



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Reflexões sobre as teorias de potência elétrica em regime não senoidal

EZEQUIEL JUNIO DE LIMA

Uberlândia
2014

Reflexões sobre as teorias de potência elétrica em regime não senoidal

Dissertação apresentada por Ezequiel Junio de Lima ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências, aprovada em 17 de abril de 2014 pela banca examinadora.

Antônio Carlos Delaiba (Orientador)
Sérgio Ferreira de Paula Silva (Coorientador)
Marcus Vinicius Borges Mendonça (UFTM)
Daniel Vieira (ANEEL)

Uberlândia
2014

Dedico este trabalho à Carolina, pelo carinho,
compreensão e paciência.

Agradecimentos

Ao professor Antônio Carlos Delaiba pelo incentivo, motivação e orientação deste trabalho.

Aos professor. Sérgio Ferreira de Paula Silva pela orientação, dedicação e tempo essenciais para execução deste trabalho

À minha família, pelo incentivo e compreensão.

Resumo

O desenvolvimento de uma teoria sobre o comportamento da potência elétrica na presença de harmônicas é um tema abrangente e complexo. As primeiras pesquisas na área datam de 1927 e 1932 e, até o presente momento, não há um consenso.

A importância deste tema está em compreender o funcionamento da transferência de energia em um circuito elétrico uma vez que as definições clássicas de potência elétrica, apresentadas nos livros-texto do ciclo básico de engenharia, não retratam de forma fidedigna as interações dos fluxos de energia em redes cujos sinais estão distorcidos, situação típica dos sistemas elétricos atuais.

Neste contexto, a maior controvérsia está na qualificação e quantificação da Potência Reativa. Assim, esta dissertação visa contribuir aos estudos em regimes não senoidais com enfoque nas definições de potência elétrica, tecendo comentários sobre a potência ativa e dando especial atenção a potência reativa e suas implicações.

Palavras-Chave: Potência elétrica; Harmônicos; Não senoidal; Potência reativa; Álgebra de Clifford.

Abstract

The development of an electric power theory under nonsinusoidal conditions is a wide and complex topic. The first researches in the area date back from 1927 and 1932 and, up to now, there is no consensus.

The main issue is to understand how the power flows in an electric circuit works since classic definitions of electric power, presented in engineering textbooks, do not reliably depict the energy flow's interactions in systems with distorted voltage and current waveforms.

In this context, the qualification and quantification of reactive power is the most controversial. Thus, this dissertation aims to contribute to studies in non-sinusoidal systems with focus on power definitions with a special attention to reactive power and its implications. Some comments on the active power are also made.

Keywords: Electric power; Harmonics; Non-sinusoidal; Reactive power; Clifford algebra.

Lista de figuras

Figura 2.1 – definições clássicas de potência, regime senoidal.....	18
Figura 2.2 – Circuito 1, exemplo. Fonte [16].....	20
Figura 2.3 – Resolução do Circuito 1 (a) para $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ e (b) para $\omega_3 = 3\omega_1$.Fonte [16]	23
Figura 2.4 - Circuito 1 - resultados sobrepostos. Fonte [16].....	24
Figura 3.1 – Tensões e correntes na seção A-B-C	31
Figura 3.2 – Representação gráfica dos componentes definidos.	34
Figura 3.3 - Sistema trifásico de referência (a) Carga trifásica (b) Equivalente em relação à potência ativa P e (c) Carga equivalente em delta.....	35
Figura 3.4 - Decomposição da potência aparente proposta pelo IEEE.....	39
Figura 3.5 - Subespaços orientados no Espaço 3D de Clifford. Fonte [24]......	41
Figura 3.6 - Circuito RLC, exemplo. Adaptado de [16].....	45
Figura 3.7 - Diagrama do circuito: (A) na frequência fundamental e (B) na terceira harmônica	45
Figura 4.1 – Potência instantânea (a) sinais senoidais; (b) sinais com distorções harmônicas	51
Figura 4.2 – Medidores de energia típicos (a) eletromecânico (b) eletrônico	52
Figura 4.3 - Fonte não senoidal alimentando carga linear.....	53
Figura 4.4 - Fluxo de Potência Ativa	53
Figura 4.5 - Fonte senoidal com carga não linear.....	55
Figura 4.6 - Fluxo de potência ativa fundamental e harmônica.....	55
Figura 4.7 – Parâmetros elétricos do sistema modelado	56
Figura 4.8 – Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 2.	58
Figura 4.9 - Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 3.	58
Figura 4.10 - Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 4.	59
Figura 4.11 - Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 5	59
Figura 5.1 - Circuito Capacitivo	63
Figura 5.2 - Circuito indutivo alimentado por sinal distorcido	71
Figura 5.3 - Sistema elétrico exemplo.	77
Figura 5.4 – Arranjo experimental. Diagrama.....	78
Figura 5.5 – Montagem realizada no laboratório	79
Figura 5.6 – Espectro harmônico da carga RLC.....	79
Figura 5.7 – Simulação: Modelo no ATPDraw.	80
Figura 5.8 - Espectro de tensão da fonte.....	81

Figura 5.9 - Espectro de tensão na carga RLC	81
Figura 5.10 – Espectro das correntes simuladas	82

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Resolução do circuito 1 para $\omega_1 = \omega = 1 \text{ rad/s}$	23
Tabela 2.2 – Resolução do circuito 1 para $\omega_3 = 3\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$	23
Tabela 3.1 - Teorias de potência propostas ao longo dos últimos anos.	27
Tabela 3.2 – Elementos base de um espaço n-dimensional de Clifford	42
Tabela 3.3 - Resultados da análise do circuito.....	46
Tabela 3.4 - Proposição de Budeanu.....	46
Tabela 3.5 - Proposição de Fryze	46
Tabela 3.6 - Proposição da norma IEE 1459:2010.....	46
Tabela 3.7 - Proposição de Czarnecki.....	46
Tabela 3.8 - Proposição de Castro-Núñez.....	46
Tabela 4.1 – Casos avaliados – Parâmetros	56
Tabela 4.2 – Tensões, correntes e distorções totais no PAC	57
Tabela 4.3 – Fator de potência e potências ativa	57
Tabela 4.4 – Diferença percentual.....	60
Tabela 5.1 – Resultados da compensação de reativos	77
Tabela 5.2 – Resultados obtidos do ensaio.....	80
Tabela 5.3 - Resultados da Simulação.....	82

Lista de abreviaturas, símbolos e siglas

UFU	Universidade Federal de Uberlândia
FEELT	Faculdade de Engenharia Elétrica
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
THD	Total Harmonic Distortion
CN	Multivetor de potência não ativa de Castro-Núñez
D_B	Potência de distorção de Budeanu
D_H	Potência de distorção harmônica IEEE Std. 1459
D_I	Potência de distorção de corrente IEEE Std. 1459
D_V	Potência de distorção de tensão IEEE Std. 1459
D_s	Potência dispersa de Czarnecki
i_a	Corrente ativa de Czarnecki
i_r	Corrente reativa de Czarnecki
i_s	Corrente dispersa de Czarnecki
M	Multivetor de potência de Castro-Núñez
N	Potência não ativa IEEE Std. 1459
P	Potência ativa média
P_1	Potência ativa média na frequência fundamental
p	Potência ativa instantânea de Akagi e coautores
Q	Potência reativa em condições senoidais
Q_B	Potência reativa de Budeanu
Q_F	Potência reativa de Fryze
Q_r	Potência reativa de Czarnecki
\vec{q}	Potência imaginária instantânea de Akagi e coautores
S	Potência aparente complexa
S_1	Potência aparente na frequência fundamental
S_N	Potência aparente não fundamental IEEE Std. 1459
$v(t); i(t)$	Sinais de tensão e corrente no domínio do tempo.

Sumário

Contextualização	12
1.1. Introdução	12
1.2. Objetivos	14
Método Clássico de Decomposição de Potências.....	16
2.1. Teoria clássica de potências em regime senoidal.....	16
2.2. Limitações do modelo de Steinmetz em regime não senoidal	20
2.3. Considerações finais	24
Principais teorias de potência	26
3.1. Breve histórico.....	26
3.2. Teorias de potências propostas	27
3.2.1. Proposição de Budeanu	28
3.2.2. Proposição de Fryze.....	30
3.2.3. Proposição de Akagi e coautores	31
3.2.4. Proposição de Czarnecki	35
3.2.5. Proposição da norma IEEE 1459 2010.....	37
3.2.6. Proposição de Castro-Núñez.....	40
3.2.7. Comparação entre os métodos.....	45
3.2.8. Considerações finais	47
Potência ativa e fatura de energia elétrica em regime não senoidal.....	49
4.1. Introdução	49
4.2. Cálculo da potência ativa.....	49
4.3. Regulamentação e medidas.....	51
4.4. Análise da Potência Ativa Faturada.....	52
4.4.1. Caso 01.....	53
4.4.2. Caso 02.....	54
4.5. Análise Computacional	56
4.6. Considerações finais	60
Potência reativa	62
5.1. Introdução	62
5.2. Capacitor.....	63
5.3. Indutor.....	71
5.4. Compensação de reativos.....	76

5.5.	Análise laboratorial.....	78
5.5.1.	Objetivo.....	78
5.5.2.	Equipamentos.....	78
5.5.3.	Montagem	79
5.5.4.	Resultados	80
5.6.	Análise computacional.....	80
5.7.	Considerações finais	83
Conclusões & Trabalhos Futuros.....		84
6.1.	Conclusões	84
6.2.	Trabalhos Futuros	87
Referências bibliográficas		88

Capítulo 1

Contextualização

1.1. Introdução

Por que uma carga elétrica geralmente exige uma **Potência Aparente** da fonte maior do que a **Potência Ativa**?

Como a **Potência Aparente** da fonte de alimentação pode ser reduzida sem diminuir a **Potência Ativa** entregue à carga elétrica?

Segundo Andrzej Firlit [1], o estudo da teoria de potência elétrica na presença de distorções harmônicas está se desenvolvendo para entender como funciona a transferência de energia em um circuito elétrico. Assim, a primeira pergunta está intimamente relacionada com a necessidade de uma interpretação dos fenômenos de energia nos circuitos elétricos e a segunda, é uma questão ligada à prática. Estas duas questões, aparentemente simples, demonstraram ser extremamente árduas de se responder.

As definições de potência na presença de harmônicas é um tema abrangente e complexo. As primeiras pesquisas na área datam de 1927, com Budeanu [2] e 1932, com Fryze [3]. Desde então, são quase cem anos e não há um consenso até o presente momento.

As definições básicas que são apresentadas em livros de circuitos elétricos [4] [5] são amplamente aceitas quando tratamos de sinais puramente senoidais. Entretanto, a extensão destes conceitos para redes cujos sinais estão distorcidos, i.e., não senoidais, não é tão simples,

pois faz-se necessário compreender como é o comportamento e as interações dos fluxos de energia nestas situações.

Durante décadas os conceitos tradicionais de potência foram suficientes, pois as cargas supridas pelos sistemas elétricos eram compostas em sua grande maioria por cargas lineares. No entanto, o advento da eletrônica de potência aplicado aos sistemas de energia elétrica que, por um lado trouxe avanços tecnológicos como o desenvolvimento de linhas de transmissão em corrente contínua (HVDC¹), dispositivos FACTS² e variadores de frequência; pelo outro lado permitiu o aumento de dispositivos não lineares nas redes de distribuição, o que proporcionou considerável acréscimo das distorções harmônicas de tensão e corrente. As distorções harmônicas são o efeito destas cargas não lineares. Uma carga é dita não linear quando a corrente que ela absorve não tem a mesma forma de onda da tensão que a alimenta e, tipicamente, as cargas que utilizam eletrônica de potência são não lineares.

A existência de normas e regulamentações [6] [7] que abordam sinais não senoidais procuram estipular limites para as distorções harmônicas, não obstante, as distorções continuam presentes nos sinais de tensão e corrente e tendem a aumentar com a constante multiplicação de equipamentos eletrônicos em nosso dia-a-dia.

Diante desta conjuntura se faz inevitável uma teoria capaz de explicar completamente os fenômenos de potência em condições não senoidais e que ainda seja compatível com a teoria de potência usada em sistemas puramente senoidais.

Em particular, dentro deste tema, destaca-se a questão da qualificação e quantificação da **Potência Reativa** sob estas condições não senoidais de operação, em que a tensão e/ou a corrente estariam distorcidas. Sabe-se que a **Potência Reativa** é necessária para

¹ HVDC: High-voltage direct current

² FACTS: Flexible Alternating Current Transmission Systems, usados para o controle e estabilidade de sistemas de transmissão de energia elétrica

regulação de tensão nos sistemas de transmissão e distribuição e que é ainda necessária para o correto funcionamento de diversas máquinas elétricas. Mesmo tendo seu lado útil, ela pode ainda causar danos e prejuízos à rede e/ou equipamentos. A título de exemplo, observa-se o caso da transmissão de energia elétrica, se há uma corrente fluindo através do sistema elétrico que é maior que a corrente necessária para realizar o trabalho propriamente dito, há perdas de energia por aquecimento conforme a corrente reativa flui através de fios, chaves e transformadores. Não importa a forma como a energia é gasta, se é desperdiçada em forma de calor ou empregada em trabalho útil, existe sempre um custo a ser pago. Portanto, é de interesse econômico maximizar a quantidade de potência ativa que deve ser transferida através de uma linha de transmissão, minimizando os fluxos de potência reativa.

Neste contexto, cientistas e engenheiros eletricitas já apresentaram diversos conceitos, modelos e ferramentas matemáticas na tentativa de melhor quantificar tal potência. Apesar dos esforços aplicados, além de não haver um consenso, por vezes, as pesquisas divergem entre si dependendo da interpretação dada por cada autor.

1.2. Objetivos

Diante do exposto, esta dissertação visa contribuir aos estudos em regimes não senoidais através do estudo das definições de potência, da sistematização do conhecimento existente, da apresentação de novas ferramentas matemáticas aplicadas ao tema em questão, da análise do faturamento da potência ativa sob regime não senoidal e do desenvolvimento matemático, no domínio do tempo, da potência consumida em elementos puramente reativos e suas implicações.

1.3. Estrutura da dissertação

Desta forma, no Capítulo 2 são apresentadas considerações sobre a origem do problema, desde a escolha da álgebra de números complexos, como ferramenta matemática, até a utilização da potência aparente como uma grandeza de referência.

No Capítulo 3, mostra-se em maiores detalhes as teorias de potência de maior impacto. Citar todas as contribuições que vêm se somando ao longo de quase um século para este tema seria impraticável, assim uma breve lista dos mais influentes autores é apresentada.

No Capítulo 4 apresenta-se alguns comentários sobre a potência ativa que, embora não haja desacordos sobre sua definição, carece de algumas considerações em regime não senoidal quando é levado em consideração o faturamento de energia elétrica.

O Capítulo 5 traz um estudo teórico e laboratorial sobre elementos puramente reativos (capacitor e indutor) e suas implicações.

Por fim, o Capítulo 6 traz as considerações finais sobre o presente estudo.

Capítulo 2

Método Clássico de Decomposição de Potências

2.1. Teoria clássica de potências em regime senoidal

No domínio do tempo, a potência instantânea $p(t)$ aplicada a uma carga varia de acordo com os sinais de tensão $v(t)$ e corrente $i(t)$ aplicados a ela. Dito de outra forma,

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.1)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha \pm \varphi) \quad (2.2)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \alpha \pm \varphi) \quad (2.3)$$

$$p(t) = VI \cos \varphi + VI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha) \mp VI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\alpha) \quad (2.4)$$

Onde V_m e I_m são os valores máximos, ou de pico, de tensão e corrente, respectivamente, V e I são seus valores eficazes ou RMS³. α é um ângulo de fase arbitrário medido sempre em relação à origem. Por sua vez, o ângulo $\pm\varphi$ representa a diferença angular entre os sinais de tensão e corrente.

O valor médio do sinal de potência $p(t)$, denotado como $\langle p(t) \rangle$, sobre um período de tempo T é dado por,

$$\langle p(t) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) dt = VI \cos \varphi = P \quad (2.5)$$

Na equação (2.5), o valor de T é geralmente escolhido como sendo o período dos sinais de tensão e corrente ou múltiplos inteiros deste período.

³ RMS: Root mean square. Valor médio quadrático ou ainda, norma euclidiana.

Uma vez que o valor médio de $p(t)$ resulta no valor $VI \cos \varphi$, que é o primeiro termo da equação (2.4), então a **potência ativa média** P é definida como o componente escalar da potência instantânea $p(t)$. Não há nenhuma controvérsia sobre este termo na literatura. A norma IEEE 270-2006 [8] define a **potência ativa** P como sendo a razão a qual o trabalho é realizado ou, a energia que é transferida.

O segundo termo da equação (2.4), $VI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\alpha)$, é por vezes ignorado e, mais importante ainda, nenhuma razão técnica ou teórica é dada para tal desconsideração. Em [9], Ghassemi pondera sobre o uso deste termo uma vez que ele afeta a oscilação de energia entre a fonte e a carga. A norma IEEE 1459-2010 [10] faz uma leve menção ao termo chamando-o de **potência intrínseca**, mas nenhum detalhe é dado a não ser o fato de ser um componente oscilatório, sempre presente no fluxo de energia e que não causa perdas.

Por sua vez, **potência reativa** Q é definida apenas como a amplitude do terceiro termo da equação (2.4), isto é, $VI \sin \varphi$. Em outros termos, o conceito de potência reativa é definido como a amplitude de um dos termos oscilatórios da equação de potência instantânea. Observa-se que esta definição contrasta com a definição de potência ativa, que é resultado de uma operação matemática no domínio do tempo.

A Figura 2.1, ilustra os valores definidos acima.

Outros dois conceitos presentes na teoria clássica sob regime senoidal são a potência aparente complexa \dot{S} e a potência aparente $\|\dot{S}\|$ ou simplesmente S .

Assim, a potência S é definida como o produto dos valores eficazes da tensão pela corrente, ou seja,

$$S = VI \quad (2.6)$$

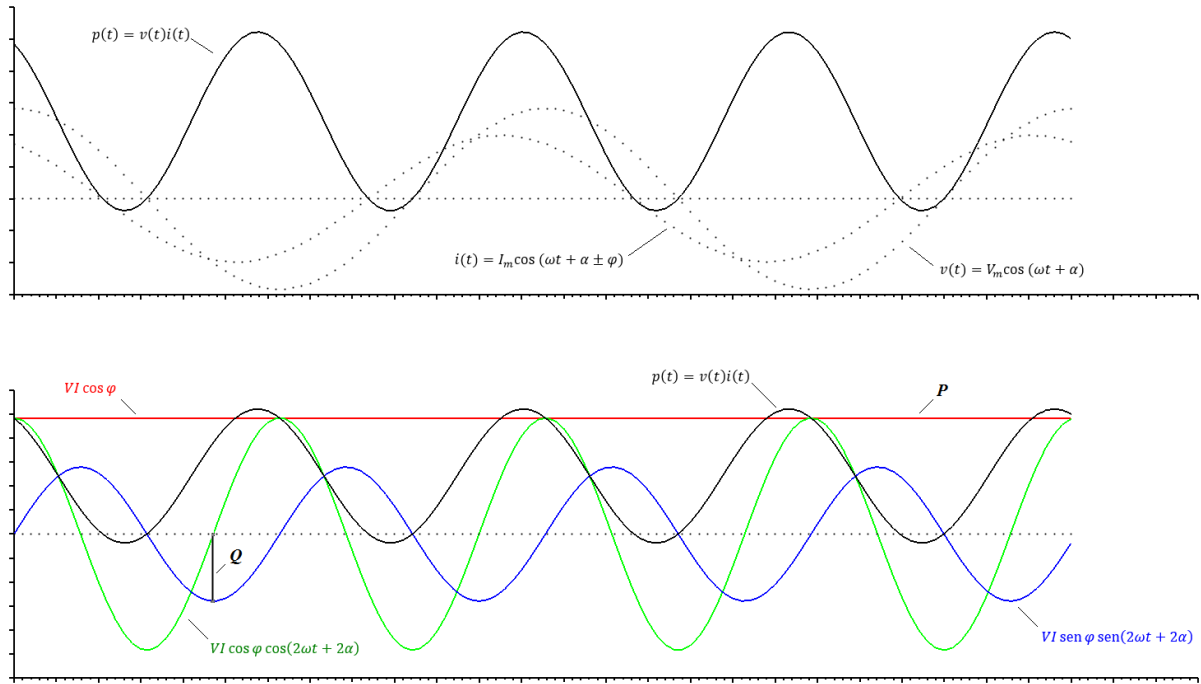


Figura 2.1 – definições clássicas de potência, regime senoidal.

Ao dar maior atenção para equação (2.4), percebe-se que os termos P e Q são resultados de dois fenômenos distintos. O primeiro, caracterizado pela potência ativa P , resulta quando a tensão e corrente estão em fase. O segundo, caracterizado pela potência reativa Q , resulta quando a tensão e corrente estão em quadratura.

Separando então a corrente em dois componentes, um em fase e outro em quadratura, tem-se:

$$\begin{aligned} I_f &= I \cos \varphi \\ I_q &= I \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim, utilizando a álgebra de números complexos, pode-se definir:

$$\dot{I} = I_f + jI_q \div \|\dot{I}\| = I = \sqrt{I_f^2 + I_q^2} \quad (2.8)$$

Consequentemente, P , Q e S podem ser reescritos como:

$$P = VI_f \quad (2.9)$$

$$jQ = jVI_q \quad (2.10)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi = \dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{I}}^* = P + jQ \quad (2.11)$$

$$\|\dot{\mathbf{S}}\| = \|\dot{\mathbf{V}}\| \|\dot{\mathbf{I}}^*\| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2.12)$$

Onde $\dot{\mathbf{S}}$, é a potência aparente complexa; $\dot{\mathbf{V}}$ e $\dot{\mathbf{I}}$ são fasores e $\dot{\mathbf{I}}^*$ denota o conjugado do fasor de corrente $\dot{\mathbf{I}}$. I_f e I_q representam as correntes em fase e em quadratura, respectivamente.

A potência complexa $\dot{\mathbf{S}}$ não possui significado ou interpretação física e este valor aparece mais como uma feliz coincidência [11] [12] e, conseqüentemente, a potência aparente S também não tem interpretação física seja no regime senoidal ou não [9].

Czarnecki [13] comenta que o mínimo que possamos esperar de uma teoria de potências é que ela obedeça as regras da matemática e da física. No entanto, não haveria uma estrutura matemática que suporte a soma de P (que resulta do valor médio do sinal de potência instantânea) com Q (que é definido com a amplitude do mesmo sinal de potência instantânea).

Por fim, ainda há o conceito de fator de potência, fp , que é definido como:

$$fp = \frac{P}{S} \quad (2.13)$$

A norma IEEE 1459-2010 [10] diz que o fator de potência indica o grau de carregamento de uma linha e que pode ser interpretado como a razão entre a energia transmitida para a carga e a energia máxima que poderia ser transmitida desde que as perdas na linha sejam mantidas constantes. No entanto, ao levar em consideração a falta de significado físico de S , qualquer interpretação de fp perde também o sentido físico.

Uma vez que o objetivo deste trabalho é analisar a decomposição da potência e suas interpretações, discutir a validade da definição de potência aparente de forma aprofundada, bem como a proposição de melhorias na sua definição, foge ao escopo. Não obstante, os comentários apresentados nesta seção servem, ao mesmo tempo, de introdução e embasamento para os assuntos abordados nos demais capítulos.

2.2. Limitações do modelo de Steinmetz em regime não senoidal

Em 1893, Charles Proteus Steinmetz [pseudônimo de Karl August Rudolf Steinmetz] (1865-1923) revolucionou a teoria e análise de circuitos em corrente alternada [14], simplificando sua análise e sendo o primeiro a utilizar números complexos e a representação fasorial. Sua técnica, aplicada até hoje, é de valor inestimável [15].

Castro-Núñez [16] aponta para algumas limitações do modelo de Steinmetz quando aplicado em regime não senoidal. Embora permita determinar os valores corretos de tensões e correntes, a técnica requer uma análise separada para cada ordem harmônica e cada análise gera um conjunto de resultados que, no domínio de frequência, não guardam nenhuma correlação entre si.

O circuito abaixo exemplifica a questão.

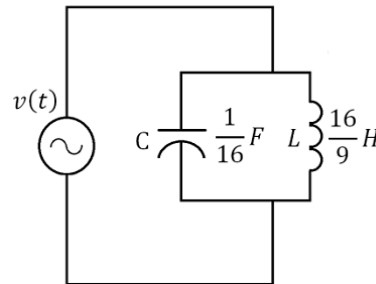


Figura 2.2 – Circuito 1, exemplo. Fonte [16].

Seja $v(t)$ definida no domínio do tempo, com velocidade angular ω :

$$v(t) = 100\sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 100\sqrt{2} \cdot \cos\left(3\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.14)$$

A técnica de Steinmetz utiliza o domínio da frequência e, para a ir de um domínio ao outro, faz uso de fasores.

A conversão em fasor de um sinal senoidal qualquer é dado por:

$$x(t) = X\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}\{x(t)\} = Xe^{j\alpha} = X\angle\alpha = \dot{\mathbf{X}} \quad (2.16)$$

Onde $\mathbf{F}\{\}$ representa a transformação fasorial; X é o valor eficaz de $x(t)$; \dot{X} representa o fasor do sinal $x(t)$; α é o ângulo de fase medido sempre em relação ao eixo real positivo do plano complexo.

A primeira limitação [16] pode ser observada na equação (2.16). Nota-se que o sinal não pode ser totalmente transformado já que, a informação sobre a frequência angular é perdida. Esta limitação é usualmente vista como inconsequente, uma vez que sempre é possível apelar para o princípio da superposição. Assim, prosseguindo com o exemplo tem-se que $\mathbf{F}\{v(t)\}$ é dado por,

$$\begin{aligned} 100\sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbf{F} \rightarrow 100e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j100 = \dot{V}_1 \\ 100\sqrt{2} \cdot \cos\left(3\omega t - \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbf{F} \rightarrow 100e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j100 = \dot{V}_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aqui pode-se notar a ambiguidade gerada pela limitação descrita acima, onde o mesmo número complexo representa dois fenômenos diferentes. Enquanto $\dot{V}_1 = -j100$ representa um fasor rotacionando a velocidade ω , $\dot{V}_3 = -j100$ representa outro fasor rotacionando a velocidade 3ω . Logo, $\dot{V}_1 + \dot{V}_3$ não pode ser realizado, mesmo a álgebra de números complexos permitindo esta operação.

Portanto, esta ambiguidade **impede** a definição da **operação soma**, no domínio da frequência, para sinais que, no domínio do tempo, estão em diferentes frequências. Consequentemente, o princípio da superposição é inaplicável no domínio da frequência.

A segunda limitação [16] é decorrente do exposto acima. Como não é possível aplicar o princípio da superposição, uma expressão para a corrente ou tensão em um determinado ramo do circuito não pode ser obtida. Esta anomalia é tradicionalmente encarada como não sendo uma problema já que a magnitude (ou valor eficaz) da tensão ou corrente pode

ser achada revertendo todos os resultados parciais para o domínio do tempo, conforme segue abaixo:

$$x(t) = \sum_{h=1}^n [A_h \sqrt{2} \sin(h\omega t + \alpha)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(-T/2)}^{(T/2)} x^2(t) dt} = \sqrt{\sum_{h=1}^n A_h^2} \quad (2.18)$$

Onde $x(t)$ pode ser substituída pelo sinal de tensão ou corrente. A_h é o valor eficaz do sinal de ordem harmônica h .

Logo, a magnitude de tensão em um determinado ramo do circuito é obtida por:

$$\|v(t)\| = \sqrt{\sum_{h=1}^n V_h^2} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2} \quad (2.19)$$

Um erro comum é considerar a equação (2.19) como pertencente ao domínio da frequência [16] pelo fato de resultar em uma soma geométrica, isto é, $V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2$. Considerá-la do domínio da frequência está errado por duas razões:

1. A equação (2.19) é um resultado obtido no domínio do tempo e, como tal, pertence a ele exclusivamente;
2. Conforme comentado acima, a soma de valores que representam sinais com frequências diferentes no domínio do tempo não está definida no domínio da frequência e, portanto, não pode ser efetuada.

Por fim, a resolução do circuito da Figura 2.2 é apresentada nas tabelas abaixo onde o subscrito indica a ordem harmônica e o sobrescrito indica o local, assim 'F' indica a fonte, 'C' o capacitor e 'L' o indutor. A frequência fundamental foi definida arbitrariamente como sendo $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

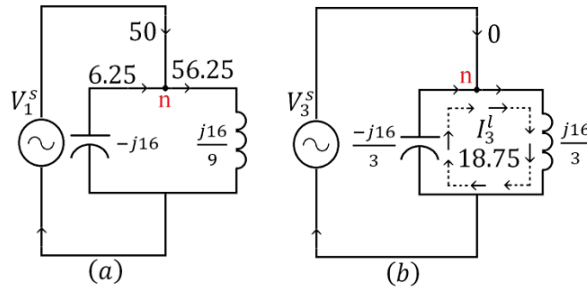
Tabela 2.1 – Resolução do circuito 1 para $\omega_1 = \omega = 1 \text{ rad/s}$

$\dot{V}_1 = 100\angle -90^\circ$	[V]	$\dot{P}_1^F = 0\angle 0^\circ$	[kW]
$\dot{Y}_1 = 0,5\angle -90^\circ$	$[\Omega^{-1}]$	$\dot{Q}_1^F = 5\angle -90^\circ$	[kVar]
$\dot{I}_1^F = -50\angle 0^\circ$	[A]	$\dot{S}_1^F = 5\angle -90^\circ$	[kVar]
$\dot{I}_1^C = 6,25\angle 0^\circ$	[A]	$\dot{Q}_1^C = 625\angle 180^\circ$	[VAr]
$\dot{I}_1^L = 56,25\angle 180^\circ$	[A]	$\dot{Q}_1^L = 5625\angle 0^\circ$	[VAr]

Tabela 2.2 – Resolução do circuito 1 para $\omega_3 = 3\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$

$\dot{V}_3 = 100\angle -90^\circ$	[V]	$\dot{P}_3^F = 0\angle 0^\circ$	[kW]
$\dot{Y}_3 = 0\angle 0^\circ$	$[\Omega^{-1}]$	$\dot{Q}_3^F = 0\angle 0^\circ$	[kVar]
$\dot{I}_3^F = 0\angle 0^\circ$	[A]	$\dot{S}_3^F = 0\angle 0^\circ$	[kVar]
$\dot{I}_3^C = 18,75\angle 0^\circ$	[A]	$\dot{Q}_3^C = 1875\angle 180^\circ$	[VAr]
$\dot{I}_3^L = 18,75\angle 180^\circ$	[A]	$\dot{Q}_3^L = 1875\angle 0^\circ$	[VAr]

A Figura 2.3 ilustra os resultados obtidos.

Figura 2.3 – Resolução do Circuito 1 (a) para $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ e (b) para $\omega_3 = 3\omega_1$. Fonte [16]

Pode-se observar que os valores apresentados em cada tabela estão orientados, isto é, possuem módulo e ângulo e, portanto, as leis de Kirchhoff e o princípio de conservação de energia podem ser aplicados e verificados para cada circuito da Figura 2.3, separadamente.

Entretanto o circuito da Figura 2.2 não funciona como a união de dois circuitos diferentes, pelo contrário, funciona como uma unidade. Consequentemente as leis de Kirchhoff e o princípio de conservação de energia deveriam ser verificados para o circuito como um todo. No entanto, isto não é possível através do modelo de Steinmetz. Para exemplificar, a Figura 2.4 mostra os resultados apresentados anteriormente sobrepostos.

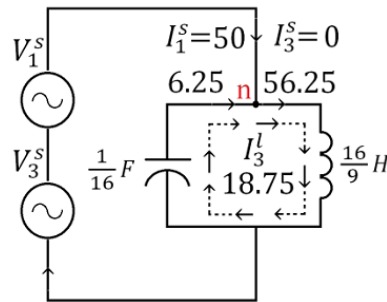


Figura 2.4 - Circuito 1 - resultados sobrepostos. Fonte [16]

Pode-se observar que na Figura 2.4 não é possível somar 56,25A com 18,75A (ou os respectivos fasores) para obter a corrente no indutor. O modelo de Steinmetz, no entanto, nos permite encontrar a magnitude de corrente no indutor que é igual a $\|I_L\| = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 59,29A$. Para o capacitor e para a fonte, o procedimento é o mesmo e os valores são, respectivamente, 19,76A e 50A.

Ao obter somente as magnitudes de corrente não é possível verificar a lei de Kirchhoff das correntes no nó “n” da Figura 2.4. Dito de outra forma, no nó “n”, $\|I_F\| + \|I_C\| + \|I_L\| \neq 0$. Obviamente, a lei de Kirchhoff das correntes é válida em todo instante de tempo, não importando se a carga é linear, não-linear ou variante no tempo, apenas não é possível verificá-la com o método de Steinmetz em circuitos não senoidais.

2.3. Considerações finais

Em resumo, a técnica de Fourier permite o estudo dos sinais distorcidos de forma decomposta, obtendo um somatório de senóides e cossenóides no domínio do tempo. Com o método de Steinmetz migra-se para o domínio da frequência, onde cada senóide/cossenóide da decomposição de Fourier pode ser transformada em um fasor. Contudo, no domínio da frequência, fasores originados de frequências diferentes não podem ser somados entre si para obtenção das tensões e correntes. Uma consequência desta limitação matemática é que a teoria

clássica de potências (que utiliza o domínio da frequência) não poderia ser aplicada a sinais distorcidos.

Os comentários apresentados nesta seção ilustram a importância da escolha da ferramenta matemática durante o desenvolvimento de teorias de potência elétrica, assunto abordado com maior profundidade nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Principais teorias de potência

3.1. Breve histórico

As primeiras teorias sobre potência na presença de distorções harmônicas e desequilíbrios surgiram nas décadas de 1920 e 1930. Surgia então, basicamente, duas linhas de desenvolvimento. A primeira, com Constantin Budeanu, emprega Séries de Fourier para descrever as propriedades dos circuitos elétricos tratando as formas de onda como uma soma de componentes com diferentes frequências. Devido a sua grande influência, ainda hoje as propriedades de potência são comumente definidas no domínio da frequência [2].

Com alguns poucos anos de diferença, Stanisław Fryze surge com outra linha de pesquisa, desta vez utilizando definições de potência no domínio do tempo [3]. Sua linha de pesquisa influenciou diretamente outras teorias como a de Depenbrock [17] e a de Czarnecki [13].

Com o decorrer dos anos, as distorções harmônicas tornaram-se familiares para os profissionais de engenharia elétrica à medida que se popularizava os equipamentos que as produziam, como é o caso de equipamentos que empregam eletrônica de potência.

Diante desta conjuntura, cresceu o esforço da comunidade científica no intento de melhor representar as propriedades da potência elétrica em regime não senoidal. Uma amostra dos esforços e dedicação aplicados incluem cinco workshops internacionais (*International Workshop on Power Definitions and Measurements under Non-Sinusoidal Conditions*), um grupo de trabalho dedicado do IEEE e uma conferência internacional bianual. O número de

propostas e teorias cresceu muito (ver seção subsequente) sem, no entanto, chegar à uma conclusão definitiva sobre o assunto.

3.2. Teorias de potências propostas

Conforme mencionado, existem na literatura científica muitas propostas de teorias e definições que foram sugeridas para as propriedades de potência. Citar todas as contribuições que vêm se somando ao longo de quase um século para este tema é impraticável, portanto, é apresentada apenas uma breve revisão dos mais influentes autores, Constantin Budeanu, Stanisław Fryze, Hirofumi Akagi e seus coautores, Leszek S. Czarnecki, o grupo de trabalho do IEEE encabeçado por Alexander Eigeles Emanuel e a recente proposta de Milton David Castro-Núñez.

Ainda que seja apresentado com maiores detalhes somente os autores citados acima, a Tabela 3.1, mostra uma lista de algumas das demais contribuições ao assunto.

Tabela 3.1 - Teorias de potência propostas ao longo dos últimos anos.

	Autores	Título	Ano
1	C Budeanu	Budeanu's power theory	1927
2	S Fryze	Orthogonal currents	1931
3	W Shepherd & P Zakikhani	Definition of reactive power	1972
4	D Sharon	Reactive power definitions	1973
5	H Depenbrock	The first harmonic of voltage and current	1979
6	N L Kuster's & M J M Moore	Definition of reactive power	1980
7	C H Page	Reactive power definition	1980
8	G Nomowesjki	Generalised theory of electrical power	1981
9	Akagi & Nabae	Original p-q theory	1983
10	L S Czarnecki	CPC Theory	1988
11	M D Slonim & J D Van Wyck	Definition of active, reactive and apparent powers with clear physical interpretation	1988
12	J H Enslyn & J D Van Wyck	Load related time domain generalised definition	1988
13	I Takahashi	Instantaneous Vectors	1988
14	M J Robinson & P H G Allen	Power factor and quadergy definitions	1989
15	T Furuhasi	Theory of instantaneous reactive power	1990
16	Ferrero e Superti-Furga	The Park power theory	1991
17	P S Fillipski	Elucidation of apparent power and power factor	1991

	Autores	Título	Ano
18	A Ferrero & G Superti-Furga	Powers using Parks transform	1991
19	Willems	Generalized Akagi's and Ferrero's p-q power theories	1992
20	Willems	Instantaneous voltage and current vectors	1993
21	E H Watanabe	Generalised theory of instantaneous powers α - β -0 transformation	1993
22	Rossetto e Tenti	Instantaneous orthogonal currents	1994
23	Akagi & Nabae	Modified p-q theory	1994
24	IEEE Working Group	Practical power definitions	1995
25	F Z Peng & J S Lai	Generalised instantaneous reactive power theory	1996
26	D Sharon	Power factor definitions	1996
27	A Nabae & T Tanaka	Powers based on instantaneous space vector	1996
28	L M Dalgerti	Concepts based on instantaneous complex power approach	1996
29	H Akagi & K Hyosung	Instantaneous power theory based on mapping matrices	1996
30	Nils & Marja	Vector space decomposition of reactive power	1997
31	A E Emanuel	Definitions of apparent power	1998
32	K Hyusong & H Akagi	Instantaneous p-q-r power theory	1999
33	J Cohen, F Keon & K M Hernandez	Time domain representation of powers	1999
34	F Ghassemi	Definition of apparent power based on modified voltage	2000
35	F Z Peng & L M Tolbert	Definitions of nonactive power from compensation standpoint	2000
36	S K Chen & G W Chang	Instantaneous power theory based on active filter	2000
37	H Lev-Ari & A M Stankovic	Reactive power definition via local Fourier transform	2002
38	M Depenbrock	FBD Method	2003
39	A Menti T Zacharias & J. Milias-Argitis	Introduced the framework of Geometric Algebra to non-sinusoidal power theory	2007
40	M Castilla et all	Extended the use of Geometric Algebra in non-sinusoidal power theory	2009
41	IEEE Std 1459	Definitions for the measurement of electric power quantities	2010

Quanto às propostas que serão listadas nas seções subsequentes, optou-se por manter a simbologia e nomenclatura utilizada originalmente por cada autor, cujos significados serão apresentados, oportunamente, à medida que os conceitos são apresentados.

3.2.1. **Proposição de Budeanu**

Constantin Budeanu, em 1927, compreendeu que a potência aparente tinha mais de duas componentes em condições não senoidais e postulou que a Potência Aparente é composta por duas componentes ortogonais, chamadas de **Potência Ativa** e **Não Ativa** [2].

A Potência Ativa sendo definida como a potência média calculada pela média da potência instantânea no domínio do tempo dada por:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt = V_0 \cdot I_0 + \sum_{\substack{h=1 \\ h, n \in \mathbb{N}^+}}^n V_h \cdot I_h \cdot \cos \varphi_h \quad (3.1)$$

Onde V_0 e I_0 representam a componente contínua de tensão e corrente, respectivamente. A **Potência Não Ativa** é dividida em duas componentes definidas como **Potência Reativa de Budeanu** e **Potência de Distorção**.

A Potência Reativa de Budeanu é calculada pela soma das potências reativas individuais de cada ordem harmônica, ou seja:

$$Q_B = \sum_{h=1}^n V_h \cdot I_h \cdot \sin \varphi_h \quad (3.2)$$

E a Potência de Distorção é dada por:

$$D_B = \sqrt{\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=p+1}^n \left[(V_p I_q)^2 + (V_q I_p)^2 - 2V_p V_q I_p I_q \cos(\varphi_p - \varphi_q) \right]} \quad (3.3)$$

$$D_B = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_B^2} \quad (3.4)$$

Onde h, p, q e n são inteiros positivos, distintos, que indicam a ordem harmônica.

Apesar da potência reativa de Budeanu poder ser totalmente compensada por um capacitor simples, o mesmo não é válido para a potência de distorção [18]. Além disso, Czarnecki critica a potência reativa de Budeanu como uma definição sem significado físico que nada fornece de útil para a melhoria do fator de potência [19].

Além disso, na recente revisão da norma IEEE 1459 [10], a potência reativa de Budeanu foi removida e o uso de varímetros⁴ sob formas de onda distorcidas foi revisada em seu anexo A.2.

⁴ Varímetro é um instrumento utilizado para medir a potência elétrica reativa (Q) de um circuito. A unidade é o VAr (Volt-ampère reativo)

3.2.2. Proposição de Fryze

Em 1932, Stanisław Fryze propôs uma decomposição de corrente, na qual a corrente é dividida em duas componentes ortogonais, chamadas, corrente ativa e reativa.

A corrente ativa, i_a , seria calculada utilizando a potência ativa da carga.

$$i_a(t) = \frac{P}{\|v(t)\|^2} \cdot v(t) = G_e \cdot v(t) \quad (3.5)$$

Onde $\|v(t)\|$ é tensão rms e a condutância G_e é referida como condutância equivalente da carga. A parte remanescente da corrente da fonte é tida como corrente reativa.

Logo:

$$i_r(t) = i(t) - i_a(t) \quad (3.6)$$

Assim, a decomposição sugerida por Fryze é:

$$S^2 = P^2 + Q_F^2 \quad (3.7)$$

Onde as Potência ativa e reativa são dadas, respectivamente por:

$$P = \|v(t)\| \cdot \|i_a\| \quad (3.8)$$

$$Q_F = \|v(t)\| \cdot \|i_r\| \quad (3.9)$$

Czarnecki [20] comenta que a teoria de potência de Fryze tem limitações severas, tanto no que diz respeito às características interpretativas, quanto nas suas implementações práticas. Primeiro de tudo, proporciona uma interpretação muito superficial dos fenômenos de energia. A ideia da corrente ativa é poderosa, no entanto, a sua interpretação como uma componente útil da corrente de alimentação não é totalmente convincente, uma vez que a potência ativa não é sinônimo de potência útil. Potência ativa associada com harmônicas muitas vezes não é útil, mas prejudicial, especialmente em máquinas rotativas.

A corrente reativa i_r de acordo com Fryze não tem outra interpretação do que ser uma corrente inútil, uma conclusão trivial.

Não obstante, a abordagem de Fryze contribuiu para o desenvolvimento e o atual estágio das teorias de potência elétrica. Uma série de conceitos originários de Fryze ainda estão vivos [20]. Talvez, o mais importante deles é o tratamento da equação de potência [equação (3.7)] como secundária com respeito à equação de corrente e a tentativa para explicar as propriedades de potência em termos de corrente decomposta em componentes ortogonais. Dos autores apresentados na Tabela 3.1, Zakikhani; Depenbrock; Kusters & Moore e Czarnecki seguiram a abordagem de Fryze.

3.2.3. Proposição de Akagi e coautores

Hirofumi Akagi e seus coautores propuseram em 1983, a teoria da potência reativa instantânea [21], também conhecida como a teoria $p - q$. Esta teoria tem sido desenvolvida no domínio do tempo e é válida nos regimes permanente e transitório; e para redes trifásicas de três ou quatro condutores. As definições são formuladas a partir da transformação de um sistema de três fases, nas coordenadas $A - B - C$, para coordenadas ortogonais $\alpha - \beta$ (ou $\alpha - \beta - 0$), conhecida como transformação de Clarke.

A transformação permite a análise no domínio do tempo das propriedades da potência nos circuitos trifásicos e a interpretação física dos valores envolvidos. Entretanto, a interpretação sugerida ainda é controversa. A potência imaginária instantânea proposta por Akagi e os demais autores não tem um significado físico claro.

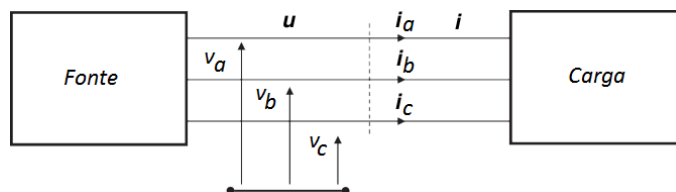


Figura 3.1 – Tensões e correntes na seção A-B-C

Considerando a Figura 3.1, (circuito trifásico com três condutores e, portanto, as componentes de sequência zero não estão presentes) a teoria $p - q$, em sua forma original,

transforma as medidas de tensões e correntes instantâneas através das seguintes equações matriciais:

$$v = v(t) = [v_a, v_b, v_c]^T \quad (3.10)$$

$$i = i(t) = [i_a, i_b, i_c]^T \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Onde as equações a seguir,

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \vec{e}_\alpha + \vec{e}_\beta \\ \vec{i} &= \vec{i}_\alpha + \vec{i}_\beta \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} |\vec{e}_\alpha| &= e_\alpha \\ |\vec{e}_\beta| &= e_\beta \\ |\vec{i}_\alpha| &= i_\alpha \\ |\vec{i}_\beta| &= i_\beta \end{aligned} \quad (3.15)$$

são, respectivamente, vetores espaciais de tensão e corrente nas coordenadas $\alpha - \beta$ e suas amplitudes (a seta indica os vetores espaciais).

A potência ativa instantânea p e a potência imaginária instantânea \vec{q} são definidas como:

$$p = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{i}_\alpha + \vec{e}_\beta \cdot \vec{i}_\beta \quad (3.16)$$

$$\vec{q} = \vec{e}_\alpha \times \vec{i}_\alpha + \vec{e}_\beta \times \vec{i}_\beta \quad (3.17)$$

Onde p é a potência real em circuitos trifásicos. Esta potência representa o total de energia que flui, por unidade de tempo, no circuito trifásico a três condutores com os componentes em termos de $\alpha - \beta$ (é medido em watts, W).

A potência imaginária \vec{q} tem um significado físico não tradicional e dá a medida de corrente ou de potência que flui em cada fase sem transportar energia em momento algum. Akagi e seus coautores introduziram o espaço vetorial da potência imaginária instantânea \vec{q} para definir a potência reativa instantânea. Isso significa que \vec{q} não pode ser mensurada em W, VA ou VAr. Logo sua unidade é o volt-ampère imaginário VAI (ou IVA do inglês *imaginary volt-amperes*).

A partir das equações (3.16) e (3.17) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\alpha & e_\beta \\ -e_\beta & e_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Onde q é a amplitude do vetor espacial \vec{q} .

Para calcular as correntes i_α e i_β nas coordenadas $\alpha - \beta$ altera-se a equação (3.18)

para:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\alpha & e_\beta \\ -e_\beta & e_\alpha \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \frac{1}{e_\alpha^2 + e_\beta^2} \cdot \begin{bmatrix} e_\alpha & -e_\beta \\ e_\beta & e_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

No geral, quando a carga é não-linear e/ou desbalanceada, as potências real e imaginária podem ser divididas nas componentes média e oscilatória, conforme segue:

$$p = \bar{p} + \tilde{p} = \bar{p} + \tilde{p}_h + \tilde{p}_{2f_{(1)}} \quad (3.20)$$

$$q = \bar{q} + \tilde{q} = \bar{q} + \tilde{q}_h + \tilde{q}_{2f_{(1)}} \quad (3.21)$$

Onde \bar{p} e \bar{q} são os componentes médios, \tilde{p}_h e \tilde{q}_h são as componentes oscilatórias e o índice h indica harmônicas. $\tilde{p}_{2f_{(1)}}$ e $\tilde{q}_{2f_{(1)}}$ são também componentes oscilatórios e o índice $2f_{(1)}$ refere-se a componente com o dobro da frequência fundamental.

Partindo destes componentes de potência, é possível calcular os componentes de corrente na coordenada $\alpha - \beta$. E então, usando a transformada inversa de Clarke, é possível calcular as correntes nas coordenadas originais $A - B - C$.

Finalmente, de acordo a teoria $p - q$, uma carga trifásica não-linear e desbalanceada é expressa através de quatro componentes:

$$i = i_{\bar{p}} + i_{\bar{q}} + i_h + i_{2f(1)} \quad (3.22)$$

Onde $i_{\bar{p}}$ está associada com a potência ativa P definida da forma tradicional, isto é, $\bar{p} = P_A + P_B + P_C = P_\Sigma$; $i_{\bar{q}}$ está associado com a potência reativa Q (no caso de uma tensão de alimentação senoidal simétrica e uma carga linear balanceada, \bar{q} é igual a potência reativa Q_{3f} definida da forma tradicional, isto é, $Q_A = U_A I_A \sin \varphi = Q_B = Q_C \Rightarrow Q_{3f} = 3Q$; i_h está associada com a presença de harmônicos nas formas de onda da tensão e da corrente; e, finalmente, $i_{2f(1)}$ está associada com as correntes da carga desbalanceada. A Figura 3.2 mostra, em circuito trifásico, uma representação gráfica dos componentes de potência definidos acima.

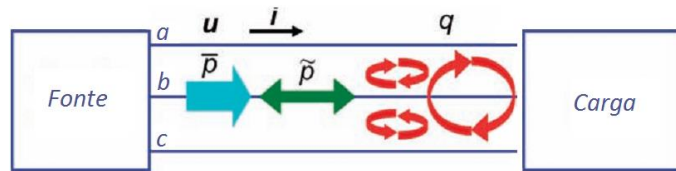


Figura 3.2 – Representação gráfica dos componentes definidos.

A teoria $p - q$ provou ser uma ferramenta eficaz para a construção e o desenvolvimento de algoritmos de controle para filtros ativos de potência. Tem sido, também, base para muitas outras propostas de Teorias de Potências.

No entanto Czarnecki afirma em [22] que as potências \bar{p} e \bar{q} não estão associadas a fenômenos de energia distintos, e sim, com vários fenômenos. Além disso, também é mostrado em [22] que os resultados da teoria $p - q$ contradizem algumas interpretações comuns de fenômenos de energia nos circuitos trifásicos.

3.2.4. Proposição de Czarnecki

Leszek S. Czarnecki começou a desenvolver em 1984 a **Teoria dos Componentes Físicos da Corrente** (ou **Teoria CPC**, do inglês *Currents' Physical Components*). O adjetivo "físico" não significa, porém, que essas correntes existam fisicamente. Elas não existem como entidades físicas, mas como harmônicos, apenas como entidades matemáticas, associadas a alguns fenômenos físicos da carga [13].

A teoria CPC divide a corrente em vários componentes, que são mutuamente ortogonais [13]. Cada componente está associado a uma propriedade física de circuitos, tais como a propriedade do circuito ser não-senoidal ou desequilibrado. Da mesma forma acontece com os componentes de potência. Desta forma, a teoria CPC pode fornecer uma interpretação física completa do fenômeno de energia em sistemas elétricos. A teoria CPC é mostrada como segue⁵.

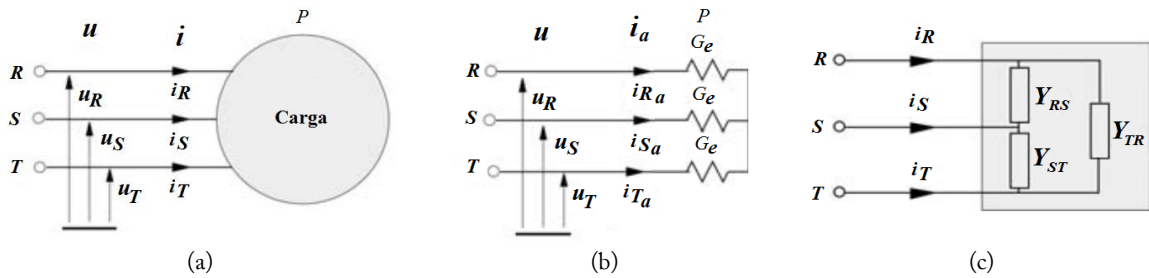


Figura 3.3 - Sistema trifásico de referência (a) Carga trifásica (b) Equivalente em relação à potência ativa P e (c) Carga equivalente em delta.

Para o sistema trifásico a três condutores da Figura 3.3a, a tensão não-senoidal balanceada é dada por:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sum u_{Rn} \\ \sum u_{Sn} \\ \sum u_{Tn} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \text{Re} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{U}_n e^{jn\omega_1 t} = \sqrt{2} \cdot \text{Re} \sum_{n \in \mathbb{N}} \begin{pmatrix} U_{Rn} \\ U_{Sn} \\ U_{Tn} \end{pmatrix} e^{jn\omega_1 t} \quad (3.23)$$

Onde \mathbf{u} é o vetor de tensão; \mathbf{U} é o vetor de tensão eficaz; n representa a n -ésima ordem harmônica e $U_{R,S,T}$ indica a tensão eficaz de u para cada fase, respectivamente.

⁵ A fim de melhor retratar a proposta de Czarnecki, a simbologia empregada originalmente foi mantida.

Supondo que a carga é linear e balanceada, a corrente de alimentação pode ser calculada como segue:

$$i = \sqrt{2} \cdot Re \sum_{n \in \mathbb{N}} \{[(G_{en} + jB_{en}) \cdot \mathbf{U}_n + A_n \mathbf{U}_n^\#] \cdot e^{jn\omega_1 t}\} \quad (3.24)$$

Onde os termos da equação (3.24) são:

$$G_e = \frac{P}{\|\mathbf{u}\|^2}; G_{en} = \frac{P_n}{\|\mathbf{u}_n\|^2} \quad (3.25)$$

$$A_n = -(Y_{STn} + \alpha_n Y_{TRn} + \alpha_n^* Y_{RSn}) = A_n \cdot e^{j\psi_n} \quad (3.26)$$

$$\alpha_n = e^{jn120^\circ}; \alpha_n^* = e^{-jn120^\circ} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} U_{Rn} \\ U_{Sn} \\ U_{Tn} \end{pmatrix}; \mathbf{U}_n^\# = \begin{pmatrix} U_{Rn} \\ U_{Tn} \\ U_{Sn} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Sendo que: P denota a potência ativa correspondente ao consumo total de energia do sistema; P_n denota a potência ativa da n -ésima ordem harmônica; G_e é a condutância equivalente; B_e é a susceptância equivalente; Y denota a admitância e A_n é chamada de admitância desbalanceada de n -ésima ordem harmônica.

A corrente é dividida nas seguintes quatro componentes, as quais são denominadas corrente ativa, corrente reativa, corrente de desequilíbrio e corrente dispersa, respectivamente.

$$i_a = \sqrt{2} \cdot Re \sum_{n \in \mathbb{N}} G_e \mathbf{U}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.29)$$

$$i_r = \sqrt{2} \cdot Re \sum_{n \in \mathbb{N}} jB_{en} \mathbf{U}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.30)$$

$$i_u = \sqrt{2} \cdot Re \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \mathbf{U}_n^\# e^{jn\omega_1 t} \quad (3.31)$$

$$i_s = \sqrt{2} \cdot Re \sum_{n \in \mathbb{N}} (G_{en} - G_e) \mathbf{U}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.32)$$

Essas quatro componentes são mutualmente ortogonais e, consequentemente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u + \mathbf{i}_s \\ \|\mathbf{i}^2\| &= \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2 + \|\mathbf{i}_s\|^2\end{aligned}\tag{3.33}$$

Além disso, a teoria CPC define a potência ativa, potência reativa, potência de desequilíbrio e potência dispersa como:

$$P = \|\mathbf{i}_a\| \cdot \|\mathbf{u}\| = G_e \cdot \|\mathbf{u}\|^2\tag{3.34}$$

$$Q_r = \pm \|\mathbf{i}_r\| \cdot \|\mathbf{u}\| = -B_e \cdot \|\mathbf{u}\|^2\tag{3.35}$$

$$D_u = \|\mathbf{i}_u\| \cdot \|\mathbf{u}\| = A \cdot \|\mathbf{u}\|^2\tag{3.36}$$

$$D_s = \|\mathbf{i}_s\| \cdot \|\mathbf{u}\|\tag{3.37}$$

Essas quatro componentes satisfazem a relação

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2 + D_s^2\tag{3.38}$$

Segundo Czarnecki a corrente dispersa não pode ser compensada por nenhuma reatância shunt. As correntes, reativa e de desequilíbrio, podem ser totalmente compensadas por um compensador shunt. Já uma compensação total requereria compensadores muito complexos e, conseqüentemente, inviáveis. No entanto, o autor ressalta que estas correntes poderiam ser minimizadas de forma eficaz através de compensadores compostos por não mais do que dois elementos LC em cada ramo compensador [13].

3.2.5. **Proposição da norma IEEE 1459 2010**

O grupo de trabalho de situações não senoidais do IEEE, presidida por Alexander Eigeles Emanuel, propõe na norma IEEE 1459 2010 [10] a decomposição da potência instantânea em três componentes similares as de Budeanu. Essas componentes são denominadas da mesma forma: Potência Ativa, Reativa e de Distorção.

As diferenças em relação à proposta de Budeanu referem-se a características das potências (aqui instantâneas) e seu método de obtenção (por soma geométrica), que elimina a possibilidade de se anularem mutuamente. Esta teoria foi construída para a análise dos

fenômenos do potência mas também pode sugerir a parte a se compensar. Uma justificativa física das variáveis introduzidas não são facilmente compreendidas ou explicadas. [23]

Em uma situação não senoidal, a tensão e a corrente são decompostas em duas partes, fundamental e harmônicas conforme equações na sequência⁶ [10].

$$v(t) = V_0 + \sqrt{2} \cdot \sum_{h \in \mathbb{N}^+} V_h \cdot \text{sen}(h \cdot 2\pi f t - \alpha_h) \quad (3.39)$$

$$V_{rms}^2 = V_0^2 + \sum_{h=1} V_h^2 \quad (3.40)$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2} \cdot \sum_{h \in \mathbb{N}^+} I_h \cdot \text{sen}(h \cdot 2\pi f t - \beta_h) \quad (3.41)$$

$$I_{rms}^2 = I_0^2 + \sum_{h=1} I_h^2 \quad (3.42)$$

Onde \mathbb{N}^+ é o conjunto de números inteiros positivos, h é a ordem harmônica, f é a frequência fundamental do sistema, V_0 e I_0 são os valores das componentes contínuas, V_h e I_h são os valores RMS de tensão e corrente, respectivamente. O deslocamento angular de tensão e corrente são representados respectivamente por α_h e β_h , e t é o tempo.

A Potência Ativa é definida como o valor médio da potência instantânea e é decomposta em partes fundamental (P_1) e harmônica (P_h):

$$P = \frac{1}{kT} \int_{\tau}^{\tau+kT} p \, dt = P_1 + P_h \quad (3.43)$$

$$P_1 = V_1 I_1 \cos \theta_1 \quad (3.44)$$

$$P_h = V_0 I_0 + \sum_{h \neq 1} V_h I_h \cos \theta_h = P - P_1 \quad (3.45)$$

Onde T denota o período; k é um número inteiro e τ representa o momento em que a medição do sinal inicia.

⁶ A fim de melhor retratar a proposta do IEEE, a simbologia empregada originalmente foi mantida.

A parte mais controversa da norma é sobre as definições e interpretações físicas de potência reativa e potência de distorção. Só a definição de potência reativa fundamental é dada. Por conseguinte, as potências de distorção individuais de tensão, corrente e harmônica são definidos usando os valores de THD, mas não há qualquer interpretação física e tampouco uma definição para a potência total distorção. As demais expressões da norma são dadas a seguir.

$$Q_1 = V_1 I_1 \sin \theta_1 \quad \text{Potência reativa fundamental} \quad (3.46)$$

$$S_1 = V_1 I_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} \quad \text{Potência aparente fundamental} \quad (3.47)$$

$$D_I = V_1 I_H = S_1 (THD_I) \quad \text{Potência de distorção de corrente} \quad (3.48)$$

$$D_V = V_H I_1 = S_1 (THD_V) \quad \text{Potência de distorção de tensão} \quad (3.49)$$

$$S_H = V_H I_H = S_1 (THD_V) (THD_I) \quad \text{Potência aparente harmônica} \quad (3.50)$$

$$D_H = \sqrt{S_H^2 - P_H^2} \quad \text{Potência de distorção harmônica} \quad (3.51)$$

Assim, a potência aparente se transforma em:

$$S^2 = (VI)^2 = S_1^2 + D_I^2 + D_V^2 + S_H^2 \quad (3.52)$$

Tem-se ainda as seguintes definições:

$$S_N^2 = S^2 - S_1^2 = D_I^2 + D_V^2 + S_H^2 \quad \text{Potência aparente não fundamental} \quad (3.53)$$

$$N = \sqrt{S^2 - P^2} \quad \text{Potência não ativa} \quad (3.54)$$

A Figura 3.4 ilustra a decomposição proposta pelo IEEE.

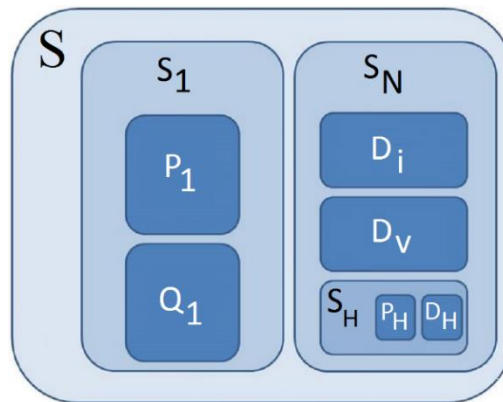


Figura 3.4 - Decomposição da potência aparente proposta pelo IEEE

3.2.6. Proposição de Castro-Núñez

Em 2013, Milton David Castro-Núñez [16] propõe sua teoria deixando de lado as análises feitas no domínio do tempo e da frequência, a favor da álgebra geométrica ou álgebra de Clifford.

A álgebra de Clifford é uma ferramenta matemática poderosa, que oferece uma maneira natural e direta de modelar objetos geométricos e suas transformações e está ganhando cada vez mais atenção em diferentes campos de pesquisa como na física, robótica, computação gráfica [24] e, recentemente nos estudos de potência em regime não senoidal [25] [26] [27] [28].

O estudo aprofundado e o embasamento teórico sobre a álgebra vetorial foge do escopo deste estudo. A álgebra de Clifford envolve conceitos de análise vetorial, números complexos, matrizes de Pauli, álgebra de Grassmann e de quaternions de Hamilton. Portanto, por si só, seria tema para teses e dissertações. Neste contexto, serão apresentados apenas informações básicas necessárias para a compreensão da proposta de Castro-Núñez.

3.2.6.1. Rudimentos sobre a álgebra de Clifford

Considere uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de um espaço vetorial euclidiano \mathbf{R}^3 . Dois vetores genéricos \mathbf{a} e \mathbf{b} de \mathbf{R}^3 podem ser expressos como uma combinação linear dos elementos da base, tal como segue:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \quad \& \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.55)$$

Um espaço tridimensional de Clifford, \mathcal{G}_3 , representa uma extensão do espaço vetorial euclidiano \mathbf{R}^3 . Assim, no \mathcal{G}_3 o produto de \mathbf{a} por \mathbf{b} , chamado de **produto geométrico** ou de **produto de Clifford**, é definido como:

$$\mathbf{ab} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \quad (3.56)$$

Onde a equação foi agrupada e reduzida aplicando o seguinte axioma:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{Se } i = j \\ -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i & \text{Se } i \neq j \end{cases} \quad (3.57)$$

Os termos, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ são um novo tipo de elemento chamado de bivector e pode ser entendido como uma unidade de área orientada. Um outro elemento que também pode ser obtido é $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, denominado trivector, que pode ser compreendido como uma unidade de volume orientado. Tem-se ainda que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são vetores e um número puro, um escalar. A combinação destes elementos é chamada de *Multivetor*. A Figura 3.5 ilustra estes conceitos.

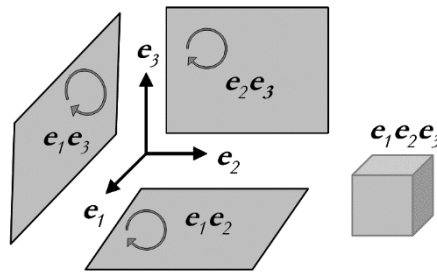


Figura 3.5 - Subespaços orientados no Espaço 3D de Clifford. Fonte [24].

Portanto, a base do espaço tridimensional de Clifford, \mathcal{G}_3 , é definida como

$$A = \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\} \quad (3.58)$$

Assim, em \mathcal{G}_3 , um multivetor genérico pode ser escrito como

$$a_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + a_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \quad (3.59)$$

Onde a_n é um número real qualquer, isto é, $a_n \in \mathbb{R}$.

Logo, pode-se observar que um multivetor pode conter elementos escalares, vetores, bivectores, trivetores ou k-vetores, de acordo com sua dimensão.

Expandindo os conceitos, pode-se considerar uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano \mathbf{R}^n , as bases correspondentes de um espaço n-dimensional de Clifford, \mathcal{G}_N , consiste em todos os subespaços k-dimensionais com $k \leq n$, para todas combinações possíveis dos n vetores base, conforme ilustra a Tabela 3.2.

Sucintamente, todo objeto vetorial, para ser completamente especificado, requer quatro propriedades: **grade**, que classifica os objetos vetoriais de acordo com o objeto geométrico

(ponto, reta, plano, triedro etc.) a que está associado; **módulo**, representa a magnitude do objeto vetorial, equivale a medida do comprimento, área, volume, etc. em sua representação geométrica; **direção** corresponde à reta, plano, volume etc. que dá suporte ao k-vetor; e o **sentido** define a origem do vetor e o seu destino. Há apenas dois sentidos possíveis para um dado k-vetor.

Tabela 3.2 – Elementos base de um espaço n-dimensional de Clifford

Elemento base	Grade	Multiplicidade
1	0 (escalar)	$\binom{n}{0} = 1$
e_1, e_2, \dots, e_n	1 (vetor)	$\binom{n}{1} = n$
$e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_{n-1} e_n$	2 (bivetor)	$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
$e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, \dots, e_{n-2} e_{n-1} e_n$	3 (trivetor)	$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)}{2}$
\vdots	\vdots	\vdots
$e_1 e_2 e_3 \dots e_n$	k (pseudoscalar)	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{n} = 1$

Conforme mencionado, o estudo aprofundado sobre a álgebra vetorial foge do escopo deste estudo devido ao grande número de tópicos. Logo as referências [24] e [29] são apresentadas como material introdutório e motivacional.

3.2.6.2. Definições propostas [16].

A dimensão de um espaço vetorial n-dimensional de Clifford, $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, é definido como $\mathcal{N} = n + 1$, onde n é a ordem harmônica mais alta presente no circuito.

A transformação dos sinais do domínio do tempo para o domínio geométrico $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 x_{c1}(t) &= X\sqrt{2} \cos(\omega t) \Leftrightarrow \mathbf{X}_{c1} = X\sigma_1 \\
 x_{s1}(t) &= X\sqrt{2} \sin(\omega t) \Leftrightarrow \mathbf{X}_{s1} = -X\sigma_2 \\
 x_{cn}(t) &= X\sqrt{2} \cos(n\omega t) \Leftrightarrow \mathbf{X}_{cn} = X\bigwedge_{i=2}^{n+1} \sigma_i \\
 x_{sn}(t) &= X\sqrt{2} \sin(n\omega t) \Leftrightarrow \mathbf{X}_{sn} = X\bigwedge_{i=1, i \neq 2}^{n+1} \sigma_i
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Na equação (3.60), $X\Lambda_{i=2}^{n+1}\sigma_i$ e $X\Lambda_{i=1}^{n+1}\sigma_i$ denotam o produto geométrico de n vetores

base unitários e X é um valor RMS.

Assim, tome por exemplo as seguintes equações em regime senoidal

$$\begin{aligned} v(t) &= V\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) \\ i(t) &= I\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha \pm \varphi) \\ p(t) &= v(t)i(t) = VI\cos\varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] \mp VI\sin\varphi\sin(2\omega t + 2\alpha) \end{aligned} \quad (3.61)$$

A transformação correspondente para o domínio geométrico será

$$v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) \quad \rightarrow \quad \mathbf{V} = V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2 \quad (3.62)$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha \pm \varphi) \quad \rightarrow \quad \mathbf{I} = I_1\sigma_1 + I_2\sigma_2 \quad (3.63)$$

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{VI} \quad (3.64)$$

Onde o produto da equação (3.64) entre o vetor \mathbf{V} e \mathbf{I} é o produto geométrico, assim

$$\mathbf{M} = \mathbf{VI} = (V_1I_1 + V_2I_2) + (V_1I_2 - V_2I_1)\sigma_1\sigma_2 \quad (3.65)$$

A interpretação da equação (3.65) mostra que

$$(V_1I_1 + V_2I_2) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = VI\cos\varphi \quad (3.66)$$

$$(V_1I_2 - V_2I_1)\sigma_1\sigma_2 = \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = (VI\sin\varphi)\sigma_1\sigma_2 \quad (3.67)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = P + \mathbf{CN} \quad (3.68)$$

Onde $\mathbf{V} \cdot \mathbf{I}$ é o produto interno e $\mathbf{V} \wedge \mathbf{I}$ é o produto externo entre os vetores.

Das propriedades de produto interno da álgebra geométrica [29], tem-se ainda que $(V_1I_1 + V_2I_2) = VI\cos\varphi$ e, portanto, igual a definição de potência ativa P . Da mesma forma, das propriedades do produto externo, tem-se que $(V_1I_2 - V_2I_1)\sigma_1\sigma_2 = (VI\sin\varphi)\sigma_1\sigma_2$ que, no regime senoidal, equivale a Q da teoria clássica de potências acrescida de $\sigma_1\sigma_2$. Ainda das propriedades da álgebra geométrica, pode-se demonstrar que $\sigma_1\sigma_2$ equivaleria ao j da álgebra dos números complexos. Assim, pode-se escrever $(VI\sin\varphi)\sigma_1\sigma_2 = jQ$.

Vale ressaltar que a equação (3.66) resulta em um valor escalar e, por sua vez, a equação (3.67) resulta em um bivector. Logo a equação (3.65) pode ser reescrita na forma da equação (3.68). Onde, Castro-Núñez [16] representa a potência reativa $(VI \text{ sen } \varphi) \sigma_1 \sigma_2$ por CN (acrônimo para *Clifford Number*) para que não seja confundido com a definição de Q uma vez que somente no regime senoidal $CN = jQ$.

Assim, por extrapolação, em situações senoidais e não senoidais, a equação da potência no domínio geométrico \mathcal{G}_N , é dado por,

$$\mathbf{M} = P + CN \quad (3.69)$$

$$\|\mathbf{M}\| = \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{M} \rangle_0} \quad (3.70)$$

Na Equação (3.70), $\|\mathbf{M}\|$ define a norma no domínio \mathcal{G}_N , onde $\tilde{\mathbf{M}}$ é o inverso de \mathbf{M} e $\langle \rangle_0$ denota a parte escalar $\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{M}$. Há apenas uma diferença quando do cálculo do valor de P em situações não senoidais. Como os k -vetores unitários nem sempre resultam em 1 quando elevados ao quadrado, na avaliação do consumo ou produção de potência ativa P em um elemento, todos os números escalares resultantes devem ser multiplicados pelo seguinte fator de correção,

$$f = (-1)^{k(k-1)/2} \quad (3.71)$$

Onde k é a grade do multivector. Por exemplo, para escalares resultantes do quadrado de bivectores unitários como $(\sigma_1 \sigma_2)^2$ o sinal muda conforme $k = 2$.

A parte escalar do multivector potência \mathbf{M} representa a potência ativa, enquanto o bivector representa a potência reativa. Geralmente, na condição senoidal, o multivector potência \mathbf{M} é um *spinor*⁷ e corresponde sempre a potência complexa S do domínio da frequência e $\|\mathbf{M}\| = \|S\|$.

⁷ O *spinor* pode ser descrito, em termos simples, como "vetores de um espaço de transformações das quais estão relacionados de uma maneira particular à rotações no espaço físico" [40].

3.2.7. Comparação entre os métodos

A título de ilustração, compara-se os resultados obtidos por cada proposição. Para tal será utilizado o circuito da Figura 3.6 como referência. Para os cálculos definiu-se, arbitrariamente, que:

$$v(t) = 100\sqrt{2}[\cos(\omega t - 90) + \cos(3\omega t - 90)] \quad (3.72)$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s} \quad (3.73)$$

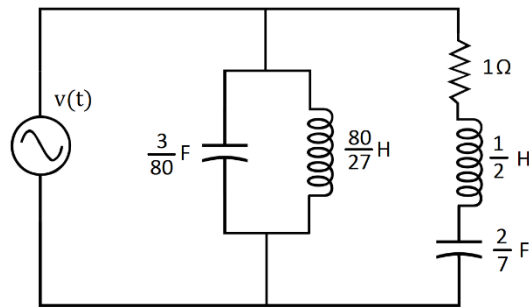


Figura 3.6 - Circuito RLC, exemplo. Adaptado de [16].

Embora o circuito acima não seja um exemplo de cunho prático, i.e., com os valores próximos aos encontrados na indústria, ele servirá para ilustrar as características de cada proposta. Desta forma, na Tabela 3.3 e na Figura 3.7 estão apresentados os resultados da análise do circuito no domínio da frequência. Ressalta-se que nos resultados apresentados, os sobrescritos indicam o local (fonte, ramo RL ou RLC) e o subscrito indica a ordem harmônica.

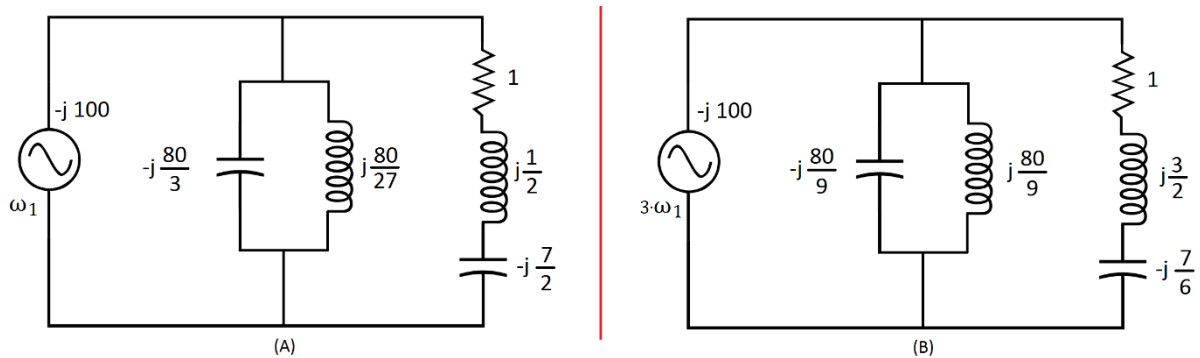


Figura 3.7 - Diagrama do circuito: (A) na frequência fundamental e (B) na terceira harmônica

Tabela 3.3 - Resultados da análise do circuito

Frequência fundamental	Terceira harmônica	Valor Eficaz
$\dot{V}_1^F = -j100 \text{ V}$	$\dot{V}_3^F = -j100 \text{ V}$	$V^F = 100\sqrt{2} \text{ V}$
$i_1^{RLC} = 30 - j10 \text{ A}$	$i_3^{RLC} = -30 - j90 \text{ A}$	$I^{RLC} = 100 \text{ A}$
$i_1^{LC} = -30 \text{ A}$	$i_3^{LC} = 0 \text{ A}$	$I^{LC} = 30 \text{ A}$
$i_1^F = -j10 \text{ A}$	$i_3^F = -30 - j90 \text{ A}$	$I^F = 95,394 \text{ A}$

As tabelas que seguem apresentam os resultados das proposições.

Tabela 3.4 - Proposição de Budeanu

S^F	P^F	Q^F	D^F
13,491 kVA	10,00 kW	3,00 kVAr	8,544 kVA

Tabela 3.5 - Proposição de Fryze

S^F	P^F	Q^F
13,491 kVA	10,00 kW	9,055 kVAr

Tabela 3.6 - Proposição da norma IEE 1459:2010

S_1^F		P_1^F		Q_1^F	
1,00 kVA		1,00 kVA		0,00	
S^F	P^F	D_I^F	D_V^F	S_H^F	N^F
13,491 kVA	10,00 kW	9,487 kVA	1,00 kVA	9,487 kVA	9,055 kVA

Tabela 3.7 - Proposição de Czarnecki

S^F	P^F	Q^F	D^F
13,491 kVA	10,00 kW	4,243 kVAr	8,00 kVA

Tabela 3.8 - Proposição de Castro-Núñez

Domínio do tempo	Domínio geométrico
$v_1^F(t) = 100\sqrt{2} \cos(\omega t - 90)$	$V_1^F = -100\sigma_2$
$v_3^F(t) = 100\sqrt{2} \cos(3\omega t - 90)$	$V_3^F = 100\sigma_1\sigma_3\sigma_4$
$v^F(t) = 100\sqrt{2}[\cos(\omega t - 90) + \cos(3\omega t - 90)]$	$V^F = 100(-\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\sigma_4)$
Multivetores	Módulos
$M^F = [10 + 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3\sigma_4 + 8\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4]kVA$	$\ M^F\ = 13,491 \text{ kVA}$
$\langle M^F \rangle_2 = [3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3\sigma_4]kVAr$	$\ \langle M^F \rangle_2\ = CN_r = 4,243 \text{ kVAr}$
$\langle M^F \rangle_4 = [8\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4]kVAr$	$\ \langle M^F \rangle_4\ = CN_d = 8,0 \text{ kVAr}$
$\langle M^F \rangle_0 = [10]kW$	$\ \langle M^F \rangle_0\ = P = 10,0 \text{ kW}$

Vê-se, pelos valores apresentados, a diferença entre as proposições apresentadas. Principalmente no que diz respeito a potência reativa e sua magnitude. Neste contexto, em qual proposição os engenheiros devem basear o projeto da compensação de reativos e em qual proposição os consumidores serão faturados? A melhor alternativa seria a teoria do domínio geométrico por ser consistente com o princípio de conservação de energia, com as leis de Kirchhoff e com o princípio da superposição [16]. Pode-se observar ainda que, dentre as proposições apresentadas, somente Czarnecki e Castro-Núñez obtiveram resultados idênticos.

Por ser a proposição mais recente e que foge das ferramentas convencionais, segue alguns comentários em relação ao método de Castro-Núñez.

O multivetor potência reativa é $\langle \mathbf{M}^F \rangle_2 = [3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3\sigma_4]kVAr$ e sua magnitude é $\|\langle \mathbf{M}^F \rangle_2\| = CN_r = 4,243 kVAr$ que é o mesmo fornecido pela teoria CPC de Czarnecki. Mais interessante ainda, é o fato da potência reativa ser composta por dois componentes que se somam geometricamente, conforme já inferido por Czarnecki mas ainda não demonstrado por ele [16]. O termo $3\sigma_1\sigma_2$, segundo Castro-Núñez, resulta da interação entre a tensão \mathbf{V}_3^F e uma porção de \mathbf{I}_3 . O termo $3\sigma_3\sigma_4$ resulta da interação entre \mathbf{V}_1^F e outra porção de \mathbf{I}_3 . Este termo, $3\sigma_3\sigma_4$, é a maior contribuição do método, pois não pode ser obtido no domínio da frequência já que resulta de uma interação entre sinais de frequências diferentes. O termo $\|\langle \mathbf{M}^F \rangle_4\| = CN_d = 8,0 kVAr$, também resulta de interações entre sinais de frequências diferentes, mais precisamente de \mathbf{V}_3^F e \mathbf{I}_1 .

3.2.8. Considerações finais

Este capítulo versou sobre proposições para o estudo de potências em regime não senoidal. Obviamente, dado a diversidade de situações que este regime de funcionamento cobre, é de se esperar que as preposições escolhidas não estejam descritas na íntegra. Tampouco foi possível citar todas as contribuições que vem se somando ao longo dos anos para este tema.

Logo, apresentou-se apenas uma breve revisão dos mais influentes autores e, conseqüentemente, as preposições mais representativas.

A comparação entre as propostas, mesmo que simplificada, mostra aspectos de cada uma das contribuições e, dentre as teorias apresentadas, com exceção a de Castro-Núñez, todas fazem uso do domínio do tempo ou da frequência.

Percebe-se ainda divergência entre os valores em função do método empregado, principalmente no que diz respeito a potência reativa e sua magnitude.

A teoria do domínio geométrico de Castro-Núñez faz uso de uma ferramenta relativamente nova na engenharia elétrica, a álgebra de Clifford. No entanto, superado o desconforto inicial que a álgebra de Clifford traz, o método se faz promissor, sendo suas melhores características o rigor matemático (inerente à álgebra) e a capacidade de lidar com interações entre harmônicos de diferentes ordens de forma natural e bem definida.

Capítulo 4

Potência ativa e fatura de energia elétrica em regime não senoidal

4.1. Introdução

Nos capítulos anteriores discutiu-se a teoria clássica de potência em regime senoidal e as principais teorias para o regime não senoidal. Entretanto, em todos os casos a definição de potência ativa é amplamente aceita pela comunidade de engenheiros eletricitas.

A potência ativa oriunda de sinais distorcidos de tensão e corrente possui, além da componente fundamental, componentes harmônicos. Em decorrência deste fato, o valor da potência ativa pode apresentar um resultado maior ou menor, se comparado com os valores da frequência fundamental, em função da origem da distorção harmônica. Logo, essa diferença nos resultados, com e sem distorção, levará a faturas de energia elétrica e demanda maiores ou menores e consequentemente, maiores custos para o consumidor ou prejuízos para a concessionária. Além do problema financeiro gerado, haverá sempre uma das partes lidando com os efeitos nocivos das harmônicas gerada pela outra.

Desta forma, este capítulo traz algumas considerações sobre o faturamento em regime não senoidal.

4.2. Cálculo da potência ativa

Conforme discutido anteriormente, a decomposição da potência instantânea no regime não senoidal é um assunto controverso. Não obstante, o cálculo da potência ativa é

sempre o mesmo em todas as proposições e é definido como sendo o valor médio da potência instantânea.

Colocando-se na forma de equações, conforme a norma IEEE 1459 [10], tem-se

$$v(t) = V_0 + \sqrt{2} \cdot \sum_{h \in \mathbb{N}^+} V_h \cdot \text{sen}(h \cdot 2\pi f t - \alpha_h) \quad (4.1)$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2} \cdot \sum_{h \in \mathbb{N}^+} I_h \cdot \text{sen}(h \cdot 2\pi f t - \beta_h) \quad (4.2)$$

Onde \mathbb{N}^+ é o conjunto de números inteiros positivos, h é a ordem harmônica, f é a frequência fundamental do sistema, V_0 e I_0 são os valores das componentes contínuas, V_h e I_h são os valores RMS de tensão e corrente, respectivamente. O deslocamento angular de tensão e corrente são representados respectivamente por α_h e β_h , e t é o tempo. Assim a potência instantânea é dada por

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (4.3)$$

A Figura 4.1 mostra exemplos de formas de onda da potência instantânea sob regime senoidal e não senoidal.

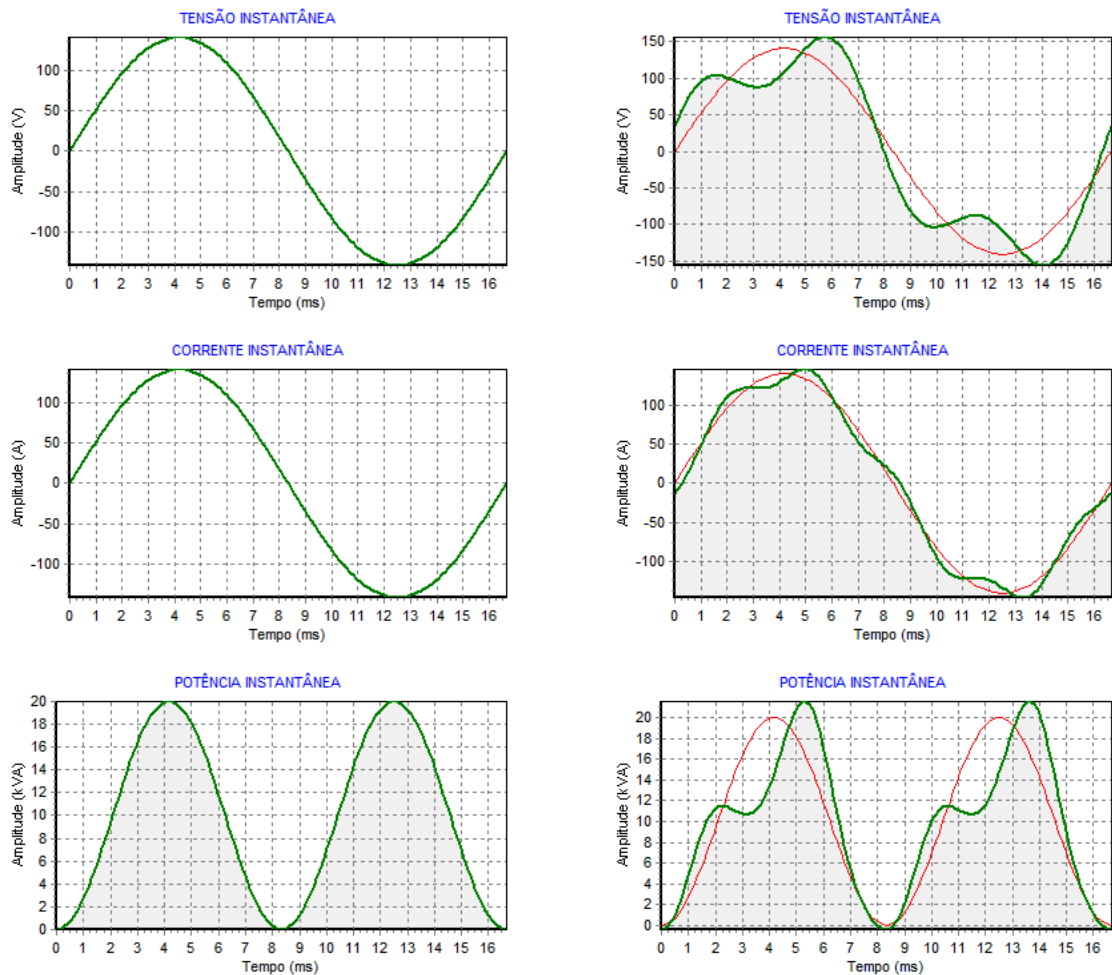
Logo, da definição de potência ativa tem-se:

$$P = \frac{1}{kT} \int_{\tau}^{\tau+kT} p(t) dt = P_1 + P_h \quad (4.4)$$

$$P_1 = V_1 I_1 \cos \theta_1 \quad (4.5)$$

$$P_h = V_0 I_0 + \sum_{h \neq 1} V_h I_h \cos \theta_h = P - P_1 \quad (4.6)$$

Onde, nas equações (4.4), (4.5) e (4.6), k é um inteiro positivo, T é o período da onda de potência instantânea e τ é o tempo inicial de medida. P_1 é a potência ativa fundamental e P_h é a potência ativa harmônica.



(a) (b)
 Figura 4.1 – Potência instantânea (a) sinais senoidais; (b) sinais com distorções harmônicas

4.3. Regulamentação e medidas

Os medidores de energia elétrica existentes são basicamente divididos em dois grupos: os eletromecânicos, que trabalham segundo o princípio de indução eletromagnética, e os eletrônicos, que utilizam circuitos integrados. A Figura 4.2 ilustra as tecnologias mencionadas.

As duas categorias são projetadas para trabalhar em condições puramente senoidais, uma vez que as normas e regulamentações [30] [31] não incluem a forma de tratamento quando em regime não senoidal. Assim, na presença de harmônicas, os resultados das medidas dependem do projeto específico de cada medidor [32].



Figura 4.2 – Medidores de energia típicos (a) eletromecânico (b) eletrônico

As referências [33], [34], [35], [36] e [37] mostram que os dois tipos de instrumentos são afetados por distorções de tensão e corrente. Consequentemente, os valores indicados por medidores dependem exclusivamente da técnica empregada pelos respectivos fabricantes. Essas técnicas são válidas para circuitos senoidais, mas não para circuitos não senoidais [38].

Assim, medidores elétricos usados para faturamento de energia elétrica podem apresentar discrepâncias nos valores de potência ativa. Em suma, alguns medidores fazem a medição de potência ativa apenas com os valores fundamentais de tensão e corrente, enquanto outros calculam o valor médio da potência instantânea considerando possíveis distorções na forma de onda de tensão e corrente.

Neste contexto, é importante a adoção de uma metodologia adequada para o faturamento do consumidor e medição na presença de harmônicos e assim, definir as especificações técnicas que os medidores devem seguir quando utilizados com formas de onda não senoidais para evitar problemas de relacionamento entre as concessionárias e os consumidores.

4.4. **Análise da Potência Ativa Faturada**

O faturamento da energia elétrica leva em conta a potência ativa medida que flui através do ponto de entrega (ou Ponto de Acoplamento Comum – PAC).

Assim sendo, nesta seção, apresenta-se uma análise algébrica de duas situações distintas: na primeira, a concessionária fornece ao consumidor uma tensão poluída e no segundo, o consumidor polui a rede da concessionária. Os resultados são apresentados na sequência.

4.4.1. Caso 01

Neste caso, o consumidor consiste apenas de cargas lineares e todo o conteúdo harmônico no ponto de entrega é de responsabilidade da concessionária conforme mostra a Figura 4.3.

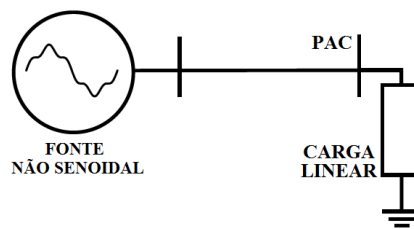


Figura 4.3 - Fonte não senoidal alimentando carga linear

Para uma melhor compreensão, a Figura 4.4 ilustra a potência ativa no sistema e mostra que a energia flui apenas da concessionária para o consumidor.

A fonte de tensão distorcida foi representada por um circuito equivalente de Norton. Assim, a concessionária é modelada por uma fonte de corrente harmônica (I_h) paralela à impedância equivalente. É importante observar que tanto a impedância equivalente da concessionária, quanto a do consumidor foram representadas por uma resistência (R_s e R_c , respectivamente). Esta escolha foi baseada na análise de potência ativa, objeto deste capítulo.

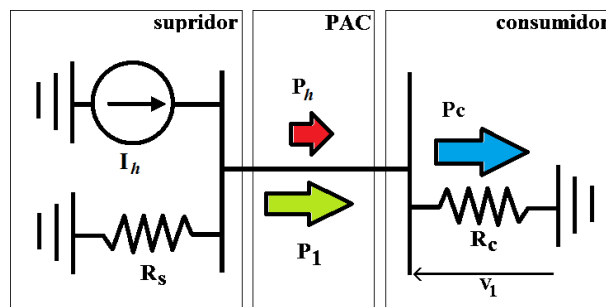


Figura 4.4 - Fluxo de Potência Ativa

No ponto de entrega, a potência ativa consiste da potência ativa fundamental (P_1) e da potência ativa harmônica (P_h). A resistência equivalente do consumidor é determinada pelas condições de operação projetadas/esperadas, em outras palavras, apenas pelas partes fundamentais, assim

$$R_C = \frac{V_1^2}{P_1} \quad (4.7)$$

A potência ativa absorvida pelo consumidor (P_C) é expressa por:

$$P_C = R_C \cdot I_{rms}^2 = R_C \cdot \left(\frac{V_{rms}}{R_C} \right)^2 \therefore P_C = \frac{V_{rms}^2}{R_C} \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) em (4.8):

$$P_C = \frac{V_{rms}^2}{\left(\frac{V_1^2}{P_1} \right)} \Rightarrow P_C = P_1 \left(\frac{V_{rms}}{V_1} \right)^2 \quad (4.9)$$

Da equação (4.9) pode-se concluir que, mesmo o consumidor não possuindo qualquer carga não linear, uma potência ativa maior do que a fundamental será observada. Portanto, nos casos em que as distorções harmônicas são de responsabilidade da concessionária, o consumidor é prejudicado pela circulação de corrente harmônica através do seu sistema elétrico (resultando em maiores perdas joulicas). Além disso, a demanda e a medida de energia ativa registrada para fins de faturamento podem ter maiores valores do que nas condições senoidais em função do tipo de medidor usado pelo consumidor.

4.4.2. Caso 02

O segundo caso a ser analisado, estuda uma situação em que o consumidor tem cargas não lineares e a concessionária fornece uma tensão senoidal pura. Desta forma, o consumidor é responsável por todo o conteúdo harmônico no ponto de entrega. A Figura 4.5 ilustra o caso.

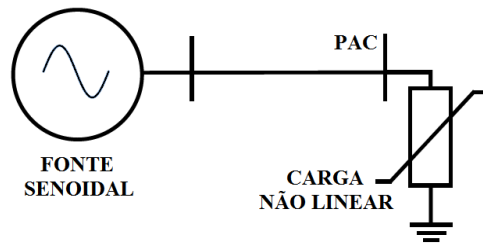


Figura 4.5 - Fonte senoidal com carga não linear

O fluxo de potência do sistema apresentado na Figura 4.6, mostra que a potência ativa no PAC consiste da componente fundamental e de uma parcela harmônica.

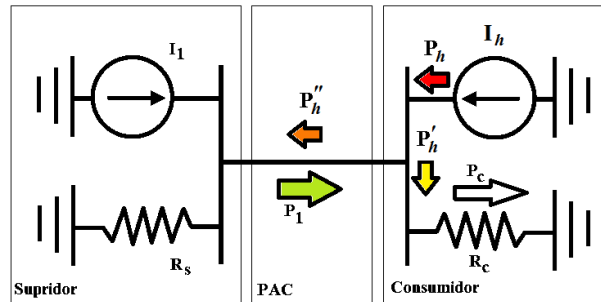


Figura 4.6 - Fluxo de potência ativa fundamental e harmônica

Nestas condições (consumidor não linear), a fonte de correntes harmônicas é oriunda do consumidor. Estas correntes, ao interagir com a resistência da impedância da concessionária, resultarão em potências ativas harmônicas negativas (P_h''), isto é, de sentido oposto ao da potência ativa fundamental (P_1).

Assim, a potência medida no PAC, é dada pela equação:

$$P_{pac} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = P_1 - P_h'' \quad (4.10)$$

Note que, como P_h'' tem sentido oposto à P_1 , é representado com sinal negativo na equação (4.10). Logo tem-se que:

$$P_{pac} = P_1 - P_h'' \therefore P_{pac} < P_1 \quad (4.11)$$

A consequência da equação (4.11) é uma redução no valor medido da potência ativa.

Assim, no contexto apresentado, a concessionária será prejudicada, pois além de ter seu sistema poluído com a presença de harmônicos, as cargas não lineares do consumidor contribuem para uma redução na fatura de energia elétrica.

4.5. Análise Computacional

Afim de verificar o comportamento apresentado acima, esta seção traz simulações computacionais que foram preparadas de modo a ilustrar o impacto do fluxo de potência harmônica no montante medido de potência ativa no ponto de entrega.

Para tal, o ATP (*Alternative Transient Program*) foi escolhido como a plataforma para este estudo por ser um programa já estabelecido na comunidade acadêmica, livre e versátil. Nesta ferramenta, um arranjo elétrico hipotético foi modelado e parametrizado e consiste, essencialmente, de uma rede de alimentação definida por sua impedância de curto-circuito, um consumidor caracterizado por uma carga equivalente com partes resistiva, capacitiva e indutiva mais uma carga não-linear atuando como uma fonte harmônica. A Figura 4.7 mostra a disposição e os parâmetros correspondentes do modelo empregado.

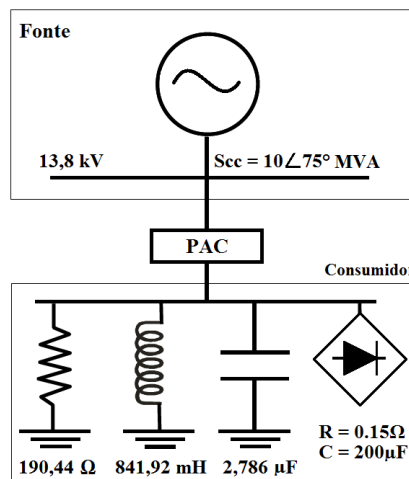


Figura 4.7 – Parâmetros elétricos do sistema modelado

Os casos analisados e os parâmetros da fonte harmônica estão apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Casos avaliados – Parâmetros

Caso	Responsável	I_s [A]	I_7 [A]	V_5 [%]	V_7 [%]
1	-	-	-	-	-
2	Consumidor	4,422	1,997	-	-
3	Consumidor	6,314	2,786	-	-
4	Concessionária	-	-	3,973%	2,957%
5	Concessionária	-	-	8,106%	6,027%

O caso 1 possui apenas uma carga RLC e é utilizado para fins de comparação e controle.

Já nos casos 2 e 3 foram adicionados uma carga não-linear à carga RLC anterior, ambos supridos com fonte senoidal.

Para os casos 4 e 5 apenas a carga RLC é suprida com uma tensão distorcida.

Os resultados das simulações são apresentados pelas figuras que seguem e estão resumidos na Tabela 4.2 e Tabela 4.3.

Tabela 4.2 – Tensões, correntes e distorções totais no PAC

Caso	$V_1[V]$	$V_{rms}[kV]$	$THD_V\%$	$I_1[A]$	$I_{rms}[A]$	$THD_I\%$
1	7967,330	7967,330	0,000%	45,060	45,060	0,000%
2	7958,700	8037,000	14,086%	87,364	88,049	12,549%
3	7961,000	8125,300	20,479%	128,730	129,710	12,374%
4	7946,000	7954,600	4,737%	44,947	45,043	6,536%
5	7946,000	7985,200	10,034%	44,947	45,358	13,557%

Tabela 4.3 – Fator de potência e potências ativa

Caso	FP_1	FP	$P_1[kW]$	$P[kW]$	$P_c[kW]$
1	0,928	0,928	333,400	333,390	333,391
2	0,960	0,943	667,860	667,240	681,066
3	0,968	0,940	991,620	990,350	1032,973
4	0,929	0,928	331,600	332,350	332,318
5	0,929	0,925	331,610	334,920	334,890

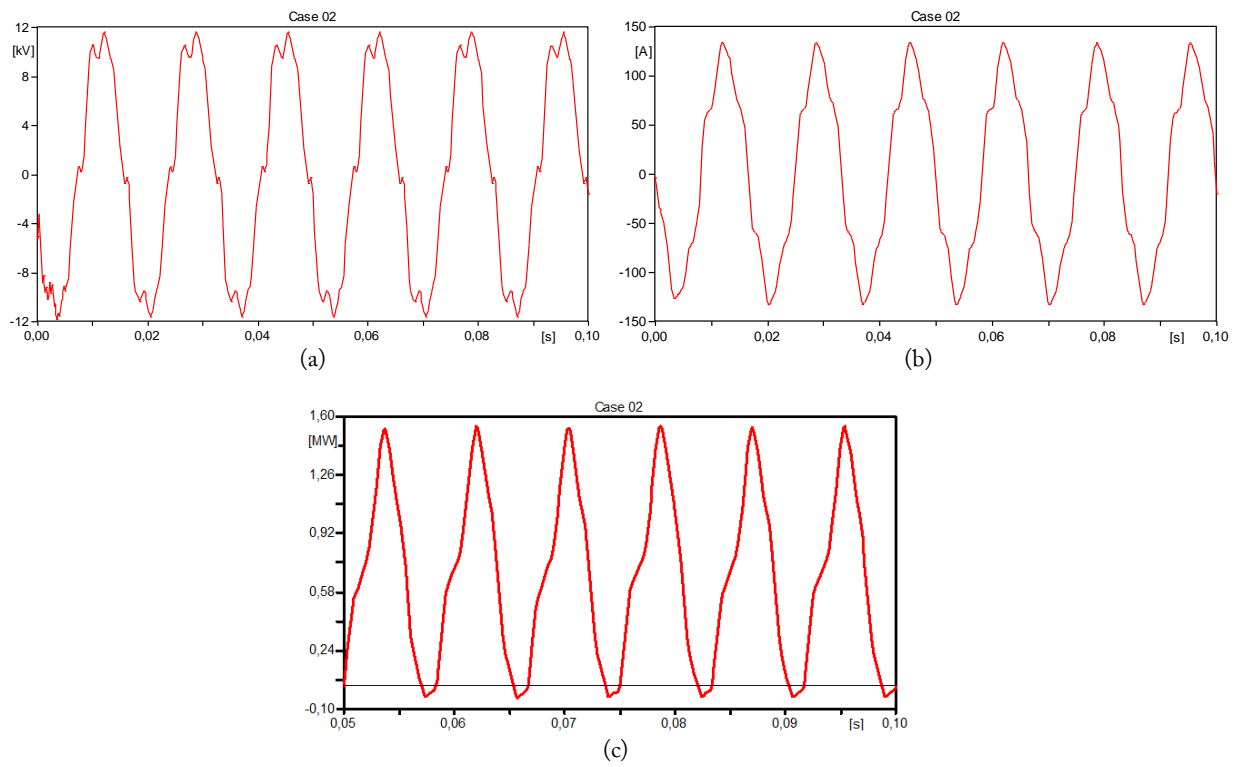


Figura 4.8 – Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 2.

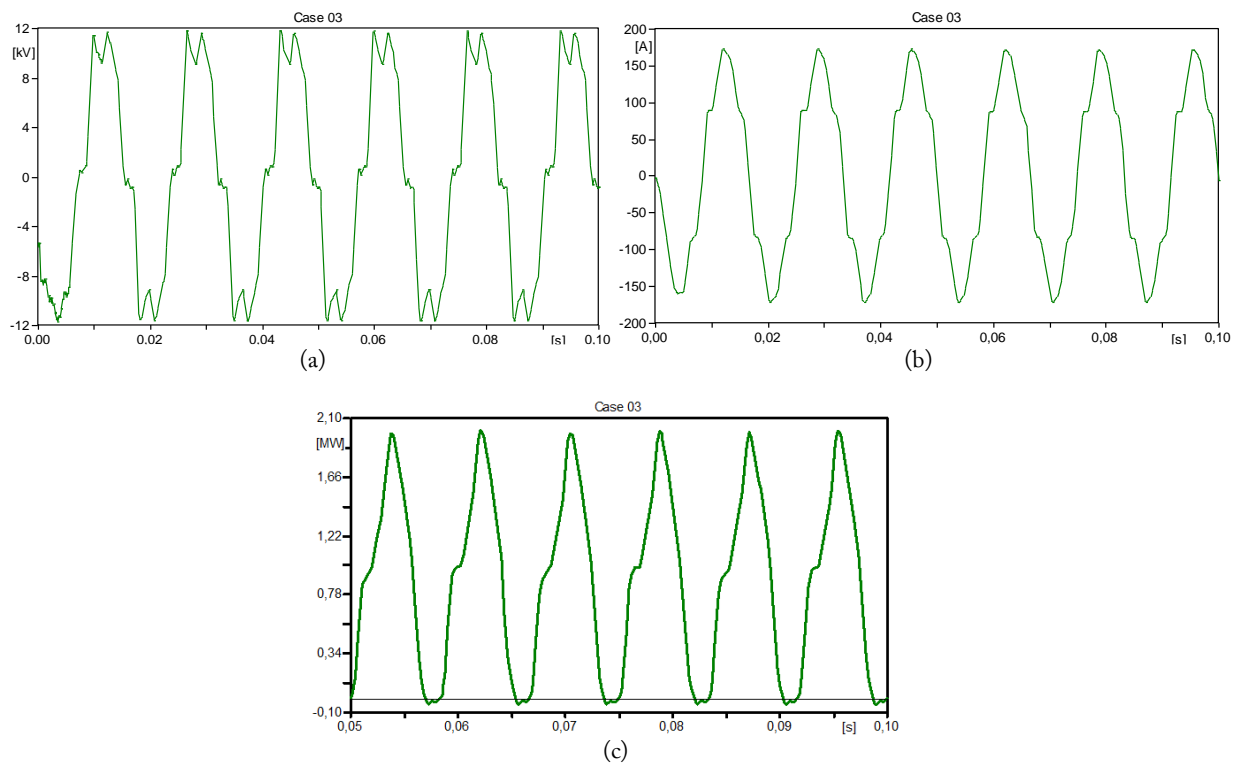


Figura 4.9 - Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 3.

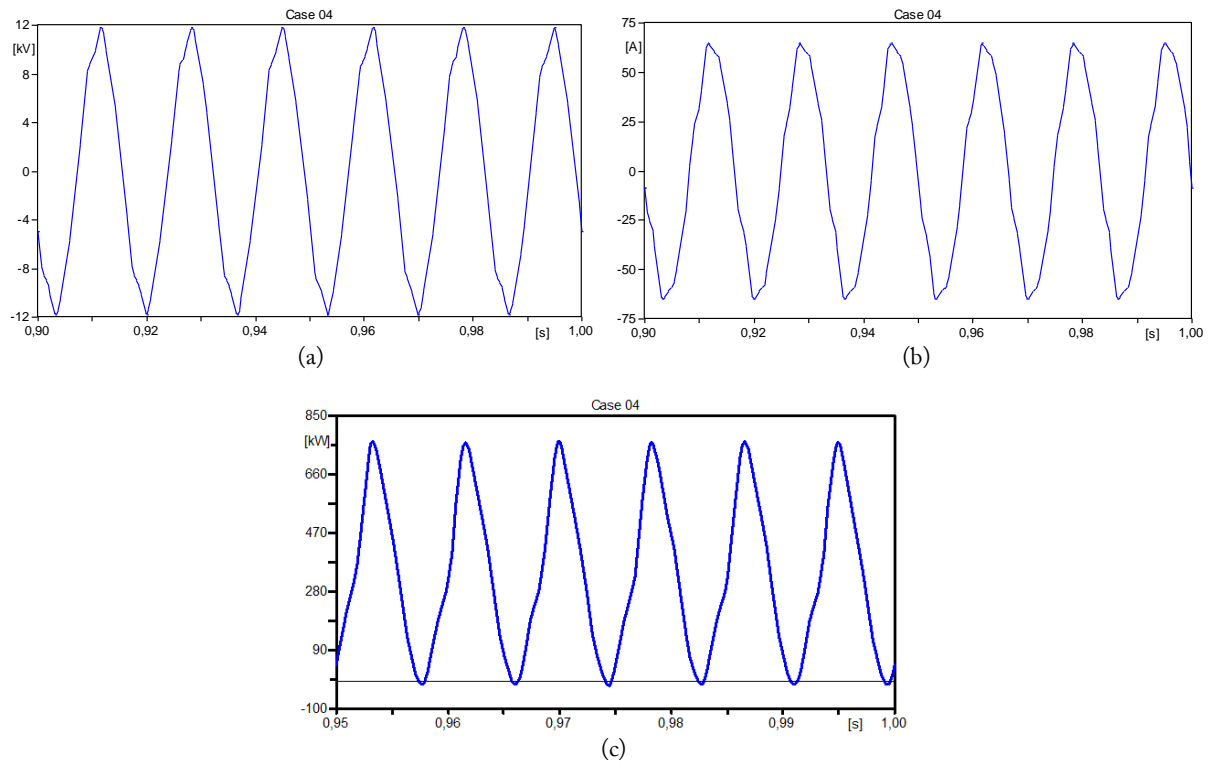


Figura 4.10 - Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 4.

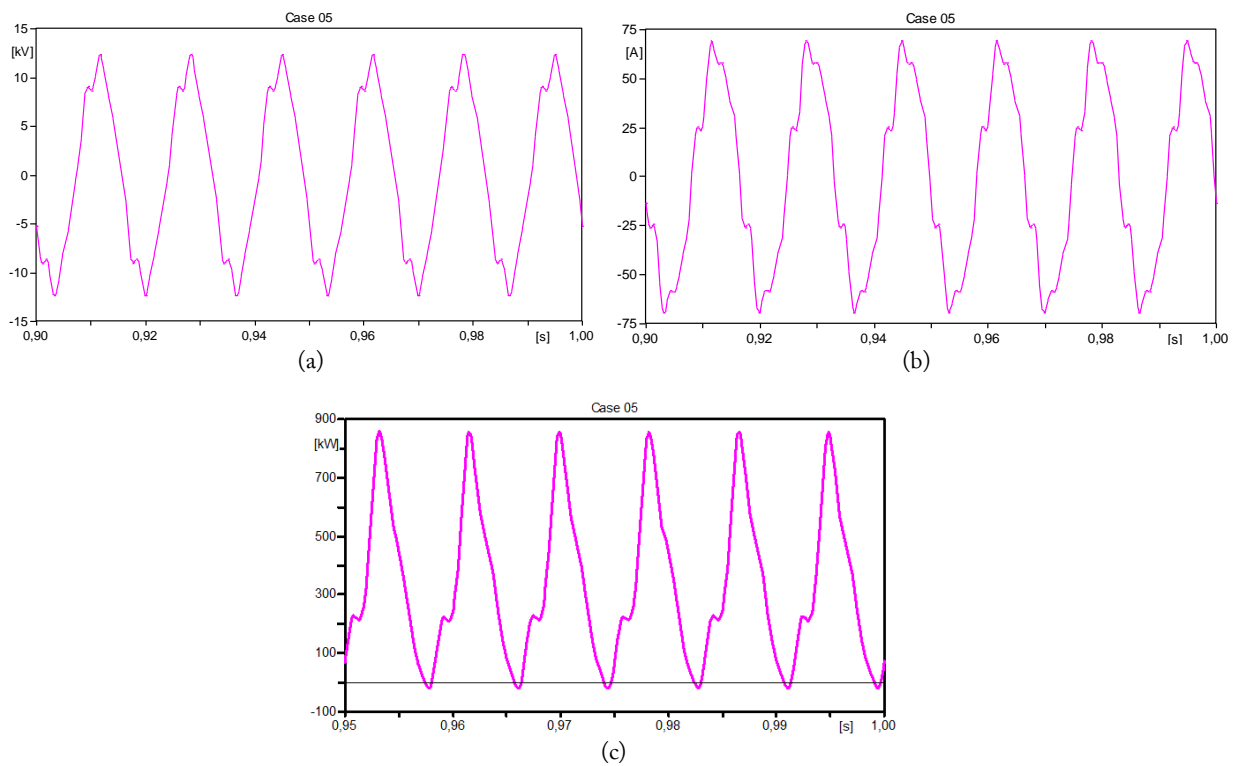


Figura 4.11 - Formas de ondas de (a) tensão, (b) corrente e (c) potência do caso 5

Dos resultados apresentados, quando a concessionária é responsável pelas distorções harmônicas no PAC, como nos casos 4 e 5, a potência ativa fundamental (P_1) seria a mais justa para fins de faturamento. Isto se deve ao fato de que a potência ativa total (P) ter um valor mais elevado devido ao acréscimo da potência ativa harmônica (P_h). Potência esta, indesejada pelo consumidor e de responsabilidade da concessionária.

Para os casos 2 e 3, nos quais o consumidor é o responsável pelas distorções harmônicas, o fluxo de energia harmônica ativa tem uma direção oposta em relação à direção da potência ativa fundamental (P_1), logo, o valor da potência ativa total (P) terá seu valor reduzido. Nestes casos, a medida da potência ativa total (P) no faturamento de energia elétrica prejudica os interesses da concessionária, uma vez que, além do consumidor ser o responsável pelas distorções harmônicas, este ainda tem sua fatura reduzida.

Afim de melhor visualizar os dados, a diferença percentual entre as potências ativas (P_1 e P_c) são apresentadas na Tabela 4.4. A potência ativa total (P), dada pelo valor médio da forma de onda da potência instantânea foi adotada como referência.

Tabela 4.4 – Diferença percentual

Caso	P[kW]	$\Delta P_1 = \frac{P_1}{P} - 1$	$\Delta P_2 = \frac{P_c}{P} - 1$
1	333,390	0,003%	0,000%
2	667,240	0,093%	2,072%
3	990,350	0,128%	4,304%
4	332,350	-0,226%	-0,010%
5	334,920	-0,988%	-0,009%

4.6. Considerações finais

Embora não haja controvérsias na forma de como calcular a potência ativa em regime não senoidal, observa-se que o valor da potência ativa total (P) é influenciado pela distorção harmônica no PAC. Desta forma, para fins de faturamento, cobrar o consumo de energia elétrica usando a potência ativa fundamental (P_1), mostra-se como a melhor alternativa

em condições não senoidais pois evita que haja prejuízos tanto para concessionária, quanto para o consumidor.

Ressalta-se que os resultados e análises deste capítulo não levam em conta a situação em que ambos, concessionária e consumidor, são responsáveis por distorções de tensão no PAC. Esta é uma situação complexa e envolve a partilha de responsabilidades sobre o conteúdo harmônico, tema controverso ainda em fase de estudo [39] e portanto, não será objeto deste trabalho.

Capítulo 5

Potência reativa

5.1. Introdução

Conforme abordado no Capítulo 2, a técnica de Steinmetz apresenta algumas limitações em regime não senoidal, sendo a principal delas, a inoperabilidade entre os resultados de diferentes frequências no domínio da frequência.

Em virtude destas, neste capítulo buscou-se o uso do domínio do tempo para compor um modelo algébrico dos elementos reativos básicos de circuitos elétricos e, consequentemente, obter maiores subsídios para o cálculo da potência reativa.

O critério físico que guiará este estudo para precisar a potência reativa será dado por aquilo que se passa no interior de uma carga reativa. Esta carga recebe da rede elétrica uma energia, cujos valores instantâneos são variáveis, mas sempre em um mesmo sentido e tendo um valor médio finito, representando a energia intrínseca armazenada sobre a forma de campos eletromagnéticos ou eletrostáticos [2].

De forma que, dados os sinais de tensão e corrente quaisquer, $v(t) = \sum_h V_{m_h} \cos(h\omega t + \alpha_h)$ e $i(t) = \sum_h I_{m_h} \cos(h\omega t + \alpha_h \pm \psi_h)$, a potência instantânea da carga é dada por $p(t) = v(t)i(t)$ e a energia intrínseca será da forma $w(t) = \int_0^T p(t)dt$ [2].

Assim procedendo, as análises apresentadas neste capítulo concentraram-se no capacitor e no indutor por serem (desprezando suas resistências internas) elementos puramente reativos. Além disso, são elementos abundantes nos sistemas elétricos de potência e lineares,

i.e., não distorcem a forma de onda da corrente (embora apresentem um comportamento não linear de sua impedância em função da frequência⁸, ainda assim são considerados elementos lineares).

5.2. Capacitor.

Tenha por base a figura abaixo.

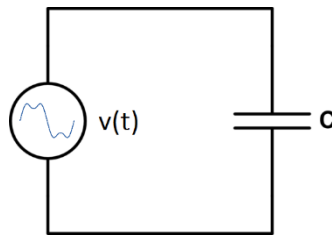


Figura 5.1 - Circuito Capacitivo

Seja uma tensão $v(t)$, que alimenta o capacitor, representada por:

$$v(t) = \sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot \cos(h\omega t) \quad (5.1)$$

Onde N é um conjunto finito de harmônicos de tensão de ordem h e V_m é o valor máximo (ou de pico) da tensão $v(t)$.

A teoria clássica de circuitos elétricos permite calcular a corrente que circula através do capacitor como sendo:

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} \left[\sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot \cos(h\omega t) \right] = \quad (5.2)$$

$$i_C(t) = C \cdot \sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos(h\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (5.3)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (5.2) por $dv(t)/dt$ e calculando o valor médio através da definição, $\bar{V}[f(x)] = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$, tem-se:

⁸ Com o aumento da frequência, o capacitor tem sua impedância reduzida enquanto que o indutor tem a sua aumentada.

$$i_c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = C \left[\frac{dv(t)}{dt} \right]^2 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T C \left[\frac{dv(t)}{dt} \right]^2 dt \quad (5.5)$$

Desenvolvendo separadamente os membros da equação (5.5), obtém-se:

▪ **Primeiro membro**

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T i_c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} dt &= \quad (5.6) \\ \frac{1}{T} \int_0^T i_c(t) \cdot \left[\sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos(h\omega t + \frac{\pi}{2}) \right] dt &= \\ \frac{1}{T} \int_0^T i_c(t) \cdot \left[V_{m_1} \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + V_{m_2} \cdot 2 \cdot \omega \cdot \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + V_{m_N} \cdot N \cdot \omega \cdot \cos(N\omega t + \frac{\pi}{2}) \right] dt = \\ \frac{1}{T} \cdot \sum_{h=1}^N \int_0^T i_c(t) \cdot \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos(h\omega t + \frac{\pi}{2}) \right] dt &= \\ \frac{1}{T} \cdot \omega \cdot \sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot h \cdot \int_0^T i_c(t) \cdot \left[\cos(h\omega t + \frac{\pi}{2}) \right] dt &= \\ \frac{\omega}{T} \cdot \sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot h \cdot \int_0^T i_c(t) \cdot \left[\cos(h\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(h\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] dt &= \\ \frac{\omega}{T} \cdot \sum_{h=1}^N (-V_{m_h}) \cdot h \cdot \int_0^T i_c(t) \cdot \sin(h\omega t) dt &= \quad (5.7) \end{aligned}$$

Para continuar o desenvolvimento da equação (5.7) é necessário definir $i_c(t)$. O capacitor, sendo um elemento linear, terá a forma de onda da corrente, semelhante à tensão nele aplicado com um desfasamento de $\frac{\pi}{2}$. Assim pode-se definir $i_c(t)$ como:

$$i_c(t) = \sum_{h=1}^N I_{m_h} \cdot \cos(h\omega t \pm \varphi_h) \quad (5.8)$$

Onde I_m é o valor de pico de $i_C(t)$ e φ_h é o ângulo de defasagem em relação à tensão de ordem harmônica h .

Assim substituindo (5.8) em (5.7) tem-se:

$$\frac{\omega}{T} \cdot \sum_{h=1}^N (-V_{m_h}) \cdot h \cdot \int_0^T I_{m_h} \cdot \cos(h\omega t \pm \varphi_h) \cdot \text{sen}(h\omega t) dt = \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{T} \cdot \sum_{h=1}^N (-V_{m_h}) \cdot h \cdot I_{m_h} \\ & \cdot \int_0^T \{[\cos(h\omega t) \cos(\varphi_h) \mp \text{sen}(h\omega t) \text{sen}(\varphi_h)] \cdot \text{sen}(h\omega t)\} dt = \\ & \frac{\omega}{T} \sum_{h=1}^N (-V_{m_h}) \cdot h \cdot I_{m_h} \\ & \cdot \left[\int_0^T \cos(h\omega t) \text{sen}(h\omega t) \cos(\varphi_h) dt \mp \int_0^T \text{sen}^2(h\omega t) \text{sen}(\varphi_h) dt \right] = \end{aligned} \quad (5.10)$$

Novamente, para facilitar o desenvolvimento, divide-se a equação (5.10) em duas partes conforme segue.

$$\int_0^T \cos(h\omega t) \text{sen}(h\omega t) \cos(\varphi_h) dt \quad (5.11)$$

$$\int_0^T \text{sen}^2(h\omega t) \text{sen}(\varphi_h) dt \quad (5.12)$$

Assim, resolvendo inicialmente a equação (5.12)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \text{sen}^2(h\omega t) \text{sen}(\varphi_h) dt = \\ & \text{sen}(\varphi_h) \cdot \int_0^T \text{sen}^2(h\omega t) dt = \text{sen}(\varphi_h) \cdot \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos(2h\omega t)] dt = \\ & \frac{\text{sen}(\varphi_h)}{2} \cdot \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2h\omega t) dt \right] = \frac{\text{sen}(\varphi_h)}{2} \cdot T \end{aligned} \quad (5.13)$$

E, por conseguinte, desenvolve-se a equação (5.11) conforme segue:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \cos(h\omega t) \sin(h\omega t) \cos(\varphi_h) dt = \\
& \cos(\varphi_h) \cdot \int_0^T \frac{1}{2} [\sin(2h\omega t)] dt = \\
& \frac{\cos(\varphi_h)}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2h\omega} \cdot \cos(2h\omega t) \right]_0^T = 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Assim, substituindo (5.14) e (5.13) na equação (5.10) têm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{T} \sum_{h=1}^N (-V_{m_h}) \cdot h \cdot I_{m_h} \cdot \left[0 \mp \frac{\sin(\varphi_h)}{2} T \right] &= \frac{\omega}{T} \sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot h \cdot I_{m_h} \cdot \left[\pm \frac{\sin(\varphi_h)}{2} T \right] = \\
\frac{\omega}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot 2 \sum_{h=1}^N V_h \cdot I_h \cdot \sin(\pm \varphi_h) \cdot h &= \omega \cdot \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Assim, chega-se à resolução do primeiro membro da equação (5.5).

Pode-se observar que da resolução da equação (5.10) obtém-se a definição proposta por Budeanu para a potência reativa. Isto é, $\sum_h^N V_h I_h \sin(\pm \varphi_h)$. Segue-se então, para o membro seguinte da equação (5.5).

▪ **Segundo membro**

$$\frac{1}{T} \int_0^T C \left[\frac{dv(t)}{dt} \right]^2 dt = \tag{5.16}$$

$$\frac{C}{T} \cdot \int_0^T \left[\sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos(h\omega t + \frac{\pi}{2}) \right]^2 dt = \tag{5.17}$$

Na equação (5.17) há um quadrado de um somatório. E, para resolvê-lo, tome por base o quadrado de alguns polinômios. Assim seja:

▪ **Quadrado de um binômio**

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2)^2 &= (a_1 + a_2) \cdot (a_1 + a_2) \\
&= a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 \cdot a_2)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

- Quadrado de um trinômio

$$\begin{aligned}
 (a_1 + a_2 + a_3)^2 &= (a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + 2(a_1 + a_2)a_3 \\
 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1 \cdot a_2) + 2(a_1 + a_2)a_3 \\
 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1 \cdot a_2) + 2(a_1 \cdot a_3) + 2(a_2 \cdot a_3) \\
 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

- Quadrado de um quadrinômio

$$\begin{aligned}
 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 &= \\
 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Portanto, por extrapolação do conceito, o quadrado de um polinômio qualquer pode ser expresso como:

$$\left(\sum_i^n a_i \right)^2 = \sum_i^n (a_i)^2 + 2 \sum_{i < j}^n \sum_j^n a_i a_j \tag{5.21}$$

Logo, aplicando o conceito da equação (5.21) na equação (5.18) ter-se-á

$$\begin{aligned}
 \frac{C}{T} \cdot \int_0^T \left\{ \sum_{h=1}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 \right. \\
 + 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 \left. \cdot \left[V_{m_k} \cdot k \cdot \omega \cdot \cos \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} dt =
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{C}{T} \cdot \left\{ \int_0^T \sum_{h=1}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 dt \right. \\
 + \int_0^T 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 \left. \cdot \left[V_{m_k} \cdot k \cdot \omega \cdot \cos \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] dt \right\} =
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Desmontando parte da equação (5.23) em duas para facilitar a resolução têm-se:

$$\int_0^T \sum_{h=1}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 dt \tag{5.24}$$

$$\int_0^T 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot \left[V_{m_k} \cdot k \cdot \omega \cdot \cos \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] dt \quad (5.25)$$

Assim, desenvolvendo a equação (5.24),

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{h=1}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 dt = \\ & \sum_{h=1}^N \int_0^T (V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) dt = \\ & \sum_{h=1}^N (V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2 \cdot \int_0^T \cos^2 \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) dt = \\ & \sum_{h=1}^N (V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2 \cdot \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos(2h\omega t + \pi)] dt = \\ & \sum_{h=1}^N \frac{(V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2}{2} \cdot \int_0^T [1 + \cos(2h\omega t) \cos \pi - \sin(2h\omega t) \sin \pi] dt = \\ & \sum_{h=1}^N \frac{(V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2}{2} \cdot \int_0^T [1 - \cos(2h\omega t)] dt = \\ & \sum_{h=1}^N \frac{(V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2}{2} \cdot \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2h\omega t) dt \right] = \\ & \sum_{h=1}^N \frac{(V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2 \cdot T}{2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Continuando a resolução, prossegue-se com a equação (5.25):

$$\begin{aligned} & \int_0^T 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \left[V_{m_h} \cdot h \cdot \omega \cdot \cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot \left[V_{m_k} \cdot k \cdot \omega \cdot \cos \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] dt = \\ & 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N V_{m_h} \cdot V_{m_k} \cdot h \cdot k \cdot \omega^2 \int_0^T \left[\cos \left(h\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\cos \left(k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N V_{m_h} \cdot V_{m_k} \cdot h \cdot k \cdot \omega^2 \int_0^T \sin(h\omega t) \sin(k\omega t) dt = \\
& 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N V_{m_h} \cdot V_{m_k} \cdot h \cdot k \cdot \omega^2 \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos[(h\omega - k\omega)t] - \cos[(h\omega + k\omega)t] \} dt = \\
& 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N V_{m_h} \cdot V_{m_k} \cdot h \cdot k \cdot \omega^2 \left\{ \frac{\sin[(h\omega - k\omega)t]}{2(h\omega - k\omega)} - \frac{\sin[(h\omega + k\omega)t]}{2(h\omega + k\omega)} \right\} \Big|_0^T = 0 \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo os resultados (5.26) e (5.27) na equação (5.23) tem-se:

$$\frac{C}{T} \cdot \left\{ \left[\sum_{h=1}^N \frac{(V_{m_h})^2 \cdot h^2 \cdot \omega^2 \cdot T}{2} \right] + 0 \right\} = \quad (5.28)$$

$$\frac{C}{T} \cdot T \cdot \omega^2 \cdot \left[\sum_{h=1}^N \frac{(\sqrt{2}V_h)^2 \cdot h^2}{2} \right] = C\omega^2 \sum_{h=1}^N (V_h)^2 \cdot h^2 \quad (5.29)$$

Com o resultado obtido acima encerra-se a resolução do segundo membro da equação (5.5).

Substituindo as equações (5.29) e (5.15) na equação (5.5) têm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_0^T i_c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T C \left[\frac{dv(t)}{dt} \right]^2 dt \Rightarrow \\
& \Rightarrow \omega \cdot \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h = C\omega^2 \sum_{h=1}^N (V_h)^2 \cdot h^2 \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Finalmente, resolvendo-a para C , obtemos:

$$C = \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h \Big/ \omega \sum_{h=1}^N (V_h)^2 \cdot h^2 \quad (5.31)$$

A equação (5.31) mostra a possibilidade de modelar um capacitor conhecendo o espectro harmônico de tensão e corrente. Vale ressaltar que a equação (5.31) é um resultado decorrente de análises no domínio do tempo e portanto, pertence a ele exclusivamente.

Conforme comentado no Capítulo 2, a soma de valores que representam sinais de frequências diferentes no domínio do tempo não está definida no domínio da frequência.

A equação (5.31) ainda pode ser resolvida para obter a potência reativa. Desta forma têm-se que:

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h \Big/ \omega \sum_{h=1}^N (V_h)^2 \cdot h^2 \Rightarrow \\
 \omega C \cdot \sum_{h=1}^N (V_h)^2 \cdot h^2 &= \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h \Rightarrow \\
 \sum_{h=1}^N (V_h)^2 \cdot h \cdot h \cdot \omega \cdot C &= \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h \Rightarrow \\
 \sum_{h=1}^N (V_h)^2 \cdot h \cdot \frac{1}{X_{c_h}} &= \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h \Rightarrow \\
 \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{X_{c_h}} \cdot h &= \sum_{h=1}^N Q_h \cdot h \therefore \\
 \sum_{h=1}^N Q_h &= \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{X_{c_h}} \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

Considerando que potência reativa é a potência decorrente da aplicação de uma tensão a um elemento puramente reativo, como o capacitor da análise acima, a equação (5.32) mostra que a potência decorrente de um capacitor alimentado com uma tensão distorcida resulta no somatório das potências reativas de cada ordem harmônica, assim como definido pela teoria de Budeanu.

Desta forma, sabendo que o capacitor é um elemento puramente reativo (que adianta a corrente da tensão), a equação demonstra que a potência total deste componente está relacionada com a análise clássica de potências e de acordo com as proposições de Budeanu, ora,

portanto não há razões para não denominar $\sum_h^N V_h I_h \text{sen}(\pm\varphi_h)$ de potência reativa, neste caso, potência reativa capacitiva.

5.3. Indutor.

De forma semelhante à seção anterior, usa-se como referência a figura abaixo.

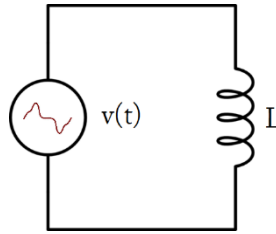


Figura 5.2 - Circuito indutivo alimentado por sinal distorcido

Dada uma tensão $v(t)$ que alimenta o indutor conforme segue

$$v(t) = \sum_{h=1}^N V_{m_h} \cdot \cos(h\omega t) = \sqrt{2} \sum_{h=1}^N V_h \cdot \cos(h\omega t) \quad (5.33)$$

Onde N é um conjunto finito de harmônicos de tensão de ordem h , V_m é o valor de pico da tensão $v(t)$ e V é seu valor eficaz..

A teoria clássica de circuitos elétricos nos permite calcular a corrente que circula através do indutor como sendo:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt = \frac{1}{L} \int \left[\sqrt{2} \sum_{h=1}^N V_h \cdot \cos(h\omega t) \right] dt = \quad (5.34)$$

$$i_L(t) = \frac{\sqrt{2}}{L} \cdot \sum_{h=1}^N V_h \cdot \frac{\text{sen}(h\omega t)}{h \cdot \omega} \quad (5.35)$$

Para simplificar o desenvolvimento, define-se a integral da tensão no tempo de $y(t)$, ou seja,

$$\int v(t) dt = y(t) \quad (5.36)$$

Assim pode-se reescrever a equação da corrente no indutor como:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot y(t) \quad (5.37)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (5.37) por $y(t)$ e calculando o valor médio através da definição, $\bar{V}[f(x)] = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$, tem-se

$$i_L(t) \cdot y(t) = \frac{1}{L} \cdot [y(t)]^2 \quad (5.38)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_L(t) y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{L} [y(t)]^2 dt \quad (5.39)$$

De forma semelhante ao desenvolvido na seção anterior, os membros da equação (5.39) serão desenvolvidos separadamente.

▪ **Primeiro membro**

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_L(t) y(t) dt = \quad (5.40)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_L(t) \cdot \left[\sqrt{2} \sum_{h=1}^N V_h \cdot \cos(h\omega t) \right] dt = \quad (5.41)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{T} \sum_{h=1}^N \int_0^T \left[V_h \cdot \frac{\sin(h\omega t)}{h\omega} \right] \cdot i_L(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{T} \sum_{h=1}^N \frac{V_h}{h\omega} \cdot \int_0^T \sin(h\omega t) i_L(t) dt \quad (5.42)$$

De forma semelhante ao que foi feito para o capacitor, pode-se definir $i_L(t)$ como:

$$i_L(t) = \sum_{h=1}^N I_{m_h} \cdot \cos(h\omega t \pm \theta_h) = \sqrt{2} \sum_{h=1}^N I_h \cdot \cos(h\omega t \pm \theta_h) \quad (5.43)$$

Onde I_m é o valor de pico de $i_L(t)$, I é seu valor eficaz e θ_h é o ângulo de defasagem em relação à tensão de ordem harmônica h . Logo, substituindo (5.43) em (5.42):

$$\frac{\sqrt{2}}{T} \sum_{h=1}^N \frac{V_h}{h\omega} \cdot \int_0^T [\sin(h\omega t)] [\sqrt{2} \cdot I_h \cdot \cos(h\omega t \pm \theta_h)] dt \quad (5.44)$$

$$\frac{2}{T} \sum_{h=1}^N \frac{V_h \cdot I_h}{h\omega} \cdot \int_0^T [\sin(h\omega t)] [\cos(h\omega t) \cos(\theta_h) \mp \sin(h\omega t) \sin(\theta_h)] dt \quad (5.45)$$

$$\frac{2}{T} \sum_{h=1}^N \frac{V_h \cdot I_h}{h\omega} \cdot \left[\int_0^T \cos(h\omega t) \text{sen}(h\omega t) \cos(\theta_h) dt \mp \int_0^T \text{sen}^2(h\omega t) \text{sen}(\theta_h) dt \right] \quad (5.46)$$

Por simplicidade, separar-se a equação (5.46) nas equações abaixo e são resolvidas de forma idêntica à da seção anterior. Assim tem-se que:

$$\int_0^T \cos(h\omega t) \text{sen}(h\omega t) \cos(\theta_h) dt = 0 \quad (5.47)$$

$$\int_0^T \text{sen}^2(h\omega t) \text{sen}(\theta_h) dt = \frac{\text{sen}(\theta_h)}{2} \cdot T \quad (5.48)$$

Substituindo (5.47) e (5.48) na equação (5.46):

$$\frac{2}{T} \sum_{h=1}^N \frac{V_h \cdot I_h}{h\omega} \cdot \left[0 \mp \frac{\text{sen}(\theta_h)}{2} \cdot T \right] \quad (5.49)$$

$$\frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\omega} \cdot \sum_{h=1}^N \frac{V_h \cdot I_h}{h} \cdot \text{sen}(\mp \theta_h) = \boxed{\frac{1}{\omega} \cdot \sum_{h=1}^N \frac{Q_h}{h}} \quad (5.50)$$

Assim, chega-se a resolução do primeiro membro da equação (5.39), segue-se então, para o membro seguinte.

▪ **Segundo membro**

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{L} [\mathbf{y}(t)]^2 dt \quad (5.51)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{L} \left[\sqrt{2} \sum_{h=1}^N V_h \cdot \cos(h\omega t) \right]^2 dt \quad (5.52)$$

Aplicando a equação (5.21) na equação (5.52), chega-se à

$$\frac{2}{TL} \int_0^T \left\{ \sum_{h=1}^N \left[V_h \frac{\text{sen}(h\omega t)}{h\omega} \right]^2 + 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \left[V_h \frac{\text{sen}(h\omega t)}{h\omega} \right] \left[V_k \frac{\text{sen}(k\omega t)}{k\omega} \right] \right\} dt = \quad (5.53)$$

$$\frac{2}{TL} \left\{ \int_0^T \sum_{h=1}^N \left[V_h \frac{\text{sen}(h\omega t)}{h\omega} \right]^2 dt + \int_0^T 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \left[V_h \frac{\text{sen}(h\omega t)}{h\omega} \right] \left[V_k \frac{\text{sen}(k\omega t)}{k\omega} \right] dt \right\} = \quad (5.54)$$

Desmontando a equação (5.54) em duas para facilitar a resolução tem-se:

$$\int_0^T \sum_{h=1}^N \left[V_h \frac{\text{sen}(h\omega t)}{h\omega} \right]^2 dt = \quad (5.55)$$

$$\sum_{h=1}^N \int_0^T (V_h)^2 \cdot \frac{\text{sen}^2(h\omega t)}{h^2 \omega^2} dt =$$

$$\sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2 \omega^2} \cdot \int_0^T \text{sen}^2(h\omega t) dt =$$

$$\sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2 \omega^2} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos(2h\omega t)] dt =$$

$$\sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{2h^2 \omega^2} \cdot \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2h\omega t) dt \right] =$$

$$\sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{2h^2 \omega^2} \cdot T \quad (5.56)$$

Continuando a resolução, prossegue-se com a outra parte da equação (5.54), ou seja:

$$\int_0^T 2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \left[V_h \frac{\text{sen}(h\omega t)}{h\omega} \right] \left[V_k \frac{\text{sen}(k\omega t)}{k\omega} \right] dt \quad (5.57)$$

$$2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \frac{V_h \cdot V_k}{hk\omega^2} \cdot \int_0^T \text{sen}(h\omega t) \text{sen}(k\omega t) dt =$$

$$2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \frac{V_h \cdot V_k}{hk\omega^2} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos[(h\omega - k\omega)t] - \cos[(h\omega + k\omega)t] \} dt =$$

$$2 \sum_{h=1}^N \sum_{k=2}^N \frac{V_h \cdot V_k}{hk\omega^2} \cdot \left\{ \frac{\text{sen}[(h\omega - k\omega)t]}{2(h\omega - k\omega)} - \frac{\text{sen}[(h\omega + k\omega)t]}{2(h\omega + k\omega)} \right\} \Bigg|_0^T = 0 \quad (5.58)$$

Portanto, substituindo os resultados (5.56) e (5.58) na equação (5.54) temos:

$$\frac{2}{TL} \left\{ \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{2h^2\omega^2} \cdot T + 0 \right\} = \quad (5.59)$$

$$\frac{2}{2TL\omega^2} \cdot T \cdot \left[\sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2} \right] = \boxed{\frac{1}{L\omega^2} \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2}} \quad (5.60)$$

Com o resultado obtido acima encerramos a resolução do segundo membro da equação (5.39).

Finalmente, substituindo as equações (5.60) e (5.50) na equação (5.39),

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T i_L(t) \mathbf{y}(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{L} [\mathbf{y}(t)]^2 dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\omega} \cdot \sum_{h=1}^N \frac{Q_h}{h} &= \frac{1}{L\omega^2} \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2} \end{aligned} \quad (5.61)$$

E resolvendo-a para L , chega-se à

$$L = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2} \bigg/ \omega \sum_{h=1}^N \frac{Q_h}{h} \quad (5.62)$$

De forma similar à equação (5.31), a equação (5.62) dá a possibilidade de modelar um indutor conhecendo o espectro harmônico de tensão e corrente.

Pode-se ainda desenvolver a equação (5.62) como segue

$$\omega L \sum_{h=1}^N \frac{Q_h}{h} = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2} \quad (5.63)$$

$$\sum_{h=1}^N \frac{Q_h}{h} = \frac{1}{\omega L} \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h^2}$$

$$\sum_{h=1}^N \frac{Q_h}{h} = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h} \frac{1}{h\omega L}$$

$$\sum_{h=1}^N Q_h \cdot \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{X_{L_h}} \cdot \frac{1}{h}$$

$$\sum_{h=1}^N Q_h = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{X_{L_h}} \quad (5.64)$$

Pode-se observar que a equação (5.64) é equivalente a equação (5.32) e, fazendo uso das mesmas considerações da seção anterior, a equação (5.64) mostra que a potência decorrente de um indutor suprido por uma tensão não senoidal resulta no somatório das potências reativas de cada ordem harmônica, tal qual definido pela teoria de Budeanu.

Assim, nota-se que a potência total deste componente também está relacionada com a análise clássica de potências e de acordo com as proposições de Budeanu, tal qual a do capacitor.

5.4. Compensação de reativos

Uma vez obtidos os equacionamentos para o cálculo da potência do capacitor e do indutor, pode-se realizar a compensação de reativos igualando-se uma à outra. Valendo-se então das equações (5.32) e (5.64) ter-se-á:

$$LC = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{h} \bigg/ (\omega_1)^2 \sum_{h=1}^N h(V_h)^2 \quad (5.65)$$

Onde pode-se isolar a variável de interesse (L ou C) dependendo do caso. Assim, para exemplificar o uso da equação (5.65), considere o sistema da figura abaixo:

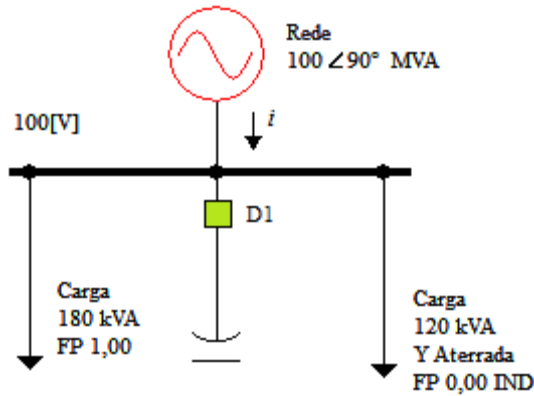


Figura 5.3 - Sistema elétrico exemplo.

Deseja-se compensar a carga reativa de 120kVA através de um banco de capacitores.

A Tabela 5.1 apresenta os valores de potência, corrente e tensão para dois casos. O primeiro sem o capacitor e o segundo, com o capacitor conectado ao sistema.

Tabela 5.1 – Resultados da compensação de reativos

Quantidade	Unidade	Caso 1	Caso 2
V_1	[V]	100,000	100,000
V_5	[V]	20,000	20,000
V_7	[V]	14,286	14,286
V_{rms}	[V]	102,98	102,98
I_1	[A]	1249,00	1053,00
I_5	[A]	209,69	535,80
I_7	[A]	149,13	528,69
I_{rms}	[A]	1275,23	1294,58
L	[mH]	663,146	663,146
C	[μF]	-	7,988
S	[kVA]	227,45	230,90
P	[kW]	190,87	190,87
Q_B	[kVAr]	121,31	0,00
D_B	[kVAd]	24,18	129,93
FP	-	0,839	0,827

Conforme apontado por Czarnecki em [19], no exemplo acima pode-se notar que mesmo tendo-se compensado por completo a potência reativa de Budeanu, não houve melhorias no fator de potência do sistema. Isso acontece porque a potência reativa de Budeanu, Q_B , não afeta somente a potência aparente, S , da fonte. Afeta também, a potência de distorção de Budeanu D_B , pois qualquer alteração em Q_B implica em alterações na potência de distorção D_B .

5.5. Análise laboratorial

5.5.1. Objetivo

Com o objetivo de validar os modelos matemáticos apresentados anteriormente, esta seção detalha o arranjo físico, montado em laboratório, para ensaios sob condições controladas.

A montagem visa representar um sistema elétrico convencional, constituído na sua grande maioria por elementos R, L e C. Além disso, um retificador monofásico de onda completa foi utilizado como carga não linear para amplificar a distorção no barramento. Neste sistema, analisar-se-á a potência reativa sobre os componentes L e C.

A Figura 5.4 apresenta o esquema elétrico do sistema experimental.

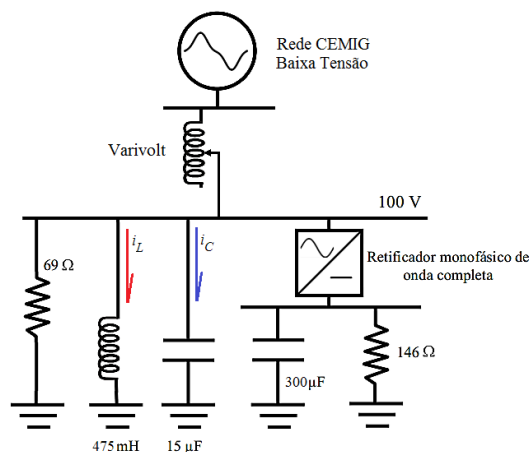


Figura 5.4 – Arranjo experimental. Diagrama.

5.5.2. Equipamentos

Para o ensaio foi utilizado um medidor marca RMS, modelo MARH-21, além de elementos básicos como células capacitivas, resistores e indutores para representar uma carga linear. Como carga não linear, empregou-se um retificador monofásico de onda completa. Ademais, a variação de tensão foi realizada através de um varivolt.

5.5.3. Montagem

Para a montagem do experimento, a tensão aplicada ao sistema foi retirada da rede de distribuição da CEMIG, controlada manualmente, de zero a 220 V, através de um varivolt. O valor eficaz da tensão foi de aproximadamente 100 V devido as restrições de potência dos componentes empregados. A Figura 5.5, exibe o arranjo físico montado no laboratório.



Figura 5.5 – Montagem realizada no laboratório

A Figura 5.6 traz, de forma gráfica, o espectro harmônico da tensão de alimentação e das correntes nos componentes R, L e C obtidos do ensaio.

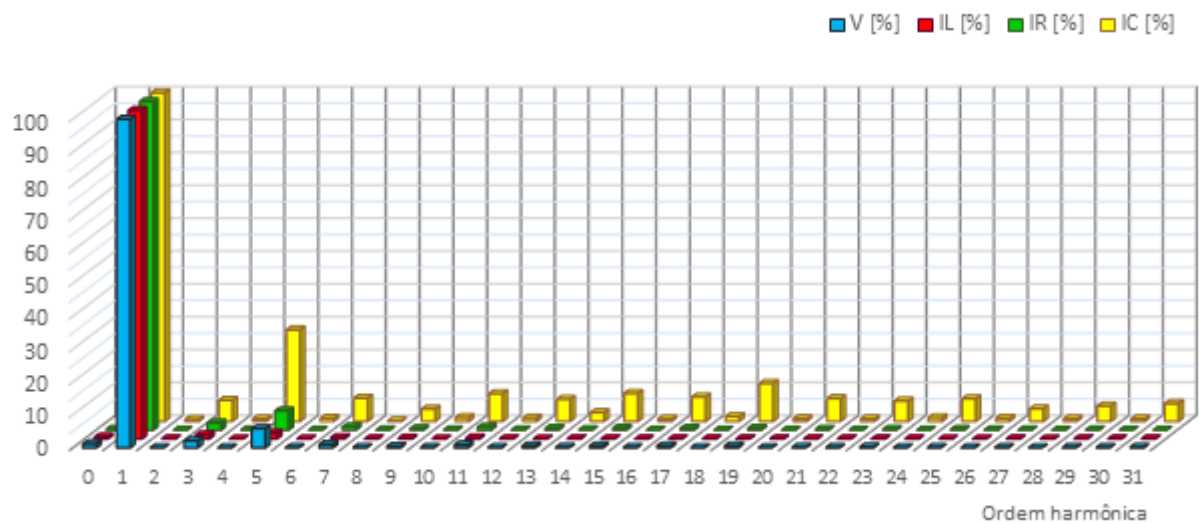


Figura 5.6 – Espectro harmônico da carga RLC.

5.5.4. Resultados

Ao aplicar as equações (5.31); (5.32); (5.62) e (5.64) aos dados obtidos, chega-se aos seguintes resultados:

Tabela 5.2 – Resultados obtidos do ensaio

	Valor Medido	Valor Calculado	Erro percentual	$Q = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{X_h}$	$Q = \sum_{h=1}^N V_h I_h \text{sen}(\pm \varphi_h)$
L	445,00 mH	447,8517 mH	0,64%	61,6843 VAr	61,7053 VAr
C	15,58 μF	15,6376 μF	0,37%	62,7747 VAr	63,6588 VAr

Da tabela acima, observa-se que as equações (5.31) e (5.62) fornecem um método de modelagem dos elementos L e C satisfatório, cujo erro percentual em relação ao valor nominal foi de 0,64% e 0,37%, respectivamente. Comprova-se ainda as igualdades apresentadas pelas equações (5.32) e (5.64) onde as pequenas divergências no valores são atribuídas à aproximações numéricas e erros intrínsecos do equipamento de medição.

5.6. Análise computacional

Buscou-se ainda, simular o arranjo laboratorial apresentado na Figura 5.4 para validar os resultados obtidos. Para tal, empregou-se o software ATP que, conforme mencionado na capítulo 4, é um programa já estabelecido na comunidade acadêmica, livre e versátil.

Assim, a figura que segue apresenta o modelo no ATP, com os respectivos valores dos componentes.

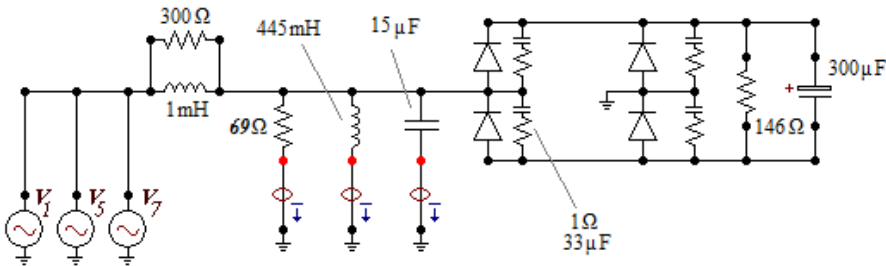


Figura 5.7 – Simulação: Modelo no ATPDraw.

Na sequência são apresentados o espectro da tensão da fonte e da tensão na carga R, L e C, respectivamente.

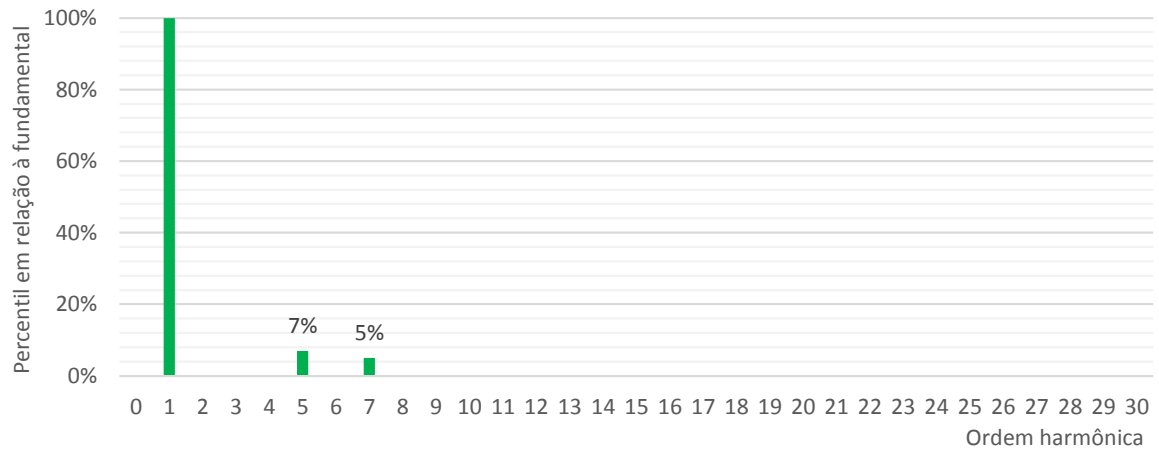


Figura 5.8 - Espectro de tensão da fonte

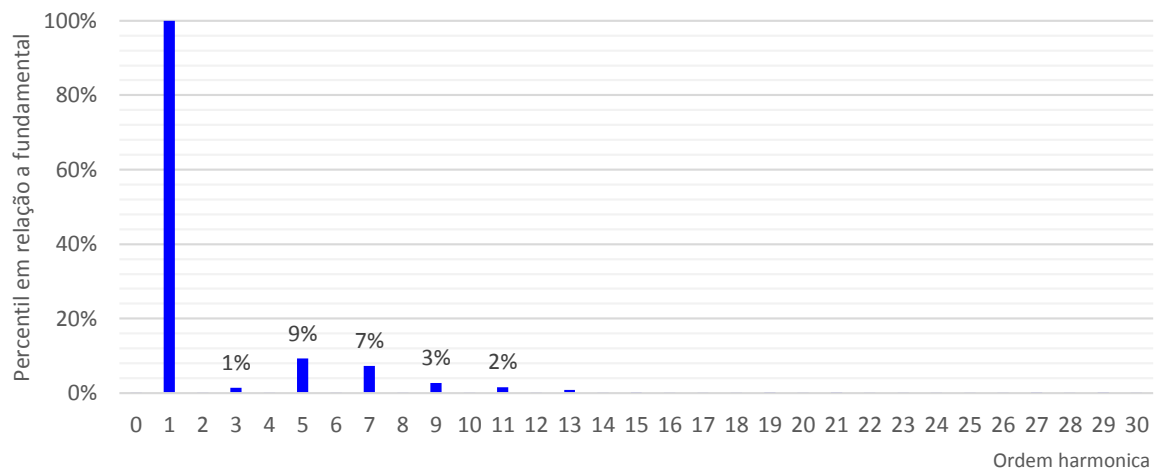


Figura 5.9 - Espectro de tensão na carga RLC

Por sua vez, a Figura 5.10 ilustra o espectro harmônico das correntes simuladas na carga R, L, e C.

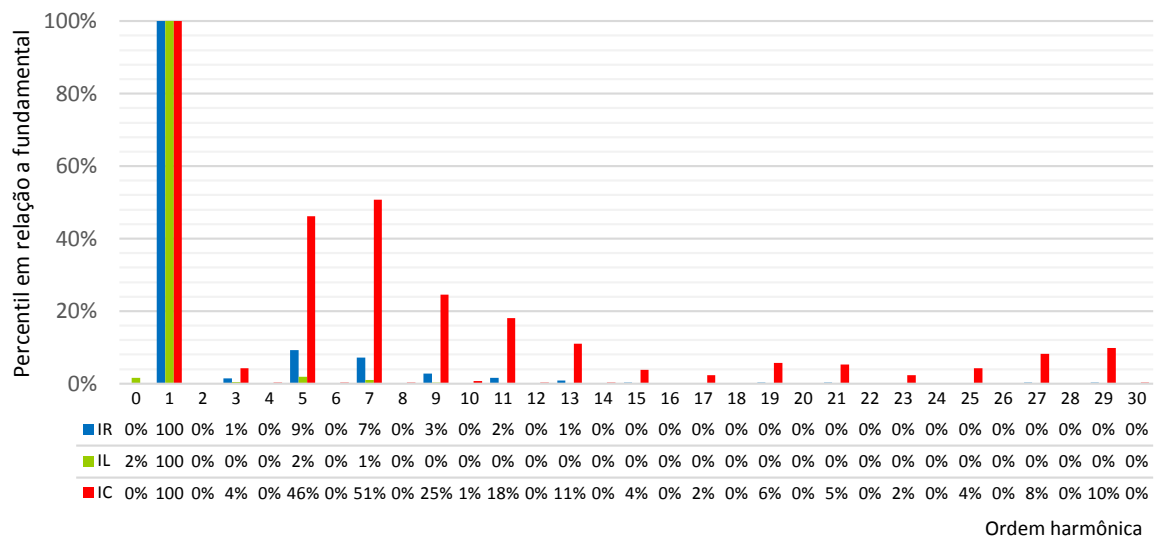


Figura 5.10 – Espectro das correntes simuladas

Aplicando-se então as equações (5.31); (5.32); (5.62) e (5.64) aos dados obtidos da simulação, têm-se os seguintes resultados:

Tabela 5.3 - Resultados da Simulação

	Valor Nominal	Valor Calculado	Erro percentual	$Q = \sum_{h=1}^N \frac{(V_h)^2}{X_h}$	$Q = \sum_{h=1}^N V_h I_h \sin(\pm \varphi_h)$
L	445,00 mH	445,1991mH	0,045%	60,2904 VAr	60,2904 VAr
C	15,00 μF	14,9911 μF	-0,059%	62,2713 VAr	62,2546 VAr

Dos resultados, observa-se que as equações (5.31) e (5.62) retornam o valor de L e C com erro percentual, em relação ao valor nominal, satisfatório.

Observa-se ainda que as igualdades apresentadas pelas equações (5.32) e (5.64) se confirmam, onde as pequenas divergências no valores são atribuídas à aproximações numéricas.

Vê-se também que os resultados foram próximos aos encontrados no ensaio prático, como era esperado.

5.7. Considerações finais

Ao analisar, no domínio do tempo, a potência envolvida de elementos puramente reativos, como o capacitor ideal e o indutor ideal das seções prévias, observa-se que a potência decorrente resulta no somatório das potências de cada ordem harmônica, assim como definido pela teoria de Budeanu.

Considerando que **Potência Reativa** é a variação de energia obtida de cargas puramente reativas, então, as equações (5.32) e (5.64) demonstram que a potência total destes está relacionada com a análise clássica de potências conforme postulado por Budeanu e a análise laboratorial possibilitou a verificação das equações supracitadas.

Assim, no contexto apresentado de um elemento reativo ideal, a equação $\sum_h^N V_h I_h \sin(\pm \varphi_h)$ representa a potência reativa.

Não obstante, pôde-se observar na seção sobre o estudo de compensação que, mesmo levando o valor de Q a zero, não houve redução da potência aparente e tampouco melhorias no fator de potência. Esta característica da definição de Budeanu foi apontada por Czarnecki em seu artigo [19] e indica que, para sistemas não lineares, a simples compensação da potência reativa não implica na melhoria do fator de potência total.

Por este motivo, Czarnecki afirma que Q_B está relacionada à D_B [19] e, portanto, para uma melhoria efetiva do fator de potência é necessária a compensação da fonte de distorções, ou seja, a utilização de filtros harmônicos para redução das distorções.

De acordo com o exposto, em sistemas não lineares, a compensação das distorções harmônicas de tensão e corrente melhoram o fator de potência, a simples compensação da potência reativa pode não trazer resultados satisfatórios.

Capítulo 6

Conclusões & Trabalhos Futuros

6.1. Conclusões

Estariam todas as proposições para potência em regime não senoidal fadadas ao fracasso? Com essa questão, Filipski chama a atenção para seu artigo [11] e questiona pontos básicos como o sentido físico da potência aparente e seu uso como ponto de partida para qualquer teoria de potência.

Estas questões foram abordadas no Capítulo 2 na seção sobre a teoria clássica de potências. Ainda neste capítulo, foi demonstrado as limitações da técnica de Steinmetz quando empregada em regime não senoidal, desde a ambiguidade no momento da transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência até a principal delas que é a inoperabilidade entre os resultados de diferentes ordens harmônicas no domínio da frequência, obrigando que a análise seja feita de forma distinta para cada harmônica envolvida.

Estas limitações foram vistas como banais uma vez que pode-se sempre voltar ao domínio do tempo para achar as amplitudes das variáveis desejadas. No entanto, esta deficiência da ferramenta matemática levou a diversas proposições e interpretações dos fenômenos físicos envolvidos na troca de energia entre os elementos dos circuitos elétricos (especificamente na caracterização das diversas potências elétrica envolvidas), justamente por ser necessário o estudo das interações entre elementos de ordem harmônicas distintas. Estas proposições são apresentadas e discutidas no Capítulo 3, que traz as propostas de maior impacto ao longos das

últimas nove décadas. Neste capítulo ainda é apresentada uma proposta mais recente, a teoria do domínio geométrico de Castro-Núñez [16], pouco discutida e com grande potencial para encerrar as discussões sobre o assunto por se valer de uma ferramenta matemática diferente da proposta por Steinmetz, a álgebra geométrica de Clifford. Pode-se destacar que suas melhores características são o rigor matemático (inerente à álgebra) e a capacidade de lidar com interações entre ordens harmônicas diferentes de forma natural e bem definida.

Em todas teorias propostas, a potência ativa é definida como o valor médio da potência instantânea e, devido a este consenso geral, os esforços concentraram-se na potência reativa. Entretanto, seu uso para o faturamento carece das considerações realizadas no Capítulo 4, onde chegou-se à conclusão que, em sistemas sob regime não senoidal, o uso da potência ativa fundamental para questões de faturamento seria mais justo, evitando possíveis conflitos entre os consumidores finais e as concessionárias de energia elétrica.

O Capítulo 5 abordou a potência reativa. Alvo dos maiores esforços da comunidade científica, todos em busca de um melhor equacionamento que represente de forma fidedigna os fenômenos de energia reativa sob regime não senoidal. Citando um exemplo macro, o sistema de transmissão de energia tem sua tensão controlada por meio do gerenciamento da produção e absorção de potência reativa. O mecanismo por traz dessa regulação não fez parte do escopo deste estudo, porém é importante lembrar que: (a) equipamentos são concebidos para funcionar dentro de uma faixa de tensões e qualquer desvio pode causar danos; (b) a potência reativa consome recursos de transmissão e geração, logo, é de interesse econômico maximizar a quantidade de potência ativa que deve ser transferida através de uma linha de transmissão, minimizando os fluxos de potência reativa.

Neste contexto, o capítulo buscou uma abordagem no domínio do tempo para equacionar a potência consumida em elementos estritamente reativos (capacitor e indutor).

Assim, nos casos apresentados, a potência total destes está relacionada com a análise clássica postulada por Budeanu em [2], i.e., a soma algébrica da potência reativa de cada ordem harmônica.

Pôde-se observar ainda que a simples compensação deste reativo não levou a melhorias significativas do fator de potência total e, portanto, sendo necessário a compensação conjunta da fonte de distorções com a utilização de filtros harmônicos.

O Capítulo 5 apresenta ainda uma forma de calcular o C ou L equivalente de uma carga qualquer desde que sejam conhecidas previamente as tensões e correntes que a alimentam e seus respectivos espectros harmônicos. Este método foi verificado através da análise laboratorial apresentado ao fim do capítulo.

De um forma sucinta, no século XIX, um simples estudo em regime senoidal puro era trabalho laborioso, não pela falta de auxílio computacional e sim, principalmente, pela falta de uma estrutura matemática que os auxiliassem. A técnica de Steinmetz trouxe a solução e versatilidade, permitindo o avanço e desenvolvimento. Hoje, sob um regime não senoidal, vê-se a necessidade de evolução da ferramenta matemática afim que os fenômenos oriundos das interações entre harmônicas diferentes possam ser estudadas. Isto ou então regressa-se ao uso estrito do domínio do tempo tal qual no século XIX.

6.2. **Trabalhos Futuros**

Diante das considerações realizadas e conclusões obtidas nesta dissertação, pode-se ainda aplicar o equacionamento desenvolvido no Capítulo 5, no domínio do tempo, para um sistema RLC e suas configurações (série e paralelo); investigar a aplicação da Álgebra de Clifford para os casos mencionados e comparar detalhadamente os resultados obtidos das proposições de Czarnecki e Castro-Núñez.

Referências bibliográficas

1. FIRLIT, A. Power Theory with Non-sinusoidal Waveforms. In: BAGGINI, A. **Handbook of Power Quality**. 1ª. ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008. Cap. Anexo 3, p. 27-51.
2. BUDEANU, C. **Puissances réactives et fictives (Potências reativas e fictícias)**. Bucarest: Institut National Roumain, 1927.
3. FRYZE, S. Wirk-, Blind-, und Scheinleistung in Elektrischen Stromkreisen Mit Nichtsinusoidalformigen Verlauf von Strom und Spannung (Potência ativa, reativa e aparente em circuitos elétricos com características não senoidais de forma de onda de corrente e tensão). **Elektrotechnische Zeitschrift**, v. 53, p. 596-599, 1932.
4. BOYLESTAD, R. L. **Introdução à análise de circuitos**. 10ª. ed. [S.l.]: Pearson Education do Brasil, 2004.
5. IRWIN, J. D.; NELMS, R. M. **Análise Básica de Circuitos para Engenharia**. 10ª. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2013.
6. AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. **Resolução Normativa Nº 414**. Brasília: ANEEL, 2010.
7. AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. Módulo 8 - Qualidade da Energia Elétrica. In: ANEEL **Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional – PRODIST**. Brasília: ANEEL, 2012.
8. IEEE STANDARD 270. **IEEE Standard Definitions for Selected Quantities, Units, and Related Terms, with Special Attention to the International System of Units (SI)**. IEEE. [S.l.], p. 1-43. 2006. (doi: 10.1109/IEEESTD.2006.246243).
9. GHASSEMI, F. **What is Wrong With Electric Power Theory and How it Should be Modified**. IEE Ninth International Conference on Metering and Tariffs for Energy Supply. Birmingham: [s.n.]. 1999. p. 109-114.
10. IEEE STANDARD 1459. **IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions**. IEEE. [S.l.], p. 1-50. 2010. (doi: 10.1109/IEEESTD.2010.5439063).
11. FILIPSKI, P. S. Apparent Power - A Misleading Quantity in the Non-Sinusoidal Power Theory: Are all Non-Sinusoidal Power Theories Doomed to Fail? **European transactions on electrical power engineering**, v. 3, n. 1, p. 21-26, Janeiro/Fevereiro 1993.

12. CZARNECKI, L. S. Comments on Apparent power - a Misleading Quantity in Non-Sinusoidal Power Theory: Are all Non-Sinusoidal Power Theories Doomed to Fail? **European transactions on electrical power engineering**, v. 4, n. 5, p. 427-432, Setembro/Outubro 1994.
13. CZARNECKI, L. S. **Currents' Physical Components (CPC) concept**: A fundamental of power theory. International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation, 2008. Lagow: IEEE. 2008. p. 1-11.
14. WIKIPEDIA. Charles Proteus Steinmetz. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Proteus_Steinmetz>. Acesso em: 02 jan. 2014.
15. STEINMETZ, C. P. **Complex quantities and their use in electrical engineering**. Proceedings of International Electrical Conference. New York: AIEE. 1894. p. 33-75.
16. CASTRO-NÚÑEZ, M. D. **The Use of Geometric Algebra in the Analysis of Non-sinusoidal Networks and the Construction of a Unified Power Theory for Single Phase Systems - A Paradigm Shift**. Calgary: University of Calgary, 2013.
17. DEPENDBROCK, M. The FBD-method, a generally applicable tool for analyzing power relations. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 8, n. 2, p. 381-387, 1993.
18. BALCI, M. E.; HOCAOGLU, M. H. Comparison of Power Definitions for Reactive Power Compensation in Nonsinusoidal Conditions. **11th International Conference on Harmonics and Quality of Power**, 2004. 519-524.
19. CZARNECKI, L. S. What is wrong in Budeanu concept of reactive power and distortion power and why it should be abandoned. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. IM-36, n. 3, p. 834-837, Setembro 1987. ISSN 0018-9456.
20. CZARNECKI, L. S. Budeanu and Fryze: Two frameworks for interpreting power properties of circuits with nonsinusoidal voltages and currents. **Electrical Engineering**, Springer-Verlag, v. 80, n. 6, p. 359-367, Dezembro 1997. ISSN 0948-7921.
21. AKAGI, H.; KANAZAWA, Y.; NABAE, A. Generalized theory of instantaneous reactive power and its applications (in Japanese). **Transactions IEE Japan**, v. 103, n. 7, p. 483-490, 1983.
22. CZARNECKI, L. S. On Some Misinterpretations of the Instantaneous Reactive Power $p-q$ Theory. **IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS**, v. 19, n. 3, p. 828-836, maio 2004. ISSN 0885-8993.
23. MANESCU, L.-G. **L'étude du régime non-sinusoïdal dans les systèmes électriques**. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE. Grenoble, p. 228. 1998.

24. FRANCHINI, S.; VASSALLO, G.; SORBELLO, F. **A brief introduction to Clifford algebra**. Palermo (Italy): Università degli studi di Palermo, 2010.
25. MENTI, A.; ZACHARIAS, T.; MILIAS-ARGITIS, J. Geometric Algebra: A Powerful Tool for Representing Power Under Nonsinusoidal Conditions. **IEEE Transactions On Circuit and Systems - I: Regular Papers**, v. 54, n. 3, p. 601-609, Março 2007.
26. CASTILLA, M. et al. Clifford Theory: A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power. **IEEE Transactions On Circuit and Systems - I: Regular Papers**, v. 55, p. 3358-3367, 2008.
27. CASTILLA, M. et al. **Considerations on the Non-Active Power Using Geometric Algebra**. 2011 International Conference on Power Engineering, Energy and Electrical Drives. Torremolinos: IEEE. 2011.
28. CASTRO-NÚÑEZ, M. D.; CASTRO-PUCHE, R. Advantages of Geometric Algebra Over Complex Numbers in the Analysis of Networks With Nonsinusoidal Sources and Linear Loads. **IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS - I: REGULAR PAPERS**, v. 59, n. 09, p. 2056-2064, Setembro 2012. ISSN 10.1109/TCSI.2012.2185291.
29. GARLING, D. J. H. **Clifford Algebras: An Introduction**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, v. 1, 2011.
30. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8377: Medidor de energia ativa**. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 1995.
31. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14519: Medidores eletrônicos de energia elétrica — Especificação**. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2011.
32. GIRGIS, A. A. et al. Testing the Performance of Three-phase Induction Watthour Meters in the Presence of Harmonic Distortion. **IEEE Transactions On Industry Applications**, v. 26, n. 4, p. 689 - 695, 1990.
33. TIRANO, T.; WADA,. Effect of Waveform Distortion on Characteristics of Watt-hour Induction Meter. **Electrical Engineering in Japan**, v. 89, n. 4, p. 29-39, 1969.
34. LISITA, L. R. et al. **Avaliação de desempenho de medidor monofásico de energia elétrica do tipo indução operando com cargas residenciais**. VIII Conferência Brasileira sobre Qualidade da Energia Elétrica. Blumenau: [s.n.]. 2009.
35. BAGHZOUZ, Y.; TAN, O. T. Harmonic analysis of induction watthour meters performance. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-104, n. 2, p. 399-406, 1985.

36. CHOU, C. J.; LIU, C. C. **Analysis of the performance of induction watt-hour meters in the presence of harmonics**. IEEE Electric Power System Research. New York: [s.n.]. 1995. p. 71-79.
37. SILVA, L. S. **Influência das distorções harmônicas em medições de energia elétrica**. Brasília: Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, 2006.
38. MOULIN, E. Measuring Reactive Power in Energy Meters. **Metering International**, v. 1, p. 54, 2002.
39. DE PAULA SILVA, S. F.; DE OLIVEIRA, J. C. **Uma Contribuição à Questão do Compartilhamento da Responsabilidade sobre as Distorções Harmônicas em Sistemas Elétricos**. Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos. Campina Grande: [s.n.]. 2006.
40. HLADIK, J. **LES SPINEURS EN PHYSIQUE Avec exercices corrigés**. 1. ed. Angers: Elsevier Masson, v. 1, 1996.