

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – UFU  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



**OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO  
APLICADA AOS MOTORES DE INDUÇÃO  
VALIDADA VIA ELEMENTOS FINITOS**

**JULIANA ALMANSA MALAGOLI**



**JULIANA ALMANSA MALAGOLI**

**OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO  
APLICADA AOS MOTORES DE INDUÇÃO  
VALIDADA VIA ELEMENTOS FINITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ciências.

Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Orientador: José Roberto Camacho, PhD - UFU

Coorientador: Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr - UFSC

Uberlândia-MG

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

M236o Malagoli, Juliana Almansa, 1982-  
2016 Otimização multiobjetivo aplicada aos motores de indução validada  
via elementos finitos / Juliana Almansa Malagoli. - 2016.  
150 p. : il.

Orientador: José Roberto Camacho.  
Coorientador: Mauricio Valencia Ferreira da Luz.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Máquinas - Projetos - Teses. 3.  
Sistemas de energia elétrica - Teses. 4. Método dos elementos finitos -  
Teses. I. Camacho, José Roberto. II. Luz, Mauricio Valencia Ferreira da.  
III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica. IV. Título.

---

CDU: 621.3

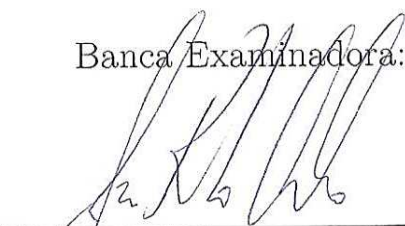
JULIANA ALMANSA MALAGOLI

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO  
APLICADA AOS MOTORES DE INDUÇÃO  
VALIDADA VIA ELEMENTOS FINITOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ciências.

Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Banca Examinadora:



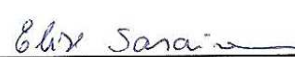
---

José Roberto Camacho, PhD - UFU




---

Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr -  
UFSC



---

Elise Saraiva, Dra - UFU



---

Fabrício Augusto Matheus Moura, Dr -  
UFTM



---

Sebastião Camargo Guimarães Jr., Dr -  
UFU



*À minha mãe Haydée Aparecida Almansa Malagoli  
e ao meu avô José Almansa Cepillo.*



---

# Agradecimentos

Agradeço a **DEUS** pela minha vida e por tudo que tem feito por mim. A determinação, a força de vontade, o amor, a fé, a esperança e a sabedoria que o Senhor me dá para resolver os problemas foram decisivos para mais uma conquista em minha vida, obrigada por tudo.

À minha mãe **Haydée Aparecida Almansa Malagoli** por todo esforço e dedicação de criar os filhos, e pela educação que a senhora me deu.

Ao meu pai **Rui Malagoli** e aos meus irmãos **Raphael Almansa Malagoli** e **Ricardo Amâncio Malagoli**, pelo incentivo e pelo orgulho no desenvolvimento desta tese.

Ao Professor PhD **José Roberto Camacho** pela amizade, companheirismo em várias discussões nos artigos e no projeto final da minha tese.

Ao Professor Dr **Mauricio Valencia Ferreira da Luz** pela amizade, pela orientação dada em Florianópolis-SC e ajuda em como utilizar o *software* Gmsh/GetDP.

Aos membros da banca examinadora, Professores Dra **Elise Saraiva**, Dr **Fabício Augusto Matheus Moura** e Dr **Sebastião Camargo Guimarães Jr.**, pelo tempo despendido na leitura deste trabalho e pelas importantes sugestões apontadas.

Ao Professor Dr **Fran Sérgio Lobato** pela ajuda e todas dúvidas tiradas sobre Evolução Diferencial.

Ao Professor PhD **Patrick Dular** pelas dicas e por auxiliar nos programas do GetDP de como parametrizar os problemas.

Ao Engenheiro **Hugo Gustavo Gomez Mello** pelos desenhos das chapas do estator e rotor do motor cedidos pela WEG Motores.

À **Andréa de Araújo Ferreira** pela amizade, apoio dado em Florianópolis-SC e pelo incentivo durante a realização deste trabalho.

À **Cinara Fagundes Paranhos Mattos** pela presteza nos encaminhamentos junto à secretaria da pós-graduação.

À **CAPES** (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelos recursos destinados ao desenvolvimento deste trabalho de pesquisa.

Aos meus amigos do Núcleo de Extensão e Pesquisa em Fontes Alternativas (**NUPEA**) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e do Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos (**GRUCAD**) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), que apesar de não terem sido citados aqui, também estão presentes nos agradecimentos que faço, por todo carinho e apoio, ao longo da realização deste trabalho.

*“Seja você quem for, seja qualquer posição que você tenha na vida, do nível altíssimo ou mais baixo social, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus que um dia você chega lá.  
De alguma maneira você chega lá.”  
(Ayrton Senna da Silva)*



---

# Resumo

MALAGOLI, J. A. **OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO APLICADA AOS MOTORES DE INDUÇÃO VALIDADA VIA ELEMENTOS FINITOS.** 150 p.  
Tese – Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, 2016

O projeto de sistemas de engenharia configura-se como um problema multiobjetivo. Este por sua vez, é inerentemente conflitante, isto é, a melhora em um dos objetivos acarreta piora no outro. Dentre as inúmeras aplicações que podem ser encontradas na literatura, o projeto de motor de indução trifásico, cuja funções base são induzir correntes alternadas no circuito do rotor, pelo campo magnético girante produzido nas bobinas do estator, configura-se como um interessante tema de pesquisa, já que está diretamente relacionado aos custos de fabricação de motores. Neste contexto, o presente trabalho tem por objetivo a otimização multiobjetivo de máquinas elétricas via elementos finitos considerando, por exemplo, como objetivos a minimização do volume da máquina e a maximização da eficiência energética via determinação do vetor de variáveis geométricas que caracterizam o modelo matemático apresentado. Para essa finalidade é utilizado o algoritmo de evolução diferencial multiobjetivo e os resultados obtidos são confrontados com aqueles obtidos pelo algoritmo genético multiobjetivo. Os resultados preliminares indicam que a metodologia proposta configura-se como uma interessante alternativa para a finalidade acima descrita.

**Palavras-chave:** Evolução Diferencial. Método de Elementos Finitos. Otimização Multiobjetivo. Projeto de Máquinas Elétricas.



---

# Abstract

MALAGOLI, J. A. **MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION APPLIED TO INDUCTION MOTORS VALIDATED VIA FINITE ELEMENTS**. 150 p. PhD Thesis – Faculty of Electrical Engineering, Universidade Federal de Uberlândia, 2016

The design of engineering systems is configured as a multiobjective problem. This in turn is inherently conflicting, that is, the improvement in one of the objectives results in worsening the other. Among the numerous applications that can be found in the literature, the design of three-phase induction motor, basis functions whose alternating currents are induced in the rotor circuit, rotating magnetic field produced by the stator coils, appears as an interesting research topic, since it is directly related to manufacturing costs of motors. In this context, this thesis aims the multiobjective optimization of electrical machines via finite elements considering, for example, as objectives minimizing the volume of the machine and maximizing energy efficiency via determining the vector of geometric variables that characterize the mathematical model presented. For this purpose are used multiobjective differential evolution algorithm and the results obtained are compared with those obtained by multiobjective genetic algorithm. The results preliminary indicate that the proposed methodology configures as an interesting alternative for the purpose described above.

**Keywords:** Differential Evolution. Finite Element Method. Multiobjective Optimization. Design of Electrical Machines.



---

## Lista de ilustrações

Figura 2.1 –Fluxograma com os métodos de otimização. . . . .	45
Figura 2.2 –Fronteira de Pareto (Reproduzido de (LOBATO, 2008)). . . . .	46
Figura 2.3 –Fluxograma de um Algoritmo Genético básico. . . . .	47
Figura 2.4 –Exemplo de mutação em um cromossomo. . . . .	48
Figura 2.5 –Exemplo de <i>crossover</i> . . . . .	49
Figura 2.6 –Fluxograma de um algoritmo NSGA II. . . . .	50
Figura 2.7 –Cálculo da distância de multidão do NSGA II (Reproduzido de (LOBATO, 2008)). . . . .	51
Figura 2.8 –Fundamentação teórica do algoritmo de ED. . . . .	53
Figura 2.9 –Processo de cruzamento binomial $\alpha = 2$ , $\beta = 4$ e $\gamma = N_p$ . . . . .	54
Figura 2.10 –Processo de cruzamento exponencial $\alpha = 2$ , $\beta = 4$ e $\gamma = N_p$ . . . . .	55
Figura 2.11 –Fluxograma do algoritmo de Evolução Diferencial. . . . .	59
Figura 2.12 –Fluxograma do algoritmo MODE. . . . .	62
Figura 2.13 –Viga em balanço (Reproduzido de (DEB, 2001)). . . . .	63
Figura 2.14 –Gráficos das curvas de Pareto dos algoritmos MODE e NSGA II para a viga em balanço. . . . .	64
Figura 2.15 –Vaso de pressão cilíndrico (Reproduzido de (LEMONGE; BARBOSA, 2004)). . . . .	65
Figura 2.16 –Curva do volume ótimo do vaso de pressão. . . . .	66
Figura 3.1 –Comprimento efetivo da máquina. . . . .	71
Figura 3.2 –Chapas do estator e rotor. . . . .	72
Figura 3.3 –Ranhuras (a) aberta e (b) semifechada. . . . .	73
Figura 3.4 –Ranhura parcialmente fechada para 400 (V). . . . .	76
Figura 3.5 –Comprimento médio da espira. . . . .	77
Figura 3.6 –Rotores de Gaiola: (a) Rotor do NUPEA e (b) Desenho da Gaiola. . .	85
Figura 4.1 –Domínio estudado: (1) grandezas elétricas e (2) grandezas magnéticas. .	92
Figura 4.2 –Superfície $\Sigma$ entre dois meios contínuos $\Omega_1$ e $\Omega_2$ . . . . .	93

Figura 4.3 –Domínio Estudado. . . . .	94
Figura 4.4 –Entidades geométricas: (a) nó e (b) aresta. . . . .	97
Figura 4.5 –Domínio estudado no problema magnetostático. . . . .	99
Figura 4.6 –Domínio estudado no problema magnetodinâmico. . . . .	101
Figura 4.7 –Condição de periodicidade. . . . .	103
Figura 4.8 –Elementos da banda de movimento: (a) sem deformação e (b) com deformação (Adaptado de (OLIVEIRA, 2004)). . . . .	105
Figura 5.1 –Fluxograma da metodologia proposta. . . . .	111
Figura 5.2 –Desenho referência do motor usado. . . . .	112
Figura 5.3 –Partes do motor de indução trifásico de alto rendimento <i>Plus</i> WEG. . .	112
Figura 5.4 –Resultados dos algoritmos MODE e NSGA II da máxima eficiência energética e mínimo custo do motor. . . . .	113
Figura 5.5 –Gráficos dos parâmetros e funções objetivo com os resultados do motor referência considerando os algoritmos MODE e NSGA II. . . . .	113
Figura 5.6 –Principais parâmetros antes da otimização do motor de indução trifá- sico de alto rendimento <i>Plus</i> . . . . .	115
Figura 5.7 –Principais parâmetros após a otimização multiobjetivo do motor de indução trifásico de alto rendimento <i>Plus</i> . . . . .	115
Figura 5.8 –Curva de Pareto para minimizar os custos de ferro e cobre do estator. .	118
Figura 5.9 –Curva de Pareto para minimizar os custos de aço silício e cobre esmal- tado do estator. . . . .	119
Figura 5.10 –Desenho ótimo do motor usando o algoritmo MODE. . . . .	122
Figura 5.11 –Curva de Pareto usando o algoritmo MODE. . . . .	122
Figura 5.12 –Desenho ótimo do motor usando o algoritmo NSGA II. . . . .	123
Figura 5.13 –Curva de Pareto usando o algoritmo NSGA II. . . . .	123
Figura 5.14 –Domínio de estudo e malha bidimensional. . . . .	125
Figura 5.15 –Curva de magnetização do ferro puro. . . . .	126
Figura 5.16 –Densidade de fluxo magnético do motor referência. . . . .	126
Figura 5.17 –Densidade de fluxo magnético do motor usando o MODE. . . . .	127
Figura 5.18 –Densidade de fluxo magnético usando o NSGA II. . . . .	127
Figura 5.19 –Placa do motor de indução trifásico utilizado. . . . .	129
Figura 5.20 –Torque do motor referência. . . . .	130
Figura 5.21 –Torque do motor usando o MODE. . . . .	130
Figura 5.22 –Torque do motor usando o NSGA II. . . . .	130
Figura 5.23 –Gráfico comparativo dos torques. . . . .	131
Figura A.1 –Vista em Corte do Motor de Indução Trifásico Alto Rendimento <i>Plus</i> - WEG. . . . .	149
Figura A.2 –Vista das Chapas do Estator e Rotor do Motor WEG. . . . .	150

---

## Lista de tabelas

Tabela 2.1 –Estratégias do algoritmo de evolução diferencial. . . . .	57
Tabela 2.2 –Valores dos parâmetros após a execução do algoritmo ED. . . . .	65
Tabela 3.1 –Perda específica no ferro para chapa de 0,35 ( <i>mm</i> ). . . . .	80
Tabela 3.2 –Perda específica no ferro para chapa de 0,50 ( <i>mm</i> ). . . . .	81
Tabela 5.1 –Variáveis, parâmetros e limites para o projeto do motor. . . . .	111
Tabela 5.2 –Parâmetros antes e depois da otimização do projeto do motor de indução trifásico. . . . .	114
Tabela 5.3 –Preços dos diferentes materiais (cotação em novembro de 2015). . . . .	116
Tabela 5.4 –Limites inferiores e superiores dos parâmetros para minimizar os custos.	117
Tabela 5.5 –Resultados do motor referência e do algoritmo MODE para cobre e ferro do estator. . . . .	118
Tabela 5.6 –Resultados do motor referência e do algoritmo MODE para cobre esmaltado e aço silício do estator. . . . .	119
Tabela 5.7 –Variáveis, parâmetros, MODE, NSGA II e Motor Referência do projeto do motor. . . . .	121
Tabela 5.8 –Propriedades dos materiais. . . . .	125
Tabela 5.9 –Resultados simulados dos principais parâmetros do desenho e das densidades de fluxo magnético nas coroas, nos dentes do estator e rotor. . . . .	128
Tabela 5.10 –Resultados simulados dos torques de partida, máximo e nominal. . . . .	131



---

## Lista de siglas

**AE** *Algoritmos Evolucionários*

**AG** *Algoritmos Genéticos*

**ED** *Evolução Diferencial*

**EDP** *Equações Diferenciais Parciais*

**EDO** *Equações Diferenciais Ordinárias*

**FEMM** *Finite Element Method Magnetics*

**Gmsh** *A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre and post-processing facilities*

**GetDP** *A General Environment for the Treatment of Discrete Problems*

**MOGA** *Multiobjective Genetic Algorithm*

**MODE** *Multiobjective Optimization Differential Evolution*

**MEF** *Método de Elementos Finitos*

**NSGA II** *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*

**NUPEA** *Núcleo de Pesquisa e Extensão em Energia Alternativa*

**UFU** *Universidade Federal de Uberlândia*



---

## Lista de símbolos

### *Símbolos Alfanuméricos:*

$a_n$  - Circulação de  $a$  ao longo da aresta

$\overline{ac}$  - Carga elétrica específica ( $Ae/m$ )

$A_{dente}$  - Área de um dente do estator em 1/3 da altura do dente ( $mm^2$ )

$A_{1dente}$  - Área de um dente do rotor em 1/3 da altura do dente ( $mm^2$ )

$A_{ranhura}$  - Área da ranhura do rotor bobinado ( $mm^2$ )

$A_{t\frac{1}{3}h_t}$  - Área de todos os dentes sob um pólo no estator ( $mm^2$ )

$A_{t2\frac{1}{3}h_{t2}}$  - Área de todos os dentes sob um pólo no rotor ( $mm^2$ )

$\overline{B}_{av}$  - Valor médio da carga magnética ( $T$ )

$B_{CoroaS}$  - Densidade de fluxo na coroa do estator ( $T$ )

$B_{CoroaR}$  - Densidade de fluxo na coroa do rotor ( $T$ )

$B_{DenteS}$  - Densidade de fluxo nos dentes do estator ( $T$ )

$B_{DenteR}$  - Densidade de fluxo nos dentes do rotor ( $T$ )

$B_{Fe}$  - Densidade de ferro ( $Kg/m^3$ )

$B$  - Densidade de fluxo magnético ou indução elétrica ( $T$ )

$B_r$  - Indução magnética remanente ( $T$ )

$b_{01}$  - Abertura da ranhura do estator ( $mm$ )

$b_{s1}$  - Largura da ranhura do estator ( $mm$ )

$b_{r1}$  - Largura da ranhura do rotor ( $mm$ )

$b_v$  - Largura de um duto de ventilação ( $m$ )

$b_{t\frac{1}{3}h_t}$  - Largura do dente em 1/3 da altura do dente do estator ( $mm$ )

$b_{t2\frac{1}{3}h_{t2}}$  - Largura do dente em 1/3 da altura do dente do rotor ( $mm$ )

$C$  - Coeficiente de saída

$CR$  - Probabilidade de cruzamento

$Custo_1$  - Custo total do peso de cobre ( $R\$$ )

$Custo_2$  - Custo total do peso de ferro ( $R\$$ )

$Custo_3$  - Custo total do peso de cobre esmaltado ( $R\$$ )

$Custo_4$  - Custo total do peso de aço silício ( $R\$$ )  
 $d_c$  - Diâmetro do condutor ( $mm$ )  
 $\mathbf{D}$  - Densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica ( $C/m^2$ )  
 $D$  - Diâmetro interno do estator ( $m$ )  
 $D_o$  - Diâmetro externo do motor ( $m$ )  
 $d_{2bar}$  - Diâmetro da barra ( $m$ )  
 $D_{\frac{1}{3}ht}$  - Diâmetro em 1/3 da altura do dente do estator ( $mm$ )  
 $D_{\frac{1}{3}ht2}$  - Diâmetro em 1/3 da altura do dente do rotor ( $mm$ )  
 $D_R$  - Tamanho da vizinhança  
 $D_r$  - Diâmetro externo do rotor ( $mm$ )  
 $D_k$  - Tamanho da  $k$ -ésima curva  
 $dist_{xi}$  - Distância da multidão  
 $\mathbf{E}$  - Campo elétrico ( $V/m$ )  
 $E$  - Módulo de *Young* ( $GPa$ )  
 $f$  - Frequência ( $Hz$ )  
 $f$  - Vetor de objetivos  
 $f_m, f_i, f_j, FO$  - Funções objetivo  
 $F_p$  - Fator de perturbação  
 $F$  - Taxa de perturbação  
 $F_{C1}$  - Área de seção do condutor do estator ( $mm^2$ )  
 $F_{C2}$  - Área de seção do condutor do rotor ( $mm^2$ )  
 $F_{C2bar}$  - Área de seção do condutor da barra do rotor ( $mm^2$ )  
 $F_{C2AnelFinal}$  - Área de seção do condutor do anel final do rotor ( $mm^2$ )  
 $Fmm_i$  - Força magnetomotriz ( $Ae$ )  
 $g_j, h_k$  - Funções de restrição  
 $g$  - Comprimento do entreferro ( $pol$ )  
 $\mathbf{H}$  - Intensidade de campo magnético ( $A/m$ )  
 $h_{s1}$  - Altura da ranhura do estator ( $mm$ )  
 $h_{r1}$  - Altura da ranhura do rotor ( $mm$ )  
 $h_y$  - Profundidade da coroa no estator ( $m$ )  
 $h_{yr}$  - Profundidade da coroa no rotor ( $m$ )  
 $I_i$  - Intensidade de corrente elétrica ( $A$ )  
 $I_{Ph1}$  - Corrente por fase do estator ( $A$ )  
 $I_{Ph2}$  - Corrente por fase para rotor bobinado ( $A$ )  
 $I_{2bar}$  - Corrente por fase para rotor gaiola ( $A$ )  
 $I_{2AnelFinal}$  - Corrente por fase para anel final ( $A$ )  
 $J_s$  - Densidade de corrente no enrolamento do estator ( $A/mm^2$ )  
 $J$  - Desigualdade  
 $\mathbf{J}$  - Densidade superficial de corrente de condução ( $A/mm^2$ )

$J_r$  - Densidade de corrente no enrolamento do rotor ( $A/mm^2$ )  
 $J_{bar}$  - Densidade de corrente na barra do rotor ( $A/mm^2$ )  
 $J_i$  - Densidade superficial de corrente induzida ( $A/mm^2$ )  
 $J_s$  - Densidade superficial de corrente aplicada ( $A/mm^2$ )  
 $K$  - Igualdade  
 $K_i$  - Fator de empilhamento  
 $k_{fr}$  - Coeficiente para fios redondos ou condutores de tira  
 $k_{pd1}$  - Fator de enrolamento  
 $L^2(\Omega)$  - Espaço das funções escalares de quadrado integrável sobre  $\Omega$   
 $\mathbf{L}^2(\Omega)$  - Espaço das funções vetoriais de quadrado integrável sobre  $\Omega$   
 $L$  - Comprimento da máquina ( $m$ )  
 $L_e$  - Comprimento efetivo da máquina ( $m$ )  
 $L_g$  - Entreferro ( $mm$ )  
 $L_{mt1}$  - Comprimento médio da volta no estator ( $m$ )  
 $L_{mt2}$  - Comprimento médio da volta no rotor ( $m$ )  
 $l$  - Comprimento do ferro bruto ( $m$ )  
 $l_i$  - Comprimento do ferro real ( $m$ )  
 $m$  - Número de funções objetivo  
 $\mathbf{n}$  - É a normal à superfície  $\Sigma$   
 $n$  - número de espiras nas bobinas  
 $n_h$  - Número de condutores na horizontal  
 $n_v$  - Número de dutos de ventilação  
 $n_k$  - Número de indivíduos de  $k$ -ésima curva  
 $n_{viol}$  - Número de restrições violadas  
 $N$  - Tamanho da população  
 $N$  - Velocidade ( $rpm$ )  
 $N_{C1}$  - Número de condutores por ranhura do estator  
 $N_{C2}$  - Número de condutores por ranhura do rotor  
 $N_{gen}$  - Número de gerações  
 $N_{obj}$  - Número de objetivos  
 $N_{Ph1}$  - Número de espiras por fase do estator  
 $N_{Ph2}$  - Número de espiras por fase do rotor  
 $P$  - População pai  
 $p$  - Número de pólos  
 $P_o$  - População ordenada por não dominância  
 $P_c, p_c$  - Probabilidade de cruzamento (*crossover*)  
 $P_{cu}$  - Perda total no cobre do estator ( $W$ )  
 $P_{FeD}$  - Perda no ferro nos dentes do estator ( $W$ )  
 $P_{Fe}$  - Perda no ferro do estator ( $W$ )

$P_{it}$  - Perda específica no ferro dos dentes do estator ( $W/Kg$ )  
 $P_{iy}$  - Perda específica no ferro da coroa do estator ( $W/Kg$ )  
 $P_{FeC}$  - Perda no ferro na coroa do estator ( $W$ )  
 $P_{Bobinado}$  - Perda no cobre do rotor bobinado ( $W$ )  
 $P_{Gaiola}$  - Perda no cobre do rotor gaiola ( $W$ )  
 $P_{Barra}$  - Perda no cobre nas barras do rotor ( $W$ )  
 $P_{AnelFinal}$  - Perda no cobre no anel final ( $W$ )  
 $Peso_c$  - Peso de ferro na coroa ( $kg$ )  
 $Peso_{Cu}$  - Peso de cobre ( $kg$ )  
 $Peso_d$  - Peso de ferro nos dentes ( $kg$ )  
 $q_1$  - Ranhuras do estator por pólo por fase  
 $q_2$  - Ranhuras do rotor por pólo por fase  
 $Q_o$  - População filha  
 $Q$  - Carga da viga ( $kN$ )  
 $Q$  - Equação de Saída ( $kW$ )  
 $Q_i$  - Carga Elétrica ( $C$ )  
 $R$  - Número de pseudo-curvas  
 $R$  - Raio interno do vaso ( $pol$ )  
 $R$  - Resíduo ponderado  
 $R_{Ph1}$  - Resistência do enrolamento por fase ( $\Omega$ )  
 $R_{Ph2,75^{\circ}C}$  - Resistência de corrente contínua por fase a  $75^{\circ}C$  ( $\Omega$ )  
 $R_{1bar}$  - Resistência de corrente da barra por fase ( $\Omega$ )  
 $R_{AnelFinal}$  - Resistência de corrente do anel final ( $\Omega$ )  
 $r$  - Taxa de redução  
 $rand_i$  - Número gerado aleatoriamente no intervalo  $[0,1]$   
 $r_p$  - Vetor de parâmetros  
 $s$  - Escorregamento (%)  
 $s_n$  - Função de base  
 $S_i$  - Área superficial do condutor ( $m^2$ )  
 $S_1$  - Número de ranhuras do estator  
 $S_2$  - Número de ranhuras do rotor  
 $S_y$  - Pressão máxima para o problema da viga em balanço ( $MPa$ )  
 $t_i$  - Vetor unitário tangente a direção da bobina  
 $T_s$  - Espessura do vaso de pressão ( $pol$ )  
 $T_h$  - Espessura da tampa ( $pol$ )  
 $U, L$  - Limites das variáveis de projeto  
 $U^{(q+1)}$  - Vetor experimental  
 $v_n$  - Valor da variável escalar no nó  
 $V_i$  - Força eletromotriz ( $V$ )

$V$  - Número de variáveis de projeto  
 $V_{Ph1}$  - Tensão por fase no estator ( $V$ )  
 $V_{Ph2}$  - Tensão por fase no rotor ( $V$ )  
 $Vol$  - Volume da máquina ( $m^3$ )  
 $V_{cuS}$  - Volume de cobre do estator ( $m^3$ )  
 $V_{feSd}$  - Volume de ferro nos dentes do estator ( $m^3$ )  
 $V_{feSc}$  - Volume de ferro na coroa do estator ( $m^3$ )  
 $V_{iso}$  - Volume do isolamento do estator ( $m^3$ )  
 $V_S$  - Volume total do estator ( $m^3$ )  
 $V_p$  - Velocidade periférica ( $m/s$ )  
 $V^{(q+1)}$  - Processo de mutação (vetor doador)  
 $x$  - Vetor  
 $x_1, x_2$  - Representa soluções  
 $x_i^L$  - Valor mínimo da variável  $x_i$   
 $x_i^U$  - Valor máximo da variável  $x_i$   
 $X_\alpha^{(q)}, X_\beta^{(q)}, X_\gamma^{(q)}$  - Vetores  
 $X_s^{(q)}$  - Vetor alvo  
 $Z_1$  - Número total de condutores no estator  
 $Z_2$  - Número total de condutores no rotor  
 $Z_{2bar}$  - Número de barras no rotor  
 $W$  - Volume do vaso de pressão ( $pol^3$ )  
 $w_{tr}$  - Largura entre as ranhuras do rotor ( $mm$ )  
 $w_{ts}$  - Largura entre as ranhuras do estator ( $mm$ )

### ***Símbolos Gregos:***

$\alpha, \beta, \gamma$  - Índices  
 $\triangleleft$  - Uma solução é melhor que outra  
 $\triangleright$  - Uma solução é pior em comparação com a outra solução  
 $\ntriangleright$  - Denota a negação para  $\triangleright$   
 $\preceq$  - Uma solução domina outra solução  
 $\rho$  - Densidade da viga em balanço ( $kg/m^3$ )  
 $\delta_{max}$  - Deflexão máxima da viga em balanço ( $mm$ )  
 $\phi_1$  - Fluxo por pólo ( $Wb$ )  
 $\eta$  - Eficiência Energética (%)  
 $\cos \varphi$  - Fator de potência  
 $\tau_p$  - Passo polar estator ( $m$ )  
 $\tau_{pr}$  - Passo polar rotor ( $m$ )  
 $\tau_{sg1}$  - Passo-ranhura ( $m$ )

$\tau_{sg\frac{1}{3}h_t}$  - Passo-ranhura em 1/3 da altura do dente do estator ( $mm$ )

$\tau_{sg2\frac{1}{3}h_{t2}}$  - Passo-ranhura em 1/3 da altura do dente do rotor ( $mm$ )

$\rho_v$  - Densidade volumétrica de carga elétrica ( $C/m^3$ )

$\mu$  - Permeabilidade magnética do material ( $H/m$ )

$\mu_r$  - Permeabilidade relativa do material

$\mu_0$  - Permeabilidade magnética do vácuo ( $H/m$ )

$\epsilon$  - Permissividade elétrica do material ( $F/m$ )

$\epsilon_r$  - Permissividade relativa do material

$\epsilon_0$  - Permissividade elétrica do vácuo ( $F/m$ )

$\sigma$  - Condutividade elétrica do meio ( $S/m$ )

$\Gamma$  - Fronteira

$\Omega$  - Domínio

$\Gamma_E, \Gamma_D, \Gamma_J$  - Grandezas elétricas

$\Gamma_H, \Gamma_B$  - Grandezas magnéticas

$\Sigma$  - Superfície entre dois meios contínuos

$\Omega_1, \Omega_2$  - Subdomínios

$\Gamma_i$  - Superfície ao longo do fluxo

$\gamma_i$  - Curva ao longo da circulação

$\phi_i$  - Fluxo magnético ( $Wb$ )

$\lambda_i$  - Fluxo magnético concatenado na bobina ( $Wb$ )

$\Omega_s$  - Composto de todos os domínios indutores

$\Omega_i$  - Composto de todos os domínios contendo ímãs permanentes

$\Omega_g$  - Composto de todos os domínios fontes

$\Omega_c$  - Domínio condutor

### ***Operadores:***

$\times$  - Produtor vetorial

$\cdot$  - Produtor escalar

$rot$  - Rotacional

$div$  - Divergente

$grad$  - Gradiente

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>31</b>
1.1	Motivação	32
1.2	Objetivos	32
1.2.1	Objetivo Geral	32
1.2.2	Objetivos Específicos	33
1.3	Contribuições da Tese	33
1.4	Estado da Arte	34
1.4.1	Livros e Apostilas	34
1.4.2	Teses e Dissertações	35
1.4.3	Artigos Técnicos	36
1.4.4	Manuais dos <i>Softwares</i>	38
1.4.5	Publicações	38
1.5	Organização da Tese	39
<b>2</b>	<b>Técnicas de Otimização Aplicadas à Engenharia</b>	<b>41</b>
2.1	Introdução	41
2.1.1	O que é Otimização?	42
2.1.2	Por que utilizar Otimização?	42
2.1.3	Passos Gerais para Resolução de Problemas de Otimização	42
2.1.4	Formulação Geral do Problema de Otimização	43
2.2	Algoritmos Evolucionários (AE)	44
2.3	Pontos Ótimos de Pareto	45
2.3.1	Relação de Dominância	45
2.3.2	Fronteira de Pareto	46
2.4	Algoritmos Genéticos (AG)	46
2.4.1	Cromossomo	47
2.4.2	Função de <i>Fitness</i>	48
2.4.3	Mutação	48

2.4.4	Cruzamento ( <i>Crossover</i> ) . . . . .	49
2.4.5	Seleção . . . . .	49
2.4.6	Algoritmo Genético multiobjetivo (NSGA II) . . . . .	50
2.5	Evolução Diferencial (ED) . . . . .	52
2.5.1	Mutação . . . . .	53
2.5.2	Cruzamento . . . . .	54
2.5.3	Seleção . . . . .	55
2.5.4	Estratégias . . . . .	56
2.5.5	Algoritmo . . . . .	58
2.5.6	Evolução Diferencial multiobjetivo (MODE) . . . . .	59
2.6	Aplicações em Engenharia . . . . .	62
2.6.1	Viga em Balanço . . . . .	63
2.6.2	Vaso de Pressão . . . . .	64
2.7	Conclusão . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Projeto de Motor de Indução Trifásico . . . . .</b>	<b>67</b>
3.1	Introdução . . . . .	67
3.1.1	Equação de Saída ( $Q$ ) . . . . .	68
3.1.2	Cargas Específicas ( $\bar{B}_{av}$ ) e ( $\bar{a}\bar{c}$ ) . . . . .	69
3.1.3	Fator de Potência ( $\cos \varphi$ ) e Eficiência ( $\eta$ ) . . . . .	70
3.1.4	Separação de ( $D$ ) e ( $L$ ) . . . . .	70
3.1.5	Velocidade Periférica ( $V_p$ ) . . . . .	71
3.1.6	Entreferro ( $L_g$ ) . . . . .	71
3.1.7	Comprimento Efetivo da Máquina ( $L_e$ ) . . . . .	71
3.2	Projeto do Estator . . . . .	72
3.2.1	Formas de Ranhura . . . . .	73
3.2.2	Seleção do Número de Ranhuras ( $S_1$ ) . . . . .	73
3.2.3	Estimativa do número total de espiras por fase ( $N_{Ph1}$ ), do número total de condutores ( $Z_1$ ) e do número de condutores por ranhura ( $N_{c1}$ ) . . . . .	74
3.2.4	Área de Seção do Condutor ( $F_{C1}$ ) . . . . .	75
3.2.5	Projeto da Ranhura ( $h_{s1}$ ), ( $b_{s1}$ ), ( $n_v$ ) e ( $n_h$ ) . . . . .	76
3.2.6	Comprimento Médio da Espira ( $L_{mt1}$ ) . . . . .	77
3.2.7	Resistência do Enrolamento por Fase ( $R_{Ph1}$ ) . . . . .	78
3.2.8	Perda Total no Cobre ( $P_{cu}$ ) . . . . .	78
3.2.9	Densidade de Fluxo no Dente ( $B_{DenteS}$ ) . . . . .	78
3.2.10	Profundidade da Coroa ( $h_y$ ) . . . . .	79
3.2.11	Diâmetro Externo do Motor de Indução ( $D_o$ ) . . . . .	79
3.2.12	Volume ( $V_s$ ) . . . . .	79
3.2.13	Perda no Ferro ( $P_{Fe}$ ) . . . . .	80

3.3	Projeto do Rotor . . . . .	81
3.3.1	Número de Ranhuras do Rotor ( $S_2$ ) . . . . .	82
3.3.2	Número Total de Condutores ( $Z_2$ ) e ( $Z_{2bar}$ ) . . . . .	83
3.3.3	Correntes ( $I_{Ph2}$ ), ( $I_{2bar}$ ) e ( $I_{2AnelFinal}$ ) . . . . .	83
3.3.4	Tamanho dos Condutores ( $F_{C2}$ ), ( $F_{C2bar}$ ) e ( $F_{C2AnelFinal}$ ) . . . . .	84
3.3.5	Projeto da Ranhura ( $h_{r1}$ ) e ( $b_{r1}$ ) . . . . .	84
3.3.6	Obliquidade das Ranhuras . . . . .	85
3.3.7	Densidade de Fluxo nos Dentes ( $B_{DenteR}$ ) . . . . .	86
3.3.8	Profundidade da Coroa ( $h_{yr}$ ) . . . . .	86
3.3.9	Diâmetro Externo ( $D_r$ ) . . . . .	87
3.3.10	Passo Polar . . . . .	87
3.3.11	Perdas no Rotor ( $P_{Bobinado}$ ) e ( $P_{Gaiola}$ ) . . . . .	87
3.3.12	Escorregamento ( $s$ ) . . . . .	88
3.3.13	Eficiência Energética ( $\eta$ ) . . . . .	88
3.4	Conclusão . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Método de Elementos Finitos Aplicado às Máquinas Elétricas . . . . .</b>	<b>89</b>
4.1	Introdução . . . . .	89
4.2	Equações de <i>Maxwell</i> . . . . .	90
4.3	Leis de Comportamento dos Materiais . . . . .	91
4.4	Condições de Contorno . . . . .	91
4.4.1	Condições de Contorno Homogêneas . . . . .	91
4.4.2	Condições de Transmissão dos Campos . . . . .	93
4.4.3	Grandezas Globais do Tipo Fluxo e do Tipo Circulação . . . . .	94
4.5	Expressões Integrais, Fórmulas de <i>Green</i> e Espaços Funcionais . . . . .	94
4.6	Discretização do Método dos Elementos Finitos - Método de <i>Galerkin</i> . . . . .	96
4.6.1	Funções de Base ou Aproximação Nodais . . . . .	97
4.6.2	Funções de Base ou Aproximação de Aresta . . . . .	98
4.7	Formulação do Problema de Campo . . . . .	98
4.7.1	Problema Magnetostático . . . . .	98
4.7.2	Problema Magnetodinâmico . . . . .	100
4.8	Periodicidade e Anti-Periodicidade . . . . .	103
4.9	Método da Banda de Movimento . . . . .	104
4.10	Equações Mecânicas . . . . .	105
4.11	Acoplamento Entre a Equação de Circuito Elétrico e as Equações de Campo . . . . .	106
4.12	Problemas Não-Lineares . . . . .	107
4.13	Conclusão . . . . .	108

<b>5</b>	<b>Projetos Ótimos de Motor de Indução Trifásico de Alto Rendimento</b>	
	<i>Plus</i> . . . . .	<b>109</b>
5.1	Introdução . . . . .	109
5.2	Desenho Referência e Ótimo do Motor (Máxima Eficiência Energética e Mínimo Custo) . . . . .	109
5.3	Análise de Custos com Diferentes Tipos de Cobre e Ferro . . . . .	116
5.4	Minimização do Volume e das Perdas no Cobre . . . . .	120
5.5	Análise da Densidade de Fluxo Magnético usando os <i>Software</i> Gmsh/GetDP	124
5.6	Análise do Torque Eletromagnético via Método de Elementos Finitos . . .	128
5.7	Conclusão . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Conclusões</b> . . . . .	<b>133</b>
6.1	Trabalhos futuros . . . . .	134
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>135</b>
	 <b>Apêndices</b>	 <b>141</b>
	<b>APÊNDICE A Artigos Publicados</b> . . . . .	<b>143</b>
	 <b>Anexos</b>	 <b>147</b>
	<b>ANEXO A Motor de Indução Trifásico Alto Rendimento <i>Plus</i></b> . . . . .	<b>149</b>

---

# Introdução

Muitos problemas práticos de otimização necessitam de *software* de simulação via método de elementos finitos, ou outros métodos computacionais complexos para calcular a função objetivo e as restrições.

Na engenharia, particularmente em eletromagnetismo, os problemas são geralmente complexos, não-lineares, de difícil representação e requerem métodos numéricos para se obter a solução. Por isso, ferramentas de elementos finitos são mais aptas para a otimização destes problemas (BASTOS; SADOWSKI, 2003).

Existe uma importante consideração no que se refere à problemas de otimização, a solução ótima não leva em conta uma única característica que deve ser minimizada ou maximizada (mono-objetivo), mas várias (multiobjetivo). Geralmente, são analisados simultaneamente na busca pelo ponto ótimo. Por exemplo, um engenheiro não pode projetar um motor elétrico pensando exclusivamente em obter o melhor desempenho. Mas, é necessário que o produto final obedeça ao nível máximo de ruído permitido e que o consumo, assim como o custo deste equipamento sejam os menores possíveis. Neste caso, uma abordagem multiobjetivo do problema faz-se necessária (COELHO, 2003), (LOBATO, 2008), (OLIVEIRA, 2006).

A principal diferença de problemas multiobjetivo é a maneira de apresentar os resultados, que são conflitantes, a melhora de um acarreta na piora do outro. A resposta de um problema multiobjetivo corresponde a um grupo de soluções que caracteriza o comprometimento entre os diversos objetivos (LOBATO, 2008).

Os problemas com múltiplos objetivos possuem um conjunto de soluções ótimas. Em aplicações reais apenas uma solução é escolhida e executada, surge um problema de decisão: escolher, entre as várias alternativas eficientes, aquela que for mais satisfatória (PARREIRAS, 2006).

Este capítulo tem por objetivo apresentar inicialmente, as motivações, os objetivos e as contribuições da tese. Além disso, apresentam-se o estado da arte e as sínteses das publicações. Por fim, apresenta a organização deste trabalho.

## 1.1 Motivação

No meio industrial, os motores de indução, dispositivos elétricos constituídos por campos magnéticos, apresentam inúmeras aplicações devido ao seu baixo custo de manutenção e por ser um equipamento robusto (MITTLE; MITTAL, 2009), (UPADHYAY, 2008), (AGARWAL, 2000).

Em se tratando do projeto de sistemas de engenharia, objetiva-se produzir máquinas elétricas para realizar tarefas específicas com ótima economia e eficiência. O problema de projeto e fabricação de máquinas elétricas é construir, o mais economicamente possível, uma máquina que cumpra um determinado conjunto de especificações (MALAGOLI et al., 2014b), (MALAGOLI; CAMACHO; LUZ, 2014b).

Tradicionalmente, o projeto de motor de indução tem sido contemplado para alcançar melhores características de desempenho ou para a redução do custo. É notório que, qualquer melhoria significativa na eficiência operacional do motor de indução implica na conservação de energia.

A eficiência da energia de um motor pode ser otimizada reduzindo-se o peso dos materiais ativos utilizados, o que pode ser conseguido através da redução do diâmetro e comprimento do motor, isto é, através da minimização e maximização de funções objetivo do equipamento.

Entre as várias técnicas existentes para obter soluções eficientes, os algoritmos de busca evolucionária foram os escolhidos, por permitirem a solução de problemas complexos, como os não-lineares, descontínuos ou multimodais. Além disso, como trabalham com uma população de possíveis soluções simultaneamente, são capazes de obter ótimo de Pareto distribuídas em uma única execução (OLIVEIRA, 2006). Portanto, esse acoplamento combina a eficiência da busca evolucionária com o modo sofisticado e eficaz com que a análise multicritério trata as situações de conflitos entre interesses (PARREIRAS, 2006).

## 1.2 Objetivos

Pode-se distinguir dois tipos de objetivos neste trabalho: o objetivo geral e os objetivos específicos.

### 1.2.1 Objetivo Geral

O método de elementos finitos é uma ferramenta importante e atual para o cálculo de problemas eletromagnéticos. Para tanto, utiliza-se esta ferramenta como auxiliar nos processos de otimização de máquinas elétricas com o intuito de incluir nestes projetos a verificação de resultados eletromagnéticos no processo de otimização.

## 1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos podem ser divididos em:

- ❑ Estudar as técnicas de otimização, bem como analisar o desempenho em problemas de otimização e compará-las;
- ❑ Projetar e analisar as máquinas elétricas;
- ❑ Desenvolver as formulações matemáticas necessárias para simular e analisar as máquinas elétricas ótimas através do método de elementos finitos;
- ❑ Construir algoritmo para otimizar as máquinas elétricas através da determinação de variáveis geométricas;
- ❑ Analisar e comparar os resultados obtidos após a otimização com valores experimentais utilizando um motor de indução de gaiola disponibilizado pelo laboratório do *Núcleo de Pesquisa e Extensão em Energia Alternativa* (NUPEA).

## 1.3 Contribuições da Tese

As principais contribuições deste trabalho são:

- ❑ Iniciar estudos de laboratório no NUPEA sobre projetos e otimização de motores de indução trifásico utilizando métodos de elementos finitos;
- ❑ Dar continuidade a estudos sobre técnicas de otimização aplicado à engenharia realizados na *Universidade Federal de Uberlândia* (UFU) como em outros centros de pesquisa do Brasil e do mundo;
- ❑ Projetar motores de indução trifásicos com um algoritmo e mostrar os resultados através da determinação do vetor de variáveis geométricas que caracterizam o modelo matemático desenvolvido;
- ❑ Apresentar uma forma de otimização da eficiência energética, do volume, do escorregamento, da perda no cobre e do custo de um motor de indução trifásico de alto rendimento *plus* disponibilizado pelo NUPEA;
- ❑ Utilizar o método de elementos finitos em conjunto com resultados gerados do algoritmo com uma abordagem multiobjetivo.

## 1.4 Estado da Arte

Os modelos matemáticos relacionados ao eletromagnetismo bem como sobre as técnicas de otimização em projetos de máquinas elétricas, os comportamentos dos materiais e as condições de contorno, podem ser realizadas de diferentes maneiras, empregando-se para tanto: métodos analíticos, numéricos e métodos que empregam técnicas no domínio do tempo.

Para uma melhor compreensão deste trabalho, as referências foram agrupadas com a seguinte estruturação: livros e apostilas, teses e dissertações, artigos técnicos, manuais dos *softwares* e publicações.

Reconhecendo a abrangência de trabalhos científicos publicados sobre os temas em questão, esta tese, toma por foco, publicações de difusão mundial de eventos internacionais. Assim, acredita-se, que estas contribuam para uma melhor consolidação e colaboração do trabalho. É conveniente ressaltar também que o processo da divulgação e acesso ao conhecimento constitui-se em uma ação contínua e dinâmica, o que pode resultar na omissão de um ou outro documento de caráter relevante no corpo da presente pesquisa.

Destaca-se que a investigação bibliográfica realizada e que expressa o estado da arte do assunto em pauta, se baseou no seguinte conjunto de publicações anteriores:

- ❑ 06 Livros;
- ❑ 02 Apostilas;
- ❑ 10 Teses;
- ❑ 02 Dissertações;
- ❑ 23 Artigos Técnicos;
- ❑ 03 Manuais de *software*;
- ❑ 13 Publicações.

Na sequência são sumarizados e apresentados os documentos, publicações científicas e livros considerados relevantes para fins do trabalho.

### 1.4.1 Livros e Apostilas

Os autores Mittle e Mittal (2009), Upadhyay (2008), Agarwal (2000) dos livros de projetos de máquinas elétricas analisam o funcionamento e comportamento das máquinas elétricas no meio acadêmico e industrial. Destacando-se alguns conhecimentos:

- ❑ Características construtivas e funcionais das máquinas elétricas: motores de indução, motores síncronos, motores de corrente contínua e transformadores;

- ❑ Eficiência energética;
- ❑ Torque e velocidade;

Os autores Bastos e Sadowski (2003), no livro sobre campos magnéticos, abordam temas como método dos elementos finitos em eletromagnetismo que é uma área clássica da física e da engenharia que ainda desempenha um papel muito importante no desenvolvimento de novas tecnologias. Muitas vezes o eletromagnetismo serve como um elo entre engenheiros eletricitas, cientistas de materiais e físicos aplicados. Esta referência apresenta aspectos do eletromagnetismo teóricos que estão se tornando cada vez mais importantes em tecnologia moderna e em rápido desenvolvimento.

A apostila de Caixeta (2010) aborda temas referentes ao eletromagnetismo. É iniciada com os fundamentos matemáticos necessários para estudar a disciplina de eletromagnetismo no curso de engenharia elétrica. Além disso, foi apresentada a teoria básica dos campos elétricos, a lei de *Gauss*, da densidade de fluxo elétrico, as correntes elétricas, os potenciais, a eletrostática, a eletrodinâmica, as equações de *Poisson* e *Laplace*. Dentro do magnetismo considera-se a teoria dos campos magnéticos, abordando princípios como a lei de *Biot-Savart* e a lei de *Ampère*. Além das equações de *Maxwell*, as quais justificam as aproximações que conduzem à teoria de circuitos elétricos.

As técnicas de otimização e aplicações na solução de problemas de engenharia são apresentados em (GOLDBERG, 1989) e (DEB, 2001). Essas técnicas são aplicadas na minimização e maximização de funções mono e multiobjetivo. Além disso, a apostila de Correia e Werner (2009) analisa a utilização de técnicas baseadas em Algoritmos Genéticos em sistemas de acesso a fontes de informação dinâmicas em que se tem a necessidade da adaptação ao usuário. Por último, cita-se o livro de Coelho (2003) sobre fundamentos, potencialidades e aplicações de algoritmos evolutivos.

### 1.4.2 Teses e Dissertações

A tese de doutorado de Luz (2003) aborda o desenvolvimento e a execução de um método de análise de dispositivos eletromagnéticos considerando o circuito de alimentação. A modelagem do dispositivo eletromagnético é realizada usando o método de elementos finitos tridimensional e o equacionamento do circuito foi feito em variáveis de espaço de estados. Além disso, a validação das ferramentas desenvolvidas foi obtida utilizando-se os *softwares* Gmsh/GetDP. Por fim, o trabalho de Oliveira (2004) descreve a modelagem de máquinas elétricas e seus circuitos elétricos associados usando o método de elementos finitos em 2D.

A tese de doutorado de Dular (1996) descreve o comportamento eletromagnético de *Maxwell* para sistema de equações diferenciais parciais. Quando aplicado a estruturas complexas, a solução analítica é, atualmente, inconcebível. É então necessário recorrer a métodos numéricos, que usam técnicas de discretização. Estes métodos transformam as

equações diferenciais parciais em sistemas de equações algébricas cuja solução fornece uma boa aproximação do mapeamento do campo eletromagnético sobre uma área ou volume.

O trabalho de Geuzaine (2001) fornece subsídios aos estudos de eletromagnetismo computacional com modelagem matemática de sistemas eletromagnéticos. O propósito é usar teorias para traduzir as questões sobre uma situação física dentro de problemas matemáticos com um conjunto de equações que são resolvidas através de simulação computacional.

A dissertação de mestrado de Malagoni (2012) aborda algumas aplicações de problemas eletrostático, magnetostático e eletrocinético. Além disso, descreve com detalhes como utilizar os *softwares* livres Gmsh/GetDP desenvolvidos respectivamente por Christophe Geuzaine e Jean-François Remacle / Patrick Dular e Christophe Geuzaine.

As teses de doutorado de Lobato (2008), Castro (2001), Oliveira (2006) e a dissertação de mestrado de Moedinger (2005) abordam o desenvolvimento de algoritmos para solucionar problemas multiobjetivos aplicados à engenharia. Existem dois métodos de otimização: determinísticos e naturais. Estas teses apresentam noções básicas dos métodos naturais. Destacando-se os algoritmos evolucionários em especial os algoritmos genéticos e evolução diferencial citam-se: (SILVA, 2004), (SCHAFFER, 1984), (PARREIRAS, 2006).

### 1.4.3 Artigos Técnicos

Por volta de 1980 se apresentou a primeira solução de um problema via um algoritmo multiobjetivo. Daí por diante, uma considerável quantidade de trabalhos com esse tema foram publicados. Dentre os mais promissores, pode-se citar: Evolução Diferencial (*Differential Evolution*) (STORN; PRICE, 1995), (STORN; PRICE, 1997); Evolução Diferencial Multiobjetivo (*Multiobjective Differential Evolution*) (BABU; CHAKOLE; MUBEEN, 2005); Algoritmos Genéticos (*Genetics Algorithms*) (LEMONGE; BARBOSA, 2004) e por fim, Algoritmo Genético Multiobjetivo: NSGA II (*Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA II*) (DEB et al., 2000).

Destaca-se o algoritmo de evolução diferencial de Storn e Price (1995), em uma concepção original, o valor de cada variável é representado por um valor real. O procedimento consite em:

- ❑ Gerar uma população inicial randomicamente;
- ❑ Selecionar um indivíduo, de forma aleatória, para ser substituído e três outros indivíduos diferentes como genitores (pais);
- ❑ Selecionar um dos genitores para ser o genitor principal;

- Realizar a modificação pela adição do valor atual da variável a uma taxa, denominada taxa de perturbação, resultante da diferença entre dois valores da variável nos dois outros genitores;
- Se o vetor resultante apresenta uma função de adaptação melhor que o genitor principal, ele o substitui; caso contrário, esse vetor é mantido na população.

A evolução diferencial é uma estratégia que está superando os algoritmos genéticos usados até então, suas principais vantagens são: robustez, simplicidade conceitual e fácil implementação, segundo Babu, Chakole e Mubeen (2005).

Devido à robustez, confiabilidade, baixo preço e baixa manutenção, os motores de indução são usados na maioria das aplicações industriais. Os autores Yasodha, Ramesh e Ponmurugan (2012) do artigo (*Evolutionary Multiobjective Optimization Algorithms For Induction Motor Design - A Study*) fazem uma revisão sobre otimização multiobjetivo no projeto do motor de indução. O estudo está dividido em dois: a primeira parte abrange a informação do motor de indução; em parte posterior, a otimização multiobjetivo, apresenta as formulações matemáticas e vários algoritmos evolucionários. Em todos os algoritmos de otimização não são levados em consideração do mesmo modo os tipos de motor com a intenção de limitar a área de estudo (YASODHA; RAMESH; PONMURUGAN, 2012).

Segundo Raghuram e Shashikala (2013), em nosso dia-a-dia com o aumento de equipamentos modernizados, a demanda por energia também aumenta, portanto, para revolver esta crise energética muitos novos esforços têm sido feitos através da exploração de fontes renováveis para a obtenção de energia ou através da melhora da eficiência operacional dos dispositivos de consumo que exige maior parte de energia elétrica. O projeto de motor de indução usando o método simplificado do algoritmo genético é realizado com o objetivo de maximizar a eficiência (RAGHURAM; SHASHIKALA, 2013).

Nos últimos anos vários trabalhos propuseram metodologias de projetos de máquinas elétricas. Alguns trabalhos propuseram projetos eletromagnéticos para máquinas de ímãs permanentes (JARA et al., 2014), projetos de baixa inércia e alta velocidade para motores de indução (TERZIC; MIHIC; VUKOSAVIC, 2014) e outro que comparou os motores de indução com os motores de ímã permanente para aplicações aeroespaciais (KAKOSIMOS et al., 2014). Citam-se também outras aplicações dos projetos de motores elétricos em dimensionamento dedicados a sistemas de propulsão aeroespacial (BOUZIDI; BIANCHI; MASMOUDI, 2014) e híbrido para bicicletas de três rodas (AHMED et al., 2015). Por fim, pode-se destacar o projeto de máquina síncrona para veículos elétricos leves (CARRARO et al., 2014).

#### 1.4.4 Manuais dos *Softwares*

O *software Finite Element Method Magnetics* (FEMM) desenvolvido por Meeker (2014), é um conjunto de programas para a solução de problemas eletromagnéticos de baixa frequência em domínios bidimensionais. O programa atua em problemas lineares e não-lineares de magnetostática. Além disso, resolve problemas lineares de eletrostática e em regime estacionário problemas de fluxo de calor e fenômenos de corrente.

O *software A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre and post-processing facilities* (Gmsh) desenvolvido por Geuzaine e Remacle (2014), tem como objetivo fornecer uma ferramenta simples para problemas acadêmicos com entrada de parâmetros e capacidades avançadas de visualização. O Gmsh é constituído de quatro módulos: a geometria, a malha, a solução e o pós-processamento. Todos os módulos são prescritos de forma interativa usando a *interface* gráfica do usuário ou em arquivos de texto usando *script* próprio da linguagem no Gmsh.

O *software A General Environment for the Treatment of Discrete Problems* (GetDP) desenvolvido por Dular e Geuzaine (2014), é um *software* para a solução numérica de equações integro-diferenciais, aberto ao acoplamento de problemas físicos (eletromagnéticos, térmicos, eletrodinâmicos, magnetodinâmicos, eletrostáticos, magnetostáticos, mecânicos, estruturais, etc.), bem como dos métodos numéricos (método dos elementos finitos, métodos integrais, etc.) que lida com tais problemas de várias dimensões (1D, 2D ou 3D). A principal característica do GetDP é a proximidade entre a sua estrutura interna, a organização de dados que definem problemas discretos e as expressões matemáticas simbólicas desses problemas. O GetDP consiste em um ambiente de trabalho para a definição de qualquer problema e faz uso de um número limitado de objetos, o que torna o ambiente estruturado e conciso. O *software* dá aos pesquisadores em desenvolvimento mais ferramentas avançadas e uma grande liberdade na adição de novas funcionalidades. As ferramentas de modelagem fornecidas pelo GetDP podem ser abordadas em vários níveis de complexidade: isso abre o *software* para uma ampla gama de atividades, tais como a pesquisa, a colaboração, a educação, a formação e os estudos industriais.

#### 1.4.5 Publicações

O trabalho aqui desenvolvido gerou as seguintes publicações:

a) Em congressos:

- ❑ Utilizou-se o método de elementos finitos para simular modelo eletrostático de capacitores de placas paralelas (MALAGOLI; CAMACHO; LUZ, 2014a), modelo magnetostático aplicado a um toróide (MALAGOLI et al., 2014) e por fim, modelo eletrocinético aplicado a um circuito elétrico (MALAGOLI; CAMACHO; LUZ, 2014c);
- ❑ Utilizou-se o processo de otimização e o método de elementos finitos para projetar

e analisar um transformador monofásico (MALAGOLI et al., 2014c) e um toróide via algoritmo de evolução diferencial (MALAGOLI et al., 2014);

- ❑ Projetou-se estator mono-objetivo (MALAGOLI et al., 2014b), rotor mono-objetivo (MALAGOLI; CAMACHO; LUZ, 2014b), estator multiobjetivo (MALAGOLI et al., 2014a) e rotor multiobjetivo via algoritmo de evolução diferencial. Comparou-se os desenhos das chapas antes e após a otimização (MALAGOLI; LOBATO; CAMACHO, 2014).

b) Em revistas:

- ❑ Analisaram-se os custos de materiais (cobre, ferro, cobre esmaltado e aço silício) para fabricação de chapas de estator. Além disso, utilizou-se otimização via algoritmos genético e evolução diferencial (MALAGOLI; CAMACHO; LUZ, 2016).
- ❑ Desenvolveu-se uma nova abordagem para o projeto ótimo de um estator de motor de indução de gaiola usando o *software* Gmsh, comparou-se o custo dos materiais e o volume da chapa do estator. Para resolver o estudo de caso utilizou-se otimização multiobjetivo de evolução diferencial e algoritmo genético (MALAGOLI; CAMACHO, 2015).
- ❑ Projetou-se um motor de indução trifásico com rotor bobinado usando evolução diferencial e comparou-se com outro algoritmo muito utilizado na literatura (algoritmo genético). Por fim, apresentou-se os desenhos antes e depois da otimização das chapas do estator e rotor (MALAGOLI et al., 2015).
- ❑ Analisou-se graficamente a minimização do volume e do escorregamento de um motor elétrico usando evolução diferencial (MALAGOLI et al., 2015).

É importante mencionar que os resultados obtidos foram satisfatórios, a aplicabilidade do método de otimização na área de Engenharia foi demonstrada a partir da resolução de problemas eletromagnéticos definidos como problemas de otimização nos artigos publicados.

## 1.5 Organização da Tese

A fim de alcançar os objetivos aqui propostos, esta tese de doutorado é construída com a seguinte estrutura:

### 1. Introdução

O capítulo 1 tem por objetivo apresentar inicialmente, as motivações, os objetivos e as contribuições da tese. Além disso, apresentam-se o estado da arte e as sínteses das publicações. Por fim, apresenta a organização deste trabalho.

## 2. Técnicas de Otimização Aplicadas à Engenharia

Para solução de problemas uma das etapas mais importantes é a otimização, que se busca minimizar e maximizar uma função matemática. Existem dois métodos de otimização: determinísticos e naturais. O capítulo 2 apresenta noções básicas dos métodos naturais. Destacam-se os algoritmos evolucionários em especial os algoritmos genéticos e evolução diferencial. Por fim, compara-se as técnicas de otimização com algumas aplicações da literatura.

## 3. Projeto de Motor de Indução Trifásico

O projeto de engenharia é a aplicação da ciência, da tecnologia e da invenção para produzir máquinas para realizar tarefas específicas com ótima economia e eficiência. Se os itens de custo e durabilidade são omitidos de um problema, os resultados obtidos não têm valor de engenharia. O problema de projeto e fabricação de máquinas elétricas é construir, o mais economicamente possível, uma máquina que cumpre um determinado conjunto de especificações e garantias. No capítulo 3, são descritos os passos para a construção de máquinas assíncronas. Além disso, este capítulo apresenta as equações necessárias para projetar motores de indução trifásicos com rotor bobinado e com rotor de gaiola.

## 4. Método de Elementos Finitos Aplicado às Máquinas Elétricas

No capítulo 4 são estabelecidas as equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. Apresenta-se a discretização dos campos pelo método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*. Além disso, são apresentadas as equações das formulações magnetostática e magnetodinâmica na forma forte e na forma fraca. Por fim, para analisar as máquinas elétricas apresenta-se o método usado para levar em conta o movimento, as condições de contorno periódicas e anti-periódicas, as equações mecânicas e o acoplamento entre a equação de circuito elétrico e as equações de campo.

## 5. Projetos Ótimos de Motor de Indução Trifásico de Alto Rendimento *Plus*

Com o objetivo de avaliar motores de indução trifásicos através do algoritmo de evolução diferencial, o capítulo 5 trata de projetos ótimos de máquinas assíncronas. Tais estudos de caso são constituídos por funções multiobjetivo para construção do motor de indução de alto rendimento *plus*. Além disso, descrevem problemas de grande interesse no meio industrial.

## 6. Conclusão

Por fim, o capítulo 6 destina-se em apresentar as principais investigações realizadas ao longo de todo o trabalho. Além disso, citam-se alguns trabalhos futuros após o término da tese.

---

# Técnicas de Otimização Aplicadas à Engenharia

Para a solução de problemas uma das etapas mais importantes é a otimização, em que se busca minimizar e maximizar uma função matemática. Existem dois métodos de otimização: determinísticos e naturais. Este capítulo apresenta noções básicas dos métodos naturais. Destacam-se os algoritmos evolucionários, em especial os algoritmos genéticos e evolução diferencial. Por fim, compara-se as técnicas de otimização com algumas aplicações da literatura.

## 2.1 Introdução

Nos dias atuais, o projeto de sistemas de engenharia configura-se como uma linha de pesquisa de grande interesse devido às inúmeras aplicações que podem ser encontradas em áreas distintas da ciência e engenharia. O problema de otimização é interpretado como a busca por valores de variáveis que resultam na minimização ou maximização de determinadas funções dentro de um domínio, definido através de restrições tecnológicas, físicas ou normativas (LOBATO, 2008).

Dentre alguns problemas práticos de otimização, podem-se citar:

- ❑ Determinar o melhor projeto possível para um motor elétrico, circuito, antena, etc.;
- ❑ Derivar o melhor ajuste possível para os controles de um processo industrial;
- ❑ Gerar o menor custo na fabricação de equipamentos;
- ❑ Estabelecer as rotas de mínimo custo para entrega de produtos a clientes.

Neste capítulo é apresentado a ideia geral do conceito de otimização, a classificação dos métodos de otimização, os passos gerais para resolvê-los e os obstáculos encontrados durante a resolução.

### 2.1.1 O que é Otimização?

Otimizar é melhorar resultados já existentes. Consiste em encontrar uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou conjunto de funções. Ou seja, é a ciência que determina as melhores soluções para algum problema definido matematicamente, em geral, uma representação de um modelo real.

Segundo Castro (2001), a otimização é o processo de tentar diferentes combinações de valores para variáveis que podem ser controladas, busca-se prover a saída mais desejada. Na maioria das vezes esse processo se torna difícil ou mesmo impossível de ser executado em um sistema real, e por isso é feito através de modelos.

### 2.1.2 Por que utilizar Otimização?

A otimização tem como vantagens: diminuir o tempo dedicado ao projeto, possibilitar o tratamento simultâneo de uma grande quantidade de variáveis e restrições de difícil visualização gráfica e possibilitar a obtenção do melhor resultado com menor custo. Como desvantagens, tem-se o aumento do tempo computacional quando o número de variáveis de projeto é maior, o surgimento de funções descontínuas que apresentam lenta convergência, ou de funções com vários mínimos locais onde o mínimo global raramente é obtido (LOBATO, 2008).

Além disso, as técnicas de otimização apresentam algumas outras limitações, como: falta de continuidade das funções a serem otimizadas ou de suas restrições, funções não convexas, multimodalidade (vários pontos ótimos), necessidade de se trabalhar com valores discretos para as variáveis, entre outros (CASTRO, 2001).

### 2.1.3 Passos Gerais para Resolução de Problemas de Otimização

Não existe algoritmo de otimização capaz de ser eficiente a todas as classes de problemas. O método escolhido para um caso particular é dependente da função objetivo, do número de variáveis dependentes e independentes, e das restrições.

A seguir são apresentados os passos gerais para a análise e solução de problemas de otimização (LOBATO, 2008):

- Passo 1: Analisar o problema, identificar suas variáveis e principais características;
- Passo 2: Especificar o critério a ser alcançado (função objetivo em termos das variáveis definidas anteriormente);
- Passo 3: Usar expressões matemáticas que validam o processo e relacionam as variáveis de entrada e os parâmetros. Incluir as restrições de igualdade, desigualdade e laterais;

- ❑ Passo 4: Quando o problema for complexo, pode-se tentar quebrá-lo em problemas menores;
- ❑ Passo 5: Aplicar uma técnica de otimização conveniente;
- ❑ Passo 6: Verificar as respostas, examinar a sensibilidade dos resultados a mudanças nos parâmetros do processo, do algoritmo utilizado e das hipóteses utilizadas na formulação do modelo.

Os passos 1, 2 e 3 identificam as variáveis, especificam a função objetivo e as restrições. O passo 4 sugere que o problema pode ser simplificado. Pode-se ignorar algumas variáveis que não afetam a função objetivo. E uma outra maneira é eliminar as variáveis através da utilização de restrições de desigualdade. O passo 5 busca o ponto ótimo. O passo 6 consiste no atendimento das condições necessárias e suficientes para a obtenção do ótimo e posterior análise do ótimo em relação à mudança dos parâmetros do processo, do algoritmo e da formulação do problema.

#### 2.1.4 Formulação Geral do Problema de Otimização

O problema de otimização apresenta as seguintes características (LOBATO, 2008):

- ❑ Função Objetivo: é representada por uma equação matemática dependente (explicitamente ou não) das variáveis do projeto. Define a característica do sistema que se deseja melhorar;
- ❑ Variáveis de Projeto: é o conjunto de parâmetros que podem influenciar os valores da função objetivo. Também são denominadas de variáveis de decisão ou de busca, promovem modificações no sentido de aumentar ou diminuir os valores da função objetivo;
- ❑ Restrições: são características que dependem matematicamente das variáveis de projeto e limitam os valores da função objetivo a certas regiões do espaço de projeto. Estas podem ser classificadas em:
  - Restrições de desigualdade: estabelecem uma região do espaço de projeto dentro da qual o valor deve ser maior ou igual / menor ou igual, a um valor pré-estabelecido;
  - Restrições de igualdade: definem uma região onde as variáveis de projeto conferem à restrição um valor pré-determinado;
  - Restrições laterais: delimitam uma faixa de variação para cada variável de projeto.

Matematicamente, o problema de otimização é definido como:

$$\min / \max f_m(x), m = 1, 2, \dots, M \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} g_j(x) \leq 0 & j = 1, 2, \dots, J \\ h_k(x) = 0 & k = 1, 2, \dots, K \\ x_i^L \leq x_i \leq x_i^U & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.2)$$

Onde:  $x$  é o vetor de  $n$  variáveis de projeto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Os valores de  $x_i^L$  e  $x_i^U$ , representam os valores mínimos e máximos da variável  $x_i$ , respectivamente. As  $J$  desigualdades ( $g_j$ ) e as  $K$  igualdades ( $h_k$ ) são chamadas de funções de restrição.

Cada uma das  $m$  funções objetivos  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  pode ser maximizada ou minimizada. Em razão da formulação geral de otimização, é necessário entender os conceitos, que serão apresentados ao longo deste capítulo, e são de extrema importância para compreensão de problemas multiobjetivo e das estratégias de solução.

## 2.2 Algoritmos Evolucionários (AE)

Ao longo dos anos, um número considerável de pesquisadores desenvolveu diversas técnicas para resolver problemas de otimização, entretanto recentemente, percebeu-se o potencial dos *Algoritmos Evolucionários* (AE) nessa área (LOBATO, 2008). Atualmente, essa nova área é chamada de otimização evolutiva multiobjetivo que tem crescido significativamente, gerando um grande número de publicações sobre o assunto, principalmente nos últimos 15 anos (OLIVEIRA, 2006).

Durante a década de 80, os avanços realizados de otimização permitiram a aplicação dos algoritmos evolutivos para a solução de problemas de otimização de empresas comerciais e na indústria. A partir deste ponto iniciou-se uma convergência sobre as pesquisas relativas aos AE (OLIVEIRA, 2006).

Os AE se tornaram o principal método disponível para explorar as soluções do ótimo de Pareto em problemas de otimização multiobjetivo que são muito complexos para serem resolvidos por métodos exatos como programação linear e busca do gradiente (MOEDINGER, 2005). Isso ocorre porque os AE são capazes de explorar grandes espaços de busca, mas devido ao seu paralelismo inerente e a capacidade de explorar as similaridades das soluções por recombinação, podem-se aproximar da fronteira de Pareto em apenas uma execução.

A Figura 2.1 mostra em detalhes a classificação dos métodos de otimização, em especial os algoritmos evolucionários.

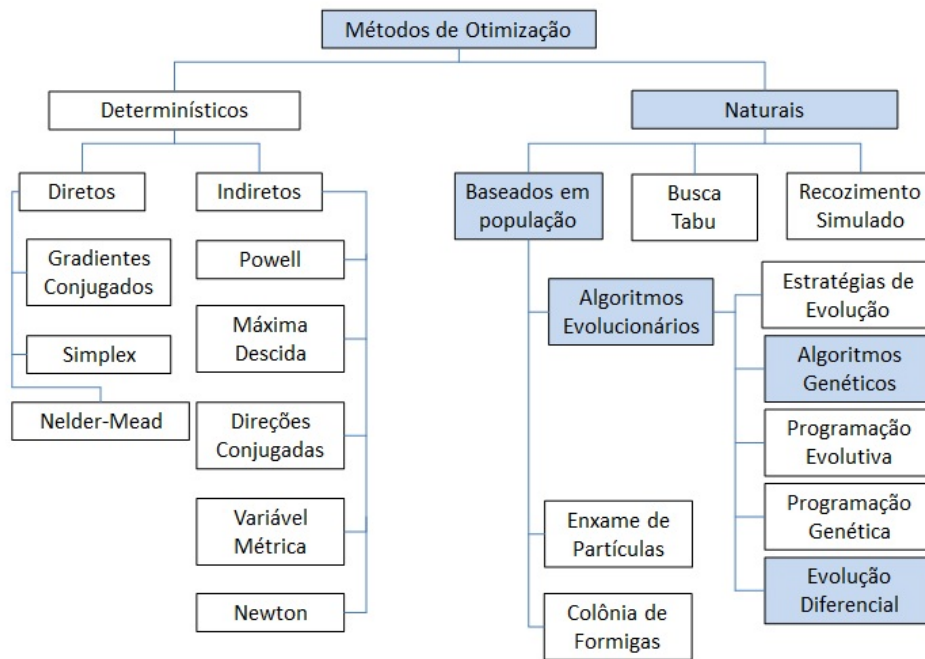


Figura 2.1 – Fluxograma com os métodos de otimização.

## 2.3 Pontos Ótimos de Pareto

Segundo Edgeworth-Pareto, a definição de ótimo é baseada na convicção intuitiva de que um ponto  $x^*$  é tomado como ótimo se "*nenhum critério utilizado pode melhorar a solução, sem piorar pelo menos um outro critério*". O Ótimo de Pareto fornece um conjunto de soluções não-dominadas (LOBATO, 2008). O postulado de Edgeworth-Pareto tem sido a base para o desenvolvimento de teoremas importantes na teoria de otimização multicritérios.

### 2.3.1 Relação de Dominância

A maioria dos algoritmos para otimização multiobjetivo usam o conceito de dominância. Se existem  $N$  funções objetivo  $f_i$ , com  $i = 1, \dots, N$ , o operador  $\triangleleft$  entre duas soluções,  $x_1 \triangleleft x_2$ , significa que a solução " $x_1$  é melhor que  $x_2$ " para um objetivo em particular (LOBATO, 2008). E o operador  $\triangleright$  denota que a solução é pior em comparação com a outra solução. Já o operador  $\ntriangleright$  denota a negação para  $\triangleright$ .

Uma solução  $x_1$  domina outra solução  $x_2$  (representado como  $x_1 \preceq x_2$ ) se as seguintes condições são satisfeitas (LOBATO, 2008):

- A solução  $x_1$  não é pior que  $x_2$  para todos os objetivos, ou seja,  $f_i(x_1) \ntriangleright f_i(x_2)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, N$ ;
- A solução  $x_1$  é estritamente melhor que  $x_2$  pelo menos em um objetivo, ou seja,  $f_i(x_1) \triangleleft f_i(x_2)$  pelo menos para um valor de  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Se ambas as condições são satisfeitas, pode-se dizer que  $x_2$  é dominada por  $x_1$ ,  $x_1$  é não-dominada por  $x_2$  e  $x_1$  é não-dominada com relação a  $x_2$ .

### 2.3.2 Fronteira de Pareto

Quando as soluções a serem comparadas formam o espaço de busca, as soluções não-dominadas entre si são chamadas de soluções ótimas de Pareto. Quando aplicam-se as funções objetivo ao conjunto de soluções ótimas e plotam-se os resultados obtidos, surgem as curvas denominadas de fronteira de Pareto (LOBATO, 2008). As curvas estão em uma região no espaço de busca.

A Figura 2.2 mostra quatro cenários com as devidas fronteiras de Pareto.

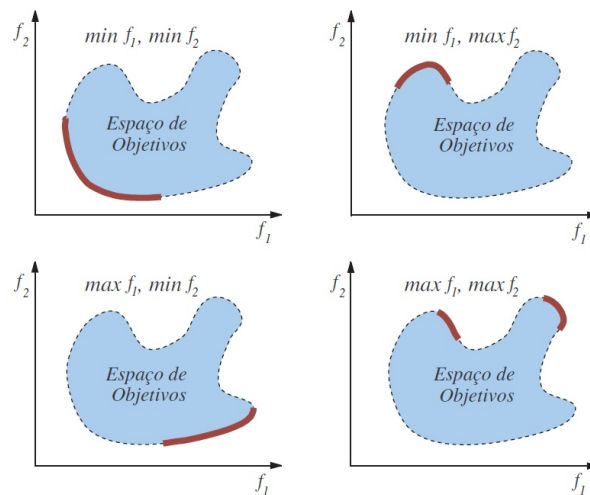


Figura 2.2 – Fronteira de Pareto (Reproduzido de (LOBATO, 2008)).

## 2.4 Algoritmos Genéticos (AG)

Baseadas no princípio da teoria da Seleção Natural de Darwin, que defendia a ideia de que, na natureza, os mais adaptados, tendem a sobreviver frente aos demais, foram formuladas técnicas de busca, chamadas de *Algoritmos Genéticos* (AG), para utilização em processos de otimização e resolução de problemas (GOLDBERG, 1989). Estas novas técnicas têm uma vasta aplicabilidade em problemas de Inteligência Artificial, como aprendizagem de máquina, modelagem de usuários e acesso à informação (MOEDINGER, 2005).

Algoritmos Genéticos são métodos computacionais de busca baseados em evolução natural e na genética (GOLDBERG, 1989). Em AG, uma população de possíveis indivíduos para o problema considerado evolui de acordo com os operadores concebidos a partir de metáforas aos processos biológicos (cruzamento genético, mutações, sobrevivência dos mais aptos), de modo que há uma tendência de que os indivíduos mais aptos representem

soluções cada vez melhores à medida que o processo evolutivo continua. Pode-se citar algumas características (GOLDBERG, 1989) (CORREIA; WERNER, 2009):

- ❑ São algoritmos estocásticos (não são determinísticos);
- ❑ Operam em um conjunto de pontos;
- ❑ Operam em um espaço de soluções codificadas;
- ❑ Necessitam somente de informações da função objetivo para cada membro da população e não requerem derivadas ou qualquer outro tipo de conhecimento.

Serão explicadas nas próximas seções, as várias etapas de processamento do AG. Estas etapas são repetidas diversas vezes até a obtenção do resultado adequado ao problema ou ao atingir um critério de parada, que pode ser o tempo de execução até valores de convergência do algoritmo (GOLDBERG, 1989) (CORREIA; WERNER, 2009). Podem-se considerar os seguintes aspectos para o funcionamento do AG: a representação do problema, o uso dos três operadores (seleção, *crossover* e mutação) e a aplicação de uma função de *fitness* para avaliar cada membro da população (MOEDINGER, 2005).

A Figura 2.3 mostra o fluxograma de um Algoritmo Genético básico.

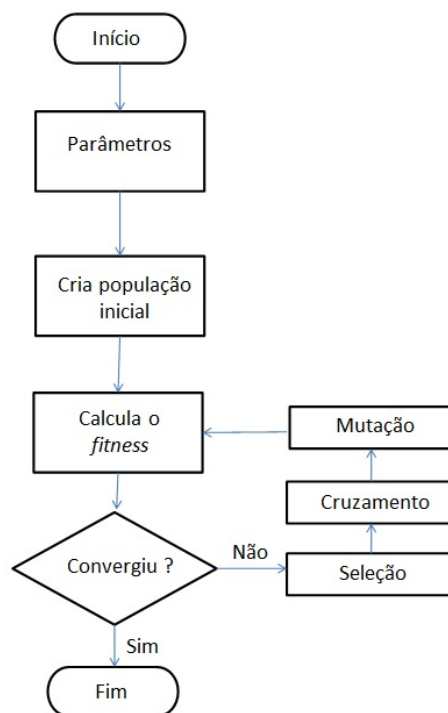


Figura 2.3 – Fluxograma de um Algoritmo Genético básico.

### 2.4.1 Cromossomo

Os cromossomos são um dos principais componentes dos algoritmos genéticos. Contém os valores avaliados da função de *fitness* e dos operadores de mutação, *crossover* e seleção

(MOEDINGER, 2005). Os cromossomos podem ser representados em qualquer uma das bases numéricas, a mais utilizada é a base binária devido a facilidade de trabalho, pois a utilização de outra base pode se tornar complexa e se faz necessário uma adequação das demais funções do algoritmo (GOLDBERG, 1989) (CORREIA; WERNER, 2009). Devido a escolha da base binária, cada *bit* da população é denominado de gene.

A população é formada por um conjunto de cromossomos. Esta população é submetida ao ciclo (cada ciclo corresponde a uma geração): avalia-se a função de *fitness* e verifica-se quão próximo cada cromossomo está em relação ao ponto ótimo, em seguida realiza-se as operações de reprodução, acasalamento, *crossover* e mutação (GOLDBERG, 1989) (CORREIA; WERNER, 2009). Após analisar várias gerações o comportamento esperado do algoritmo é o início da convergência da solução. Na maioria das vezes este é o critério escolhido para determinar o final da execução do algoritmo.

### 2.4.2 Função de *Fitness*

A função de *fitness* é vinculada à minimização ou maximização de uma função objetivo, e é utilizada para obter o melhor resultado. Para cada problema de otimização deve-se escolher as variáveis a serem otimizadas (GOLDBERG, 1989). Quando usada a codificação binária, através das variáveis é elaborada a função de *fitness* do problema, que serve para realizar a análise de desempenho de cada cromossomo.

Os AG buscam as melhores soluções através da alteração da população e podem encontrar uma solução comprometida que seja inválida (MOEDINGER, 2005). Isso caracteriza uma restrição às possíveis soluções apresentadas do problema. Quando existirem restrições, adota-se a penalidade do resultado fora do esperado ou descarta-se completamente o resultado (CORREIA; WERNER, 2009).

### 2.4.3 Mutação

A mutação faz troca aleatória de cada gene do cromossomo nos AG com representação binária. A alteração evita restrição a um espaço de mínimo local do algoritmo, todavia se a probabilidade de mutação for elevada, o algoritmo passa a se comportar de forma aleatória, o que não é desejado na maioria das vezes (MOEDINGER, 2005).

A Figura 2.4 apresenta um exemplo de mutação no cromossomo com codificação binária.

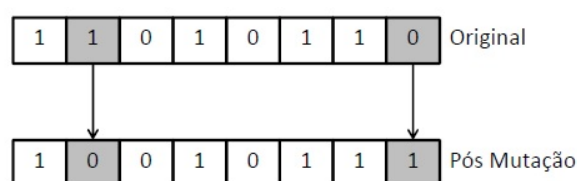


Figura 2.4 – Exemplo de mutação em um cromossomo.

### 2.4.4 Cruzamento (*Crossover*)

O *crossover* é o responsável pela troca de gene entre cromossomos diferentes e através dessa troca, são gerados novos membros da população. O ponto de corte é aleatório e poderá ocorrer ou não a recombinação, e a ocorrência do *crossover* está condicionada a  $P_c$  (probabilidade de *crossover*). Portanto, ocorre a troca de material genético entre os indivíduos da população. O operador *crossover* é o responsável pela criação de novos indivíduos e da recombinação resultam dois novos indivíduos descendentes dos primeiros (MOEDINGER, 2005). O processo do operador *crossover* é mostrada na Figura 2.5.

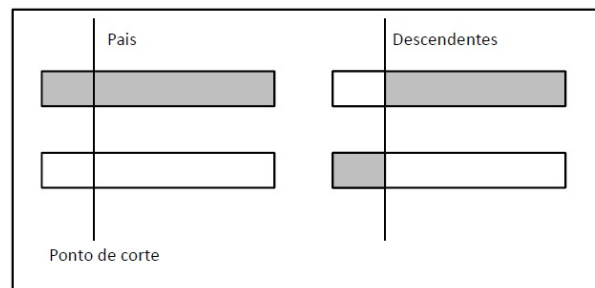


Figura 2.5 – Exemplo de *crossover*.

### 2.4.5 Seleção

A seleção natural é onde os indivíduos com baixos valores de *fitness* têm uma alta probabilidade de desaparecer enquanto indivíduos adequados têm uma grande chance de sobreviver (MOEDINGER, 2005). O princípio da seleção natural faz com que os melhores indivíduos sobrevivam, obtendo a evolução, que é iniciada com o material genético (cromossomo) de dois outros cromossomos os quais são recombinados durante a reprodução (*crossover*). A seguir ocorre a mutação, que causa uma alteração aleatória nos genes de um cromossomo (CORREIA; WERNER, 2009).

O funcionamento dos AG pode ser descrito da seguinte forma (MOEDINGER, 2005): o algoritmo é iniciado com  $N$  indivíduos que são gerados aleatoriamente. Como no caso do mundo biológico não há evolução sem variedade, é importante que a população inicial cubra a maior área possível do espaço de busca. Depois, os AG precisam da informação da função objetivo (função de *fitness*) para cada membro da população. Na próxima fase, os AG simulam a seleção natural e seguindo o processo natural tem-se a recombinação, este processo envolve dois indivíduos que emulam o fenômeno de *crossover*, efetuando a troca de material genético entre os cromossomos. A última etapa para uma geração é a mutação, onde seleciona-se uma posição do cromossomo e altera o valor do gene correspondente para um outro valor permitido. Com isso se completa uma geração dos AG, na sequência é reiniciado o processo até que uma condição de parada seja satisfeita. Esta condição pode ser um número definido de gerações ou uma variância mínima entre os membros da população (MOEDINGER, 2005).

### 2.4.6 Algoritmo Genético multiobjetivo (NSGA II)

Deb et al. (2000) propuseram o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA II) levando em conta a necessidade de diminuir a complexidade computacional na classificação não-dominada, introduzindo o elitismo e eliminando a subjetividade na atribuição do parâmetro de compartilhamento.

A Figura 2.6 mostra o fluxograma de um algoritmo NSGA II.

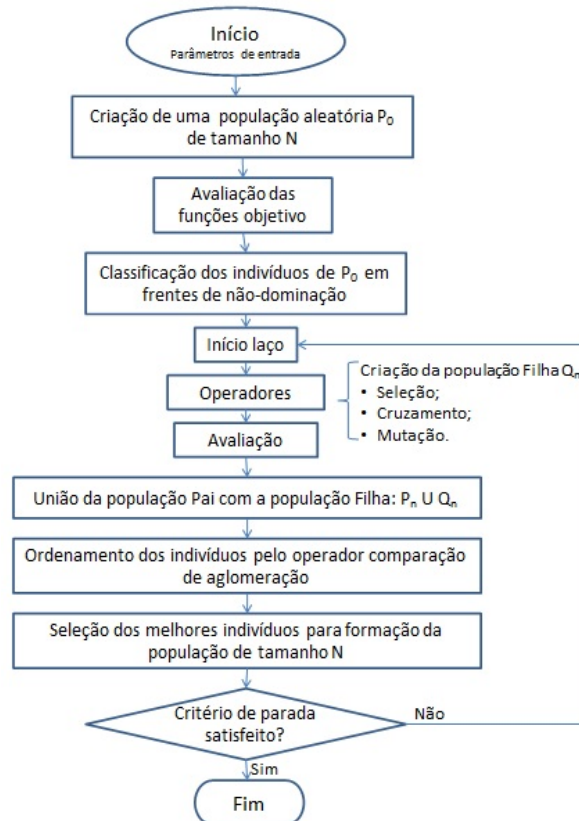


Figura 2.6 – Fluxograma de um algoritmo NSGA II.

O algoritmo NSGA II trabalha com uma população pai  $P$  para gerar a população filha  $Q$ , como nos AG convencionais. Gera-se uma população  $P_0$  ordenada por não dominância, na primeira geração. Cada solução tem um valor de aptidão igual ao seu nível de não dominância, sendo que 1 é o melhor nível, 2 é o segundo melhor nível e assim sucessivamente. Aplicando os operadores de seleção por torneio, cruzamento e mutação, obtém-se a população filha  $Q_0$ , de mesmo tamanho que  $P$ . Ambas as populações são reunidas em um conjunto  $R_0$ . Para as  $n$  gerações seguintes o algoritmo NSGA II trabalha com a população  $R_n$  (LOBATO, 2008).

Para se ter uma estimativa da densidade das soluções que cercam uma solução particular na população, calcula-se a distância comum entre a solução anterior e posterior de cada um dos objetivos. A distância estima o tamanho do maior cubóide (é mostrado através da Figura 2.7) que inclui a solução  $i$  sem incluir qualquer outra solução da população. Uma solução  $i$  é melhor que outra solução  $j$  se (LOBATO, 2008):

- A solução  $i$  possui um melhor nível de não dominância, então,  $r_i < r_j$ ;
- Se ambas as soluções estão no mesmo nível, mas  $i$  tem uma distância da multidão maior,  $d_i > d_j$ .

Dessa forma, garante-se o elitismo preservando as melhores soluções (frentes não-dominadas) na população posterior (DEB, 2001). Nem todas as frentes podem ser incluídas na nova população. Assim sendo, Deb et al. (2000) propuseram o método da distância de multidão como mostra a Figura 2.7, que combina as frentes não incluídas no conjunto, para compor os últimos espaços da população corrente, garantindo a diversidade da população.

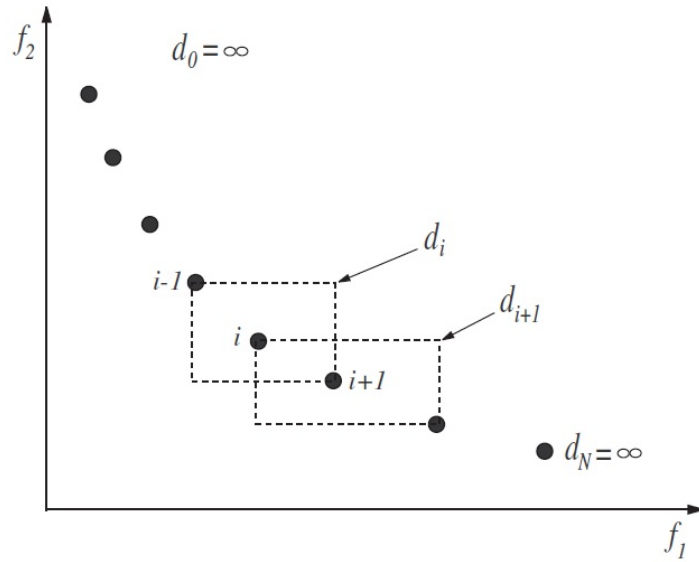


Figura 2.7 – Cálculo da distância de multidão do NSGA II (Reproduzido de (LOBATO, 2008)).

A estrutura do algoritmo NSGA II é apresentado a seguir (LOBATO, 2008):

**Parâmetros de Entrada:** *População pai ( $P$ ), População filha ( $Q$ ), Tamanho fixo para  $P$  e  $Q$ , Conjunto de soluções na fronteira  $j$  ( $F_j$ ), Número máximo de gerações ( $nMax$ ) e Número de geração atual ( $n$ ).*

1. Gerar a população inicial  $P_o$  e  $Q_o = ()$ . Fazer  $n = 0$ ;
2. Realizar a seleção, cruzamento e mutação para gerar a filha  $Q_o$ . Fazer  $R_n = P_n \cup Q_n$ ;
3. Realizar a ordenação por não dominância em  $R_n$ ;
4. Criar  $P_{n+1} = ()$ ;
5. Enquanto  $|P_{n+1} + F_j| \leq N$ , copiar as soluções de  $F_j$  em  $P_{n+1}$ ;

6. Calcular as distâncias da multidão em  $F_j$ , ordenando  $F_j$  conforme as distâncias  $d_j$  e copiando as primeiras  $N - |P_{n+1}|$  soluções de  $F_j$  para  $P_{n+1}$ ;
7. Aplicar seleção, cruzamento e mutação para gerar a nova população  $Q_{n+1}$ ;
8. Se  $n > n_{Max}$  então pare, caso contrário atribuir  $n = n + 1$  e voltar ao segundo passo.

**Saída:** *Soluções Não-dominadas.*

A principal vantagem do NSGA II é a maneira como este método mantém a diversidade entre as soluções não-dominadas. Além disso, não existe a incorporação do parâmetro  $\sigma_{share}$  (parâmetro de atualização), como no *Multiobjective Genetic Algorithm* (MOGA) (DEB et al., 2000). Já um ponto negativo deste algoritmo é que, se o conjunto  $F_1$  tem um tamanho maior que  $N$ , o processo de escolha de apenas  $N$  soluções, usando a distância da multidão, faz com que sejam perdidas soluções potenciais.

## 2.5 Evolução Diferencial (ED)

O algoritmo de *Evolução Diferencial* (ED) foi desenvolvido por Storn e Price (1995), visando melhores resultados com uma abordagem diferente dos algoritmos genéticos e das estratégias de evolução.

A escolha do algoritmo de ED está baseada nas seguintes características (COELHO, 2003):

- ❑ É um algoritmo de busca estocástica, originado da seleção natural;
- ❑ O algoritmo busca a solução ótima global manipulando uma população de soluções;
- ❑ É eficaz para resolver problemas de otimização com função objetivo descontínua, pois não requer informação sobre suas derivadas;
- ❑ Os parâmetros de entrada e saída são manipulados como números ordinários reais sem processamento extra;
- ❑ Apresenta uma concepção puramente matemática, baseada em operações vetoriais, sendo por este motivo considerada uma abordagem estrutural.

A Figura 2.8 apresenta a fundamentação teórica do algoritmo de ED (LOBATO, 2008).

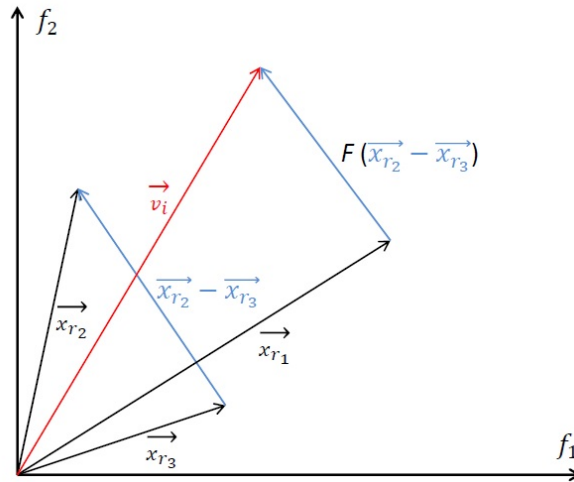


Figura 2.8 – Fundamentação teórica do algoritmo de ED.

A Figura 2.8 mostra que a partir de três vetores  $\vec{x}_{r1}$ ,  $\vec{x}_{r2}$  e  $\vec{x}_{r3}$ , são escolhidos aleatoriamente dois (nesse caso,  $\vec{x}_{r2}$  e  $\vec{x}_{r3}$ ), sendo realizada a subtração dos mesmos. O resultado é multiplicado por um escalar  $F$ , gerando um vetor com módulo diferente da subtração original. O novo vetor é então, somado ao vetor  $\vec{x}_{r1}$ , fornecendo assim um novo vetor  $\vec{v}_i$ . O vetor  $\vec{v}_i$  indicará uma nova posição no espaço, isto é, em termos do algoritmo ED, um novo indivíduo é gerado (LOBATO, 2008).

A principal ideia da ED é gerar novos indivíduos, denotados vetores modificados ou doadores, pela adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo, cuja operação é chamada mutação (OLIVEIRA, 2006). As componentes do novo indivíduo doador são misturadas com as componentes do indivíduo escolhido aleatoriamente, para resultar o chamado vetor tentativa, ou vetor experimental. O processo de misturar os parâmetros é chamado cruzamento na comunidade dos algoritmos evolutivos. Se o custo do vetor experimental for menor que o custo do vetor alvo, então o vetor experimental será o vetor alvo da geração seguinte. Esta última operação é chamada seleção. O procedimento é finalizado através de algum critério de parada, ou seja, o número máximo de gerações pré-definido pelo usuário é alcançado (OLIVEIRA, 2006).

### 2.5.1 Mutação

Considera-se os vetores  $X_\alpha^{(q)}$ ,  $X_\beta^{(q)}$  e  $X_\gamma^{(q)}$  distintos entre si e escolhidos aleatoriamente em uma população com  $N_p$  indivíduos, para a obtenção do vetor doador  $V^{(q+1)}$  (OLIVEIRA, 2006). Utilizou-se o par de vetores  $(X_\beta, X_\gamma)$  da  $q$ -ésima geração definindo o vetor diferença  $(X_\beta - X_\gamma)$ . Esta diferença é multiplicada por  $F_p$ , sendo denotada diferença vetorial ponderada e será usada para perturbar o terceiro vetor  $X_\alpha$ . O fator de perturbação  $F_p$  é um número real, positivo pertencente ao intervalo  $[0, 1]$  e controla a amplitude do vetor diferença.

O processo de mutação pode ser escrito como (OLIVEIRA, 2006):

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F_p(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (2.3)$$

### 2.5.2 Cruzamento

O cruzamento é introduzido para aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram a mutação. Gera-se um vetor doador, considerando que para cada vetor alvo  $X_s^{(q)}, s \in \{1, \dots, N_p\}$  e diferente dos índices  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Utilizando o vetor doador e o vetor alvo, as componentes do vetor experimental  $U^{(q+1)}$  são escolhidas pela seguinte comparação (OLIVEIRA, 2006):

$$u(i)^{(q+1)} = \begin{cases} v(i)^{(q+1)}, & \text{se } rand_i \leq P_c \\ x_s(i)^{(q)}, & \text{se } rand_i > P_c, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.4)$$

Onde:  $v(i)^{(q+1)}$  representa a  $(q + 1)$ -ésima componente do vetor doador  $V^{(q+1)}$ ;  $x_s(i)$  representa a componente do vetor alvo  $X_s^{(q)}$ ;  $rand_i$  é um número gerado aleatoriamente no intervalo  $[0, 1]$ ;  $P_c \in [0, 1]$  representa a probabilidade do vetor experimental herdar os valores das variáveis do vetor doador, devendo ser fornecida pelo usuário. Quando  $P_c = 0$ , por exemplo, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor alvo  $X_s^{(q)}$ . Por outro lado, se  $P_c = 1$ , todas as componentes do vetor experimental virão do vetor doador  $V^{(q+1)}$ .

Segundo Storn e Price (1995), este tipo de cruzamento é denominado operador cruzamento binomial, sendo executado em cada variável sempre que um número aleatório  $rand \in [0, 1]$  for menor que a probabilidade de cruzamento  $P_c$ .

A Figura 2.9 mostra o cruzamento binomial para uma função de 7 variáveis (OLIVEIRA, 2006).

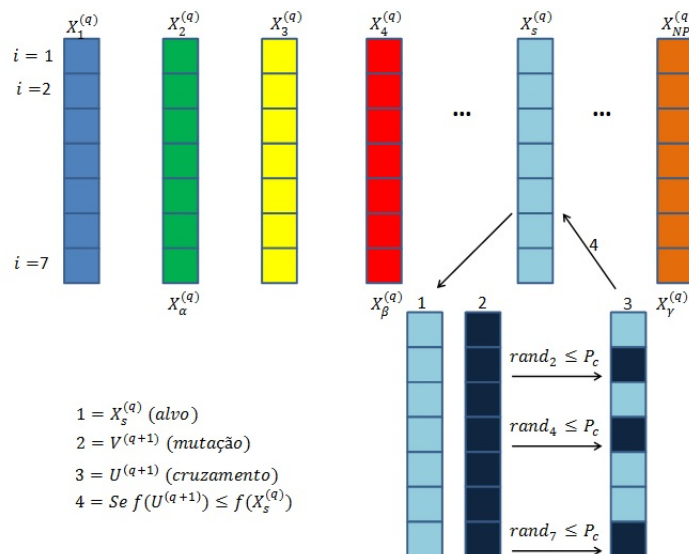


Figura 2.9 – Processo de cruzamento binomial  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 4$  e  $\gamma = N_p$ .

Storn e Price (1997) desenvolveram o operador cruzamento exponencial, em que o cruzamento é executado nas variáveis enquanto o número aleatório  $rand \in [0, 1]$  for menor que a probabilidade de cruzamento  $P_c$ . A primeira vez que este número aleatório ultrapassar o valor de  $P_c$ , nenhum cruzamento é executado e as variáveis restantes são deixadas intactas, ou seja:

$$\begin{cases} rand_i \leq P_c, u(i)^{(q+1)} = v(i)^{(q+1)}, \\ rand_i > P_c, u(j)^{(q+1)} = x_s(j)^{(q)}, j = (i + 1), \dots, n \end{cases} \quad (2.5)$$

Se após o cruzamento uma ou mais componentes do vetor experimental estiver fora da região de busca, definida pelas restrições laterais das variáveis de projeto, as seguintes correções devem ser feitas (OLIVEIRA, 2006):

$$\begin{cases} Se u(i) < x(i)^{inf}, \text{ então faz } u(i) = x(i)^{inf}, \\ Se u(i) > x(i)^{sup}, \text{ então faz } u(i) = x(i)^{sup}, i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.6)$$

A Figura 2.10 mostra o cruzamento exponencial para uma função de 7 variáveis (OLIVEIRA, 2006).

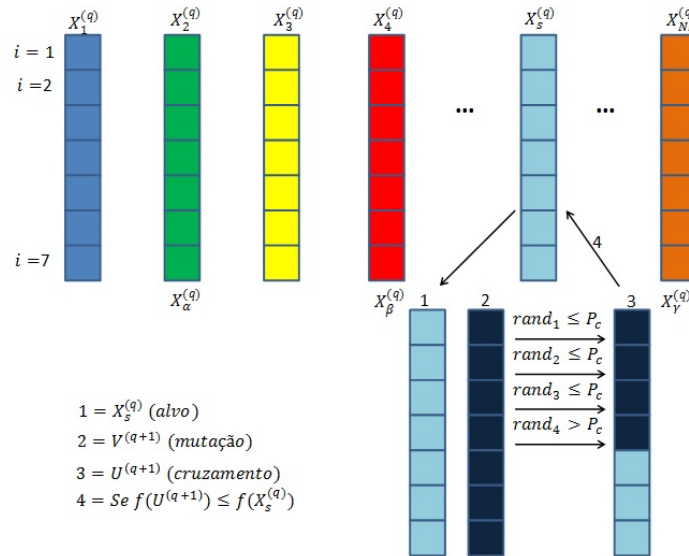


Figura 2.10 – Processo de cruzamento exponencial  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 4$  e  $\gamma = N_p$ .

### 2.5.3 Seleção

O processo de produzir filhos melhores é denominado de seleção. O custo do vetor experimental  $U^{(q+1)}$  é calculado e comparado com o custo do vetor alvo  $x_s^{(q)}$ . Se o custo do vetor experimental for menor que o custo do vetor alvo, o vetor alvo da próxima geração será o vetor experimental. Caso contrário, o vetor alvo da próxima geração será

o vetor alvo da geração atual. Em outras palavras, este processo pode ser escrito como (OLIVEIRA, 2006):

$$\begin{cases} \text{Se } f(U^{(q+1)}) \leq f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = U^{(q+1)} \\ \text{Se } f(U^{(q+1)}) > f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = X_s^{(q)} \end{cases} \quad (2.7)$$

Através de algum critério de parada o procedimento é finalizado, sendo que o número máximo de gerações deve ser estabelecido (LOBATO, 2008).

Normalmente, o desempenho do algoritmo de ED depende principalmente do tamanho da população  $N_p$ , da região de busca, da taxa de cruzamento e também do fator de perturbação  $F_p$  (OLIVEIRA, 2006).

### 2.5.4 Estratégias

Podem ser obtidas diferentes estratégias da ED alterando-se a forma de obtenção dos operadores mutação e cruzamento, de acordo com (OLIVEIRA, 2006):

- ❑ O tipo do indivíduo  $X_a$  a ser modificado na formação do vetor doador;
- ❑ O número de vetores diferenciais (diferenças ponderadas) considerados;
- ❑ O tipo de cruzamento a ser utilizado.

Storn e Price (1995) classificaram as diferentes variações, introduzindo a seguinte notação: Estratégia ED/ $a/b/c$ .

Onde:

- ❑  $a$  designa o vetor  $X_a$  a ser perturbado. Se o vetor for escolhido aleatoriamente entre os indivíduos da população, este parâmetro da estratégia é representado como  $a = rand$ . Caso o vetor seja adotado como vetor de menor custo da população  $X_{best}$ , representa-se o parâmetro por  $a = best$ ;
- ❑  $b$  determina o número de vetores diferença usados para a perturbação de  $X_a$  na obtenção do vetor doador. Por exemplo, o operador mutação, dado na Equação (2.3) utiliza um vetor diferença, assim  $b = 1$ ;
- ❑  $c$  representa o tipo de cruzamento adotado. Se for utilizado o cruzamento binomial tem-se o parâmetro  $c = bin$ , se for o cruzamento exponencial  $c = exp$ .

Usando esta notação e supondo cruzamento binomial, a Equação (2.3) pode ser escrita como: ED/ $rand/1/bin$ .

Considera-se agora que o vetor doador seja obtido por (OLIVEIRA, 2006):

$$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \quad (2.8)$$

Neste caso, onde o melhor indivíduo  $X_{best}$  foi perturbado, dependendo do cruzamento utilizado, tem-se a estratégia  $ED/best/1/bin$  ou  $ED/best/1/exp$ .

Caso o número de indivíduos da população seja grande, a diversidade da população pode ser melhorada usando-se duas diferenças ponderadas para perturbar um vetor existente e, na população atual, são escolhidos cinco vetores distintos aleatoriamente. O vetor diferencial usa dois pares de diferenças ponderadas para perturbar  $X_a$ , que pode ser aleatório ou o melhor vetor da população atual. Este processo pode ser escrito como (OLIVEIRA, 2006):

$$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\rho}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)}) \quad (2.9)$$

$$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)}) \quad (2.10)$$

Os índices aleatórios  $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \delta \in \{1, 2, \dots, N_p\}$ , são inteiros mutuamente distintos e diferentes do índice  $s$ , tal que  $N_p \geq 6$ . De acordo com o cruzamento adotado, a Equação (2.9) representa a estratégia  $ED/rand/2/bin$  ou  $ED/rand/2/exp$ . De forma similar, a Equação (2.10) representa a estratégia  $ED/best/2/bin$  ou  $ED/best/2/exp$ .

Há duas outras estratégias, o vetor doador tem contribuições do melhor indivíduo da população  $X_{best}$  e de algum indivíduo da geração anterior  $X_{old}$ , além dos vetores diferença seguinte (OLIVEIRA, 2006):

$$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F_p(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)}) \quad (2.11)$$

A Equação (2.11) pode representar as estratégias  $ED/rand-to-best/2/bin$  ou  $ED/rand-to-best/2/exp$ , dependendo do tipo de cruzamento adotado.

A Tabela 2.1 mostra resumidamente as dez estratégias.

Tabela 2.1 – Estratégias do algoritmo de evolução diferencial.

Estratégia	Representação	Mecanismo de Mutação
1	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	$ED/rand/1/bin$
2	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	$ED/best/1/bin$
3	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\rho}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	$ED/rand/2/bin$
4	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	$ED/best/2/bin$
5	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F_p(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	$ED/rand-to-best/2/bin$
6	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	$ED/rand/1/exp$
7	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	$ED/best/1/exp$
8	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F_p(X_{\rho}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	$ED/rand/2/exp$
9	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	$ED/best/2/exp$
10	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F_p(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)}) + F_p(X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	$ED/rand-to-best/2/exp$

Ressalta-se que uma estratégia que funciona bem para um dado problema pode não funcionar quando aplicado a outro, sendo recomendável testar várias estratégias para o mesmo caso.

### 2.5.5 Algoritmo

1. Definir a estratégia a ser usada (conforme a Tabela 2.1), escolher o fator de perturbação  $F_p$  e a probabilidade de cruzamento  $P_c$ ;
2. (**inicialização**) Gerar uma população inicial aleatória, utilizando, por exemplo, a distribuição uniforme:

$$x(i)_d^{(q)} = x(i)^{inf} + rand_i(x(i)^{sup} - x(i)^{inf}), i = 1, \dots, n; d = 1, \dots, N_p$$

onde:  $x(i)^{inf} \leq x(i) \leq x(i)^{sup}$  são as restrições laterais,  $rand_i \in [0, 1]$  e neste caso,  $q = 1$ ;

3. Escolher um indivíduo aleatório  $X_s^{(q)}$  ou adotar  $X_{best}^{(q)}$ , de acordo com a estratégia escolhida, a ser substituído (alvo);
4. Escolher outros três indivíduos  $X_\alpha^{(q)}$ ,  $X_\beta^{(q)}$  e  $X_\gamma^{(q)}$ ,  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq s$  ou cinco indivíduos distintos, dependendo da estratégia adotada no item 1;
5. (**mutação**) Gerar um indivíduo doador  $V^{(q+1)}$  de acordo com a estratégia escolhida, por exemplo:

$$V^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F_p(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}) \text{ ou } V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F_p(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)});$$

6. (**cruzamento**) Gerar um indivíduo  $U^{(q+1)}$  a ser comparado com  $X_s^{(q)}$  ou  $X_{best}^{(q)}$  através da equação dada por:

$$u(i)^{(q+1)} = \begin{cases} v(i)^{(q+1)}, & \text{se } rand_i \leq P_c \\ x_s(i)^{(q)} \text{ (ou } x_{best}(i)^{(q)}), & \text{se } rand_i > P_c, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

7. Se após o cruzamento uma ou mais componentes de  $U^{(q+1)}$  estiver fora da região de busca, faz-se a seguinte correção:

$$\text{Se } u(i) < x(i)^{inf}, \text{ então faz-se } u(i) = x(i)^{inf},$$

$$\text{Se } u(i) > x(i)^{sup}, \text{ então faz-se } u(i) = x(i)^{sup}, i = 1, \dots, n.$$

8. (**seleção**) Escolher o melhor indivíduo analisando a função objetivo:

$$\text{Se } f(U^{(q+1)}) \leq f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = U^{(q+1)},$$

$$\text{Se } f(U^{(q+1)}) > f(X_s^{(q)}) \text{ então } X_s^{(q+1)} = X_s^{(q)}.$$

9. (**critério de parada**) Se um critério de parada é satisfeito, fim. Senão, passa para a próxima geração ( $q = q + 1$ ) e volta ao passo do item 3.

A Figura 2.11 mostra o fluxograma do algoritmo de evolução diferencial.

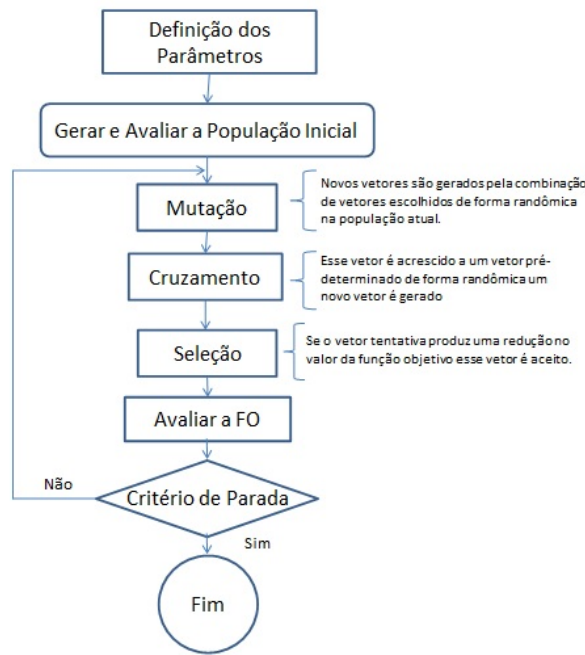


Figura 2.11 – Fluxograma do algoritmo de Evolu o Diferencial.

### 2.5.6 Evolu o Diferencial multiobjetivo (MODE)

As principais características do algoritmo *Multiobjective Optimization Differential Evolution* (MODE) são (LOBATO, 2008):

- ❑ Ordenamento das soluções através do mecanismo de *rank*, classificando as soluções em pseudo-curvas baseadas no critério de dominância de Pareto;
- ❑ Exploração das vizinhanças dos indivíduos da população a partir da geração de vizinhos;
- ❑ Truncamento de soluções não-dominadas com o intuito de garantir a diversidade das soluções através de um número fixo de indivíduos na população;
- ❑ Incorporação da estratégia de seleção e de elitismo com o intuito de utilizar os melhores indivíduos para a formação de candidatos em potencial.

O algoritmo MODE apresenta os seguintes parâmetros: *Número de gerações* ( $N_{gen}$ ), *Número de variáveis de projeto* ( $V$ ) e os respectivos domínios ( $L \leq x \leq U$ ), *Número de objetivos* ( $N_{obj}$ ), *Tamanho da população* ( $N$ ), *Probabilidade de cruzamento* ( $p_c$ ), *Taxa de perturbação* ( $F$ ), *Número de pseudo-curvas* ( $R$ ) e *Taxa de redução* ( $r$ ).

**Inicialização:** o processo de inicialização gera uma população inicial, obtida de forma randômica. Necessita-se apenas do domínio de cada variável de projeto. Portanto, geram-se números randômicos que são aplicados no intervalo, obtendo-se um vetor de indivíduos da população.

**Operador de ordenamento por Rank:** é a classificação por ordenamento das soluções favorecendo a evolução das curvas ao invés de pontos individuais, permitindo uma melhor distribuição das soluções no espaço de busca. Utiliza-se essa abordagem na elaboração de vários algoritmos.

**Operador de truncamento das soluções:** o mecanismo utilizado no MODE para manter a diversidade é o mesmo descrito no NSGA II, a Distância Métrica Aglomerada (*Crowded Distance Metrics*), também denominada de Distância da Multidão (LOBATO, 2008).

A distância da multidão descreve a densidade de soluções em torno de um vetor. Para a distância aglomerada para um conjunto de membros da população dos vetores estas são classificadas de acordo com seu valor para cada função objetivo. Para os vetores com os menores ou maiores valores uma distância infinita aglomerada é atribuída. Para todos os outros vetores, a distância da multidão é calculada de acordo com (LOBATO, 2008):

$$dist_{x_i} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f_{j,i+1} - f_{j,i-1}}{|f_{j,max} - f_{j,min}|} \quad (2.12)$$

Onde:  $f_j$  corresponde à função objetivo e  $m$  é igual ao número de funções objetivo.

**Operador de seleção:** todos os pais e filhos são colocados dentro da mesma população, independentemente do *rank* e da distância métrica aglomerada, para que possam competir entre si. Dessa forma, um indivíduo de alto *rank* (pior valor de aptidão), poderá ser escolhido no processo de seleção e gerar um filho não-dominado que fará parte da população na próxima geração.

**Operador de reprodução:** consiste na geração de candidatos em potencial para substituir, segundo o critério de dominância, indivíduos da população atual.

Babu, Chakole e Mubeen (2005) constataram que os melhores resultados em termos de convergência e diversidade, para os problemas estudados, foram obtidos quando utilizada a estratégia ED/*rand*/1/*bin*. Oliveira (2006) realizou um estudo das diversas estratégias aplicadas a alguns estudos de caso e verificou que os resultados são pouco sensíveis à escolha das estratégias. O MODE faz uso apenas da estratégia ED/*rand*/1/*bin* em seu operador de reprodução.

**Operador de elitismo:** quando se trabalha com função mono-objetivo, a melhor solução da geração atual é utilizada como valor de referência para a geração seguinte. Contudo, para problemas com funções multiobjetivo, a ideia de levar a melhor solução para uma próxima geração deve ser feita através do operador de elitismo. Este procedimento garante a propagação dos melhores indivíduos no processo evolutivo, aumentando a convergência e a robustez do algoritmo (DEB et al., 2000), (CASTRO, 2001), (SILVA, 2004).

**Operador para a exploração das vizinhanças:** é um tipo de refinamento ou procedimento de busca local. Existem dois níveis de competição: entre os melhores in-

divíduos de cada família e entre os indivíduos contidos dentro da mesma família. O operador de exploração das vizinhanças consiste no ordenamento por meio de *rank* das soluções não-dominadas.

O número pré-definido de indivíduos em cada uma das pseudo-curvas é dado por (LOBATO, 2008):

$$n_k = r n_{k-1}, \quad k = 2, \dots, R \quad (2.13)$$

Onde:

$n_k$  é o número de indivíduos da  $k$ -ésima curva;

$R$  é o número de pseudo-curvas;

$r$  é a taxa de redução.

Para uma dada população com  $N$  indivíduos,  $n_k$  é dado por (LOBATO, 2008):

$$n_k = N \frac{1-r}{1-r^R} r^{k-1} \quad (2.14)$$

Para  $r < 1$ , o número de indivíduos na primeira pseudo-curva é alto. Conforme pode-se observar na Equação (2.14), o número de indivíduos vai diminuindo exponencialmente, o que enfatiza a busca local. Já para um valor maior de  $r$ , existem mais soluções na última pseudo-curva, o que enfatiza a busca global (LOBATO, 2008).

Definida a estratégia para redefinir as pseudo-curvas, o próximo passo consiste em assumir que existam  $R$  curvas não-dominadas na  $g$ -ésima geração e, sendo  $D_R$  o tamanho da vizinhança da última pseudo-curva na  $g$ -ésima geração, o tamanho da  $k$ -ésima curva nesta geração é dado por (LOBATO, 2008):

$$D_k(g) = \frac{k}{R} D_R(g) \quad k = 1, 2, \dots, R \quad (2.15)$$

O tamanho máximo da vizinhança, inicialmente, é (LOBATO, 2008):

$$D_R(0) = U - L \quad (2.16)$$

Onde:  $L$  e  $U$  são os limites estabelecidos pelo domínio das variáveis de projeto.

Dessa maneira, a vizinhança das variáveis de projeto  $x$  é dada por (LOBATO, 2008):

$$X_k(x) = \left[ x - \frac{D_k(g)}{2}, x + \frac{D_k(g)}{2} \right] \quad (2.17)$$

**Operador para o tratamento de restrições:** consiste de uma estratégia de concepção bastante simples. Recomenda-se atribuição de valores limites de cada objetivo para serem os parâmetros de penalização. Garantindo-se que qualquer solução não-dominada domine qualquer solução que viole pelo menos uma restrição, do mesmo modo qualquer solução que viole uma restrição dominará qualquer solução que apresente duas violações

de restrições e assim por diante. Dessa forma, para um problema com restrição, o vetor de objetivos é dado por (LOBATO, 2008):

$$f \equiv f + r_p n_{viol} \quad (2.18)$$

Onde:

$f$  é o vetor de objetivos;

$r_p$  é um vetor de parâmetros, que dependem de cada problema em particular;

$n_{viol}$  é o número de restrições violadas.

Em geral, a determinação do  $r_p$  não demanda muitos testes, pois basta escolher valores elevados e que sejam superiores aos limites máximos possíveis para cada objetivo.

**Critério de parada:** o processo evolutivo é interrompido se o número máximo de gerações pré-definido pelo usuário é alcançado. Esse é sem dúvida o critério de parada mais utilizado na interrupção dos AE (CASTRO, 2001), (DEB et al., 2000), (LOBATO, 2008), (COELHO, 2003), (DEB, 2001).

A Figura 2.12 mostra o fluxograma do algoritmo MODE.

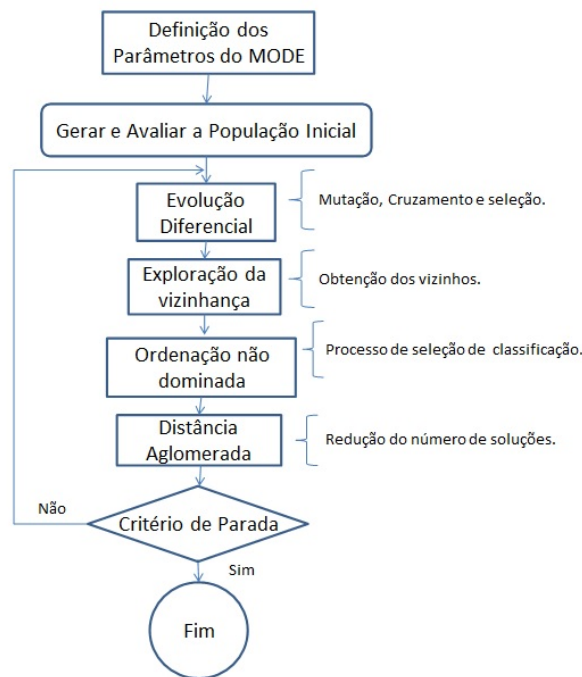


Figura 2.12 – Fluxograma do algoritmo MODE.

## 2.6 Aplicações em Engenharia

Esta seção avalia o desempenho do algoritmo de ED em problemas mono-objetivo e multiobjetivo de engenharia e áreas afins. Os estudos de casos são constituídos por equações algébricas e descrevem problemas de grande interesse no meio acadêmico e industrial. Além disso, comparou-se os resultados com outros algoritmos.

### 2.6.1 Viga em Balanço

Objetiva-se minimizar o peso (em  $kg$ ) e a deflexão da extremidade à direita (em  $mm$ ). A Figura 2.13 mostra a viga em balanço submetida a uma carga  $Q$ .

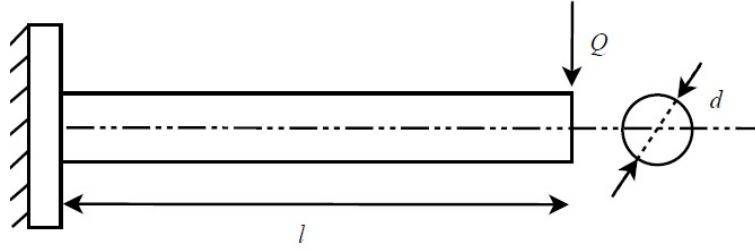


Figura 2.13 – Viga em balanço (Reproduzido de (DEB, 2001)).

As variáveis de projeto são:

- Diâmetro da viga:  $10 \text{ mm} \leq x_1 \leq 50 \text{ mm}$ ;
- Comprimento da viga:  $200 \text{ mm} \leq x_2 \leq 1000 \text{ mm}$ .

Além de outras variáveis como:

- Densidade da viga em balanço ( $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ );
- Carga da viga ( $Q = 1 \text{ kN}$ );
- Módulo de Young ( $E = 207 \text{ GPa}$ );
- Pressão máxima para o problema da viga em balanço ( $S_y = 300 \text{ MPa}$ );
- Deflexão máxima da viga em balanço ( $\delta_{max} = 5 \text{ mm}$ ).

Além disso, o problema considera as restrições de projeto:

$$g_1 = \frac{32 Q l}{\pi d^3} \leq S_y \quad (2.19)$$

$$g_2 \equiv \delta \leq \delta_{max} \quad (2.20)$$

As funções multiobjetivo que serão minimizadas são:

$$\begin{cases} \min f_1 = \rho \frac{\pi d^2}{4} l \\ \min f_2 = \delta = \frac{64 Q l^3}{3 E \pi d^4} \end{cases} \quad (2.21)$$

Sabe-se que com relação ao primeiro objetivo, se existir uma redução das dimensões  $d$  e  $l$ , o peso da viga será mínimo, entretanto a viga não será rígida. Por outro lado, se a viga for minimizada somente com relação à deflexão final, a solução acarretará em dimensões

grandes, ou seja, o peso próprio do sistema se torna grande demais. Dessa forma, o caso se caracteriza pela presença de objetivos conflitantes.

Os parâmetros utilizados por alguns algoritmos e pelo MODE são: taxa de perturbação  $F = 0,9$ ; probabilidade de cruzamento  $CR = 0,9$ ; taxa de redução  $r = 0,9$ ; número de pseudo-curvas  $R = 10$ ; tamanho da população igual a 30 e geração igual a 100.

Os resultados obtidos pelos algoritmos MODE e NSGA II são apresentados na Figura 2.14.

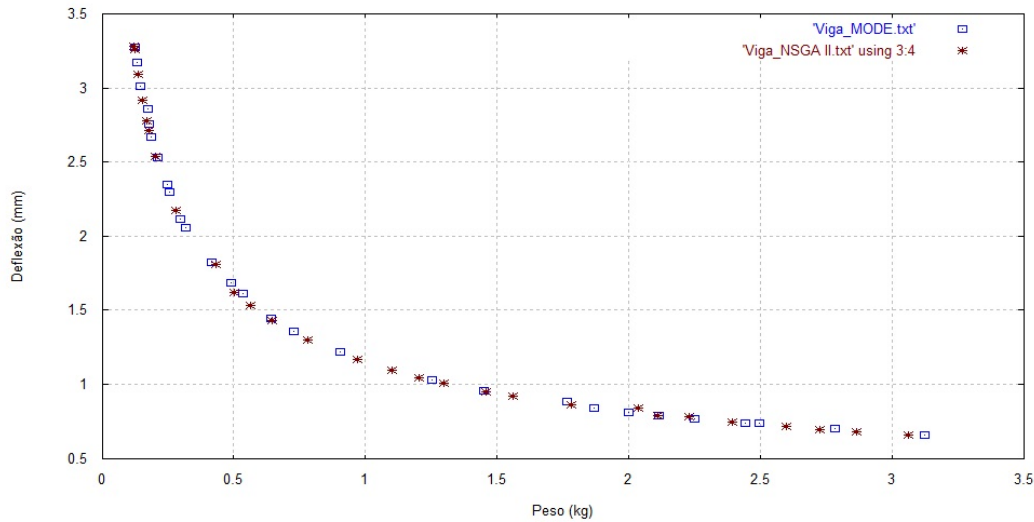


Figura 2.14 – Gráficos das curvas de Pareto dos algoritmos MODE e NSGA II para a viga em balanço.

Observa-se na Figuras 2.14, que as execuções dos algoritmos MODE e NSGA II foram capazes de obter resultados satisfatórios com rápida convergência para minimizar o peso e a deflexão da viga em balanço. Os resultados dos dois algoritmos foram próximos como visto nos gráficos MODE e NSGA II apresentados na Figura 2.14.

### 2.6.2 Vaso de Pressão

Objetiva-se minimizar o volume do vaso de pressão cilíndrico com duas tampas esféricas.

As variáveis de projeto são (medidas em polegadas):

- ❑ A espessura do vaso de pressão ( $T_s$ );
- ❑ A espessura da tampa ( $T_h$ );
- ❑ O raio interno do vaso ( $R$ );
- ❑ A altura do componente cilíndrico ( $L$ ).

A Figura 2.15 mostra o vaso de pressão cilíndrico.

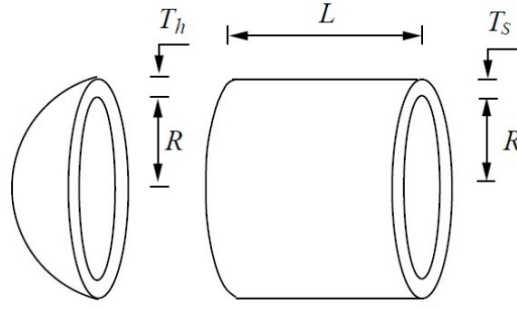


Figura 2.15 – Vaso de pressão cilíndrico (Reproduzido de (LEMONGE; BARBOSA, 2004)).

O volume a ser minimizado e as restrições são dadas por:

$$W(T_s, T_h, R, L) = 0,6224 T_s T_h R + 1,7781 T_h R^2 + 3,1661 T_s^2 L + 19,84 T_s^2 R \quad (2.22)$$

$$g_1(T_s, R) = 0,0193 R - T_s \leq 0 \quad (2.23)$$

$$g_2(T_h, R) = 0,00954 R - T_h \leq 0 \quad (2.24)$$

$$g_3(R, L) = 1296000 - \pi R^2 L - \frac{4}{3} \pi R^3 \leq 0 \quad (2.25)$$

$$g_4(L) = L - 240 \leq 0 \quad (2.26)$$

Onde:

$$0,0625 \leq T_s, T_h \leq 5;$$

$$10 \leq R, L \leq 200.$$

Após a execução do algoritmo ED, encontrou-se os valores dos parâmetros e da função objetivo. A Tabela 2.2 mostra os resultados da minimização do volume do vaso de pressão.

Tabela 2.2 – Valores dos parâmetros após a execução do algoritmo ED.

Parâmetros	Valor Ótimo
$T_s$ (pol)	0,2762
$T_h$ (pol)	0,1365
$R$ (pol)	14,3143
$L$ (pol)	200,00
$W$ (pol <sup>3</sup> )	120,0941

Os parâmetros utilizados por alguns algoritmos e pelo algoritmo de ED são: taxa de perturbação  $F = 0,8$ ; probabilidade de cruzamento  $CR = 0,8$ ; tamanho da população  $NP = 35$  e número máximo de gerações igual a 200.

O resultado obtido pelo algoritmo de ED é apresentado na Figura 2.16.

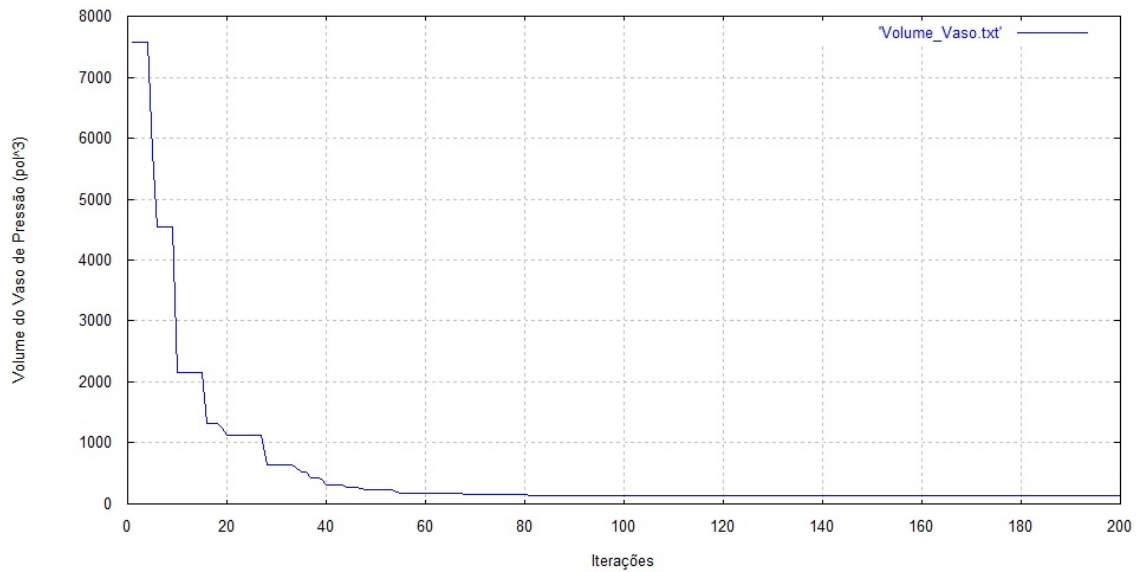


Figura 2.16 – Curva do volume ótimo do vaso de pressão.

Observa-se na Figura 2.16, que a execução do algoritmo de evolução diferencial foi capaz de obter resultados satisfatórios para minimizar o volume do vaso de pressão.

## 2.7 Conclusão

Os problemas reais de otimização em engenharia são naturalmente multiobjetivos. Possivelmente conflitantes, vários critérios são otimizados simultaneamente, sendo difícil em comparação com a otimização de objetivo único. Neste capítulo 2 apresentou-se as noções básicas dos métodos naturais. Destacaram-se os algoritmos evolucionários em especial os algoritmos genéticos e de evolução diferencial. Por fim, compararam-se as técnicas de otimização com algumas aplicações da literatura (viga em balanço e vaso de pressão).

No capítulo 3 serão descritos os passos para a construção de máquinas de indução trifásica. Além disso, serão apresentadas as equações necessárias para projetar motores com rotor bobinado e com rotor de gaiola.

---

## Projeto de Motor de Indução Trifásico

O projeto de engenharia é a aplicação da ciência, da tecnologia e da invenção para produzir máquinas para realizar tarefas específicas com economia e eficiência. Se os itens de custo e durabilidade são omitidos de um problema, os resultados obtidos não têm valor de engenharia. O problema de projeto e fabricação de máquinas elétricas é construir, o mais economicamente possível, uma máquina que cumpre um determinado conjunto de especificações e garantias. Neste capítulo, como exemplo, são descritos os passos para a construção de máquinas assíncronas. Além disso, este capítulo apresenta as equações necessárias para projetar motores de indução trifásicos com rotor bobinado e com rotor de gaiola. Para outras máquinas devem ser seguidos os passos de projeto pertinentes.

### 3.1 Introdução

Os motores de indução (assíncronos) têm muitas aplicações nas indústrias por causa do baixo custo de manutenção e robustez. Os motores de indução são usados em grande número em uma variedade de aplicações (UPADHYAY, 2008).

Semelhante às máquinas de corrente contínua um motor de indução consiste de uma parte estacionária chamada de estator e de uma parte rotativa chamada de rotor. No entanto, o motor de indução é diferente de uma máquina de corrente contínua nos seguintes aspectos (MITTLE; MITTAL, 2009).

1. Chapa do estator;
2. Ausência de comutador;
3. Entreferro pequeno e uniforme;
4. Velocidade quase constante.

O estator e rotor são individualmente compostos por:

- ❑ Um circuito elétrico, geralmente dotado de enrolamentos isolados de cobre ou alumínio, para transporte de corrente;
- ❑ Um circuito magnético, normalmente composto de chapas de aço silício de grão não orientado, para transportar o fluxo magnético.

### 3.1.1 Equação de Saída ( $Q$ )

É a expressão matemática que dá a relação entre os vários parâmetros físicos e elétricos da máquina elétrica. A equação de saída refere a saída do motor de indução com as principais dimensões do estator e representa a ferramenta básica para iniciar o projeto. A saída do motor de indução trifásico é dada por (MITTLE; MITTAL, 2009), (MALAGOLI et al., 2014b),

$$Q = 3 [4,44 k_{pd1} f \phi_1 N_{ph1} I_{ph1}] \eta \cos \varphi 10^{-3} \quad (kW) \quad (3.1)$$

Onde:

$k_{pd1}$  é o fator de enrolamento;

$f$  é a frequência ( $Hz$ );

$\phi_1$  é o fluxo por pólo ( $Wb$ );

$N_{Ph1}$  é o número de espiras por fase;

$I_{ph1}$  é a corrente por fase ( $A$ );

$\eta$  é a eficiência (%);

$\cos \varphi$  é o fator de potência.

Os outros parâmetros são representados pelas: frequência, fluxo por pólo e o total de ampère-espira ( $Ae$ ) por metro da máquina, respectivamente:

$$f = \frac{p N}{120} \quad (Hz) \quad (3.2)$$

$$\phi_1 = \overline{B}_{av} \tau_p L \quad (Wb) \quad (3.3)$$

$$N_{Ph1} I_{ph1} = \frac{\overline{ac} \pi D}{6} \quad (A.e) \quad (3.4)$$

Onde:

$p$  é o número de pólos;

$N$  é a velocidade ( $rpm$ );

$\overline{B}_{av}$  é o valor médio da densidade de fluxo magnética ( $T$ );

$\tau_p$  é o passo-pólo ( $m$ );

$L$  é o comprimento da máquina ( $m$ );

$\overline{ac}$  é a carga elétrica específica ( $Ae/m$ );

$D$  é o diâmetro interno do estator ( $m$ ).

Substituindo os parâmetros  $f$ ,  $\phi_1$  e  $N_{Ph1}$   $I_{ph1}$  a equação de saída é:

$$Q = C D^2 L N \quad (kW) \quad (3.5)$$

Onde:

$C$  é o coeficiente de saída representado por:

$$C = 18,3 \times 10^{-5} k_{pd1} \overline{B}_{av} \overline{ac} \eta \cos \varphi \quad (3.6)$$

Na Equação (3.5),  $D$  e  $L$  são as principais dimensões da máquina. Conclui-se que o volume da máquina é,

$$Vol = D^2 L \quad (m^3) \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Cargas Específicas ( $\overline{B}_{av}$ ) e ( $\overline{ac}$ )

a) Densidade média de fluxo no entreferro  $\overline{B}_{av}$ :

As perdas no ferro em grande parte depende das limitações da densidade de fluxo no entreferro (AGARWAL, 2000):

- ❑ A densidade de fluxo nos dentes  $< 1,8$  (T);
- ❑ A densidade de fluxo no núcleo 1,3 - 1,5 (T).

Vantagens de valor superior da  $\overline{B}_{av}$ :

- ❑ Tamanho reduzido da máquina;
- ❑ Custos reduzidos da fabricação da máquina;
- ❑ Aumento da capacidade de sobrecarga.

Faixa normal para máquinas de 60 (Hz), 0,30 - 0,60 (T).

b) Carga elétrica específica  $\overline{ac}$ :

Vantagens do valor superior de  $\overline{ac}$ :

- ❑ Tamanho reduzido;
- ❑ Redução de custos.

Desvantagens do valor superior de  $\overline{ac}$ :

- ❑ Maior quantidade de cobre;
- ❑ Mais perdas no cobre;

- ❑ Aumento da temperatura;
- ❑ Baixa capacidade de sobrecarga.

Faixa normal 10.000 - 45.000 ( $Ae/m$ ).

### 3.1.3 Fator de Potência ( $\cos \varphi$ ) e Eficiência ( $\eta$ )

O fator de potência e a eficiência em condições de plena carga aumentam com o aumento da classificação da máquina (MITTLE; MITTAL, 2009). Para uma máquina de classificação grande, a porcentagem de corrente de magnetização e as perdas serão mais baixa do que para uma máquina pequena. Por isso, o fator de potência e a eficiência de uma máquina grande é maior. O fator de potência e a eficiência para máquina de alta velocidade são mais elevados do que para máquina de baixa velocidade.

### 3.1.4 Separação de ( $D$ ) e ( $L$ )

A equação de saída dá a relação entre o produto  $D^2L$  e a saída da máquina. Para separar  $D$  e  $L$  uma relação tem de ser assumida ou estabelecida. A seguir estão as variáveis de projeto com base em considerações em que uma razão adequada entre o comprimento bruto e passo polar pode ser assumida (UPADHYAY, 2008).

- ❑ Para obter o mínimo dos custos de 1,5 - 2,0;
- ❑ Para obter uma boa eficiência de 1,4 - 1,6;
- ❑ Para obter um bom fator de potência de 1,0 - 1,3.

Como o fator de potência tem um papel muito importante no desempenho de motores de indução trifásicos é aconselhável projetar um motor de indução com melhor fator de potência a menos que seja especificado no projeto. Assim, para obter o melhor fator de potência a seguinte relação normalmente será assumida para a separação de  $D$  e  $L$  (UPADHYAY, 2008).

$$D = 0,135 p \sqrt{L} \quad (m) \quad (3.8)$$

E o passo polar é,

$$\tau_p = \frac{\pi D}{p} \quad (m) \quad (3.9)$$

O produto  $D^2L$  de dois parâmetros  $D$  e  $L$  da Equação (3.8) representa o volume da máquina. No entanto, os valores obtidos de  $D$  e  $L$  devem satisfazer a condição imposta sobre o valor da velocidade periférica.

### 3.1.5 Velocidade Periférica ( $V_p$ )

A velocidade periférica pode ser estimada conforme (MITTLE; MITTAL, 2009),

$$V_p = \frac{\pi D N}{60} \quad (m/s) \quad (3.10)$$

Faixa normal entre 30 - 60 ( $m/s$ ).

### 3.1.6 Entreferro ( $L_g$ )

O projeto da espessura do entreferro utiliza a seguinte fórmula empírica (UPADHYAY, 2008).

$$L_g = 0,2 + 2 \sqrt{D L} \quad (mm) \quad (3.11)$$

### 3.1.7 Comprimento Efetivo da Máquina ( $L_e$ )

Geralmente, o comprimento efetivo da máquina, apresentado na Figura 3.1, é (UPADHYAY, 2008):

$$l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n \quad (3.12)$$

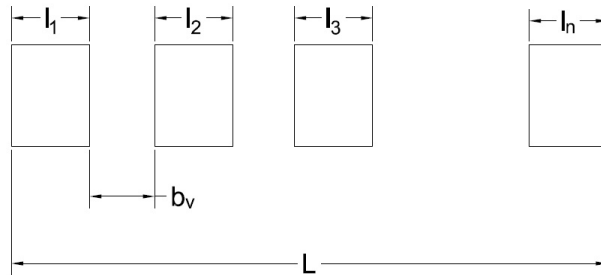


Figura 3.1 – Comprimento efetivo da máquina.

O comprimento de ferro bruto é,

$$l = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n \quad (m) \quad (3.13)$$

E o comprimento de ferro real é,

$$l_i = K_i l \quad (m) \quad (3.14)$$

Onde:  $K_i$  é o fator de empilhamento que varia de 0,90 a 0,92.

O comprimento global é,

$$L = l + n_v b_v \quad (m) \quad (3.15)$$

Onde:

$n_v$  é o número de dutos de ventilação;

$b_v$  é a largura de um duto de ventilação.

Então, o comprimento efetivo da máquina é,

$$L_e = L - n_v b'_v \quad (m) \quad (3.16)$$

E,

$$b'_v = b_v \frac{5}{5 + \frac{b_v}{\frac{L_g}{1000}}} \quad (m) \quad (3.17)$$

Onde:  $L_g$  é o entreferro ( $mm$ ).

## 3.2 Projeto do Estator

O estator é a parte estacionária do exterior do motor, que consiste (MITTLE; MITTAL, 2009), (AGARWAL, 2000) de:

- ❑ Uma estrutura cilíndrica externa do motor que é feita de chapa de aço soldada, ou de ferro fundido ou de liga de alumínio fundido;
- ❑ Um caminho magnético que compreende um conjunto de lâminas de aço com ranhuras chamado núcleo do estator (MITTLE; MITTAL, 2009). O qual é laminado perpendicular à direção do fluxo, para reduzir correntes de Foucault, reduzindo as perdas e aquecimento;
- ❑ Um conjunto de enrolamentos elétricos isolados que são colocados no interior das ranhuras do estator laminado. A área da seção transversal destes enrolamentos deve ser grande o suficiente para a potência do motor (MITTLE; MITTAL, 2009). Para um motor trifásico, são necessários três conjuntos de enrolamentos, uma para cada fase conectada em estrela ou triângulo.

A Figura 3.2 mostra a vista em corte transversal de um motor de indução.

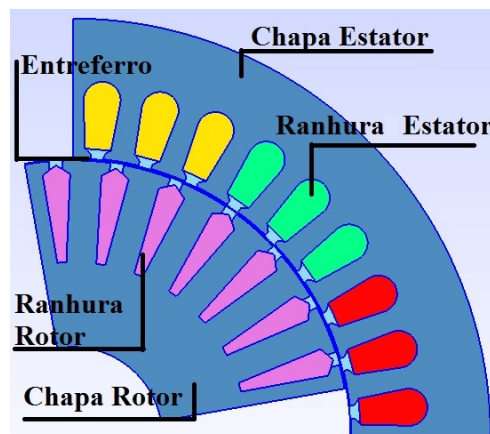


Figura 3.2 – Chapas do estator e rotor.

### 3.2.1 Formas de Ranhura

O estator de um motor de indução consiste de núcleo e ranhuras. Em geral, existem dois tipos de ranhuras do estator que são empregadas em motor de indução, ranhuras abertas e ranhuras semifechadas (MITTLE; MITTAL, 2009). O desempenho de funcionamento dos motores de indução depende da forma das ranhuras e, portanto, é importante selecionar a ranhura adequada para o estator (BIANCHI; BOLOGNANI, 1998).

- Ranhuras abertas: neste tipo de ranhura, a abertura será igual a largura, como mostrado na Figura 3.3 (a). Portanto, neste tipo de ranhuras na montagem do conjunto de enrolamento as bobinas são mais fáceis de serem inseridas na máquina. No entanto, as ranhuras levarão a um maior entreferro e, portanto, a baixos valores do fator de potência. Esses tipos de ranhuras são raramente usados em motores de indução trifásicos.
- Ranhuras semifechadas: neste tipo de ranhura, a abertura será menor do que a largura, como mostrado na Figura 3.3 (b). Portanto, neste tipo de ranhura o conjunto de enrolamentos é de montagem mais difícil de inserir na máquina e demora mais tempo em comparação com as ranhuras abertas e, portanto, é mais caro. No entanto, as características do entreferro são melhores em comparação com as ranhuras abertas.

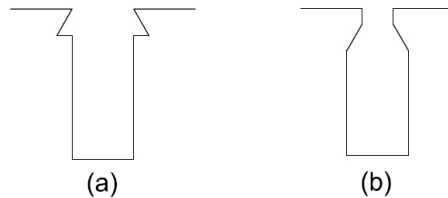


Figura 3.3 – Ranhuras (a) aberta e (b) semifechada.

### 3.2.2 Seleção do Número de Ranhuras ( $S_1$ )

O número de ranhuras do estator deve ser selecionado na fase de projeto. Este número afeta as características de peso, custo e operação do motor. Não existem regras para a escolha do número de ranhuras do estator, considera-se as vantagens e desvantagens para se definir o número de ranhuras (MITTLE; MITTAL, 2009). Seguem-se as vantagens e desvantagens de selecionar um grande número de ranhuras.

Vantagens:

- Redução da reatância de dispersão;
- Redução das perdas no dente;

❑ Aumento da capacidade de carga.

Desvantagens:

❑ Aumenta o custo;

❑ Aumenta o peso;

❑ Aumenta a corrente de magnetização;

❑ Aumenta as perdas no ferro;

❑ Diminui a refrigeração;

❑ Aumenta a temperatura;

❑ Reduz a eficiência.

O passo-ranhura é definido como (UPADHYAY, 2008),

$$\tau_{sg1} = \frac{\pi D}{S_1} \quad (m) \quad (3.18)$$

Onde:  $S_1$  é o número de ranhuras do estator.

O passo-ranhura varia de 15 a 20 ( $mm$ ).

Assim, para o motor de indução trifásico tendo  $p$ -pólos (UPADHYAY, 2008),

$$S_1 = 3 q_1 p \quad (3.19)$$

Onde:  $q_1$  é o número de ranhuras por pólo por fase.

O enrolamento pode ser integral ( $q_1$  é inteiro) ou fração ( $q_1$  é fracionário).

Se  $q_1$  é fracionário (UPADHYAY, 2008),

$$q_1 = \frac{x}{y} \quad (3.20)$$

Em seguida, para o enrolamento ser simétrico, é essencial que o denominador  $y$  deve ser tal que o número de par de pólos seja divisível por  $y$ .

Se forem usadas duas camadas de enrolamento,  $y$  deve ser divisível por 2.

Portanto,  $S_1$  é estimado.

### 3.2.3 Estimativa do número total de espiras por fase ( $N_{Ph1}$ ), do número total de condutores ( $Z_1$ ) e do número de condutores por ranhura ( $N_{c1}$ )

Sabe-se que a tensão por fase (UPADHYAY, 2008) é dada por:

$$V_{Ph1} = 4,44 k_{pd1} f \phi_1 N_{Ph1} \quad (V) \quad (3.21)$$

Então,

$$N_{Ph1} = \frac{V_{Ph1}}{4,44 k_{pd1} f \phi_1} \quad (e) \quad (3.22)$$

Onde:

$$\phi_1 = \overline{B}_{av} \tau_p L_e = \overline{B}_{av} \frac{\pi D}{p} L_e \quad (Wb) \quad (3.23)$$

$$Z_1 = 3 \times 2 N_{Ph1} = 6 N_{Ph1} \quad (e) \quad (3.24)$$

$$N_{c1} = \frac{Z_1}{S_1} \quad (e) \quad (3.25)$$

O parâmetro  $N_{c1}$  deve ser um inteiro e divisível por 2, para enrolamentos de camada dupla. Se não for um número inteiro tem que ser tornado inteiro e, portanto, deve-se encontrar o valor corrigido do  $N_{c1}$  que é  $N_{c1,corrigido}$ . Também deverão ser encontrados os valores corrigidos de  $Z_{1,corrigido}$ ,  $N_{Ph1,corrigido}$ ,  $\phi_{1,corrigido}$  e  $\overline{B}_{av,corrigido}$ .

### 3.2.4 Área de Seção do Condutor ( $F_{C1}$ )

A área de seção dos condutores do estator pode ser estimada a partir da corrente por fase do estator e do valor de densidade de corrente assumida de forma adequada para os enrolamentos do estator (UPADHYAY, 2008).

A área de seção do condutor do estator é,

$$F_{C1} = \frac{I_{Ph1}}{J_s} \quad (mm^2) \quad (3.26)$$

Onde:

$J_s$  é a densidade de corrente no enrolamento do estator ( $A/mm^2$ );

$I_{Ph1}$  é a corrente do estator por fase ( $A$ ).

A corrente do estator por fase é,

$$I_{Ph1} = \frac{Q \times 10^3}{3 V_{Ph1} \cos \varphi \eta} \quad (A) \quad (3.27)$$

Um valor apropriado da densidade de corrente tem que ser assumido, considerando as vantagens e desvantagens (UPADHYAY, 2008).

Vantagens do maior valor da densidade de corrente:

- Redução da seção transversal;
- Redução do peso;
- Redução do custo.

Desvantagens do maior valor da densidade de corrente:

- ❑ Aumento da resistência;
- ❑ Aumento da perda no cobre;
- ❑ Aumento da temperatura;
- ❑ Redução da eficiência.

Por isso, o maior valor é assumido para máquinas de baixa tensão e pequenas máquinas. Normalmente, o valor de densidade de corrente para enrolamentos do estator é de 3 a 4 ( $A/mm^2$ ). Ela é calculada com base no formato da área de corte transversal da ranhura e no tamanho do condutor. Se a área de seção dos condutores é inferior a 5 ( $mm^2$ ), geralmente condutores circulares serão empregados. Se é superior a 5 ( $mm^2$ ), então condutores retangulares serão empregados (BARCARO; BIANCHI; MAGNUSSEN, 2010). No caso de condutores retangulares a relação largura por espessura deve ser entre 2,5 a 3,5.

### 3.2.5 Projeto da Ranhura ( $h_{s1}$ ), ( $b_{s1}$ ), ( $n_v$ ) e ( $n_h$ )

A Figura 3.4 mostra o desenho de uma ranhura parcialmente fechada para 400 (V).

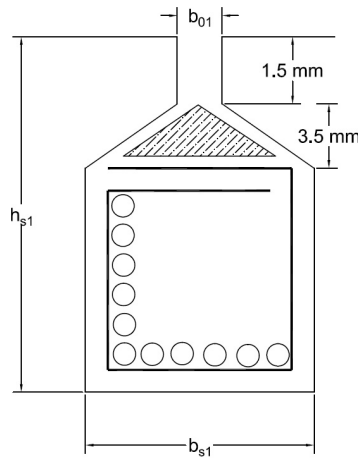


Figura 3.4 – Ranhura parcialmente fechada para 400 (V).

A altura da ranhura é representada por (UPADHYAY, 2008),

$$h_{s1} = (n_v * d_c) + (3 * 0,5) + 3,5 + 1,5 + 2 \quad (mm) \quad (3.28)$$

Onde:

$n_v$  é o número de condutores na vertical;

$d_c$  é o diâmetro do condutor ( $mm$ ).

O diâmetro do condutor é (UPADHYAY, 2008),

$$d_c = \sqrt{\frac{F_{C1} * 4}{\pi}} \quad (mm) \quad (3.29)$$

A largura da ranhura é representada por (UPADHYAY, 2008),

$$b_{s1} = (n_h * d_c) + (2 * 0,5) + 2 \quad (mm) \quad (3.30)$$

Onde:

$n_h$  é o número de condutores na horizontal.

A relação do número de condutores na vertical pela horizontal é,

$$\frac{n_v}{n_h} = 3 \longrightarrow 5 \quad (3.31)$$

A abertura da ranhura é (UPADHYAY, 2008),

$$b_{01} = \frac{2}{5} b_{s1} \quad (mm) \quad (3.32)$$

E a relação da altura pela base da ranhura é,

$$\frac{h_{s1}}{b_{s1}} = 3 \longrightarrow 5 \quad (3.33)$$

Nota-se nas Equações (3.28) e (3.30) que 0,5 (mm) é a espessura do isolamento e 2 (mm) é a folga e tolerância.

### 3.2.6 Comprimento Médio da Espira ( $L_{mt1}$ )

É calculado utilizando uma fórmula empírica (UPADHYAY, 2008),

$$L_{mt1} = 2 L + 2,3 \tau_p + 0,24 \quad (m) \quad (3.34)$$

A Figura 3.5 representa uma espira da bobina.

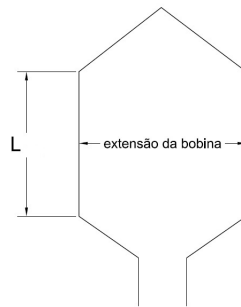


Figura 3.5 – Comprimento médio da espira.

### 3.2.7 Resistência do Enrolamento por Fase ( $R_{Ph1}$ )

A resistência do enrolamento por fase do estator é calculada usando a fórmula (MITTLE; MITTAL, 2009),

$$R_{Ph1} = \frac{(\rho \times L_{mt1} N_{Ph1} \times 10^{-6})}{F_{C1}} \quad (\Omega) \quad (3.35)$$

Onde:  $\rho$  é a resistividade elétrica do material ( $\Omega mm^2/m$ ).

### 3.2.8 Perda Total no Cobre ( $P_{cu}$ )

A perda total no cobre do estator é calculada usando a fórmula (MITTLE; MITTAL, 2009),

$$P_{cu} = 3 I_{Ph1}^2 R_{Ph1} \quad (W) \quad (3.36)$$

### 3.2.9 Densidade de Fluxo no Dente ( $B_{DenteS}$ )

Conhecidas as dimensões do passo-ranhura, largura da ranhura, largura do estator, a densidade de fluxo no dente do estator pode ser calculada. A densidade de fluxo no dente do estator é limitada a 1,8 (T). À medida que o dente do estator é afilado em direção ao fundo, a densidade de fluxo é calculada a 1/3 da altura a partir da extremidade do dente. A densidade de fluxo na altura 1/3 a partir da extremidade do dente pode ser calculada como se segue (MALAGOLI et al., 2014b), (MITTLE; MITTAL, 2009).

O diâmetro do estator em 1/3 da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é,

$$D_{\frac{1}{3}h_t} = D \times 1000 + \frac{1}{3} h_{s1} \times 2 \quad (mm) \quad (3.37)$$

O passo-ranhura em 1/3 da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é,

$$\tau_{sg\frac{1}{3}h_t} = \frac{\pi D_{\frac{1}{3}h_t}}{S_1} \quad (mm) \quad (3.38)$$

A largura do dente em 1/3 da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é,

$$b_{t\frac{1}{3}h_t} = \tau_{sg\frac{1}{3}h_t} - b_{s1} \quad (mm) \quad (3.39)$$

A área de um dente do estator em 1/3 da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é,

$$A_{dente} = b_{t\frac{1}{3}h_t} \times K_i l \times 1000 \quad (mm^2) \quad (3.40)$$

A área de todos os dentes sob um pólo,

$$A_{t\frac{1}{3}h_t} = A_{dente} \times \left( \frac{S_1}{p} \right) \quad (mm^2) \quad (3.41)$$

$$A_{t\frac{1}{3}h_t} = \left[ \frac{\pi \left( D \times 1000 + \frac{1}{3} h_{s1} \times 2 \right)}{S_1} - b_{s1} \right] \times K_i l \times 1000 \times \left( \frac{S_1}{p} \right) \quad (mm^2) \quad (3.42)$$

Assim, a densidade de fluxo nos dentes é,

$$B_{DenteS} = \frac{\phi_1}{A_{t\frac{1}{3}h_t}} \quad (T) \quad (3.43)$$

### 3.2.10 Profundidade da Coroa ( $h_y$ )

O fluxo através da coroa do estator representa a metade do fluxo por pólo (UPADHYAY, 2008),

$$\frac{\phi_1}{2} = B_{CoroaS} \times h_y K_i l \quad (Wb) \quad (3.44)$$

A densidade de fluxo na coroa ( $B_{CoroaS}$ ) varia de 1,3 a 1,5 (T).

Assim,

$$h_y = \frac{\phi_1/2}{B_{CoroaS} K_i l} \quad (m) \quad (3.45)$$

### 3.2.11 Diâmetro Externo do Motor de Indução ( $D_o$ )

O diâmetro externo do motor é calculado usando a fórmula (UPADHYAY, 2008),

$$D_o = D + 2 \frac{h_{s1}}{1000} + 2 h_y \quad (m) \quad (3.46)$$

### 3.2.12 Volume ( $V_s$ )

O volume total do estator é igual a soma do volume de cobre, volume de ferro e o volume de isolamento. O isolamento é entre 15 a 20 (%) do volume total de ferro e cobre do estator (MALAGOLI et al., 2014b).

Volume de cobre:

$$V_{cuS} = 3 F_{C1} L_{mt1} N_{Ph1} \quad (m^3) \quad (3.47)$$

Volume de ferro: é a soma dos volumes de ferro nos dentes e na coroa do estator:

$$V_{feSd} = S_1 h_y b_{t\frac{1}{3}h_t} l_i \quad (m^3) \quad (3.48)$$

$$V_{feSc} = \frac{\pi}{4} [D_o^2 - (D_o - 2 h_y)^2] l_i \quad (m^3) \quad (3.49)$$

Volume do isolamento:

$$V_{iso} = 0,15 (V_{cuS} + V_{feSd} + V_{feSc}) \quad (m^3) \quad (3.50)$$

Volume total do estator:

$$V_s = V_{cuS} + V_{feSd} + V_{feSc} + V_{iso} \quad (m^3) \quad (3.51)$$

### 3.2.13 Perda no Ferro ( $P_{Fe}$ )

(i) Perda no ferro nos dentes do estator (UPADHYAY, 2008), (MALAGOLI et al., 2014b):

$$P_{FeD} = p_{it} B_{Fe} V_{feSd} \quad (W) \quad (3.52)$$

Onde:

$p_{it}$  é a perda específica no ferro dos dentes ( $W/Kg$ );

$B_{Fe}$  é a densidade de ferro, 7600 ( $Kg/m^3$ );

$V_{feSd}$  é o volume de ferro nos dentes do estator ( $m^3$ ).

(ii) Perda no ferro na coroa do estator (UPADHYAY, 2008), (MALAGOLI et al., 2014b):

$$P_{FeC} = p_{iy} B_{Fe} V_{feSc} \quad (W) \quad (3.53)$$

Onde:

$p_{iy}$  é a perda específica no ferro da coroa ( $W/Kg$ );

$V_{feSc}$  é o volume de ferro na coroa do estator ( $m^3$ ).

(iii) Perda total no ferro:

$$P_{Fe} = P_{FeD} + P_{FeC} \quad (W) \quad (3.54)$$

A Tabela 3.1 mostra a relação entre a densidade de fluxo ( $T$ ) e a perda específica no ferro ( $W/Kg$ ) para chapa de espessura de 0,35 ( $mm$ ) (MALAGOLI et al., 2014b).

Tabela 3.1 – Perda específica no ferro para chapa de 0,35 ( $mm$ ).

Densidade de Fluxo ( $T$ )	Perda Específica ( $W/Kg$ )
1,2	7,0
1,4	9,0
1,5	10,0
1,6	11,0
1,8	13,0

A Tabela 3.2 mostra a relação entre a densidade de fluxo ( $T$ ) e a perda específica no ferro ( $W/Kg$ ) para chapa de espessura de 0,50 ( $mm$ ) (MALAGOLI et al., 2014b).

Tabela 3.2 – Perda específica no ferro para chapa de 0,50 (mm).

Densidade de Fluxo ( $T$ )	Perda Específica ( $W/Kg$ )
1,2	13,0
1,5	18,0
1,8	23,0

### 3.3 Projeto do Rotor

O rotor é a parte rotativa do motor de indução, consiste em um conjunto de lâminas de aço silício com ranhuras, pressionadas em conjunto, para formar circuitos magnéticos cilíndricos e circuitos elétricos (MALAGOLI; CAMACHO; LUZ, 2014b). O circuito elétrico do rotor pode ser da seguinte natureza (UPADHYAY, 2008):

1. *Rotor Bobinado*: consiste em três conjuntos de enrolamentos isolados com ligações a três anéis deslizantes montados sobre uma extremidade do eixo. As conexões externas do rotor são feitas através de escovas para os anéis deslizantes (UPADHYAY, 2008). Devido à presença de anéis deslizantes tais tipos de motores são chamados de motores de anéis.
2. *Rotor de Gaiola*: consiste de um conjunto de barras de cobre ou alumínio, instalados nas ranhuras, os quais estão ligados ao anel final em cada extremidade do rotor. A construção deste tipo de rotor juntamente com enrolamentos se assemelha a uma gaiola. As barras do rotor de alumínio são geralmente fundidas nas ranhuras do rotor, o que resulta em uma construção muito resistente (UPADHYAY, 2008). Embora as barras do rotor de alumínio estejam em contato direto com as lâminas de aço, praticamente toda a corrente do rotor flui através das barras de alumínio e não na laminação.

A maior parte dos motores de indução é do tipo gaiola, é o motor de construção mais simples e de baixo custo (AGARWAL, 2000). No entanto, eles têm a desvantagem de menor torque de partida. Neste tipo de motor, o rotor é construído por barras de cobre ou alumínio acomodadas em ranhuras do rotor. No caso de motores de indução com rotor de anel deslizante, o rotor tem uma complexa construção e é mais caro, com a vantagem de que esses motores têm o melhor torque de partida (AGARWAL, 2000). Este tipo de rotor é construído por conexão em estrelas, distribuída em três enrolamentos de fase.

Nos motores, nomeia-se de entreferro o espaço entre o rotor e o estator (MALAGOLI et al., 2014b). Os parâmetros do motor como corrente de magnetização, fator de potência, capacidade de sobrecarga, refrigeração e ruído são afetados pelo comprimento do entreferro. Assim, o comprimento do entreferro é selecionado tendo em conta as vantagens e desvantagens de seu maior comprimento (UPADHYAY, 2008).

Vantagens:

- ❑ Aumento da capacidade de sobrecarga;
- ❑ Aumento de refrigeração;
- ❑ Redução de atração magnética desequilibrada;
- ❑ Redução na pulsação do dente;
- ❑ Redução de ruído.

Desvantagens:

- ❑ Aumento da corrente de magnetização;
- ❑ Redução do fator de potência.

A corrente de magnetização e o fator de potência são parâmetros muito importantes para decidir o desempenho dos motores de indução. Os motores são projetados para o valor ótimo do entreferro ou mínimo entreferro possível.

### 3.3.1 Número de Ranhuras do Rotor ( $S_2$ )

A seleção do número de ranhuras do rotor pode ser considerada com os seguintes efeitos (UPADHYAY, 2008):

- ❑  $S_1 \neq S_2$  para evitar travamento magnético (*cogging*);
- ❑  $S_1 - S_2 \neq \pm p, \pm 2p, \pm 5p$  para evitar ganchos síncronos (*synchronous hooks*);
- ❑  $S_1 - S_2 \neq \pm 1, \pm 2$  ou  $\pm p \pm 1, \pm p \pm 2$  etc. para evitar o excesso de ruído e vibração;
- ❑  $S_1 - S_2 \neq \pm 3p$  para evitar o bloqueio magnético.

Onde:

$S_1$  é o número de ranhuras do estator;

$S_2$  é o número de ranhuras do rotor;

$p$  é o número de pólos.

Geralmente, as ranhuras do rotor são selecionados por:

$$q_1 - q_2 = \pm 1, \pm 1/3, \pm 2/3 \quad (3.55)$$

Onde:

$q_1$  ranhuras do estator por pólo por fase;

$q_2$  ranhuras do rotor por pólo por fase.

O parâmetro  $q_1$  já foi estimado. Assim, o número de ranhuras do rotor por pólo por fase pode ser calculado.

Então, o número de ranhuras do rotor é,

$$S_2 = 3 q_2 p \quad (3.56)$$

### 3.3.2 Número Total de Condutores ( $Z_2$ ) e ( $Z_{2bar}$ )

(i) Motor de indução com rotor bobinado:

Pode-se manter (UPADHYAY, 2008),

$$\frac{V_{Ph2}}{V_{Ph1}} = \frac{N_{Ph2}}{N_{Ph1}} = 0,5 \longrightarrow 0,6 \quad (3.57)$$

Onde:

$V_{Ph2}$  é a tensão por fase no rotor ( $V$ );

$N_{Ph2}$  é o número de espiras por fase no rotor ( $e$ ).

Então, o número de espiras por fase no rotor é,

$$N_{Ph2} = (0,5 \longrightarrow 0,6) N_{Ph1} \quad (e) \quad (3.58)$$

O número total de condutores no rotor é,

$$Z_2 = 6 N_{Ph2} \quad (e) \quad (3.59)$$

Os condutores por ranhura no rotor são,

$$N_{C2} = \frac{Z_2}{S_2} \quad (e) \quad (3.60)$$

(ii) Motor de indução com rotor de gaiola:

O número de barras do rotor é (UPADHYAY, 2008),

$$Z_{2bar} = S_2 \quad (3.61)$$

### 3.3.3 Correntes ( $I_{Ph2}$ ), ( $I_{2bar}$ ) e ( $I_{2AnelFinal}$ )

Assume-se que 85 (%) dos ampères-espiras são transferidos para o rotor (UPADHYAY, 2008), (AGARWAL, 2000).

(i) Motor de indução com rotor bobinado:

$$I_{Ph2} = \frac{0,85 I_{Ph1} N_{Ph1}}{N_{Ph2}} \quad (A) \quad (3.62)$$

(ii) Motor de indução com rotor de gaiola:

$$I_{2bar} = \frac{0,85 \times 6 I_{Ph1} N_{Ph1}}{S_2} \quad (A) \quad (3.63)$$

Ou a corrente de anel final é,

$$I_{2AnelFinal} = \frac{S_2 I_{2bar}}{\pi p} \quad (A) \quad (3.64)$$

### 3.3.4 Tamanho dos Condutores ( $F_{C2}$ ), ( $F_{C2bar}$ ) e ( $F_{C2AnelFinal}$ )

(i) Rotor bobinado:

A área de seção do condutor do rotor é (UPADHYAY, 2008), (AGARWAL, 2000),

$$F_{C2} = \frac{I_{Ph2}}{J_r} \quad (mm^2) \quad (3.65)$$

Onde:

$J_r$  é a densidade de corrente no enrolamento do rotor de 4 a 5 ( $A/mm^2$ ).

(ii) Rotor de gaiola:

A área de seção do rotor de barra é (UPADHYAY, 2008), (AGARWAL, 2000),

$$F_{C2bar} = \frac{I_{2bar}}{J_{bar}} \quad (mm^2) \quad (3.66)$$

Onde:

$J_{bar}$  é a densidade de corrente no rotor de barra de 5 a 7 ( $A/mm^2$ ).

Se barras redondas são utilizadas então, o diâmetro desta barra é,

$$d_{2bar} = \sqrt{\frac{4 F_{C2bar}}{\pi}} \quad (mm) \quad (3.67)$$

A área de seção do anel final do rotor é (UPADHYAY, 2008), (AGARWAL, 2000),

$$F_{C2AnelFinal} = \frac{I_{2AnelFinal}}{J_{bar}} \quad (mm^2) \quad (3.68)$$

A densidade de corrente no anel final é igual a densidade de corrente nas barras do rotor.

### 3.3.5 Projeto da Ranhura ( $h_{r1}$ ) e ( $b_{r1}$ )

(i) Rotor bobinado:

São utilizados enrolamentos trifásicos. As ranhuras fechadas não são utilizadas desde que o fluxo de dispersão seja muito alto. As ranhuras semifechadas são utilizadas de forma semelhante às ranhuras do estator.

$$A_{ranhura} = h_{r1} \times b_{r1} = \frac{F_{C2}}{k_{fr}} \quad (mm^2) \quad (3.69)$$

Onde:

$h_{r1}$  é a altura da ranhura do rotor ( $mm$ );

$b_{r1}$  é a largura da ranhura do rotor ( $mm$ );

$k_{fr}$  é coeficiente para fios redondos (*round wires*) de 0,30 a 0,40 e para condutores de tira (*strip conductors*) de 0,45 a 0,60.

$$\frac{h_{r1}}{b_{r1}} = 2 \rightarrow 4 \quad (3.70)$$

A partir das Equações (3.69) e (3.70), a altura ( $h_{r1}$ ) e a largura ( $b_{r1}$ ) do rotor podem ser estimadas.

(ii) Rotor de gaiola:

O tamanho da abertura pode ser encontrado dependendo da forma da ranhura a ser selecionada. Não existe um isolamento fornecido entre as barras e o núcleo do rotor (ALBERTI et al., 2010).

Um entreferro de 0,15 a 0,40 (*mm*) é mantido entre as barras e o núcleo do rotor. Em geral, as ranhuras são oblíquas de um passo de ranhura e o entreferro entre a barra e o núcleo do rotor é mantido em torno de 0,40 (*mm*).

### 3.3.6 Obliquidade das Ranhuras

Atualmente, usam-se motores de indução com rotor de gaiola com barras retangulares, estreitas e altas, com a vantagem de provocar menor corrente de partida sendo conhecida como “correntes de Foucault”, a obliquidade que as barras apresentam tem como finalidade evitar o ruído magnético durante o funcionamento do motor.

O rotor de gaiola é o mais utilizado, pois é constituído por chapas de aço magnético com barras condutoras espaçadas entre si. Estas barras condutoras são eletricamente e mecanicamente conectadas a anéis nas suas extremidades. A forma de construção ajuda a reduzir as vibrações mecânicas e os ruídos audíveis (MITTLE; MITTAL, 2009). As barras e as chapas magnéticas constituem um único bloco mecânico, extremamente robusto e compacto, como mostrado na Figura 3.6.



Figura 3.6 – Rotores de Gaiola: (a) Rotor do NUPEA e (b) Desenho da Gaiola.

As barras condutoras variam de formato conforme o tipo de curva de torque de partida que os motores deverão proporcionar. São vários os formatos das barras condutoras

existente o que tornou-se possível, principalmente, através da utilização do alumínio na fabricação dos rotores (AGARWAL, 2000). A barra de cobre também podem ser moldadas, porém, os processos de fabricação são caros e dispendiosos.

O formato das barras tem grande influência no desempenho do motor, especialmente durante o processo de partida, é conhecido como “efeito pelicular”, que causa um deslocamento da corrente para o topo da barra durante a partida.

### 3.3.7 Densidade de Fluxo nos Dentes ( $B_{DenteR}$ )

O diâmetro do rotor em  $1/3$  da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é (UPADHYAY, 2008),

$$D_{\frac{1}{3}h_{t2}} = D \times 1000 - 2 L_g - \frac{2}{3} h_{r1} \times 2 \quad (mm) \quad (3.71)$$

O passo-ranhura em  $1/3$  da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é,

$$\tau_{sg2\frac{1}{3}h_{t2}} = \frac{\pi D_{\frac{1}{3}h_{t2}}}{S_2} \quad (mm) \quad (3.72)$$

A largura do dente em  $1/3$  da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é,

$$b_{t2\frac{1}{3}h_{t2}} = \tau_{sg2\frac{1}{3}h_{t2}} - b_{r1} \quad (mm) \quad (3.73)$$

A área de um dente do estator em  $1/3$  da altura do dente a partir da extremidade mais estreita é (UPADHYAY, 2008),

$$A_{1dente} = b_{t2\frac{1}{3}h_{t2}} \times K_i l \times 1000 \quad (mm^2) \quad (3.74)$$

A área de todos os dentes sob um pólo é,

$$A_{t2\frac{1}{3}h_{t2}} = A_{1dente} \times \left( \frac{S_2}{p} \right) \quad (mm^2) \quad (3.75)$$

$$A_{t2\frac{1}{3}h_{t2}} = \left[ \frac{\pi \left( D \times 1000 - 2 L_g - \frac{2}{3} h_{r1} \times 2 \right)}{S_2} - b_{r1} \right] \times K_i l \times 1000 \times \left( \frac{S_2}{p} \right) \quad (mm^2) \quad (3.76)$$

Assim, a densidade de fluxo nos dentes é,

$$B_{DenteR} = \frac{\phi_1}{A_{t2\frac{1}{3}h_{t2}}} \quad (T) \quad (3.77)$$

### 3.3.8 Profundidade da Coroa ( $h_{yr}$ )

A altura da coroa do rotor é estimada no fato de que a metade do fluxo por pólo está associada com a coroa do rotor,

$$h_{yr} = \frac{\phi_1/2}{B_{CoroaR} \times K_i l} \quad (m) \quad (3.78)$$

Onde:  $B_{CoroaR}$  é a densidade de fluxo na coroa do rotor que tem valor entre 1,3 a 1,5 (T). Assim, a altura da coroa do rotor pode ser calculada.

### 3.3.9 Diâmetro Externo ( $D_r$ )

O diâmetro externo do rotor é calculado usando a fórmula (MITTLE; MITTAL, 2009),

$$D_r = D - (2 L_g \times 10^{-3}) \quad (m) \quad (3.79)$$

### 3.3.10 Passo Polar

O passo polar pode ser calculado como,

$$\tau_{pr} = \frac{\pi D_r}{p} \quad (m) \quad (3.80)$$

### 3.3.11 Perdas no Rotor ( $P_{Bobinado}$ ) e ( $P_{Gaiola}$ )

(i) Rotor bobinado:

O comprimento médio das espiras do rotor é (AGARWAL, 2000), (MALAGOLI et al., 2014b),

$$L_{mt2} = 2 L + 3,5 \tau_{pr} \quad (m) \quad (3.81)$$

A resistência de corrente contínua por fase a  $75^\circ C$  é,

$$R_{Ph2,75^\circ C} = \rho \frac{L_{mt2}}{F_{C2}} N_{Ph2} \times 10^{-6} \quad (\Omega) \quad (3.82)$$

Assim, a perda no rotor é representada por:

$$P_{Bobinado} = 3 I_{Ph2}^2 R_{Ph2,75^\circ C} \quad (W) \quad (3.83)$$

(ii) Rotor de gaiola:

A resistência de uma barra é (AGARWAL, 2000), (MALAGOLI et al., 2014b),

$$R_{1bar} = \rho \frac{L}{F_{C2bar}} \times 10^{-6} \quad (\Omega) \quad (3.84)$$

A perda nas barras é representada por:

$$P_{Barra} = S_2 I_{2bar}^2 R_{1bar} \quad (W) \quad (3.85)$$

A resistência de um anel final é,

$$R_{AnelFinal} = \rho \frac{\pi (D_r - 2 d_{2bar})}{F_{C2AnelFinal}} \times 10^{-6} \quad (\Omega) \quad (3.86)$$

A perda no anel final é representada por:

$$P_{AnelFinal} = 2 I_{2AnelFinal}^2 R_{AnelFinal} \quad (W) \quad (3.87)$$

A perda total no rotor de gaiola é,

$$P_{Gaiola} = P_{Barra} + P_{AnelFinal} \quad (W) \quad (3.88)$$

### 3.3.12 Escorregamento ( $s$ )

O escorregamento para um motor de indução é (MALAGOLI et al., 2014b),

$$s = \frac{P_{Bobinado} \text{ ou } P_{Gaiola}}{Q + (P_{Bobinado} \text{ ou } P_{Gaiola})} 100 \quad (\%) \quad (3.89)$$

### 3.3.13 Eficiência Energética ( $\eta$ )

A eficiência energética para um motor de indução é (MALAGOLI et al., 2014b),

$$P_{Total} = P_{Cu} + P_{Fe} + (P_{Bobinado} \text{ ou } P_{Gaiola}) \quad (W) \quad (3.90)$$

$$\eta = \frac{Q}{Q + P_{Total}} 100 \quad (\%) \quad (3.91)$$

## 3.4 Conclusão

Este capítulo 3 versou sobre o projeto de um motor de indução trifásico do tipo rotor bobinado e rotor de gaiola. Qualquer melhoria significativa na eficiência operacional dos motores de indução ajuda na conservação de energia. Por isso, é muito pretendido pelos fabricantes e usuários otimizar o projeto para melhorar a eficiência energética e reduzir custo de materiais ativos (ferro e cobre) dos motores. A eficiência da energia de um motor pode ser otimizada reduzindo o peso dos materiais ativos utilizados, o que pode ser conseguido através da redução do diâmetro e do comprimento do motor.

Em sequência será apresentado o método dos elementos finitos, uma ferramenta indispensável no projeto de máquinas elétricas. Esta ferramenta possibilita verificar se o projeto está obedecendo as limitações magnéticas, elétricas e de isolamento dos materiais que fazem parte do projeto.

---

# Método de Elementos Finitos Aplicado às Máquinas Elétricas

Neste capítulo são estabelecidas as equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais e as condições de contorno. Apresenta-se a discretização dos campos pelo método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*. Além disso, são apresentadas as equações das formulações magnetostática e magnetodinâmica na forma forte e na forma fraca. Por fim, para analisar as máquinas elétricas apresenta-se o método usado para levar em conta o movimento, as condições de contorno periódicas e anti-periódicas, as equações mecânicas e o acoplamento entre a equação de circuito elétrico e as equações de campo.

## 4.1 Introdução

Muitos problemas físicos são desenvolvidos matematicamente na forma de equações diferenciais parciais e ordinárias. Para encontrar a solução exata, utiliza-se o método de solução analítica obtida através de métodos algébricos e diferenciais aplicados a geometrias e contorno particulares (MALAGONI, 2012). Porém, para geometrias complexas é praticamente impossível obter uma solução analítica.

O *Método de Elementos Finitos* (MEF) é um método numérico que aproxima a solução de problemas resolvidos por *Equações Diferenciais Parciais* (EDP) ou *Equações Diferenciais Ordinárias* (EDO) através da subdivisão da geometria em elementos menores, definidos como elementos finitos, nos quais a aproximação da solução exata é resolvida por interpolação de uma solução aproximada (MALAGONI, 2012).

Mesmo que o método tenha sido originalmente desenvolvido para a análise de sistemas estruturais, tem sido utilizado no estudo de engenharia, nos domínios da mecânica dos sólidos, dos fluidos, eletromagnetismo, transmissão de calor, de massa e na eletrostática, dentre outros (MALAGONI, 2012). Devido a sua adequação à programação em computadores digitais, à sua eficiência e flexibilidade, o MEF tem hoje uma grande aceitação

tanto no meio acadêmico como no industrial, estando disponível em grande número os *softwares* existentes no mercado: livres (FEMM e GMSH/GETDP) e comerciais (ANSYS, COMSOL, FLUX 3D, etc.) (MALAGONI, 2012). Na seção 4.2 são descritos as equações de *Maxwell* para os fenômenos eletromagnéticos.

## 4.2 Equações de *Maxwell*

Todos os fenômenos eletromagnéticos são descritos por equações clássicas de *Maxwell*. Estas constituem um sistema de equações diferenciais parciais que ligam os fenômenos magnéticos aos fenômenos elétricos e que unificam todos os princípios do eletromagnetismo. Essas equações são (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAINÉ, 2001):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_v \quad (4.4)$$

Onde:

$\mathbf{H}$  é a intensidade de campo magnético ( $A/m$ );

$\mathbf{J}$  é a densidade superficial de corrente de condução ( $A/m^2$ );

$\mathbf{D}$  é a densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica ( $C/m^2$ );

$\mathbf{E}$  é o campo elétrico ( $V/m$ );

$\mathbf{B}$  é a densidade de fluxo magnético ou indução magnética ( $T$ );

$\rho_v$  é a densidade volumétrica de carga elétrica ( $C/m^3$ ).

As Equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) são respectivamente generalização da *Lei de Ampère*, *Lei de Gauss Magnética*, *Lei de Faraday* e a *Lei de Gauss Elétrica*. Formam juntas as representações matemáticas do mesmo fenômeno físico: o campo eletromagnético (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAINÉ, 2001).

Em eletrotécnica, nas baixas frequências, a densidade da corrente  $\mathbf{J}$  é considerada muito maior que a densidade superficial de corrente de deslocamento ( $\partial \mathbf{D}/\partial t$ ) e se utiliza, então, as equações de *Maxwell* na forma quase estática (MALAGONI, 2012):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.5)$$

Aplicando o operador *div* (divergente) em ambos os lados da Equação (4.5), obtém-se a equação da continuidade de corrente:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (4.6)$$

Um segundo conjunto de relações é necessário para completar a informação contida no sistema das equações de *Maxwell*: as relações constitutivas também chamadas de leis de comportamento como descreve a seção (4.3) (LUZ, 2003).

### 4.3 Leis de Comportamento dos Materiais

A modelagem completa de fenômenos relacionados ao eletromagnetismo exige, além das quatro equações de *Maxwell*, as leis de comportamento dos materiais (ou relações constitutivas), que estabelecem a relação entre campos elétricos e magnéticos e o meio em que estão inseridos. As relações constitutivas são dadas pelas seguintes equações (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAIN, 2001):

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (4.7)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.9)$$

Onde:

$\mu$  é a permeabilidade magnética do material ( $H/m$ ), tal que  $\mu = \mu_r \mu_0$ , em que  $\mu_r$  é a permeabilidade relativa do material e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo ( $4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ );  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do material ( $F/m$ ), tal que  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , em que  $\epsilon_r$  é a permissividade relativa do material e  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo ( $8,854 \times 10^{-12} F/m$ );  $\sigma$  é uma constante que representa a condutividade elétrica do meio ( $S/m$ );  $\mathbf{B}_r$  é a indução magnética remanente ( $T$ ).

Na seção (4.4) serão apresentadas as condições de contorno locais (homogêneas e transmissão de campos) e globais (tipo fluxo e circulação).

### 4.4 Condições de Contorno

As condições de contorno são de dois tipos: locais e globais. As locais são divididas em homogêneas e de transmissão de campos. E as condições globais são do tipo fluxo e do tipo circulação.

#### 4.4.1 Condições de Contorno Homogêneas

As condições de contorno devem ser aplicadas sobre a fronteira do domínio  $\Omega$  para assegurar a unicidade da solução. Conforme o problema considerado, elas podem ser relativas às componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , e as componentes normais de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{B}$

(MALAGONI, 2012). Na fronteira  $\Gamma$  do domínio global  $\Omega$  (ver Figura 4.1), considera-se algumas condições de contorno ditas condições homogêneas (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAIN, 2001).

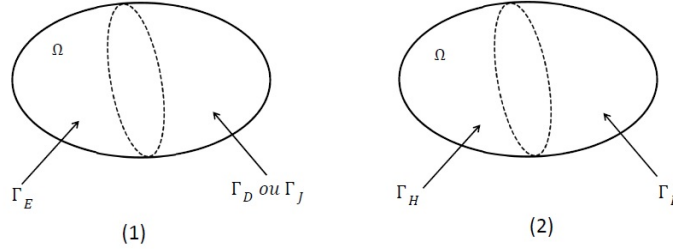


Figura 4.1 – Domínio estudado: (1) grandezas elétricas e (2) grandezas magnéticas.

As grandezas elétricas, nas superfícies  $\Gamma_E$  e  $(\Gamma_D$  ou  $\Gamma_J)$  de  $\Gamma$ , definem as condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} |_{\Gamma_E} = 0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} |_{\Gamma_D} = 0 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} |_{\Gamma_J} = 0 \quad (4.12)$$

As grandezas magnéticas, nas superfícies  $\Gamma_H$  e  $\Gamma_B$  de  $\Gamma$ , definem as condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (4.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (4.14)$$

Essas condições de contorno homogêneas sobre os campos ocorrem por duas razões (MALAGONI, 2012):

- *Físicas*: são condições associadas aos materiais idealizados ou no infinito. Por exemplo, as equações (4.10) e (4.13), respectivamente, são para os materiais condutores perfeitos e magnéticos perfeitos, ou seja, de condutividade e permeabilidade infinitas;
- *Simetria*: são fixas as direções dos campos.

Além das condições de contornos homogêneas, as condições de contorno de transmissão de campos podem ser impostas através da aplicação do *Teorema da Divergência*<sup>1</sup> ou do *Teorema de Stokes*<sup>2</sup>, como demonstra a subseção 4.4.2.

<sup>1</sup> O *Teorema da Divergência*, ou de *Gauss*, estabelece a igualdade entre o fluxo de um vetor em uma superfície fechada e a integral de sua divergência no volume envolto pela superfície.

<sup>2</sup> O *Teorema de Stokes* relaciona com o rotacional de campos vetoriais, ou seja, uma integral de caminho fechado com a integral da área delimitada por este caminho.

### 4.4.2 Condições de Transmissão dos Campos

Os campos eletromagnéticos sofrem descontinuidades, na interface entre materiais com diferentes propriedades constitutivas (LUZ, 2003), (MALAGONI, 2012). Considere uma superfície  $\Sigma$  entre os dois meios contínuos, representados pelos subdomínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  (ver Figura 4.2) (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAINÉ, 2001).



Figura 4.2 – Superfície  $\Sigma$  entre dois meios contínuos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .

As Equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) podem ser integradas sobre os volumes ou as superfícies incluindo as partes da superfície  $\Sigma$ . A aplicação do *Teorema da Divergência* ou do *Teorema de Stokes* conduz as seguintes condições de transmissão (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAINÉ, 2001):

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) |_{\Sigma} = \mathbf{J}_s \quad (4.15)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) |_{\Sigma} = 0 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) |_{\Sigma} = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) |_{\Sigma} = \rho_s \quad (4.18)$$

Onde:  $\mathbf{J}_s$  e  $\rho_s$  representam, respectivamente, as densidades de corrente e de carga concentradas sobre a superfície  $\Sigma$ , e onde  $\mathbf{n}$  é a normal à  $\Sigma$ , orientada de  $\Omega_1$  para  $\Omega_2$ .

As Equações (4.16) e (4.17) descrevem que a componente tangencial de  $\mathbf{E}$  e a componente normal de  $\mathbf{B}$  são contínuas em  $\Sigma$ . Se  $\mathbf{J}_s$  e  $\rho_s$  são diferentes de zero, as Equações (4.15) e (4.18) acarretam a descontinuidade da componente tangencial de  $\mathbf{H}$  e da componente normal de  $\mathbf{D}$  (MALAGONI, 2012). Em geral, considera-se  $\mathbf{J}_s$  e  $\rho_s$  nulos e então, a componente tangencial de  $\mathbf{H}$  e a componente normal de  $\mathbf{D}$  passam a ser contínuas na interface (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAINÉ, 2001). A partir da equação (4.6), pode-se exprimir a continuidade da componente normal da densidade superficial de corrente:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) |_{\Sigma} = 0 \quad (4.19)$$

Além das condições de contorno locais descritas na subseção (4.4.2), são apresentadas na subseção (4.4.3) as condições globais sobre os campos que podem ser dos tipos fluxo e circulação (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAINÉ, 2001), (MALAGONI, 2012).

### 4.4.3 Grandezas Globais do Tipo Fluxo e do Tipo Circulação

As condições globais do tipo fluxo estão relacionadas com a carga elétrica  $Q_i$ , a intensidade de corrente  $I_i$  e o fluxo magnético  $\phi_i$ . Já na circulação, relacionam-se com a força eletromotriz  $V_i$  e a força magnetomotriz  $Fmm_i$ . Os fluxos ao longo das superfícies  $\Gamma_i$  e as circulações ao longo das curvas  $\gamma_i$  que pertencem ao domínio de estudo são definidos por (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAIN, 2001):

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \, ds = Q_i \quad (4.20)$$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, ds = I_i \quad (4.21)$$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, ds = \phi_i \quad (4.22)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_i \quad (4.23)$$

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Fmm_i \quad (4.24)$$

Onde:  $\mathbf{n}$  representa o campo de vetores unitários normal à  $\Gamma_i$  e orientados para o exterior de  $\Omega$ .

Na seção (4.5) são estabelecidas as expressões integrais ou notações. Apresentam-se os espaços funcionais, as *Fórmulas de Green*<sup>3</sup>, a estrutura de base dos espaços funcionais e os operadores diferenciais (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (MALAGONI, 2012).

## 4.5 Expressões Integrais, Fórmulas de *Green* e Espaços Funcionais

Considere um domínio limitado  $\Omega$  no espaço *Euclidiano*<sup>4</sup> de três dimensões que está representado na Figura 4.3 (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003).

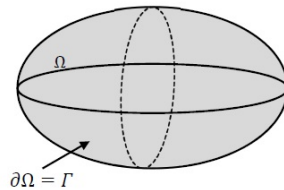


Figura 4.3 – Domínio Estudado.

<sup>3</sup> As *Fórmulas de Green*, em matemática é um tipo de função usada para resolver equações diferenciais não homogêneas sujeitas a determinadas condições iniciais ou condições de contorno.

<sup>4</sup> *Espaço Euclidiano* é um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno.

A fronteira  $\partial\Omega$  é denotada por  $\Gamma$ . As equações diferenciais parciais envolvem os operadores diferenciais particulares gradiente, rotacional e divergente. Tais equações regem as distribuições espaciais de campos vetoriais (campo magnético, campo elétrico, potencial vetor, dentre outros) ou escalares (potencial escalar e outros).

Com o intuito de simplificar as expressões deste texto, definem-se as seguintes notações, relativas às integrais sobre um volume  $\Omega$  e uma superfície  $\Gamma$  (MALAGONI, 2012):

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u v \, d\Omega \quad (4.25)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (4.26)$$

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma \quad (4.27)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (4.28)$$

Onde:  $u$ ,  $v$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são definidos sobre  $\Omega$  em  $\Gamma$  tais que essas integrais tenham um sentido, em geral, podem ser definidas nos *Espaços de Sobolev*<sup>5</sup> de campos escalares e vetoriais, como (MALAGONI, 2012):

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \partial_x v, \partial_y v, \partial_z v \in L^2(\Omega) \right\} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \partial_x \mathbf{v}, \partial_y \mathbf{v}, \partial_z \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\} \quad (4.30)$$

O estabelecimento das *Formulações Fracas*<sup>6</sup> associadas aos problemas de derivadas parciais consideradas, e sobre os quais se baseia o método de elementos finitos conduz às duas *Fórmulas de Green* do tipo *grad-div* e *rot-rot* respectivamente, dadas por (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003), (DULAR, 1996), (GEUZAIN, 2001):

$$(\mathbf{u}, \text{grad } v) + (\text{div } \mathbf{u}, v) = \langle v, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \rangle_{\Gamma}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega) \quad (4.31)$$

$$(\mathbf{u}, \text{rot } v) - (\text{rot } \mathbf{u}, v) = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{u}, v \rangle_{\Gamma}, \forall \mathbf{u}, v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (4.32)$$

Estas equações são estabelecidas a partir das seguintes relações da análise vetorial (MALAGONI, 2012):

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{div } \mathbf{u} = \text{div}(v \mathbf{u}) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{u} \cdot \text{rot } v - \text{rot } \mathbf{u} \cdot v = \text{div}(v \times \mathbf{u}) \quad (4.34)$$

<sup>5</sup> Os *Espaços de Sobolev* são definidos sobre o domínio arbitrário  $\Omega$  e são subespaços vetoriais dos espaços funcionais  $L^2(\Omega)$ .

<sup>6</sup> A *Formulação Fraca* diminui o grau de derivação das equações.

Integradas sobre o domínio  $\Omega$ , com a aplicação do *Teorema da Divergência* ou *Teorema de Gauss* para a obtenção dos termos em integral de superfície.

A *estrutura de base*, formada de quatro espaços funcionais e de três operadores, é representada a seguir (MALAGONI, 2012). A estrutura é constituída de duas cópias de  $L^2(\Omega)$ , de duas cópias de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  e dos três operadores que são gradiente (*grad*), rotacional (*rot*) e divergente (*div*):

$$L^2(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}_u} \mathbf{L}^2(\Omega) \xrightarrow{\text{rot}_u} \mathbf{L}^2(\Omega) \xrightarrow{\text{div}_u} L^2(\Omega) \quad (4.35)$$

Os três operadores diferenciais são os operadores cujos domínios são definidos de maneira restritiva (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003):

$$F_u^0 = \left\{ v \in L^2(\Omega); \text{grad } v \in \mathbf{L}^2(\Omega), v|_{\Gamma_u} = 0 \right\} \quad (4.36)$$

$$F_u^1 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \text{rot } \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = 0 \right\} \quad (4.37)$$

$$F_u^2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = 0 \right\} \quad (4.38)$$

É necessário expressar de forma adequada o domínio onde o problema é resolvido para tratar computacionalmente de um problema diferencial (LUZ, 2003). Normalmente, não é possível obter soluções numéricas sobre o domínio formado por uma região contínua, devido à infinidade de pontos envolvidos. Assim, o domínio é discretizado, ou seja, é substituído por vários pontos representativos (MALAGONI, 2012) e somente nesses pontos é que as soluções são obtidas.

Nota-se que quanto maior o número de pontos da discretização, mais preciso é o resultado numérico. A necessidade de se resolverem problemas com alta precisão, em menor tempo, tem levado a uma constante busca tanto por técnicas de solução mais eficientes, como por computadores com maior desempenho (MALAGONI, 2012). A utilização de técnicas de programação paralela é um excelente meio para o cálculo de problemas complexos.

Na seção 4.6 é apresentado a discretização do método de elementos finitos utilizando o método de *Galerkin*.

## 4.6 Discretização do Método dos Elementos Finitos - Método de *Galerkin*

A divisão do domínio de cálculo em elementos finitos chama-se discretização, e pode ser feita em uma, em duas ou três dimensões. Os pontos de interseção das linhas que descrevem os elementos são referenciados como nós.

Os elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados (MALAGONI, 2012). A resolução das equações nem sempre é obtida analiticamente e a utilização de métodos numéricos torna-se necessária para se resolver uma solução aproximada do problema. O papel dos métodos numéricos é de substituir a formulação contínua por uma formulação discreta que é a divisão do domínio em elementos (LUZ, 2003).

Para discretizar as formulações magnetostática e magnetodinâmica, conduzem-se as equações escritas de uma forma diferencial para uma forma integral, a qual se adapta melhor a discretização pelo método de elementos finitos. Este método consiste em realizar uma malha na estrutura estudada e interpolar as incógnitas sob os elementos dessa malha.

A resolução direta dos problemas é normalmente difícil, visto a ordem elevada das derivações e o caráter descontínuo das variáveis consideradas, é o que se chama de *Formulação Forte*. A vantagem da *Formulação Fraca*, em relação à *Formulação Forte*, é a diminuição do grau de derivação das equações e a consideração direta de certas condições de contorno (MALAGONI, 2012).

O domínio de estudo  $\Omega$  é dado por um conjunto de elementos geométricos de forma simples e o processo de discretização do espaço é chamado malha. Um elemento finito é definido por sua forma geométrica e as funções de base ou de aproximação que lhe são associadas (MALAGONI, 2012). As incógnitas do problema são discretizadas por uma combinação de funções de aproximação de cada elemento. O uso dessas funções permite interpolar o valor da incógnita em todo ponto do domínio estudado.

#### 4.6.1 Funções de Base ou Aproximação Nodais

As *Funções de Base* ou *Aproximação Nodais* são representadas pela variável escalar  $v$  e é dado por uma combinação dos valores  $v_n$  dos nós sobre cada elemento, tal que (MALAGONI, 2012):

$$v = \sum_{n \in N} v_n s_n \quad (4.39)$$

Onde:  $N$  é o conjunto dos nós de  $\Omega$ ;  $v_n$  é o valor da variável escalar no nó  $n \in N$  e  $s_n$  é a função de base associada ao nó  $n \in N$  como mostra a Figura 4.4.

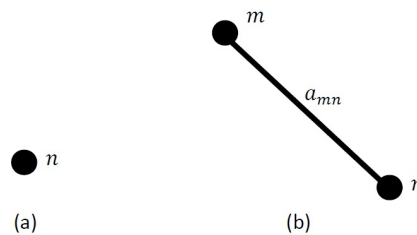


Figura 4.4 – Entidades geométricas: (a) nó e (b) aresta.

A função de base  $s_n$  tem como propriedade ser igual a 1 (um) para o nó  $n$  e 0 (zero) para os outros nós. As funções de base nodais asseguram a continuidade, através das faces, das variáveis utilizadas (MALAGONI, 2012).

#### 4.6.2 Funções de Base ou Aproximação de Aresta

As *Funções de Base* ou *Aproximação de Aresta* podem ser consideradas como uma aproximação sobre as arestas do elemento quando a incógnita é vetorial. A variável vetorial  $\mathbf{a}$  pode ser expressa por (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003):

$$\mathbf{a} = \sum_{n \in A} a_n \mathbf{s}_n \quad (4.40)$$

Onde:  $A$  é o conjunto das arestas em  $\Omega$ ;  $\mathbf{a}_n$  é a circulação de  $\mathbf{a}$  ao longo da aresta  $n \in A$  e  $\mathbf{s}_n$  é a função de base associada à aresta  $n \in A$ .

A função de base  $s_n$  tem como propriedade ser igual a 1 (um) ao longo da aresta  $n$  e 0 (zero) ao longo das outras arestas (MALAGONI, 2012).

A discretização da forma fraca implica em resolver um sistema de equações cujos graus de liberdade estão ligados ao número de nós e de arestas da malha (MALAGONI, 2012). Para obter um sistema qualquer, deve-se escolher tanto as funções testes quanto as incógnitas geradas pela malha. Escolhendo as funções teste como sendo as funções de base ou de aproximação (*nodais* ou de *aresta*) tem-se o chamado Método de *Galerkin*, o qual é utilizado nesta tese. Sua aplicação à formulação fraca gera um sistema de equações algébricas cuja resolução dá uma solução aproximada do problema inicial.

### 4.7 Formulação do Problema de Campo

Aplicou-se o Método dos Elementos Finitos utilizando o Método de *Galerkin* para resolver os problemas magnetostático e magnetodinâmico.

#### 4.7.1 Problema Magnetostático

O modelo magnetostático estuda a distribuição do campo magnético estático devido a ímãs permanentes e correntes contínuas. As equações de *Maxwell* e a lei de comportamento a considerar são (MALAGONI, 2012), (LUZ, 2003):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.41)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (4.42)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (4.43)$$

A Figura 4.5 mostra o domínio de estudo magnetostático.

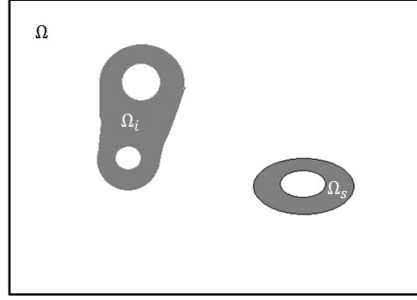


Figura 4.5 – Domínio estudado no problema magnetostático.

Onde: o domínio de estudo  $\Omega$  é dividido em  $\Omega_i$  composto de todos os domínios contendo ímãs permanentes; e  $\Omega_s$  composto de todos os domínios indutores  $\Omega_{s,i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , conduzindo uma densidade de corrente fonte imposta  $J_{s,i}$ .

As condições de contorno sobre a fronteira  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$  são as seguintes:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (4.44)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (4.45)$$

Onde:  $\Gamma = \Gamma_H \cup \Gamma_B$

Na formulação do potencial vetor magnético o divergente da indução magnética é nulo como observado na equação (4.42). Isso decorre diretamente do fato de não existirem cargas magnéticas isoladas da mesma maneira que as cargas elétricas positivas ou negativas (MALAGONI, 2012). Uma segunda forma de enunciar essa propriedade fundamental da conservação de fluxo da indução magnética é de dizer que a indução é solenoidal.

A condução,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , permite então definir uma função potencial vetor magnético, tal que:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (4.46)$$

Pois,

$$\text{div} (\text{rot } \mathbf{A}) \equiv 0 \quad (4.47)$$

Substituindo (4.43) em (4.41), tem-se a formulação forte magnetostática em potencial vetor:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} + \text{rot} \frac{\mathbf{B}_r}{\mu} \quad (4.48)$$

Suponha que a função  $\mathbf{A}$  seja uma função aproximada, de maneira que a equação (4.48) se torne:

$$\mathbf{R} = \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) - \mathbf{J} - \text{rot} \frac{\mathbf{B}_r}{\mu} \quad (4.49)$$

Onde:  $\mathbf{R}$  é um resíduo, visto que a função  $\mathbf{A}$  não é exata.

O objetivo é fazer com que o resíduo tenha a tendência de se anular ou ainda que na média ponderada o resíduo seja zero. Matematicamente isso se escreve da seguinte forma,

$$\int_{\Omega} R W d\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad (R, W)_{\Omega} = 0 \quad (4.50)$$

Onde:  $W$  é a função de ponderação. Esse método de resolver a equação (4.50) é conhecido como *Método dos Resíduos Ponderados*.

Substituindo a equação (4.49) em (4.50), tem-se:

$$(\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) - \mathbf{J} - \text{rot}(\nu \mathbf{B}_r), W)_{\Omega} = 0 \quad (4.51)$$

Onde:  $\nu = 1/\mu$ .

Fazendo  $W = \mathbf{A}'$  e aplicando a Fórmula de Green do tipo  $\text{rot} - \text{rot}$ , apresentada na seção (4.5), onde  $\mathbf{u} = \mathbf{H} = \nu \text{rot} \mathbf{A}$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{A}$ , tem-se:

$$(\nu \text{rot} \mathbf{A}, \text{rot} \mathbf{A}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{B}_r, \text{rot} \mathbf{A}')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{A}' \rangle_{\Gamma} - (\mathbf{J}, \mathbf{A}')_{\Omega_s} = 0, \quad \forall \mathbf{A}' \in F_u^1 \quad (4.52)$$

Onde:  $F_u^1$  está definido na equação (4.37).

O terceiro termo da equação (4.52) pode ser dividido como sendo:

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{A}' \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}', \mathbf{H} \rangle_{\Gamma_H} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{A}', \mathbf{H} \rangle_{\Gamma_B} \quad (4.53)$$

pois  $\Gamma = \Gamma_H \cup \Gamma_B$ .

O primeiro termo da equação (4.53) do lado direito é uma condição de contorno natural, pode ser nulo devido  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} |_{\Gamma_H} = 0$ , ou pode associar às quantidades globais do tipo circulação, com por exemplo, a força magnetomotriz. O segundo termo do lado direito é nulo, pois  $\mathbf{n} \times \mathbf{A} |_{\Gamma_B} = 0$ .

Desse modo, a forma fraca da magnetostática para esta formulação é:

$$(\nu \text{rot} \mathbf{A}, \text{rot} \mathbf{A}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{B}_r, \text{rot} \mathbf{A}')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{A}' \rangle_{\Gamma_H} = (\mathbf{J}, \mathbf{A}')_{\Omega_s}, \quad \forall \mathbf{A}' \in F_u^1 \quad (4.54)$$

Nesta seção (4.7.1) sobre o problema magnetostático, foram apresentadas as equações de *Maxwell*, as relações constitutivas e as condições de contorno que descrevem o modelo magnetostático nas formas forte e fraca. A noção de potencial é muito interessante, pois permite tornar implícita uma das equações a resolver. Assim, o campo físico é ligado ao potencial por uma operação de derivação ou integração. Na seção 4.7.2 aplica-se o método dos elementos finitos utilizando o método de *Galerkin* para resolver problemas magnetodinâmicos.

## 4.7.2 Problema Magnetodinâmico

O modelo magnetodinâmico estuda a distribuição do campo magnético e das correntes induzidas devido ao movimento de ímãs e as correntes variáveis no tempo. As equações de *Maxwell* e a lei de comportamento a considerar são (LUZ, 2003):

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.55)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.56)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_i \quad (4.58)$$

Onde:  $\mathbf{J}$  é a densidade superficial de corrente total ( $A/m^2$ );  $\mathbf{J}_s$  é a densidade superficial de corrente aplicada ( $A/m^2$ );  $\mathbf{J}_i$  é a densidade superficial de corrente induzida ( $A/m^2$ ).

A Figura 4.6 mostra o modelo estudado.

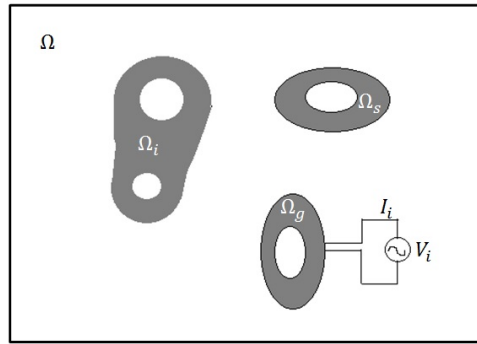


Figura 4.6 – Domínio estudado no problema magnetodinâmico.

Onde: o domínio de estudo  $\Omega$  é dividido em  $\Omega_i$  composto de todos os domínios contendo ímãs permanentes;  $\Omega_s$  composto de todos os domínios indutores  $\Omega_{s,i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , conduzindo uma densidade de corrente fonte imposta  $J_{s,i}$ ; e  $\Omega_g$  composto de todos os domínios fontes  $\Omega_{g,i}$  (também chamados de geradores de força eletromotriz, ou apenas geradores),  $i = 1, \dots, g$ , onde ou uma tensão global  $V_i$  ou uma corrente global  $I_i$  é imposta (ou, de um modo mais geral, onde ambos  $V_i$  e  $I_i$  são a priori incógnitas quando se considera um acoplamento com equações de circuito).

Consideram-se dois conjuntos de indutores para serem conectados ao domínio  $\Omega_g$  (LUZ, 2003):

1.  $\Omega_s$  que é composto de todos os indutores finos  $\Omega_{s,i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Neste caso a densidade de corrente efetiva não é conhecida previamente e o indutor fino está conectado a um gerador impondo uma tensão ou corrente global.
2.  $\Omega_m$  que é composto de todos os indutores maciços  $\Omega_{m,i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Indutores maciços pertencem a um subconjunto do domínio condutor onde ocorrem correntes induzidas ( $\Omega_m \subset \Omega_c$ , onde  $\Omega_c$  é o domínio condutor). Esses indutores são feitos de uma peça de material condutor, onde as correntes podem ser distribuídas não uniformemente se a profundidade pelicular é menor do que algumas de suas dimensões.

As equações constitutivas são:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (4.59)$$

$$\mathbf{J}_i = \sigma \mathbf{E} \quad (4.60)$$

As condições de contorno podem ser escritas em função dos campos  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \big|_{\Gamma_J} = 0 \quad (4.61)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \big|_{\Gamma_E} = 0 \quad (4.62)$$

Onde:  $\Gamma = \Gamma_J \cup \Gamma_E$

Substituindo a Equação (4.46) em (4.57), tem-se as seguintes expressões:

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.63)$$

Então,

$$\mathbf{E} = -\text{grad } v - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.64)$$

A Equação (4.64) satisfaz a Equação (4.57). De acordo com a Equação (4.43) expandindo a Equação (4.55), pode ser observado que:

$$\text{rot}(\nu \mathbf{B} - \nu \mathbf{B}_r) = \mathbf{J}_s + \sigma \mathbf{E} \quad (4.65)$$

Assim, tem-se a formulação forte da modelagem magnetodinâmica,

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) - \text{rot}(\nu \mathbf{B}_r) = \mathbf{J}_s - \sigma \left( \text{grad } v + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (4.66)$$

Suponha que a função  $\mathbf{A}$  seja uma função aproximada, de maneira que a equação (4.66) se torne:

$$R = \text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) - \text{rot}(\nu \mathbf{B}_r) - \mathbf{J}_s + \sigma \left( \text{grad } v + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (4.67)$$

Onde:  $R$  é um resíduo, visto que a função  $\mathbf{A}$  não é exata.

O objetivo é fazer com que o resíduo tenha a tendência de se anular ou ainda que na média ponderada o resíduo seja zero, como demonstrado na equação (4.50).

Substituindo a equação (4.67) em (4.50), tem-se:

$$(\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) - \text{rot}(\nu \mathbf{B}_r) - \mathbf{J}_s + \sigma(\text{grad } v + \partial \mathbf{A} / \partial t), W)_{\Omega} = 0 \quad (4.68)$$

O resíduo é multiplicado por uma função teste vetorial  $\mathbf{A}' \in F_u^0$ , assim a formulação fraca da modelagem magnetodinâmica é,

$$(\nu \text{rot } \mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{A}')_{\Omega} - (\nu \mathbf{B}_r, \text{rot } \mathbf{A}')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{A}' \rangle_{\Gamma_H} - (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\Omega_s} + \dots$$

$$\dots + (\sigma \operatorname{grad} v, \mathbf{A}')_{\Omega_c} + (\sigma \partial_t \mathbf{A}, \mathbf{A}')_{\Omega_c} = 0, \quad \forall \mathbf{A}' \in F_u^0 \quad (4.69)$$

Onde:  $F_u^0$  está definido na equação (4.36).

Usando simplificação em 2D, a equação (4.69) se torna,

$$(\nu \operatorname{grad} \mathbf{A}, \operatorname{grad} \mathbf{A}')_{\Omega} + (\nu \mathbf{B}_r^e, \operatorname{grad} \mathbf{A}')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{A}' \rangle_{\Gamma_H} + (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}')_{\Omega_s} + \dots$$

$$\dots + (\sigma \Delta V / \Delta Z, \mathbf{A}')_{\Omega_c} + (\sigma \partial_t \mathbf{A}, \mathbf{A}')_{\Omega_c} = 0 \quad (4.70)$$

Onde:  $\mathbf{B}_r^e = B_{ry}\mathbf{i} - B_{rx}\mathbf{j}$ , sendo que  $B_{ry}$  e  $B_{rx}$  são as componentes em  $y$  e em  $x$  da indução remanente do ímã. O termo  $\Delta V / \Delta Z$  é a variação da tensão ao longo da profundidade da peça. Se o condutor for curto-circuitado na extremidade, tem-se:  $\Delta V / \Delta Z = 0$ .

Nesta seção (4.7.2) sobre o problema magnetodinâmico, foram apresentadas as equações de *Maxwell*, as relações constitutivas e as condições de contorno que descrevem o modelo magnetodinâmico nas formas forte e fraca. A seção (4.8) descreve o conceito das condições de contorno de periodicidade e anti-periodicidade, por exemplo, o subdomínio é normalmente um polo ou um par de polos em máquinas elétricas.

## 4.8 Periodicidade e Anti-Periodicidade

As condições de contorno de periodicidade e anti-periodicidade são aplicadas onde ocorre repetibilidade na estrutura, como é o caso das máquinas elétricas.

A condição de periodicidade impõe às fronteiras que delimitam a porção periódica potenciais com valores iguais. Já a condição de anti-periodicidade impõem potenciais simétricos, ou seja, iguais em módulo porém de sinais contrários, às fronteiras que delimitam a porção anti-periódica. Basta a definição desta porção elementar, periódica ou anti-periódica, para que todo o domínio real seja caracterizado (LUZ, 2003).

A Figura 4.7 mostra um subdomínio, onde o domínio é reduzido com a aplicação da periodicidade.

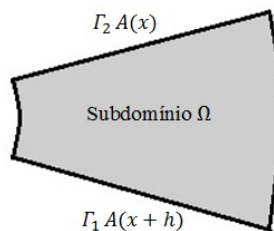


Figura 4.7 – Condição de periodicidade.

Os subíndices 1 e 2 são usados para diferenciar os campos em dois meios. Consequentemente, o subdomínio periódico é  $A(x) = A(x + h)$  e à aplicação da anti-periodicidade é  $A(x) = -A(x + h)$ . Além disso, deve-se garantir que:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 \quad (4.71)$$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 \quad (4.72)$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{J}_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{J}_2 \quad (4.73)$$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 \quad (4.74)$$

As componentes tangenciais do campo magnético se conservam, quando não existem correntes superficiais no limite dos dois meios (BASTOS; SADOWSKI, 2003). Por exemplo, considera-se que o meio 2 possui ímãs permanentes, então tem-se:

$$\left( \frac{1}{\mu_r} \mathbf{H}_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \right)_1 = \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \right)_2 + \frac{1}{\mu_r} \mathbf{B}_{rt} \quad (4.75)$$

A seção (4.9) apresenta a definição do movimento da estrutura que deve ser levado em conta para as máquinas elétricas.

## 4.9 Método da Banda de Movimento

A banda de movimento permite um deslocamento independente do passo da discretização, desde que seja tolerada a deformação dos elementos situados na banda. Além disso, a implementação baseia-se na alocação dinâmica das condições de periodicidade e anti-periodicidade, de forma que não existe criação de incógnitas suplementares (LUZ, 2003).

Um deslocamento independente do passo de discretização é importante na análise de acoplamento dispositivo, uma vez que nesta análise o passo de cálculo é uma função não somente do circuito, mas principalmente dos instantes de operação em que este se encontra (LUZ, 2003). Quando uma mudança de estado de um ou vários interruptores é detectada, o passo de cálculo é automaticamente diminuído para melhor caracterização do sistema. Assim que passa os instantes de transição, o passo de cálculo pode assumir um valor maior que não prejudique o tempo de processamento. Dessa maneira, deve-se manter livre a variação do tamanho do passo de cálculo ao longo do intervalo de simulação, permitindo sua adaptação as diferentes sequências de operação do sistema de forma independente da malha de discretização do dispositivo (DULAR, 1996) e (GEUZAIN, 2001).

A utilização de elementos triangulares no entreferro pode levar imprecisões no cálculo de certas grandezas globais como, por exemplo, o torque em função do escorregamento.

Para obter uma melhor precisão, o entreferro é discretizado em elementos quadriláteros específicos obtidos por elementos triangulares.

Segundo Dular (1996) e Geuzaine (2001), com a rotação de um ângulo qualquer, uma nova posição da parte móvel pode conduzir à uma deformação dos elementos da banda de movimento (Figura 4.8). Essa deformação pode conduzir a imprecisões na determinação de grandezas globais, tais como o fluxo magnético, força eletromotriz, etc..

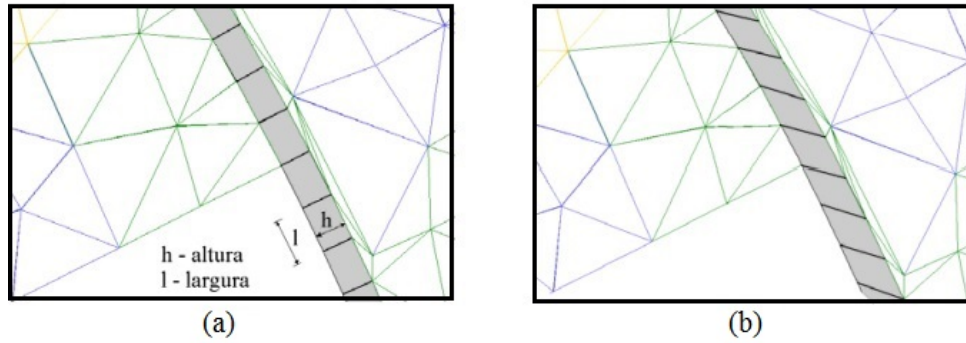


Figura 4.8 – Elementos da banda de movimento: (a) sem deformação e (b) com deformação (Adaptado de (OLIVEIRA, 2004)).

Mesmo utilizando uma camada de elementos retangulares, outras imprecisões estarão presentes, as quais decorrem principalmente da relação largura-altura dos elementos escolhidos no preenchimento da banda e da deformação que eles sofrem durante o movimento (LUZ, 2003). Essas imprecisões ou ruídos numéricos nem sempre são visíveis na curva do fluxo, mas tornam-se perceptíveis na curva da força eletromotriz ( $f_{em} = -\partial_t \phi_i$ ) onde o ruído numérico é amplificado pela derivação. A seção 4.10 descreverá as equações mecânicas que atualizam as posições da estrutura analisada.

## 4.10 Equações Mecânicas

As equações mecânicas podem ser solucionadas para atualizar as posições da estrutura analisada, com base nos cálculos de torques eletromagnéticos e forças magnéticas. Um acoplamento entre os modelos mecânico e eletromagnético envolve o tratamento correto do movimento (DULAR, 1996), (GEUZAIN, 2001). O movimento mecânico atua sobre o modelo eletromagnético, transforma a geometria do problema e produz os fenômenos como uma força eletromagnética induzida pelo movimento. Já os fenômenos eletromagnéticos produzem forças que atuam mecanicamente sobre os dispositivos que produzem o movimento.

A força eletromagnética está baseada nas equações de Newton, considerando-se o movimento das estruturas magnéticas. A equação para o movimento de translação é:

$$M \frac{dv}{dt} = F(t) - f_v - X \quad (4.76)$$

Onde:

$M$  é massa da parte móvel ( $kg$ );

$v$  é a velocidade ( $m/s$ );

$f$  é o coeficiente de atrito ( $N.s/m$ );

$X$  é a posição ( $m$ );

$F(t)$  é a representação de outras forças incluindo a magnética ( $N$ ).

Pelo método de Euler, a discretização temporal da Equação (4.76) é:

$$v(t) = \frac{Mv(t - \Delta t) + F(t)\Delta t - fv\Delta t - X\Delta t}{M + f\Delta t} \quad (4.77)$$

Onde:  $\Delta x = v(t)\Delta t$

Assim, o movimento de rotação dos componentes do dispositivo pode ser modelado usando o método de Euler, e o torque eletromagnético é obtido a partir da solução das equações de campo. A seção 4.11 apresentará o acoplamento entre as equações de campo e a equação de circuito elétrico.

## 4.11 Acoplamento Entre a Equação de Circuito Elétrico e as Equações de Campo

Geralmente, os dispositivos eletromagnéticos são conectados a circuitos elétricos, de maneira que as correntes e tensões associadas aos dispositivos são consideradas para o acoplamento com esses circuitos. Essas grandezas são quantidades globais, as quais são derivadas das quantidades locais, como os campos elétricos e magnéticos (BASTOS; SADOWSKI, 2003).

Os circuitos externos estão conectados ao circuito magnético através de condutores finos, o circuito é limitado a uma malha contendo uma resistência  $R$  e uma fonte de tensão  $V$ . Apesar disso, é possível considerar circuitos constituídos de outros elementos lineares ou não-lineares. A equação da malha é a seguinte (LUZ, 2003).

$$V = RI + \partial_t \lambda_i \quad (4.78)$$

Onde:  $\lambda_i$  é o fluxo magnético concatenado na bobina.

Existem na literatura vários métodos que foram propostos para resolver o problema do acoplamento das equações do campo e do circuito elétrico, citam-se:

- ❑ A resolução separada das várias equações através do cálculo das indutâncias;
- ❑ O método íntegro-diferencial que consiste em exprimir a corrente em função da integral de tensão;
- ❑ A resolução simultânea.

Este último método é o mais utilizado e adaptado para uma discretização do tipo elementos finitos.

A equação de relação de circuito usada no GetDP para a formulação magnetodinâmica é dada por (LUZ, 2003):

$$\partial_t(\mathbf{A}, \mathbf{J}_{s,i})_{\Omega_{s,i}} + I_i(\sigma^{-1} \mathbf{J}_{s,i}, \mathbf{J}_{s,i})_{\Omega_{s,i}} = -V_i \quad (4.79)$$

Pode-se considerar diferentes expressões da densidade superficial de corrente, as quais conduzem a diferentes aproximações das distribuições dos enrolamentos. A forma mais usada para  $\mathbf{J}_{s,i}$  é,

$$\mathbf{J}_{s,i} = \frac{N_i}{S_i} \mathbf{t}_i = \mathbf{w}_i \quad (4.80)$$

Onde:

$\mathbf{t}_i$  é um vetor unitário tangente a direção da bobina;

$S_i$  é área superficial do condutor ( $m^2$ );

$\mathbf{w}_i$  é o vetor densidade de condutor.

Assim, a equação (4.79) torna-se uma relação de circuito usada classificamente,

$$\partial_t(\mathbf{A}, \mathbf{w}_i)_{\Omega_{s,i}} + R_i I_i = -V_i \quad (4.81)$$

A escolha de um método particular não teria uma influência significativa sobre a distribuição da indução magnética nas partes principais do sistema. No entanto, ela pode influenciar a expressão do fluxo concatenado nos enrolamentos (LUZ, 2003). Com relação ao acoplamento das equações de campo e circuito, verificou-se que quando as estruturas eletromagnéticas estão associadas a circuitos de alimentação mais complexos, é importante considerar um acoplamento forte entre essas equações.

No *software* GetDP, para cada ramo do circuito estão associadas uma corrente e uma tensão, essas duas grandezas sendo religadas por uma relação de circuito (por exemplo, resistência, indutância, etc., ou uma relação proveniente do modelo de elementos finitos). Em seguida, as leis de Kirchhoff são enunciadas, ou seja, lei das correntes para a matriz dos nós e lei das tensões para a matriz das malhas independentes. A seção 4.12 descreverá sobre os problemas não-lineares em dispositivos eletromagnéticos.

## 4.12 Problemas Não-Lineares

Em diversos tipos de materiais utilizados na fabricação de dispositivos eletromagnéticos, a relutividade magnética do material e a condutividade não são constantes, sendo dependentes da intensidade do campo magnético aplicado. Em problemas lineares, o cálculo das grandezas como força e campo, está relacionado a uma aplicação relativamente direta das técnicas de álgebra matricial, ou seja, em domínios contendo apenas materiais lineares, ou operando na região linear desses materiais o sistema deve ser resolvido uma única vez a cada instante de tempo considerado. Entretanto, para problemas não-lineares,

onde o efeito da saturação nos materiais ferromagnéticos é relevante, torna-se necessária uma avaliação não-linear do sistema. As soluções desejadas são obtidas por uma sequência de passos (métodos), cada qual envolvendo a modificação da matriz de rigidez e/ou do vetor força, ou seja, a permeabilidade dos materiais não-lineares é calculada, a cada instante de avaliação do sistema, de acordo com a curva  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  do material e com os valores de campo existentes. Assim, para cada instante de cálculo considerado, existirá um ciclo de convergência local dos valores de permeabilidade magnética em cada elemento da malha.

Existem diversos métodos para resolver os sistemas não-lineares, mas os principais são: aproximações sucessivas e Newton-Raphson.

1. **Método das Aproximações Sucessivas:** conhecido também como método do ponto fixo, é utilizado devido sua simplicidade e quando o método de Newton-Raphson encontra dificuldade de ser aplicado.
2. **Método de Newton-Raphson:** é um método iterativo o qual aproxima um conjunto de equações não-lineares simultâneas por um conjunto de equações lineares usando expansão por séries de Taylor. Em comparação com o método de aproximação sucessiva, ele converge mais rapidamente porque a solução é encontrada por funções tangentes (derivadas), em vez de uma simples linearização da curva  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ .

## 4.13 Conclusão

Neste capítulo 4, foram apresentadas as equações de *Maxwell*, as relações constitutivas e as condições de contorno que descrevem o modelo magnetostático e magnetodinâmico nas formas fortes e fracas. Além disso, analisaram-se as máquinas elétricas levando em conta o movimento, as equações mecânicas, o acoplamento entre a equação de circuito elétrico e as equações de campo, além de aplicar as condições de contorno de periodicidade e anti-periodicidade.

O método dos elementos finitos é uma ferramenta importante e atual para o cálculo de problemas eletromagnéticos. Para tanto iremos utilizar esta ferramenta como auxiliar nos processos de otimização de máquinas elétricas com o intuito de incluir nestes projetos a verificação de resultados eletromagnéticos no processo de otimização. No próximo capítulo é apresentado os projetos do motor de indução trifásico de Alto Rendimento *Plus* sob a ótica das técnicas de otimização baseadas nos algoritmos multiobjetivo MODE e NSGA II.

---

## Projetos Ótimos de Motor de Indução Trifásico de Alto Rendimento *Plus*

Com o objetivo de projetar motores de indução trifásicos através do algoritmo de evolução diferencial, neste capítulo serão tratados projetos ótimos de máquinas assíncronas. Tais estudos de caso são constituídos por funções multiobjetivo para construção do motor de indução de alto rendimento *Plus*. Além disso, descrevem problemas de grande interesse no meio industrial.

### 5.1 Introdução

Nos dias atuais, o projeto de sistemas físicos configura-se como uma linha de pesquisa de grande interesse devido às inúmeras aplicações que podem ser encontradas em áreas distintas da ciência e engenharia. Neste capítulo, serão mostrados 5 estudos de caso do projeto de motor de indução trifásico, como: desenho referência e ótimo do motor (máxima eficiência energética e mínimo custo); análise de custos com diferentes tipos de cobre e ferro; minimização do volume e das perdas no cobre; análise da densidade de fluxo usando o *software* Gmsh/GetDP; e por fim a análise do torque eletromagnético via método de elementos finitos. É importante ressaltar que os estudos estão orientados para carga nominal.

### 5.2 Desenho Referência e Ótimo do Motor (Máxima Eficiência Energética e Mínimo Custo)

Os engenheiros em todos os projetos de motores elétricos buscam atingir maior eficiência energética, além de reduzirem a quantidade de ferro e cobre na fabricação de máquinas elétricas. O projeto eletromagnético inovado permite construir motores com tolerâncias

mais restritas e reduzir o entreferro entre o rotor e o estator, o que resulta em menos entrada de energia por unidade de torque de saída.

Este estudo de caso consiste na minimização do custo e maximização da eficiência energética para fabricação do motor de indução via aplicação do algoritmo de evolução diferencial. Contudo, os resultados obtidos serão comparados com os simulados via algoritmo genético.

Para o melhor entendimento da metodologia empregada neste trabalho, alguns pontos devem ser destacados:

- ❑ O objetivo considerado é: minimizar o custo ( $R\$$ ) e maximizar a eficiência energética ( $\eta$ );
- ❑ As variáveis de projeto são: ( $D_o$ ) diâmetro externo do estator ( $mm$ ), ( $D$ ) diâmetro interno do estator ( $mm$ ), ( $D_r$ ) diâmetro externo do rotor ( $mm$ ), ( $h_{s1}$ ) altura da ranhura do estator ( $mm$ ), ( $w_{ts}$ ) largura entre as ranhuras do estator ( $mm$ ), ( $w_{tr}$ ) largura entre as barras do rotor ( $mm$ ), ( $J_s$ ) densidade de corrente no enrolamento do estator ( $A/mm^2$ ), ( $J_{bar}$ ) densidade de corrente na barra do rotor ( $A/mm^2$ ), ( $L/\tau_p$ ) comprimento por passo polar, ( $\bar{B}_{av}$ ) densidade de fluxo médio no entreferro ( $T$ ) e ( $\bar{a}c$ ) carga elétrica específica ( $Ae/m$ );
- ❑ Os parâmetros utilizados pelo algoritmo MODE são: 75 indivíduos, 200 gerações, taxa de perturbação e probabilidade de cruzamento igual a 0,9 e estratégia DE/rand/1/bin para a geração de potenciais candidatos, a taxa de redução e o número do pseudo-curvas é igual a 0,9 e 10, respectivamente;
- ❑ Critério de parada: um determinado número de gerações é definido para interromper o procedimento;
- ❑ Número de execuções: 10 testes são executados para obter o melhor resultado;
- ❑ Os resultados obtidos com a otimização multiobjetivo usando o algoritmo de evolução diferencial MODE são comparados com os resultados obtidos pelo algoritmo genético NSGA II.

As funções objetivo são:

$$\eta = \frac{Q}{(Q + PerdaTotal)} 100 \quad (\%) \quad (5.1)$$

$$Custo = (4,82 P_{Al}) + (14,84 P_{Cu}) + (5,86 P_{Fe}) \quad (R\$) \quad (5.2)$$

Onde:

$P_{Al}$  é o peso total de alumínio ( $kg$ );

$P_{Cu}$  é o peso total de cobre ( $kg$ );

$P_{Fe}$  é o peso total de ferro ( $kg$ ).

As restrições do problema são:

$$g(1) = D - D_r - 0,90 \leq 0 \quad (5.3)$$

$$g(2) = J_s - (1,27 J_{bar}) \leq 0 \quad (5.4)$$

$$g(3) = D_o - (1,5 D) \leq 0 \quad (5.5)$$

A Tabela 5.1 apresenta as variáveis, os parâmetros e os limites do vetor para minimizar o custo e maximizar a eficiência energética do motor de indução trifásico.

Tabela 5.1 – Variáveis, parâmetros e limites para o projeto do motor.

Variáveis	Parâmetros	Mínimo	Máximo
x(1)	$D_o$ (mm)	135,00	145,00
x(2)	$D$ (mm)	90,00	95,00
x(3)	$D_r$ (mm)	88,00	93,00
x(4)	$h_{s1}$ (mm)	10,00	15,00
x(5)	$w_{ts}$ (mm)	3,50	4,20
x(6)	$w_{tr}$ (mm)	4,25	5,05
x(7)	$J_s$ (A/mm <sup>2</sup> )	3,00	5,00
x(8)	$J_{bar}$ (A/mm <sup>2</sup> )	3,00	5,00
x(9)	$L/\tau_p$	1,50	2,00
x(10)	$B_{av}$ (T)	0,30	0,60
x(11)	$\bar{ac}$ (Ae/m)	18000,00	25000,00

O algoritmo proposto pela metodologia é mostrado na Figura 5.1.

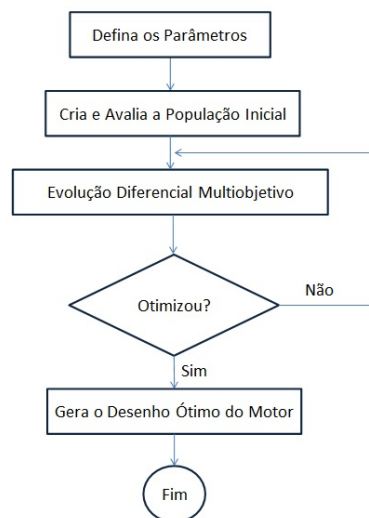


Figura 5.1 – Fluxograma da metodologia proposta.

Para aplicar a metodologia proposta, foram utilizados dados do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus* da WEG:  $2,2(kW)$ ,  $220(V)$ ,  $60(Hz)$ ,  $4(pólos)$  e  $1800(rpm)$ . A Figura 5.2 mostra o desenho das lâminas do estator e do rotor de gaiola com as dimensões principais do motor de indução que foi usado.

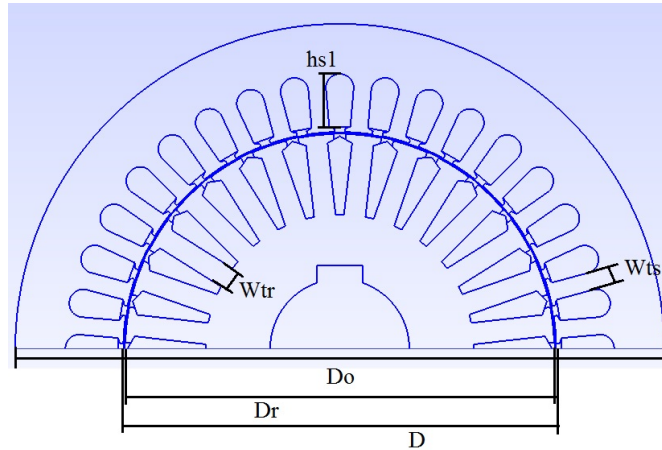


Figura 5.2 – Desenho referência do motor usado.

A Figura 5.3 mostra as partes (estator e rotor) do motor de indução trifásico disponibilizado pelo Núcleo de Pesquisa e Extensão em Energias Alternativas (NUPEA) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).



Figura 5.3 – Partes do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus* WEG.

Após executar os algoritmos MODE e NSGA II, as curvas de Pareto com os melhores pontos ótimos são mostrados na Figura 5.4.

O algoritmo de evolução diferencial é eficaz mesmo com uma pequena população, funções descontínuas e não-lineares. Além disso, ele tem sido utilizado devido à sua simplicidade, convergência rápida e precisão. Na curva de Pareto, destacou-se o Ponto “O” para analisar os parâmetros ótimos do motor nos dois algoritmos. O tempo de execução do MODE e do NSGA II foram  $139,49 (s)$  e  $179,68 (s)$ , respectivamente.

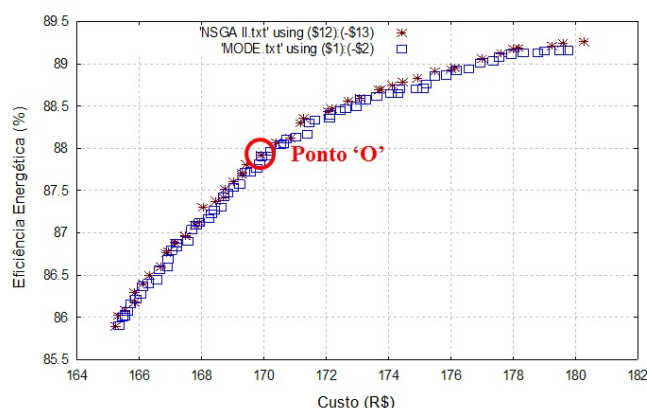


Figura 5.4 – Resultados dos algoritmos MODE e NSGA II da máxima eficiência energética e mínimo custo do motor.

A Figura 5.5 e a Tabela 5.2 mostram os resultados do ponto “O” dos algoritmos MODE e NSGA II. Além disso, os gráficos e a tabela mostram os valores de parâmetros e funções objetivo do projeto de motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus*.

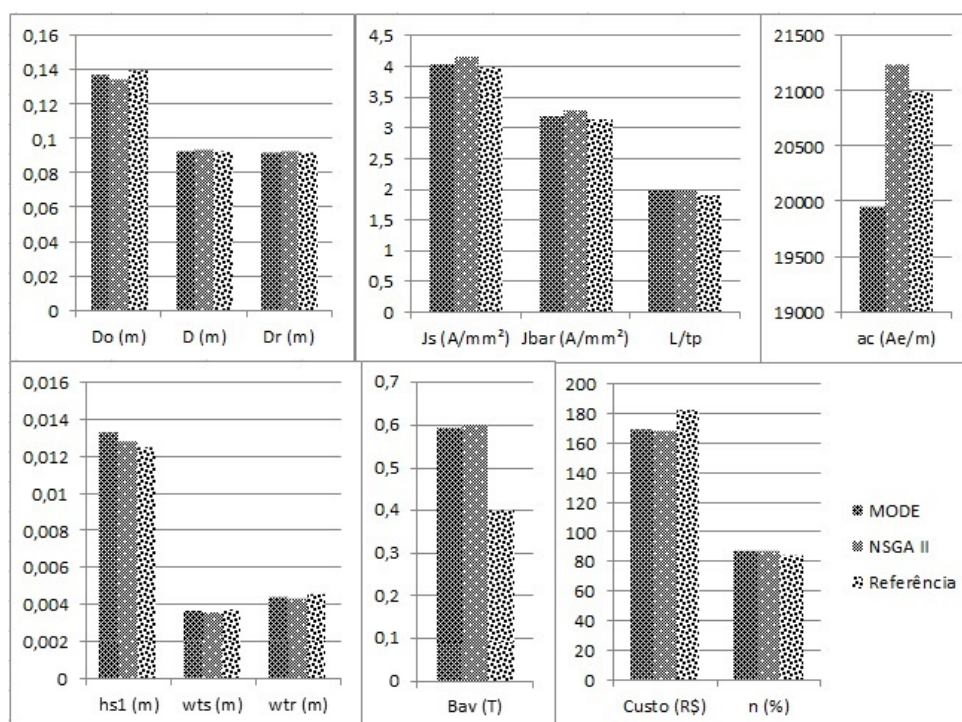


Figura 5.5 – Gráficos dos parâmetros e funções objetivo com os resultados do motor referência considerando os algoritmos MODE e NSGA II.

Observa-se que as execuções dos algoritmos MODE e NSGA II foram capazes de obter resultados satisfatórios, para minimizar o custo e maximizar a eficiência energética do motor de indução. Os resultados das curvas de Pareto são muito próximos um do outro. Portanto, o algoritmo de evolução diferencial é confiável para otimizar projetos de motores elétricos.

Tabela 5.2 – Parâmetros antes e depois da otimização do projeto do motor de indução trifásico.

Parâmetros	Motor Referência	Motor MODE	Motor NSGA II
$D_o$ (mm)	140,00	137,00	135,00
$D$ (mm)	93,40	93,50	93,63
$D_r$ (mm)	92,50	92,60	92,95
$h_{s1}$ (mm)	12,50	13,30	12,82
$w_{ts}$ (mm)	3,80	3,75	3,66
$w_{tr}$ (mm)	4,65	4,47	4,39
$J_s$ (A/mm <sup>2</sup> )	4,00	4,05	4,17
$J_{bar}$ (A/mm <sup>2</sup> )	3,15	3,20	3,30
$L/\tau_p$	1,90	1,99	1,99
$\overline{B}_{av}$ (T)	0,40	0,59	0,60
$\overline{ac}$ (Ae/m)	21000,00	19955,30	21246,30
$Custo$ (R\$)	182,84	169,77	169,03
$\eta$ (%)	84,97	87,76	87,60

A densidade de corrente nos enrolamentos do estator e nas barras do rotor aumentou ligeiramente depois de executar os algoritmos MODE e NSGA II, em comparação com o valor inicial. O comprimento passo polar aumentou um pouco, mantendo a faixa de especificação do projeto para baixo custo e alta eficiência energética (1,5 - 2,0). A altura da ranhura e o diâmetro interno da chapa do estator foi maior após a otimização. Mas, as outras dimensões tais como: diâmetro externo, largura dos dentes do estator e rotor foram menores do que os valores iniciais do projeto. A densidade de fluxo médio no entreferro em ambos os algoritmos aumentou em relação aos valores iniciais do projeto. Mas, limitou-se a 0,60 (T) como descrito na especificação do projeto do motor. E a carga elétrica específica aumentou após a execução do algoritmo NSGA II e diminuiu após a execução do algoritmo MODE. Portanto, ambos os resultados estão dentro da faixa de variação na concepção do motor de indução trifásico de gaiola.

Utilizou-se o *software* Gmsh para modelar o motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus* da WEG. A Figura 5.6 mostra o desenho da chapa do motor antes da otimização dos parâmetros, e a Figura 5.7 mostra o desenho do motor após a execução do algoritmo de evolução diferencial. Além disso, todo o desenho foi parametrizado para facilitar na otimização do motor, ou seja, o algoritmo gera automaticamente o desenho após resolver as funções objetivo. Portanto, os principais parâmetros das chapas do estator e rotor são mostrados nas Figuras 5.6 e 5.7.

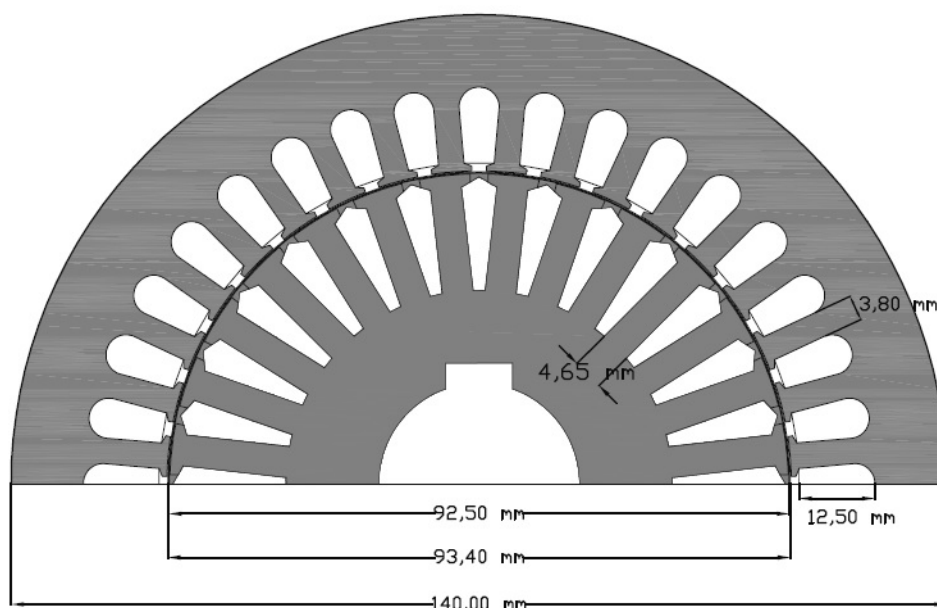


Figura 5.6 – Principais parâmetros antes da otimização do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus*.

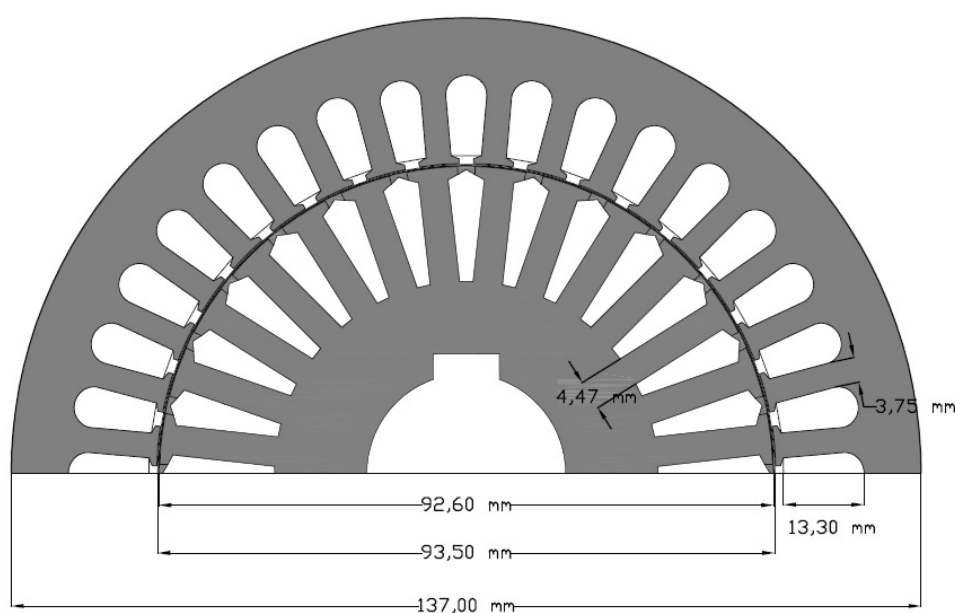


Figura 5.7 – Principais parâmetros após a otimização multiobjetivo do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus*.

Este caso 5.2 objetivou o projeto do motor utilizando o algoritmo de evolução diferencial. Foram analisados a eficiência energética e o custo dos materiais original e otimizado do motor elétrico. A partir da análise dos resultados obtidos observa-se que o algoritmo de evolução diferencial foi capaz de minimizar o custo e maximizar a eficiência através da determinação do vetor de variáveis geométricas que caracterizaram o modelo matemático apresentado. Desta forma, conclui-se que a metodologia proposta se configura como uma interessante estratégia para a finalidade acima descrita.

### 5.3 Análise de Custos com Diferentes Tipos de Cobre e Ferro

As palavras “sustentabilidade” e “eficiência” são muito importantes nos dias de hoje. Por exemplo, a indústria automobilística investe bilhões em carros mais eficientes e sistemas alternativos de propulsão. Portanto, a nossa análise de custos com diferentes tipos de cobre e ferro é fundamental para fabricação de motores elétricos mais eficientes, mais econômicos e com custo mais baixo.

Este estudo de caso consiste na minimização dos custos de cobre e ferro, e na minimização dos custos de cobre esmaltado e aço silício para fabricação do estator do motor de indução usando o algoritmo de evolução diferencial multiobjetivo. Como o algoritmo de evolução diferencial foi validado através do estudo de caso 5.2, neste exemplo não haverá a comparação com outro tipo de algoritmo. Além disso, cita-se o artigo de Malagoli, Camacho e Luz (2016) como referência para validação deste estudo de caso.

A Tabela 5.3 mostra os preços por *kg* dos diferentes tipos de materiais.

Tabela 5.3 – Preços dos diferentes materiais (cotação em novembro de 2015).

Constante	Tipo do Material	Preço ( <i>R\$</i> / <i>kg</i> )
$k_1$	Cobre	19,96
$k_2$	Ferro	10,65
$k_3$	Cobre Esmaltado	41,06
$k_4$	Aço Silício	18,94

As funções objetivo são:

$$Custo_1 = k_1 \text{ Peso}_{Cu} \text{ (R\$)} \quad (5.6)$$

$$Custo_2 = k_2 (\text{Peso}_c + \text{Peso}_d) \text{ (R\$)} \quad (5.7)$$

$$Custo_3 = k_3 \text{ Peso}_{Cu} \text{ (R\$)} \quad (5.8)$$

$$Custo_4 = k_4 (\text{Peso}_c + \text{Peso}_d) \text{ (R\$)} \quad (5.9)$$

Onde:

$Custo_1$  é o custo total do peso de cobre (*R\$*);

$\text{Peso}_{Cu}$  é o peso de cobre (*kg*);

$Custo_2$  é o custo total do peso de ferro (*R\$*);

$\text{Peso}_c$  é o peso de ferro na coroa (*kg*);

$\text{Peso}_d$  é o peso de ferro nos dentes (*kg*);

$Custo_3$  é o custo total do peso de cobre esmaltado ( $R\$$ );

$Custo_4$  é o custo total do peso de aço silício ( $R\$$ ).

A restrição do problema é:

$$g(1) = 3 b_{s1} - h_{s1} \leq 0 \quad (5.10)$$

Onde:

$b_{s1}$  é a largura da ranhura do estator ( $mm$ );

$h_{s1}$  é a altura da ranhura do estator ( $mm$ ).

Para o melhor entendimento da metodologia empregada neste trabalho, alguns pontos devem ser destacados:

- ❑ Os objetivos são: *i*) minimizar os custos de cobre ( $Custo_1$ ) e de ferro ( $Custo_2$ ); *ii*) minimizar os custos de cobre esmaltado ( $Custo_3$ ) e de aço silício ( $Custo_4$ );
- ❑ As variáveis de projeto são:  $(\overline{ac})$  carga elétrica específica ( $Ae/m$ );  $(\overline{B}_{av})$  densidade de fluxo médio no entreferro ( $T$ );  $(J_s)$  densidade de corrente no enrolamento do estator ( $A/mm^2$ );  $(L/\tau_p)$  comprimento por passo polar,  $(h_{s1})$  altura da ranhura do estator ( $mm$ ),  $(b_{s1})$  largura da ranhura do estator ( $mm$ ),  $(w_{ts})$  largura entre as ranhuras do estator ( $mm$ );
- ❑ Os parâmetros utilizados pelo algoritmo MODE são: 50 indivíduos, 150 gerações, taxa de perturbação e probabilidade de cruzamento igual a 0,9 e estratégia DE/rand/1/bin para a geração de potenciais candidatos, a taxa de redução e o número do pseudo-curvas é igual a 0,9 e 10, respectivamente;
- ❑ Número de execuções: 10 testes são executados para obter o melhor resultado;
- ❑ Os resultados obtidos são comparados com o motor referência.

A Tabela 5.4 apresenta os limites inferiores e superiores dos parâmetros utilizados para otimização dos custos dos materiais na fabricação do estator de um motor não real (dimensões acadêmicas).

Tabela 5.4 – Limites inferiores e superiores dos parâmetros para minimizar os custos.

Variáveis	Parâmetros	Mínimo	Máximo
x(1)	$\overline{ac}$ ( $Ae/m$ )	10000,00	17000,00
x(2)	$\overline{B}_{av}$ ( $T$ )	0,30	0,60
x(3)	$J_s$ ( $A/mm^2$ )	3,00	4,00
x(4)	$L/\tau_p$	1,50	2,00
x(5)	$h_{s1}$ ( $mm$ )	15,00	45,00
x(6)	$b_{s1}$ ( $mm$ )	5,00	15,00
x(7)	$w_{ts}$ ( $mm$ )	20,00	35,00

Após executar o algoritmo MODE, a curva de Pareto mostrada na Figura 5.8 representa a fronteira depois da minimização dos custos de ferro e cobre do estator do motor de indução trifásico.

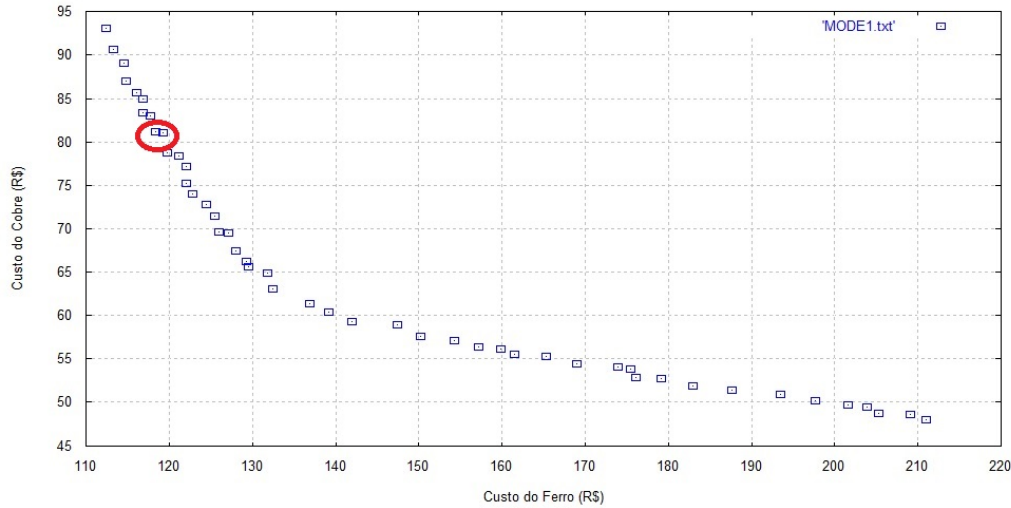


Figura 5.8 – Curva de Pareto para minimizar os custos de ferro e cobre do estator.

Destaca-se que os custos foram minimizados, a Tabela 5.5 apresenta os valores do motor referência e do algoritmo MODE para as funções objetivo de cobre e ferro do estator. Escolheu-se aleatoriamente a população de número 39 para analisar os resultados do algoritmo MODE.

Tabela 5.5 – Resultados do motor referência e do algoritmo MODE para cobre e ferro do estator.

Parâmetros	Motor Referência	Motor MODE
$\bar{a}c$ ( $Ae/m$ )	12000,00	16995,78
$\bar{B}_{av}$ (T)	0,30	0,37
$J_s$ ( $A/mm^2$ )	3,50	3,98
$L/\tau_p$	1,50	1,52
$h_{s1}$ (mm)	27,69	15,79
$b_{s1}$ (mm)	4,47	5,26
$w_{ts}$ (mm)	15,38	20,18
$Custo_1$ (R\$)	91,03	81,17
$Custo_2$ (R\$)	142,56	118,33

Pode-se concluir que o algoritmo de evolução diferencial multiobjetivo foi capaz de reduzir os custos de cobre e ferro do estator do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus*. Houve uma redução de 20,47 (%) na quantidade de ferro e uma redução de 12,14 (%) na quantidade de cobre. Além disso, alguns parâmetros aumentaram de

tamanho mas não influenciaram o resultado final. Portanto, as funções objetivo foram minimizadas, ou seja, os custos foram minimizados (quantidades de cobre e ferro são reduzidas).

Após executar o algoritmo MODE, a curva de Pareto mostrada na Figura 5.9 representa a fronteira depois da minimização dos custos de aço silício e cobre esmaltado do estator do motor de indução trifásico.

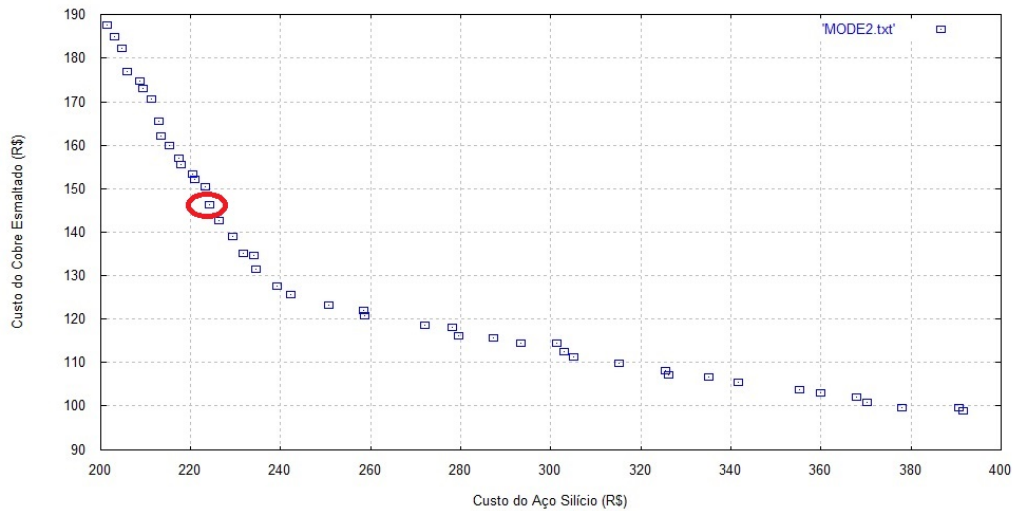


Figura 5.9 – Curva de Pareto para minimizar os custos de aço silício e cobre esmaltado do estator.

Destaca-se que os custos foram minimizados, a Tabela 5.6 apresenta os valores do motor referência e do algoritmo MODE para as funções objetivo de cobre esmaltado e aço silício do estator. Escolheu-se aleatoriamente a população de número 25 para analisar os resultados do algoritmo MODE.

Tabela 5.6 – Resultados do motor referência e do algoritmo MODE para cobre esmaltado e aço silício do estator.

Parâmetros	Motor Referência	Motor MODE
$\overline{ac}$ ( $Ae/m$ )	12000,00	16932,36
$\overline{B}_{av}$ (T)	0,30	0,46
$J_s$ ( $A/mm^2$ )	3,50	3,97
$L/\tau_p$	1,50	1,52
$h_{s1}$ (mm)	27,69	16,81
$b_{s1}$ (mm)	4,47	5,04
$w_{ts}$ (mm)	15,38	20,16
$Custo_3$ (R\$)	187,27	146,38
$Custo_4$ (R\$)	253,53	224,30

Observa-se que o algoritmo MODE cumpriu com seu objetivo de reduzir os custos de cobre esmaltado e aço silício. Além disso, alguns parâmetros aumentaram de tamanho mas mantiveram as especificações do projeto do motor. Portanto, houve uma redução de 13,03 (%) na quantidade de aço silício e uma redução de 27,93 (%) na quantidade de cobre esmaltado. Conclui-se que as funções objetivo foram minimizadas e os custos foram reduzidos dos materiais na fabricação do estator do motor.

Este caso 5.3 objetivou o projeto do estator do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus* utilizando o algoritmo de evolução diferencial. Foram analisados os custos de diferentes materiais para fabricação do motor. A partir da análise dos resultados obtidos observa-se que o algoritmo de evolução diferencial foi capaz de minimizar a quantidade de cobre, ferro, aço silício e cobre esmaltado através das variáveis geométricas. Desta forma, conclui-se que a metodologia proposta se configura como uma interessante estratégia para a finalidade acima descrita.

## 5.4 Minimização do Volume e das Perdas no Cobre

O projeto visa obter a melhor otimização dos cálculos de construção de motor de indução trifásico utilizando o algoritmo de evolução diferencial e genético. Além disso, utilizou-se o *software* Gmsh para modelar o motor ótimo obtendo o melhor rendimento e redução nas perdas no cobre.

Este estudo de caso consiste na minimização do volume e das perdas no cobre do estator. Portanto, analisou-se o desenho do motor antes e depois da otimização em ambos os algoritmos.

Para o melhor entendimento da metodologia empregada neste trabalho, alguns pontos devem ser destacados:

- ❑ O objetivo considerado é: minimizar as perdas no cobre ( $P_{cu}$ ) e minimizar o volume do estator ( $V_e$ );
- ❑ Os parâmetros utilizados pelo algoritmo MODE são: 50 indivíduos, 150 gerações, taxa de perturbação e probabilidade de cruzamento igual a 0,9 e estratégia DE/rand/1/bin para a geração de potenciais candidatos, a taxa de redução e o número do pseudo-curvas é igual a 0,9 e 10, respectivamente;
- ❑ Número de execuções: 10 testes são executados para obter o melhor resultado;
- ❑ Os resultados obtidos com a otimização multiobjetivo usando o algoritmo de evolução diferencial MODE são comparados com os resultados obtidos pelo algoritmo genético NSGA II.

As funções objetivo são:

$$V_s = V_{cuS} + V_{feSd} + V_{feSc} + V_{iso} \quad (m^3) \quad (5.11)$$

Onde:

$V_{cuS}$  é o volume de cobre ( $m^3$ );

$V_{feSc}$  é o volume de ferro na coroa ( $m^3$ );

$V_{feSd}$  é o volume de ferro nos dentes ( $m^3$ );

$V_{iso}$  é o volume de isolamento, ou seja, é 15 (%) da soma dos volumes de cobre, ferro na coroa e ferro nos dentes ( $m^3$ ).

$$P_{cu} = 3 I_{Ph1}^2 R_{Ph1} \quad (W) \quad (5.12)$$

Onde:

$I_{Ph1}$  é a corrente de fase (A);

$R_{Ph1}$  é a resistência ( $\Omega$ ).

As restrições do problema são as mesmas descritas no caso 5.2: equações (5.3), (5.4) e (5.5). Após executar os algoritmos genéticos e de evolução diferencial, analisaram-se os resultados. Utilizou-se o Gmsh para desenhar o motor parametrizado e gerou-se o projeto automaticamente no *software*. Então, com um arquivo de entrada dos principais parâmetros ótimos o desenho é gerado no Gmsh após executar os algoritmos. Lembrando que escolheu-se aleatoriamente uma população para que o algoritmo chame o Gmsh e gere o desenho e a malha, sucessivamente.

A Tabela 5.7 apresenta as variáveis, os parâmetros, os resultados dos algoritmos MODE, NSGA II e do motor referência dos parâmetros para minimizar o volume e as perdas no cobre para construção do motor.

Tabela 5.7 – Variáveis, parâmetros, MODE, NSGA II e Motor Referência do projeto do motor.

Variáveis	Parâmetros	Motor MODE	Motor NSGA II	Motor Referência
x(1)	$D_o$ (mm)	135,49	135,00	140,00
x(2)	$D$ (mm)	90,85	90,00	93,40
x(3)	$D_r$ (mm)	90,48	88,42	92,50
x(4)	$h_{s1}$ (mm)	12,19	10,34	12,50
x(5)	$w_{ts}$ (mm)	3,60	3,50	3,80
x(6)	$w_{tr}$ (mm)	4,67	4,77	4,65
x(7)	$J_s$ (A/mm <sup>2</sup> )	3,51	3,82	4,00
x(8)	$J_{bar}$ (A/mm <sup>2</sup> )	4,43	3,00	3,15
x(9)	$L/\tau_p$	1,53	1,52	1,90
x(10)	$\overline{B}_{av}$ (T)	0,55	0,60	0,40
x(11)	$\overline{ac}$ (Ae/m)	19891,57	19006,30	21000,00
f(1)	$V_s$ (m <sup>3</sup> )	0,00141	0,00137	0,00144
f(2)	$P_{cu}$ (W)	132,34	135,40	178,74

Os algoritmos MODE e NSGA II foram capazes de minimizar as funções objetivo, houve uma redução de 5,10 (%) de volume usando o NSGA II e uma redução de 2,12 (%) usando o MODE. Além disso, analisou-se a redução das perdas no cobre, houve uma redução de 32,00 (%) usando o NSGA II e uma redução de 35,06 (%) usando o algoritmo MODE. Portanto, pode-se concluir que ambos os algoritmos foram eficientes na otimização deste estudo de caso.

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram os resultados após a execução do algoritmo MODE, o desenho no *software* Gmsh e a curva de Pareto, respectivamente.

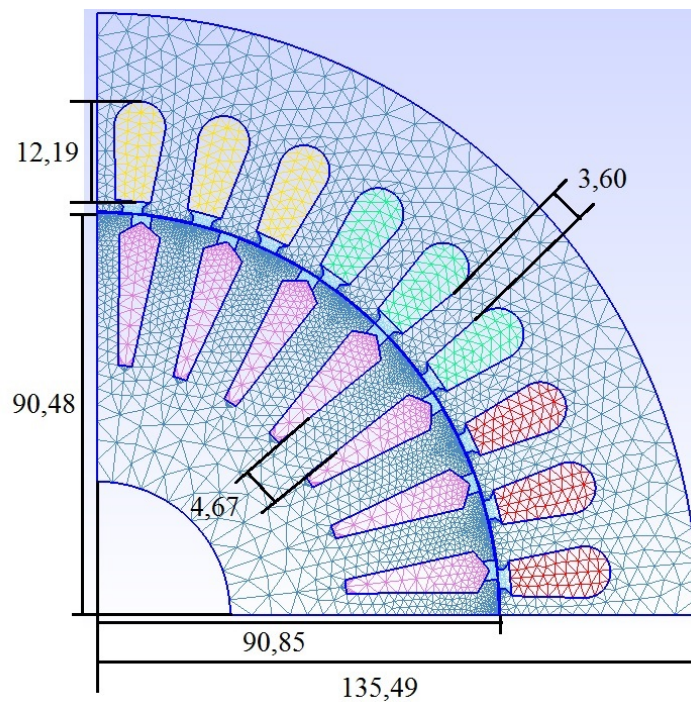


Figura 5.10 – Desenho ótimo do motor usando o algoritmo MODE.

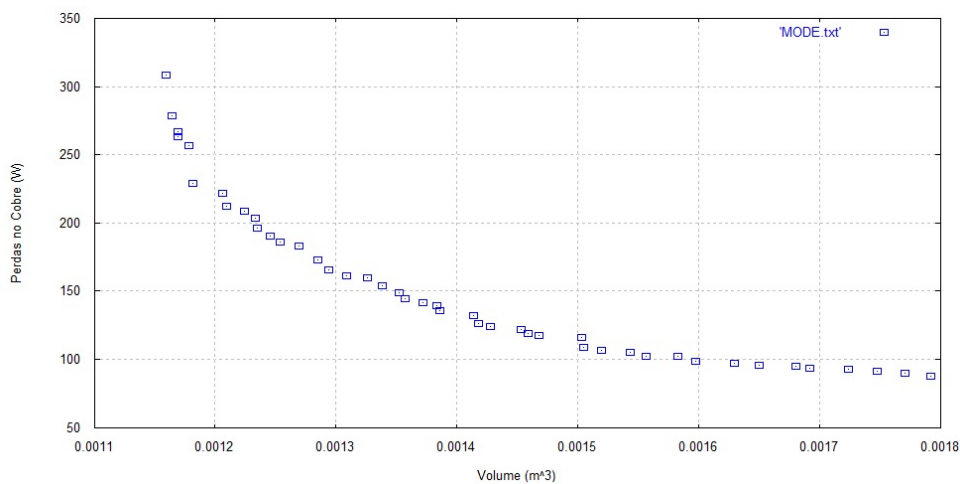


Figura 5.11 – Curva de Pareto usando o algoritmo MODE.

As Figuras 5.12 e 5.13 mostram os resultados após a execução do algoritmo NSGA II, o desenho no *software* Gmsh e a curva de Pareto, respectivamente.

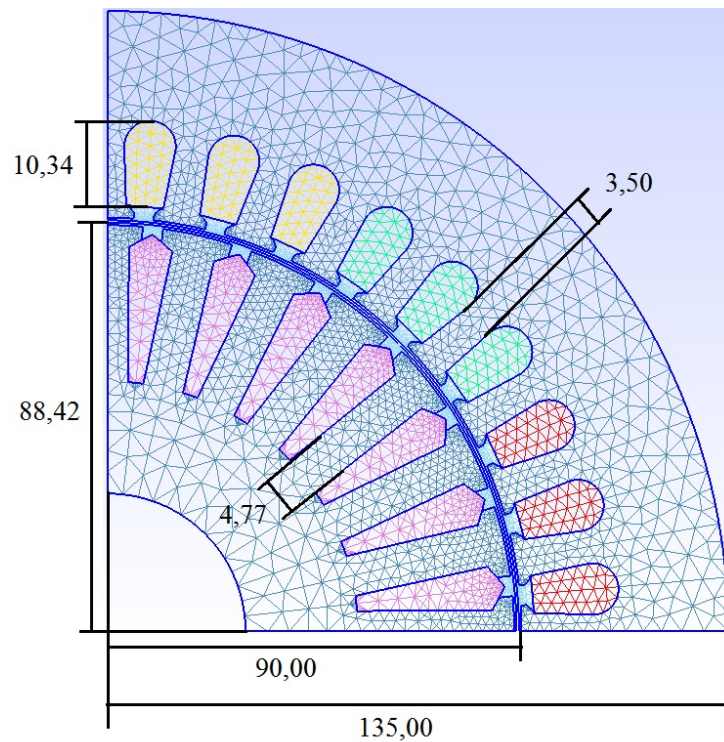


Figura 5.12 – Desenho ótimo do motor usando o algoritmo NSGA II.

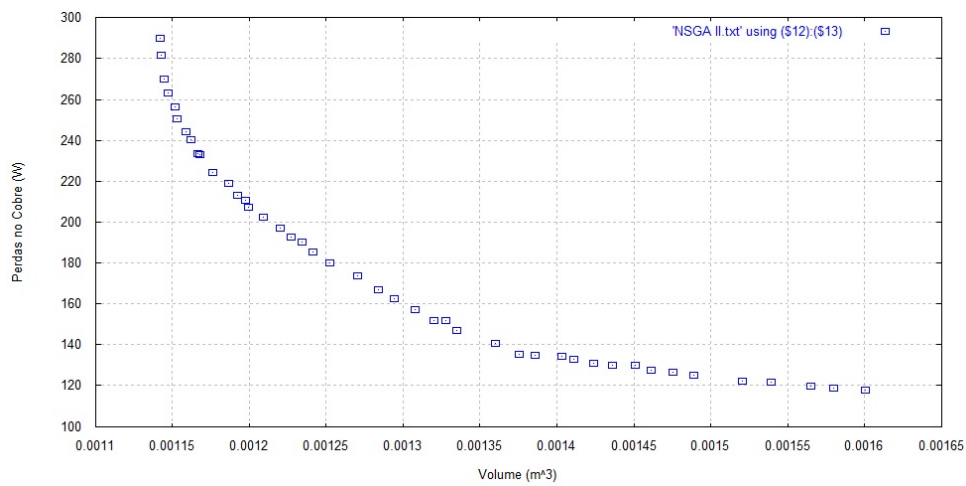


Figura 5.13 – Curva de Pareto usando o algoritmo NSGA II.

Ambos os resultados foram próximos, a maioria dos parâmetros analisados foram reduzidos e outros aumentaram, mas as variáveis de projeto e as funções objetivo ficaram dentro do esperado. Observa-se que houve algumas diferenças nas geometrias do motor usando os algoritmos MODE e NSGA II, e para uma análise mais detalhada é necessário usar o método de elementos finitos que veremos no próximo estudo de caso.

Portanto, este caso 5.4 objetivou o projeto do motor utilizando os algoritmos MODE e NSGA II. Foram analisados o volume e as perdas no cobre do estator para construção do

motor. Contudo, observa-se que o algoritmo de evolução diferencial foi capaz de minimizar o volume e as perdas no cobre através das variáveis geométricas, a partir da análise dos resultados obtidos.

## 5.5 Análise da Densidade de Fluxo Magnético usando os *Software* Gmsh/GetDP

O caminho do fluxo magnético em um motor guia o campo magnético no canal utilizável, minimizando as perdas. Uma máquina elétrica pequena que produza alta potência, mas tenha perdas elevadas não é a solução mais eficaz. Por isso, usando conceitos de *design* inovadores, os engenheiros desenvolvem soluções de minimotor que podem fornecer potência máxima com dimensões mínimas.

Este estudo de caso consiste na minimização do custo e maximização da eficiência energética do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus*, através do método de elementos finitos, serão analisados as densidades de fluxos no desenho referência, MODE e NSGA II. Portanto, analisa-se o desenho do motor antes e depois da otimização em ambos os algoritmos.

Para o melhor entendimento da metodologia empregada neste trabalho, alguns pontos devem ser destacados:

- ❑ Primeiro Passo: Simular o motor com os dados de referência e analisar os resultados através dos *software* Gmsh/GetDP;
- ❑ Segundo Passo: Os resultados analisados no caso (5.2) serão utilizados para solucionar todo o estudo deste caso. Então, os valores dos parâmetros do desenho do motor dos algoritmos MODE e NSGA II são usados para analisar as densidades de fluxo magnético;
- ❑ Terceiro Passo: Analisar todos os resultados do motor referência e dos algoritmos MODE e NSGA II.

O motor de indução em questão é uma máquina de quatro pólos que são induzidas correntes alternadas no circuito do rotor, pelo campo magnético girante produzido nas bobinas do estator. A Figura 5.14 mostra o domínio de estudo e a malha bidimensional obtida pelo *software* Gmsh através de uma extrusão do domínio em 2D, para um ângulo de rotação do rotor de  $8,5^\circ$ . Foram utilizadas as seguintes formulações: magnetostática, magnetodinâmica nas formas fortes e fracas. Além disso, usou-se as equações mecânicas e o acoplamento entre a equação de circuito elétrico e as equações de campo. Por último, apresentou-se o método usado para levar em conta o movimento.

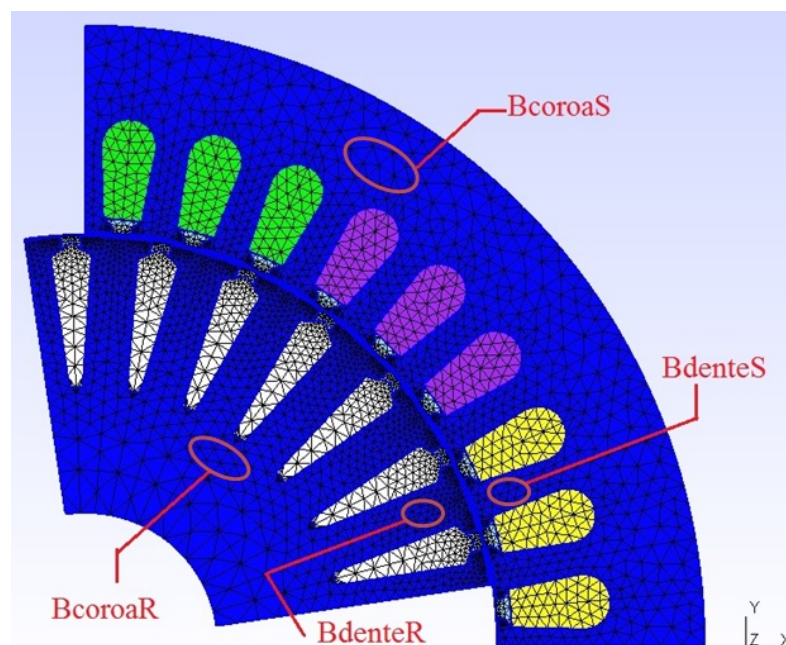


Figura 5.14 – Domínio de estudo e malha bidimensional.

As leis de comportamento dos materiais estabelecem a relação entre os campos elétricos e magnéticos e o meio em que estão inseridos. As principais propriedades dos materiais utilizados nas simulações são mostrados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Propriedades dos materiais.

Material	Condutividade Elétrica ( $S/m$ )
Alumínio	$3,72 \times 10^7$
Cobre	$5,90 \times 10^7$
Ferro Puro	$1,00 \times 10^7$

Salienta-se que as características magnetizantes dos materiais são de natureza não linear, o que deve ser levado em conta nos projetos de dispositivos eletromagnéticos. Entre os materiais disponíveis, o ferro puro é o mais utilizado, pois a permeabilidade é grande e o custo por unidade de peso é a mais baixa de todos os materiais ferromagnéticos disponíveis. Em sua forma pura, comercialmente, é frequentemente usado em muitas estruturas de máquinas, dispositivos eletromagnéticos e usado como elemento básico em quase todas as ligas ferromagnéticas. A liga produzida por uma maior quantidade é provavelmente composta de ferro essencialmente puro silício 1-4 (%), dependendo da percentagem da finalidade pretendida para o material. Quando se dá um tratamento térmico adequado à liga, obtém-se um material com melhores propriedades magnéticas em campos magnéticos fracos e com resistividade superior. Estas duas propriedades são muito convenientes em projetos de engenharia. A liga é enrolada em folhas e tiras de espessura entre 0,35 e 0,635 ( $mm$ ), recozida, conhecida como chapa de aço-silício, que é

usada com diversos formatos, na construção de dispositivos eletromagnéticos. A Figura 5.15 mostra a curva de magnetização do ferro puro utilizada nas simulações do projeto do motor de indução.

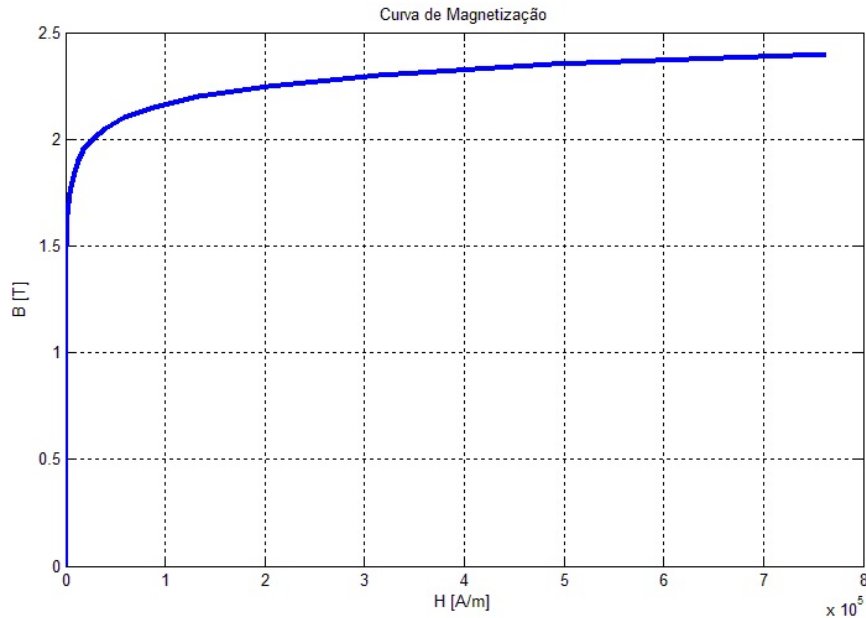


Figura 5.15 – Curva de magnetização do ferro puro.

Para as simulações utilizou-se os *software* Gmsh/GetDP. As Figuras 5.16, 5.17 e 5.18 mostram os resultados das densidades de fluxos magnético dos três tipos de motores referência, usando o MODE e usando o NSGA II, respectivamente.

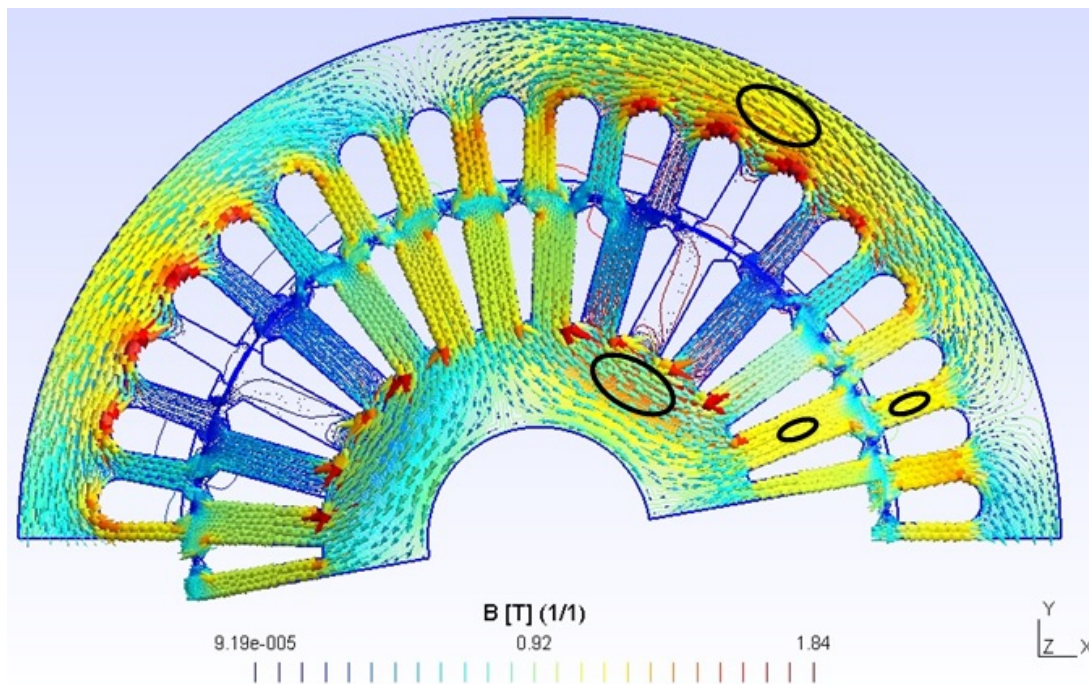


Figura 5.16 – Densidade de fluxo magnético do motor referência.

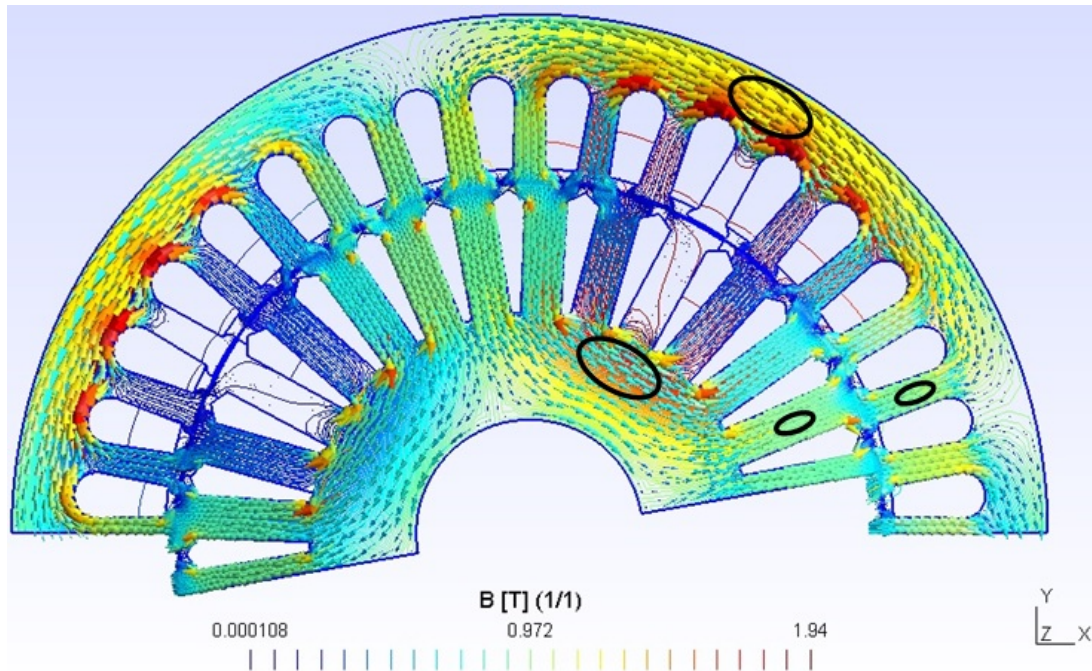


Figura 5.17 – Densidade de fluxo magnético do motor usando o MODE.

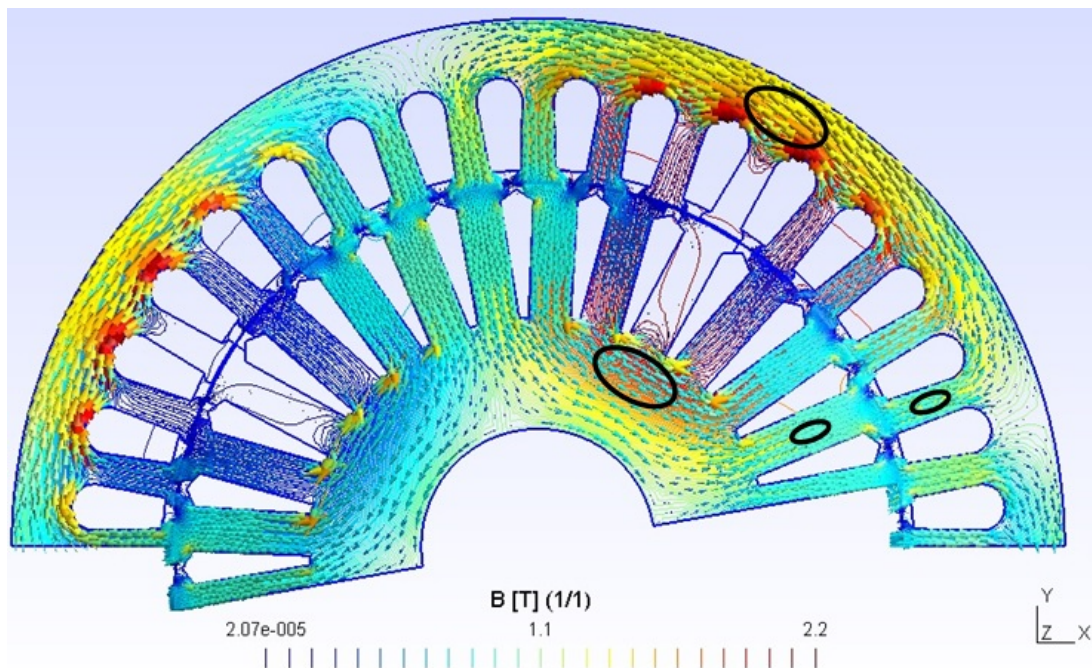


Figura 5.18 – Densidade de fluxo magnético usando o NSGA II.

Para analisar as densidades de fluxos magnético do motor foram escolhidas as seguintes regiões: no meio da coroa do estator e rotor, e no meio dos dentes do estator e rotor com maior indução magnética conforme mostrado na Figura 5.14. Os valores da  $B_{CoroaS}$  aumentaram usando o MODE (7,58%) e o NSGA II (11,25%), os valores de  $B_{DenteS}$  diminuíram usando o MODE (19,65%) e o NSGA II (20,68%). Enquanto que os valores de  $B_{CoroaR}$  aumentaram usando o MODE (9,09%) e o NSGA II (16,66%). E por fim, os valores de  $B_{DenteR}$  diminuiu usando o MODE (3,66%) e aumentou usando o NSGA II

(9,60%) comparado com os valores do motor referência.

A Tabela 5.9 mostra os valores dos parâmetros, das densidades de fluxo magnético nos desenhos para os três tipos de motores: referência, MODE e NSGA II.

Tabela 5.9 – Resultados simulados dos principais parâmetros do desenho e das densidades de fluxo magnético nas coroas, nos dentes do estator e rotor.

Parâmetros	Motor Referência	Motor MODE	Motor NSGA II
$D_o$ (mm)	140,00	137,00	135,00
$D$ (mm)	93,40	93,50	93,63
$D_r$ (mm)	92,50	92,60	92,95
$h_{s1}$ (mm)	12,50	13,30	12,82
$w_{ts}$ (mm)	3,80	3,75	3,66
$w_{tr}$ (mm)	4,65	4,47	4,39
$B_{DenteS}$ (T)	1,40	1,17	1,16
$B_{CoroaS}$ (T)	1,34	1,45	1,51
$B_{DenteR}$ (T)	1,13	1,09	1,25
$B_{CoroaR}$ (T)	1,10	1,21	1,32

Pode-se concluir que após a otimização a densidade de fluxo magnético aumenta na coroa do estator mas o material magnético não saturou, conforme a curva de magnetização mostrada na Figura 5.15, pois a saturação começa aproximadamente em 1,8 (T). Além disso, notou-se que nas bordas de algumas ranhuras do estator houve saturação. Foi observado em alguns artigos referentes a simulações de motores em elementos finitos que a saturação é em torno de 2,2 (T). Portanto, os resultados analisados neste estudo de caso 5.5 comprova que as técnicas de otimização junto com o método de elementos finitos é de extrema importância para construção de projetos de máquinas elétricas mais eficientes e de menor custo.

## 5.6 Análise do Torque Eletromagnético via Método de Elementos Finitos

O torque de partida é a quantidade de força rotacional gerada para acionar um motor. Por exemplo, o torque de cada eixo é definido pelo requisito específico da máquina para mover o objeto conectado ao motor. O requisito de torque do eixo determina todas as dimensões internas e externa do motor e qualquer redução por engrenagem que porventura seja necessária (MITTLE; MITTAL, 2009).

O objetivo dos engenheiros é otimizar o torque de partida do motor durante a fase de projeto. Os principais componentes envolvidos na produção de torque do motor são o

estator, o rotor, o enrolamento e o caminho do fluxo. É observado que quanto maior a eficiência energética, maior é a quantidade de torque para a mesma potência dissipada. A fim de melhorar o desempenho do motor os engenheiros otimizam o projeto com base no tamanho físico, energia, custo e geometria do motor. É importante frisar que um torque maior na partida pode ser conseguido modificando-se a profundidade das ranhuras do rotor.

Esta análise do torque consiste na minimização do custo e maximização da eficiência energética do motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus*, através do método de elementos finitos nos quais serão analisados as curvas do torque versus escorregamento no desenho referência, MODE e NSGA II. Portanto, analisa-se o desenho do motor antes e depois da otimização em ambos os algoritmos (análise feita no caso 5.2).

A Figura 5.19 mostra uma foto da placa do motor utilizado no laboratório. São apresentados os principais dados da máquina, como por exemplo: potência, velocidade, tensão, corrente nominal e etc.. Além disso, utilizou-se tensão nominal de 220 (V), 4 pólos e corrente nominal de 8,27 (A).

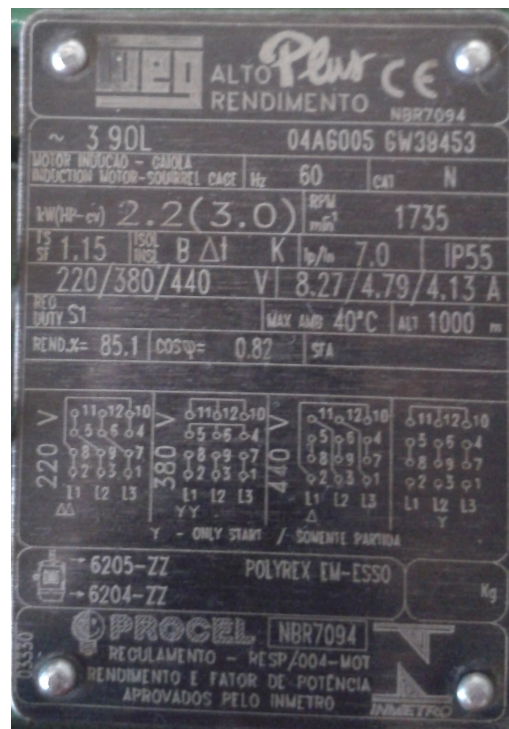


Figura 5.19 – Placa do motor de indução trifásico utilizado.

O torque de partida é requerido para vencer a inércia estática da máquina a ser acionada e produzir movimento. Para que uma carga, partindo de sua velocidade zero atinja a velocidade nominal é necessário que o torque do motor seja sempre superior ao torque da carga. O torque de partida apresenta valores que variam de 1,5 a 2,5 vezes o torque nominal. E o torque máximo apresenta valores que variam de 2,0 a 3,0 vezes o torque nominal. As Figuras 5.20, 5.21 e 5.22 mostram as curvas geradas dos torques versus escorregamento após a simulação do motor usando os *software* Gmsh/GetDP.

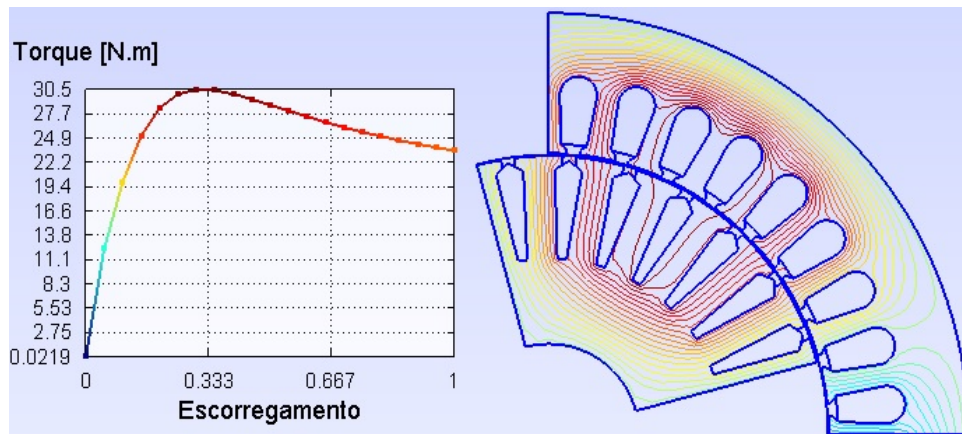


Figura 5.20 – Torque do motor referência.

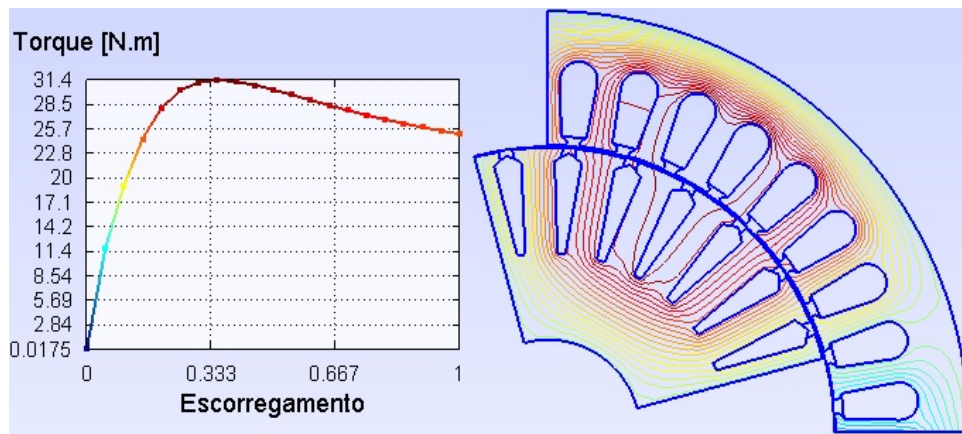


Figura 5.21 – Torque do motor usando o MODE.

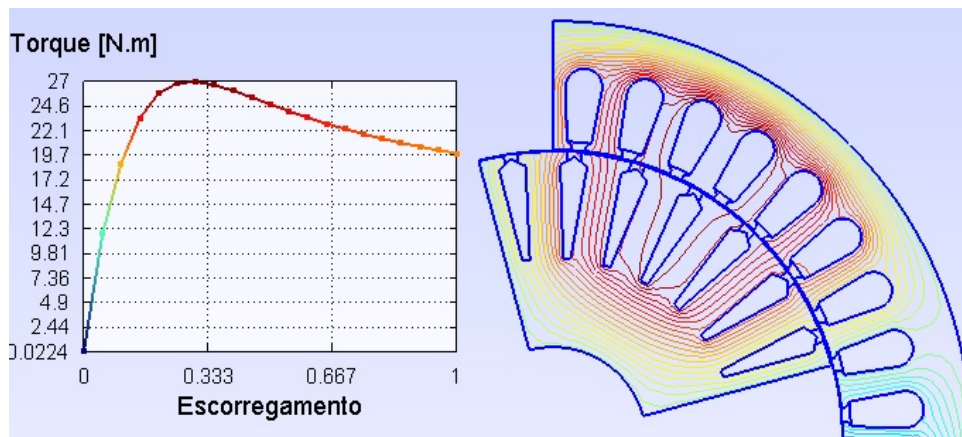


Figura 5.22 – Torque do motor usando o NSGA II.

Observa-se, por exemplo, que os torques de partida do motor referência, usando o MODE e o NSGA II são: 23,53 ( $Nm$ ), 25,07 ( $Nm$ ) e 19,84 ( $Nm$ ), respectivamente. Para se ter uma melhor visualização a fim de comparar os três torques a Figura 5.23 mostra a curva do torque versus escorregamento das três análises com motor: referência, usando o algoritmo MODE e usando o algoritmo NSGA II.

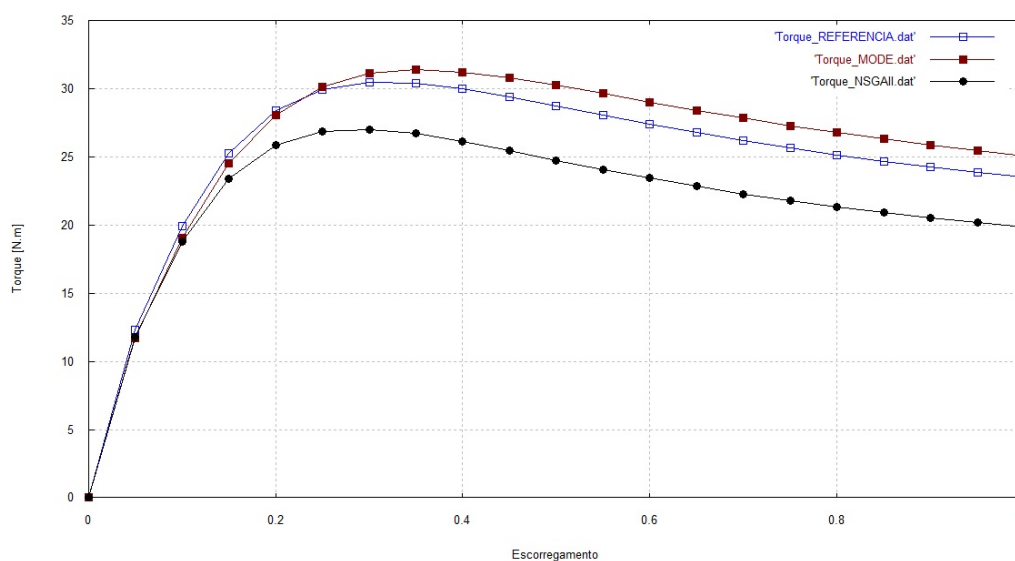


Figura 5.23 – Gráfico comparativo dos torques.

Nota-se que houve diferença entre os três torques. O algoritmo NSGA II diminuiu o torque de partida da máquina em 18,59 (%), enquanto que o algoritmo MODE aumentou o torque de partida do motor em 6,14 (%). Como o projeto do motor em ambos os algoritmos não foram iguais, a otimização dos parâmetros usando o MODE foi melhor do que usando o NSGA II. Pode-se concluir que o algoritmo MODE é mais eficaz do que o algoritmo NSGA II comparando o torque de partida com o modelo referência do motor de indução trifásico alto rendimento *Plus*. Uma sugestão para maximizar o torque do motor é otimizar outros parâmetros e fazer outros testes para obter um melhor resultado no algoritmo NSGA II.

A Tabela 5.10 mostra os valores dos torques de partida, máximo e nominal para os três motores: referência, MODE e NSGA II.

Tabela 5.10 – Resultados simulados dos torques de partida, máximo e nominal.

Torques ( $Nm$ )	Motor Referência	Motor MODE	Motor NSGA II
$T_{Nominal}$	12,33	11,73	11,81
$T_{Máximo}$	30,49	31,20	27,02
$T_{Partida}$	23,53	25,07	19,84

Observa-se que o torque nominal usando o algoritmo NSGA II é menor 4,40 (%) e usando o algoritmo MODE é menor 4,85 (%) em relação ao torque nominal do motor referência. Enquanto que o torque máximo usando o NSGA II diminuiu 12,84 (%) e usando o MODE aumentou 2,27 (%) comparados com o torque máximo do motor referência. Conclui-se que o algoritmo MODE teve resultados melhores do que o algoritmo NSGA II.

Portanto, projetou-se os motores para maximizar o torque de partida com o mínimo de diâmetro e o comprimento. O algoritmo MODE foi capaz de obter resultados mais

satisfatórios quando comparado com o algoritmo NSGA II, permitindo o motor operar com alta eficiência. Consequentemente, com o aumento do torque eletromagnético, o escorregamento é mínimo e o fator de potência opera próximo da unidade. Pode-se citar como referência o artigo: sobre redução do escorregamento (MALAGOLI et al., 2015).

## 5.7 Conclusão

Neste capítulo 5, mostraram-se os resultados finais deste projeto após a qualificação realizada no dia 10 de novembro de 2014. Otimizaram-se o motor de indução trifásico de alto rendimento *Plus* com várias funções objetivo. Alguns resultados como minimização do custo de materiais e maximização da eficiência energética; minimização do volume do estator e das perdas no cobre; minimização dos custos com diferentes materiais; análises das densidades de fluxos magnético e análises dos torques foram satisfatórios com ambos os algoritmos MODE e NSGA II. Os resultados obtidos mostram que a metodologia usada representa uma abordagem interessante para o tratamento do problema de otimização formulado.

Na sequência destina-se apresentar as principais investigações realizadas ao longo de todo o trabalho antes e após a qualificação. Além disso, citam-se alguns trabalhos futuros.

---

## Conclusões

Os problemas reais de otimização em engenharia são naturalmente multiobjetivos. Possivelmente conflitantes, vários critérios são otimizados simultaneamente, sendo difícil em comparação com a otimização de objetivo único. Neste trabalho, apresentou-se noções dos métodos naturais. Destacou-se os algoritmos evolucionários em especial os algoritmos genéticos e de evolução diferencial, e comparou-se as técnicas de otimização com algumas aplicações da literatura.

Além disso, otimizou-se o projeto de um motor de indução trifásico do tipo rotor bobinado e rotor de gaiola. Qualquer melhoria significativa na eficiência operacional dos motores de indução ajuda na conservação de energia. Por isso, é muito importante pelos fabricantes e usuários otimizar o projeto para melhorar a eficiência energética e reduzir custo de materiais ativos (ferro e cobre) dos motores. A eficiência da energia de um motor pode ser otimizada reduzindo o peso dos materiais ativos utilizados, o que pode ser conseguido através da redução do diâmetro e comprimento do motor.

Foram apresentadas as equações de *Maxwell*, as relações constitutivas e as condições de contorno que descrevem o modelo magnetostático e magnetodinâmico nas formas fortes e fracas. Por fim, para analisar as máquinas elétricas foram necessários definir as equações de tensão para os condutores finos e maciços, e aplicar as condições de contorno de periodicidade e anti-periodicidade.

Nos dias atuais, o projeto de sistemas físicos configura-se como uma linha de pesquisa de grande interesse devido às inúmeras aplicações que podem ser encontradas em áreas distintas da ciência e engenharia. Este trabalho apresentou-se 5 estudos de caso do projeto de motor de indução trifásico, como: máxima eficiência energética e mínimo custo; análise de custos com diferentes tipos de cobre e ferro; minimização do volume e das perdas no cobre; análise das densidades de fluxo usando o *software* Gmsh/GetDP; e por fim analisou-se o torque eletromagnético via método de elementos finitos. Os resultados obtidos mostram que a metodologia usada representa uma abordagem interessante para o tratamento do problema de otimização formulado.

Neste ponto o trabalho desenvolvido abriu a perspectiva de estudo para outras pes-

quisas que são sugeridas abaixo.

## 6.1 Trabalhos futuros

São citados alguns trabalhos para desenvolvimentos futuros:

- ❑ Projetar outros tipos de motores elétricos;
- ❑ Modificar o algoritmo para várias funções objetivo, por exemplo, com 5 funções;
- ❑ Fazer estudos considerando as perdas e a modelagem térmica de máquinas elétricas usando elementos finitos;
- ❑ Melhorar as técnicas de otimização em projetos de motores elétricos monofásicos e trifásicos;
- ❑ Introduzir o conceito de projeto por elementos finitos para máquinas especiais;
- ❑ Aplicar o conceito dos algoritmos genéticos para outros dispositivos eletromagnéticos;
- ❑ Aprimorar parâmetros de compensador estático de reativo, filtros, capacitores, transformadores, linhas de transmissão pela utilização de algoritmos genéticos associados aos elementos finitos;
- ❑ Projetar motores de indução trifásicos ótimos aplicados às locomotivas ferroviárias.

---

## Referências

- AGARWAL, R. K. **Principles Of Electrical Machine Design**. 4. ed. Delhi: Katson Books, 2000.
- AHMED, M. et al. Design of a hybrid propulsion system for a three wheeled bicycle. **COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering**, 2015. Emerald Group Publishing Limited, v. 34, n. 1, p. 189–209, 2015.
- ALBERTI, L. et al. Im rotor parameters analysis with an intentionally created saliency. In: **Sensorless Control for Electrical Drives (SLED), 2010 First Symposium on**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 120–126.
- BABU, B. V.; CHAKOLE, P. G.; MUBEEN, J. H. S. Multi-objective differential evolution (mode) for optimization of adiabatic styrene reactor. **Chemical Engineering Science**, 2005. v. 60, p. 4822–4837, 2005.
- BARCARO, M.; BIANCHI, N.; MAGNUSSEN, F. Analysis and tests of a dual three-phase 12-slot 10-pole permanent-magnet motor. **Industry Applications, IEEE Transactions on**, 2010. v. 46, n. 6, p. 2355–2362, Nov 2010. ISSN 0093-9994.
- BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N. **Electromagnetic modeling by finite element methods**. [S.l.]: CRC press, 2003.
- BIANCHI, N.; BOLOGNANI, S. Design optimisation of electric motors by genetic algorithms. **Electric Power Applications, IEE Proceedings -**, 1998. v. 145, n. 5, p. 475–483, Sep 1998. ISSN 1350-2352.
- BOUZIDI, I.; BIANCHI, N.; MASMOUDI, A. An approach to the sizing of electric motors devoted to aerospace propulsion systems. **COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering**, 2014. Emerald Group Publishing Limited, v. 33, n. 5, p. 1527–1540, 2014.
- CAIXETA, G. G. Apostila de conceitos teóricos e exercícios propostos de eletromagnetismo. **Universidade Federal de Uberlândia**, 2010. Uberlândia-MG, 2010.
- CARRARO, E. et al. Pm synchronous machine comparison for light electric vehicles. In: **IEEE. Electric Vehicle Conference (IEVC), 2014 IEEE International**. [S.l.], 2014. p. 1–8.

CASTRO, R. E. **Otimização de Estruturas com Multi-objetivos via Algoritmo Genéticos de Pareto**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2001.

COELHO, L. S. Fundamentos, potencialidades e aplicações de algoritmos evolutivos. **Notas em Matemática Aplicada, Segunda edição**, 2003. Brasil, 2003.

CORREIA, C. H. G.; WERNER, S. L. Uma análise das aplicações dos algoritmos genéticos em sistemas de acesso à informação personalizada. **Universidade Federal do Espírito Santo, Apostila Projeto e Análise de Algoritmos**, 2009. Vitória-ES, 2009.

DEB, K. **Multi-objective optimization using evolutionary algorithm**. 5. ed. New York: John Wiley and Sons, 2001.

DEB, K. et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: Nsga-ii. **Springer Berlin Heidelberg**, 2000. v. 1917, p. 849–858, 2000.

DULAR, P. **Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires**. Tese (Doutorado) — Université de Liège, Bélgica, 1996.

DULAR, P.; GEUZAIN, C. **GetDP: a General Environment for the Treatment of Discrete Problems - User's Manual**. 2014.

GEUZAIN, C. **High order hybrid finite element schemes for Maxwell's equations taking thin structures and global quantities into account**. Tese (Doutorado) — Université de Liège, Bélgica, 2001.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. **Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities - User's Manual**. 2014.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. 5. ed. USA: Addison-Wesley, 1989.

JARA, W. et al. Procedure for fast electromagnetic design of axial flux permanent magnet machines. In: IEEE. **Electrical Machines (ICEM), 2014 International Conference on**. [S.l.], 2014. p. 1396–1402.

KAKOSIMOS, P. E. et al. Induction motors versus permanent-magnet actuators for aerospace applications. **Industrial Electronics, IEEE Transactions on**, 2014. IEEE, v. 61, n. 8, p. 4315–4325, 2014.

LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2004. v. 59, p. 703–736, 2004.

LOBATO, F. S. **Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia-MG, 2008.

- LUZ, M. V. Ferreira da. **Desenvolvimento de um Software para Cálculo de Campos Eletromagnéticos 3D Utilizando Elementos de Aresta, Levando em Conta o Movimento e o Circuito de Alimentação**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Elétrica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis-SC, 2003.
- MALAGOLI, J. A. et al. Design of three-phase induction machine using differential evolution algorithm. **Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)**, 2015. v. 13, n. 7, p. 2202–2208, July 2015. ISSN 1548-0992.
- MALAGOLI, J. A.; CAMACHO, J. R. Automatic optimized design of a stator of induction motor using cad generator (gmsh). **Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)**, 2015. v. 13, n. 9, p. 2908–2914, Sept 2015. ISSN 1548-0992.
- MALAGOLI, J. A. et al. Otimização de um toróide usando o algoritmo de evolução diferencial. **Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica**, 2014. Uberlândia-MG, v. 1, n. 1, p. 1–5, 2014.
- MALAGOLI, J. A.; CAMACHO, J. R.; LUZ, M. V. F. Optimal design variables to minimize the cost of materials the stator of asynchronous machine. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2016. v. 27, n. 2, p. 157–168, 2016. ISSN 2195-3899. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s40313-016-0227-5>>.
- MALAGOLI, J. A.; CAMACHO, J. R.; LUZ, M. V. Ferreira da. Modelagem de capacitores de placas paralelas utilizando método de elementos finitos. **Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos**, 2014. Foz do Iguaçu-PR, v. 1, n. 1, p. 1–5, 2014.
- \_\_\_\_\_. Projeto de rotor de máquina de indução trifásica usando o algoritmo de evolução diferencial. **Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônico e Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo**, 2014. Curitiba-PR, v. 1, n. 1, p. 573–578, 2014.
- \_\_\_\_\_. Simulação computacional de um modelo eletrocinético utilizando o método de elementos finitos em 3d. **Simpósio de Mecânica Computacional e Encontro Mineiro de Modelagem Computacional**, 2014. Juiz de Fora-MG, v. 1, n. 1, p. 1, 2014.
- MALAGOLI, J. A. et al. Simulação computacional de um modelo magnetostático usando o método de elementos finitos aplicado a um toróide. **Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria**, 2014. Caldas Novas-GO, v. 1, n. 1, p. 1–8, 2014.
- \_\_\_\_\_. Optimal volume and slip of a three-phase induction motor using differential evolution. **Renewable Energy And Power Quality Journal**, 2015. v. 2015, n. 13, p. 1–5, 2015.
- MALAGOLI, J. A.; LOBATO, F. S.; CAMACHO, J. R. Otimização multi-objetivo aplicado ao projeto do rotor bobinado de motor de indução trifásico. **Encontro Nacional de Modelagem Computacional e Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais**, 2014. Petrópolis-RJ, v. 1, n. 1, p. 1–10, 2014.
- MALAGOLI, J. A. et al. Otimização multi-objetivo aplicado ao projeto de um estator de motor de indução trifásico. **Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria**, 2014. Caldas Novas-GO, v. 1, n. 1, p. 1–9, 2014.

\_\_\_\_\_. Projeto de estator de máquina de indução trifásica usando o algoritmo de evolução diferencial. **Simpósio de Mecânica Computacional e Encontro Mineiro de Modelagem Computacional**, 2014. Juiz de Fora-MG, v. 1, n. 1, p. 1–13, 2014.

\_\_\_\_\_. Projeto de transformador monofásico utilizando o algoritmo de evolução diferencial. **Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria**, 2014. Caldas Novas-GO, v. 1, n. 1, p. 1–10, 2014.

MALAGONI, J. A. **Os Elementos Finitos no Estudo de Eletromagnetismo Utilizando os Software Gmsh/GetDP**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Elétrica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Uberlândia-MG, 2012.

MEEKER, D. **Finite Element Method Magnetics - User's Manual**. 2014.

MITTLE, V. N.; MITTAL, A. **Design of Electrical Machines**. 5. ed. Delhi: Standard Publishers Distributors, 2009.

MOEDINGER, L. H. **Algoritmos evolutivos e inteligência coletiva aplicados a problemas de otimização não-linear com restrições: fundamentos e estudo comparativo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Católica do Paraná, Curitiba-PR, 2005.

OLIVEIRA, A. M. **Modelagem de máquinas elétricas e seus circuitos elétricos associados utilizando o método de elementos finitos 2D**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Elétrica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis-SC, 2004.

OLIVEIRA, G. T. S. **Estudo e aplicações da evolução diferencial**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, 2006.

PARREIRAS, R. O. **Algoritmos evolucionários e técnicas de tomada de decisão em análise multicritério**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belo Horizonte, 2006.

RAGHURAM, A.; SHASHIKALA, V. Design and optimization of three phase induction motor using genetic algorithm. **International Journal of Advances in Computer Science and Technology**, 2013. v. 2, n. 6, p. 70–76, 2013.

SCHAFFER, J. D. **Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms**. Tese (Doutorado) — Vanderbilt University, 1984.

SILVA, C. M. **Desenvolvimento de um algoritmo de otimização multi-objetivo usando algoritmo genéticos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2004.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. **International Computer Science Institute**, 1995. v. 12, p. 1–16, 1995.

\_\_\_\_\_. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of Global Optimization**, 1997. v. 11, p. 341–359, 1997.

TERZIC, M. V.; MIHIC, D. S.; VUKOSAVIC, S. N. Design of high-speed, low-inertia induction machines with drag-cup rotor. **Energy Conversion, IEEE Transactions on**, 2014. IEEE, v. 29, n. 1, p. 169–177, 2014.

UPADHYAY, K. G. **Design of Electrical Machines**. 5. ed. New Delhi: New Age International Publishers, 2008.

YASODHA, S.; RAMESH, K.; PONMURUGAN, P. Evolutionary multi-objective optimization algorithms for induction motor design - a study. **International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering**, 2012. v. 2, n. 11, p. 627–633, 2012.



## Apêndices



---

## Artigos Publicados

### *a) Resumo Publicado em Congresso*

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V. *Simulação Computacional de Um Modelo Eletrocinético Utilizando o Método de Elementos Finitos em 3D*, Simpósio de Mecânica Computacional e Encontro Mineiro de Modelagem Computacional, Juiz de Fora-MG, 2014.

### *b) Artigos Publicados em Congressos*

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V. *Modelagem de Capacitores de Placas Paralelas Utilizando Método de Elementos Finitos*, Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, Foz do Iguaçu-PR, 2014.

Malagoli, J. A.; Lobato, F. S.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V. *Projeto de Estator de Máquina de Indução Trifásica Usando o Algoritmo de Evolução Diferencial*, Simpósio de Mecânica Computacional e Encontro Mineiro de Modelagem Computacional, Juiz de Fora-MG, 2014.

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V. *Projeto de Rotor de Máquina de Indução Trifásica Usando o Algoritmo de Evolução Diferencial*, Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônico e Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, Curitiba-PR, 2014.

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Ferreira, J. H. I.; Guimarães Jr, S. C. *Otimização de Um Toróide Usando o Algoritmo de Evolução Diferencial*, Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica, Uberlândia-MG, 2014.

Malagoli, J. A.; Lobato, F. S.; Camacho, J. R. ***Otimização Multiobjetivo Aplicada ao Projeto do Rotor Bobinado de Motor de Indução Trifásico***, Encontro Nacional de Modelagem Computacional e Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, Petrópolis-RJ, 2014.

Malagoli, J. A.; Lobato, F. S.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V. ***Otimização Multiobjetivo Aplicada ao Projeto de Um Estator de Motor de Indução Trifásico***, Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, Caldas Novas-GO, 2014.

Malagoli, J. A.; Lobato, F. S.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V.; Ferreira, J. H. I. ***Projeto de Transformador Monofásico Utilizando o Algoritmo de Evolução Diferencial***, Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, Caldas Novas-GO, 2014.

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V.; Ferreira, J. H. I. ***Simulação Computacional de Um Modelo Magnetostático Usando o Método de Elementos Finitos Aplicado a Um Toróide***, Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, Caldas Novas-GO, 2014.

### c) Artigos Publicados em Periódicos

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V. ***Optimal Design Variables to Minimize the Cost of Materials the Stator of Asynchronous Machine***, Journal of Control, Automation and Electrical Systems, v. 27, p. 157-168, 2016. DOI:10.1007/s40313-016-0227-5.

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R. ***Automatic Optimized Design of a Stator of Induction Motor Using CAD Generator (Gmsh)***, Revista IEEE América Latina, v. 13, p. 2908-2914, 2015. DOI:10.1109/TLA.2015.7350038.

Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V.; Ferreira, J. H. I.; Sobrinho, A. M. ***Design of Three-Phase Induction Machine Using Differential Evolution Algorithm***, Revista IEEE América Latina, v. 13, p. 2202-2208, 2015. DOI:10.1109/TLA.2015.7273778.

Malagoli, J. A.; Ferreira, J. H. I.; Camacho, J. R.; Ferreira da Luz, M. V. ***Optimal Volume and Slip of a Three-Phase Induction Motor Using Differential Evolution***, Renewable Energy And Power Quality Journal, v. 13, p. 336, 2015.

#### d) Artigos Publicados em Congressos com Participação

Sobrinho, A. M.; Malagoli, J. A.; Camacho, J. R.; Santos, P. P. P.; Cruz, Y. J. S. ***Projeto das Dimensões e Análise da Densidade de Fluxo Magnético de um Transformador de Potência***, Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Natal-RN, 2015.

Sobrinho, A. M.; Camacho, J. R.; Malagoli, J. A. ***Uma Contribuição aos Projetos de Transformadores de Distribuição via Elementos Finitos***, Encontro Nacional de Modelagem Computacional; Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, Salvador-BA, 2015.

Cruz, Y. J. S.; Santos, P. P. P.; Camacho, J. R.; Malagoli, J. A.; Sobrinho, A. M. ***Dimensionamento da Melhor Posição de um Transformador em uma Propriedade Rural***, Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica, Uberlândia-MG, 2015.

Ferreira, J. H. I.; Camacho, J. R.; Malagoli, J. A. ***Estimativa da Energia Média Gerada em uma Bacia Hidrográfica Através de Análises Estatísticas***, Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, Caldas Novas-GO, 2014.

Ferreira, J. H. I.; Camacho, J. R.; Malagoli, J. A.; Guimarães Jr, S. C. ***Estudo da Estimativa do Potencial Hidrelétrico de uma Bacia Hidrográfica usando o Sistema de Informação Geográfica***, Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica, Uberlândia-MG, 2014.

#### e) Artigos Publicados em Periódicos com Participação

Ferreira, J. H. I.; Camacho, J. R.; Malagoli, J. A.; Guimarães Jr, S. C. ***Assessment of the Potential of Small Hydropower Development in Brazil***. Renewable Sustainable Energy Reviews, v. 56, p. 380-387, 2016.

Ferreira, J. H. I.; Camacho, J. R.; Malagoli, J. A. ***Estimativa da Energia Média Gerada na Bacia do Rio Tijucu no Município de Ituiutaba-MG***, Intercursos Revista Científica, v. 14, p. 7-25, 2015.

Ferreira, J. H. I.; Malagoli, J. A.; Camacho, J. R. ***Estimate of Average Energy Generated in a River Basin by Statistical Analysis for Small Hydropower Plants***, Renewable Energy And Power Quality Journal, v. 13, p. 255, 2015.



## Anexos



## Motor de Indução Trifásico Alto Rendimento *Plus*

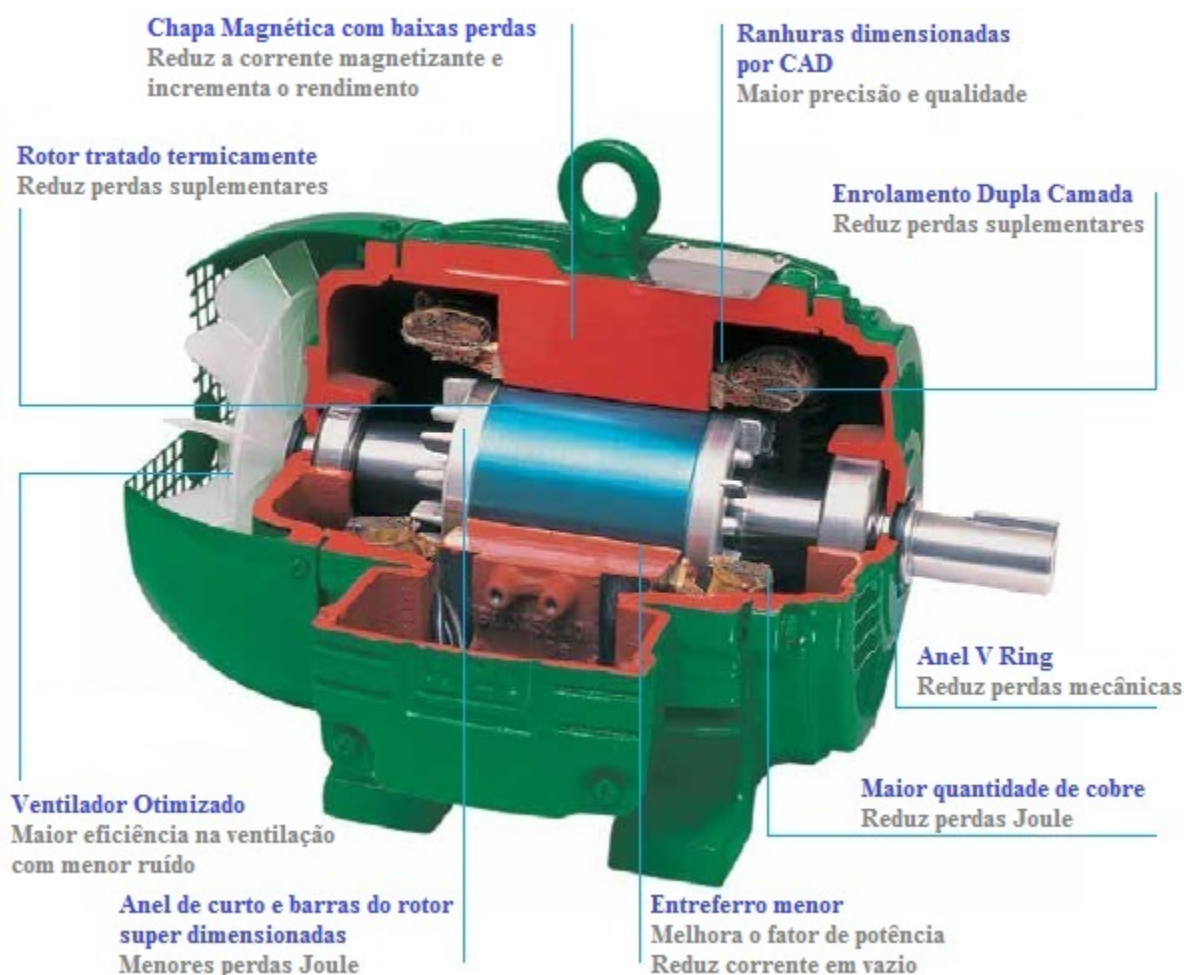


Figura A.1 – Vista em Corte do Motor de Indução Trifásico Alto Rendimento *Plus* - WEG.

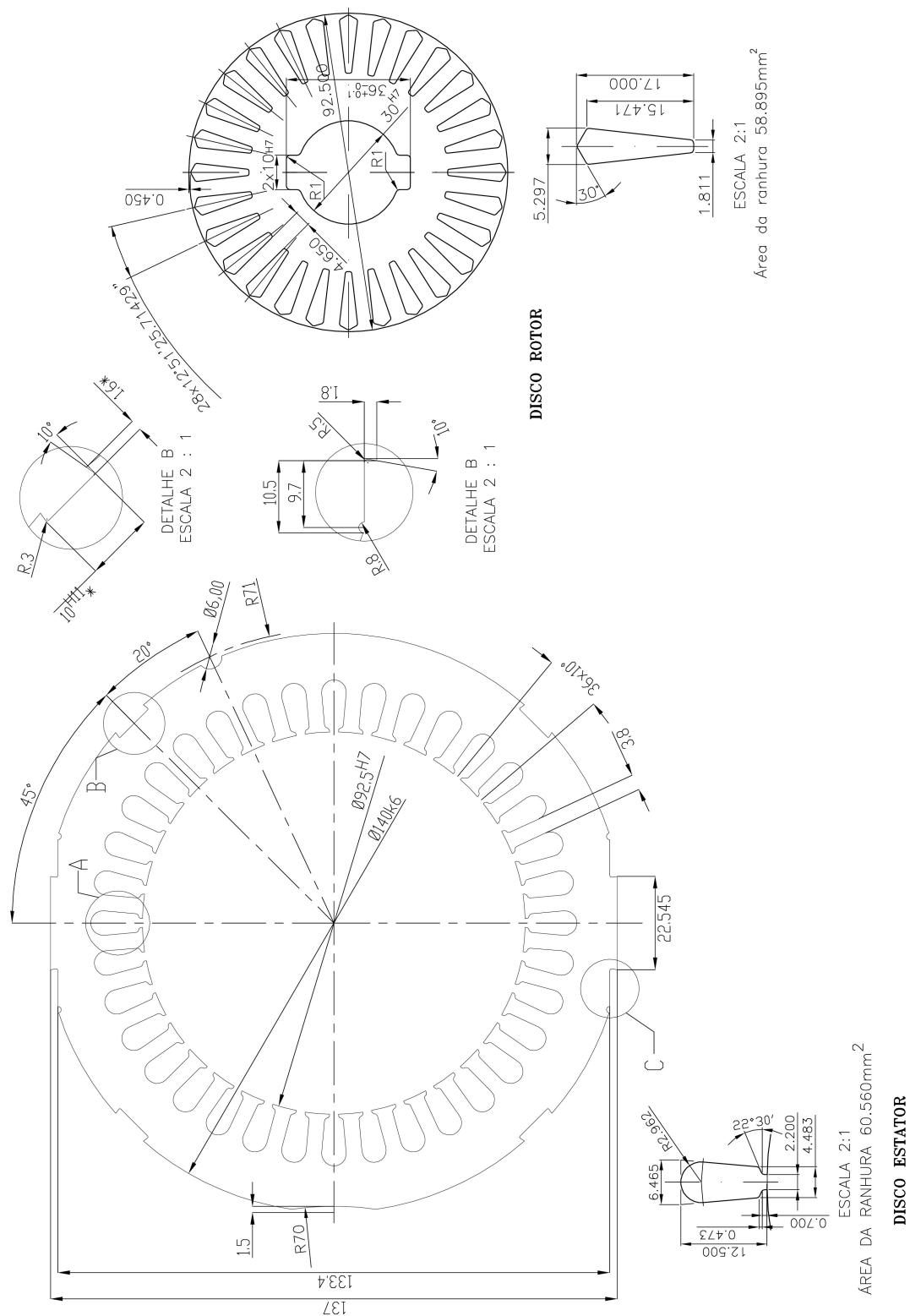


Figura A.2 – Vista das Chapas do Estator e Rotor do Motor WEG.