



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
Programa de Pós-Graduação

**OS ELEMENTOS FINITOS NO ESTUDO DE
ELETROMAGNETISMO UTILIZANDO OS
SOFTWARE GMSH/GETDP**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Juliana Amâncio Malagoni

Uberlândia
2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
Programa de Pós-Graduação

**OS ELEMENTOS FINITOS NO ESTUDO DE
ELETROMAGNETISMO UTILIZANDO OS
SOFTWARE GMSH/GETDP**

Dissertação de mestrado submetida à
Universidade Federal de Uberlândia por
Juliana Amâncio Malagoni como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

José Roberto Camacho, PhD. (Orientador) – UFU
Alexandre Cardoso, Dr. – UFU
Augusto W. Fleury V. da Silveira, Dr. – UFU
Gustavo Malagoli Buiatti, Dr. – UFU
Ezequiel Roberto Zorzal, Dr. – UNIFESP

Prof. José Roberto Camacho, PhD.
Orientador

Prof. Alexandre Cardoso, Dr.
**Coordenador do Curso de
Pós-Graduação**

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação à minha avó Júlia (in memoriam), pelo apoio para lutar pelos meus objetivos e sonhos, pelo carinho de vó e à minha mãe Haydée, pelo amor, companheirismo e confiança inabaláveis e por estar presente apoiando-me em todas as minhas decisões.

AGRADECIMENTOS

A **DEUS** pelo apoio, por me tornar cada vez mais forte perante as angústias e dores e pela coragem em fazer-me prosseguir na conquista dos meus sonhos.

Aos meus pais **Haydée Aparecida Amâncio Malagoni** e **Rui Malagoni** pela compreensão e incentivo dedicados a mim para a realização desta importante etapa de minha vida e pela compreensão nos momentos ausentes.

Aos meus irmãos **Raphael Amâncio Malagoni** e **Ricardo Amâncio Malagoni** pelo incentivo e pelo orgulho no desenvolvimento desta pós-graduação.

Ao Prof. **José Roberto Camacho** pela orientação, sugestões, apoio, dedicação e amizade transmitidos durante todo o trabalho.

À amiga **Elise Saraiva** pelas conversas e discussões sobre os *software* Flux 3D e Gmsh/GetDP e assuntos relacionados à Elementos Finitos na Engenharia Elétrica, foram fundamentais para o desenvolvimento do projeto e de extrema importância.

Às amigas **Cleibiane Marli da Silva** e **Pollyanna Rodrigues** que fizeram parte de meu convívio durante esses anos de mestrado e que tiveram papel imprescindível para a realização desta obra.

À **Cinara Fagundes P. Mattos** pela presteza nos encaminhamentos junto à secretaria da pós-graduação.

Aos demais **amigos, colegas, professores e funcionários**, que apesar de não terem sido citados aqui, também estão presentes nos agradecimentos que faço, por todo carinho e apoio, ao longo de minha vida e para realização deste trabalho.

Ao **CNPq** pelo apoio financeiro.

RESUMO

Os Elementos Finitos no Estudo de Eletromagnetismo Utilizando os *Software* Gmsh/GetDP

Esta dissertação tem como objetivo estudar e desenvolver modelos matemáticos bidimensionais e tridimensionais, levando em conta as equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. Além disso, apresenta a discretização dos campos pelo método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*, destinados a análise de problemas de eletromagnetismo, e em particular os problemas de eletrostática, magnetostática e eletrocinética.

Para o desenvolvimento deste estudo optou-se por utilizar duas ferramentas computacionais de uso público o Gmsh (*A Three-Dimensional Finite Element Mesh Generator With Built in Pre and Post Processing Facilities*) gerador de malhas de elementos finitos em 3D agregadas às facilidades de pré e pós-processamento e o GetDP (*A General Environment for the Treatment of Discrete Problems*) para tratamento de problemas discretos modelados através de equações diferenciais.

Foi aplicado o método de elementos finitos na formulação eletrostática, magnetostática e eletrocinética para alguns casos. O primeiro caso simula o potencial escalar elétrico bidimensional e tridimensional de um capacitor com dielétricos, o segundo caso simula o vetor potencial magnético tridimensional de um toróide e o terceiro caso simula um circuito elétrico com resistores.

Palavras chave: Elementos Finitos, Eletromagnetismo, *Software* Gmsh e GetDP, Métodos Numéricos, Equações de *Maxwell*.

ABSTRACT

The Finite Element Method in Electromagnetics Study Using The Software Gmsh/GetDP

The aim of this master thesis is to study and develop two-dimensional and three-dimensional mathematical models, taking into account Maxwell's equations, the laws of material behavior and boundary conditions. Moreover, have discretization fields by finite element method using the Galerkin approach for electromagnetic analysis, and particularly problems of electrostatics, magnetostatic and electrokinetic.

For the development of such a study two freeware computational tools were chosen to use the Gmsh (A Three-Dimensional Finite Element Mesh Generator With Built in Pre and Post Processing Facilities) mesh generator of 3D finite element added to facilities for pre and post processing and the GetDP (General Environment For The Treatment Of Discrete Problems) for the treatment of discrete problems modeled using differential equations.

It was applied the finite element method electrostatic, magnetostatic and electrokinetic formulation for some cases. The first case simulates the electric scalar potential in a two-dimensional and three-dimensional capacitor with a dielectric, the second case simulates the three-dimensional magnetic vector potential of a toroid and the third case simulates a circuit of resistors.

Keywords: Finite Elements, Electromagnetics, Software Gmsh and GetDP, Numerical Methods, Maxwell's Equations.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	iii
AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vi
SUMÁRIO.....	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	x
LISTA DE FIGURAS.....	xiii
LISTA DE TABELAS.....	xvi

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 MOTIVAÇÃO	4
1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO	5
1.4 ESTADO DA ARTE	5
1.4.1 SÍNTESE DAS PUBLICAÇÕES.....	6
1.5 ETAPAS DESTA DISSERTAÇÃO.....	11
1.6 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	11
2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E EQUAÇÕES DE <i>MAXWELL</i>.....	14
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	14
2.2 EQUAÇÕES DE <i>MAXWELL</i>	14
2.3 LEIS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS	16
2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO	17
2.4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS.....	17
2.4.2 CONDIÇÕES DE TRANSMISSÃO DOS CAMPOS	18
2.4.3 GRANDEZAS GLOBAIS DO TIPO FLUXO E DO TIPO CIRCULAÇÃO	20
2.5 EXPRESSÕES INTEGRAIS, FÓRMULAS DE <i>GREEN</i> E ESPAÇOS FUNCIONAIS	21
2.6 DISCRETIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	23
2.6.1 FUNÇÕES DE BASE OU APROXIMAÇÃO NODAIS.....	24
2.6.2 FUNÇÕES DE BASE OU APROXIMAÇÃO DE ARESTA.....	25
2.7 FORMULAÇÕES ESTUDADAS	26
2.7.1 MODELO ELETROSTÁTICO	26
2.7.2 MODELO MAGNETOSTÁTICO.....	29
2.7.3 MODELO ELETRODINÂMICO	32
2.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	35

3 ABORDAGEM DOS ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	36
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	36
3.2 GMSH: GERADOR DE MALHA DE ELEMENTOS FINITOS	36
3.2.1 <i>GEOMETRY</i> : DEFINIÇÃO DA ENTIDADE GEOMÉTRICA.....	37
3.2.2 <i>MESH</i> : GERAÇÃO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS.....	38
3.2.3 <i>SOLVER: INTERFACE</i> EXTERNA (GetDP).....	39
3.2.4 <i>POST-PROCESSING</i> : VISUALIZAÇÃO DE ESCALAR E VETORIAL.....	39
3.3 GETDP: AMBIENTE GERAL PARA O TRATAMENTO DE PROBLEMAS DISCRETOS	40
3.3.1 <i>GROUP</i> : DEFINE AS ENTIDADES TOPOLÓGICAS.....	42
3.3.2 <i>FUNCTION</i> : DEFINE AS EXPRESSÕES GLOBAIS	43
3.3.3 <i>CONSTRAINT</i> : ESPECIFICA AS RESTRIÇÕES EM <i>FUNCTIONSPACE</i> E <i>FORMULATIONS</i>	44
3.3.4 <i>FUNCTIONSPACE</i> : CONSTRÓI FUNÇÃO DE ESPAÇO	44
3.3.5 <i>JACOBIAN</i> : DEFINE O MÉTODO JACOBIANO.....	46
3.3.6 <i>INTEGRATION</i> : DEFINE O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO.....	46
3.3.7 <i>FORMULATION</i> : CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES	47
3.3.8 <i>RESOLUTION</i> : RESOLVE AS EQUAÇÕES.....	48
3.3.9 <i>POST-PROCESSING</i> : EXPLORA OS RESULTADOS CALCULADOS	49
3.3.10 <i>POST-OPERATION</i> : EXPORTA OS RESULTADOS	50
3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
4 RESULTADOS OBTIDOS.....	52
4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	52
4.2 ESTUDO DO CASO 1 – MODELO ELETROSTÁTICO.....	52
4.2.1 CAPACITOR COM DIELÉTRICO EM 2D.....	52
4.2.2 CAPACITOR COM DIELÉTRICO EM 3D.....	62
4.3 ESTUDO DO CASO 2 – MODELO MAGNETOSTÁTICO	72
4.3.1 TORÓIDE EM 3D.....	72
4.4 ESTUDO DO CASO 3 – MODELO ELETRODINÂMICO	78
4.4.1 CIRCUITO ELÉTRICO EM 3D.....	78
4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	83
5 CONCLUSÕES.....	84
5.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	84
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	85

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	86
ANEXO I.....	88
ARTIGO PUBLICADO – CMNE 2011	88
APÊNDICE I.....	102
PROGRAMA NO GETDP DO CAPACITOR EM 3D COM TRÊS DIELÉTRICOS	102

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Alfanuméricos:

H	CAMPO MAGNÉTICO $[A/m]$
J	DENSIDADE DE CORRENTE DE CONDUÇÃO $[A/m^2]$
J_s	DENSIDADE DE CORRENTE SOBRE A SUPERFÍCIE Σ
D	DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO OU INDUÇÃO ELÉTRICA $[C/m^2]$
E	CAMPO ELÉTRICO $[V/m]$
B	INDUÇÃO MAGNÉTICA OU DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO $[T]$
n	NORMAL À SUPERFÍCIE Σ
Q_i	CARGA ELÉTRICA $[C]$
I_i	CORRENTE ELÉTRICA $[A]$
V_i	FORÇA ELETROMOTRIZ $[V]$
Fmm_i	FORÇA MAGNETOMOTRIZ $[Ae]$
Φ_i	FLUXO MAGNÉTICO $[wb]$
$L^2(\Omega)$	ESPAÇO DAS FUNÇÕES ESCALARES DE QUADRADO INTEGRÁVEL SOBRE Ω
$L^2(\Omega)$	ESPAÇO DAS FUNÇÕES VETORIAIS DE QUADRADO INTEGRÁVEL SOBRE Ω
$H(div, \Omega)$	ESPAÇO DO OPERADOR div
$H(grad, \Omega)$	ESPAÇO DO OPERADOR $grad$
$H(rot, \Omega)$	ESPAÇO DO OPERADOR rot
\in	PERTENCE A
\forall	PARA TODO
C	CAPACITÂNCIA $[F]$
A	ÁREA DA PLACA DO CAPACITOR $[m^2]$
d	DISTÂNCIA ENTRE AS ARMADURAS E O DIELÉTRICO $[m]$
B_c	DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO NO CENTRO DO TORÓIDE $[T]$
N	NÚMERO DE ESPIRAS $[espiras]$
R_c	RAIO QUE PASSA ATÉ O CENTRO DO TORÓIDE $[m]$
B_e	DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO NA EXTREMIDADE INTERNA DO TORÓIDE $[T]$
R_e	RAIO ATÉ A EXTREMIDADE INTERNA DO TORÓIDE $[m]$
H_c	CAMPO MAGNÉTICO NO CENTRO DO TORÓIDE $[A/m]$
H_e	CAMPO MAGNÉTICO NA EXTREMIDADE INTERNA DO TORÓIDE $[A/m]$

R	RESISTÊNCIA DO MATERIAL [Ω]
l	COMPRIMENTO [m]
v	POTENCIAL ESCALAR ELÉTRICO [V]
a	POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO [wb/m]
R	RESÍDUO
a'	FUNÇÃO TESTE VETORIAL
v'	FUNÇÃO TESTE ESCALAR

Símbolos Gregos:

Ω	DOMÍNIO LIMITADO DO ESPAÇO EUCLIDIANO TRIDIMENSIONAL
Γ	FRONTEIRA DE Ω ($\partial\Omega$)
Γ_i	SUPERFÍCIE AO LONGO DO FLUXO
γ_i	CURVA AO LONGO DA CIRCULAÇÃO
ρ_V	DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CARGA ELÉTRICA [C/m^3]
ρ_S	DENSIDADE DE CARGA SOBRE A SUPERFÍCIE Σ
μ	PERMEABILIDADE MAGNÉTICA DO MATERIAL [H/m]
μ_r	PERMEABILIDADE RELATIVA DO MATERIAL [$= \mu/\mu_0$]
μ_0	PERMEABILIDADE MAGNÉTICA DO VÁCUO [H/m]
ε	PERMISSIVIDADE ELÉTRICA DO MATERIAL [F/m]
ε_r	PERMISSIVIDADE RELATIVA DO MATERIAL [$= \varepsilon/\varepsilon_0$]
ε_0	PERMISSIVIDADE ELÉTRICA DO VÁCUO [F/m]
σ	CONDUTIVIDADE ELÉTRICA DO MATERIAL [$(\Omega \cdot m)^{-1}$]
ρ	RESISTIVIDADE ELÉTRICA [$\Omega \cdot m$]
Σ	SUPERFÍCIE ENTRE DOIS MEIOS CONTÍNUOS

Operadores:

div	DIVERGENTE
rot	ROTACIONAL
$grad$	GRADIENTE
∂t	DERIVADA NO TEMPO
$\partial_x, \partial_y, \partial_z$	DERIVADAS NO ESPAÇO

×	PRODUTO VETORIAL
·	PRODUTO ESCALAR

Abreviações:

EDO	EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA
EDP	EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL
FEMM	<i>FINITE ELEMENT METHOD MAGNETICS</i>
GETDP	<i>A GENERAL ENVIRONMENT FOR THE TREATMENT OF DISCRETE PROBLEMS</i>
GMSH	<i>A THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT MESH GENERATOR WITH BUILT IN PRE AND POST PROCESSING FACILITIES</i>
IEEE	<i>INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS</i>
MEF	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
RAM	<i>RANDOM ACCESS MEMORY</i>
NUPEA	NÚCLEO DE PESQUISA E EXTENSÃO EM ENERGIAS ALTERNATIVAS
ATP	<i>ALTERNATIVE TRANSIENTS PROGRAM</i>
CHESF	COMPANHIA HIDRO ELÉTRICA DO SÃO FRANCISCO
1D	UNIDIMENSIONAL
2D	BIDIMENSIONAL
3D	TRIDIMENSIONAL

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – ANÁLISE POR MEF DO RESFRIAMENTO DE UMA BARRA METÁLICA.	3
FIGURA 1.2 – SIMULAÇÃO DE IMPACTO EM PALHETAS DE UMA TURBINA PELO MEF.	3
FIGURA 1.3 – SIMULAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR RADIATIVA ENTRE DOIS DISCOS COAXIAIS E PARALELOS EM 2D AXISSIMETRICA PELO MEF.....	3
FIGURA 2.1 – FLUXOGRAMA DOS MODELOS DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL.	14
FIGURA 2.2 – DOMÍNIO ESTUDADO: GRANDEZAS ELÉTRICAS E GRANDEZAS MAGNÉTICAS.	17
FIGURA 2.3 – SUPERFÍCIE ENTRE DOIS MEIOS CONTÍNUOS Ω_1 E Ω_2	18
FIGURA 2.4 – DOMÍNIO ESTUDADO.....	21
FIGURA 2.5 – ENTIDADES GEOMÉTRICAS: (A) NÓ E (B) ARESTA ($M, N \in \mathbb{N}$).	25
FIGURA 3.1 – MENU GEOMETRY.....	37
FIGURA 3.2 – MENU MESH.....	38
FIGURA 3.3 – MENU SOLVER.....	39
FIGURA 3.4 – MENU POST-PROCESSING.....	40
FIGURA 3.5 – OBJETOS GETDP.....	41
FIGURA 3.6 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO GROUP	43
FIGURA 3.7 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO FUNCTION	43
FIGURA 3.8 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO CONSTRAINT	44
FIGURA 3.9 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO FUNCTIONSPACE	45
FIGURA 3.10 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO JACOBIAN.....	46
FIGURA 3.11 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO INTEGRATION	47
FIGURA 3.12 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO FORMULATION.....	48
FIGURA 3.13 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO RESOLUTION.....	49
FIGURA 3.14 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO POST-PROCESSING.....	49
FIGURA 3.15 – EXEMPLO DE CÓDIGO DO OBJETO POST-OPERATION	50
FIGURA 4.1 – MODELOS DO CASO 4.2.1 COM UM, DOIS E TRÊS DIELÉTRICOS.	53
FIGURA 4.2 – DISTRIBUIÇÃO DO POTENCIAL: PLACAS DE CAPACITORES COM UM DIELÉTRICO (PORCELANA) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES.....	54
FIGURA 4.3 – DISTRIBUIÇÃO DO POTENCIAL: PLACAS DE CAPACITORES COM DOIS DIELÉTRICOS (PORCELANA E VIDRO) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES.	55
FIGURA 4.4 – DISTRIBUIÇÃO DO POTENCIAL: PLACAS DE CAPACITORES COM TRÊS DIELÉTRICOS (PORCELANA, VIDRO E PLÁSTICO) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES.....	55

FIGURA 4.5 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO DO CAPACITOR COM UM DIELÉTRICO (PORCELANA) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES.....	56
FIGURA 4.6 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO DO CAPACITOR COM DOIS DIELÉTRICOS (PORCELANA E VIDRO) NO GMSH/GETDP EM DUAS DIMENSÕES.....	56
FIGURA 4.7 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO DO CAPACITOR COM DOIS DIELÉTRICOS (PORCELANA E VIDRO) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES.	57
FIGURA 4.8 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO DO CAPACITOR COM TRÊS DIELÉTRICOS (PORCELANA, VIDRO E PLÁSTICO) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES.....	57
FIGURA 4.9 – DISTRIBUIÇÃO DO POTENCIAL ELÉTRICO $V [V]$ DO CAPACITOR COM.....	58
FIGURA 4.10 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO $E [V/m]$ DO CAPACITOR COM	59
FIGURA 4.11 – MODELOS DO CASO 4.2.2 COM UM, DOIS E TRÊS DIELÉTRICOS EM 3D.....	62
FIGURA 4.12 – DISTRIBUIÇÃO DO POTENCIAL: PLACAS DE CAPACITORES COM UM DIELÉTRICO (PORCELANA) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FLUX 3D EM TRÊS DIMENSÕES.....	64
FIGURA 4.13 – DISTRIBUIÇÃO DO POTENCIAL: PLACAS DE CAPACITORES COM DOIS DIELÉTRICOS (PORCELANA E VIDRO) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FLUX 3D EM TRÊS DIMENSÕES.	65
FIGURA 4.14 – DISTRIBUIÇÃO DO POTENCIAL: PLACAS DE CAPACITORES COM TRÊS DIELÉTRICOS (PORCELANA, VIDRO E PLÁSTICO) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FLUX 3D EM TRÊS DIMENSÕES.....	66
FIGURA 4.15 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO DO CAPACITOR COM UM DIELÉTRICO (PORCELANA) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FLUX 3D EM TRÊS DIMENSÕES.	67
FIGURA 4.16 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO DO CAPACITOR COM DOIS DIELÉTRICOS (PORCELANA E VIDRO) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FLUX 3D EM TRÊS DIMENSÕES.	68
FIGURA 4.17 – DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO DO CAPACITOR COM TRÊS DIELÉTRICOS (PORCELANA, VIDRO E PLÁSTICO) (A) NO GMSH/GETDP E (B) NO FLUX 3D EM TRÊS DIMENSÕES.....	69
FIGURA 4.18 – MODELO DO TORÓIDE ESTUDADO.	72
FIGURA 4.19 – MODELO DO TORÓIDE COM MALHA (A) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES E SEM MALHA (B) NO GMSH/GETDP EM TRÊS DIMENSÕES.	73
FIGURA 4.20 - DISTRIBUIÇÃO DA DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO $B [T]$ (A) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES E (B) NO GMSH/GETDP EM TRÊS DIMENSÕES.	74
FIGURA 4.21 - DISTRIBUIÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO $H [A/m]$ (A) NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES E (B) NO GMSH/GETDP EM TRÊS DIMENSÕES.	75
FIGURA 4.22 – MODELAGEM DO CIRCUITO ELÉTRICO 3D ESTUDADO.....	78

FIGURA 4.23 – SIMULAÇÃO DO CIRCUITO ELÉTRICO NO SOFTWARE ATP.....	79
FIGURA 4.24 – MODELO DO CIRCUITO ELÉTRICO EM 3D NO SOFTWARE GMSH/GetDP.	79
FIGURA 4.25 – SIMULAÇÕES DAS TENSÕES NOS RESISTORES DE 10 E 20 OHMS DO CIRCUITO ESTUDADO (A) NO ATP EM FORMA DE GRÁFICO E (B) NO GMSH/GetDP EM TRÊS DIMENSÕES.....	80
FIGURA 4.26 – SIMULAÇÕES DAS CORRENTES NOS RESISTORES DE 10 E 20 OHMS DO CIRCUITO ESTUDADO (A) NO ATP EM FORMA DE GRÁFICO E (B) NO GMSH/GetDP EM TRÊS DIMENSÕES.....	81
FIGURA 4.27 – SIMULAÇÃO DOS VETORES DE CORRENTES NOS RESISTORES DE 10 E 20 OHMS DO CIRCUITO ESTUDADO NO GMSH/GetDP EM TRÊS DIMENSÕES.....	82

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – OBJETOS LISTADOS DO GETDP	42
TABELA 4.1 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO ELETROSTÁTICO EM 2D COM UM DIELÉTRICO.	60
TABELA 4.2 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO ELETROSTÁTICO EM 2D COM DOIS DIELÉTRICOS.	60
TABELA 4.3 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO ELETROSTÁTICO EM 2D COM TRÊS DIELÉTRICOS.	61
TABELA 4.4 – ERROS DOS RESULTADOS COM CAPACITOR 2D DE UM DIELÉTRICO.....	61
TABELA 4.5 – ERROS DOS RESULTADOS COM CAPACITOR 2D DE DOIS DIELÉTRICOS.....	61
TABELA 4.6 – ERROS DOS RESULTADOS COM CAPACITOR 2D DE TRÊS DIELÉTRICOS.....	61
TABELA 4.7 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO ELETROSTÁTICO EM 3D COM UM DIELÉTRICO.	70
TABELA 4.8 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO ELETROSTÁTICO EM 3D COM DOIS DIELÉTRICOS.	70
TABELA 4.9 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO ELETROSTÁTICO EM 3D COM TRÊS DIELÉTRICOS.	70
TABELA 4.10 – ERROS DOS RESULTADOS COM CAPACITOR 3D DE UM DIELÉTRICO.....	71
TABELA 4.11 – ERROS DOS RESULTADOS COM CAPACITOR 3D DE DOIS DIELÉTRICOS.....	71
TABELA 4.12 – ERROS DOS RESULTADOS COM CAPACITOR 3D DE TRÊS DIELÉTRICOS.....	71
TABELA 4.13 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO MAGNETOSTÁTICO NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES E NO GMSH/GETDP EM TRÊS DIMENSÕES.	77
TABELA 4.14 – ERROS DOS RESULTADOS DO MODELO MAGNETOSTÁTICO NO GMSH/GETDP EM TRÊS DIMENSÕES E NO FEMM EM DUAS DIMENSÕES.	77
TABELA 4.15 – RESULTADOS E COMPARAÇÕES DO MODELO ELETRODINÂMICO EM 3D.	82

1 Introdução

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Muitos problemas físicos são desenvolvidos matematicamente na forma de equações diferenciais parciais e ordinárias. Para que a solução seja exata utiliza-se o método de solução analítica encontrada através de métodos algébricos e diferenciais aplicados a geometrias e contorno particulares. Torna-se quase impossível à obtenção de soluções exatas para métodos analíticos de diferentes geometrias e condições de contorno.

Desenvolveu-se o primeiro método numérico, o método das diferenças finitas, com o objetivo de resolver equações diferenciais parciais (EDP). O domínio da solução neste método é dividido em uma malha de pontos. A EDP é aplicada a cada nó e as derivadas são substituídas por diferenças finitas. Em especial, torna-se difícil a aplicação em sistemas com geometria irregular, condições de contorno não usuais.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em métodos numéricos diferentes que aproximam a solução de problemas resolvidos por equações diferenciais parciais ou ordinárias (EDO) através da subdivisão da geometria em elementos menores, definidos como elementos finitos, nos quais a aproximação da solução exata resolve por interpolação de uma solução aproximada.

O uso de elementos aproxima os sistemas com geometrias irregulares, além de valores desconhecidos serem gerados continuamente por meio do domínio de toda solução, em vez de pontos isolados.

A seguir são denifidas as etapas para aplicação do MEF.

Etapas para aplicação do Método dos Elementos Finitos:

- Pré-Processamento:
 - Definição do problema e do domínio;
 - Discretização ou divisão do domínio em elementos;
- Processamento:
 - Obter as equações dos elementos;
 - Escolha da função de aproximação;
 - Método dos Resíduos Ponderados;
 - Método de *Galerkin*;
 - Método da Colocação;
 - Método do Subdomínio;
 - Método dos Mínimos Quadrados;
 - Montagem ou colocação das equações dos elementos juntas;
 - Acréscimo das condições iniciais e de contorno;
 - Solução do sistema linear (ou não linear);
- Pós-Processamento:
 - Apresentação dos resultados ou visualização gráfica;
 - Determinação de variáveis secundárias.

Mesmo que o método tenha sido originalmente desenvolvido para a análise de sistemas estruturais, tem sido utilizado no estudo de engenharia, nos domínios da mecânica dos sólidos, dos fluidos, eletromagnetismo, transmissão de calor, de massa e na eletrostática, dentre outros. Além de sua adequação à programação em computadores digitais, à sua eficiência e flexibilidade, o MEF tem hoje uma grande difusão tanto no meio acadêmico como no industrial, estando disponível em grande número os *software* existentes no mercado: livre (FEMM e GMSH/GETDP) e comercial (ANSYS, COMSOL, FLUX 3D, etc.). Alguns exemplos de aplicações práticas do MEF são ilustrados nas Figuras 1.1, 1.2 e 1.3.

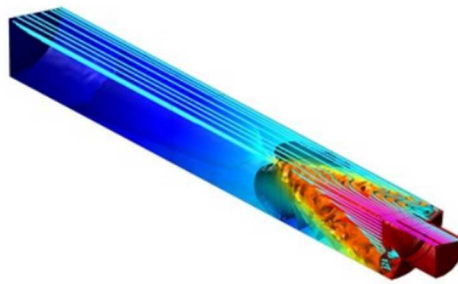


Figura 1.1 - Análise por MEF do resfriamento de uma barra metálica.

[Fonte: <http://www.comsol.com> (Comsol)]

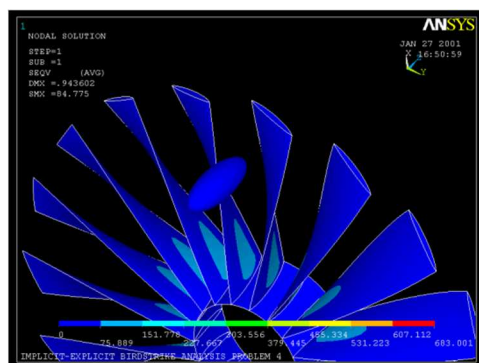


Figura 1.2 – Simulação de impacto em palhetas de uma turbina pelo MEF.

[Fonte: <http://www.ansys.com> (Ansys)]

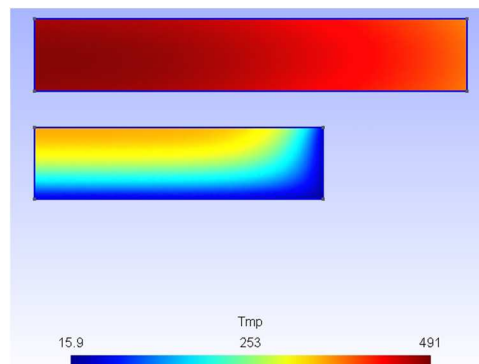


Figura 1.3 – Simulação de transferência de calor radiativa entre dois discos coaxiais e paralelos em 2D axissimétrica pelo MEF.

[Fonte: <http://www.geuz.org/getdp/> (GetDP)]

Contudo, deve ser lembrado que a utilização destes programas e a visualização dos resultados requerem os conhecimentos dos fundamentos do MEF, por parte do Engenheiro.

1.2 MOTIVAÇÃO

A cada dia torna-se necessário o uso de dispositivos magnéticos, seja em geração de energia, em eletrodomésticos ou em outros tipos de equipamentos. Mesmo em segmentos como o automobilismo, no qual sempre os motores a combustão reinaram, as máquinas elétricas se tornam uma alternativa muito promissora para reduzir a emissão de gases poluentes.

Vêm sendo desenvolvidos diferentes tipos de máquinas e de dispositivos magnéticos com o intuito de suprir esta demanda. Esses equipamentos proporcionam a minimização das dimensões, a maior eficiência, o menor custo e, muitas vezes, uma alternativa ecologicamente superior aos métodos frequentemente utilizados.

São as equações de *Maxwell* que descrevem o comportamento eletromagnético desses equipamentos. Normalmente a complexidade dos cálculos faz com que seja quase impossível realizar o cálculo analítico relativo a esse dispositivo pelas interações entre diferentes materiais, geometrias irregulares e demais aspectos construtivos [1].

Com o avanço dos computadores, as técnicas de cálculo numérico puderam ser usadas para resolver problemas de eletromagnetismo, utilizam-se os métodos de elementos finitos, dos momentos, das diferenças finitas e outros [1].

Especialmente para o cálculo eletromagnético em baixas frequências, utiliza-se geralmente o método de elementos finitos. Para diversos tipos de dispositivos, os que apresentam uma geometria (estrutural ou de fluxo magnético) predominante em duas dimensões [2].

A representação bidimensional simplifica bastante o problema tanto do ponto de vista de formulações como da ferramenta computacional, mas é em alguns casos restritiva. A representação em três dimensões por outro lado é menos restritiva, mas apresenta ainda hoje grandes dificuldades tanto ao nível de formulação matemática como na execução computacional. O desenvolvimento

de modelos matemáticos de eletromagnetismo em duas e três dimensões e simulações em *software* gratuito são os assuntos desta dissertação.

1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho consiste no estudo e desenvolvimento de modelos matemáticos e numéricos, levando em conta as equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. Além disso, apresenta a discretização dos campos pelo método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*, destinados à análise de problemas de eletromagnetismo, e em particular os problemas de eletrostática, magnetostática e eletrocinética. Na realização dos estudos propostos, teve-se como objetivo estudar um *software* gerador de malhas de elementos finitos com facilidades de pré e pós-processamento (Gmsh) e um *software* para tratamento de problemas discretos (GetDP).

1.4 ESTADO DA ARTE

Há uma grande carência de publicações sobre os modelos matemáticos de eletromagnetismo. Reconhecendo esta escassez, as investigações bibliográficas conduzidas e reportadas nesta dissertação procuraram obter, dentro do cenário nacional e internacional, um resumo das publicações mais relevantes sobre o tema.

Os modelos matemáticos relacionados a eletromagnetismo bem como sobre os comportamentos dos materiais e as condições de contorno, podem ser realizadas de diferentes maneiras, empregando-se para tanto: métodos analíticos, numéricos e métodos que empregam técnicas no domínio do tempo.

Para uma melhor compreensão, as referências foram agrupadas com a seguinte estruturação: Manuais do *software*; Livros e Apostilas; Teses; Dissertações e Artigos Técnicos.

Reconhecendo a abrangência de trabalhos científicos publicados sobre os temas em questão, esta dissertação, toma por foco, publicações de difusão mundial, tal como os periódicos do IEEE e outros eventos internacionais. Assim, acredita-se, que estas contribuam para uma melhor consolidação e colaboração do trabalho. É conveniente ressaltar também que o processo da divulgação e acesso ao conhecimento constitui-se numa ação contínua e dinâmica, o que pode resultar na omissão de um ou outro documento de caráter relevante no corpo da presente pesquisa.

Destaca-se que a investigação bibliográfica realizada e que expressa o estado da arte do assunto em pauta, se baseou no seguinte conjunto de publicações anteriores:

- 02 manuais dos *software*;
- 02 livros;
- 01 apostila;
- 01 dissertação de mestrado;
- 03 teses de doutorado;
- 09 artigos técnicos.

1.4.1 SÍNTESE DAS PUBLICAÇÕES

Na sequência são sumarizados e apresentados os documentos, publicações científicas e livros considerados relevantes para fins do trabalho.

a) Manuais dos *Software*

Dentre os manuais citados neste trabalho, a referência [3] foi bastante importante para o subsídio das ferramentas do *software* Gmsh. Esta referência tem por objetivo gerar automaticamente malhas de elementos finitos. O objetivo do *software* é fornecer uma simples ferramenta para problemas acadêmicos com entrada de parâmetros e capacidades avançadas de visualização. O Gmsh é constituído de quatro módulos: a geometria, a malha, a solução e o pós-processamento. Todos os módulos são prescritos de forma interativa usando a *interface* gráfica do usuário ou em arquivos de texto usando *script* próprio da linguagem no Gmsh. Uma breve descrição dos quatro módulos é dada no capítulo 3 desta dissertação.

A referência [4], foi bastante importante para o subsídio das ferramentas do *software* GetDP. O GetDP (ambiente para o tratamento de problemas discretos) é um *software* para a solução numérica de equações integro-diferenciais, aberto ao acoplamento de problemas físicos (eletromagnéticos, térmicos, eletrodinâmicos, magnetodinâmicos, eletrostáticos, magnetostáticos, mecânicos, estruturais, etc.), bem como dos métodos numéricos (método dos elementos finitos, métodos integrais, etc.) que lida com tais problemas de várias dimensões (1D, 2D ou 3D).

A principal característica do GetDP é a proximidade entre a sua estrutura interna, a organização de dados que definem problemas discretos e as expressões matemáticas simbólicas desses problemas. O GetDP consiste em um ambiente de trabalho para a definição de qualquer problema e faz uso de um número limitado de objetos, o que torna o ambiente estruturado e conciso. O *software* dá aos pesquisadores em desenvolvimento mais ferramentas avançadas e uma grande liberdade na adição de novas funcionalidades [4]. As ferramentas de modelagem fornecida pelo GetDP podem ser abordadas em vários níveis de

complexidade: isso abre o *software* para uma ampla gama de atividades, tais como a pesquisa, a colaboração, a educação, a formação e os estudos industriais.

b) Livros e Apostilas

A obra da referência [5] representou um dos pilares para o desenvolvimento deste trabalho. Este livro aborda temas como método dos elementos finitos em eletromagnetismo que é uma área clássica da física e da engenharia que ainda desempenha um papel muito importante no desenvolvimento de novas tecnologias. Eletromagnetismo muitas vezes serve como um elo entre engenheiros eletricitas, cientistas de materiais e físicos aplicados. Esta referência apresenta volumes sobre estes aspectos do eletromagnetismo teóricos que estão se tornando cada vez mais importante em tecnologia moderna e em rápido desenvolvimento.

A referência [6] é uma obra que trata do uso de elementos de borda em cálculos de campo. Estes elementos, que são hoje amplamente aceitos pelos engenheiros, tornaram-se ferramentas indispensáveis na análise numérica de campos eletromagnéticos. O trabalho sobre o uso de simetria em cálculos numéricos, a ferramenta computacional, de avaliação e de forças eletromagnéticas também foram extremamente importantes para o desenvolvimento do campo. Este livro reflete uma única e vasta experiência do autor *Bossavit*. Foi escrito com uma forte ênfase na abrangente e crítica análise dos fundamentos de técnicas numéricas utilizadas nos cálculos de campo. Como resultado, o livro traz muitas informações valiosas sobre a natureza destas técnicas. Por esta razão, é uma valiosa referência para especialistas e iniciantes na área.

A apostila de referência [7] aborda temas referentes ao eletromagnetismo. É iniciada com os fundamentos matemáticos necessários para estudar a disciplina de eletromagnetismo no curso de engenharia elétrica. Além

disso, foi apresentada a teoria básica dos campos elétricos, a Lei de *Gauss*, da densidade de fluxo elétrico, as correntes elétricas, os potenciais, a eletrostática, a eletrodinâmica, as equações de *Poisson* e *Laplace*. Dentro do magnetismo considera-se a teoria dos campos magnéticos, abordando princípios como a Lei de *Biot-Savart* e a Lei de *Ampère*. Além das equações de *Maxwell*, as quais justificam as aproximações que conduzem a teoria de circuitos elétricos.

c) Teses e Dissertações

A tese de doutorado [8] representou um papel fundamental no trabalho desenvolvido. Pois as melhorias desenvolvidas foram baseadas nos estudos realizados por esta referência. Esta tese tem por objetivo descrever o comportamento eletromagnético de *Maxwell* para sistema de equações diferenciais parciais. Quando aplicado a estruturas complexas, a solução analítica é, atualmente, inconcebível. É então necessário recorrer a métodos numéricos, que usam técnicas de discretização. Estes métodos transformam as EDP's em sistemas de equações algébricas cuja solução fornece uma aproximação do campo eletromagnético.

O trabalho [9] fornece subsídios aos estudos de eletromagnetismo computacional com modelagem matemática de sistemas eletromagnéticos. O propósito é usar teorias para traduzir as questões sobre uma situação física dentro de problemas matemáticos com um conjunto de equações que são resolvidas através de simulação em computador.

A tese de doutorado [1] aborda o desenvolvimento e a execução de um método de análise de dispositivos eletromagnéticos considerando o circuito de alimentação. A modelagem do dispositivo eletromagnético é realizada usando o método de elementos finitos tridimensional e o equacionamento do circuito foi feito em variáveis de espaço de estados. Além disso, a validação das ferramentas desenvolvidas foi obtida utilizando-se os *software* Gmsh/GetDP.

A dissertação de mestrado da referência [2] foi utilizada para auxiliar a compreensão da modelagem matemática em elementos finitos. Tal publicação apresenta considerações gerais sobre o desenvolvimento e o modelo em baixas frequências de sistemas de aterramento composto por uma única haste vertical. Além disso, é apresentado a validação das ferramentas numéricas desenvolvidas utilizando-se equações analíticas para o cálculo da resistência de aterramento e a modelagem foi realizada usando os *software* Labview, Gmsh e Matlab.

d) Artigos Técnicos

Os artigos técnicos associados a esta seção resumem o conhecimento referente às modelagens matemáticas das equações de *Maxwell*, compreendendo os diversos fenômenos eletromagnéticos, técnicas para avaliação e apresentação de informações do método dos elementos finitos [10] [11] [12] [13]. As equações de *Maxwell* regem o conjunto dos fenômenos clássicos de eletromagnetismo. As hipóteses de trabalho em eletrostática permitem extrair um modelo dinâmico que constitui o problema de eletrodinâmica. Já no regime estático, temos o problema da magnetostática.

Existem diversas formulações de problemas da eletrostática e magnetostática, equivalentes a utilização de diversos potenciais, escalares e vetoriais [14]. Esses potenciais são as ferramentas matemáticas e os intermediários para a determinação dos campos eletromagnéticos. A definição geral dos potenciais escalares necessita da introdução da noção de corte, a fim de tratar os potenciais multivalores, assim como os potenciais vetoriais necessitam a introdução do calibre, a fim de assegurar a unicidade destes potenciais [15] [16] [17] [18].

1.5 ETAPAS DESTA DISSERTAÇÃO

Este trabalho contribui para a modelagem bidimensional e tridimensional dos métodos de elementos finitos. As etapas são:

- a) Definição dos conceitos básicos: condições de contorno, leis de comportamento dos materiais levando em conta as equações de *Maxwell* utilizados nos *software* (Capítulo 2).
- b) Um tutorial passo a passo de utilização dos *software* livre (Capítulo 3).
- c) Discretização dos campos pelo método dos elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*, destinados à análise de problemas de eletromagnetismo, e em particular os problemas de eletrostática, magnetostática e eletrocinética (Capítulo 4).

1.6 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A fim de alcançar os objetivos aqui propostos, esta dissertação é construída com a seguinte estrutura:

Capítulo 1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo apresentar inicialmente, as motivações e os objetivos da dissertação. Além disso, apresentam-se o estado da arte e as sínteses das publicações. Por fim, apresenta as contribuições deste trabalho.

Capítulo 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E EQUAÇÕES DE *MAXWELL*

Este capítulo tem por objetivo apresentar inicialmente, as equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. Além disso, apresenta a discretização dos campos pelo método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*. Por fim, apresentam-se a partir dessas equações as formulações matemáticas para problemas eletrostáticos, magnetostáticos e eletrocinéticos.

Capítulo 3 ABORDAGEM DOS ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Este capítulo apresenta de forma sucinta alguns aspectos relevantes da aplicação das ferramentas computacionais. Utilizaram-se dois *software* de domínio público Gmsh (A *Three-Dimensional Finite Element Mesh Generator With Built in Pre and Post Processing Facilities*) e GetDP (A *General Environment For The Treatment Of Discrete Problems*) desenvolvidos por *Patrick Dular* e *Christophe Geuzaine*. Os dois foram concebidos com um objetivo global de generalidade, para fornecer ferramentas versáteis para a solução de problemas discretos acoplados provenientes de simulações em multi-física, sem comprometer o desempenho ou precisão.

Capítulo 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados referentes à aplicação do método de elementos finitos na formulação eletrostática, magnetostática e eletrocinética para alguns casos. O primeiro caso simula o potencial elétrico de duas placas de capacitor com dielétricos em 2D e 3D. O segundo caso representa o potencial vetorial de um toróide em 3D e o terceiro caso representa um circuito elétrico de resistores. O método iterativo e gráfico dos resultados é usado o ambiente dos *software* Gmsh/GetDP. Além disso, as simulações foram realizadas em um computador *Intel Core 2.33GHz*, *2GB* de memória *RAM (Random Access Memory)*, *Windows 7 de 64bits* disponibilizado pela Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia no Núcleo de Pesquisa e Extensão em Energias Alternativas (NUPEA).

Capítulo 5 CONCLUSÕES GERAIS

Por fim, este capítulo destina-se em apresentar as principais investigações realizadas ao longo de todo o trabalho. Além disso, citam-se algumas sugestões para futuros trabalhos.

2 Método dos Elementos Finitos e Equações de *Maxwell*

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo são estabelecidas as equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. Apresenta-se a discretização dos campos pelo método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*. Por fim, apresentam-se a partir dessas equações as formulações matemáticas para problemas eletrostáticos, magnetostáticos e eletrocinéticos como mostra o fluxograma da Figura 2.1.

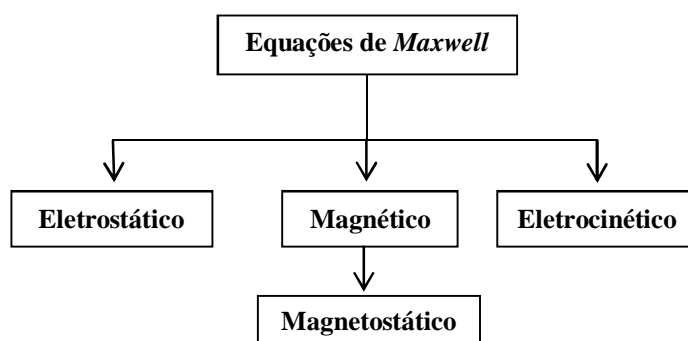


Figura 2.1 – Fluxograma dos modelos das Equações de Maxwell.

2.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Todos os fenômenos eletromagnéticos são descritos por equações clássicas de *Maxwell*. Estas constituem um sistema de equações diferenciais parciais que ligam os fenômenos magnéticos para os fenômenos elétricos e que unificam todos os princípios do eletromagnetismo. Essas equações são [8]:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_V, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{H} é o campo magnético [A/m]; \mathbf{J} é a densidade de corrente de condução [A/m^2]; \mathbf{D} é a densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica [C/m^2]; \mathbf{E} é o campo elétrico [V/m]; \mathbf{B} é a indução magnética ou densidade de fluxo magnético [T]; ρ_V é a densidade volumétrica de carga elétrica [C/m^3].

As equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) são respectivamente generalização da *Lei de Ampère*, *Lei de Gauss Magnética*, *Lei de Faraday* e a *Lei de Gauss Elétrica*. Formam juntas as representações matemáticas do mesmo fenômeno físico: o campo eletromagnético.

Em eletrotécnica, nas baixas frequências, a densidade da corrente \mathbf{J} é considerada muito maior que a densidade de corrente de deslocamento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ e se utiliza, então, as equações de *Maxwell* na forma quase estática [1] [2]:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.5)$$

E as equações já mencionadas (2.2), (2.3) e (2.4). Aplicando-se o operador *div* (divergente) em ambos os lados da equação (2.5), obtém-se a equação da continuidade de corrente:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (2.6)$$

Torna-se útil, escrever as equações de *Maxwell* em outras formas matemáticas. Estas representações matemáticas, ainda que sejam diferentes uma das outras, descrevem basicamente os mesmos fenômenos físicos e ainda são chamadas de equações de *Maxwell*. Por exemplo, uma formulação na mecânica quântica é baseada em potencial elétrico e magnético.

Um segundo conjunto de relações é necessário para completar a informação contida no sistema das equações de *Maxwell*: as relações

constitutivas também chamadas de leis de comportamento como descreve a seção 2.3.

2.3 LEIS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

A modelagem completa de fenômenos relacionados ao eletromagnetismo exige, além das quatro equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais (ou relações constitutivas), que estabelecem a relação entre campos elétricos e magnéticos e o meio em que estão inseridos. As relações constitutivas são dadas pelas seguintes equações [1] [2] [8]:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

onde μ é a permeabilidade magnética do material [H/m], tal que $\mu = \mu_r \mu_0$, em que μ_r é a permeabilidade relativa do material [$= \mu/\mu_0$] e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo (de valor numérico $4\pi * 10^{-7} H/m$); ε é a permissividade elétrica do material [F/m], tal que $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, em que ε_r é a permissividade relativa do material [$= \varepsilon/\varepsilon_0$] e ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo (de valor numérico aproximado $8,854 * 10^{-12} F/m$); σ é uma constante que representa a condutividade elétrica do meio [S/m].

Em geral, o comportamento dos materiais em modelos constitutivos que incluem um ou mais comportamentos agrupa-se como os referidos em elasticidade, viscoelasticidade e outros. O modo para relacionar entre si estas grandezas depende do material ou classe do material.

Na seção 2.4 são apresentadas as condições de contorno locais (homogêneas e transmissão de campos) e globais (tipo fluxo e circulação).

2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são de dois tipos: locais e globais. As locais são divididas em homogêneas e de transmissão de campos. E as condições globais sobre os campos podem ser impostas através das funcionais dos tipos fluxo e circulação.

2.4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS

As condições de contorno devem ser aplicadas sobre a fronteira do domínio Ω para assegurar a unicidade da solução. Conforme o problema considerado, elas podem ser relativas às componentes tangenciais de \mathbf{E} e \mathbf{H} , e as componentes normais de \mathbf{D} , \mathbf{J} e \mathbf{B} .

Na fronteira Γ do domínio global Ω (Figura 2.2), considera-se algumas condições de contorno ditas condições homogêneas.

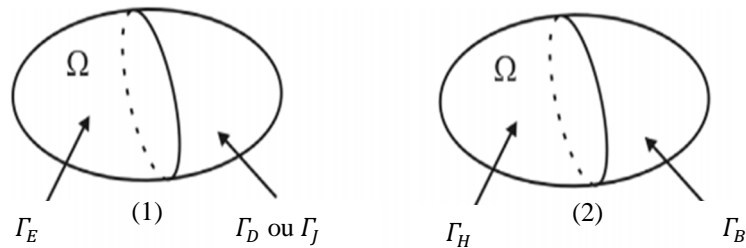


Figura 2.2 – Domínio estudado: (1) grandezas elétricas e (2) grandezas magnéticas.

Nas superfícies Γ_E e $(\Gamma_D$ ou $\Gamma_J)$ de Γ , as grandezas elétricas definem-se as seguintes condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \big|_{\Gamma_E} = 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \big|_{\Gamma_D} = 0, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \big|_{\Gamma_J} = 0, \quad (2.12)$$

Nas superfícies Γ_H e Γ_B de Γ , as grandezas magnéticas definem-se as seguintes condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} \big|_{\Gamma_H} = 0, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \big|_{\Gamma_B} = 0, \quad (2.14)$$

Essas condições de contorno homogêneas sobre os campos ocorrem por duas razões [1]:

Físicas: são condições associadas aos materiais idealizados ou no infinito. Por exemplo, as equações (2.10) e (2.13), respectivamente, são para os materiais condutores perfeitos e magnéticos perfeitos, ou seja, de condutividade e permeabilidade infinitas;

Simetria: são fixas as direções dos campos.

Além das condições de contornos homogêneas, as condições de contorno de transmissão de campos podem ser impostas através da aplicação do *Teorema da Divergência*¹ ou do *Teorema de Stokes*², como demonstra a subseção 2.4.2.

2.4.2 CONDIÇÕES DE TRANSMISSÃO DOS CAMPOS

Os campos eletromagnéticos sofrem descontinuidades, na interface entre materiais com diferentes propriedades constitutivas.

Considere uma superfície Σ entre os dois meios contínuos, representados pelos subdomínios Ω_1 e Ω_2 (Figura 2.3).



Figura 2.3 – Superfície Σ entre dois meios contínuos Ω_1 e Ω_2 . [8]

¹ O *Teorema da Divergência*, ou *de Gauss*, estabelece a igualdade entre o fluxo de um vetor em uma superfície fechada e a integral de sua divergência no volume envolto pela superfície.

² O *Teorema de Stokes* relaciona com o rotacional de campos vetoriais, ou seja, uma integral de caminho fechado com a integral da área delimitada por este caminho.

As equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) podem ser integradas sobre os volumes ou as superfícies incluindo as partes da superfície Σ . A aplicação do *Teorema da Divergência* ou do *Teorema de Stokes* conduz as seguintes condições de transmissão [1] [2] [8]:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \big|_{\Sigma} = \mathbf{J}_S, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \big|_{\Sigma} = 0, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \big|_{\Sigma} = 0, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \big|_{\Sigma} = \rho_S, \quad (2.18)$$

onde \mathbf{J}_S e ρ_S representam, respectivamente, as densidades de corrente e de carga concentradas sobre a superfície Σ , e onde \mathbf{n} é a normal à Σ , orientada de Ω_1 para Ω_2 .

As relações (2.16) e (2.17) acarretam que a componente tangencial de \mathbf{E} e a componente normal de \mathbf{B} são contínuas através de Σ . Se \mathbf{J}_S e ρ_S são diferentes de zero, as relações (2.15) e (2.18) acarretam a descontinuidade da componente tangencial de \mathbf{H} e da componente normal de \mathbf{D} [1]. Em geral, considera-se \mathbf{J}_S e ρ_S nulos e então, a componente tangencial de \mathbf{H} e a componente normal de \mathbf{D} passam a ser contínuas na interface. A partir da equação (2.6), pode-se exprimir a continuidade da componente normal da densidade de corrente:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \big|_{\Sigma} = 0, \quad (2.19)$$

Além das condições de contorno locais descritas na subseção 2.4.2, são apresentadas na subseção 2.4.3 as condições globais sobre os campos que podem ser impostas através dos funcionais dos tipos fluxo e circulação.

2.4.3 GRANDEZAS GLOBAIS DO TIPO FLUXO E DO TIPO CIRCULAÇÃO

As condições globais do tipo fluxo estão relacionadas com a carga elétrica Q_i , a intensidade de corrente I_i e o fluxo magnético Φ_i . Já na circulação, relacionam-se com a força eletromotriz V_i e a força magnetomotriz Fmm_i . Os fluxos ao longo das superfícies Γ_i e as circulações ao longo das curvas γ_i que pertencem ao domínio de estudo são definidos por [1] [2] [8]:

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \, ds = Q_i, \quad (2.20)$$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, ds = I_i, \quad (2.21)$$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, ds = \Phi_i, \quad (2.22)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_i, \quad (2.23)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Fmm_i, \quad (2.24)$$

onde \mathbf{n} representa o campo de vetores unitários normal à Γ_i e orientados para o exterior de Ω .

Na seção 2.5 são estabelecidas as expressões integrais ou notações. Apresentam-se os espaços funcionais, as *Fórmulas de Green*³, a estrutura de base dos espaços funcionais e os operadores diferenciais.

³ As *Fórmulas de Green*, em matemática é um tipo de função usada para resolver equações diferenciais não homogêneas sujeitas a determinadas condições iniciais ou condições de contorno.

2.5 EXPRESSÕES INTEGRAIS, FÓRMULAS DE *GREEN* E ESPAÇOS FUNCIONAIS

Considere um domínio limitado Ω no espaço *Euclidiano*⁴ de três dimensões que está representado na Figura 2.4 [1] [8] [9].

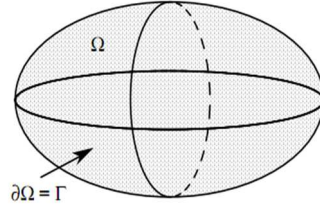


Figura 2.4 – Domínio Estudado. [8]

A fronteira $\partial\Omega$ é denotada por Γ . As equações diferenciais parciais envolvem os operadores diferenciais particulares gradiente, rotacional e divergente. Tais equações regem as distribuições espaciais de campos vetoriais (campo magnético, campo elétrico, vetor potencial, dentre outros) ou escalares (potencial escalar e outros).

Com o intuito de simplificar as expressões deste texto, definem-se as seguintes notações, relativas às integrais sobre um volume Ω e uma superfície Γ [1] [8] [9]:

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u v d\Omega, \quad (2.25)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \quad (2.26)$$

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} u v d\Gamma, \quad (2.27)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad (2.28)$$

⁴ Espaço *Euclidiano* é um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno.

onde u, v, \mathbf{u} e \mathbf{v} são definidos sobre Ω em Γ tais que essas integrais tenham um sentido, em geral, podem ser definidas nos *Espaços de Sobolev*⁵ de campos escalares e vetoriais, como [1] [8] [9]:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial_x v, \partial_y v, \partial_z v \in L^2(\Omega)\}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \partial_x \mathbf{v}, \partial_y \mathbf{v}, \partial_z \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad (2.30)$$

O estabelecimento das *Formulações Fracas*⁶ associadas aos problemas de derivadas parciais consideradas, e sobre os quais se baseia o método de elementos finitos conduz às duas *Fórmulas de Green* do tipo *grad-div* e *rot-rot* respectivamente, dadas por [1] [2] [8] [9]:

$$(\mathbf{u}, \text{grad } v) + (\text{div } \mathbf{u}, v) = \langle v, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \rangle_\Gamma, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \quad (2.31)$$

$$(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) - (\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (2.32)$$

Estas equações são estabelecidas a partir das seguintes relações da análise vetorial [1] [2] [8] [9]:

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{div } \mathbf{u} = \text{div } (v \mathbf{u}), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \text{div } (\mathbf{v} \times \mathbf{u}), \quad (2.34)$$

integradas sobre o domínio Ω , com a aplicação do *Teorema da Divergência* ou *Teorema de Gauss* para a obtenção dos termos em integral de superfície.

A *estrutura de base*, formada de quatro espaços funcionais e de três operadores, é representada a seguir. A estrutura é constituída de duas cópias de $L^2(\Omega)$, de duas cópias de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e dos três operadores que são gradiente (*grad*), rotacional (*rot*) e divergente (*div*):

$$L^2(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}_u} \mathbf{L}^2(\Omega) \xrightarrow{\text{rot}_u} \mathbf{L}^2(\Omega) \xrightarrow{\text{div}_u} L^2(\Omega), \quad (2.35)$$

Os três operadores diferenciais são os operadores cujos domínios são definidos de maneira restritiva [8]:

$$F_u^0 = \left\{ v \in L^2(\Omega); \text{grad } v \in \mathbf{L}^2(\Omega), v|_{\Gamma_u} = 0 \right\}, \quad (2.36)$$

⁵ Os *Espaços de Sobolev* são definidos sobre o domínio arbitrário Ω e são subespaços vetoriais dos espaços funcionais $L^2(\Omega)$.

⁶ A *Formulação Fraca* diminui o grau de derivação das equações.

$$F_u^1 = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{v} \big|_{\Gamma_u} = 0 \right\}, \quad (2.37)$$

$$F_u^2 = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \big|_{\Gamma_u} = 0 \right\}, \quad (2.38)$$

É necessário expressar de forma adequada o domínio onde o problema é resolvido para tratar computacionalmente de um problema diferencial. Normalmente não é possível obter soluções numéricas sobre o domínio, uma região contínua, devido à infinidade de pontos envolvidos, inicialmente o domínio é discretizado, ou seja, é substituído por vários pontos representativos. Somente nesses pontos é que as soluções são obtidas.

Nota-se que quanto maior o número de pontos da discretização, mais fiel é o resultado numérico. A necessidade de se resolverem problemas com alta precisão, em menor tempo, tem levado a uma constante busca tanto por técnicas de solução mais eficientes, como por computadores com maior desempenho. A utilização de técnicas de programação paralela é um excelente meio para o cálculo de problemas complexos.

Na seção 2.6 é apresentado a discretização do método de elementos finitos utilizando o método de *Garlekin* adotado na linguagem do *software* GetDP.

2.6 DISCRETIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - MÉTODO DE *GALERKIN*

A divisão do domínio solução em elementos finitos chama-se discretização, e pode ser feita em uma, em duas ou três dimensões. Os pontos de interseção das linhas que descrevem os elementos são referenciados como nós.

Os elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados. A resolução das equações nem sempre é obtida analiticamente e a utilização de métodos numéricos torna-se necessária para se resolver uma solução

aproximada do problema. O papel dos métodos numéricos é de substituir a formulação contínua por uma formulação discreta que é a divisão do domínio em elementos.

Para discretizar as formulações eletrostáticas, magnetostáticas e eletrocinéticas, conduzem-se as equações escritas de uma forma diferencial para uma forma integral, a qual se adapta melhor a discretização pelo método de elementos finitos. Este método consiste em realizar uma malha na estrutura estudada e interpolar as incógnitas sob os elementos dessa malha.

A resolução direta dos problemas é normalmente difícil, visto a ordem elevada das derivações e o caráter descontínuo das variáveis consideradas, é o que se chama de *Formulação Forte*. A vantagem da *Formulação Fraca*, em relação à *Formulação Forte*, é a diminuição do grau de derivação das equações e a consideração direta de certas condições de contorno [1] [8] [9].

O domínio de estudo Ω é dado por um conjunto de elementos geométricos de forma simples e o processo de discretização do espaço é chamado malha. Um elemento finito é definido por sua forma geométrica e as funções de base ou de aproximação que lhe são associadas. As incógnitas do problema são discretizadas por uma combinação de funções de aproximação de cada elemento. O uso dessas funções permite interpolar o valor da incógnita em todo ponto do domínio estudado.

2.6.1 FUNÇÕES DE BASE OU APROXIMAÇÃO NODAIS

As *Funções de Base* ou *Aproximação Nodais* são representadas pela variável escalar v é dado por uma combinação dos valores v_n dos nós sobre cada elemento, tal que [1]:

$$v = \sum_{n \in N} v_n s_n, \quad (2.39)$$

onde N é o conjunto dos nós de Ω ; v_n é o valor da variável escalar no nó $n \in N$ e s_n é a função de base associada ao nó $n \in N$ como mostra a Figura 2.5.

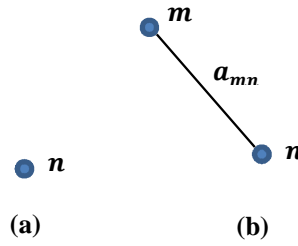


Figura 2.5 – Entidades geométricas: (a) nó e (b) aresta ($m, n \in N$).

A função de base s_n tem como propriedade ser igual a 1 (um) para o nó n e 0 (zero) para os outros nós. As funções de base nodais asseguram a continuidade, através das faces, das variáveis utilizadas [1].

2.6.2 FUNÇÕES DE BASE OU APROXIMAÇÃO DE ARESTA

As *Funções de Base* ou *Aproximação de Aresta* pode ser consideradas como uma aproximação sobre as arestas do elemento quando a incógnita é vetorial. A variável vetorial \mathbf{a} pode ser expressa por [1] [8] [9]:

$$\mathbf{a} = \sum_{n \in A} a_n \mathbf{s}_n, \quad (2.40)$$

onde A é o conjunto das arestas em Ω , a_n é a circulação de \mathbf{a} ao longo da aresta $n \in A$ e \mathbf{s}_n é a função de base associada à aresta $n \in A$.

A função de base \mathbf{s}_n tem como propriedade ser igual a 1 (um) ao longo da aresta n e 0 (zero) ao longo das outras arestas [1] [8] [9].

A discretização da forma fraca implica em resolver um sistema de equações cujos graus de liberdade estão ligados ao número de nós e de arestas da malha. Para obter um sistema qualquer, deve-se escolher tanto as funções testes quanto às incógnitas geradas pela malha. Escolhendo as funções teste como sendo as funções de base ou de aproximação (nodais ou de aresta) tem-se

o chamado *Método de Galerkin*, o qual é utilizado nesta dissertação. Sua aplicação à formulação fraca gera um sistema de equações algébricas cuja resolução dá uma solução aproximada do problema inicial.

2.7 FORMULAÇÕES ESTUDADAS

Aplicou-se o Método dos Elementos Finitos utilizando o Método de *Garlekin* para resolver os problemas: eletrostático, magnetostático e eletrocinético.

2.7.1 MODELO ELETROSTÁTICO

O modelo eletrostático consiste no estudo da distribuição espacial da densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} nos materiais condutores. É aplicado ao domínio de estudo Ω , de fronteira Γ , é caracterizado pelas leis de comportamento e condições de contorno, dado pelas seguintes equações diferenciais [1] [8] [9]:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (2.41)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \big|_{\Gamma_E} = 0, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \big|_{\Gamma_D} = 0, \quad (2.45)$$

$$\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_D, \quad (2.46)$$

As restrições globais definidas são relativas à carga elétrica Q_i (equação 2.47) e a diferença de potencial V_i (equação 2.48), cuja relação define a capacitância C (equação 2.49).

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \, ds = Q_i, \quad (2.47)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_i, \quad (2.48)$$

$$C = \frac{Q_i}{V_i}, \quad (2.49)$$

Essa forma inicial do problema constitui sua *formulação forte*. Neste trabalho são apresentadas as utilizações do *potencial escalar elétrico*.

A *Formulação Eletrostática* em potencial escalar elétrico inicia-se a partir da equação (2.41), pode-se introduzir um potencial escalar elétrico v tal que [1] [2] [7] [8] [9]:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } v \quad \text{ou} \quad v = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.50)$$

Reagrupando as equações (2.42) e (2.43), obtém-se a equação:

$$\text{div} (\varepsilon \text{ grad } v) = 0, \quad (2.51)$$

que deve ser resolvida em todo o domínio levando em conta as condições de contorno. A condição (2.44), para o campo elétrico, se escreve para a formulação em potencial escalar:

$$v|_{\Gamma_E} = v_0 = \text{constante}, \quad (2.52)$$

essa condição é conhecida como *condição de contorno de Dirichlet*⁷.

Esta condição pode ser diretamente relacionada à relação (2.48), a qual impõe a circulação do campo elétrico sobre um contorno.

Para a densidade de fluxo elétrico, como $\mathbf{D} = -\varepsilon \text{ grad } v$, a relação (2.45) possui a seguinte forma:

$$\mathbf{n} \cdot \varepsilon \text{ grad } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad (2.53)$$

Examinando a equação (2.53), conclui-se que o campo elétrico é tangente na fronteira Γ_D e, então, as linhas equipotenciais são perpendiculares em Γ_D . Esta condição é conhecida como *condição de contorno de Neumann*⁸.

⁷ Especifica o valor da função no contorno.

⁸ Especifica a derivada normal à função no domínio, por exemplo, um fluxo.

Como visto anteriormente, uma maneira de resolver o conjunto de equações de *Maxwell* da eletrostática é usando a definição de um potencial escalar elétrico v . Assim, a equação resultante é a relação (2.51).

Esta forma inicial do problema é o que tem sido considerado até agora e constitui sua *formulação forte*. A *forma fraca* da equação (2.51) é obtida da seguinte maneira.

Suponha que a função v seja uma *função aproximada*, de maneira que a equação (2.51) se torne:

$$R = \operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} v), \quad (2.54)$$

onde R é um *resíduo*, visto que a função v não é exata.

O objetivo é fazer com que o *resíduo* tenha a tendência de se anular ou ainda que na média ponderada o *resíduo* seja zero. Matematicamente isso se escreve da seguinte forma [5],

$$\int_{\Omega} R W \, d\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad (R, W)_{\Omega} = 0, \quad (2.55)$$

onde W é a *função de ponderação*. Esse método de resolver a equação (2.55) é conhecido como *Método dos Resíduos Ponderados*.

Substituindo a equação (2.54) em (2.55), tem-se:

$$(\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} v), W)_{\Omega} = 0, \quad (2.56)$$

Fazendo $W = v'$ e aplicando a *fórmula de Green* do tipo *div-grad*, apresentada no item 2.5, tem-se:

$$(\varepsilon \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \cdot \varepsilon \operatorname{grad} v, v' \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall v' \in F_u^0 \quad (2.57)$$

onde $F_u^0 = \left\{ v \in L^2(\Omega); \operatorname{grad} v \in \mathbf{L}^2(\Omega), v|_{\Gamma_u} = 0 \right\}$.

O segundo termo a esquerda de (2.57) pode ser dividido como sendo:

$$\langle \mathbf{n} \cdot \varepsilon \operatorname{grad} v, v' \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{n} \cdot \varepsilon \operatorname{grad} v, v' \rangle_{\Gamma_E} + \langle \mathbf{n} \cdot \varepsilon \operatorname{grad} v, v' \rangle_{\Gamma_D}, \quad (2.58)$$

O primeiro termo de (2.58) do lado direito se anula, pois $\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma_E} = 0$. O segundo termo do lado direito é uma condição de contorno natural, pode ser nula

devido $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \big|_{\Gamma_D} = 0$ ou pode associar às quantidades globais do tipo fluxo, como por exemplo, a carga elétrica (equação 2.20). Desse modo, a equação (2.57) se torna, $(\varepsilon \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}, v' \rangle_{\Gamma_D} = 0, \forall v' \in F_u^0$ (2.59)

Outra forma de escrever a equação (2.59) é dada por:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla v \cdot \nabla v' d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} v' d\Gamma = 0, \quad \forall v' \in F_u^0 \quad (2.60)$$

As equações (2.59) e (2.60) representam a *formulação eletrostática fraca* em potencial escalar elétrico v .

Na subseção 2.7.2 é apresentado o modelo magnetostático que estuda os fenômenos magnéticos em regime estacionário.

2.7.2 MODELO MAGNETOSTÁTICO

O modelo estuda os fenômenos magnéticos em regime estacionário⁹. As equações de *Maxwell* e a lei de comportamento a considerar são [1] [8] [9]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.61)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.63)$$

As condições de contorno sobre a fronteira Γ do domínio Ω são as seguintes:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} \big|_{\Gamma_H} = 0, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \big|_{\Gamma_B} = 0, \quad (2.65)$$

$$\Gamma = \Gamma_H \cup \Gamma_B, \quad (2.66)$$

As restrições globais que podem ser definidas são relativas ao fluxo magnético Φ_i e a força magnetomotriz Fmm_i , cuja relação define o inverso de uma relutância \mathfrak{R} .

⁹ Em engenharia, chamado também regime permanente, tem numerosas propriedades que são inalteráveis no tempo. Isto implica que para qualquer propriedade do sistema, a derivada parcial em relação ao tempo é zero.

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, ds = \Phi_i, \quad (2.67)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Fmm_i, \quad (2.68)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\Phi_i}{Fmm_i}, \quad (2.69)$$

Essa forma inicial do problema constitui sua *formulação forte*. Neste trabalho são apresentadas as utilizações do *vetor potencial magnético*.

Na *Formulação do Vetor Potencial Magnético* o divergente da indução magnética é nulo como observado na equação (2.62). Isso decorre diretamente do fato de não existirem cargas magnéticas isoladas da mesma maneira que as cargas elétricas positivas ou negativas. Uma segunda forma de enunciar essa propriedade fundamental da conservação de fluxo da indução magnética é de dizer que a indução é solenoidal. A condição, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, permite então definir uma função vetor potencial magnético¹⁰, \mathbf{a} , tal que:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a}, \quad \text{com } \mathbf{a} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_B \quad (2.70)$$

Substituindo-se esta expressão em (2.61) e (2.63), obtém-se:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{a} \right) = \mathbf{J}, \quad (2.71)$$

Na prática, a unicidade da solução é obtida com a ajuda das condições de contorno. Como visto anteriormente, uma maneira de resolver o conjunto de equações de *Maxwell* do modelo magnetostático é usando a definição de vetor potencial magnético \mathbf{a} . Assim, a equação resultante é a equação (2.71). Esta forma inicial do problema é o que tem sido considerado até agora e constitui sua *formulação forte*.

A *forma fraca* da equação (2.71) é obtida da seguinte maneira.

¹⁰ O vetor potencial magnético \mathbf{a} é um campo vetorial tal que: $\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int I d\mathbf{l}$, onde $I d\mathbf{l}$ é um elemento de corrente contínua em um ponto qualquer [20].

Suponha que a função \mathbf{a} seja uma *função aproximada*, de maneira que a equação (2.71) se torne:

$$R = \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{a} \right) - \mathbf{J}, \quad (2.72)$$

onde R é um *resíduo*, visto que a função \mathbf{a} não é exata.

O objetivo é fazer com que o *resíduo* tenha a tendência de se anular ou ainda que na média ponderada o *resíduo* seja zero, como demonstrado na equação (2.55). Esse método de resolver a equação (2.55) é conhecido como *Método dos Resíduos Ponderados*.

Substituindo a equação (2.72) em (2.55), tem-se:

$$\left(\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{a} \right) - \mathbf{J}, W \right)_{\Omega} = 0, \quad (2.73)$$

Fazendo $W = \mathbf{a}'$ e aplicando a *fórmula de Green* do tipo *rot-rot*, apresentada no item 2.5, onde $u = \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{a}$ e $v = \mathbf{a}'$, tem-se:

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{a}, \text{rot} \mathbf{a}' \right)_{\Omega} - (\mathbf{J}, \mathbf{a}')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_u^1, \quad (2.74)$$

onde $F_u^1 = \left\{ \mathbf{a} \in L^2(\Omega); \text{rot} \mathbf{a} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{a} \big|_{\Gamma_u} = 0 \right\}$.

O terceiro termo a esquerda de (2.74) pode ser dividido como sendo:

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma_H} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{a}' \rangle_{\Gamma_B}, \quad (2.75)$$

pois $\Gamma = \Gamma_H \cup \Gamma_B$ como observado na Figura 2.2.

O primeiro termo de (2.75) do lado direito é uma condição de contorno natural, pode ser nula devido $\mathbf{n} \times \mathbf{H} \big|_{\Gamma_H} = 0$ ou pode associar às quantidades globais do tipo circulação, como por exemplo, a força magnetomotriz. O segundo termo do lado direito é nulo, pois $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \big|_{\Gamma_B} = 0$.

Desse modo, tomando a integral de superfície sobre Γ_H nula, a equação (2.74) se torna,

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{a}, \text{rot} \mathbf{a}' \right)_{\Omega} = (\mathbf{J}, \mathbf{a}')_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_u^1 \quad (2.76)$$

Outra forma de escrever a equação (2.76) é dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{a}' d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{a}' d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_u^1 \quad (2.77)$$

As equações (2.76) e (2.77) representam a *formulação magnetostática fraca* em vetor potencial magnético \mathbf{a} .

Na subseção 2.7.3 é apresentado o modelo eletrocinético que estuda a distribuição da densidade de corrente elétrica nos materiais condutores.

2.7.3 MODELO ELETROKINÉTICO

O modelo estuda a distribuição espacial da densidade de corrente elétrica \mathbf{J} nos materiais condutores. É aplicado ao domínio de estudo Ω , de fronteira Γ , é caracterizado pelas leis de comportamento e condições de contorno, dado pelas seguintes equações diferenciais [1] [8] [9]:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (2.78)$$

$$\text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \big|_{\Gamma_E} = 0, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \big|_{\Gamma_J} = 0, \quad (2.82)$$

$$\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_J, \quad (2.83)$$

As restrições globais definidas são relativas à corrente I_i (equação 2.84) e a diferença de potencial V_i (equação 2.85), cuja relação define o inverso de uma resistência elétrica \mathbf{R} (equação 2.86).

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} ds = I_i, \quad (2.84)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_i, \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{\mathbf{R}} = \frac{I_i}{V_i}, \quad (2.86)$$

Essa forma inicial do problema constitui sua *formulação forte*, conhecida como *Lei de Ohm*. Neste trabalho são apresentadas as utilizações do *potencial escalar elétrico*.

A *Formulação Eletrocinética em Potencial Escalar Elétrico* a partir da equação (2.78), pode-se introduzir um potencial escalar elétrico v (equação 2.50) [1] [2] [7] [8] [9].

Reagrupando as equações (2.79) e (2.80), obtém-se a equação:

$$\text{div} (\sigma \text{grad } v) = 0, \quad (2.87)$$

que deve ser resolvida em todo o domínio levando em conta as condições de contorno. A condição (2.81), para o campo elétrico, se escreve para a formulação em potencial escalar:

$$v|_{\Gamma_E} = v_0 = \text{constante}, \quad (2.88)$$

essa condição é conhecida como *condição de contorno de Dirichlet*.

Para a densidade de corrente elétrica, como $J = -\sigma \text{grad } v$, a relação (2.82) possui a forma:

$$\mathbf{n} \cdot \sigma \text{grad } v|_{\Gamma_f} = 0, \quad (2.89)$$

Examinando (2.89), conclui-se que o campo elétrico é tangente na fronteira Γ_f e, então, as linhas equipotenciais são perpendiculares em Γ_f . Esta condição é conhecida como *condição de contorno de Neumann*.

Uma maneira de resolver o conjunto de equações de *Maxwell* da eletrocinética é usando a definição de um potencial escalar elétrico v . Assim, a equação resultante é a relação (2.87). Esta forma inicial do problema é o que tem sido considerado até agora e constitui sua *formulação forte*.

A *forma fraca* da equação (2.87) é obtida da seguinte maneira.

Suponha que a função v seja uma *função aproximada*, de maneira que a equação (2.87) se torne,

$$R = \text{div} (\sigma \text{grad } v), \quad (2.90)$$

onde R é um *resíduo*, visto que a função v não é exata.

O objetivo é fazer com que o *resíduo* tenha a tendência de se anular ou ainda que na média ponderada o *resíduo* seja zero, como demonstrado na equação (2.55). É conhecido como *Método dos Resíduos Ponderados*.

Substituindo a equação (2.90) em (2.55), tem-se:

$$(\text{div} (\sigma \text{grad } v), W)_\Omega = 0, \quad (2.91)$$

Fazendo $W = v'$ e aplicando a *fórmula de Green* do tipo *div-grad*, apresentada no item 2.5, tem-se:

$$(\sigma \text{grad } v, \text{grad } v')_\Omega + \langle \mathbf{n} \cdot \sigma \text{grad } v, v' \rangle_\Gamma = 0, \forall v' \in F_u^0 \quad (2.92)$$

onde $F_u^0 = \left\{ v \in L^2(\Omega); \text{grad } v \in \mathbf{L}^2(\Omega), v|_{\Gamma_u} = 0 \right\}$.

O segundo termo a esquerda da equação (2.92) pode ser dividido como:

$$\langle \mathbf{n} \cdot \sigma \text{grad } v, v' \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{n} \cdot \sigma \text{grad } v, v' \rangle_{\Gamma_E} + \langle \mathbf{n} \cdot \sigma \text{grad } v, v' \rangle_{\Gamma_J} \quad (2.93)$$

O primeiro termo de (2.93) do lado direito se anula, pois $\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma_E} = 0$ e o segundo termo do lado direito é uma condição de contorno natural, pode ser nula devido $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}|_{\Gamma_J} = 0$ ou pode associar às quantidades globais do tipo fluxo, como por exemplo, a intensidade de corrente. Desse modo, a equação (2.93) se torna,

$$(\sigma \text{grad } v, \text{grad } v')_\Omega + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}, v' \rangle_{\Gamma_J} = 0, \quad \forall v' \in F_u^0, \quad (2.94)$$

Outra forma de escrever a equação (2.94) é dada por:

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla v \cdot \nabla v' d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} v' d\Gamma = 0, \quad \forall v' \in F_u^0, \quad (2.95)$$

As equações (2.94) e (2.95) representam a *Formulação Fraca* da eletrocinética em potencial escalar elétrico v .

2.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, foram apresentadas as equações de *Maxwell*, as relações constitutivas e as condições de contorno que descrevem o modelo eletrostático, magnetostático e eletrocinético nas formas fortes e fracas. Esses modelos podem ser estudados inserindo outras variáveis (ferramentas matemáticas), como por exemplo, os potenciais escalares e vetoriais. A noção de potencial é muito interessante, pois permite tornar implícita uma das equações a resolver. Assim, o campo físico é ligado ao potencial por uma operação de derivação ou integração.

No Método de Elementos Finitos (MEF) foram utilizadas as funções de base que possuem valores diferentes de zero em uma pequena parte do domínio. A escolha deste tipo de função simplifica consideravelmente a obtenção da solução aproximada do problema, sendo uma vantagem à utilização do Método de *Galerkin*.

3 Abordagem dos Aspectos Computacionais

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo apresenta de forma sucinta alguns aspectos relevantes da aplicação das ferramentas computacionais. Utilizam-se dois *software* de domínio público Gmsh (*A Three-Dimensional Finite Element Mesh Generator With Built-in Pre- and Post-Processing Facilities*) e GetDP (*A General Environment For The Treatment Of Discrete Problems*) desenvolvidos por *Patrick Dular* e *Christophe Geuzaine*.

Os dois programas foram desenvolvidos com o objetivo principal de ser genérico, ambos se constituem em ferramentas flexíveis na solução de problemas discretos conectados advindos de simulação de problemas físicos, não comprometendo com sua generalidade o desempenho ou precisão.

Ambos os ambientes estão disponíveis na Internet [19] [20], com a intenção de fornecer uma livre alternativa aos *software* para pesquisa colaborativa. Os *software* oferecem acesso transparente a todos os métodos através da linguagem C.

3.2 GMSH: GERADOR DE MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

O Gmsh é um gerador de malhas de elementos finitos com construção do pré e pós-processamento. Seu objetivo é fornecer uma ferramenta simples para problemas acadêmicos com parâmetros de entrada e capacidades avançadas de visualização. O Gmsh é constituído de quatro módulos: a geometria, a malha, a resolução e o pós-processamento. A especificação do valor de entrada para esses

módulos é feita, quer interativamente, ou em arquivos de texto. Uma breve descrição dos quatro módulos é dada nas subseções 3.2.1 a 3.2.4.

3.2.1 GEOMETRY: DEFINIÇÃO DA ENTIDADE GEOMÉTRICA

Os modelos são criados no *menu* de cima para baixo, sucessivamente, definem pontos, linhas (segmentos de reta, círculos, elipses e outros), superfícies (planas, trianguladas e outras) e volumes.

Os grupos são compostos de entidades geométricas (chamados *physical groups*) e podem também ser definidos, com base nas entidades elementares geométricas. A linguagem do Gmsh permite que todas as entidades geométricas possam ser parametrizadas.

A Figura 3.1 mostra o *menu geometry* que define a entidade geométrica do modelo escolhido para estudo e discussões.

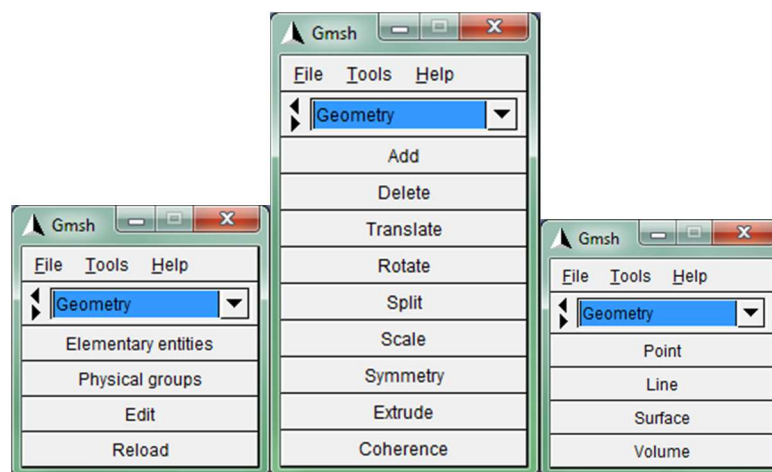


Figura 3.1 – Menu Geometry. [Gmsh]

O segundo módulo é definido na subseção 3.2.2. O módulo *mesh* gera as malhas de elementos finitos em uma, duas e três dimensões conforme a geometria em análise.

3.2.2 MESH: GERAÇÃO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

A geração da malha é realizada na mesma ordem que a criação de geometria: as curvas são discretizadas em primeiro lugar, as malhas das curvas são usadas para as malhas das superfícies e em seguida as malhas das superfícies são usadas para as malhas dos volumes.

A malha de elementos finitos é um “mosaico” de um dado subconjunto do espaço tridimensional por elementos geométricos de vários formatos (no caso do Gmsh: linhas, triângulos, quadriláteros, tetraedros, prismas, pirâmides e hexaedros).

A Figura 3.2 mostra o *menu mesh* na tela do *software* Gmsh com os botões de interatividade.

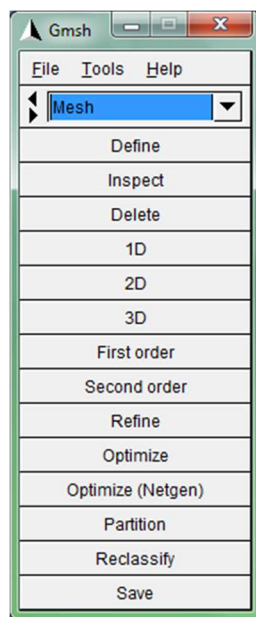


Figura 3.2 – Menu Mesh. [Gmsh]

Na subseção 3.2.3 é definido o terceiro módulo do Gmsh. O *menu solver* conecta o Gmsh com um solucionador externo para facilitar os cálculos e explorar os resultados da simulação, no caso utiliza-se o *software* GetDP (é um *software* com ambiente para a solução numérica de equações diferenciais, integrais, aberto ao acoplamento de problemas físicos).

3.2.3 SOLVER: INTERFACE EXTERNA (GETDP)

É um solucionador externo que pode ser conectado com Gmsh, que permite facilitar os cálculos, bem como recolher e explorar os resultados da simulação dentro do Gmsh.

O formato comum de arquivo torna possível combinar a produção dos diferentes solucionadores para realizar acoplamentos diversos (de problemas físicos e cálculos numéricos) e abre o caminho para programar a otimização de diversos procedimentos (que podem depender dos parâmetros geométricos ou dos parâmetros das malhas do modelo através da linguagem de *script* integrada).

A Figura 3.3 mostra o *menu solver* no Gmsh e com detalhe do *software* GetDP.



Figura 3.3 – Menu Solver. [Gmsh/GetDP]

É definido na subseção 3.2.4 o quarto e último módulo *post-processing* que inclui seção de cálculo, cores dos mapas, animações, gráficos vetoriais e outras visualizações da simulação.

3.2.4 POST-PROCESSING: VISUALIZAÇÃO DE ESCALAR E VETORIAL

O Gmsh pode carregar e manipular múltiplos pós-processamento escalar e vetorial com a geometria e a malha. Os campos escalares são representados pelo valor de linhas/superfícies ou cores dos mapas, enquanto os campos de vetores são representados por setas tridimensionais. A função do pós-processamento incluem seção de cálculo, deslocamento, elevação, fronteira e extração de

componentes, cores dos mapas e modificação de intervalo, animações, gráficos vetoriais de saída, etc. Todas as opções de pós-processamento podem ser acessados de forma interativa ou através do *script* de arquivos de entrada. Para obter uma descrição completa do Gmsh, bem como para exemplos, ver o manual [3]. A Figura 3.4 mostra o *menu post-processing* do Gmsh/GetDP onde gera os resultados da simulação.

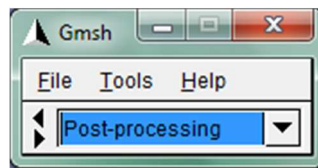


Figura 3.4 – Menu Post-Processing. [Gmsh/GetDP]

O *software* GetDP é um ambiente geral para o tratamento de problemas discretos como eletromagnético, térmico, mecânico, estrutural e outros como é definido na seção 3.3.

3.3 GETDP: AMBIENTE GERAL PARA O TRATAMENTO DE PROBLEMAS DISCRETOS

O GetDP é um *software* com ambiente para a solução numérica de equações diferenciais, integrais, aberto ao acoplamento de problemas físicos bem como os métodos numéricos (método dos elementos finitos, métodos integrais, etc.). Pode-se lidar com tais problemas de várias dimensões (1D, 2D ou 3D).

O *software* é composto por ferramentas de modelagem aplicável a vários problemas físicos. A proximidade entre a definição de problemas discretos e suas expressões matemáticas implica que a teoria e os métodos numéricos são essenciais para quem quer enfrentar a resolução de problemas discretos de diversas aplicações práticas. Estas aplicações podem ser evolucionárias, no sentido que as ferramentas oferecidas são de vários níveis de complexidade.

Um conjunto de ferramentas computacionais (ou objetos) em GetDP leva a uma definição do problema que é uma transcrição da expressão matemática do mesmo e na forma de um arquivo de texto de dados: as equações que descrevem um fenômeno, escrito em uma forma matemática adaptado a um método numérico escolhido, constituem dados diretamente para GetDP.

A resolução de um problema discreto com GetDP requer a definição, em um arquivo de dados de texto, dos objetos listados (junto com suas dependências) ver Figura 3.5 e Tabela 3.1.

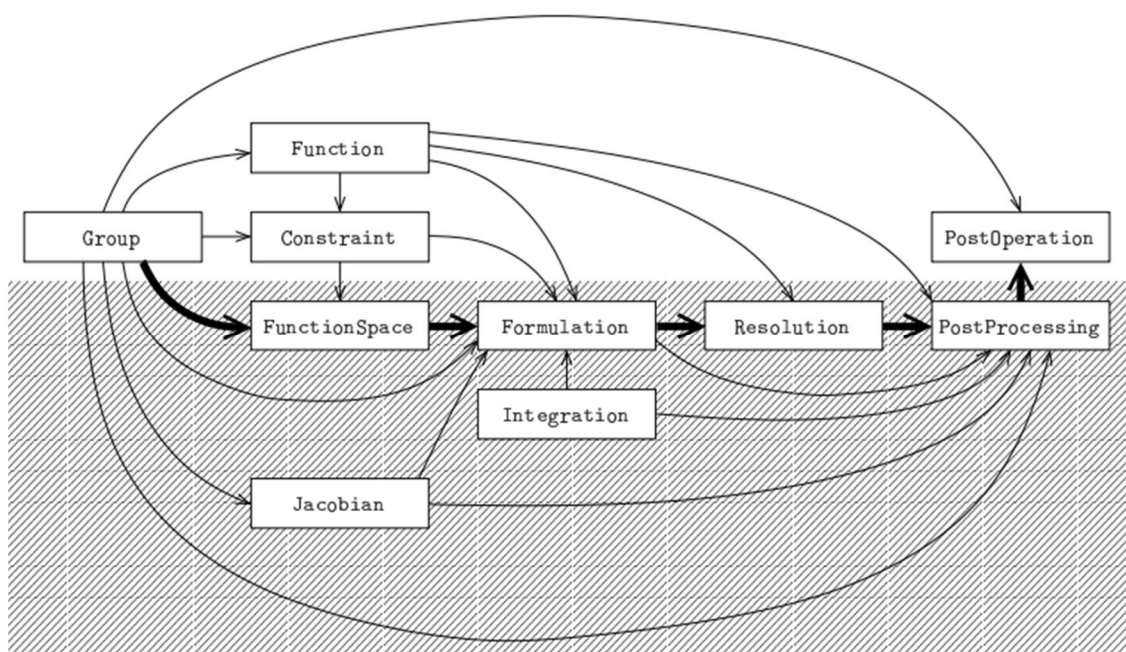


Figura 3.5 – Objetos GetDP. [4]

A reunião de todos esses objetos constitui a estrutura de definição do problema, que é uma cópia da formulação matemática formal do problema. A primeira coluna da Tabela 3.1 de cima para baixo mostra a filosofia de trabalho e para a ligação das operações do GetDP, desde a definição do grupo a visualização dos resultados.

Tabela 3.1 – Objetos listados do GetDP. [4]

<i>Group</i>	----
<i>Function</i>	<i>Group</i>
<i>Constraint</i>	<i>Group, Function, (Resolution)</i>
<i>FunctionSpace</i>	<i>Group, Constraint, (Formulation), (Resolution)</i>
<i>Jacobian</i>	<i>Group</i>
<i>Integration</i>	----
<i>Formulation</i>	<i>Group, Function, (Constraint), FunctionSpace, Jacobian, Integration</i>
<i>Resolution</i>	<i>Function, Formulation</i>
<i>PostProcessing</i>	<i>Group, Function, Jacobian, Integration, Formulation, Resolution</i>
<i>PostOperation</i>	<i>Group, PostProcessing</i>

Cada objeto da estrutura de definição do problema deve ser definido antes de ser encaminhado pelos outros. A ligação que sempre respeita esta propriedade é a seguinte: primeiro contém os objetos definidos dos dados do problema em particular, como a geometria, as características físicas e as condições de contorno (*Group*, *Function* e *Constraint*) seguido pelo método de resolução, como as incógnitas, as equações e os objetos relacionados (*Jacobian*, *Integration*, *FunctionSpace*, *Formulation*, *Resolution* e *PostProcessing*). O ciclo do processamento termina com a apresentação dos resultados, definida no campo *PostOperation*.

As subseções de 3.3.1 a 3.3.10 definem brevemente os objetos que têm que ser construídos pelo usuário em arquivos de linguagem C, a fim de configurar a definição de problemas discretos. Apresenta-se um exemplo de cada objetivo (ver o manual [4] para uma descrição mais detalhada do GetDP).

3.3.1 GROUP: DEFINE AS ENTIDADES TOPOLÓGICAS

Os grupos de entidades geométricas de vários tipos podem ser considerados e são usados em muitos objetos. As entidades são as regiões e funções de grupos que definem listas de entidades geométricas (por exemplo, os nós de elementos nodais, bordas para os elementos de fronteira, grupos de nós para potenciais flutuantes, elementos de um lado de uma superfície de cortes, etc.).

Supõe-se que alguns elementos na malha de entrada têm os números das regiões 1000 e 3000. Por exemplo, define-se o *Group* como mostra a Figura 3.6:

```
1 Group {  
2     Air = Region[1000];  
3     Inductor = Region[3000];  
4     ConductingDomain = Region[{Inductor}];  
5 }
```

Figura 3.6 – Exemplo de código do objeto Group. [4]

Os elementos *Air* e *Inductor* são identificadores como grupos, enquanto a região *ConductingDomain* é um grupo de região global. A subseção 3.3.2 define o objeto *Function* onde o usuário escreve as expressões globais.

3.3.2 FUNCTION: DEFINE AS EXPRESSÕES GLOBAIS

Uma função definida pelo usuário pode ser global, no espaço ou em grupos definidos em uma região. A característica física é um exemplo de uma função definida (por exemplo: permeabilidade magnética, condutividade elétrica, etc.) e pode ser simplesmente uma constante, para materiais lineares, ou uma função de um ou vários argumentos para materiais não lineares. Tais funções podem depender de coordenadas espaciais, que é necessário para expressar restrições complexas.

Uma característica física é uma função definida por partes. A permeabilidade magnética μ_0 , por exemplo, pode ser definida na região considerada como mostra a Figura 3.7:

```
1 Function {  
2     mu[Air] = 4.e-7*Pi;  
3 }
```

Figura 3.7 – Exemplo de código do objeto Function. [4]

Neste exemplo, definiu-se somente a permeabilidade magnética no vácuo. A subseção 3.3.3 define o objeto *Constraint* onde o usuário especifica as condições de contorno.

3.3.3 *CONSTRAINT*: ESPECIFICA AS RESTRIÇÕES EM *FUNCTIONSPACE* E *FORMULATIONS*

As restrições podem ser referidas em objetos *FunctionSpace* a ser usado para condições de contorno, a imposição de quantidades globais ou para inicializar quantidades. Outras restrições também podem ser definidas, por exemplo, as restrições do tipo de rede para a definição das conexões do circuito, a ser utilizado em objetos de *Formulation*.

As restrições são referidas na *FunctionSpaces* e são normalmente utilizadas para condições de contorno (*Type Assign*). Por exemplo, a condição essencial em uma região de superfície *Surf0*, é definida como mostra a Figura 3.8:

```
1 Constraint {  
2           { Name DirichletBoundaryCondition1; Type Assign;  
3             //Assign: Atribui um valor (para a condição de contorno).  
4               Case { { Region Surf0; Value 0; } }  
5           }  
6 }
```

Figura 3.8 – Exemplo de código do objeto *Constraint*. [4]

Neste exemplo, atribuiu-se um valor zero para a região *Surf0*, ou seja, a condição de contorno vale zero.

A subseção 3.3.4 define o objeto *FunctionSpace* onde o usuário constrói as funções de espaço, por exemplo, quantidades globais como carga elétrica, corrente, tensão, força magnetomotriz e outras.

3.3.4 *FUNCTIONSPACE*: CONSTRÓI FUNÇÃO DE ESPAÇO

A *FunctionSpace* é caracterizada pelo tipo dos campos interpolados, por uma ou várias funções de base e pelas restrições opcionais (no espaço e no tempo). Os subespaços podem ser associados às quantidades globais (por

exemplo, potencial flutuante, carga elétrica, corrente, tensão, força magnetomotriz, etc.).

Várias funções discretas podem ser definidas no quadro do método dos elementos finitos. Por exemplo, a função de espaço mais elementar é o espaço nodal, definida em uma malha de um domínio W e denotado $S^0(W)$ (podem ser de diversas geometrias associados aos elementos finitos), e associadas com condições de contorno. Contém *Form0*, ou seja, campos escalares do tipo potencial [4]:

$$v = \sum_{n \in N} v_n s_n \quad v \in S^0(W) \quad (3.1)$$

onde N é o conjunto de nós de W , s_n é a função de base nodal associado com o nó n e v_n é o valor de v no nó n .

Por exemplo, a função de espaço (3.1) é definida como mostra a Figura 3.9:

```

1 FunctionSpace {
2     { Name Hgrad_v; Type Form0;
3       //Form0: forma 0, ou seja, campo do tipo potencial escalar.
4       BasisFunction {
5           { Name sn; NameOfCoef vn;
6             Function BF_Node; Support Domain;
7             Entity NodesOf [All]; }
8         }
9       //BF_Node: função Nodal (em NodesOf, valor Form0).
10      //Entidade NodesOf: nós de elementos
11      Constraint {
12          { NameOfCoef vn;
13            EntityType NodesOf;
14            NameOfConstraint DirichletBoundaryCondition1;
15          }
16      }
17  }
18  }
```

Figura 3.9 – Exemplo de código do objeto *FunctionSpace*. [4]

Neste exemplo, definiu-se a equação 3.1 como a função de espaço. A subseção 3.3.5 define o objeto *Jacobian* onde o usuário constrói vários métodos de transformação, por exemplo, transformação axissimétricas.

3.3.5 JACOBIAN: DEFINE O MÉTODO JACOBIANO

O Método de *Jacobi* pode ser referenciado nos objetivos de *Formulation* e *PostProcessing* a serem utilizados no cálculo dos termos de integral e mudanças de coordenadas. São baseados em objetos de grupo e define as transformações geométricas aplicadas aos elementos de referência (linhas, triângulos, quadriláteros, tetraedros, prismas, hexaedros, etc.). Além de linha clássica, de superfície e volume *Jacobiano*, o objeto *Jacobian* permite construir vários métodos de transformação (por exemplo: a transformação axissimétrica).

Um método simples para transformações de volumes é o *Jacobiano* (de regiões nD em geometrias nD, n=1, 2 e 3), por exemplo, no domínio região como mostra a Figura 3.10:

```

1  Jacobian {
2      { Name Vol;
3          Case {
4              { Region Domain; Jacobian Vol;
5              }
6          }
7          //Vol: Volume Jacobiano, para regiões
8          //n-D em geometrias n-D, n=1, 2 ou 3.
9      }
10 }
```

Figura 3.10 – Exemplo de código do objeto Jacobian. [4]

Neste exemplo utilizou-se a transformação de volumes pelo método de *Jacobi*, ou seja, definiu-se o volume.

A subseção 3.3.6 é o objeto *Integration* onde o usuário define o método de integração, o mais utilizado é a integração de Gauss.

3.3.6 INTEGRATION: DEFINE O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO

Vários métodos de integração numérica ou analítica pode ser consultada em objetos de *Formulation* e de *PostProcessing* a serem utilizados no cálculo dos termos integrais. Além disso, a escolha pode ser feita entre os vários métodos de integração de acordo com um critério (por exemplo, na ordem de

interpolação, em um erro de estimação, sobre a proximidade entre a origem e os cálculos dos pontos em formulações de integrais, etc.).

Um método de integração numérica comumente utilizado é a de Gauss, com um número de pontos de integração (*NumberOfPoints*) dependendo do tipo de elemento geométrico (*GeoElement*), ou seja, como mostra a Figura 3.11:

```

1  Integration {
2      { Name Int_1;
3          Case { {Type Gauss;
4                  //Integração Numérica do tipo Gauss.
5                  Case { { GeoElement Triangle; NumberOfPoints 4;}
6                        { GeoElement Quadrangle; NumberOfPoints 4;}
7                        { GeoElement Tetrahedron; NumberOfPoints 4;}
8                        { GeoElement Hexahedron; NumberOfPoints 6;}
9                        { GeoElement Prism; NumberOfPoints 9;}
10                     }
11                 }
12             }
13         }
14     }
--

```

Figura 3.11 – Exemplo de código do objeto *Integration*. [4]

Este exemplo, é válido para problemas 2D e 3D, para diferentes tipos de elementos. A subseção 3.3.7 define o objeto *Formulation* que permite construir as equações de vários tipos de matrizes elementares.

3.3.7 FORMULATION: CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES

A ferramenta *formulation* permite lidar com as superfícies, os volumes e as integrais de linha com muitos tipos de densidades, escrito de uma forma que é semelhante às suas expressões simbólicas (usa a mesma sintaxe de expressão como no resto do GetDP). Os campos envolvidos em cada formulação são declarados como pertencentes às definições de *functionsplaces*.

A formulação é caracterizada pelo seu tipo, as quantidades envolvidas (local, global ou tipo integral) e uma lista de termos da equação locais ou globais. Por exemplo, uma formulação eletrostática utilizando um potencial escalar elétrico v é [4]:

$$(\varepsilon \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v')_W = 0 \quad \forall v' \in S^0(W) \quad (3.2)$$

é expressa como mostra a Figura 3.12:

```

1 Formulation {
2     { Name Electrostastics_v; Type FemEquation;
3       //FemEquation: formulação do método de elementos finitos.
4       Quantity {
5         {Name v; Type Local; NameOfSpace Hgrad_v; }
6         //Local: quantidade local definindo um
7         //campo na função espaço.
8       }
9       Equation {
10        Galerkin { [ epsr[ ] * Dof{Grad v} , {Grad v} ];
11                  In Domain; Jacobian Vol; Integration Int_1;
12                }
13        //Galerkin: Integral do tipo Galerkin.
14        //Dof: vetor de grau de liberdade.
15        //Grad: gradiente.
16      }
17    }
18  }
```

Figura 3.12 – Exemplo de código do objeto Formulation. [4]

Este exemplo é válido para a equação 3.2 formulação eletrostática utilizando um potencial escalar elétrico. A subseção 3.3.8 é o objeto *Resolution* que obtêm uma solução para o problema discreto.

3.3.8 RESOLUTION: RESOLVE AS EQUAÇÕES

O objeto *Resolution* define todas as operações a serem realizadas nas equações especificadas em um conjunto de formulações, a fim de obter uma solução para o problema discreto. Estas operações incluem: a geração e a solução de um dado sistema linear, resoluções multi-harmônicas, problemas acoplados (por exemplo, magneto-térmico) são definidos no GetDP.

Por exemplo, para a formulação eletrostática, é definida como mostra a Figura 3.13:


```

1 Resolution {
2     {Name Electrostatics_v;
3         System {
4             { Name Sys_Ele;
5               NameOfFormulation Electrostatics_v;
6             }
7         }
8         Operation{
9             Generate[Sys_Ele];
10            //Gera o sistema de equações.
11            Solve[Sys_Ele];
12            //Resolve o sistema de equações.
13            SaveSolution[Sys_Ele];
14            //Salva a solução do sistema de equações.
15        }
16    }
17 }

```

Figura 3.13 – Exemplo de código do objeto Resolution. [4]

A geração (*Generate*) do sistema da matriz *Sys_Ele* é feita com formulação *Electrostatics_v*, seguido pela resolução (*Solve*) e a solução salva (*SaveSolution*). A subseção 3.3.9 é o objeto *Post-Processing* que explora os resultados calculados.

3.3.9 POST-PROCESSING: EXPLORA OS RESULTADOS CALCULADOS

O objeto *PostProcessing* é com base nas quantidades definidas em uma formulação e permite a construção, com o mesmo mecanismo de expressão em outras partes no GetDP, de qualquer quantidade de interesse útil definida.

As quantidades do pós-cálculo com base em uma solução de uma *resolution* são definidos, por exemplo, para o problema eletrostático, a solução associada com a formulação *Electrostatic_v*, é mostrada na Figura 3.14:

```

1 PostProcessing {
2     {Name EleSta_v; NameOfFormulation Electrostatics_v;
3         Quantity {
4             { Name v; Value { Local { [ {v} ]; In Domain; } } }
5             { Name e; Value { Local { [ -{Grad v} ]; In Domain; } } }
6             { Name d; Value { Local { [ -eps0*epsr[] *{Grad v} ];In Domain; } } }
7         }
8     }
9 }

```

Figura 3.14 – Exemplo de código do objeto Post-Processing. [4]

O potencial escalar elétrico v , o campo elétrico e e a densidade de fluxo elétrico d podem ser todos calculados a partir da solução. São todos definidos no domínio da região.

A subseção 3.3.10 é o objeto *Post-Operation* que exporta os resultados da simulação.

3.3.10 POST-OPERATION: EXPORTA OS RESULTADOS

É no *Post-Operation* que visualiza os resultados obtidos no GetDP. Definem-se várias operações elementares sobre as quantidades de pós-processamento e exibe os resultados em vários formatos de arquivos.

A operação de pós-processamento é a geração de mapas, ou seja, a exibição dos campos calculados na malha. Por exemplo, usando o *Post-Processing* os mapas do potencial escalar elétrico e do campo elétrico sobre os elementos do domínio da região são definidos como mostra a Figura 3.15:

```
1 PostOperation {  
2     { Name Map_v_e; NameOfPostProcessing EleSta_v ;  
3       Operation {  
4           Print [ v, OnElementsOf Domain, File "map_v.pos"];  
5           Print [ e, OnElementsOf Domain, File "map_e.pos"];  
6       }  
7     }  
8 }
```

Figura 3.15 – Exemplo de código do objeto *Post-Operation*. [4]

Para uma definição completa de todos esses objetos e exemplos que mostram como são desenvolvidos neste capítulo, ver o manual [4].

3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Gmsh tem um ponto forte que é a capacidade de respeitar um campo de comprimento característico para a geração de malhas em linhas, superfícies e volumes. Além disso, todas as malhas que são produzidas pelo Gmsh estão em conformidade com o método de elementos finitos.

O GetDP foi inicialmente desenvolvido no campo do eletromagnetismo computacional, que utiliza plenamente todos os recursos oferecidos. Tem sido aplicado com sucesso para a construção de modelos físicos acoplados envolvendo fenômenos eletromagnéticos (magnetoestáticos, magnetodinâmicos, eletrostáticos, eletrodinâmicos e circuitos elétricos), fenômenos térmicos e fenômenos mecânicos. No entanto, ferramentas numéricas precisam ser definidas para resolver problemas específicos em outras áreas que não foram mencionadas neste trabalho.

4 Resultados Obtidos

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados referentes à aplicação do método de elementos finitos na formulação eletrostática, magnetostática e eletrocinética para alguns casos. O primeiro caso simula o potencial escalar elétrico bidimensional e tridimensional de um capacitor com dielétricos, o segundo caso simula o vetor potencial magnético tridimensional de um toróide e o terceiro caso simula um circuito elétrico de resistores.

As simulações foram realizadas em um computador *Intel Core 2.33GHz*, *2GB* de memória *RAM (Random Access Memory)*, *Windows 7 de 64bits* disponibilizado pela Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia no Núcleo de Pesquisa e Extensão em Energias Alternativas (NUPEA). O método iterativo e gráfico dos resultados é no ambiente Gmsh/GetDP. Além de usar outros *software* como FEMM (*Finite Element Method Magnetics*), Flux3D e ATP (*Alternative Transients Program*) para comparar os resultados simulados no Gmsh/GetDP.

4.2 ESTUDO DO CASO 1 – MODELO ELETROSTÁTICO

4.2.1 CAPACITOR COM DIELÉTRICO EM 2D

Neste caso é apresentado um capacitor de placas planas e paralelas cuja área é de A e estão separadas por uma distância d . Uma bateria carrega as armaduras até que a diferença de potencial entre elas seja V , sendo então desligada. Simula-se o capacitor com um, dois e três dielétricos, de constantes dielétricas ϵ_{r1} , ϵ_{r2} e ϵ_{r3} , entre as armaduras do capacitor. A Figura 4.1 mostra

os modelos que são estudados neste caso. Analisa-se a capacitância equivalente C , a diferença de potencial V , a carga livre Q nas placas e o campo elétrico no espaço entre as armaduras e o dielétrico E .

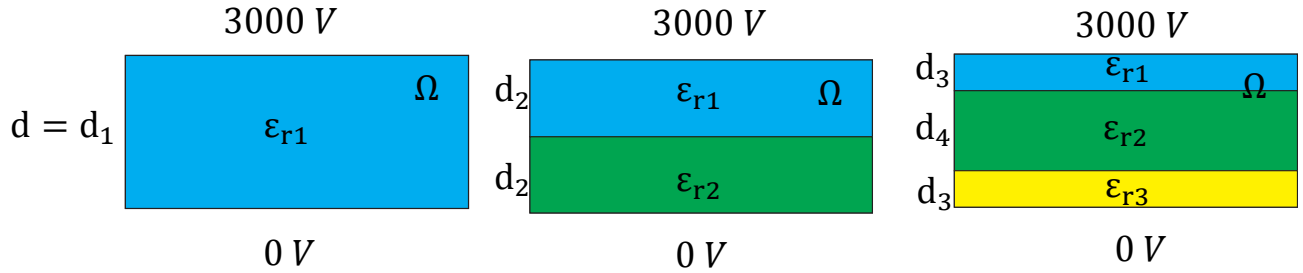


Figura 4.1 – Modelos do caso 4.2.1 com um, dois e três dielétricos.

A Figura 4.1 mostra o domínio Ω do modelo eletrostático estudado no Gmsh/GetDP e no FEMM. Os valores utilizados na simulação para a referida modelagem é arbitrário, as medidas do capacitor com dielétricos são:

- Área do capacitor: $A = 0,0012 \text{ [m}^2\text{]}$;
- Distância entre as placas: $d = d_1 = 0,01 \text{ [m]}$;
- Distância entre as placas com um dielétrico:
 $d = d_1 = 0,01 \text{ [m]}$;
- Distância entre as placas com dois dielétricos:
 $d = d_2 + d_2 = 0,005 + 0,005 = 0,01 \text{ [m]}$;
- Distância entre as placas com três dielétricos:
 $d = d_3 + d_4 + d_3 = 0,002 + 0,006 + 0,002 = 0,01 \text{ [m]}$;
- Permissividade do vácuo: $\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} \text{ [F/m]}$;
- Constante dielétrica 1 (Porcelana): $\epsilon_{r1} = 5,9$;
- Constante dielétrica 2 (Vidro): $\epsilon_{r2} = 4,7$;
- Constante dielétrica 3 (Plástico): $\epsilon_{r3} = 3$;
- Diferença de Potencial entre as placas: $V = 3000 \text{ [V]}$.

Para comparar os resultados das simulações no Gmsh/GetDP com os valores do cálculo analítico, fez-se os modelos no *software* livre 2D FEMM.

O método de elementos finitos é aplicado para um sistema de capacitor com vários dielétricos. O modelo matemático eletrostático foi desenvolvido no capítulo 2 no item 2.7.1 com as condições de contorno do domínio estudado.

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram as distribuições do potencial elétrico com um, dois e três dielétricos, respectivamente, no domínio de estudo considerando o modelo eletrostático, comprimento das placas $l = 0,04 [m]$, distâncias entre as placas $d = 0,01 [m]$ e a permissividade no vácuo $\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} [F/m]$.

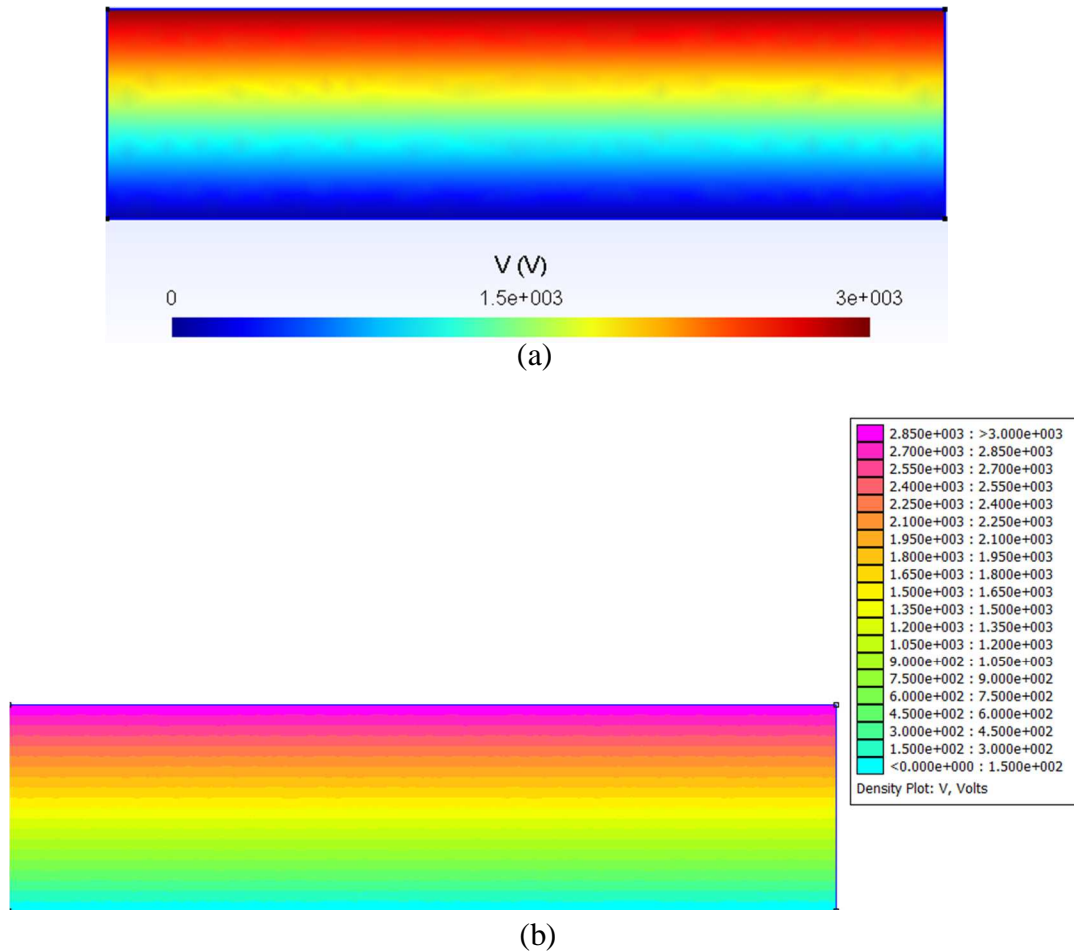


Figura 4.2 – Distribuição do Potencial: Placas de capacitores com um dielétrico (Porcelana) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no FEMM em duas dimensões.

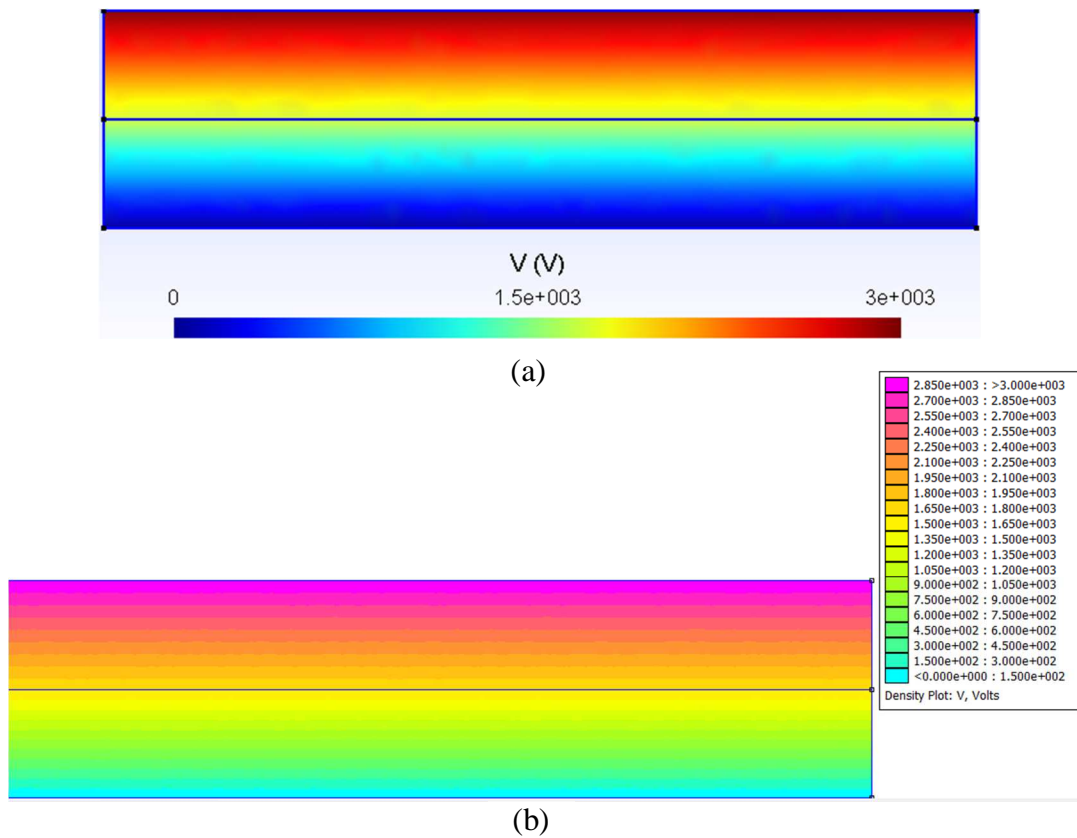


Figura 4.3 – Distribuição do Potencial: Placas de capacitores com dois dielétricos (Porcelana e Vidro) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no FEMM em duas dimensões.

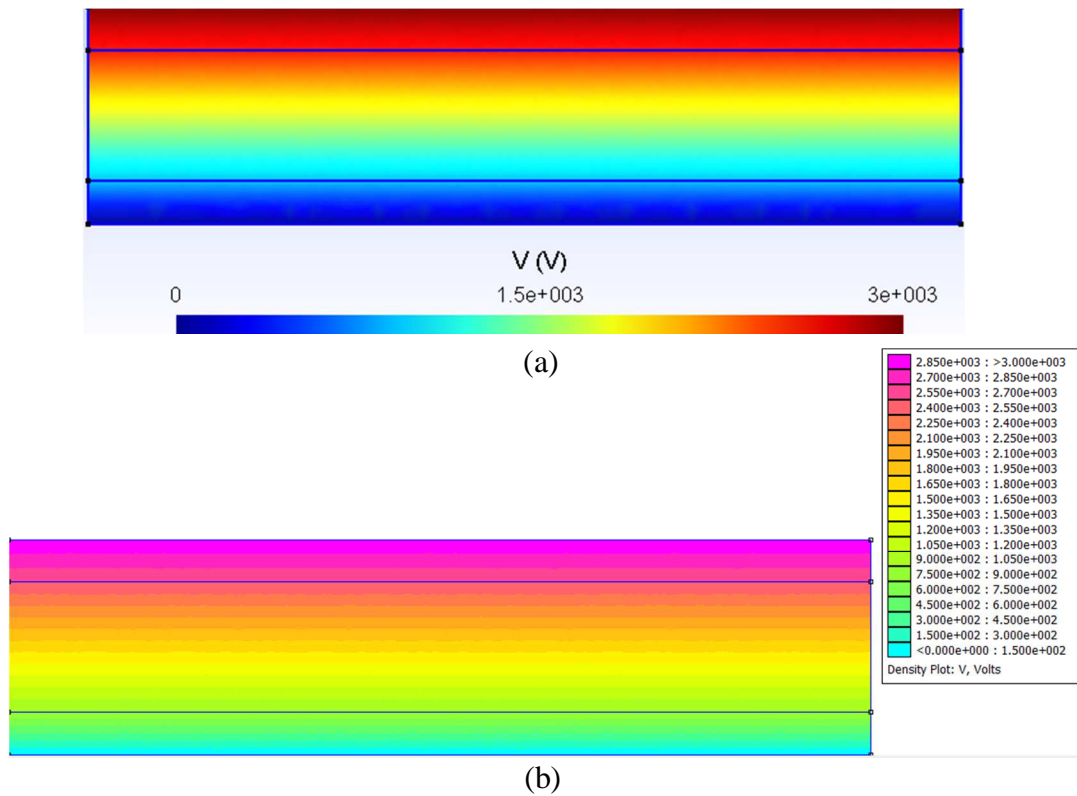


Figura 4.4 – Distribuição do Potencial: Placas de capacitores com três dielétricos (Porcelana, Vidro e Plástico) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no FEMM em duas dimensões.

Verifica-se que as equipotenciais propagam-se da placa superior 3000 [V] para a inferior 0 [V]. As Figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 mostram as distribuições do campo elétrico no espaço entre as armaduras e os dielétricos no domínio estudado.

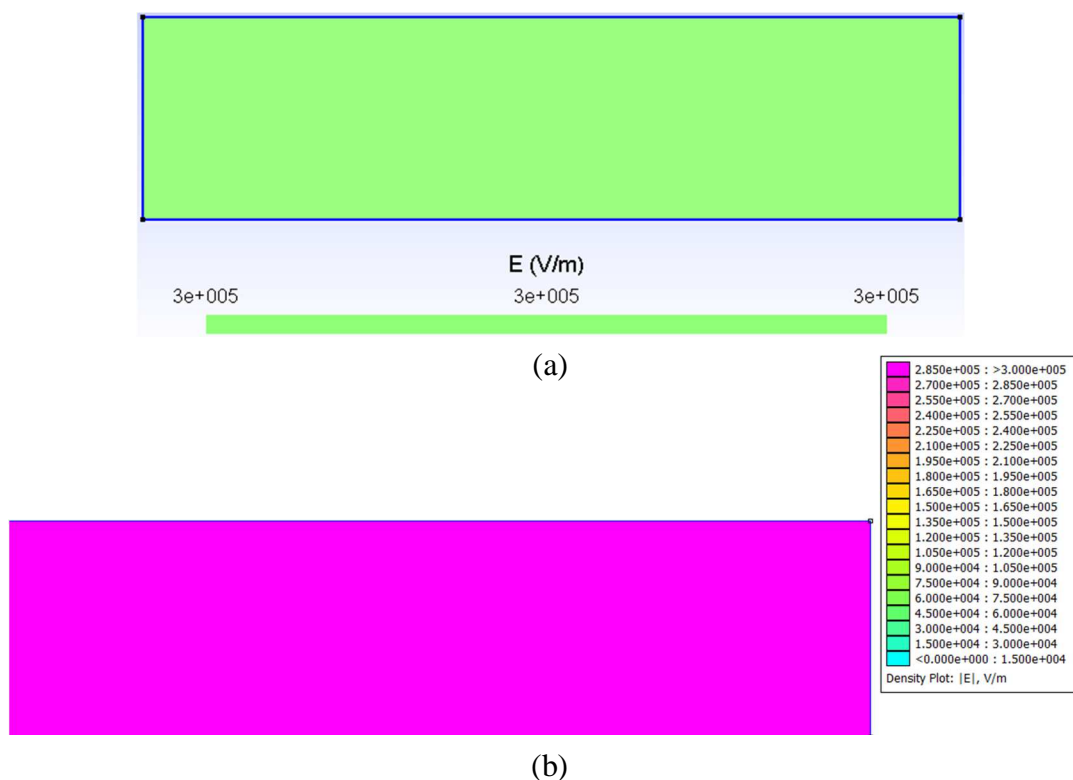


Figura 4.5 – Distribuição do Campo Elétrico do capacitor com um dielétrico (Porcelana)
(a) no Gmsh/GetDP e (b) no FEMM em duas dimensões.

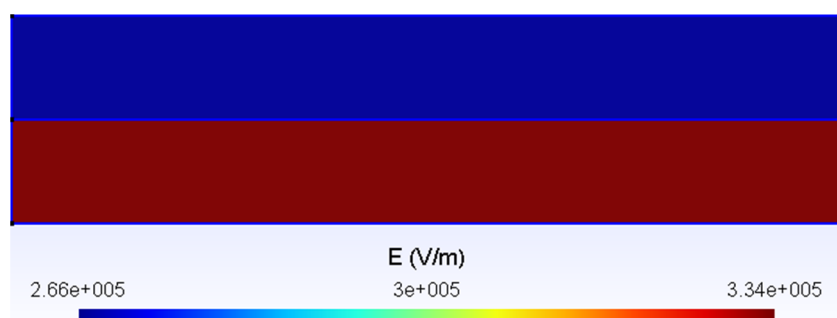


Figura 4.6 – Distribuição do Campo Elétrico do capacitor com dois dielétricos (Porcelana e Vidro) no Gmsh/GetDP em duas dimensões.

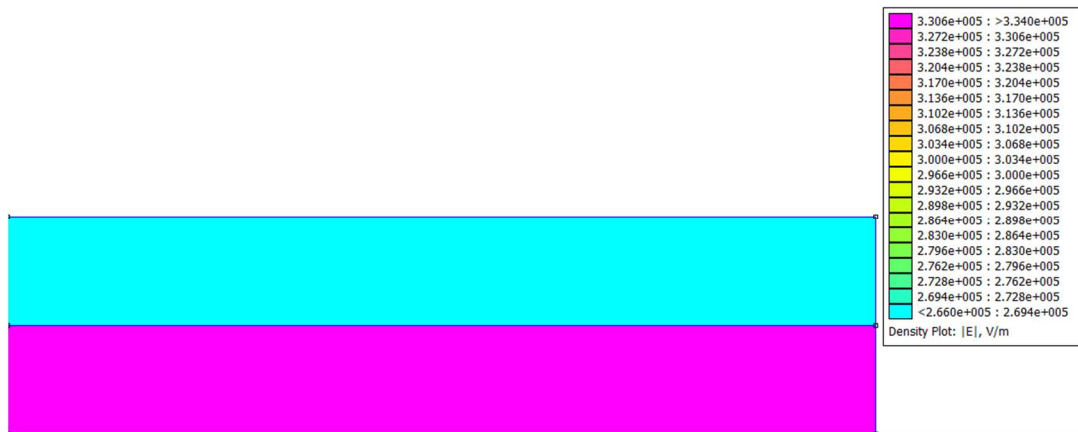


Figura 4.7 – Distribuição do Campo Elétrico do capacitor com dois dielétricos (Porcelana e Vidro) no FEMM em duas dimensões.

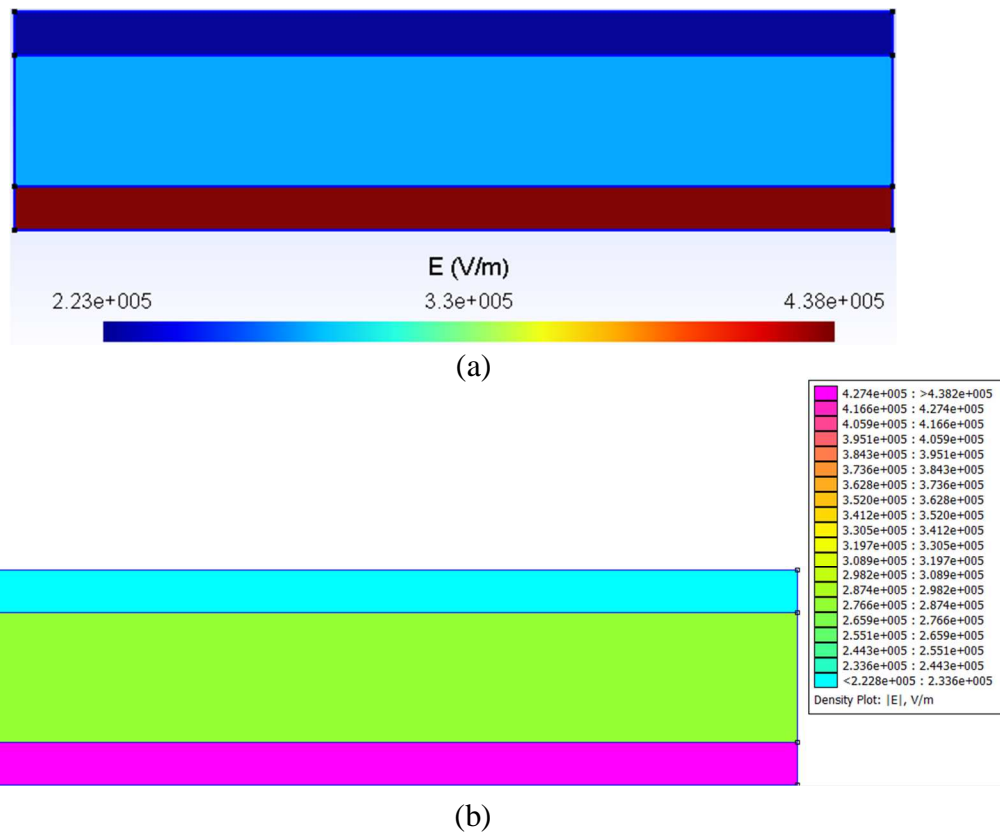
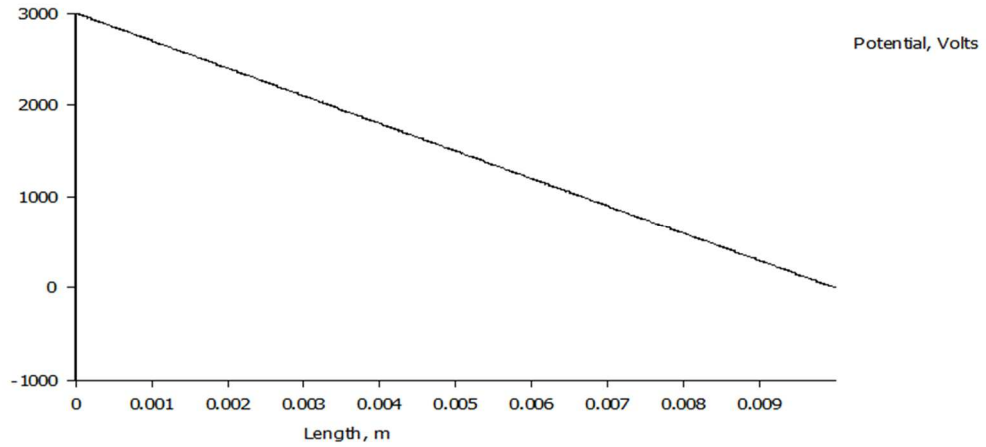
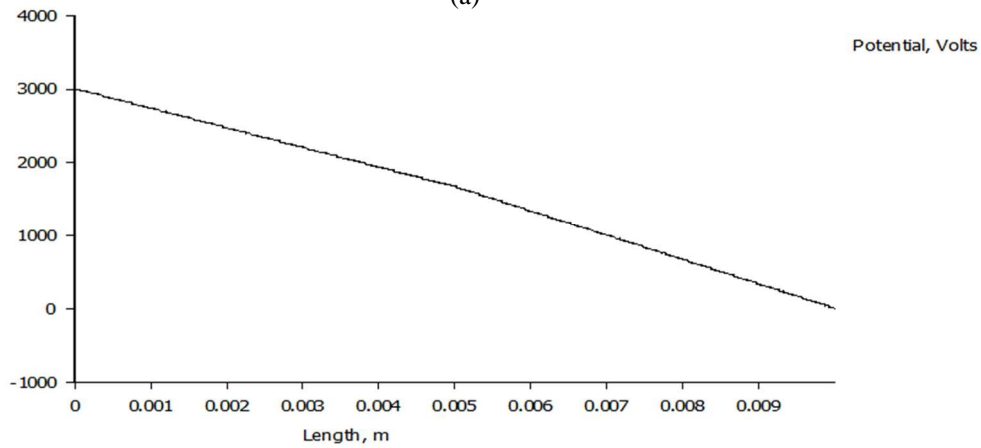


Figura 4.8 – Distribuição do Campo Elétrico do capacitor com três dielétricos (Porcelana, Vidro e Plástico) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no FEMM em duas dimensões.

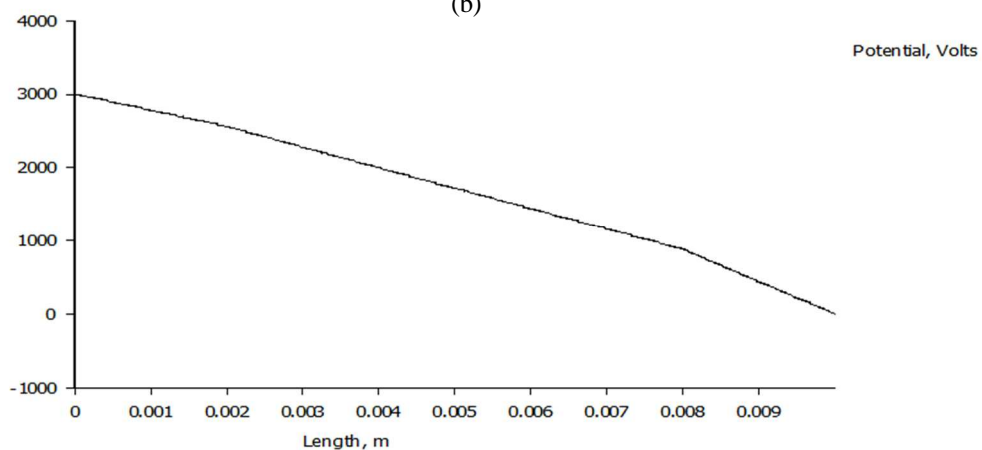
As Figuras 4.9 e 4.10 mostram os gráficos gerados pelo *software* FEMM, representam a distribuição do potencial elétrico e do campo elétrico do capacitor com um, dois e três dielétricos, respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.9 – Distribuição do Potencial Elétrico V [V] do capacitor com (a) um, (b) dois e (c) três dielétricos.[FEMM]

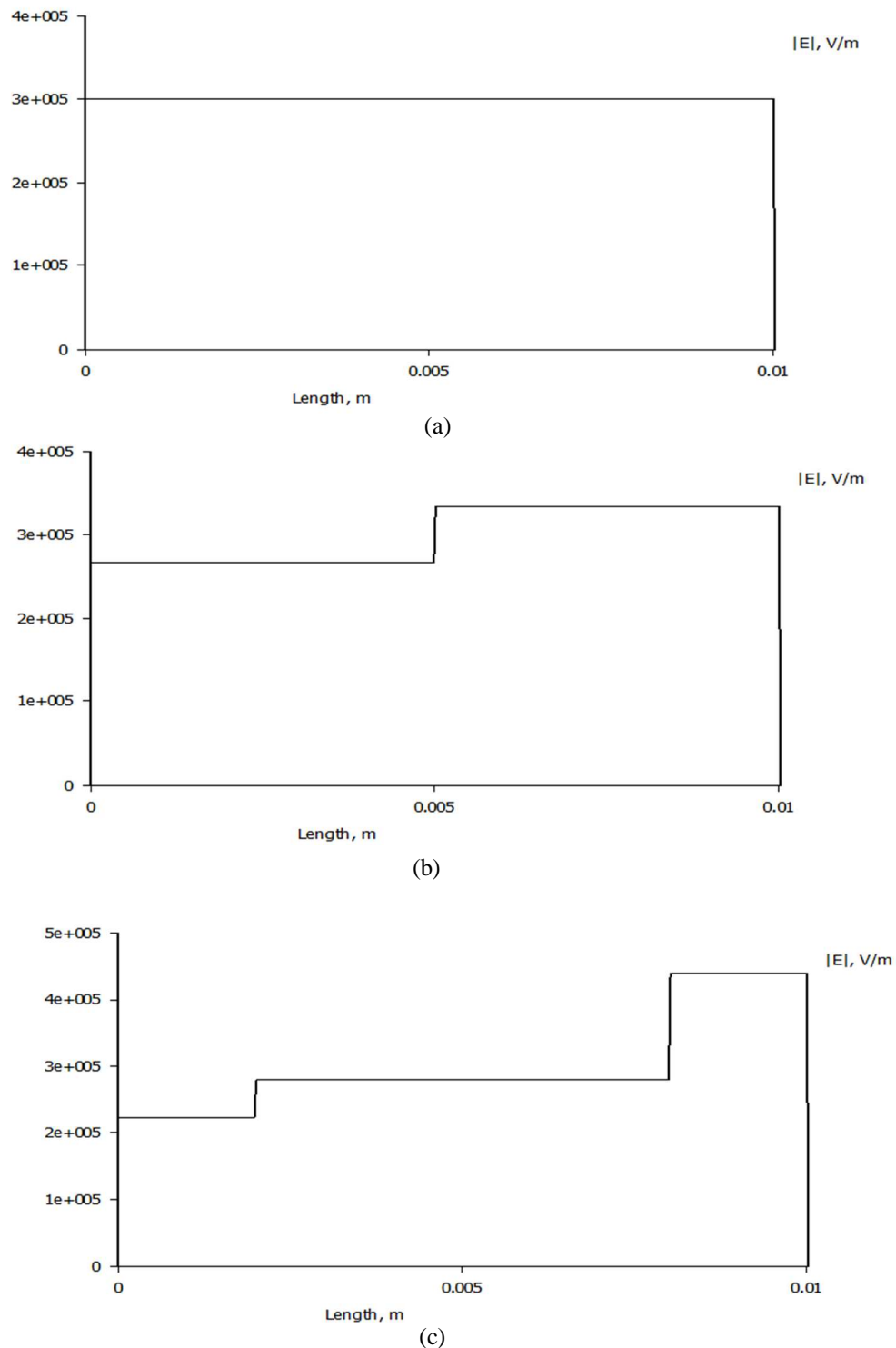


Figura 4.10 – Distribuição do Campo Elétrico E [V/m] do capacitor com (a) um, (b) dois e (c) três dielétricos. [FEMM]

O valor analítico da capacitância C , da carga livre Q nas placas e dos campos elétricos no espaço entre as armaduras e o dielétrico E são obtidos usando as equações a seguir [7]:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}; \quad (4.1)$$

onde C é a capacitância $[F]$; ε é a permissividade $[F/m]$; A é área da placa do capacitor $[m^2]$; d é a distância entre as armaduras e o dielétrico $[m]$;

$$Q = CV; \quad (4.2)$$

onde Q é a carga livre nas placas $[C]$; V é o potencial elétrico do capacitor $[V]$;

$$E = \frac{Q}{\varepsilon A}; \quad (4.3)$$

onde E é o campo elétrico entre as armaduras e o dielétrico $[V/m]$;

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r; \quad (4.4)$$

onde ε_0 é a permissividade no vácuo $[F/m]$; ε_r é a constante dielétrica do material $[= \varepsilon/\varepsilon_0]$.

As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam os resultados analíticos e simulados nos *software* FEMM e Gmsh/GetDP, respectivamente. Além disso, analisam-se os três modelos diferentes estudados.

Tabela 4.1 – Resultados e Comparações do modelo eletrostático em 2D com um dielétrico.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação FEMM	Simulação Gmsh/GetDP
Potencial Elétrico - V [V]	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – E1 [V/m]	$299,962 \cdot 10^3$	$300,000 \cdot 10^3$	$300,000 \cdot 10^3$
Carga - Q [C]	$18,795 \cdot 10^{-9}$	$18,806 \cdot 10^{-9}$	$18,806 \cdot 10^{-9}$
Capacitância - C [F]	$6,265 \cdot 10^{-12}$	$6,268 \cdot 10^{-12}$	$6,268 \cdot 10^{-12}$

Tabela 4.2 – Resultados e Comparações do modelo eletrostático em 2D com dois dielétricos.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação FEMM	Simulação Gmsh/GetDP
Potencial Elétrico - V [V]	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – E1 [V/m]	$266,016 \cdot 10^3$	$266,038 \cdot 10^3$	$266,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – E2 [V/m]	$333,934 \cdot 10^3$	$333,962 \cdot 10^3$	$334,000 \cdot 10^3$
Carga - Q [C]	$16,668 \cdot 10^{-9}$	$16,677 \cdot 10^{-9}$	$16,677 \cdot 10^{-9}$
Capacitância - C [F]	$5,556 \cdot 10^{-12}$	$5,559 \cdot 10^{-12}$	$5,559 \cdot 10^{-12}$

Tabela 4.3 – Resultados e Comparações do modelo eletrostático em 2D com três dielétricos.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação FEMM	Simulação Gmsh/GetDP
Potencial Elétrico - V [V]	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – E1 [V/m]	$222,781 \cdot 10^3$	$222,796 \cdot 10^3$	$223,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – E2 [V/m]	$279,661 \cdot 10^3$	$279,680 \cdot 10^3$	$280,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – E3 [V/m]	$438,136 \cdot 10^3$	$438,165 \cdot 10^3$	$438,000 \cdot 10^3$
Carga - Q [C]	$13,959 \cdot 10^{-9}$	$13,966 \cdot 10^{-9}$	$13,966 \cdot 10^{-9}$
Capacitância - C [F]	$4,653 \cdot 10^{-12}$	$4,655 \cdot 10^{-12}$	$4,655 \cdot 10^{-12}$

Os erros são calculados com as seguintes equações:

$$|Erro1| [\%] = \frac{|R_{analítico} - R_{Gmsh/GetDP}|}{R_{analítico}} 100; \quad (4.5)$$

$$|Erro2| [\%] = \frac{|R_{analítico} - R_{FEMM}|}{R_{analítico}} 100; \quad (4.6)$$

$$|Erro3| [\%] = \frac{|R_{Gmsh/GetDP} - R_{FEMM}|}{R_{Gmsh/GetDP}} 100; \quad (4.7)$$

As Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam os erros percentuais dos resultados dos cálculos analíticos e simulados nos modelos de um, dois e três constantes dielétricas entre as placas do capacitor.

Tabela 4.4 – Erros dos resultados com capacitor 2D de um dielétrico.

Erros	Erro1 [%]	Erro2 [%]	Erro3 [%]
Campo Elétrico – E1	0,013	0,013	0,000
Carga - Q	0,059	0,059	0,000
Capacitância - C	0,048	0,048	0,000

Tabela 4.5 – Erros dos resultados com capacitor 2D de dois dielétricos.

Erros	Erro1 [%]	Erro2 [%]	Erro3 [%]
Campo Elétrico – E1	0,006	0,008	0,014
Campo Elétrico – E2	0,020	0,008	0,011
Carga - Q	0,054	0,054	0,000
Capacitância - C	0,054	0,054	0,000

Tabela 4.6 – Erros dos resultados com capacitor 2D de três dielétricos.

Erros	Erro1 [%]	Erro2 [%]	Erro3 [%]
Campo Elétrico – E1	0,098	0,007	0,091
Campo Elétrico – E2	0,121	0,007	0,114
Campo Elétrico – E3	0,031	0,007	0,038
Carga - Q	0,050	0,050	0,000
Capacitância - C	0,043	0,043	0,000

Nota-se que os resultados analíticos foram relativamente iguais aos resultados simulados, devido à simplicidade do modelo estudado. Normalmente a complexidade dos cálculos faz com que seja quase impossível realizar o cálculo analítico relativo aos dispositivos eletromagnéticos pelas interações entre diferentes materiais, geometrias irregulares, demais aspectos construtivos. Este caso mostrou que o *software* Gmsh/GetDP utilizado nesta dissertação é confiável, flexível e bastante preciso. Na subseção 4.2.2 é apresentado o capacitor em três dimensões. As simulações são realizadas nos *software* Flux3D e Gmsh/GetDP. O procedimento dos cálculos é igual para duas e três dimensões.

4.2.2 CAPACITOR COM DIELÉTRICO EM 3D

Neste caso é apresentado um capacitor de placas planas e paralelas cuja área é de A e estão separadas por uma distância d . Uma bateria carrega as armaduras até que a diferença de potencial entre elas seja V , sendo então desligada. Simula-se o capacitor com um, dois e três dielétricos, de constantes dielétricas ϵ_{r1} , ϵ_{r2} e ϵ_{r3} , entre as armaduras do capacitor. A Figura 4.11 mostra os modelos que são estudados neste caso. Analisa-se a capacitância equivalente C , a diferença de potencial V , a carga livre Q nas placas e o campo elétrico no espaço entre as armaduras e o dielétrico E .

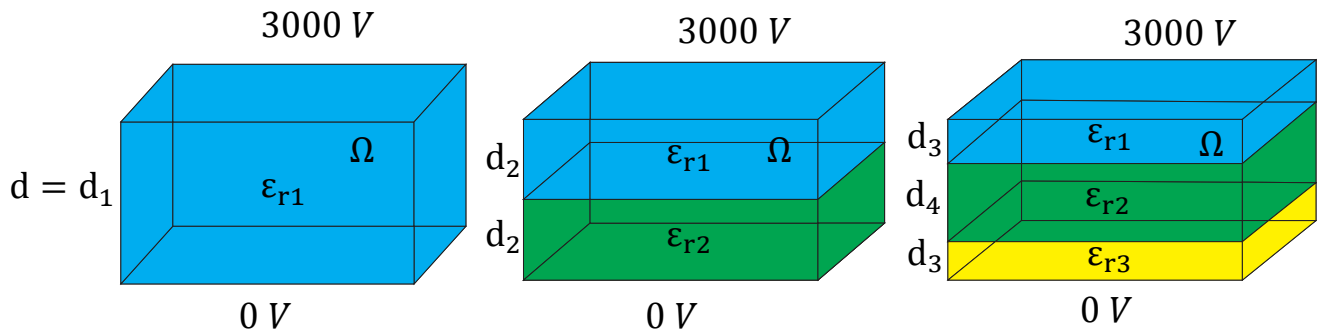


Figura 4.11 – Modelos do caso 4.2.2 com um, dois e três dielétricos em 3D.

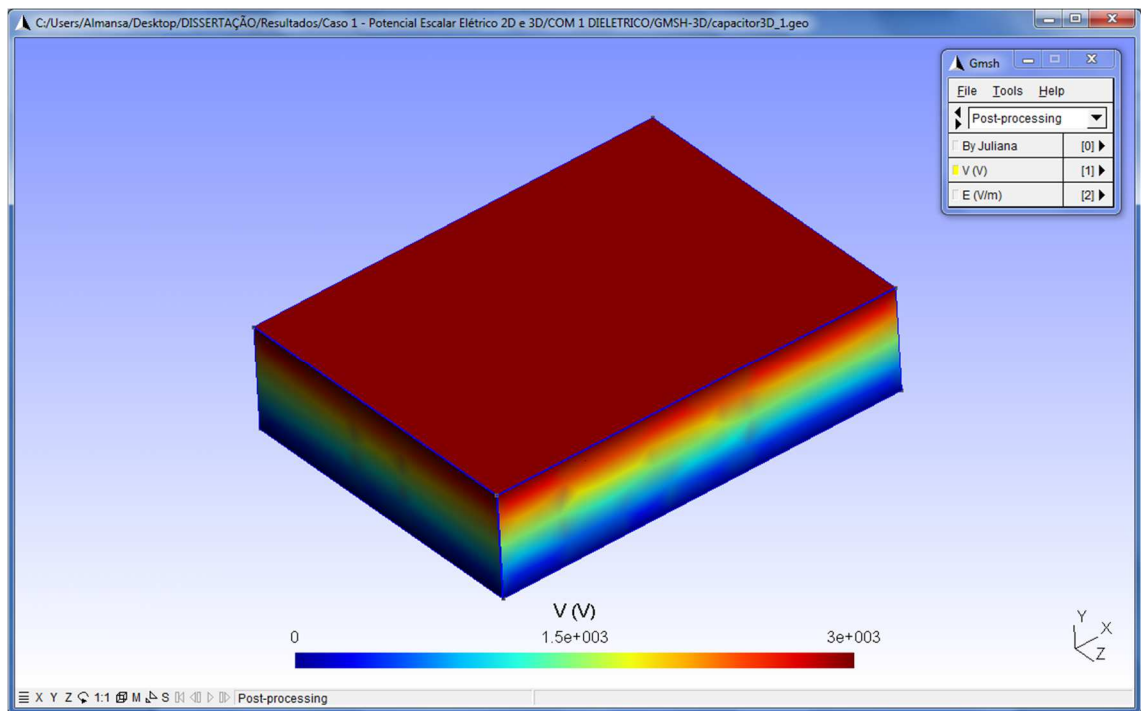
A Figura 4.11 mostra o domínio Ω do modelo eletrostático estudado no Gmsh/GetDP e no Flux 3D. Os valores utilizados na simulação para a referida modelagem é arbitrário, as medidas do capacitor com dielétricos são:

- Área do capacitor: $A = 0,0012 \text{ [m}^2\text{]}$;
- Distância entre as placas: $d = 0,01 \text{ [m]}$;
- Distância entre as placas com um dielétrico:
 $d = d_1 = 0,01 \text{ [m]}$;
- Distância entre as placas com dois dielétricos:
 $d = d_2 + d_2 = 0,005 + 0,005 = 0,01 \text{ [m]}$;
- Distância entre as placas com três dielétricos:
 $d = d_3 + d_4 + d_3 = 0,002 + 0,006 + 0,002 = 0,01 \text{ [m]}$;
- Permissividade do vácuo: $\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} \text{ [F/m]}$;
- Constante dielétrica 1 (Porcelana): $\epsilon_{r1} = 5,9$;
- Constante dielétrica 2 (Vidro): $\epsilon_{r2} = 4,7$;
- Constante dielétrica 3 (Plástico): $\epsilon_{r3} = 3$;
- Diferença de Potencial entre as placas: $V = 3000 \text{ [V]}$.

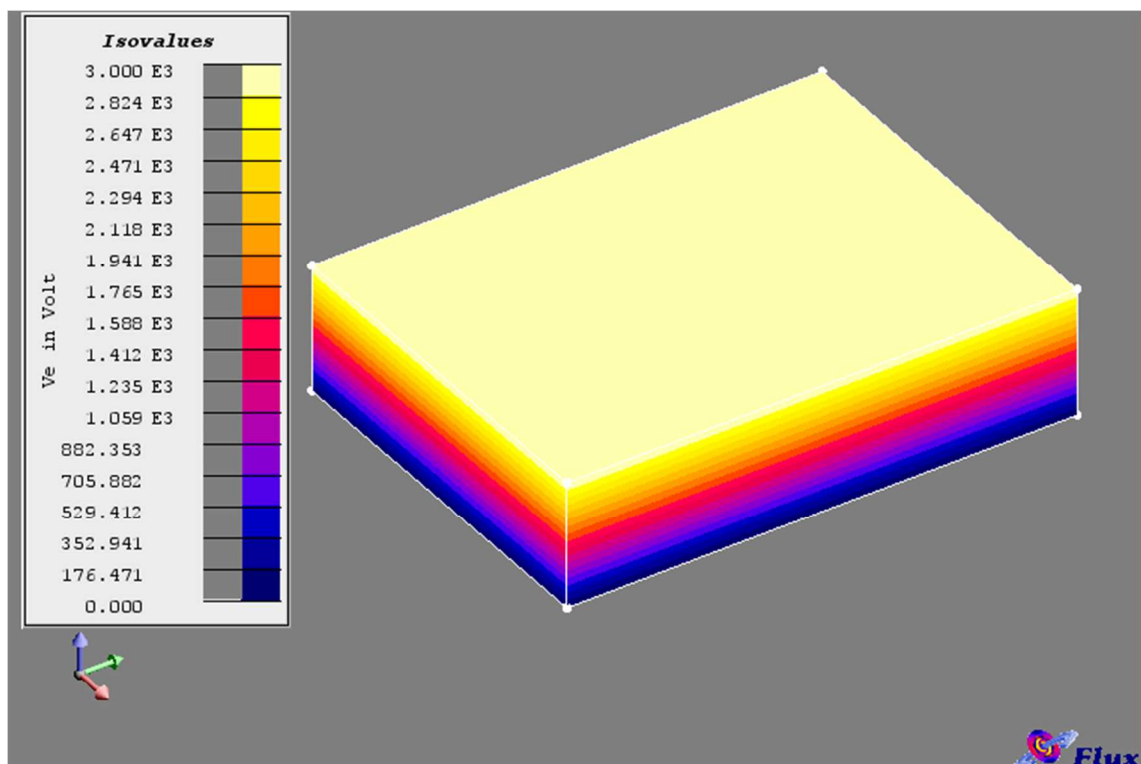
Para comparar os resultados da simulação no Gmsh/GetDP com os valores do cálculo analítico, fez-se o modelo no *software* comercial Flux 3D. A responsável pelas simulações no Flux 3D é a ex-aluna e recém Doutora Elise Saraiva liberada pelo Professor Antônio Carlos Delaiba da Universidade Federal de Uberlândia da Faculdade de Engenharia Elétrica e a empresa responsável pela licença do *software* Flux 3D é a CHESF (Companhia Hidro Elétrica do São Francisco).

O método de elementos finitos é aplicado para um sistema de capacitor com vários dielétricos em 3D. O modelo matemático eletrostático foi desenvolvido no capítulo 2 no item 2.7.1 com as condições de contorno do domínio estudado, as formulações são as mesmas para duas e três dimensões. O programa no GetDP para este caso é mostrado no Apêndice I.

As Figuras 4.12, 4.13 e 4.14 mostram as distribuições do potencial elétrico com um, dois e três dielétricos, respectivamente.

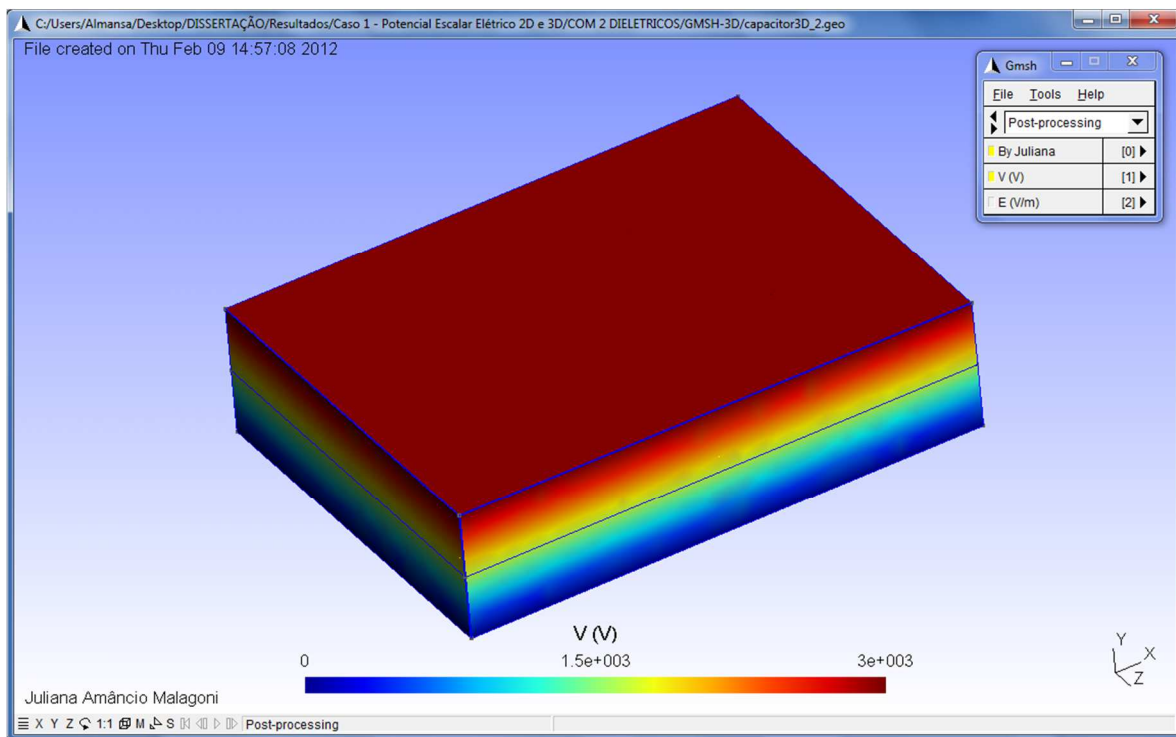


(a)

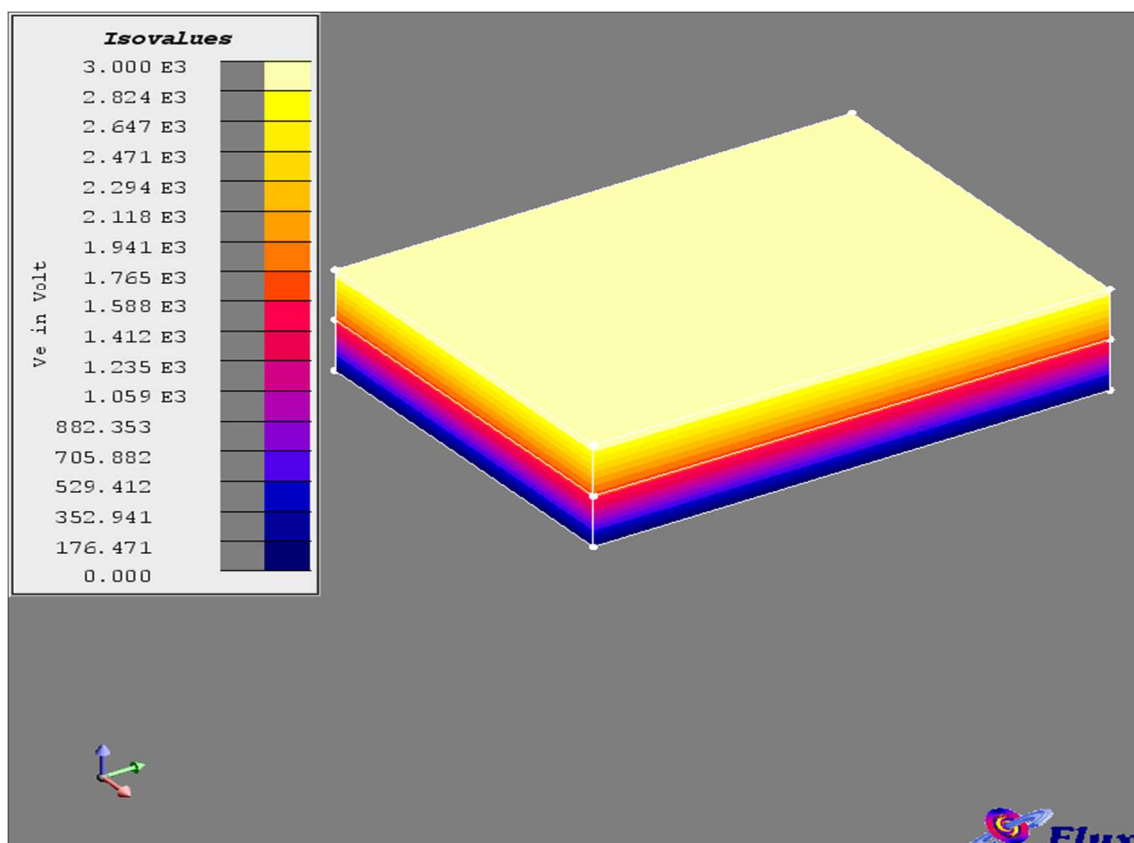


(b)

Figura 4.12 – Distribuição do Potencial: Placas de capacitores com um dielétrico (Porcelana) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no Flux 3D em três dimensões.

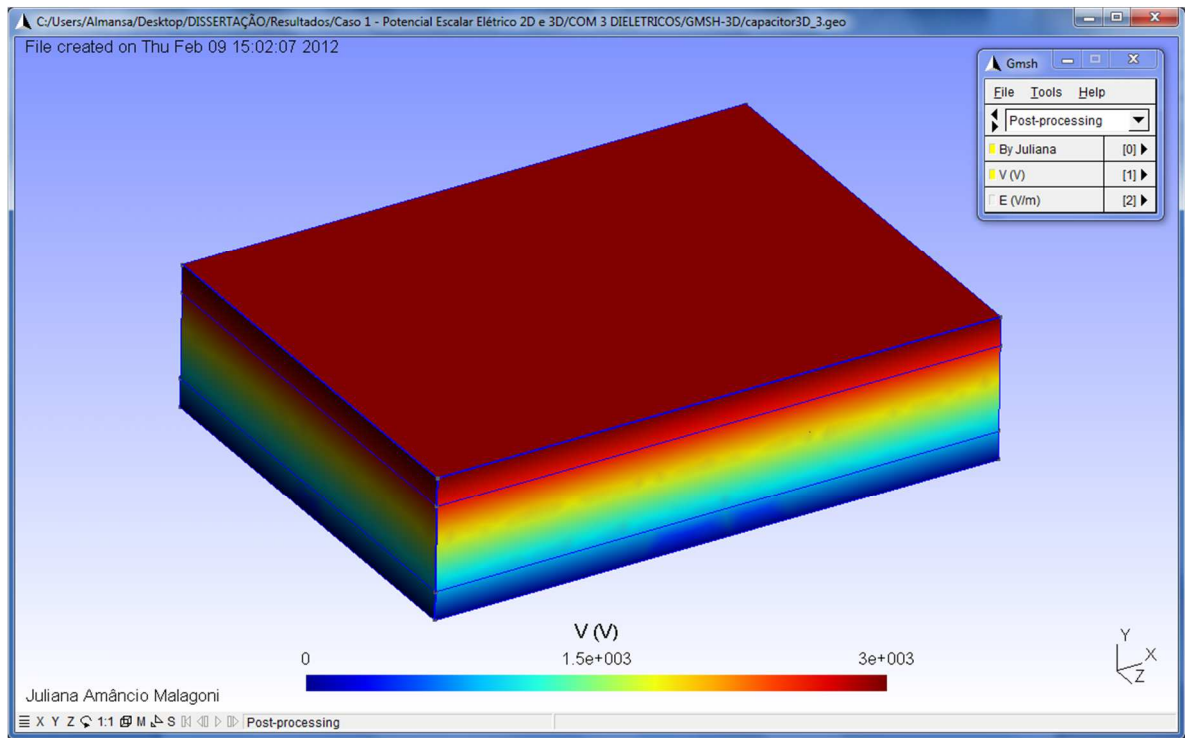


(a)

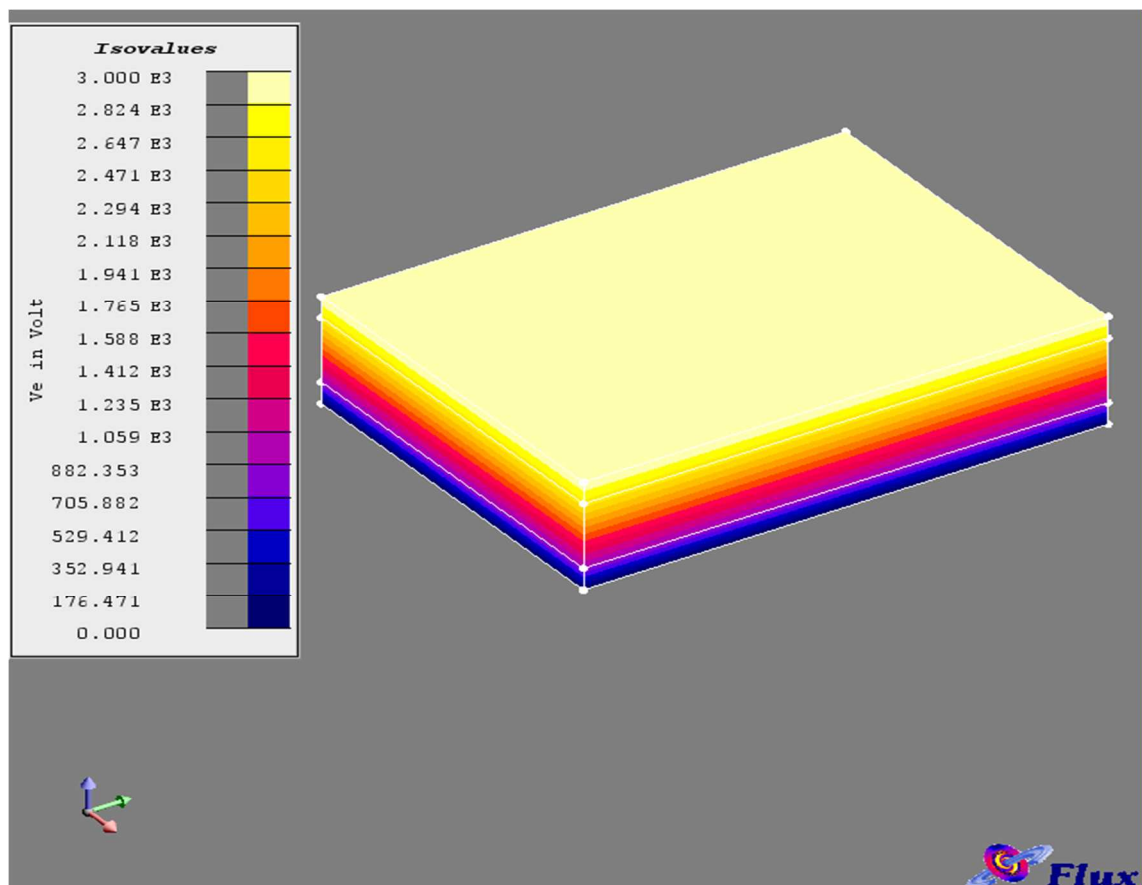


(b)

Figura 4.13 – Distribuição do Potencial: Placas de capacitores com dois dielétricos (Porcelana e Vidro) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no Flux 3D em três dimensões.



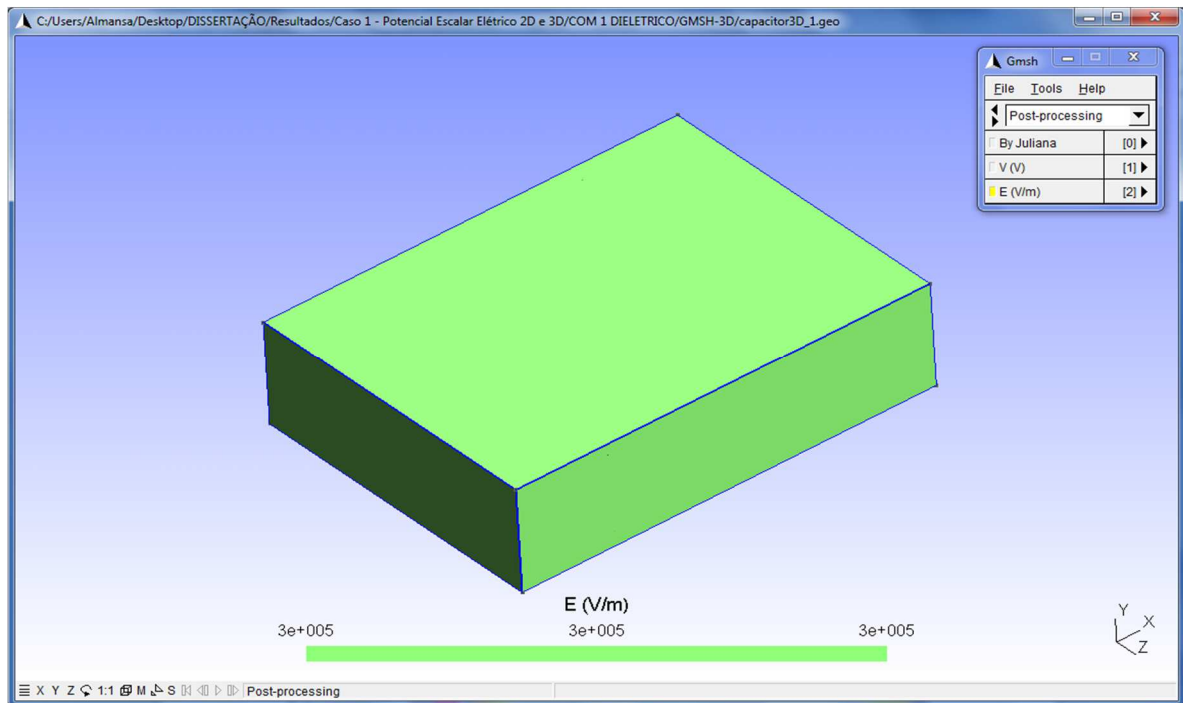
(a)



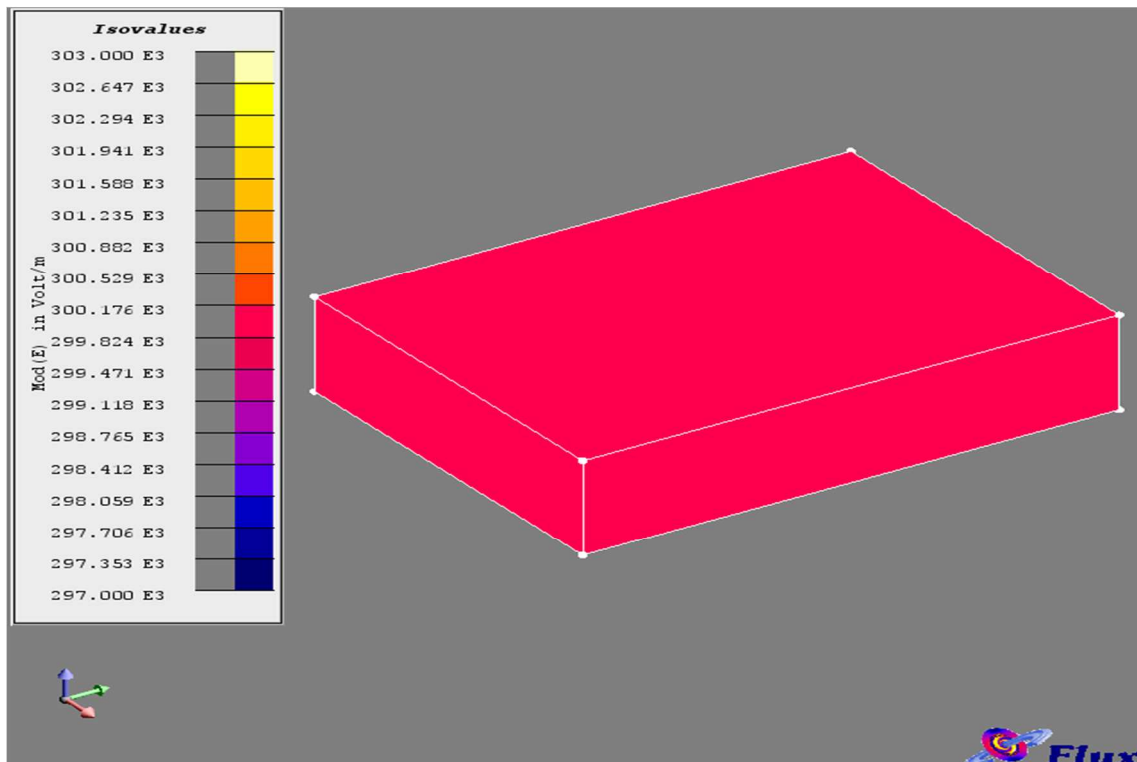
(b)

Figura 4.14 – Distribuição do Potencial: Placas de capacitores com três dielétricos (Porcelana, Vidro e Plástico) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no Flux 3D em três dimensões.

Verifica-se que as equipotenciais propagam-se da placa superior 3000 [V] para a inferior 0 [V]. As Figuras 4.15, 4.16 e 4.17 mostram as distribuições do campo elétrico no espaço entre as placas.

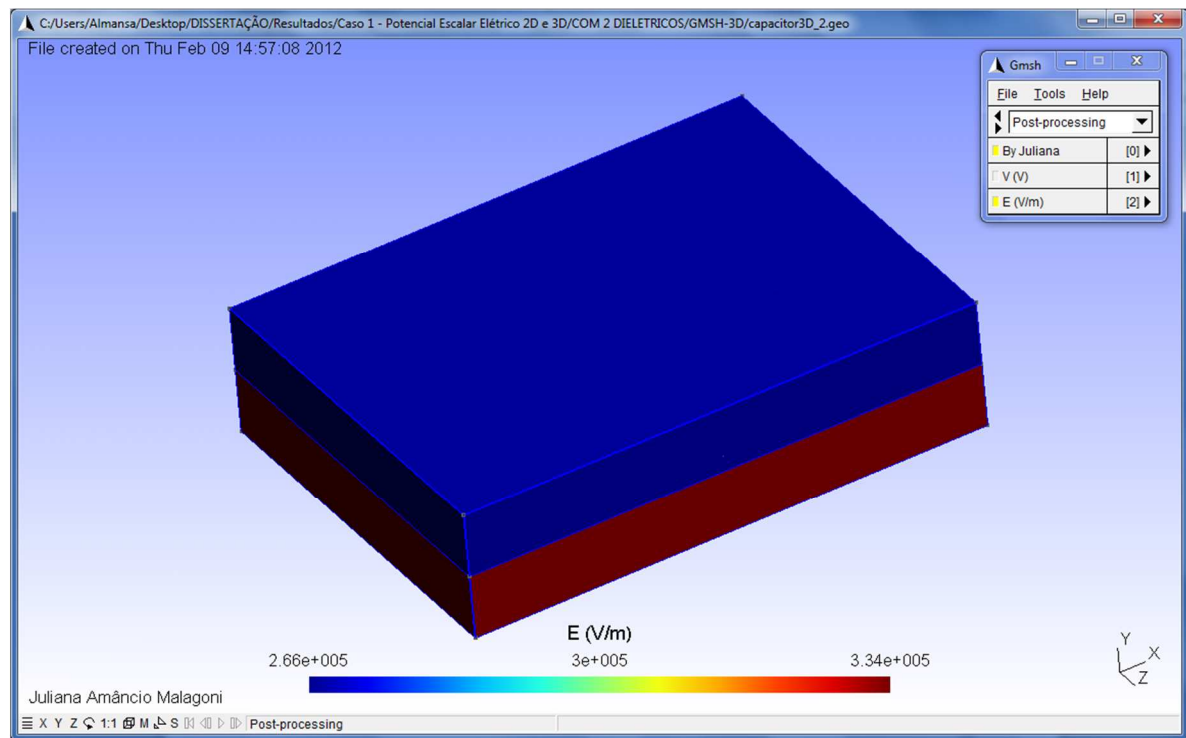


(a)

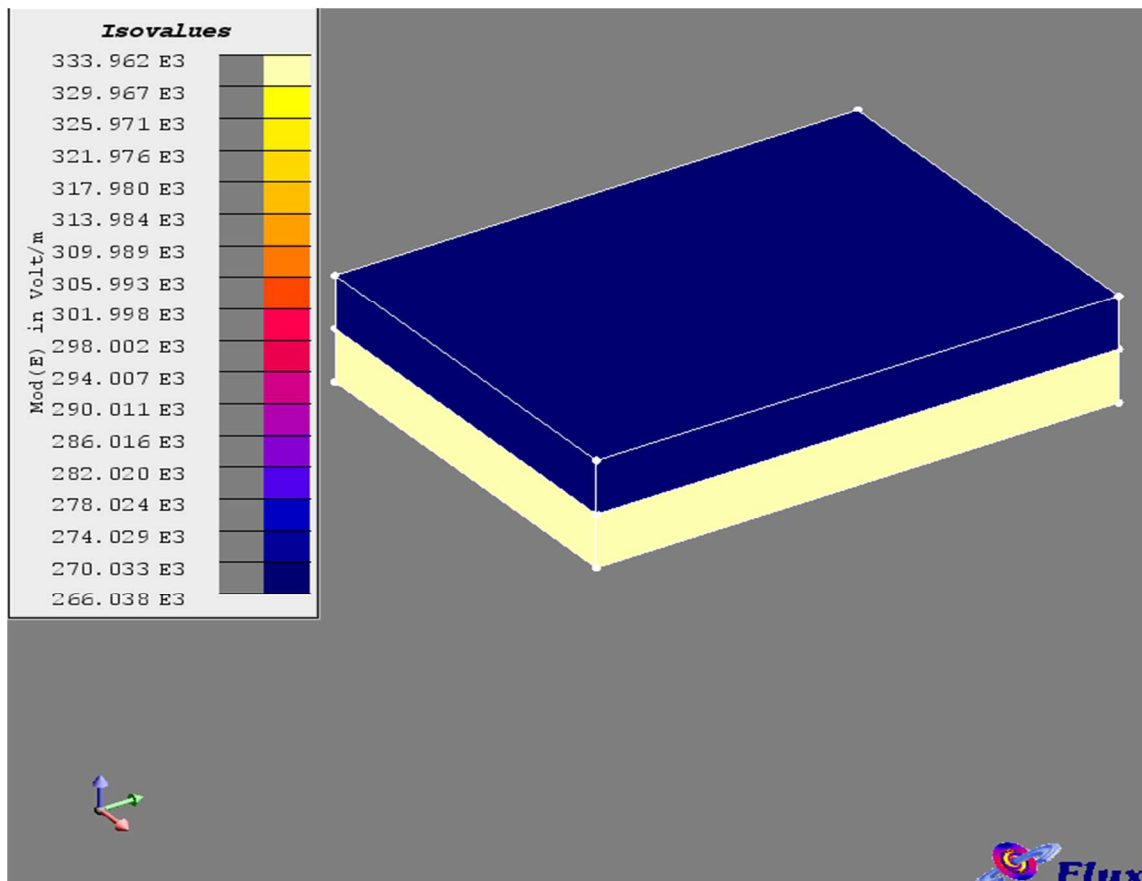


(b)

Figura 4.15 – Distribuição do Campo Elétrico do capacitor com um dielétrico (Porcelana)
(a) no Gmsh/GetDP e (b) no Flux 3D em três dimensões.

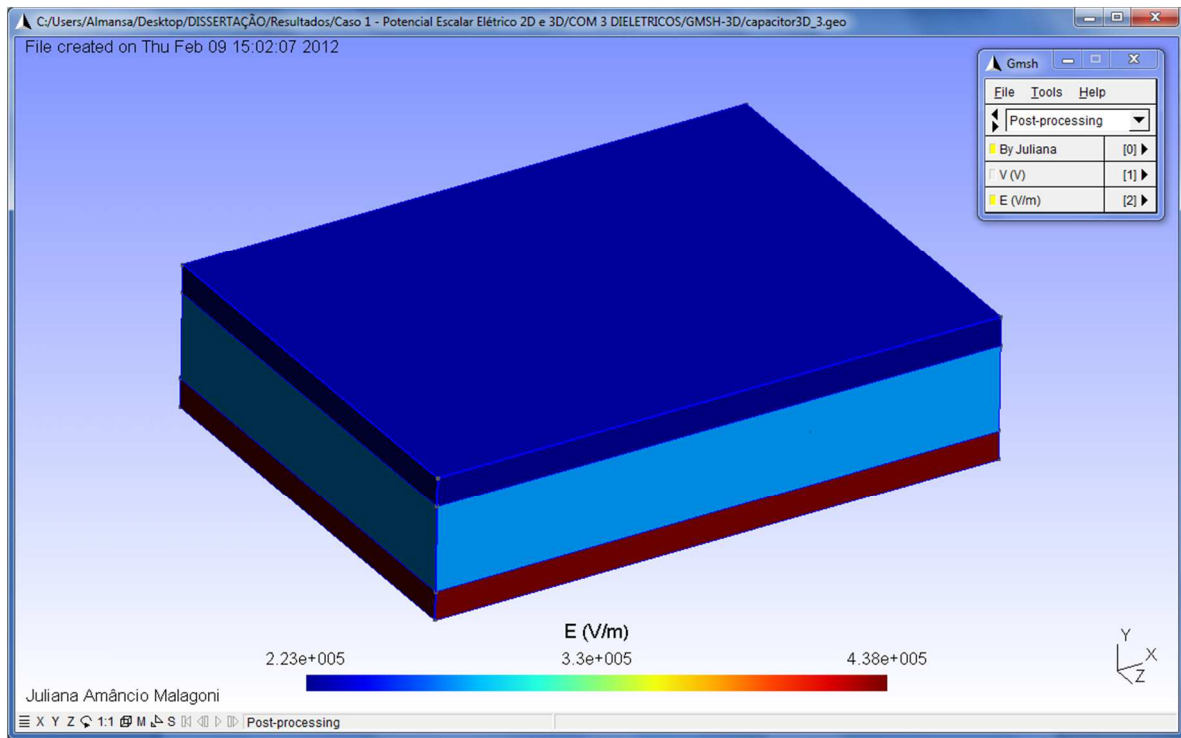


(a)

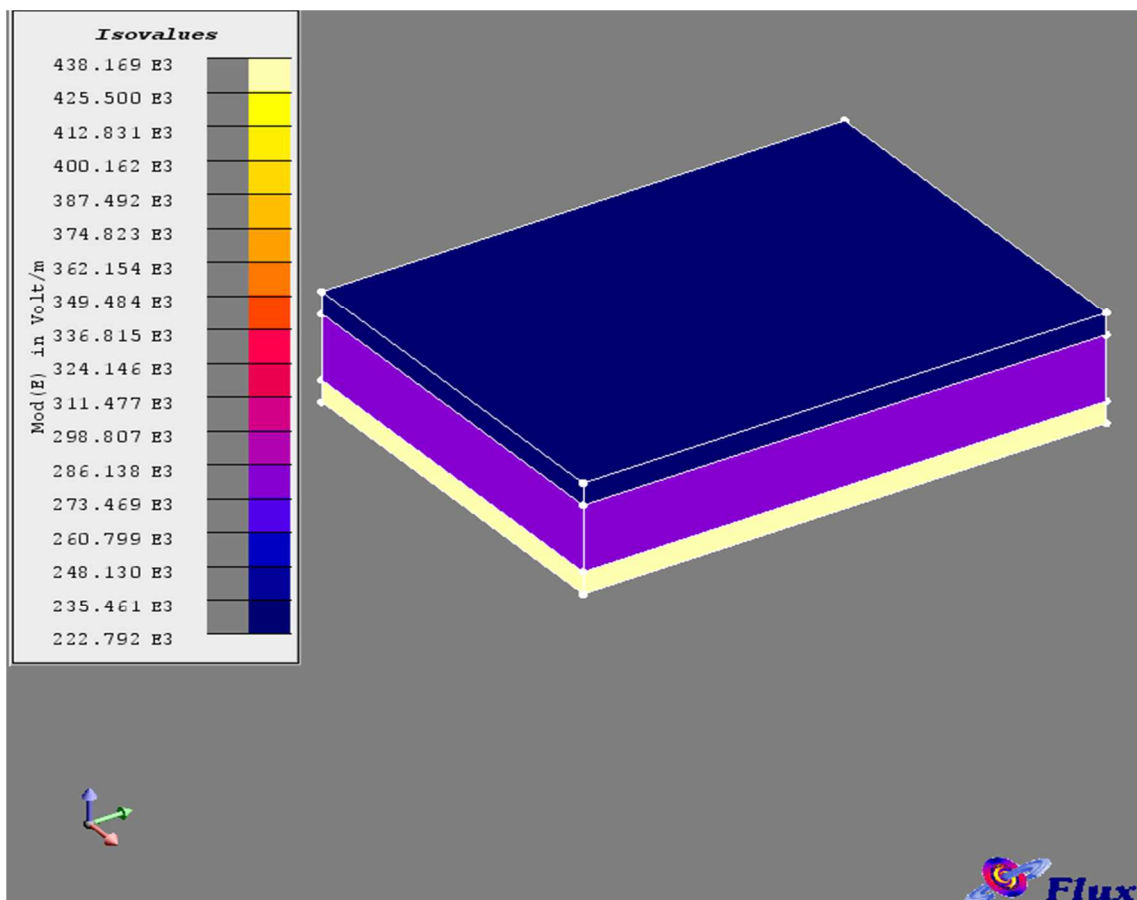


(b)

Figura 4.16 – Distribuição do Campo Elétrico do capacitor com dois dielétricos (Porcelana e Vidro) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no Flux 3D em três dimensões.



(a)



(b)

Figura 4.17 – Distribuição do Campo Elétrico do capacitor com três dielétricos (Porcelana, Vidro e Plástico) (a) no Gmsh/GetDP e (b) no Flux 3D em três dimensões.

Utilizou-se o mesmo procedimento realizado no estudo de caso 4.2.1 desta dissertação para o cálculo analítico da capacitância C , da carga livre Q nas placas e do campo elétrico no espaço entre as armaduras e o dielétrico E .

As Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 apresentam os resultados analíticos e simulados nos *software* Flux 3D e Gmsh/GetDP, respectivamente. Além disso, analisam-se os três modelos estudados.

Tabela 4.7 – Resultados e Comparações do modelo eletrostático em 3D com um dielétrico.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação Flux 3D	Simulação Gmsh/GetDP
Potencial Elétrico - V [V]	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – $E1$ [V/m]	$299,962 \cdot 10^3$	$299,647 \cdot 10^3$	$300,000 \cdot 10^3$
Carga - Q [C]	$18,795 \cdot 10^{-9}$	$18,775 \cdot 10^{-9}$	$18,806 \cdot 10^{-9}$
Capacitância - C [F]	$6,265 \cdot 10^{-12}$	$6,258 \cdot 10^{-12}$	$6,268 \cdot 10^{-12}$

Tabela 4.8 – Resultados e Comparações do modelo eletrostático em 3D com dois dielétricos.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação Flux 3D	Simulação Gmsh/GetDP
Potencial Elétrico - V [V]	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – $E1$ [V/m]	$266,016 \cdot 10^3$	$268,035 \cdot 10^3$	$266,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – $E2$ [V/m]	$333,934 \cdot 10^3$	$331,964 \cdot 10^3$	$334,000 \cdot 10^3$
Carga - Q [C]	$16,668 \cdot 10^{-9}$	$16,683 \cdot 10^{-9}$	$16,677 \cdot 10^{-9}$
Capacitância - C [F]	$5,556 \cdot 10^{-12}$	$5,560 \cdot 10^{-12}$	$5,559 \cdot 10^{-12}$

Tabela 4.9 – Resultados e Comparações do modelo eletrostático em 3D com três dielétricos.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação Flux 3D	Simulação Gmsh/GetDP
Potencial Elétrico - V [V]	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$	$3,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – $E1$ [V/m]	$222,781 \cdot 10^3$	$229,126 \cdot 10^3$	$223,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – $E2$ [V/m]	$279,661 \cdot 10^3$	$279,803 \cdot 10^3$	$280,000 \cdot 10^3$
Campo Elétrico – $E3$ [V/m]	$438,136 \cdot 10^3$	$431,834 \cdot 10^3$	$438,000 \cdot 10^3$
Carga - Q [C]	$13,959 \cdot 10^{-9}$	$14,027 \cdot 10^{-9}$	$13,966 \cdot 10^{-9}$
Capacitância - C [F]	$4,653 \cdot 10^{-12}$	$4,675 \cdot 10^{-12}$	$4,655 \cdot 10^{-12}$

Os erros são calculados com as seguintes equações:

$$|Erro1| [\%] = \frac{|R_{analítico} - R_{Gmsh/GetDP}|}{R_{analítico}} 100; \quad (4.8)$$

$$|Erro2| [\%] = \frac{|R_{analítico} - R_{Flux\ 3D}|}{R_{analítico}} 100; \quad (4.9)$$

$$|Erro3| [\%] = \frac{|R_{Gmsh/GetDP} - R_{Flux\ 3D}|}{R_{Gmsh/GetDP}} 100; \quad (4.10)$$

As Tabelas 4.10, 4.11 e 4.12 apresentam os erros percentuais dos resultados dos cálculos analíticos e simulados nos modelos de um, dois e três dielétricos entre as placas do capacitor em 3D.

Tabela 4.10 – Erros dos resultados com capacitor 3D de um dielétrico.

Erros	Erro1 [%]	Erro2 [%]	Erro3 [%]
Campo Elétrico – E1	0,013	0,105	0,118
Carga - Q	0,059	0,106	0,165
Capacitância - C	0,048	0,112	0,160

Tabela 4.11 – Erros dos resultados com capacitor 3D de dois dielétricos.

Erros	Erro1 [%]	Erro2 [%]	Erro3 [%]
Campo Elétrico – E1	0,006	0,759	0,765
Campo Elétrico – E2	0,020	0,590	0,610
Carga - Q	0,054	0,090	0,036
Capacitância - C	0,054	0,072	0,018

Tabela 4.12 – Erros dos resultados com capacitor 3D de três dielétricos.

Erros	Erro1 [%]	Erro2 [%]	Erro3 [%]
Campo Elétrico – E1	0,098	2,848	2,747
Campo Elétrico – E2	0,121	0,051	0,070
Campo Elétrico – E3	0,031	1,438	1,408
Carga - Q	0,050	0,487	0,437
Capacitância - C	0,043	0,473	0,430

Nota-se que os resultados analíticos foram próximos aos simulados, devido à simplicidade do modelo estudado. Na maioria dos resultados deste caso o *software* livre Gmsh/GetDP apresentou erros percentuais menores do que o *software* comercial Flux 3D. Na seção 4.3 é apresentado o segundo caso que simula um toróide em 3D.

4.3 ESTUDO DO CASO 2 – MODELO MAGNETOSTÁTICO

4.3.1 TORÓIDE EM 3D

Neste caso é apresentado um toróide de N espiras e dimensões tais que a indução magnética B em seu interior possa ser aproximada como uniforme, é tal que R_c é o raio da circunferência que passa até o centro da espira e o raio até a extremidade interna do toróide é $R_e = R_c - r$, onde r é o raio da espira como observado na Figura 4.18.

O toróide possui núcleo de ar, 2000 [espiras], corrente de 15 [A], o raio que passa até o centro da espira é 0,13 [m] e o raio da extremidade interna do toróide é 0,10 [m]. Analisa-se a indução magnética ou densidade de fluxo magnético B [T] e o campo magnético H [A/m] no centro e na extremidade interna do toróide.

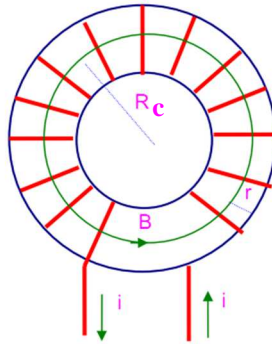
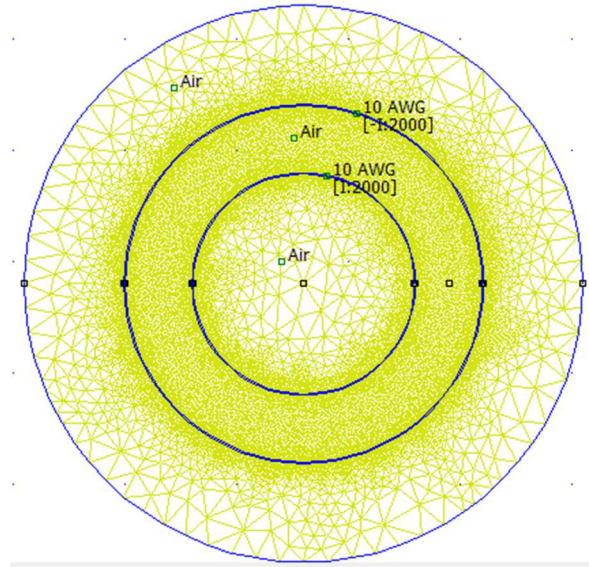


Figura 4.18 – Modelo do toróide estudado.

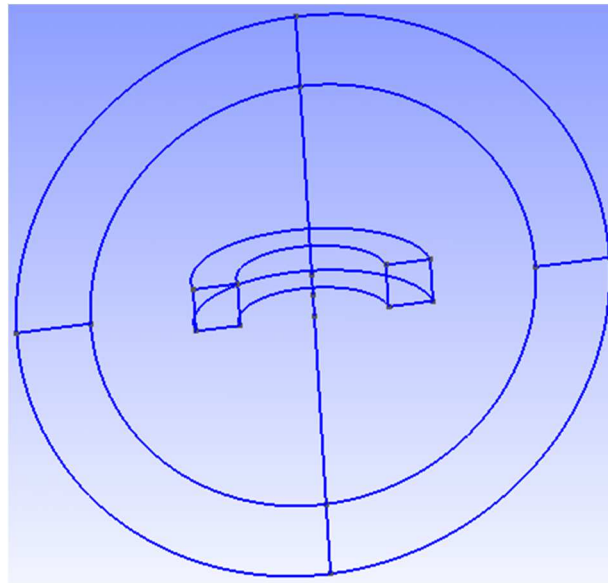
O método de elementos finitos é aplicado para um toróide 3D. O modelo matemático magnetostático foi desenvolvido no capítulo 2 no item 2.7.2 com as condições de contorno do domínio estudado.

Para comparar os resultados da simulação em 3D no Gmsh/GetDP com os valores dos cálculos analíticos, fez-se o modelo em 2D no *software* livre FEMM (*Finite Element Method Magnetics*).

A Figura 4.19(a) mostra o topo do toróide em duas dimensões no *software* FEMM, ou seja, o modelo e as malhas geradas do mesmo. Já a Figura 4.19(b) mostra a vista frontal do toróide em três dimensões no *software* Gmsh/GetDP, ou seja, somente o modelo é observado sem as malhas.



(a)



(b)

Figura 4.19 – Modelo do Toróide com malha (a) no FEMM em duas dimensões e sem malha (b) no Gmsh/GetDP em três dimensões.

A Figura 4.20 mostra a distribuição da densidade de fluxo magnético B [T] no FEMM e no Gmsh/GetDP, respectivamente. Observa-se que os valores são próximos $B = 0,0591$ [T] no FEMM e $B = 0,0592$ [T] no Gmsh/GetDP.

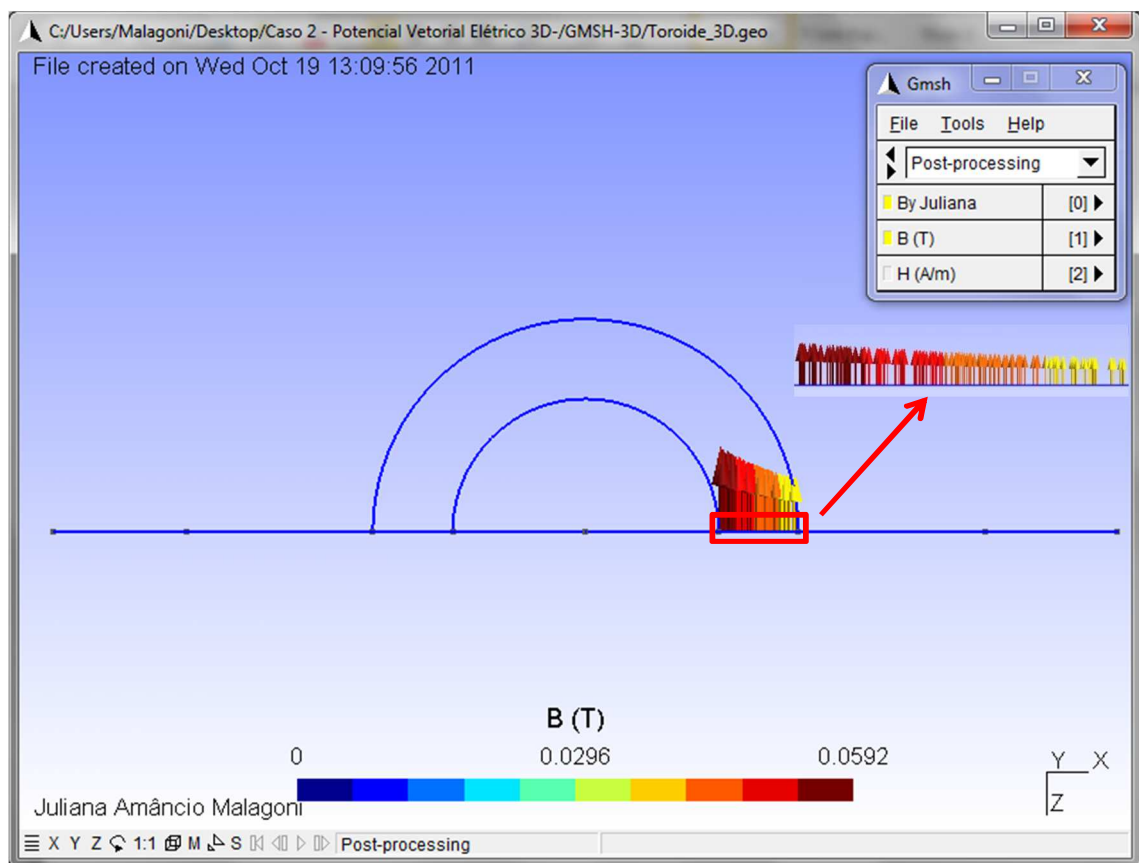
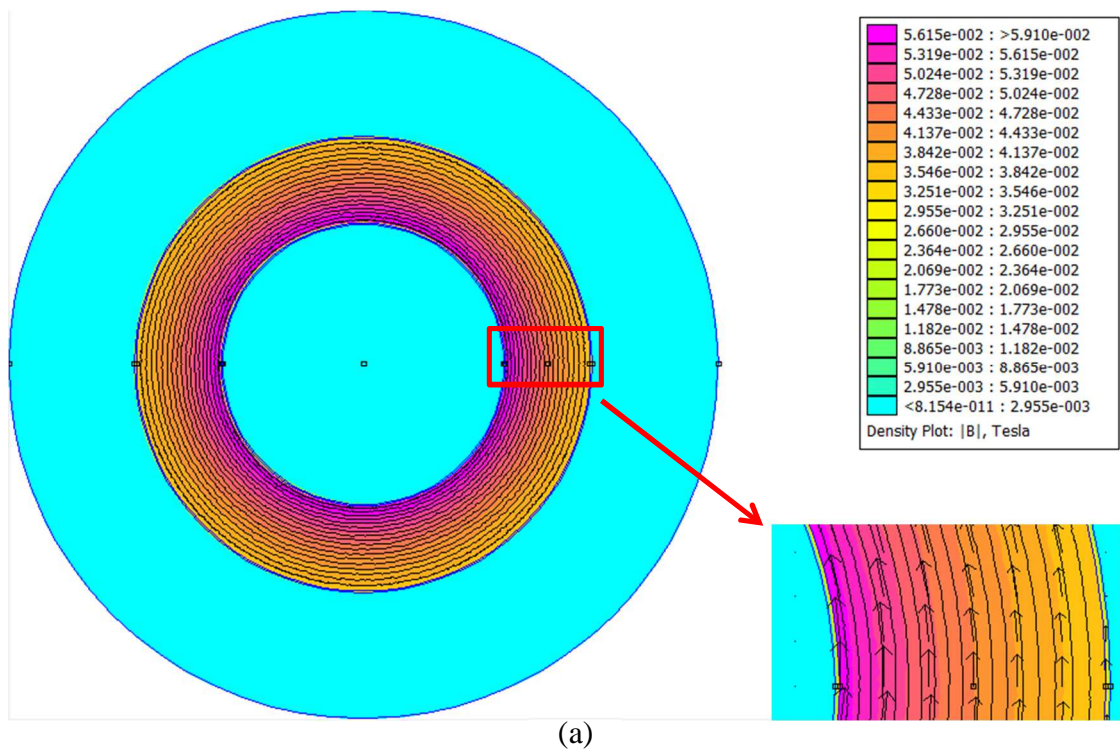


Figura 4.20 - Distribuição da densidade de fluxo magnético B [T] (a) no FEMM em duas dimensões e (b) no Gmsh/GetDP em três dimensões.

Já a Figura 4.21 mostra a distribuição do campo magnético H no FEMM e no Gmsh/GetDP, repectivamente. Observa-se que os valores são próximos $H = 47.087$ [A/m] no FEMM e $H = 47.100$ [A/m] no Gmsh/GetDP.

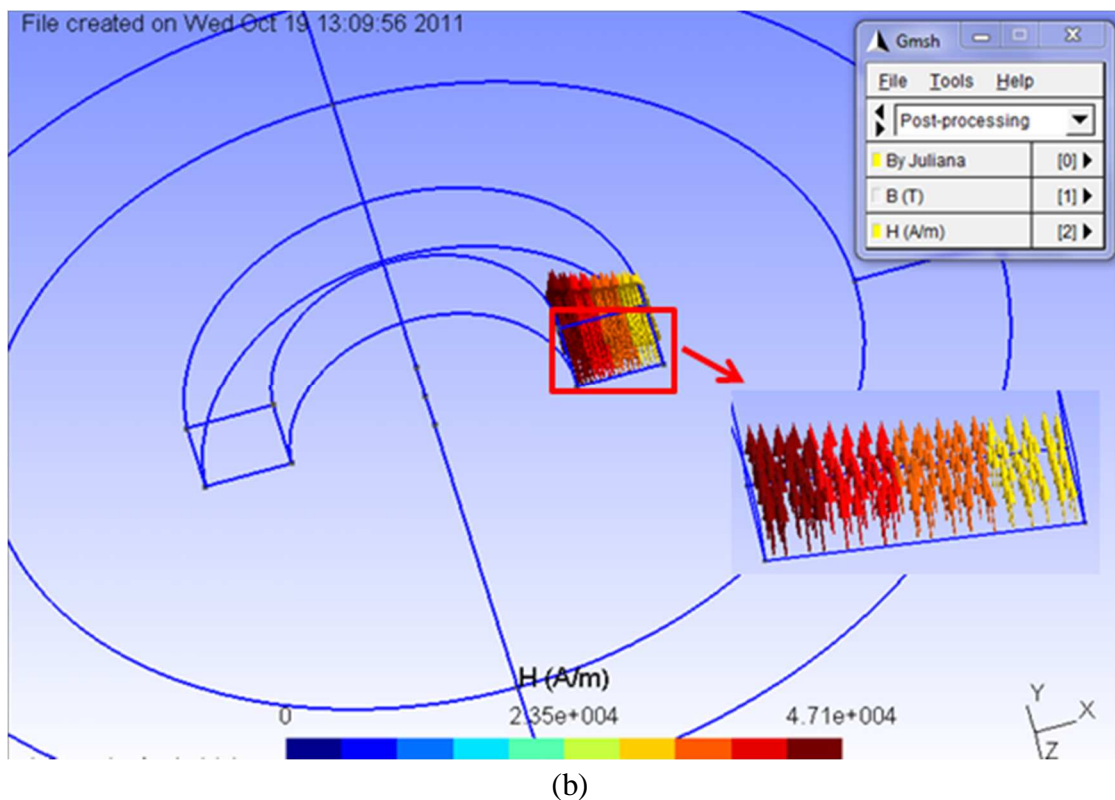
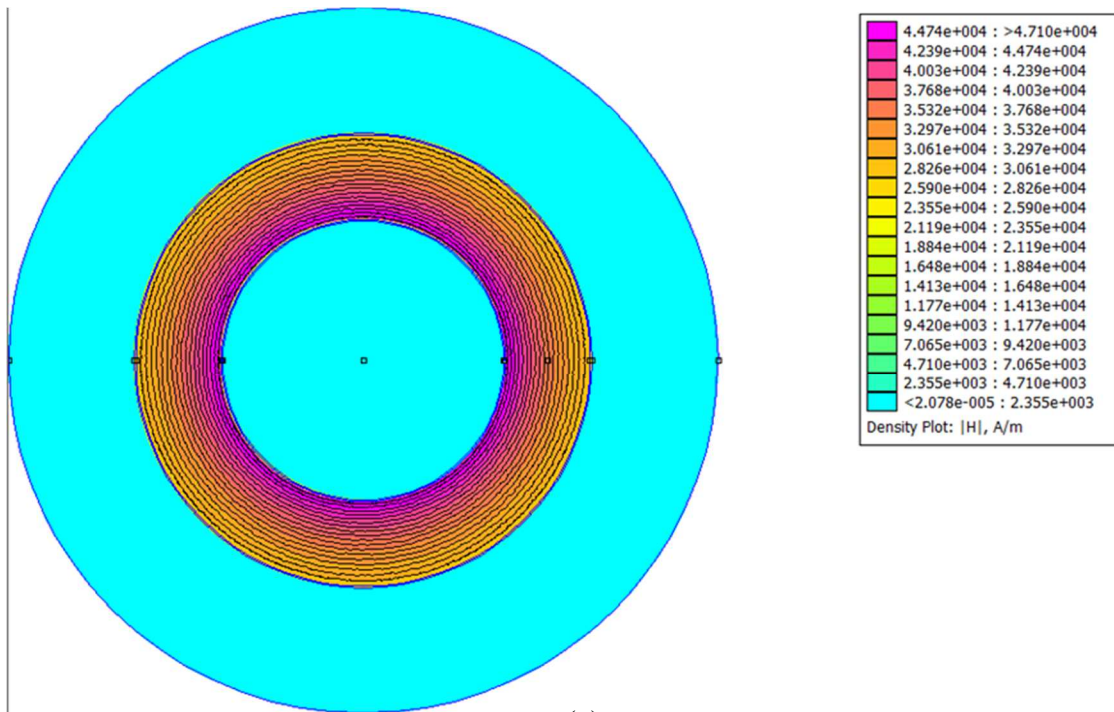


Figura 4.21 - Distribuição do campo magnético H [A/m] (a) no FEMM em duas dimensões e (b) no Gmsh/GetDP em três dimensões.

Os cálculos analíticos da densidade de fluxo magnético B e do campo magnético H do toróide são mostrados a seguir.

Utilizando a *Lei de Ampère*, a indução B no centro e na extremidade interna do toróide são dadas por [7]:

$$Bc = \frac{\mu_0 NI}{2\pi Rc}, \quad (4.11)$$

onde Bc é a densidade de fluxo magnético no centro do toróide $[T]$; μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo (de valor numérico $4\pi * 10^{-7} \text{ H/m}$); N é o número de espiras; I é a corrente $[A]$; Rc é o raio que passa até o centro do toróide $[m]$.

$$Be = \frac{\mu_0 NI}{2\pi Re}, \quad (4.12)$$

onde Be é a densidade de fluxo magnético na extremidade interna do toróide $[T]$; Re é o raio até a extremidade interna do toróide $[m]$.

A lei de comportamento do material (ou relação constitutiva), que estabelece a relação entre campo magnético e o meio em que estão inseridos é dada pela seguinte equação [7]:

$$Hc = \frac{Bc}{\mu_0}, \quad (4.13)$$

onde Hc é o campo magnético no centro do toróide $[A/m]$.

$$He = \frac{Be}{\mu_0}, \quad (4.14)$$

onde He é o campo magnético na extremidade interna do toróide $[A/m]$.

A Tabela 4.13 apresenta os resultados analíticos e simulados nos *software* FEMM e Gmsh/GetDP, respectivamente. Além disso, analisam-se os campos magnéticos e a densidade de fluxo no centro e na extremidade do toróide estudado.

Tabela 4.13 – Resultados e Comparações do modelo magnetostático no FEMM em duas dimensões e no Gmsh/GetDP em três dimensões.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação FEMM	Simulação Gmsh/GetDP
Densidade de Fluxo - Bc [T]	0,0462	0,0463	0,0465
Densidade de Fluxo - Be [T]	0,0600	0,0591	0,0592
Campo Magnético - Hc [A/m]	36,765*10 ³	36,822*10 ³	36,900*10 ³
Campo Magnético - He [A/m]	47,746*10 ³	47,087*10 ³	47,100*10 ³

Os erros são calculados com as seguintes equações:

$$|Erro1| [\%] = \frac{|R_{analítico} - R_{Gmsh/GetDP}|}{R_{analítico}} 100; \quad (4.15)$$

$$|Erro2| [\%] = \frac{|R_{analítico} - R_{FEMM}|}{R_{analítico}} 100; \quad (4.16)$$

$$|Erro3| [\%] = \frac{|R_{Gmsh/GetDP} - R_{FEMM}|}{R_{Gmsh/GetDP}} 100; \quad (4.17)$$

A Tabela 4.14 apresenta os erros percentuais dos resultados dos cálculos analíticos e simulados no modelo magnetostático.

Tabela 4.14 – Erros dos resultados do modelo magnetostático no Gmsh/GetDP em três dimensões e no FEMM em duas dimensões.

Erros	Erro1 [%]	Erro2 [%]	Erro3 [%]
Densidade de Fluxo - Bc [T]	0,649	0,216	0,430
Densidade de Fluxo - Be [T]	1,333	1,500	0,169
Campo Magnético - Hc [A/m]	0,375	0,155	0,211
Campo Magnético - He [A/m]	1,353	1,400	0,028

Observa-se erros pequenos nos resultados do FEMM e do Gmsh/GetDP em comparação aos cálculos analíticos. Além disso, os cálculos realizados em cada *software* são diferentes. E o modelo feito no FEMM em duas dimensões é escalar (representado por mapa de cores), enquanto no Gmsh/GetDP em três dimensões é vetorial (representado por setas tridimensionais). Na seção 4.4 é apresentado um modelo eletrocinético em três dimensões (simulação de um circuito com resistores). As simulações são realizadas nos *software* ATP (*Alternative Transient Program*) e no Gmsh/GetDP.

4.4 ESTUDO DO CASO 3 – MODELO ELETRODINÂMICO

4.4.1 CIRCUITO ELÉTRICO EM 3D

Neste caso é apresentado um circuito elétrico resistivo. Para comparar os resultados da simulação no Gmsh/GetDP com os valores dos cálculos analíticos, fez-se o modelo no *software* ATP (*Alternative Transient Program*).

Utilizou-se o *software* livre ATP que é um programa completo de análise de transitórios, inicialmente desenvolvido para sistemas de energia elétrica. E é capaz de simular controles, eletrônica de potência e circuitos elétricos.

O circuito elétrico possui quatro resistores de valores 10, 16 e 20 Ohms e uma fonte de tensão contínua de 24 Volts. Analisa-se a corrente e tensão no resistor de 10 Ohms entre os nós 2 e 10, a corrente e tensão no resistor de 20 Ohms entre os nós 3 e 10 conforme a Figura 4.22.

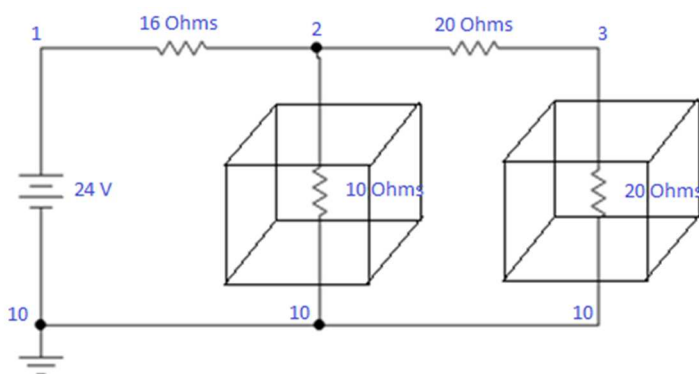


Figura 4.22 – Modelagem do Circuito Elétrico 3D estudado.

A Figura 4.22 mostra o circuito elétrico modelado neste caso e os cubos são unitários e modelados no Gmsh/GetDP representando as resistências que são analisadas.

Os valores utilizados na simulação para a referida modelagem é arbitrário, as medidas da representação do circuito são:

- Resistência entre os nós 1 e 2: $R = 16 \text{ } [\Omega]$;
- Resistência entre os nós 2 e 3: $R = 20 \text{ } [\Omega]$;
- Resistência entre os nós 2 e 10: $R = 10 \text{ } [\Omega]$;
- Resistência entre os nós 3 e 10: $R = 20 \text{ } [\Omega]$;
- Tensão da Fonte Contínua: $V = 24 \text{ } [\text{V}]$.

A Figura 4.23 representa a simulação do circuito elétrico no *software* ATP.

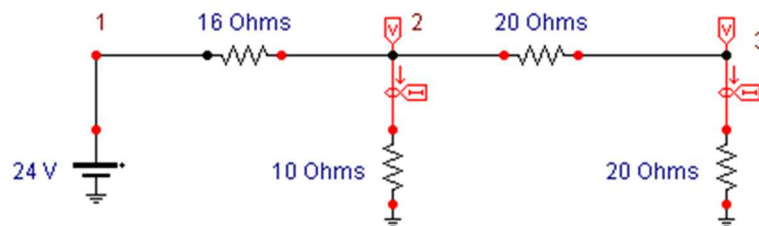


Figura 4.23 – Simulação do Circuito Elétrico no software ATP.

Aplicou-se o método de elementos finitos para um circuito elétrico. A Figura 4.24 mostra o domínio Ω do modelo eletrocinético estudado no Gmsh/GetDP. O modelo matemático eletrocinético é mencionado no capítulo 2 no item 2.7.3 com as condições de contorno do domínio estudado.

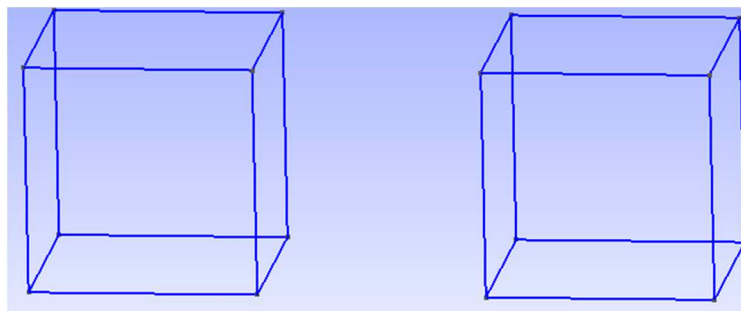
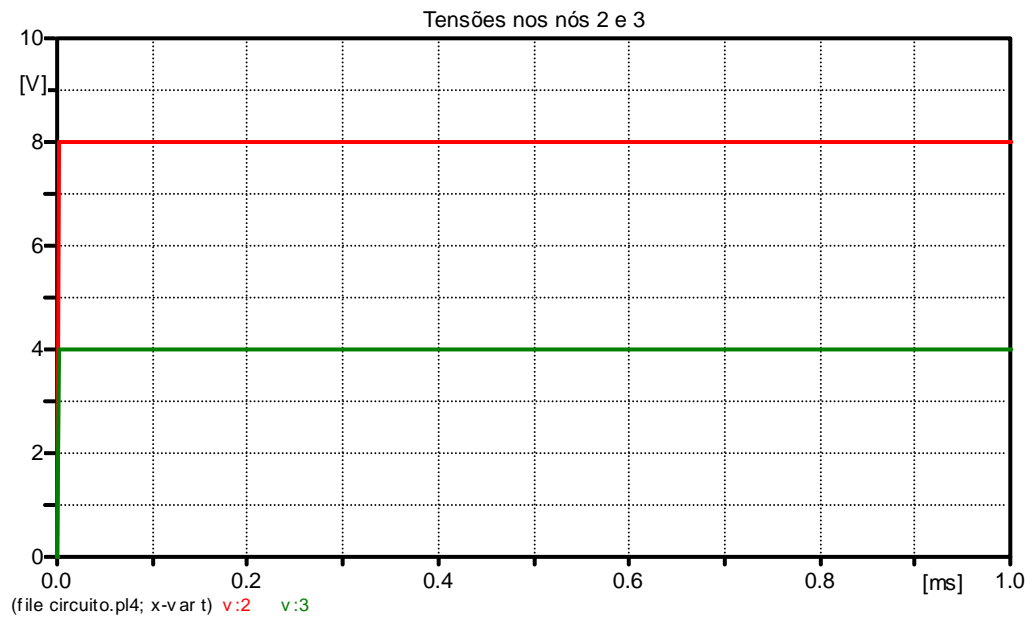
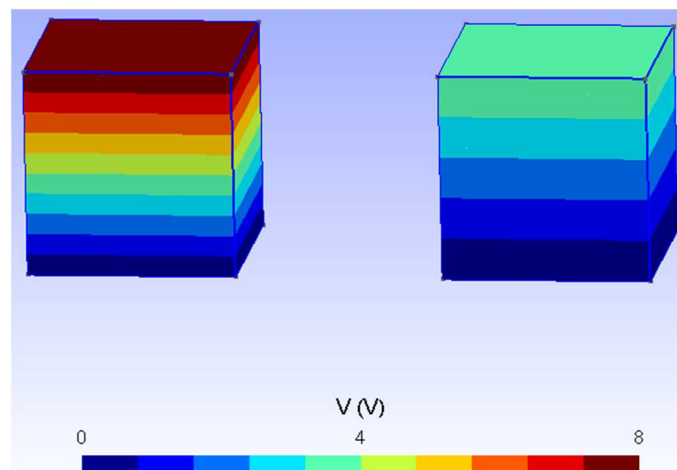


Figura 4.24 – Modelo do Circuito Elétrico em 3D no software Gmsh/GetDP.

A Figura 4.25 representa os resultados nos *software* ATP e Gmsh/GetDP das tensões nos nós 2 e 3 do circuito elétrico nos resistores de 10 e 20 ohms, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 4.25 – Simulações das Tensões nos resistores de 10 e 20 Ohms do circuito estudado (a) no ATP em forma de gráfico e (b) no Gmsh/GetDP em três dimensões.

Observou-se no Gmsh/GetDP uma tensão de 8 Volts (cor vermelha no cubo esquerdo) entre os nós 2 e 10 no resistor de 10 Ohms. Além disso, a tensão entre os nós 3 e 10 no resistor de 20 Ohms é de 4 Volts (cor verde no cubo direito).

A Figura 4.26 mostra as simulações com os resultados das correntes nos resistores de 10 e 20 Ohms nos *software* ATP e Gmsh/GetDP, respectivamente.

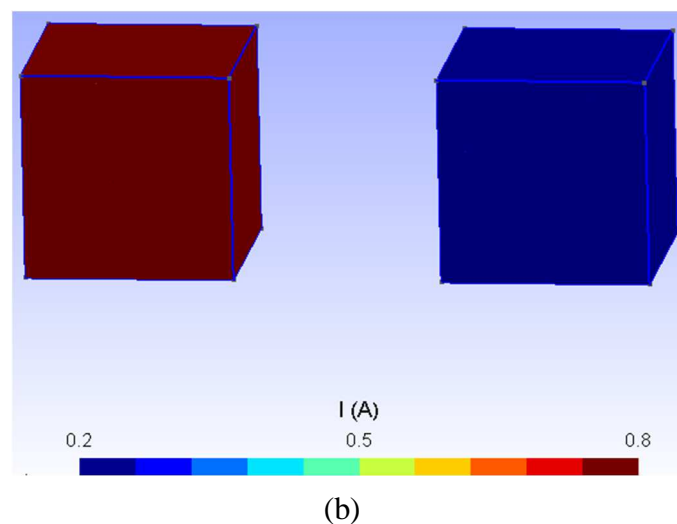
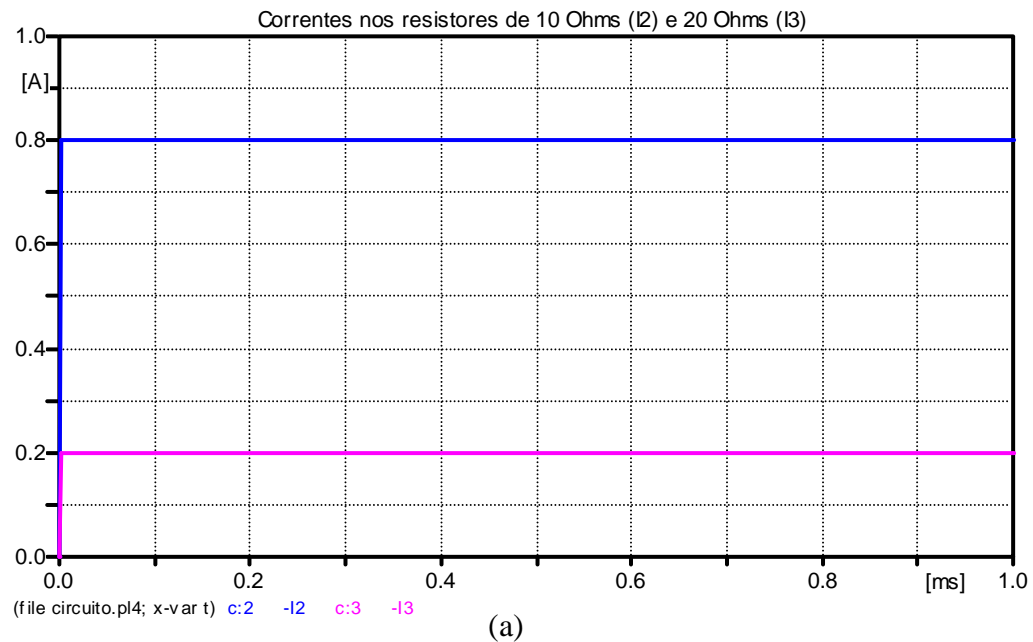


Figura 4.26 – Simulações das Correntes nos resistores de 10 e 20 Ohms do circuito estudado (a) no ATP em forma de gráfico e (b) no Gmsh/GetDP em três dimensões.

A Figura 4.27 mostra os vetores de corrente que circula em cada resistor. No cubo da esquerda representado pelo resistor de 10 Ohms passa uma corrente de 0,8 A e no cubo da direita representado pelo resistor de 20 Ohms passa uma corrente de 0,2 A.

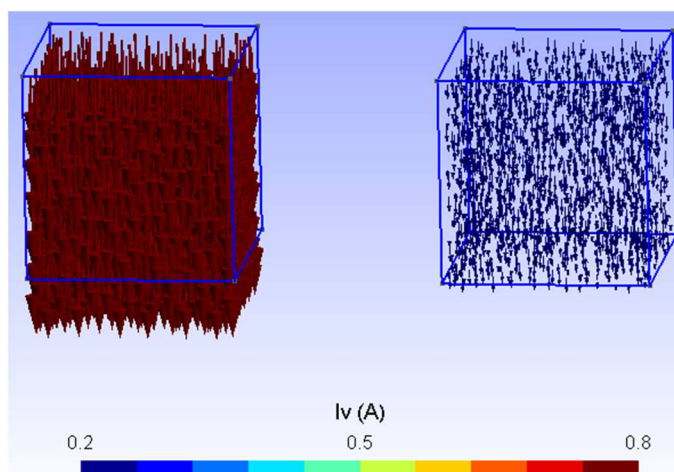


Figura 4.27 – Simulação dos Vetores de Correntes nos resistores de 10 e 20 Ohms do circuito estudado no Gmsh/GetDP em três dimensões.

Nota-se que a intensidade de vetores no cubo da esquerda é maior do que o cubo da direita devido o valor da corrente no resistor de 10 *ohms* ser maior do que o resistor de 20 *ohms* (cubo da direita).

Os cálculos analíticos da corrente I e tensão V nos resistores em paralelo com a fonte de tensão do circuito elétrico são obtidos usando as equações a seguir [7]:

$$V = RI; \quad (4.18)$$

onde V é a tensão da fonte [V]; R é a resistência do material [Ω]; I é a corrente que circula no circuito [A].

Os resultados dos cálculos analíticos, simulados no ATP e no Gmsh/GetDP são iguais mas com maneiras diferentes de realizar o mesmo caso. A Tabela 4.15 apresenta os resultados analíticos e os resultados simulados nos *software* ATP e Gmsh/GetDP.

Tabela 4.15 – Resultados e Comparações do modelo eletrocinético em 3D.

Resultados Analisados	Cálculo Analítico	Simulação ATP	Simulação Gmsh/GetDP
Tensão no resistor 10 Ohms - V [V]	8,000	8,000	8,000
Corrente no resistor 10 Ohms - I [A]	0,800	0,800	0,800
Tensão no resistor 20 Ohms - V [V]	4,000	4,000	4,000
Corrente no resistor 20 Ohms - I [A]	0,200	0,200	0,200

Nota-se que os resultados analíticos são iguais aos resultados simulados, devido à simplicidade do modelo estudado. Este caso mostrou que o *software* Gmsh/GetDP utilizado nesta dissertação é bastante confiável e gratuito comparando com outros *software* comerciais de elementos finitos.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos para três casos: eletrostático (uma placa de capacitor com vários dielétricos representado em duas e três dimensões), magnetostático (um toróide tridimensional) e eletrocinético (um circuito elétrico resistivo em três dimensões).

Através dos resultados das simulações, obteve-se uma comparação com o equacionamento analítico dos sistemas estudado e todas as simulações se mostraram coerentes com os *software* que foram usados.

5 Conclusões

5.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O estudo realizado no presente trabalho teve como princípio a determinação, através de uma metodologia computacional, de modelos matemáticos tridimensionais, levando em conta as equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. Além da discretização dos campos pelo método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*, destinados à análise de problemas de eletromagnetismo.

Para o desenvolvimento desta metodologia buscou-se por *software* e modelos que pudessem assessorar o objetivo do trabalho. Optou-se por empregar o programa computacional Gmsh/GetDP de domínio público e tridimensional que utiliza o método de elementos finitos para a realização dos cálculos. Para os estudos propostos nesta dissertação, simularam três modelos um para estudo eletrostático, um para magnetostático e outro para eletrocinético.

Os resultados obtidos em tais simulações foram confrontados com parâmetros calculados analiticamente e com simulações realizadas em outros *software* como o FEMM, o ATP e o FLUX3D. As confrontações de resultados obtidos através das simulações, com os obtidos via cálculos analíticos possibilitaram a validação dos modelos.

Analizando as simulações, os erros são pequenos e muitas das vezes podem ser considerados desprezíveis. No entanto, os estudos aqui apresentados demonstram que estas já indicam uma alteração na geometria, por exemplo, modelos em 2D ou 3D e nos cálculos realizados por cada *software*. Pelo fato destes, os resultados que tiveram pequenos erros podem ser desconsiderados.

De uma maneira geral, este trabalho contribuiu com alguns estudos e análises que vão dar subsídios a trabalhos futuros. Considerando as propostas iniciais, pode-se dizer que a dissertação em questão conseguiu cumprí-las. Destaca-se a confiabilidade do *software* livre Gmsh/GetDP para a determinação de variáveis magnéticas e eletrostáticas. E as formulações foram adequadas para a análise durante todo o processo de simulação dos três casos estudados.

Na maioria das vezes medições reais são de difícil execução, de forma que, simulações computacionais, tais como as realizadas neste trabalho, por exemplo, contribuem para uma análise mais descomplicada que pode inclusive indicar antecipadamente possíveis falhas em dispositivos eletromecânicos.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apresentam-se alguns temas indicativos para um maior aprofundamento:

- Realizar estudos em conversão eletromecânica que envolva a troca de energia entre um sistema mecânico e um sistema elétrico através de um campo de acoplamento, que pode ser de origem elétrica ou magnética.
- Estudos de dispositivos a semicondutores: modelagem física mais termodinâmica (definição de operações em sobrecargas e outras condições não nominais em resumo, definição de condições de operação limites, definição de sistemas de dissipação compactos, etc.).
- Análise de degradação de contatos ôhmicos em capacitores eletrolíticos e de polipropileno: impulsos de corrente são mais críticos que energia envolvida (acoplar equações físicas, elétricas, térmicas e mecânicas para melhor entendimento dos fenômenos).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - DA LUZ, M. V. F., **Desenvolvimento de um Software para Cálculo de Campos Eletromagnéticos 3D Utilizando Elementos de Aresta, Levando em Conta o Movimento e o Circuito de Alimentação.** Tese de Doutorado, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- [2] - AREND. E. R., **Estudo de Aterramento em Baixas Frequências Usando a Formulação Eletrocinética Associada ao Método de Elementos Finitos.** Dissertação de Mestrado, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.
- [3] - DULAR P., GEUZAINÉ C., **Gmsh Reference Manual.** University of Liège, Departament of Electrical Engineering (2009).
- [4] - DULAR P., GEUZAINÉ C., **GetDP Reference Manual.** University of Liège, Departament of Electrical Engineering (2009).
- [5] - REECE A. B. J., PRESTON T. W., **Finite Element Methods in Electrical Power Engineering.** Oxford University Press, 2000.
- [6] - BOSSAVIT A., **Computational Electromagnetism Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements.** Électricité de France, ACADEMIC PRESS, 1998.
- [7] - GUIMARÃES, Geraldo C. **Apostila de Conceitos Teóricos e Exercícios Propostas de Eletromagnetismo.** Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- [8] - DULAR P., **Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires.** Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 1996.
- [9] - GEUZAINÉ C., **High order hybrid finite element schemes for Maxwell's equations taking thin structures and global quantities into account.** Tese de Doutorado, Université de Liège, outubro de 2001, Bélgica.
- [10] - DA LUZ, M. V. F, DULAR P., SADOWSKI N., GEUZAINÉ C., BASTOS J. P. A., **Analysis of a Permanent Magnet Generator with Dual Formulations Using Periodicity Conditions and Moving Band.** IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, nº 2, March 2002.

- [11] - DREHER T., MEUNIER G., **3D Line Current Model of Coils and External Circuits**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, n° 3, May 1995.
- [12] - BOSSAVIT A., **A Rationale for “Edge-Elements” in 3D Fields Computations**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, n° 1, January 1988.
- [13] - DA LUZ, M. V. F, DULAR P., SABARIEGO R. V., KUO-PENG P., BATISTELA N. J., **Electrokinetic Model Refinement Via a Perturbation Finite Method – From 2D to 3D**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 46, n° 8, August 2010.
- [14] - REN Z., **A 3D Vector Potential Formulation Using Edge Element for Electrostatic Field Cmputation**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, n° 3, May 1995.
- [15] - DULAR P., NICOLET A., GENON A., LEGROS W., **A Discrete Sequence Associated with Mixed Finite Elements and its Gauge Condition for Vector Potentials**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol.31, n° 3, May 1995.
- [16] - DULAR P., HENROTTE F., LEGROS W., **A General and Natural Method to Define Circuit Relations Associated with Magnetic Vector Potential Formulations**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, n° 3, May 1999.
- [17] - KREBS G., HENNERON T., CLENET S., BIHAN Y. L., **Overlapping Finite Elements Used to Connect Non-Conforming Meshes in 3D with a Vector Potential Formulation**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 47, n° 5, May 2011.
- [18] - BOUALEM B., PIRIOU F., **Hydrid Formulation A- Ω With Finite Element Method to Model in 3D Electromagnetic System**. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, n° 3, May 1996.
- [19] - DULAR P., GEUZAIN C., **Gmsh, a three-dimensional mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities**, <http://www.geuz.org/gmsh/>
- [20] - DULAR P., GEUZAIN C., **GetDP, a general environment for the treatment of discrete problems**, <http://www.geuz.org/getdp/>

PUBLICAÇÃO DA AUTORA

- [1] - Juliana Amâncio Malagoni, José Roberto Camacho, Sebastião Camargo Guimarães Jr. **GMSH: 3D Finite Elements mesh generator in the study of rectangular masonry ovens**. Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia, 2011, Coimbra.

ANEXO I

ARTIGO PUBLICADO – CMNE 2011

*GMSH: 3D FINITE ELEMENTS MESH GENERATOR IN THE STUDY OF
RECTANGULAR MASONRY OVENS*

Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2011.

Coimbra, 14 a 17 de Junho, 2011.

Portugal

GMSH: 3D FINITE ELEMENTS MESH GENERATOR IN THE STUDY OF RECTANGULAR MASONRY OVENS

Juliana Amâncio Malagoni¹, José Roberto Camacho¹ e Sebastião Camargo Guimarães Jr¹

¹School of Electrical Engineering
Universidade Federal de Uberlândia.
Av. João Naves de Ávila, 2121. Uberlândia, MG – Brazil
Phone/Fax number: +55 34 3229-4738
e-mail: juliana.malagoni@gmail.com, jrcamacho@ufu.br, scguimaraes@ufu.br

Keywords: Gmsh, 3D Modeling, Finite Elements, Oven Masonry

Abstract. *The paper presents the development of a three-dimensional mathematical model to estimate the operation of masonry ovens concerning the available energy released for electrical power generation. The Finite Element Method (FEM) has shown for decades to be a powerful numerical tool in the modeling of phenomena, as in the simulation of thermal, magnetic, electromagnetic, mechanical, electrostatic, electrodynamics based devices and others. Moreover, it allows the analysis of problems up to 3D. The differential equations are solved numerically in a domain of axisymmetric geometry, through the use of the finite volumes method on the Gmsh free software. The model uses the concepts of mass and heat transfer, of the thermal decomposition of wood, beyond the different physical and chemical properties of wood and charcoal (solid renewable bio-reducer) for the steel industry. In order to simulate the system a model was developed and the mesh of the oven is made using a program called Gmsh that is a mesh generator which sets lines, surfaces and volumes through contours and is capable to generate one, two and three-dimensional regular and non-regular meshes, consisting of geometric elements as a bar triangular, square and prismatic. This procedure reduces costs, generates production gains, minimizes the losses and increases the thermal efficiency of the oven when the production of charcoal is analyzed. Another important consequence of this work is the contribution to reduction of greenhouse gas emissions, ie, improves the environment. Therefore, the mathematical modeling and simulation engender technological advances for the large companies producing charcoal a solid renewable bio-reducer for the steel industry.*

1. OBJECTIVE

This paper has the following objectives: to develop a three-dimensional mathematical model to estimate the performance of masonry furnace in his aspect of available energy released for co-generation and to analyze the physical and chemical parameters of wood and charcoal.

2. INTRODUCTION

In Brazil, charcoal is produced for about 400 years, its production only peaked in the 60s. The production of charcoal produced in 1989 was 44.8 million cubic meters, after that date, production has steadily drops, with a production of 25.4 million cubic meters in 1998 (Sampaio 2001).

Coal production from forestry, which had been growing since 2002, fell (15.0%), with production of 3,378,492 tons. The charcoal from the extraction fell by 26.2% between 2008 and 2009, with production by 1,639,779 tons. In 2009, they produced a total of 82,850,417 cubic meters of firewood, 1.5% less than in 2008, and 5,018,271 tons of charcoal, producing 19.0% lower than 2008. The production of timber has increased from 115,389,259 to 122,159,595 tons between 2008 and 2009 (IBGE 2010).

Some industries produce charcoal kilns using different formats and capabilities. The rectangular furnace of V & M Florestal Brazil (Figure 1) converts 42 tonnes of timber per month to approximately 14 tons of coal. The circular kiln (Figure 2) have a one fifth of this capacity, however, have smaller production cycles.



Figure 1 - Rectangular masonry oven for V & M Florestal Brazil.



Figure 2 - The old armadillo tail circular oven (Alves & Figueiredo, 1989).

Charcoal is the transformation of biomass, when sustainably produced, from reforestation wood or agro-industrial waste, being also a renewable fuel, that when burning releases more calories than firewood with less smoke.

Carbonization technologies have had many breakthroughs. The process of charcoal production occurs at high temperatures in the range from 450 to 600 ° C in the absence of oxygen. The biomass, rather than ignite, undergoes carbonization by the elimination of smoke (volatile materials) and water in the form of vapors and gases. Charcoal is a renewable source of energy and important raw material in steel production in Brazil. Should be carefully considered in energy policies and forestry in order to ensure sustainability and improve social and environmental conditions in their production. You can competitively produce charcoal with good efficiency, preserving natural resources and respecting human rights.

3. THEORETICAL DESCRIPTION

The three-dimensional mathematical models of drying and carbonization of wood are composed of equations of heat and mass transfer: mass balance; equations correlating the physical properties of wood and charcoal and kinetics equations drying and carbonization. The parameters involved depend on the carbonization temperature, i.e. they are sets of nonlinear equations. Thus, it was shown the numerical finite volume methodology. The finite element method is a widely used technique that allows obtaining satisfactory results, very close to real solutions. The accuracy depends on the discretization of the domain geometry, which is done through finite element meshes. Many real problems in engineering present a set of equations that are difficult to solve analytically.

3.1. Mathematical models for the kinetic parameters of wood in constant temperature

The differential equation (1.0) describes reactions in solids, with the formation and growth of Avrami-Erofeev nuclei and the Arrhenius equation (1.1) (Bruijn et al 1981) were used to obtain the kinetic mechanisms of carbonization and its parameters for each component species studied (Raad 2004).

$$\frac{d\alpha}{dt} = n(1-\alpha)[- \ln(1-\alpha)]^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} g(T) \quad (1.0)$$

$$g(T) = A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad (1.1)$$

$$\alpha = \frac{m_i - m(t)}{m_i - m_f} \quad (1.2)$$

where:

α = fraction decomposed body mass (kg / kg);

n = reaction order;

$g(T)$ = Arrhenius equation = decay rate (s^{-1});

t = time (s);

E = activation energy (kJ / kmol);

A = pre-exponential factor (s^{-1});
 R = universal gas constant ($8.314 \text{ kJ / kmol.K}$);
 T = decomposition temperature (K);
 m = mass of the sample as a function of t (kg);
 m_i = initial mass of sample (kg);
 m_f = residual mass of sample (kg).

Integrating the equation (1.0) for processes at constant temperature, we have:

$$\ln(1 - \alpha) = -(g.t)^n \quad (1.3)$$

Figure 3 shows theoretical curves for the two hypothetical constants k , or $g(T)$, depending on the reaction order from 0.3 to 5.0. It is observed that the Avrami-Erofeev equation is a comprehensive mathematical tool to obtain kinetic parameters like activation energy and reaction order of thermal decomposition of many substances (Raad 2004).

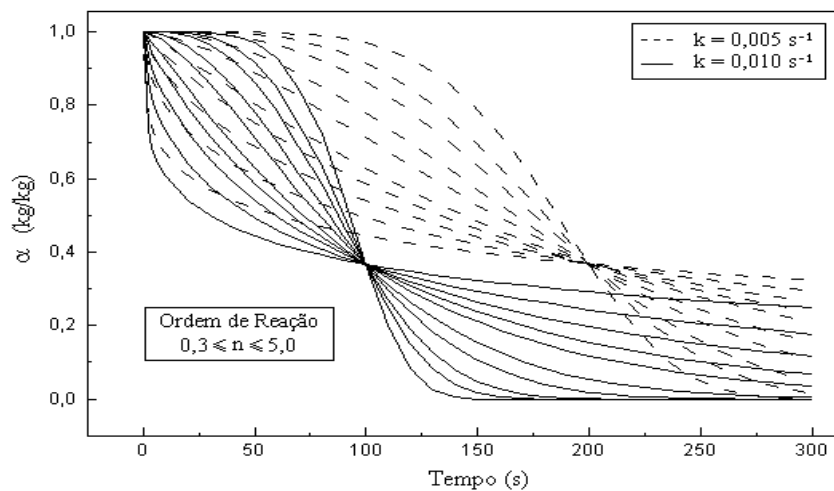


Figure 3 - Simulation curves of equation 1.3 as a function of reaction order. (Raad 2004)

3.2. Mathematical models for the kinetic parameters of wood at variable temperature

When the carbonization process presents various temperatures, the decomposition rate becomes dependent on temperature and time. In this case, the solution of differential equation (1.0), valid for processes with any rate of heating, is obtained through numerical integration method called seven points Gaussian quadrature, equation (1.4) (Raad 2004).

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{i=1}^{n_i} C_i f(t_i) \quad (1.4)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} g(T)dt \quad (1.5)$$

where:

n_i = number of integration points;

a, b = lower and upper limit of integration, respectively;

t_1, t_2 = instant of time past and present, respectively;

$dt = (t_2 - t_1)$ = time interval during the carbonization process;

C_i and t_i = parameters of Gaussian quadrature, Table 1.

C_i	0,12948496	0,27970540	0,38183005	0,41795918
t_i	\pm 0,94910791	\pm 0,74153119	\pm 0,40584515	0

Table 1. Constants of integration through the Gaussian quadrature method for $n_i = 7$.

The numerical integration is solved with the help of a programming algorithm. According (Raad 2004), the Matlab program platform was used to generate the executable for the solution of equations 1.3, 1.4 and 1.5.

3.3. Equations of the physical properties of wood and charcoal

3.3.1. Specific heat, thermal conductivity and porosity of solid

The physical parameters specific heat, thermal conductivity and porosity are correlated linearly between valid values and the values for wood for charcoal (Kansa et al 1977; Capart and Belleville 1984; Alves and Figueiredo 1989; Koufopanos and Papayannakis 1991; Güell and Guzman 1993, Shrestha et al 1994). Most authors use the decomposition kinetics as a factor proportional to the variation of wood for charcoal. Thus we have:

$$f(\eta) = \eta f_{wood} + (1 - \eta) f_{charcoal} \quad (1.6)$$

where:

$f(\eta)$ = average value of physical property;

η = mass fraction decomposition = $(1 - \alpha)$ in equation 1.3;

f = physical property (wood or charcoal).

Property	Porosity (m ³ empty / m ³ solid)		Specific Heat (kJ/kg.K)		Thermal Conductivity (kW /m.K)	
	Wood	Charcoal	Wood	Charcoal	Wood	Charcoal
Kansa et al, 1977	0,64	0,94	2,303	0,712	1,587 x10 ⁻⁴	0,502 x10 ⁻⁴
Capart et al, 1988	-	-	1,214	0,670	1,465 x10 ⁻⁴	0,712 x10 ⁻⁴
Alves/Figueiredo, 1989	-	-	1,950	1,350	1,666 x10 ⁻⁴	0,440 x10 ⁻⁴
Koufopanos et al, 1991	-	-	2,567	1,630	1,300 x10 ⁻⁴	0,800 x10 ⁻⁴
Güell e Guzman, 1993	0,64	0,90	2,100	0,840	1,675 x10 ⁻⁴	0,582 x10 ⁻⁴
Gieck e Gieck, 1990	0,64	0,77	2,400	0,840	1,700 x10 ⁻⁴	0,840 x10 ⁻⁴

Table 2. Physical properties of wood and charcoal used by several authors (Raad 2004).

Considering the equation free energy phase separation, we determined the equivalent value of thermal conductivity of the material as a whole. The proposed equation by (Brailsford and Major 1963), was used to obtain the equivalent thermal conductivity of materials compounds, in a means continuous with uniform dispersed phases:

$$k_E = \frac{\left[k_s + \varepsilon_L k_L \left(\frac{3k_s}{2k_s + k_L} \right) + k_G (\varepsilon - \varepsilon_L) \left(\frac{3k_s}{2k_s + k_G} \right) \right]}{\left[1 + \varepsilon_L \left(\frac{3k_s}{2k_s + k_L} \right) + (\varepsilon - \varepsilon_L) \left(\frac{3k_s}{2k_s + k_G} \right) \right]} \quad (1.7)$$

$$k_G = X_V k_V + X_A k_A \quad (1.8)$$

where:

k_s = thermal conductivity of solid (kW / mK);

k_L = liquid thermal conductivity (kW / mK);

k_a = thermal conductivity of air (kW / m.K);

ε = porosity of the solid ($\text{m}^3 \text{ ar} / \text{m}^3 \text{ sun}$);

ε_L = porosity of the liquid ($\text{m}^3 \text{ ar} / \text{m}^3 \text{ liq}$);

k_G = gas thermal conductivity (kW / m.K);

k_V = conductivity Thermal Steam (kW / mK);

X = concentration of air in the air / vapor (kg air / kg vapor / air mixture).

X_V = concentration of vapor in the mixture of air / steam (kg steam / kg vapor / air mixture);

3.3.2. Permeability coefficient of Wood

It's the endurance movement phase liquid and gas/steam, which directly influences the increase of pressure inside the middle porous. According (Siau 1984), the transport processes water in wood and permeability (k_p) can vary in a wide range, in directions transverse and longitudinal, depending on the species:

$1 \times 10^{-18} \text{ m}^2 < k_p < 1 \times 10^{-16} \text{ m}^2$ - cross direction

$1 \times 10^{-16} \text{ m}^2 < k_p < 1 \times 10^{-10} \text{ m}^2$ - longitudinal direction

This extensive variability and the difficulty to experimentally obtain a value needed, make necessary to obtain this parameter by adjustments between the mathematical model and the experimental curves of drying and carbonization.

3.3.3. Effective diffusion coefficient

This coefficient is the speed by which two substances (diffusion binary) migrate from a higher to lower concentration. To obtain the effective diffusion coefficient in their model, (Perre et al 1986) used a relation between the diffusion coefficient, considered constant during the process, and the coefficient of relative permeability of gas phase, as proposed by (Comstock 1963), that can be seen in Table3.

Mathematical Model	Diffusion Coefficient	Effective diffusion coefficient
Stanish et al, 1986	$D = 2,20 \times 10^{-5} \left(\frac{P_{ATM}}{P_G} \right) \left(\frac{T}{273,15} \right)^{1,75}$	$D_{EFF} = \alpha D$
Perre et al, 1986	$D = constant$	$D_{EFF} = k_G D$

Table 3. Effective diffusion coefficient models (Perre et al 1986) and (Stanish et al 1986).

Where: P_G = absolute pressure of the gas phase (N/m²);
 P_{ATM} = atmospheric pressure (N/m²);
 D = diffusivity (m²).

3.3.4. Model parameters - physical constants

Notation	Parameter	Value	Source
α_G	permeability of gas - the direction x (m ²)	$1,0 \times 10^{-10}$	Alves e Figueiredo, 1989
	permeability of gas - the direction r (m ²)	$1,0 \times 10^{-13}$	
μ_L	dynamic viscosity of the liquid (N.s/m ²)	$2,8 \times 10^{-4}$	Gieck e Gieck, 1990
μ_G	dynamic viscosity of gas (N.s/m ²)	$1,8 \times 10^{-5}$	Gieck e Gieck, 1990
C_{pWood}	specific heat of wood (kJ/kg.K)	2,40	Gieck e Gieck, 1990
C_{p_c}	specific heat of charcoal (kJ/kg.K)	0,84	Gieck e Gieck, 1990
K_{wood}	wood thermal conductivity (kW/m.K)	$1,70 \times 10^{-4}$	Gieck e Gieck, 1990
K_c	charcoal thermal conductivity (kW/m.K)	$0,84 \times 10^{-4}$	Gieck e Gieck, 1990
ϵ_{wood}	porosity of the wood (m ³ vazios/m ³ sol)	0,64	Gieck e Gieck, 1990
ϵ_c	porosity of the charcoal (m ³ vazios/m ³ sol)	0,77	Cetec, 1979
λ_{Wood}	emissivity of wood	0,85	Gieck e Gieck, 1990
λ_c	emissivity of charcoal	0,95	Perry e Green, 1984
σ	Stefan-Boltzmann constant (kW/m ² .K ⁴)	$5,673 \times 10^{-11}$	

Table 4. Physical constants (Raad 2004).

3.4. Free Software – Gmsh

The Gmsh is a mesh generator which sets lines, surfaces and volumes across borders and is capable of generating regular grids and non-scheduled one, two and three-dimensional geometric elements formed by the bar, triangular, square and prismatic. The mesh is generated by Gmsh unstructured since there is no predefined order between any two elements of the mesh. Figure 4 shows the software interface used for modeling and mesh generation of a three-dimensional rectangular brick oven.

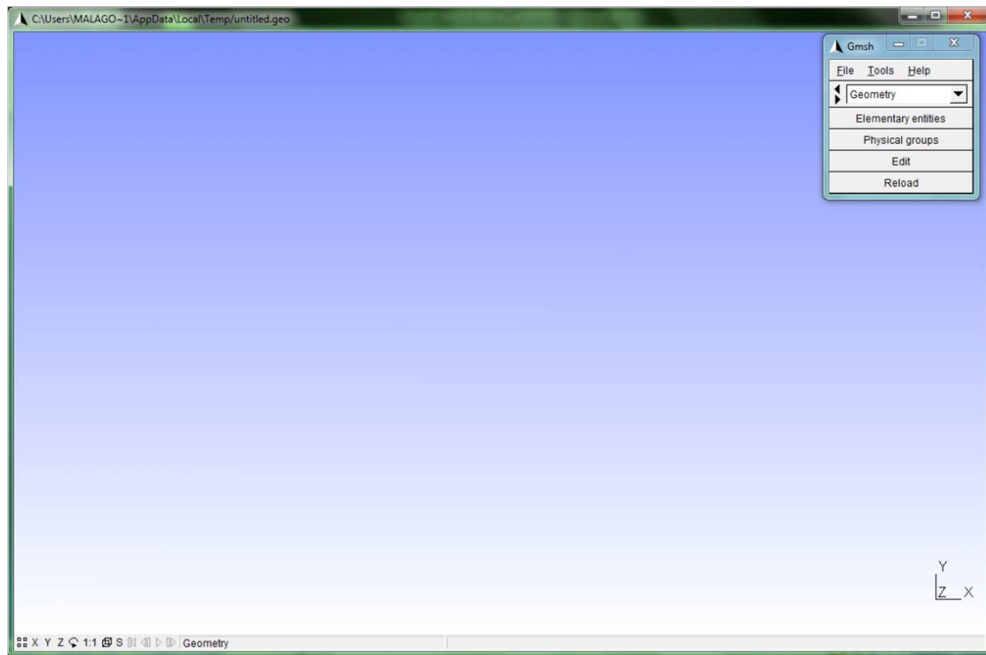


Figure 4. Gmsh software interface.

4. DESCRIPTION OF PROBLEM

The oven analyzed in this work consists of brick masonry and has a rectangular geometry, with the following dimensions: 32 x 4 x 4 and 2 m radius of the crown. The furnace at its ends has two steel gates coated with refractory materials, in order to reduce the heat loss.



Figure 5. Rectangular brick oven for V & M Florestal Brazil.

The oven is loaded with logs of wood from stocks where the wood spend some drying time. These logs are positioned horizontally inside the oven allowing the flow of hot gases between the logs located at the bottom.

There are three steps in process of carbonization:

- Drying: The wood put into the furnace begins to release large amounts of water stored inside.
- Pyrolysis: the wood becomes charcoal.
- Cooling: begins when according the experience of the operator, wood practically turned into coal.

The coal must remain in the oven, totally sealed, so there is no air inlet. The cycle ends when the temperature of the gate is to the outer temperature.

The regions near the gates have the lowest temperatures when compared with central zones of the furnace. And the temperature suitable for producing coal is approximately 250°C to 350°C . In this temperature range it is possible to produce coal with fixed carbon in the range of 65% to 75%, which is the requirement for the national steel industry.

5. RESULTS AND DISCUSSIONS

Computer experiments in the School of Electrical Engineering, Rural Electricity and Alternative Energy Sources Laboratory, at Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais State, Brazil resulted in the modeling and the 3D mesh generation of a brick oven, and the free Gmsh software was used with this purpose. The software Gmsh is a finite element mesh generator developed by Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. The GNU (General Public License) launched the same as free software and allows interaction with other mesh generators specify. The Gmsh has four modules: geometry, mesh, solver that solves differential and integral equations using the executable GetDP (also developed by the same authors) and post-processing.

The software has a mechanism for advanced visualization at 1, 2 and 3D modeling in three-dimensional flexible and very reliable in solving differential equations in the post-processing of various problems in engineering. The following are the views of modeling and 3D meshes in the oven.

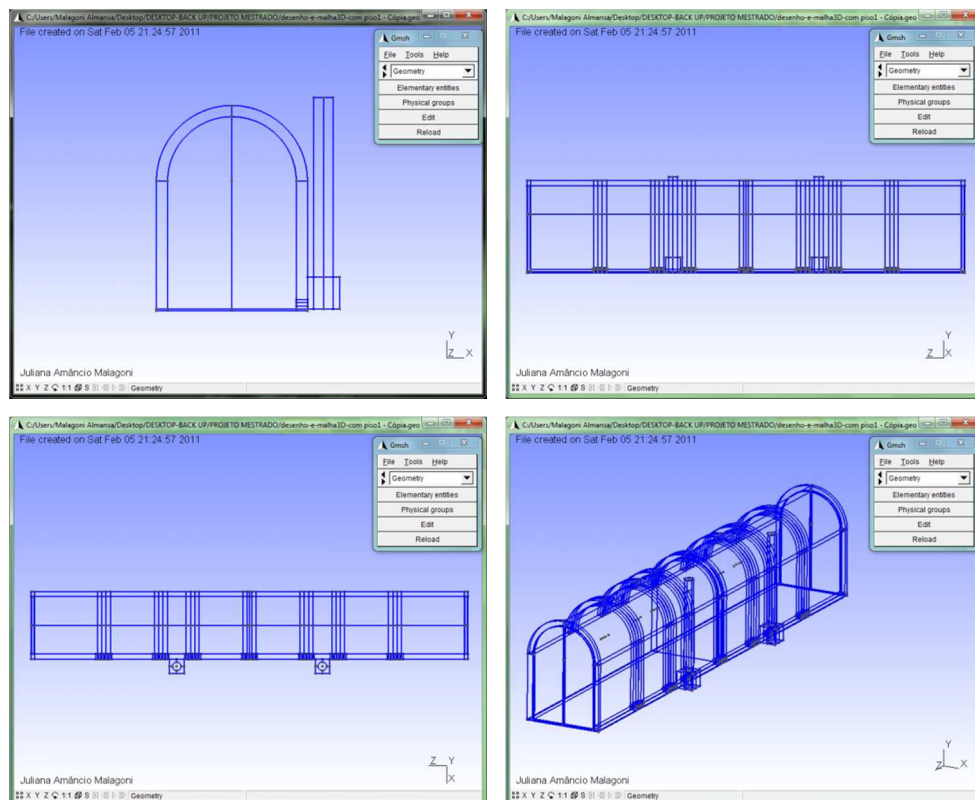


Figure 6. Views of the rectangular brick oven front, sides, top and 3D, respectively.

There are views of the brick oven in 3D in Figure 6. The front view shows details of the gate and the chimney. The side view shows the length of the oven, the two chimneys and “armadillo holes” in one side of the oven. The top view depicts the ceiling and fireplaces in the foreground. And finally, the 3D view of the oven shows the details of walls, gates, chimneys, “armadillo holes”, ceiling and floor.

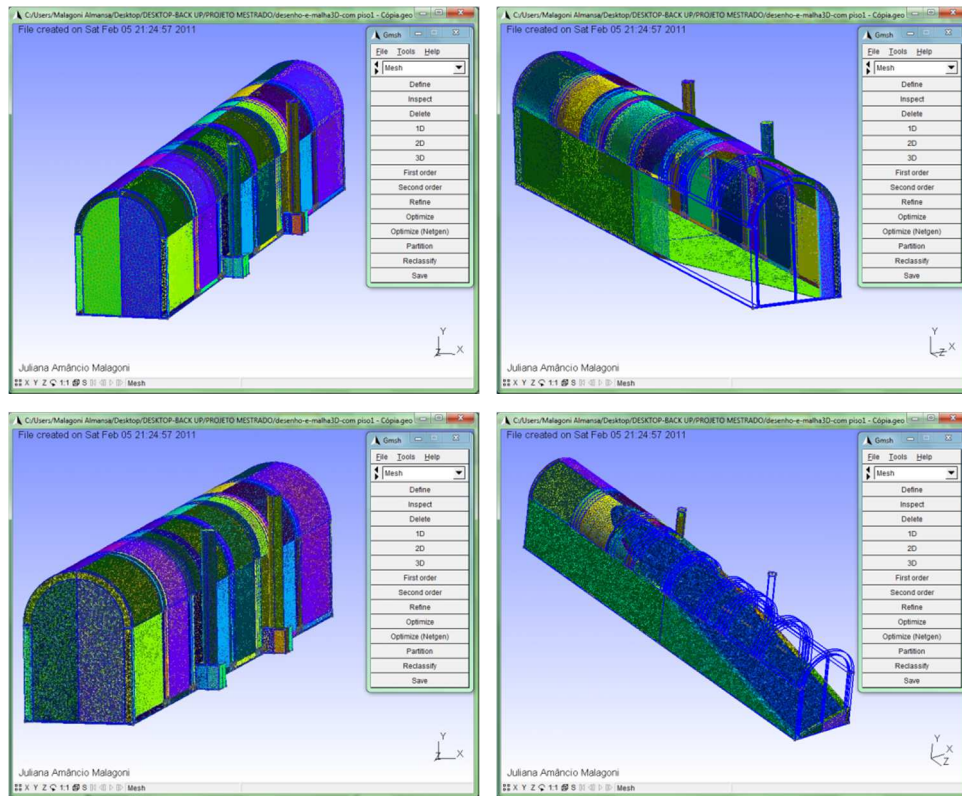


Figure 7. Views of the rectangular brick oven with mesh: blunt 2D, 2D with section shows the interior of the oven without mesh, 3D and 3D section with details of the oven with mesh, respectively.

Figure 7 shows the rectangular brick oven in various directions with meshes. The oven was detailed with and without 2D and 3D mesh beyond the internal finite volume. Gmsh for each volume was set to generate the meshes of the oven, for example, the chimney was shaped and its volume determined for mesh generation after modeling. So we used the menu geometry and mesh software for modeling and mesh generation, respectively.

It is emphasized that good quality of complex meshes, depends on the ability to draw the geometries. Thus, for quantitative results can be validated will depend on the virtualization of the prototype, and the richness of its details.

In experiments in the laboratory of V & M Florestal Brazil by Tulio Jardim Raad in 2004, the theoretical results obtained by the simulation program were compared to drying and carbonization of pine by (Alves and Figueiredo 1989), Figure 8:

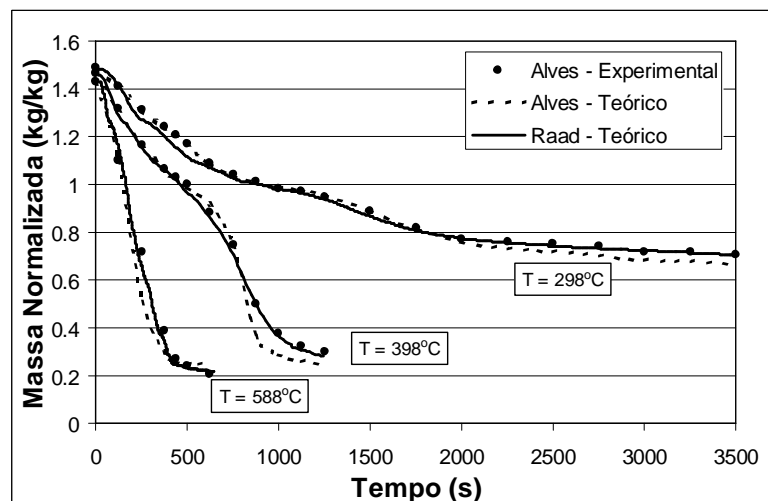


Figure 8. Experimental and theoretical curves of drying and carbonization of Pinus (Alves and Figueiredo, 1989) and the theoretical curves (Raad, 2004).

The experiment of Raad 2004 showed better correlation than the theoretical results of the Alves and Figueiredo 1989 model concerning the kinetics of decomposition and the masses of the final carbonization. At the temperature 398 ° C, the difference between the theoretical and experimental masses end gets to be 23%. For temperature of 588 ° C, there is little difference, although the result is reversed (greater theoretical final mass). As for the temperature of 298 ° C at $t = 3500$ s difference reaches 6% (currently on average only 30% of the components, cellulose and lignin, volatilized).

These results consolidate the strategy of separation of curves for each individual fraction decomposition of wood components, including any residual masses versus time and temperature.

There are studies on the concepts of heat and mass transfer, thermal decomposition of wood, in addition to various physical and chemical properties of wood and charcoal. Therefore, compared to some surveys, the results achieved in the V & M Florestal Brazil. Furthermore, it has developed modeling and mesh oven 2D and 3D Gmsh where it was defined finite volume.

6. CONCLUSIONS

This article helps to reduce costs, generate production gains, minimize losses and increase thermal efficiency of masonry furnaces when analyzed the production of charcoal. Other important consequences are the contribution to emission reduction of greenhouse gas, and the improving of the environment. Mathematical modeling and simulation of technology advances are an important addition to large companies producing charcoal.

Besides the results achieved with the production of the aforementioned graphical interface, in this work, it devoted itself to search for new technologies in the area of complex geometries meshing.

We obtained good results with the chosen mesh-generating tool and concluded that free software have their limitations such as difficulties in finding documentation, existence of

errors, etc., problems that didn't arose during the project development.

So, it was observed that through the meshes generated by Gmsh, it is possible to obtain quantitative results in order to perform, for example, optimization of structures, through the virtualization of geometries and flow simulation.

REFERENCES

- [1] P. Dular e C. Geuzaine, *GetDP Reference Manual*, University of Liège, Departament of Electrical Engineering (2009).
- [2] P. Dular e C. Geuzaine, *Gmsh Reference Manual*, University of Liège, Departament of Electrical Engineering (2009).
- [3] T. J. Raad, *Simulation of drying and carbonization of Eucalyptus spp*, UFMG (Federal University of Minas Gerais), Doctoral Thesis (2004).
- [4] M. B. Campos, *Mathematical modeling with experimental validation of the cooling bed of charcoal in rectangular industrial oven*, UFMG, Dissertation (2000).
- [5] R. L. M. Oliveira, *Instrumentation and process analysis of thermal coal production*, UFU (Universidade Federal de Uberlândia), Dissertation (2009).
- [6] D. S. Cemin, *Development of a furnace for carbonization of waste in small-scale agroforestry*, UNB (University of Brasilia), Dissertation (2010).
- [7] D. C. Barcellos, *Oven container for charcoal production: performance, thermal profile and pollution control*, UFV (Universidade de Viçosa), Dissertation (2002).
- [8] E. O. Gomez, *Pyrolysis Technology in the Context of Modern bras Biofuels Production: A Perspective View* (2009).
- [9] A. Amorim, *Industry creates process to produce clean coal*, Folha de Londrina, August (2008).
- [10] J. O. Brito, *Principles of production and use of wood charcoal*, Forestry Papers, v. 9, p. 1 - 21 (1990).
- [11] *Brazilian Institute of Geography and Statistics, Extraction Plant Production and Forestry*, Rio de Janeiro (2010).
- [12] R. S. Sampaio and L. E. F. Lopes, *The primary iron cleaner planet - iron production using biomass planted, Proceedings of the 1st international congress of using biomass planted for the production of metals and electricity generation*, Belo Horizonte, Brazil, 8-11 October (2001). Gieck, K., Gieck, R.. *Engineering Formulas*. New York, McGraw-Hill, 6th Ed. 1990.
- [13] R.H. Perry, D. Perry's Green, *Chemical Engineers Handbook*, 6th ed. McGraw-Hill, New York., 1984.
- [14] CETEC-Technological Center Foundation of Minas Gerais. *Laboratory-scale experiments to determine the influence of age, moisture and temperature on the carbonization properties of coal*. Project Report CETEC-SPT-1, Belo Horizonte, 1979
- [15] S.S. Alves, J.L. Figueiredo, *Model for Pyrolysis of Wet Wood*. Chemical Engineering Science, v.44, n.12, p.2861-2869, 1989.
- [16] T. J. Raad, *Simulation of Drying Process of High Temperature Eucalyptus spp*. Dissertation. Postgraduate Course in Mechanical Engineering, Federal University of

Minas Gerais, May, 1997.

- [17] J.F. Siau, *Transport Process in Wood*. Springer, Berlim. 1984.
- [18] M.A. Stanish, G.S. Schajer, F. Kayihan, *Mathematical Model of Drying for Hygroscopic Porous Media*. AICHE Journal, v.32, n.8, p.1301-1311, 1986.
- [19] E. J. Kansa, H. E. Perlee, R. F. Chaiken, *Mathematical model of wood pyrolysis including internal forced convection*. Combustion and Flame, v.29, p311-324, 1977.
- [20] R. Capart, L. Falk, M. Gelus, *Pyrolysis of wood macrocylinders under pressure: application of a simple mathematical model*. Applied Energy, v.39, p.1-13, 1988.
- [21] A. J. Güell, J. A. Guzman, *General heat and mass transfer analysis of wood carbonization*. Latin American Applied Research, v.23, p.221-230, 1993.
- [22] C.A. Koufopoulos, N. Papayannakos, G. Maschio, A. Lucchesi, *Modelling of the pyrolysis of biomass particles*. Studies on kinetics, thermal and heat transfer effects. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v.69, p.907-915, 1991.
- [23] D. Shrestha, S. Cramer, R. White, *Time-Temperature profile across a lumber section exposed to pyrolytic temperatures*. Fire and Materials, v.18, p.211-220, 1994.
- [24] A.D. Brailsford, K.G. Major, *The effect of irradiation on the electric resistivity and thermal conductivity of α uranium*. Journal of Nucl. Matter, v.8, n.2 p.241-247, 1963.
- [25] G.L. Comstock, *Moisture diffusion coefficients in wood as calculated from adsorption, desorption and steady state data*. Forest Products Journal, p.97-103, 1963.
- [26] P. Perre, S.B. Nasrallah, G. Arnaud, *A theoretical study of drying: numerical simulation applied to clay-brick and softwood*. Drying'86, p.382-390, 1986.

APÊNDICE I

PROGRAMA NO GETDP DO CAPACITOR EM 3D COM TRÊS DIELÉTRICOS

```
////////////////////////////////////  
// UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLANDIA //  
// PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA //  
// ALUNA: JULIANA AMANCIO MALAGONI //  
// ORIENTADOR: JOSÉ ROBERTO CAMACHO //  
////////////////////////////////////  
  
//Definiu-se os grupos no arquivo .geo  
SPLUS=90; //Linha superior  
SMINUS=92; //Linha inferior  
VBOX1=122; //Area da caixa1  
VBOX2=123; //Area da caixa2  
VBOX3=124; //Area da caixa3  
  
Group {  
    //Definiu-se as regiões  
    Splus= #SPLUS;  
    Sminus= #SMINUS;  
    Vbox1= #VBOX1;  
    Vbox2= #VBOX2;  
    Vbox3= #VBOX3;  
  
    //Definiu-se os grupos  
    Vol= #{Vbox1,Vbox2, Vbox3}; //Superficies  
    Grouped = #{Splus,Sminus}; //Linhas  
}  
  
Function {  
    //Definiu-se as constantes  
    eps0=8.854187818e-12; //permissividade no vácuo  
    epsr[Vbox1]=5.9; //permissividade na caixa1  
    epsr[Vbox2]=4.7; //permissividade na caixa2  
    epsr[Vbox3]=3.; //permissividade na caixa3  
}  
  
Jacobian {  
    { Name Vol;  
        Case {  
            { Region All; Jacobian Vol; }  
        }  
    }  
}
```

```

Integration {
    { Name Int;
      Case {
        { Type Gauss;
          Case {
            { GeoElement Point; NumberOfPoints 1 ; }
            { GeoElement Line ; NumberOfPoints 3 ; }
            { GeoElement Triangle; NumberOfPoints 4 ; }
            { GeoElement Quadrangle; NumberOfPoints 4 ; }
            { GeoElement Tetrahedron ; NumberOfPoints 4 ; }
            { GeoElement Hexahedron; NumberOfPoints 6 ; }
            { GeoElement Pyramid; NumberOfPoints 8 ; }
            { GeoElement Prism; NumberOfPoints 6 ; }
          }
        }
      }
    }
}

Constraint {
    //Definiu-se as bordas
    { Name PotencialEletrico;
      Case {
        { Region Splus; Value 3000.;} // 3000 Volts na linha superior
        { Region Sminus; Value 0.;} // 0 Volt na linha inferior
      }
    }
}

FunctionSpace {
    {Name fs_vglob;
      Type Form0; //Form0 campo escalar do tipo potencial

      BasisFunction {
        {Name sn; //Nome
          NameOfCoef vn; //Nome do coeficiente
          Function BF_Node; //BF_Node Função nodal (em NodesOf, valor Form0)
          Support Region[{Vol}]; //Região do grupo definido como Vol
          Entity NodesOf[ All,Not Grouped];} Entidade do grupo NodesOf definido como Vol
        {Name sf; //Nome
          NameOfCoef vfu; //Nome do coeficiente
          //BF_GroupOfNodes Soma das funções nodais (em GroupsOfNodesOf, valor Form0)
          Function BF_GroupOfNodes;
          Support Vol; //Região do grupo definido como Vol
          //Entidade do grupo GroupsOfNodesOf definido como Grouped
          Entity GroupsOfNodesOf[Grouped];}
        }

      GlobalQuantity {
        {Name PotencialEletrico; //Nome
          Type AliasOf; //Outro nome para o coeficiente de função de base.
          NameOfCoef vfu;} //Nome do coeficiente definido anteriormente
        {Name CargaEletrica; //Nome
          //Quantidade global associado a um nome de coeficiente de função de base.
          Type AssociatedWith;
          NameOfCoef vfu;} //Nome do coeficiente definido anteriormente
        }

      Constraint { //Restrição nas FunctionSpace
        //Cfoo condição de contorno inexistente
        {NameOfCoef vn; //Nome do coeficiente definido anteriormente
          EntityType NodesOf; //O tipo de entidade definido
          NameOfConstraint Cfoo;} //Nome da restrição Cfoo
        {NameOfCoef vfu; //Nome do coeficiente definido anteriormente
          EntityType GroupsOfNodesOf; //O tipo de entidade definido
          NameOfConstraint Cfoo;} //Nome da restrição Cfoo
      }
    }
}

```

```

        {NameOfCoef CargaEletrica; //Nome da quantidade global definida anteriormente
          EntityType GroupsOfNodesOf; //O tipo de entidade definido
          NameOfConstraint CargaEletrica;} //Nome da restrição CargaEletrica
        {NameOfCoef PotencialEletrico; //Nome da quantidade global definida anteriormente
          EntityType GroupsOfNodesOf; //O tipo de entidade definido
          NameOfConstraint PotencialEletrico;} //Nome da restrição PotencialEletrico
      }
    }
  }

Formulation { // Primeiro problema (equação de Laplace com Dirichlet BC)
  //Construir equações
  {Name for_v; //Nome para a formulação
    Type FemEquation; //Método dos elementos finitos de formulação
    Quantity { //Existem Local, Integral e Global
      { Name v; Type Local; NameOfSpace fs_vglob;}
      { Name Q; Type Global; NameOfSpace fs_vglob[CargaEletrica];}
      { Name V; Type Global; NameOfSpace fs_vglob[PotencialEletrico];}
    }
    Equation { // div epsr[] grad v = 0
      Galerkin {[epsr[]*Dof{Grad v},{Grad v}]; In Vol; Jacobian Vol; Integration Int;}
      //Integral do tipo Galerkin.
      GlobalTerm {[Dof{Q}/eps0,{V}]; In Grouped;}
    }
  }
}

//Resoluções
Resolution {
  {Name all;
    System {
      {Name A1; NameOfFormulation for_v;}
    }
    Operation{
      Generate[A1];
      Solve[A1];
      SaveSolution[A1];
    }
  }
}

//Pós-Processamento
PostProcessing {
  { Name all;
    NameOfFormulation for_v;
    Quantity {
      { Name V ; Value { Local { [ {v} ] ; In Vol ; Jacobian Vol; } } }
      { Name E ; Value { Local { [ Norm[{d v}] ] ; In Vol ; Jacobian Vol; } } }
      { Name Q ; Value { Term { [ {Q} ] ; In Grouped ; } } }
      { Name v ; Value { Term { [ {V} ] ; In Grouped ; } } }
      { Name C ; Value { Term { [ {Q}/{V} ] ; In Grouped; } } }
    }
  }
}

//Pós-Cálculo
PostOperation{ {Name all; NameOfPostProcessing all;
  Operation {
    Print[ V , OnElementsOf Vol , File "V.pos" ] ;
    Print[ E , OnElementsOf Vol , File "E.pos" ] ;
    Print[Q, OnRegion Grouped, Format Table, File "resultado.pos"];
    Print[v, OnRegion Grouped, Format Table, File ">"resultado.pos"];
    Print[C, OnRegion Grouped, Format Table, File ">"resultado.pos"];
  }
}
}

```