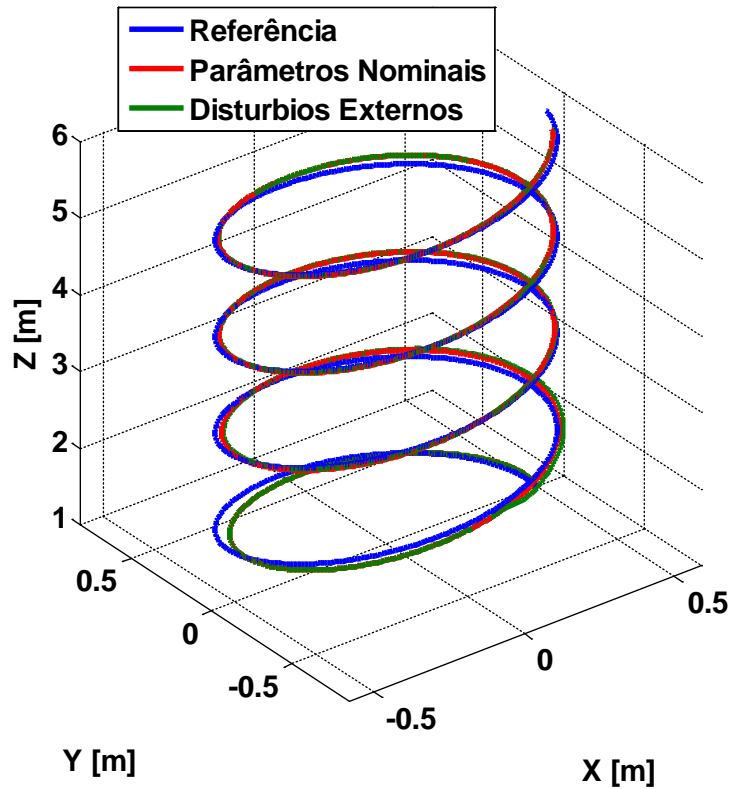


Figura 5.12 – Rastreamento de trajetória helicoidal.

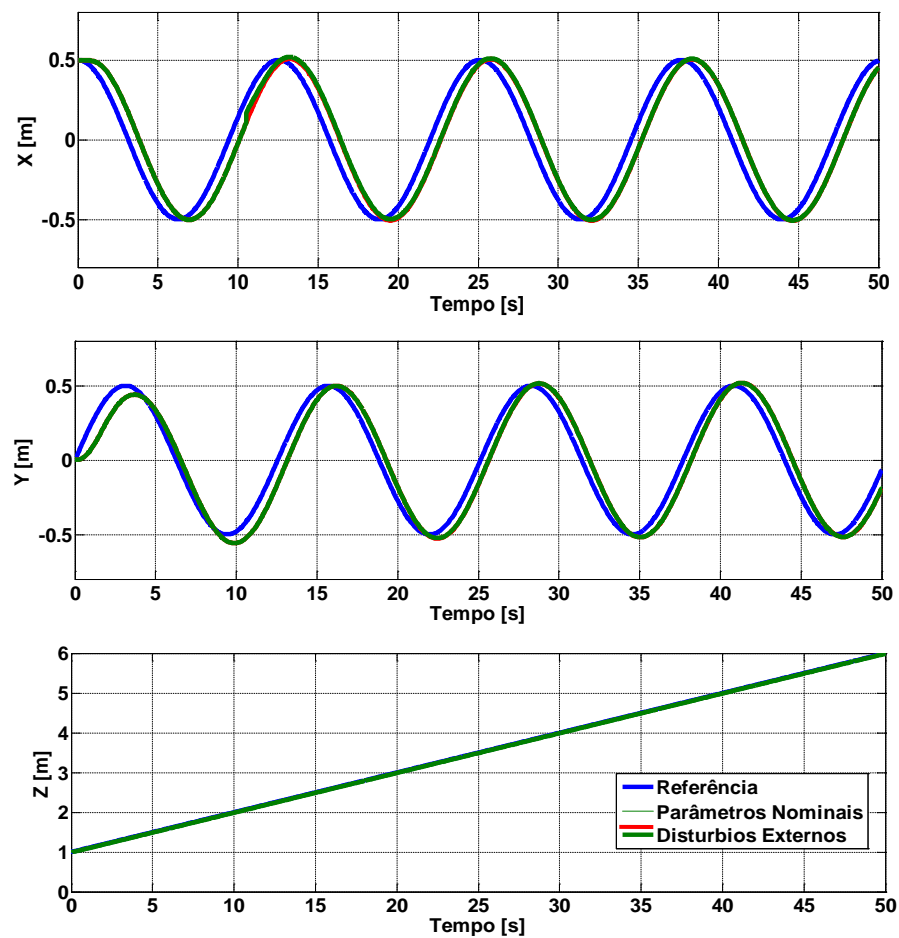
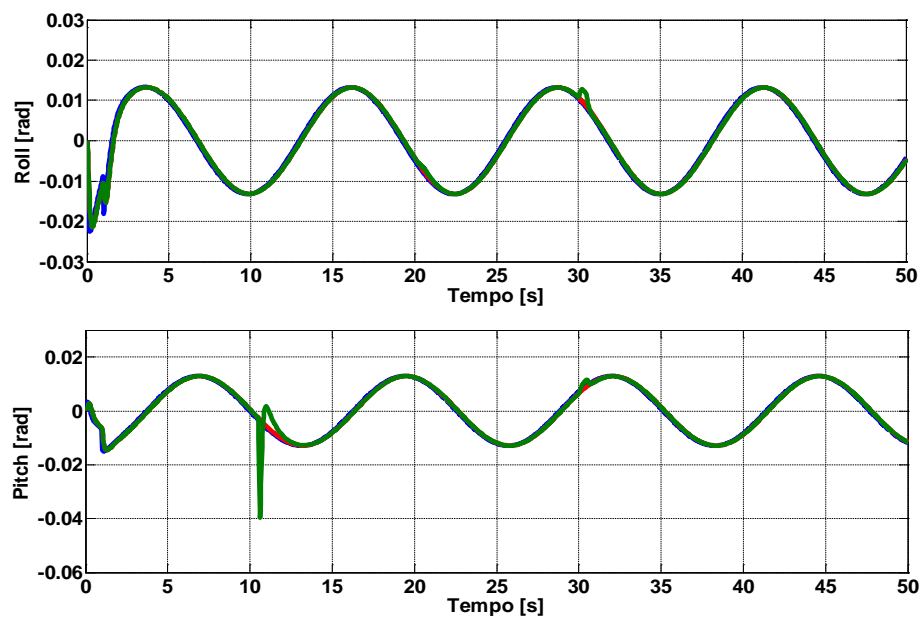


Figura 5.13 – Resposta das coordenadas de posição (x, y, z) para uma trajetória helicoidal.



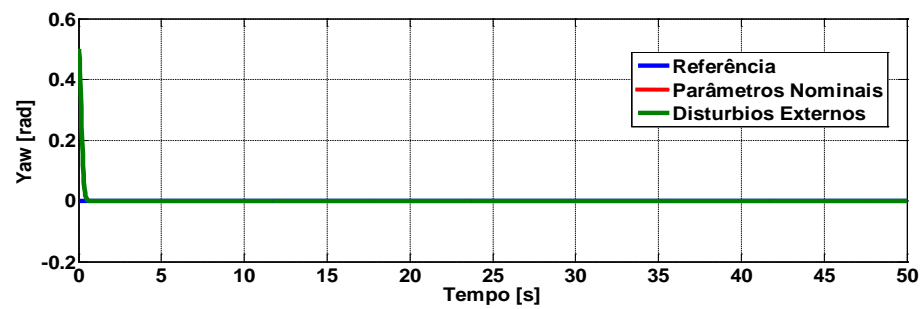
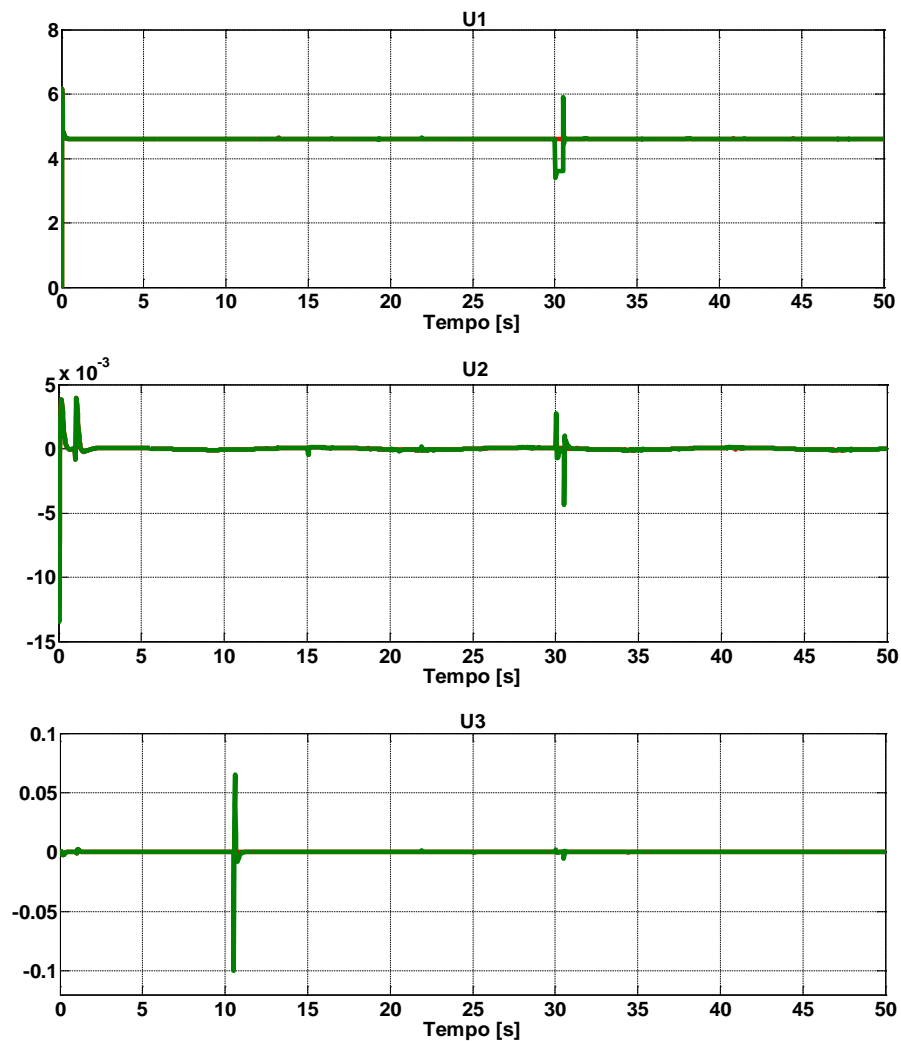


Figura 5.14 – Resposta das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para uma trajetória helicoidal.

Na Figura 5.15 é possível visualizar os gráficos referentes às entradas manipuladas do quadricóptero.



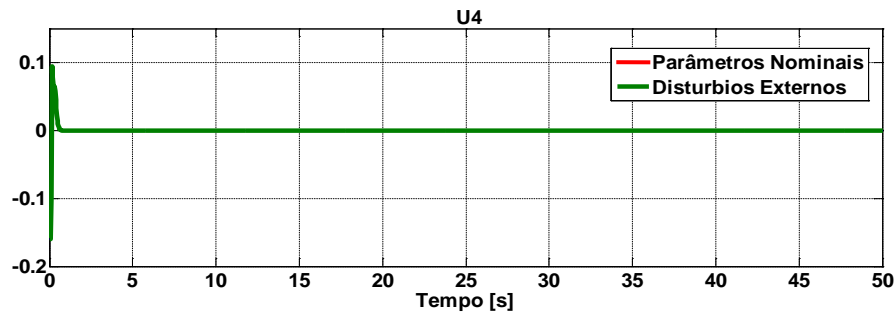


Figura 5.15 – Valores das variáveis manipuladas para trajetória helicoidal.

É possível perceber através dos gráficos apresentados que o veículo aéreo executou a tarefa de rastreamento da trajetória helicoidal de forma satisfatória. Além disso, foi possível verificar o bom funcionamento do quadricóptero perante as perturbações externas nas forças translacionais e momentos aerodinâmicos.

Os erros das coordenadas translacionais e rotacionais em relação ao referencial são apresentados nas Figuras 5.16 e 5.17.

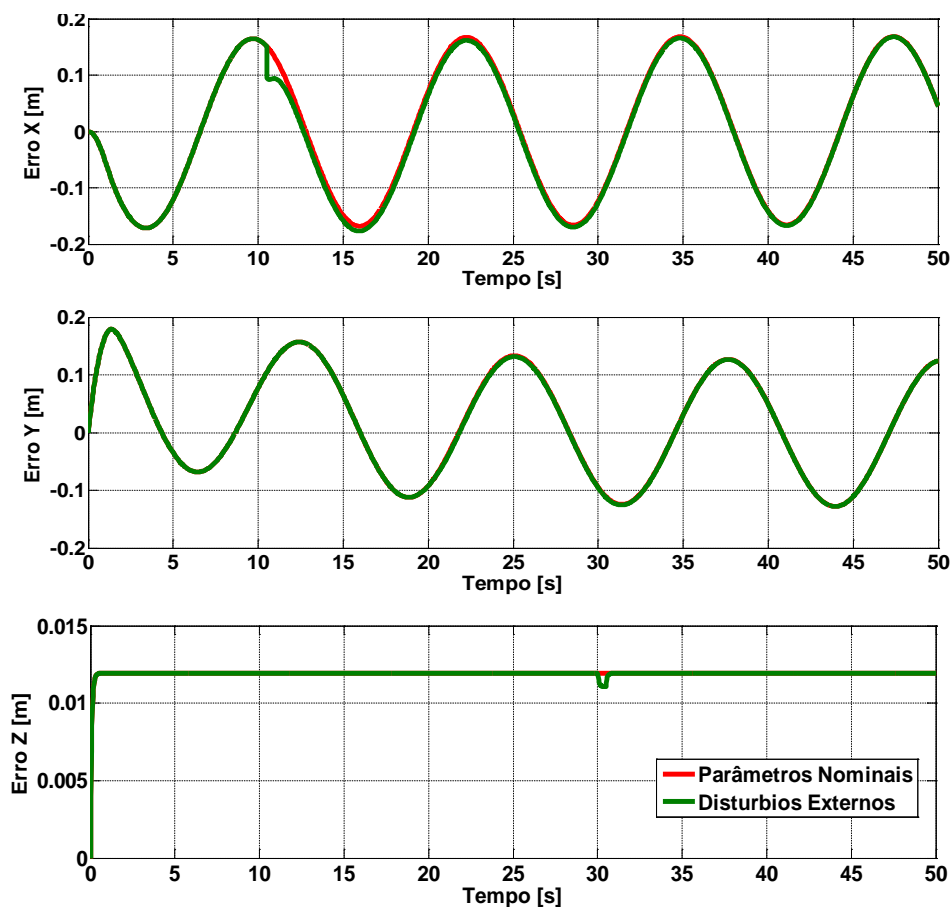


Figura 5.16 – Erros das coordenadas de posição (x, y, z) para uma trajetória helicoidal.

Novamente observamos que os erros referentes às coordenadas translacionais não são nulos em regime permanente. Além disso, podemos perceber que a sua magnitude é maior quando comparado com os erros apresentados na trajetória circular.

Outro fator a ser observado é que as respostas para as coordenadas x e y apresentaram uma maior defasagem no tempo em relação ao sinal de referência.

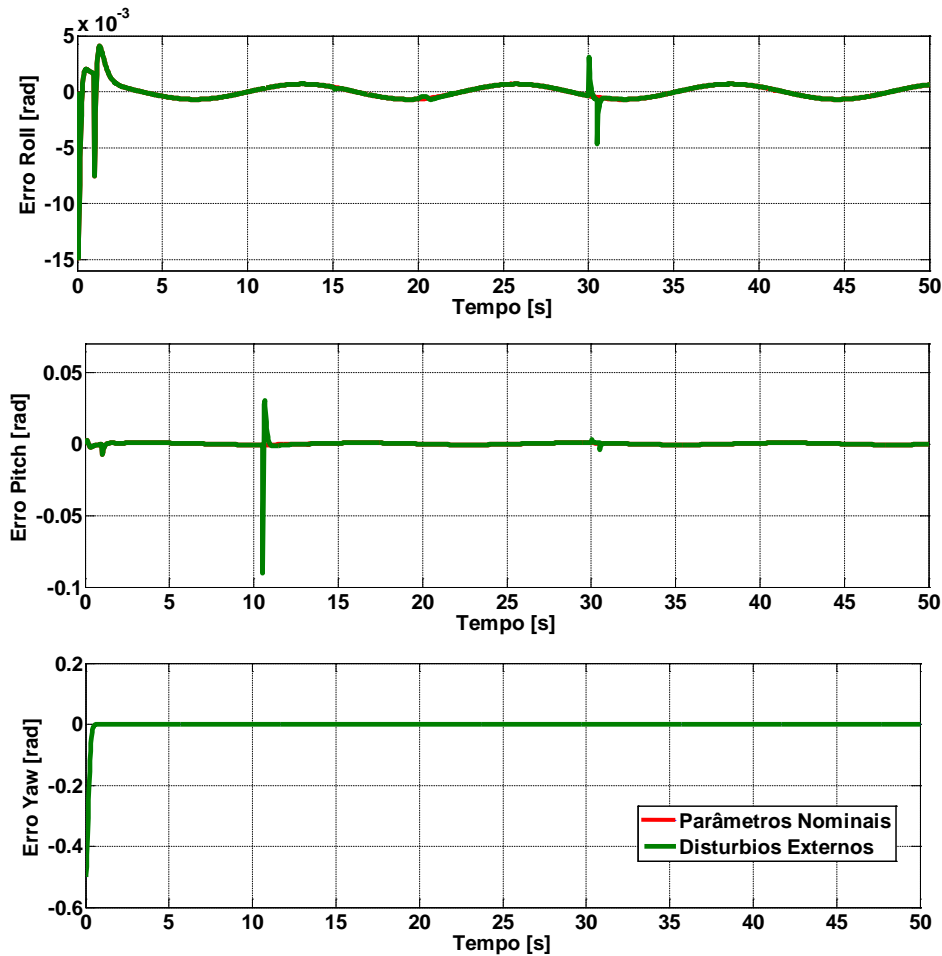


Figura 5.17 – Erros das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para uma trajetória helicoidal.

A Tabela 5.4 relaciona os erros de todas as coordenadas (posição e orientação) em relação ao referencial. São identificados os erros na ausência e na presença de distúrbios externos.

Tabela 5.4 – Análise quantitativa de erros para trajetória helicoidal.

	Parâmetros Nominais			Distúrbios Externos		
Estados	EMQ	E. Máx.	E. Mín.	EMQ	E. Máx.	E. Mín.
$x(m)$	0.0141	0.1716	0	0.0140	0.1767	0
$y(m)$	0.0085	0.1790	0	0.0085	0.1790	0
$z(m)$	0.0004	0.0119	0	0.0001	0.0119	0
$\phi(rad)$	9 e-7	0.0149	0	9 e-7	0.0149	0
$\theta(rad)$	3 e-7	0.0077	0	8 e-6	0.0903	0
$\psi(rad)$	0.0007	0.5	0	0.0007	0.5	0

Referência de trajetória aplicada em tarefas de busca

Por fim, uma trajetória bastante utilizada em aplicações de exploração e tarefas de busca e regaste será apresentada. Tal trajetória se mostra como um desafio ao quadrrorotor por apresentar mudanças abruptas de direção.

As coordenadas iniciais (posição e orientação) do veículo aéreo para tal trajetória são apresentadas em (5.10):

$$\xi_0 = [0, 0, 0] \quad \eta_0 = [0, 0, 0.5] \quad (5.10)$$

As Figuras 5.18 a 5.20 exibem o rastreamento de tal trajetória.

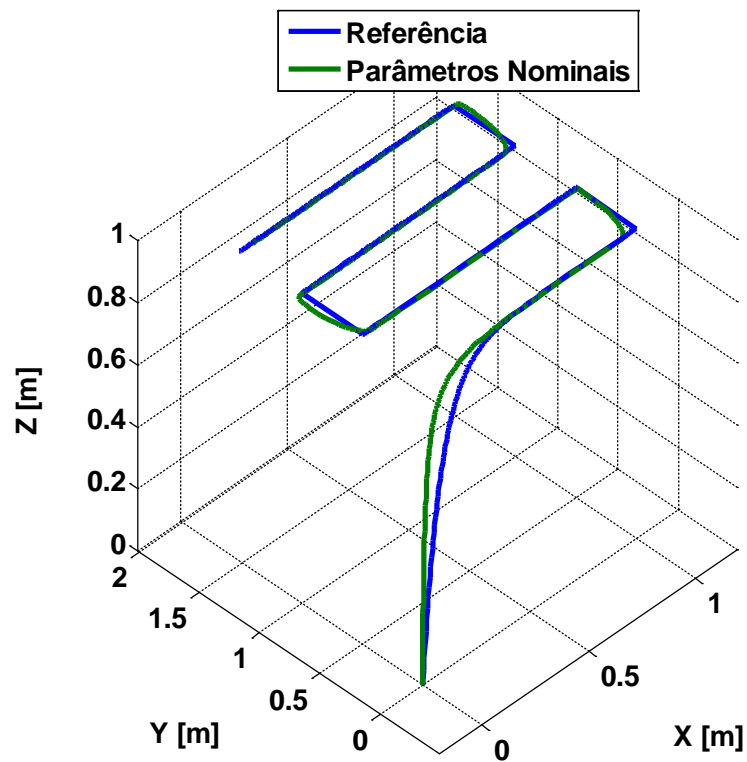
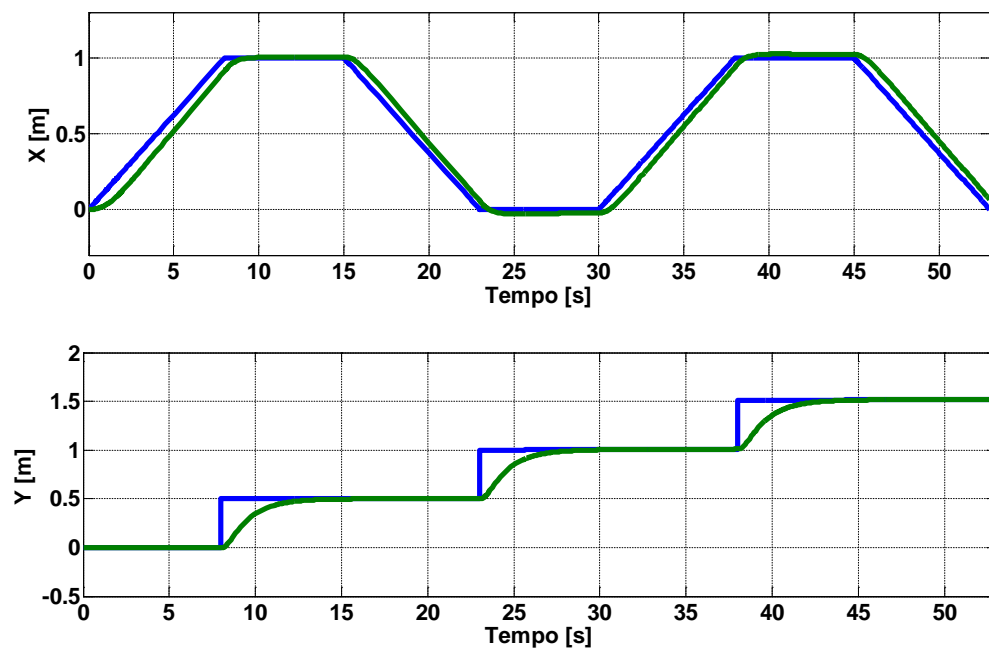


Figura 5.18 – Rastreamento de trajetória aplicada em tarefas de busca.



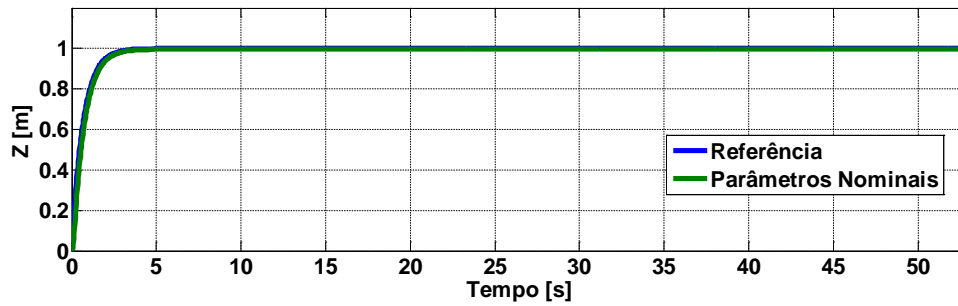


Figura 5.19 – Resposta das coordenadas de posição (x, y, z) para trajetória aplicada em tarefas de busca.

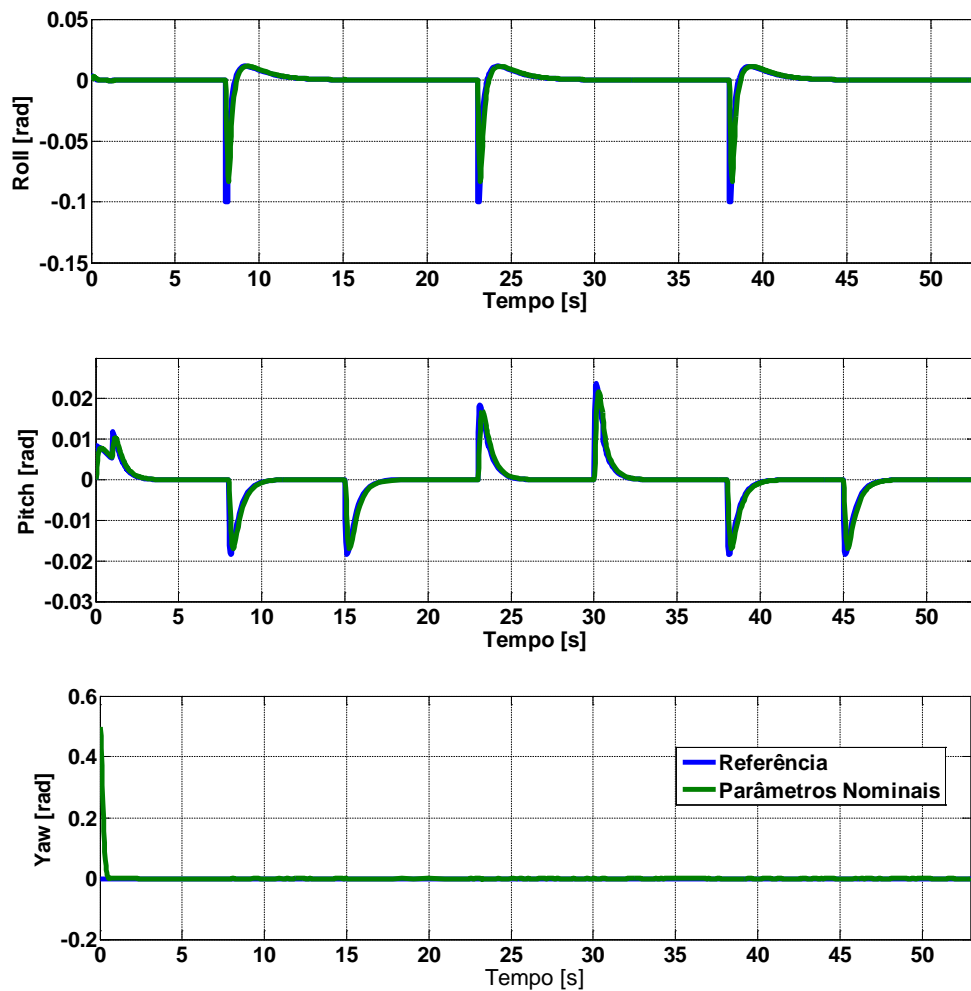


Figura 5.20 – Resposta das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para trajetória aplicada em tarefas de busca.

O desempenho do quadricóptero para o rastreamento desta trajetória também se mostrou satisfatório, mesmo com as variações abruptas de direção no plano xy . Contudo,

apenas a coordenada y e o sistema rotacional foram capazes de anular o erro em estado estacionário.

Na Figura 5.21 é possível visualizar os gráficos referentes às entradas manipuladas do quadricóptero, respeitando os limites físicos do quadricóptero.

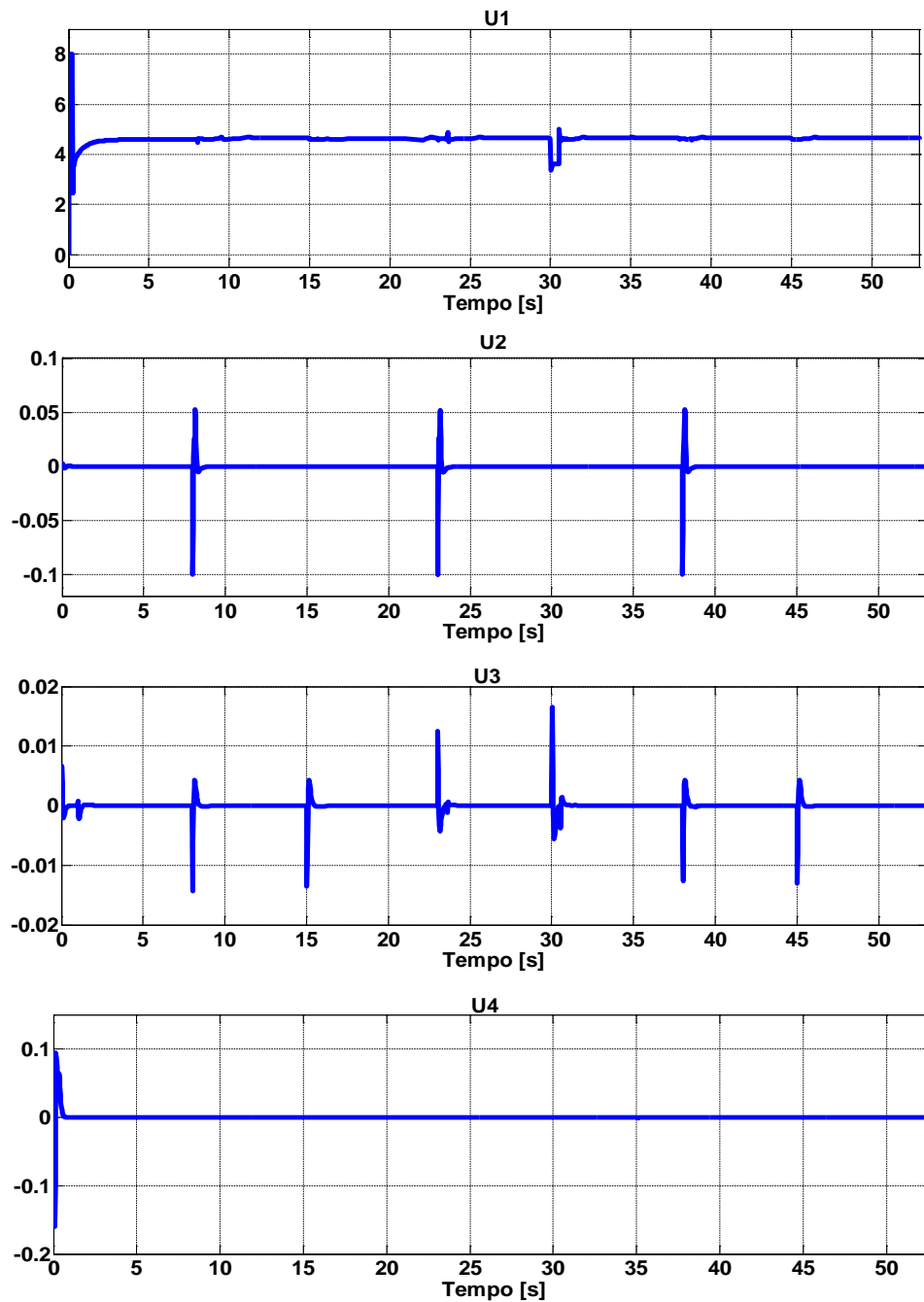


Figura 5.21 – Valores das variáveis manipuladas para trajetória aplicada em tarefas de busca.

Os erros das coordenadas translacionais e rotacionais em relação ao referencial são apresentados nas Figuras 5.22 e 5.23.

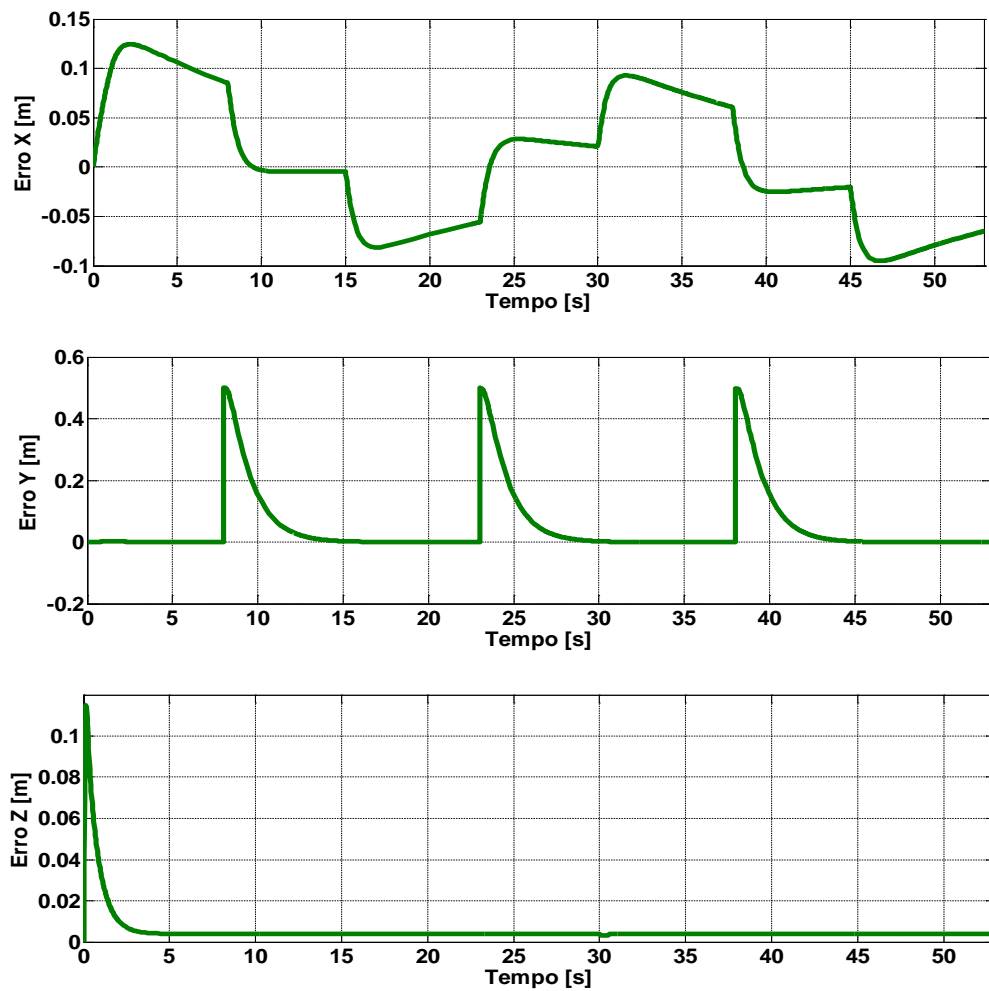
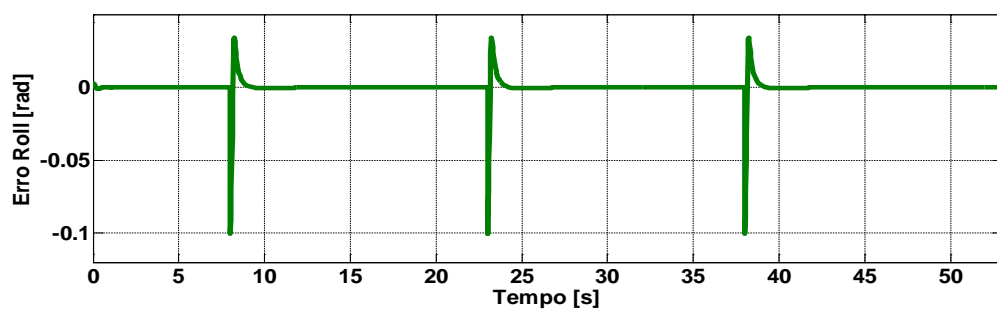


Figura 5.22 – Erros das coordenadas de posição (x, y, z) para uma trajetória aplicada em tarefas de busca.



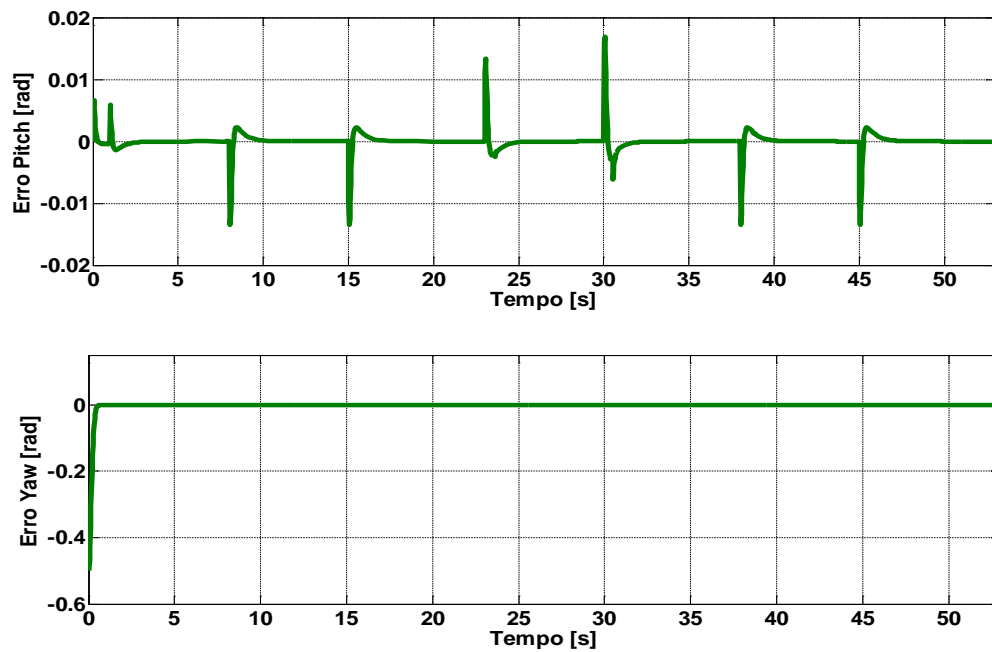


Figura 5.23 – Erros das coordenadas de orientação (ϕ, θ, ψ) para uma trajetória aplicada em tarefas de busca.

A Tabela 5.5 relaciona os erros de todas as coordenadas (posição e orientação) em relação ao referencial.

Tabela 5.5 - Análise quantitativa de erros para trajetória de busca.

Estados	Parâmetros Nominais		
	EMQ	E. Máx.	E. Mín.
$x(m)$	0.0039	0.1244	0
$y(m)$	0.0206	0.5	0
$z(m)$	0.0002	0.1151	0
$\phi(rad)$	1 e-4	0.1002	0
$\theta(rad)$	5 e-6	0.0168	0
$\psi(rad)$	0.0044	0.5	0

5.4. Conclusões

A partir das simulações computacionais apresentadas, é possível concluir que as tarefas de posicionamento e rastreamento de trajetória foram bem sucedidas. Contudo, ao realizar o seguimento de trajetórias observamos que os controladores não foram capazes de anular o erro em regime permanente para as coordenadas translacionais.

Para as coordenadas x e y , a presença do erro estacionário se deve ao fato de que os controladores PID são indicados para referências do tipo degrau, como nos trajetos de posicionamento e na referência aplicada em tarefas de busca. Na presença de referências senoidais o controlador mais indicado seria um PID do tipo ressonante.

Já em relação à coordenada z , em que também é possível observar a presença de erro permanente, mesmo na ausência de incertezas paramétricas e/ou perturbações, acredita-se que haja erros no modelo de predição. Deverá ser realizada uma análise do sistema, a fim de corrigir o modelo e zerar o erro estacionário.

No que diz respeito à robustez do controlador, é possível verificar o seu bom desempenho quando incertezas paramétricas de massa e inércia são aplicadas no sistema. Além disso, com o intuito de simular voos em ambientes externos, foram inseridas perturbações nas forças e momentos aerodinâmicos. Tais distúrbios foram rejeitados pelo controlador.

CAPÍTULO 6

Conclusões

Este trabalho apresentou uma contribuição ao desenvolvimento de estratégias de controle para solucionar problemas de posicionamento e rastreamento de trajetória em veículos aéreos não tripulados, especificamente o quadricóptero.

Nas últimas décadas, várias estratégias de controle têm sido desenvolvidas para o quadrirrotor, contudo, muitas apresentam um modelo bastante simplificado do veículo aéreo, desprezando diversas dinâmicas que afetam esta estrutura de voo ultraleve. Desta forma, buscando voos mais precisos e robustos, este projeto utilizou um modelo dinâmico mais complexo e realista do quadrirrotor.

Além disso, grande parte das pesquisas apresentadas consideram voos apenas em ambientes internos, não relatando o comportamento do veículo mediante distúrbios aerodinâmicos como rajadas de vento. Portanto, este trabalho buscou desenvolver uma estratégia de controle que se mostrasse robusta perante perturbações, de tal forma que o veículo pudesse ser utilizado em ambientes internos e externos.

A primeira etapa do projeto tinha como objetivo a obtenção de um modelo dinâmico que representasse de forma adequada e realista o veículo aéreo, sendo necessário o desenvolvimento de um estudo do seu comportamento e de suas características mecânicas. Tal veículo foi considerado como um ponto no espaço, e desta forma, foram obtidas as equações cinemáticas para um corpo rígido com movimentação tridimensional. Os ângulos de orientação do corpo rígido foram obtidos através de três rotações sucessivas, conhecidos como convenção *Tait-Bryan*.

A partir da matriz de rotação e das equações cinemáticas, tornou-se possível desenvolver o modelo dinâmico do quadricóptero através de duas formulações matemáticas: a formulação de Euler-Lagrange e a de Newton-Euler. O modelo dinâmico obtido foi considerado desacoplado, desta forma, consideramos a existência de dois subsistemas: o translacional e o rotacional.

Uma vez que o quadricóptero pertence à classe dos sistemas mecânicos subatuados, ou seja, o mesmo é composto por seis graus de liberdade e apenas quatro variáveis de controle, há a impossibilidade de regular todos os graus de liberdade do sistema no mesmo instante de tempo. Assim, uma estrutura de controle comumente aplicada é a estratégia de controle em cascata. Tal estratégia é composta por um controlador interno responsável pelo subsistema rotacional, e por um controlador externo que viabiliza os movimentos translacionais.

A malha de controle externa é composta por duas metodologias de controle: o proporcional integral derivativo e o controle preditivo baseado em modelo. O controle PID regula a movimentação do quadricóptero no plano xy , enquanto que, o CPBM controla a altitude (z) do veículo aéreo. Já a malha de controle interna é constituída por um CPBM, responsável pela estabilização dos ângulos de orientação do quadricóptero.

A utilização da metodologia de controle preditivo para regular os valores de força e momentos aerodinâmicos garantiu que as restrições físicas do sistema fossem respeitadas. Em um veículo real, tal fato poderia evitar danos físicos no sistema.

Com base nas simulações computacionais apresentadas, podemos comprovar que as tarefas de posicionamento e rastreamento de trajetória foram bem sucedidas. Contudo, ao realizar o seguimento de trajetórias observamos que a estratégia de controle não foi capaz de anular o erro em regime permanente nas coordenadas translacionais. No plano xy , este erro se deve ao fato da utilização de referências senoidais para os controladores PID. Já o controlador de altitude provavelmente apresenta erros no modelo de predição.

Em relação à robustez do controlador, foi possível verificar o bom desempenho quando incertezas nos parâmetros de massa e inércia foram aplicadas nas simulações. Além disso, com o intuito de simular voos em ambientes externos, foram inseridas perturbações nas forças e momentos aerodinâmicos. O controlador foi capaz de atenuar efetivamente a influência dos distúrbios externos.

Trabalhos Futuros

Algumas linhas de pesquisa para continuação do trabalho exposto nesta dissertação são:

- *Aplicação da estratégia proposta em um veículo real:* Como primeira sugestão para trabalhos futuros temos a implementação da estratégia de controle proposta nesta dissertação em um veículo aéreo real.
- *Aplicação do CPBM para controle da movimentação horizontal:* Com o intuito de melhorar o desempenho do veículo em tarefas de rastreamento de trajetória, o controle PID deve ser substituído pelo CPBM. Tal estratégia proporciona um rastreamento de trajetória suave, bem como a capacidade de lidar com as restrições físicas do sistema.
- *Sistema de controle tolerante a falhas:* Outra sugestão consiste na elaboração de um sistema de controle que seja tolerante a falhas em sensores e atuadores. Na ocorrência de falhas, o controlador deve ser capaz de tomar decisões para realizar a manobra do veículo com segurança.
- *Estudo da estabilidade da estratégia de controle em cascata:* Através dos resultados computacionais, podemos observar que o sistema em malha fechada é estável. Contudo, deve ser enfatizado que ao utilizar uma estratégia de controle em cascata, isso deve ser demonstrado analiticamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXIS, K.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Experimental Model Predictive Attitude Tracking Control of a Quadrotor Helicopter subject to Wind-Gusts. **18th Mediterranean Conference on Control & Automation**, June 23-25, Marrakech, Morocco, 2010.

ASTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **Automatic Tuning of PID Controllers**. Editora ISA – Instrument Society of America, 1988.

ASTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **Advanced PID Control**. Instrument Society of America, North Carolina, USA, 2006.

AZFAR, A.; HAZRY, D. A Simple Approach on Implementing IMU Sensor Fusion in PID Controller for Stabilizing Quadrotor Flight Control. **IEEE 7th International Colloquium on Signal Processing and Its Applications**, March 4-6, Penang, Malaysia, 2011.

BOUABDALLAH, S. **Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying**. 2007. 129 f. Tese (Doutorado). École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne 2007.

BOUABDALLAH, S.; NOTH, A.; SIEGWART, R. PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor. In Proc. **IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems**, volume 3, pages 2451–2456, Sendai, Japan, 2004a.

BOUABDALLAH, S.; MURRIERI, P.; SIEGWART, R. Design and Control of an Indoor Micro Quadrotor. In Proc. **IEEE Int. Conf. on Rob. and Automat.**, volume 5, pages 4393–4398, New Orleans, USA, 2004b.

BOUABDALLAH, S.; SIEGWART, R. Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor. In Proc. **IEEE Int. Conf. on Robot. And Automat.** pages 2259–2264, Barcelona, Spain, 2005.

- BOUABDALLAH, S.; SIEGWART, R. Full control of a quadrotor. **In Proc. of the Intelligent Robots and Systems. IROS 2007**, pages 153–158, San Diego, USA, 2007.
- BOUADI, H. et al. Adaptive sliding mode control for quadrotor attitude stabilization and altitude tracking. **In: IEEE. Computational Intelligence and Informatics (CINTI), 2011 IEEE 12th International Symposium.** p. 449{455, 2011.
- CASTILLO, P.; LOZANO, R.; DZUL, A. **Modelling and Control of Mini-Flying Machines.** Springer-Verlag, Londres, 251 p., 2005a.
- CAMACHO, E.; BORDONS, C. **Model Predictive Control.** 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2004.
- CAMPESTRINI, L. **Sintonia de Controladores PID Descentralizados Baseada no Método do Ponto Crítico.** 2006. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- CLARKE, D. W.; SCATTOLINI, R. Constrained Receding-Horizon Predictive Control. **IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)**, p. 347-354, 1991.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. Dynamic Matrix Control - A computer control algorithm. **AIChE National Meeting**, Houston, Texas, 1979.
- CUTLER, C. R; MORSHED, A.; HAYDEL, J. An industrial perspective on advanced control. **AICHE Annual Meeting**, Washington, 1983.
- DESBOROUGH, L.; NORDH, P.; MILLER, R. **Control System Reliability – Process out of Control.** In tech with Industrial Computing, p.52-55, aug. 2001.
- ERGINER, B.; ALTUĞ, E. Modeling and PD Control of a Quadrotor VTOL Vehicle. **Proceedings of the 2007 IEEE Intelligent Vehicles Symposium**, Istanbul, Turkey, June 13-15, 2007.
- FANG, Z.; GAO, W. Adaptive Integral Backstepping Control of a Micro-Quadrotor. **Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Intelligent Control and Information Processing**, 2011.

- GARCIA, C. E.; MORSHEDI, A. M. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). **Chem. Eng. Commun.**, n° 46, p 73-87, 1986.
- GARCIA, C. E., PRETT, D. M.; MORARI, M. Model Predictive Control: theory and practice – a survey. **Automatica**, n. 25, p. 335-348, 1989.
- GARCIA CARRILLO, L. R.; DZUL LÓPEZ, A. E.; LOZANO, R.; PÉGARD, C. **Quad Rotorcraft Control**. Springer-Verlag, London, 2013.
- GHADIOK, V.; GOLDIN, J.; REN, W. On the design and development of attitude stabilization, vision-based navigation, and aerial gripping for a low-cost quadrotor. **Auton. Robot (2012)** 33:41–68, 2012.
- GOMES, G. K. **Controle Preditivo em Tempo Real para Seguimento de Trajetórias de Veículos Autônomos**. 2006. 178 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.
- GONÇALVES, D. **Implementação Prática de um Controlador Preditivo a um Processo Não Linear**. 2012. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.
- GROSDIDIER, P.; FROISY, B.; HAMMANN, M. The IDCOM-M controller. **IFAC Workshop on Model Based Process Control**, Oxford, 1988.
- HOFFMANN, F.; GODDEMEIER, N.; BERTRAM, T. Attitude Estimation and Control of a Quadcopter. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'2010)**. p. 1072:1077. Taiwan, 2010.
- KOUVARITAKIS, B.; ROSSITER, J. A.; SCHUURMANS, J. Efficient Robust Predictive Control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 45, n. 8, August, 2000.
- KOUVARITAKIS, B.; ROSSITER, J. A.; CHANG, A. O. T. Stable generalised predictive control: an algorithm with guaranteed stability. **IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)**, v. 139, n. 4, p. 349-362, 1992.
- KÜHNE, F. **Controle Preditivo de Robôs Móveis não Holonômicos**. 2005. 155 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

LARA, D.; SANCHEZ, A.; LOZANO, R.; CASTILLO, P. Real-Time Embedded Control System for VTOL Aircrafts: Application to stabilize a quad-rotor helicopter. **Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications**, Munich, Germany, October 4-6, 2006.

LEISHMAN, J. G. **A History of Helicopter Flight**. University of Maryland, 2000.

Disponível em:

http://www.itlims.meil.pw.edu.pl/zsis/pomoce/SSR/A_History_of_Helicopter_Flight.pdf.

Data de acesso: 09/03/2015.

LI, J.; LI, Y. Dynamic Analysis and PID Control for a Quadrotor. **Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation**, August 7 - 10, Beijing, China, 2011.

LIMA, G. V.; SOUZA, R. M. J. A.; Da Silva, F. V. R.; MORAIS, A. S.; MORAIS, J. S. Modelagem Dinâmica, Controle e Análise de Robustez de um Quadricóptero. **Ciência e Engenharia**, 2015. (Aguardando o aceite).

LOPES, R. V.; ASSIS SANTANA, P. H. R. Q.; BORGES, G. A.; ISHIHARA, J. Y. Model Predictive Control applied to tracking and attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. **Proceedings of 21st International Congress of Mechanical Engineering**, October 24 - 28, Natal, Brasil, 2011.

MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive Control with Constraints**. England: Prentice Hall, 2000.

MALACALZA, D. E. **Controle Preditivo de Sistemas Misto Lógicos-Dinâmicos**. 2004. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

MAYNE, D. Q., RAWLINGS, J. B.; RAO, C. V.; SCOKAERT, P. O. M. Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality. **Automatica**, New York, v. 36, n. 6, p. 789-814, Junho 2000.

NICULA, M. T. **Estudo, Análise e Simulação das Técnicas de Sintonia de Controladores PID mais Empregadas Atualmente em Plantas Industriais**. 2010. 120 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Programa de Graduação em Engenharia Mecatrônica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2010.

- PRETT, D. M.; GILLETTE, R. D. Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit. **Proceedings of the Joint Automatic Control Conference**, 1979.
- RAFFO, G. V.; ORTEGA, M. G.; RUBIO, F. R. Path Tracking of a UAV via an Underactuated H_{∞} Control Strategy. **European Journal of Control** (2011) **2:1-20** © 2011 EUCA. 2011.
- RAFFO, G. V.; ORTEGA, M. G.; RUBIO, F. R. Backstepping/Nonlinear H_{∞} Control for Path Tracking of a QuadRotor Unmanned Aerial Vehicle. **2008 American Control Conference Westin Seattle Hotel**, Seattle, Washington, USA, June 11-13, 2008.
- RAFFO, G. V.; ORTEGA, M. G.; RUBIO, F. R. An integral predictive/nonlinear H_{∞} control structure for a quadrotor helicopter. **Automatica**, 46:29–39, 2010.
- RAFFO, G. V. **Algoritmos de Controle Preditivo para Seguimento de Trajetória de Veículos Autônomos**. 2005. 149 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- RAFFO, G. V. **Modelado y Control de un Helicóptero Quadrotor**. 2007. 115 f. Dissertação (Mestrado). Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Seville, 2007.
- RAFFO, G. V. **Robust Control Strategies for a Quadrotor Helicopter: An Underactuated Mechanical System**. 2011. 267 f. Tese (Doutorado). Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Seville, 2011.
- RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J., e PAPON, J. Algorithm control for industrial processes. **Proc. 4th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation**, Tbilisi, URSS. 1976.
- SÁ, R. C. **Construção, Modelagem Dinâmica e Controle PID para Estabilidade de um Veículo Aéreo Não Tripulado do Tipo Quadrirotor**. 2012. 67 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia em Teleinformática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.
- SALIH, A.; MOGHAVVEMI, M.; MOHAMED, H.; GAEID, K. Flight PID controller design for a UAV quadrotor. **Scientific Research and Essays**, Vol. 5(23), pp. 3660-3667, 4 December, 2010.

SANCHEZ, A.; CARRILLO, L. R. G.; RONDON, E.; LOZANO, R.; GARCIA, O. Hovering Flight Improvement of a Quad-rotor Mini UAV Using Brushless DC Motors. **Journal of Intelligent and Robotic Systems**. p. 61:85, 2010.

SILVA, A. T. **Controle de Posição com Restrição à Orientação de um Veículo Aéreo Não Tripulado do Tipo Quadrirrotor**. 2014. 56 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control - Analysis and Design**. Wiley, 2005.

ZAREB, M.; AYAD, R.; NOUIBAT, W. Fuzzy-PID hybrid control system to navigate an autonomous mini-Quadrotor. **Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control**, Algiers, Algeria, October 29-31, 2013.