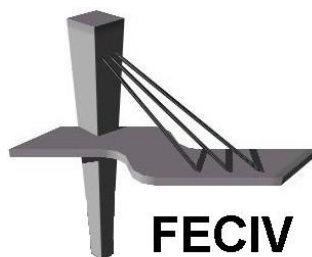


DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE LAJES  
FORMADAS POR VIGOTAS TRELIÇADAS COM  
E SEM PROTENSÃO**

**TOBIAS RIBEIRO FERREIRA**

**UBERLÂNDIA, 11 DE MARÇO DE 2016**



**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**



**Tobias Ribeiro Ferreira**

## **OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE LAJES FORMADAS POR VIGOTAS TRELIÇADAS COM E SEM PROTENSÃO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da  
Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos  
para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Civil**.

**Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima**

**Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Gustavo Delalibera**

Uberlândia, março de 2016.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

- F383o  
2016      Ferreira, Tobias Ribeiro, 1987-  
            Otimização estrutural de lajes formadas por vigotas treliçadas com e  
            sem protensão / Tobias Ribeiro Ferreira. - 2016.  
            104 f. : il.
- Orientadora: Maria Cristina Vidigal de Lima.  
            Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
            Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
            Inclui bibliografia.
1. Engenharia Civil - Teses. 2. Lajes - Teses. 3. Treliças (Construção  
            civil) - Teses. 4. Otimização estrutural - Teses. I. Lima, Maria Cristina  
            Vidigal de. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-  
            Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

---

CDU: 624



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



## ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - PPGE

**ATA Nº:** 155/2016

**CANDIDATO:** Tobias Ribeiro Ferreira

**Nº. Matrícula:** 11322ECV011

**ORIENTADOR:** Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Vidigal de Lima

**TÍTULO:** "Análise do desempenho estrutural de lajes formadas por vigotas treliçadas com e sem protensão".

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Estruturas e Construção Civil

**LINHA DE PESQUISA:** Estruturas

**PROJETO DE PESQUISA:** Sistemas Estruturais em Madeira para Aplicações na Construção Civil

**DATA DA DEFESA:** 11 de março de 2016

**LOCAL:** Sala de Projeções - FECIV, bloco 1Y. **HORÁRIO INÍCIO/TÉRMINO:** 14h - 17h.

Reuniu-se na **Sala de Projeções Prof. Celso Franco de Gouvêa, bloco 1Y - Campus Santa Mônica** da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do PPGE, assim composta: Professores Doutores: **Antonio Carlos dos Santos – FECIV/UFU; Wellington Andrade da Silva – DECIV/UFU e Maria Cristina Vidigal de Lima** orientadora da candidata. Ressalta-se que todos os membros da banca e o aluno participaram in loco.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa **Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Vidigal de Lima** apresentou a Comissão Examinadora e concedeu ao discente a palavra para a exposição do trabalho. A seguir, a senhora presidente concedeu a palavra aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, a Banca, em sessão secreta, atribuiu os conceitos finais. Em face do resultado obtido, a Banca Examinadora considerou o candidato aprovado. Esta defesa de Dissertação de Mestrado Acadêmico é parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre. O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU. Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos e foi lavrada a presente ata que após lida e aprovada foi assinada pela Banca Examinadora.

Professor Orientador: **Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Cristina Vidigal de Lima – FECIV/UFU**

Membro externo: **Prof. Dr. Wellington Andrade dos Santos – DEVIC/UFU**

Membro interno: **Prof. Dr. Antonio Carlos dos Santos – FECIV/UFU**

Uberlândia, 11 de março de 2016.

# AGRADECIMENTOS

---

Agradeço à Deus, pela vida, pelo seu infinito amor e cuidado.

Aos meus pais Abadio Aparecido e Maria Cristina e à minha irmã Cláudia Ribeiro, por todo amor, oração e incentivo que foram fundamentais em todas os momentos da minha vida até hoje.

À minha noiva Júlia Borges pelo incentivo, confiança e respeito.

À professora Maria Cristina Vidigal de Lima pela orientação, paciência, compreensão, motivação e ensinamentos que fizeram dela uma referência profissional e humana para minha vida.

Ao meu Coorientador, professor Rodrigo Gustavo Delalibera, pela amizade, apoio, ideias, e momentos de diálogo ao longo dos últimos cinco anos.

Ao professor Alceu por sua disposição, apoio e contribuição para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os meus familiares, sogro, sogra, amigos, colegas de mestrado e de trabalho, demais professores e servidores da UFU.

**Ferreira, T. R.** *Otimização estrutural de lajes formadas por vigotas treliçadas com e sem protensão*. 104 p. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

## RESUMO

---

Este trabalho apresenta o estudo de lajes unidirecionais formadas por vigotas treliçadas pré-moldadas com e sem protensão. Como enfoque principal, a pesquisa abordou o dimensionamento de vigotas treliçadas em concreto armado e em concreto protendido. O objetivo deste trabalho foi comparar o desempenho para cada solução estrutural, levando-se em conta o uso ou não da protensão. Para os dimensionamentos das lajes desenvolveu-se uma rotina em planilha eletrônica. A planilha permitiu realizar também o processo de otimização e, em função disso, conhecer alguns parâmetros ideais para o dimensionamento, tais como: carregamento, comprimento do entreixo, resistência característica do concreto, área de aço e força de protensão. O processo de otimização foi realizado com dois objetivos. O primeiro objetivo consiste em dimensionar a laje para que a flecha final seja igual ao valor limite prescrito pela ABNT NBR 6118:2014. O segundo objetivo é obter o menor peso próprio possível, respeitando a flecha limite. Para o dimensionamento, fez-se a consideração de vigas isoladas e para a análise de comportamento foram feitas algumas simplificações no que diz respeito aos apoios e limitações previstas na ABNT NBR 6118:2014. Observa-se por meio dos resultados que com o uso das vigotas treliçadas protendidas, para vãos de 6 a 9 m, consegue-se uma redução média do peso da laje em torno de 21%, comparado às vigotas não protendidas. Conclui-se que, para as condições analisadas, considerando as restrições impostas nesse estudo, o vão máximo para o dimensionamento de vigotas sem protensão é de 9 m, enquanto que com o uso da vigota protendida o limite é de 15 m.

**Palavras-chave:** Laje nervurada, vigota treliçada, protensão, otimização.

**Ferreira, T. R.** *Structural optimization of slabs formed by lattice joists with and without prestressing*. 104 p. Dissertation (MSc), Graduate Program in Civil Engineering, Federal University of Uberlândia, 2016.

## ABSTRACT

---

This dissertation presents the study of one-way slabs formed by lattice joist with and without prestressing. The objective of this study is to compare the technical performance of each structural solution, taking into account the prestress competitiveness. For the slab design procedure and the optimization analysis, a routine is developed in an electronic spreadsheet. Some parameters such as loading, length between the axis, strength of concrete, steel area and prestressing force is considered in the analysis. The optimization process is carried out with two objectives. The first is to obtain a design whose final displacement is equal to the limit value prescribed by ABNT NBR 6118:2014. The second objective is to obtain the maximum vertical displacement that minimize the slab weight. The slab is considered simple supported and formed by individual beams. The results shows that the use of the lattice prestressed joists, to spans such as 6 m to 9 m, the average weight reduction of the slab is around 21% compared to not prestressed joists. It is concluded that, for the restrictions imposed in this study, the maximum span for the design of slabs with not prestressed joists is around 9 m, while for the prestressed situation the limit is around 15 m.

**Keywords:** Ribbed slab, lattice joist, prestress, optimization.

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
1.1 <i>Considerações iniciais.....</i>	9
1.2 <i>Objetivos .....</i>	11
1.3 <i>Metodologia.....</i>	11
1.4 <i>Escopo do trabalho.....</i>	12
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>13</b>
<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>13</b>
2.1 <i>Lajes nervuradas formadas por vigotas pré-moldadas .....</i>	13
2.2 <i>Pesquisas desenvolvidas sobre lajes nervuradas .....</i>	19
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>30</b>
<b>DIMENSIONAMENTO .....</b>	<b>30</b>
3.1 <i>Considerações sobre o dimensionamento.....</i>	30
3.2 <i>Esforços solicitantes .....</i>	32
3.2.1 <i>Analogia por grelhas equivalentes (simplificado) .....</i>	36
3.2.2 <i>Analogia como laje maciça armada em uma direção .....</i>	38
3.3 <i>Parâmetros adotados para o estudo.....</i>	40
3.3.1 <i>Flecha imediata – Modelo de Branson simplificado .....</i>	42
3.4 <i>Dimensionamento da armadura longitudinal das vigotas .....</i>	43
3.5 <i>Detalhes específicos das vigotas treliçadas protendidas .....</i>	48
3.5.1 <i>Dimensionamento da armadura de flexão positiva .....</i>	49
3.6 <i>Dimensionamento à cortante .....</i>	53
3.7 <i>Verificações .....</i>	56
3.7.1 <i>Verificação de fissuração .....</i>	56
3.7.2 <i>Verificação de deformação .....</i>	58
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>61</b>
<b>OTIMIZAÇÃO.....</b>	<b>61</b>



4.1 Introdução aos métodos de otimização .....	61
4.2 Otimização pela limitação da flecha ou minimização do peso próprio da laje .....	63
4.2.1 Etapa 1: Definição da função a ser otimizada .....	65
4.2.2 Etapa 2: Identificação das variáveis .....	65
4.2.3 Etapa 3: Adição das restrições .....	66
4.2.4 Etapa 4: Configuração das opções e parâmetros do Solver .....	67
4.2.5 Etapa 5: Avaliação dos resultados parciais .....	68
4.2.6 Etapa 6: Interpretação dos resultados e relatórios finais .....	68
4.2.1 Espaço de busca .....	71
4.2.2 Considerações sobre as limitações dos métodos de otimização e convergência .....	73
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>74</b>
<b>RESULTADOS E ANÁLISES .....</b>	<b>74</b>
5.1 Otimização do comportamento de lajes formadas por vigotas treliçadas .....	74
5.2 Otimização para atingir flecha limite em lajes não protendidas .....	76
5.2.1 Minimização do peso total em laje não protendida .....	79
5.2.2 Análise da variação da ação accidental .....	80
5.2.3 Análise da influência dos valores de partida das variáveis .....	82
5.3 Sistema não protendido x protendido .....	86
5.4 Sistema protendido com 1 e 2 fios de protensão .....	93
<b>CAPÍTULO 6.....</b>	<b>97</b>
<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>97</b>
6.1 Considerações finais e conclusões.....	97
6.2 Sugestões para trabalhos futuros .....	99
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>100</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações iniciais

Os princípios gerais que devem nortear os projetos das estruturas formadas por elementos pré-moldados, segundo El Debs (2000), consistem na concepção do projeto visando a utilização de concreto pré-moldado, na solução das interações da estrutura com as outras partes da construção, uso de elementos da mesma faixa de peso e a minimização do número de ligações e tipos de elementos.

Em obras de engenharia do setor privado ou mesmo em obras com parceria do governo federal, estadual ou municipal, algumas vezes, não se tem tempo hábil para que seja feito o estudo do projeto de forma a considerar detalhadamente a concepção estrutural. Isso dificulta ou mesmo impede que aconteçam os esperados benefícios da pré-moldagem em concreto, tanto na gestão do processo construtivo, quanto na escolha do sistema estrutural mais adequado.

Segundo Albuquerque (2007), no Brasil até o ano de 2007, pelo menos 70% das obras pré-moldadas executadas não foram originalmente concebidas para a utilização do sistema, mas sim, adaptadas de uma concepção arquitetônica pensada para uma estrutura em concreto moldado no local. Essa realidade é ainda mais crítica em regiões fora dos grandes centros, onde há uma resistência maior ao emprego de novas tecnologias, especialmente no caso das tecnologias do concreto que envolvam a pré-moldagem.

De acordo com Elliott (2002) a concepção e construção de juntas e ligações é a consideração mais importante para as estruturas de concreto pré-moldado. Sua finalidade é transmitir forças entre os elementos estruturais e proporcionar estabilidade e robustez à edificação. Assim, devem ser previstas as condições necessárias para que as ligações sejam articuladas, semirrígidas ou rígidas e, conseqüentemente, a estrutura possua os critérios de estabilidade global e local, exigidos em norma.

Segundo Elliott (2002) podem haver várias maneiras de se construir uma ligação satisfatória, o ideal é que o método seja simples e transmita de forma adequada os esforços solicitantes para os elementos estruturais ligados. As juntas devem ser concebidas não apenas para resistir aos esforços de serviço e carregamentos finais, que são relativamente fáceis de prever e calcular, mas devem ser adequadas também em casos de cargas anormais devido a incêndio, impactos, explosões.

Nas obras apresentadas por Lima, Castilho e Gesualdo (2013), situadas na cidade de Uberlândia, observa-se a predominância da escolha de soluções mistas com elementos pré-moldados e moldados in loco. Albuquerque (2007) observa que muitos fabricantes de pré-moldados seguem este panorama para atender uma grande quantidade de obras. Nestes termos, optar por uma maior ou menor pré-fabricação depende das características da obra, tais como condições de canteiro, prazo e disponibilidade de recursos.

Observa-se, em Uberlândia e na região do Triângulo Mineiro, o emprego crescente de estruturas de concreto pré-moldado com uma predominância absoluta de ligações de concreto moldado no local que reproduz, de certa forma, o monolitismo das estruturas convencionais de concreto.

Muitos são os elementos estruturais que permitem sua pré-produção, dentre eles podem ser destacadas as lajes formadas por vigotas treliçada utilizadas em edificações residenciais e comerciais. Uma técnica mais recente adota a inserção de cabos de protensão na sapata das vigotas treliçadas. Esse tipo de estrutura fica caracterizado como um elemento pré-moldado de seção parcial que elimina o uso de fôrmas na concretagem e ainda, possui potencial para economia nos escoramentos (LIMA; CASTILHO; GESUALDO, 2013). As lajes formadas por vigotas treliçadas com protensão conseguem vencer maiores vãos, se comparadas às vigotas treliçadas sem protensão.

Naaman (2012) ressalta que o concreto armado e o concreto protendido não podem ser considerados concorrentes pois, em termos de aplicação, um complementa o outro. Desde

que o concreto protendido tornou-se, em parte, um produto fabricado (pela indústria do pré-moldado) e uma vez que permite vãos cada vez mais longos, a “competição” é sobretudo com construção em aço ao invés de competir com o concreto armado. De qualquer forma, a pequena necessidade de manutenção, baixo consumo de energia durante a moldagem e versatilidade, são comuns a tanto ao concreto armado quanto ao concreto protendido.

Nesse trabalho explora-se o comportamento das lajes formadas por vigotas pré-moldadas treliçadas com e sem protensão, a fim de aproveitar melhor as vantagens de sua aplicação. Assim, descobre-se até que ponto, ou a partir de que ponto, o uso da protensão é mais ou menos interessante. Isso é feito com o desenvolvimento de uma rotina de dimensionamento em planilha eletrônica e com a aplicação de um método de otimização não linear, dessa forma consegue-se melhor entendimento dos parâmetros importantes ou influentes em cada solução estrutural do dimensionamento. Em termos gerais, busca-se a melhor relação desempenho estrutural, menor peso próprio e flecha limite.

## **1.2 Objetivos**

O objetivo do trabalho é a análise da viabilidade estrutural de lajes formadas por vigotas pré-moldadas treliçadas com e sem protensão, mediante o dimensionamento e aplicação de processo de otimização em planilha eletrônica. Para a otimização, são adotadas como funções objetivo atingir a flecha limite prescrita pelas normas técnicas nacionais e obter o menor peso próprio das lajes. As variáveis consideradas no dimensionamento e que definem o cenário ótimo são a resistência característica do concreto à compressão ( $f_{ck}$ ), a distância do

## **1.3 Metodologia**

Inúmeras são as verificações necessárias para que as lajes treliçadas possam apresentar comportamento estrutural satisfatório, além disso, há necessidade de se explorar uma faixa para os comprimentos dos vãos e conhecer as variáveis que influenciam o dimensionamento. Assim, o estudo da viabilidade estrutural, para o sistema de lajes formadas por vigotas treliçadas com e sem protensão, é desenvolvido neste trabalho por meio de uma planilha eletrônica, na qual, desenvolveu-se uma rotina em que pode ser aplicada uma ferramenta de otimização.

Essa planilha contém desde a rotina computacional para o pré-dimensionamento da laje e obtenção dos carregamentos, obtenção dos esforços solicitantes para a geometria de laje

adotada, até a realização do dimensionamento propriamente dito, onde são verificados os deslocamentos considerando o efeito da fluência e abertura excessiva de fissuras.

Uma vez desenvolvido o dimensionamento, respeitando as prescrições normativas nacionais, é apresentado neste trabalho o desenvolvimento do procedimento de otimização que utiliza o método não linear de gradiente reduzido genérico (GRG2). São consideradas como restrições os valores de  $f_{ck}$ , a quantidade de aço necessária às vigotas, o intereixo, os domínios para o dimensionamento, a abertura de fissuras entre outras. A função objetivo considerada consiste em obter a flecha limite e o menor peso da laje.

A utilização do GRG2 justifica-se, perante os demais métodos disponíveis, pois o algoritmo de gradientes reduzidos generalizados proposto por Lasdon et al. (1978) trata da solução de problemas de otimização não lineares nos quais a função objetivo pode ter não linearidades de qualquer forma. Isso torna-se interessante para o estudo, visto que no dimensionamento estão envolvidas equações de segundo até o quarto grau, tais como as equações de flecha e de inércia. Além disso, tem-se fácil acesso a esse método já desenvolvido em planilha eletrônica.

## **1.4 Escopo do trabalho**

Este trabalho é constituído de seis capítulos, organizados da seguinte maneira:

**Capítulo 2:** Revisão bibliográfica – investigação teórica dos assuntos que direcionaram e permitiram o desenvolvimento do estudo realizado;

**Capítulo 3:** Dimensionamento – detalhamento das etapas, parâmetros e condições adotados para o dimensionamento de lajes unidirecionais com nervuradas pré-fabricadas com vigotas treliçadas não protendidas e protendidas;

**Capítulo 4:** Otimização – descrição dos métodos de otimização que permitiram fazer “varreduras” dentro de um espaço de busca com parâmetros e condições limitados por normas ou restrições técnicas.

**Capítulo 5:** Resultados e Análises – apresentação dos resultados e comparação entre lajes nervuradas treliçadas sem e com protensão;

**Capítulo 6:** Conclusões – resume as soluções e resultados adotados no desenvolvimento do trabalho, bem como considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

# CAPÍTULO 2

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Lajes nervuradas formadas por vigotas pré-moldadas

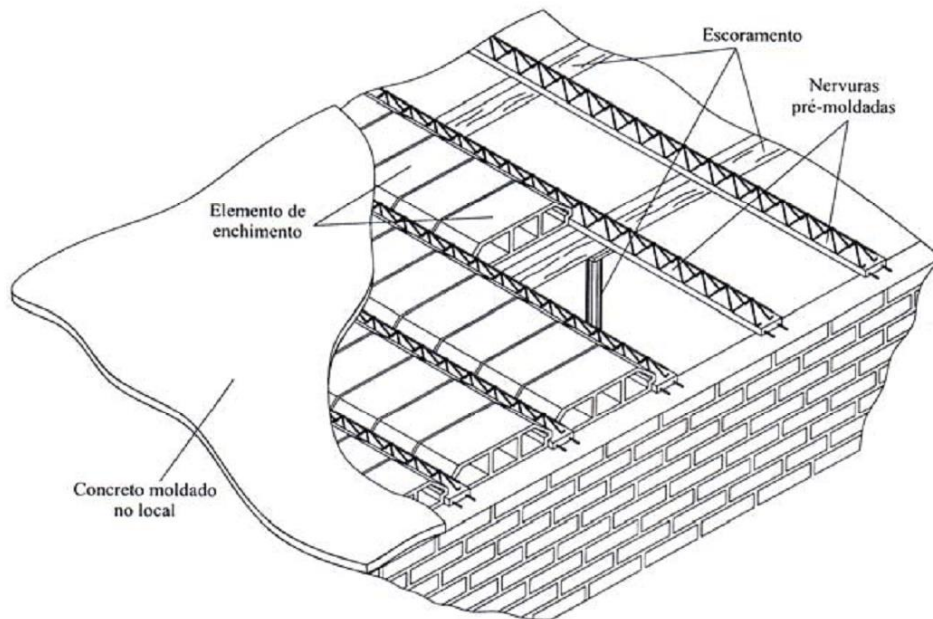
O processo de produção das estruturas de concreto pré-moldado consiste de etapas transitórias que vão desde a execução desses elementos, passam por etapas de transporte e montagem e por fim chegam à realização das ligações definitivas. Tais etapas podem apresentar as solicitações mais críticas para os elementos estruturais desse tipo de estrutura. (EL DEBS, 2000).

As aplicações mais comuns de lajes formadas por elementos pré-moldados são nos edifícios. Nesses, as variações comumente utilizadas são: painéis duplos “T”, painéis alveolares, elementos pré-laje e, lajes formadas por nervuras pré-moldadas.

As lajes nervuradas podem ser formadas por vigotas pré-moldadas com elementos de enchimento, como os blocos cerâmicos vazados ou de poliestireno expandido (EPS), que são colocados sobre os pré-moldados para, em seguida, serem preenchidos com concreto moldado no local.

Ressalta-se que é comum ouvir os termos “lajes pré-moldadas” ou “lajes pré-fabricadas” para definir as lajes nervuradas. No entanto, essa definição é inadequada, visto que apenas alguns elementos são pré-moldados, sendo a laje efetivamente concretada no local. Pode-se observar na Figura 1 o esquema de como são compostas as lajes formadas por nervuras pré-moldadas.

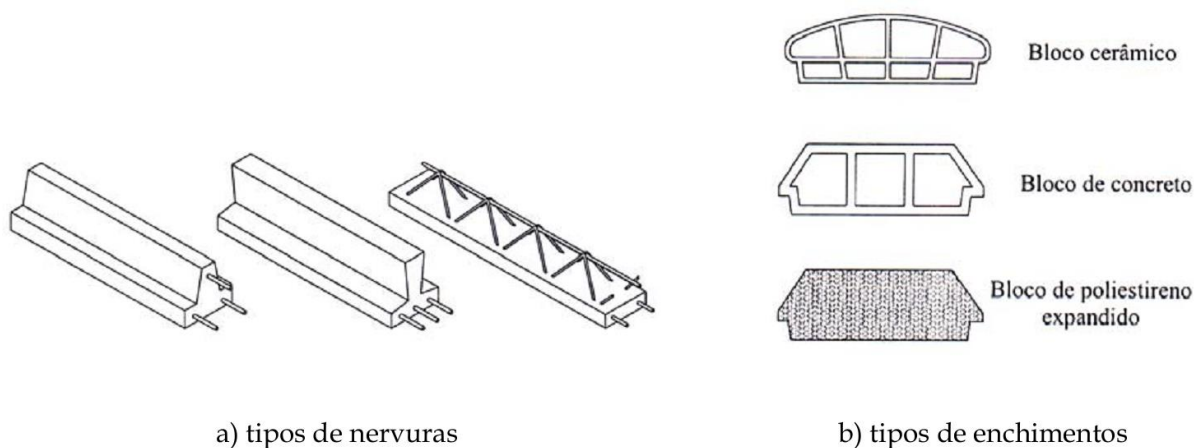
**Figura 1:** Laje formada por nervuras pré-moldadas



**Fonte:** El Debs (2000)

No Brasil, as nervuras ou vigotas utilizadas são em forma de seção T invertido ou com uma armadura em forma de treliça que se projeta para fora da seção e podem ser em concreto armado ou concreto protendido. Apresenta-se na Figura 2 os tipos de nervuras e os materiais de enchimento.

**Figura 2:** Tipos de nervuras e elementos de enchimentos utilizados nas lajes

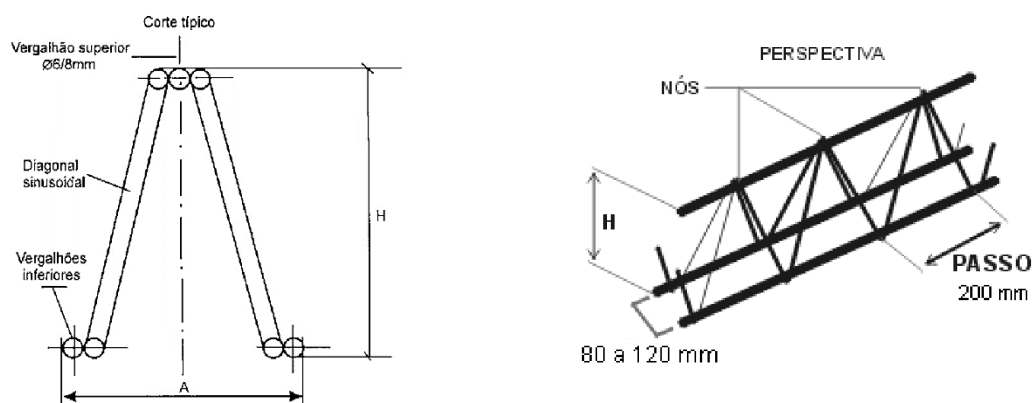


**Fonte:** El Debs (2000)

A armação treliçada é constituída por duas barras de aço paralelos na base, denominados de banzos inferiores e uma barra de aço no topo, denominado de banzo superior, interligados por duas barras de aço diagonais, denominados de sinusóides, com espaçamento regular

(passo), conforme está ilustrado na Figura 3.

**Figura 3:** Treliças eletrossoldadas



**Fonte:** Adaptado do manual da TRELIART (2002)

Sob encomenda, as vigotas treliçadas podem ser fabricadas com armaduras adicionais introduzidas na base de concreto, sem que acarrete dificuldade de fabricação. El Debs (2000) destaca que a utilização desse tipo de vigota treliçada favorece a execução de lajes armadas nas duas direções.

Segundo Droppa Junior (1999), as lajes treliçadas já são utilizadas no Brasil a cerca de 40 anos, porém, a difusão e surgimento de fábricas com capacidade para produzir variados opções de arranjo (unidirecionais ou bidirecionais) só ocorreu a partir da década de 90.

Como desvantagens dos sistemas de lajes com vigotas pré-moldadas quando comparados aos pavimentos tradicionais, como as lajes maciças de concreto, Droppa Junior (1999) e Magalhães (2001) apresentam as seguintes considerações:

- Com exceção do caso das lajes com vigotas treliçadas, o sistema não se comporta de forma monolítica com os outros elementos estruturais. Sob o ponto de vista do contraventamento da edificação tal fato é um grande inconveniente. Apresenta-se na Figura 4 um trecho de laje com o destacamento da vigota de seção completa da região do capeamento;
- Deve ser verificado o comportamento para o estado limite de deformações excessivas, haja visto serem formadas por elementos muito esbeltos;
- Em edifícios com múltiplos pavimentos deve-se analisar a resistência do plano da laje para a transferência de ações horizontais, de modo que as lajes pré-moldadas



apresentem comportamento efetivo de diafragma;

- Dependendo do vão a ser alcançado pela laje, as vigotas podem se tornar elementos relativamente pesados, o que pode dificultar (ou mesmo inviabilizar) seu manuseio durante o transporte e montagem.

**Figura 4:** Falha na monoliticidade do sistema de lajes com nervuras pré-moldadas



Fonte: Autor (2016)

De acordo com o manual da TRELIART (2002), as principais vantagens no uso das lajes treliçadas são:

- Capacidade de vencer grandes vãos livres e suportar altas cargas;
- Capacidade de suportar paredes apoiadas diretamente sobre a laje, desde que feitas previamente as considerações necessárias;
- Possibilidade de redução na quantidade de vigas e consequentemente de pilares e fundações do sistema estrutural de qualquer edificação. Além disso, reduzindo a quantidade de pilares, ganha-se espaço interno;
- Redução do custo final da estrutura se considerado economia de aço, concreto, fôrma e mão-de-obra;
- Menor peso próprio com consequente alívio das cargas em vigas, pilares e fundações;
- Redução do escoramento, devido ao baixo peso próprio;
- Eliminação do uso de fôrma para a execução das lajes;

- Facilidade de transporte horizontal e vertical, e maior agilidade na montagem;
- Dimensionamento uni ou bidirecional, dependendo da necessidade da estrutura;
- Eliminação da possibilidade de trincas e fissuras, pela condição de total aderência entre as nervuras e o concreto de capeamento. Esta total aderência é oferecida principalmente pela existência dos sinusóides e também pela superfície rugosa em contato com o concreto de capeamento;
- Perfeita condição de monoliticidade da estrutura, que possibilita ser utilizada em qualquer tipo de obra, seja horizontal ou vertical com altura elevada;
- Baixo índice de desperdício;
- Melhoria das características térmicas e acústicas, quando a laje é executada com blocos de EPS.

Como eventuais desvantagens podem ser citadas:

- Quando é feito o enchimento com EPS, não é possível fazer furos na parte inferior;
- Também é necessário utilizar uma cola especial na face aparente do isopor para que o acabamento (chapisco ou gesso) possa aderir ao material;
- Necessidade de mão de obra especializada para realizar os acabamentos de forma adequada.

Em virtude das vigotas protendidas, como as volterranas, apresentarem muitas vantagens sobre as vigotas convencionais e sobre as vigotas treliçadas, foi desenvolvido um elemento que apresenta as características de vigotas treliçadas e que ainda permite a aplicação protensão aderente na sapata, tal elemento foi denominado de vigota treliçada protendida.

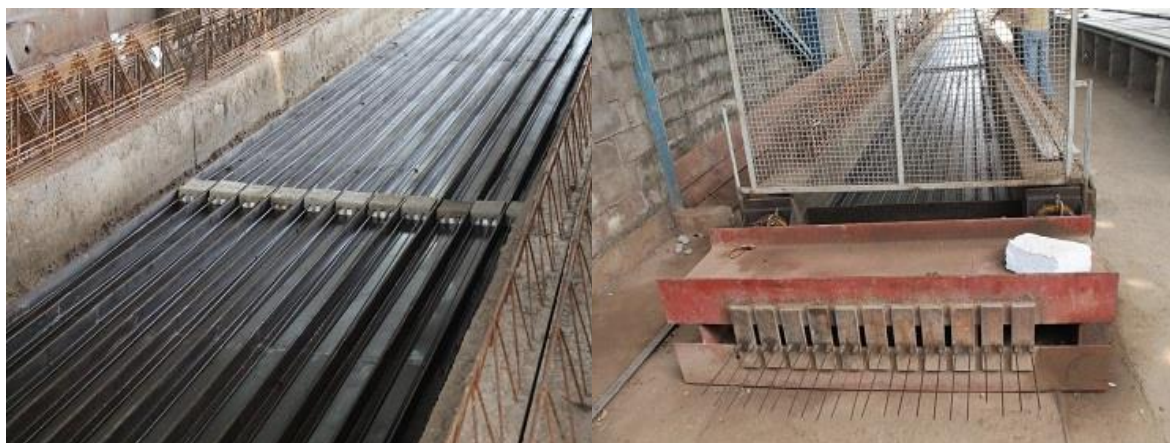
Segundo Albuquerque et al (2005) e Merlin et al (2005), a vigota treliçada protendida é simples de ser produzida pois dispensa o uso de extrusora e ainda permite a inclusão de armadura passiva no seu processo de fabricação.

Segundo Albuquerque et al (2005) o tensionamento dos fios é feito numa pista de protensão e, em seguida, as treliçadas são posicionadas para concretagem. O sistema tem operação rápida, simples, com baixo custo e fácil adaptação aos diversos tamanhos de vãos. Após o concreto atingir a resistência desejada, os fios são liberados e o elemento está pronto para o uso (Figura 5).

Como vantagens para as vigotas treliçadas protendidas nas lajes podem ser citadas:

- Redução do número de escoramentos das lajes formada apenas por treliças simples;
- Apresentam melhores condições de atender o estado limite de deformação excessiva devido a protensão;
- O processo de construção do elemento pré-moldado protendido é mais simples que o processo das lajes alveolares protendidas;
- Logo após o processo de construção do elemento, já se observa uma contra flecha que surge devido à protensão;
- Redução no peso individual dos elementos quando comparados com as vigotas protendidas.

**Figura 5:** Pista de protensão com detalhe da cabeceira ativa



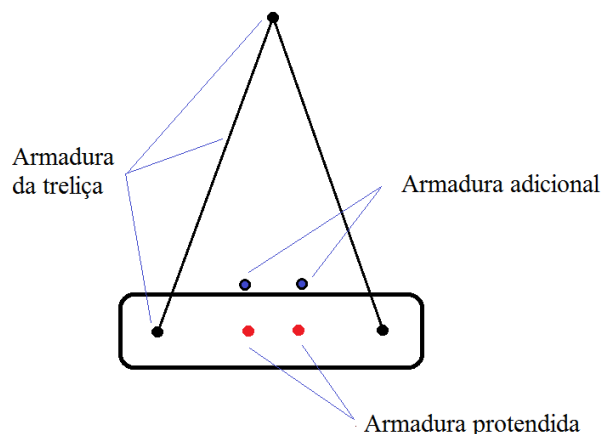
**Fonte:** Autor (2016)

Além disso, as vigotas treliçadas protendidas ainda apresentam vantagens como a redução das tensões de tração provocadas pela flexão e pelos esforços cortantes, controle mais eficiente da fissuração, sendo que em alguns casos consegue-se até eliminá-la, redução das quantidades de concreto e de aço devido ao uso de materiais de maior resistência, capacidade de vencer vãos maiores, redução da fissuração durante o transporte das peças, entre outras. Ilustra-se na Figura 6 o esquema desse elemento.

Avilla Júnior (2009) ressalta que a aplicação de lajes com vigotas treliçadas tem sido uma solução muito utilizada em praticamente todo país. Porém, o uso de vigotas treliçadas protendidas ainda é restrito e possui poucas referências técnicas sobre tais elementos. Até o

momento, há alguns exemplos de aplicação dessa técnica em construções usuais na cidade de Fortaleza e na região do Triângulo Mineiro.

**Figura 6:** Esquema de armação da vigota treliçada protendida



Fonte: Autor (2016)

## 2.2 Pesquisas desenvolvidas sobre lajes nervuradas

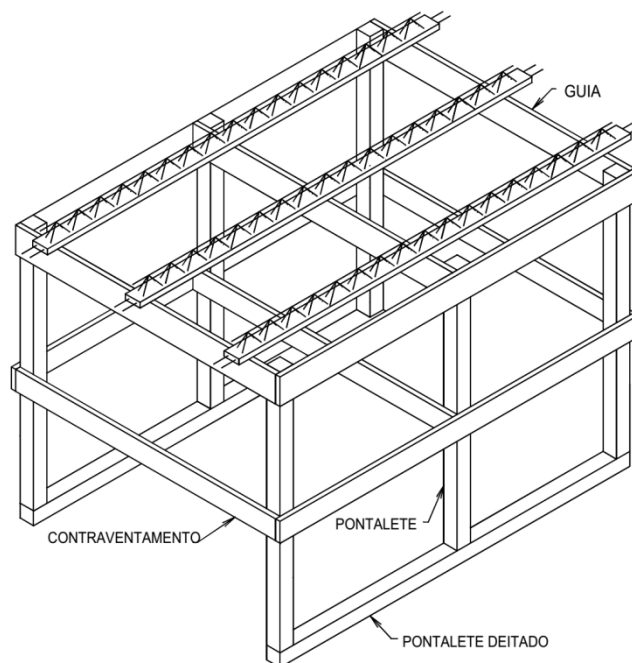
Muitos foram os pesquisadores que contribuíram de forma significativa para a análise e evolução da aplicação de lajes nervuradas formadas por elementos pré-moldados. Apresenta-se, a seguir, os resultados de algumas pesquisas que se destacaram no projeto e execução de lajes formadas por vigotas treliçadas, bem como as valiosas contribuições científicas.

Bocchi Júnior (1995) disserta sobre lajes nervuradas de concreto armado com interesse em apresentar as particularidades para obter os esforços necessários para o dimensionamento, e também os detalhes para uma boa execução. Para isso são comparadas analiticamente lajes com nervuras pré-fabricadas com as moldadas no local. Para alguns casos analisados o autor conclui que o custo na solução para lajes com nervuras pré-moldadas é inferior às lajes maciças. Também mostrou que é, na maioria dos casos, inviável considerar o engastamento de lajes nervuradas junto aos apoios devido ao surgimento de tensões elevadas na região em que há uma reduzida área de concreto. Indica ainda que, as lajes nervuradas devem ser modeladas como grelhas a fim de se obter os melhores resultados tanto para as solicitações quanto para os deslocamentos.

Gaspar (1997) aborda a possibilidade de redução de escoramento, eliminação de fôrmas, diminuição nos esforços solicitantes para as vigas, pilares e fundação, observa que o

escoramento adequado é um dos aspectos que garantem a qualidade e o desempenho estrutural das lajes. O escoramento necessário às lajes formadas por elementos pré-fabricados deve ser composto por guias, pontaletes e guias de contraventamento como está ilustrado na Figura 7.

**Figura 7:** Elementos da "estrutura de apoio" de lajes nervuradas



**Fonte:** Gaspar (1997)

De acordo com Gaspar (1997), as linhas de escoras devem ser feitas com tábuas de 25 a 30 cm colocadas em espelho, fixadas em pontaletes contraventados nas duas direções e apoiados em sapatas de madeira ou em pontaletes deitados. Para o nivelamento ou aplicação de contra flecha das vigotas pré-moldadas utilizam-se pares de cunhas posicionadas entre os pontaletes e os calços.

Como conclusão de seu trabalho, Gaspar (1997) indica que: as lajes com vigotas pré-fabricadas com treliça de 8 cm de altura devem ser executadas com linhas de escora a cada 55 cm; quando as treliças possuírem altura de 12 cm, sugere que o limite de espaçamento entre as linhas de escora seja de 110 cm. Sobre os resultados dos seus experimentos, faz uma proposta de que, por simplificação, a carga crítica de instabilidade (flambagem) na barra superior da treliça, seja calculada pela fórmula de Euler como barra biarticulada e que se adote os valores de 1,00 e 0,85 multiplicado pelo comprimento da barra, para que se obtenham os comprimentos de flambagem para as treliças com altura de 8 cm e 12 cm,

respectivamente. Para demais alturas, observa que seriam necessários novos experimentos.

Droppa Junior (1999) desenvolveu um trabalho com enfoque na análise estrutural de lajes formadas por vigotas treliçadas. Para a análise foi utilizado o modelo de grelha e considerada a não-linearidade do concreto armado por meio da relação momento x curvatura e carregamento incremental. O autor concluiu que o modelo de grelha é adequado para a análise de lajes nervuradas pré-moldadas e que a redistribuição de momentos fletores nas lajes contínuas é relativamente pequena.

Almeida (1998) aborda o procedimento para verificação do dimensionamento de lajes mistas protendidas, compostas por vigotas pré-moldadas com seção transversal em forma de  $\pi$  invertido. Para a fase construtiva considera três situações de escoramento, são elas: sem estais, com um ou com dois estais. Desenvolve também uma rotina para a verificação automatizada desse tipo de laje. Por fim, discorre que apesar de algumas seções protendidas consumirem mais concreto do que seções sem protensão, considerando mesmos vãos e sobrecargas, tem-se o ganho com relação à resistência dos elementos. Logo, consegue-se utilizar uma laje mais esbelta, com economia no escoramento, redução na quantidade total de elementos e consequente redução no preço total da laje.

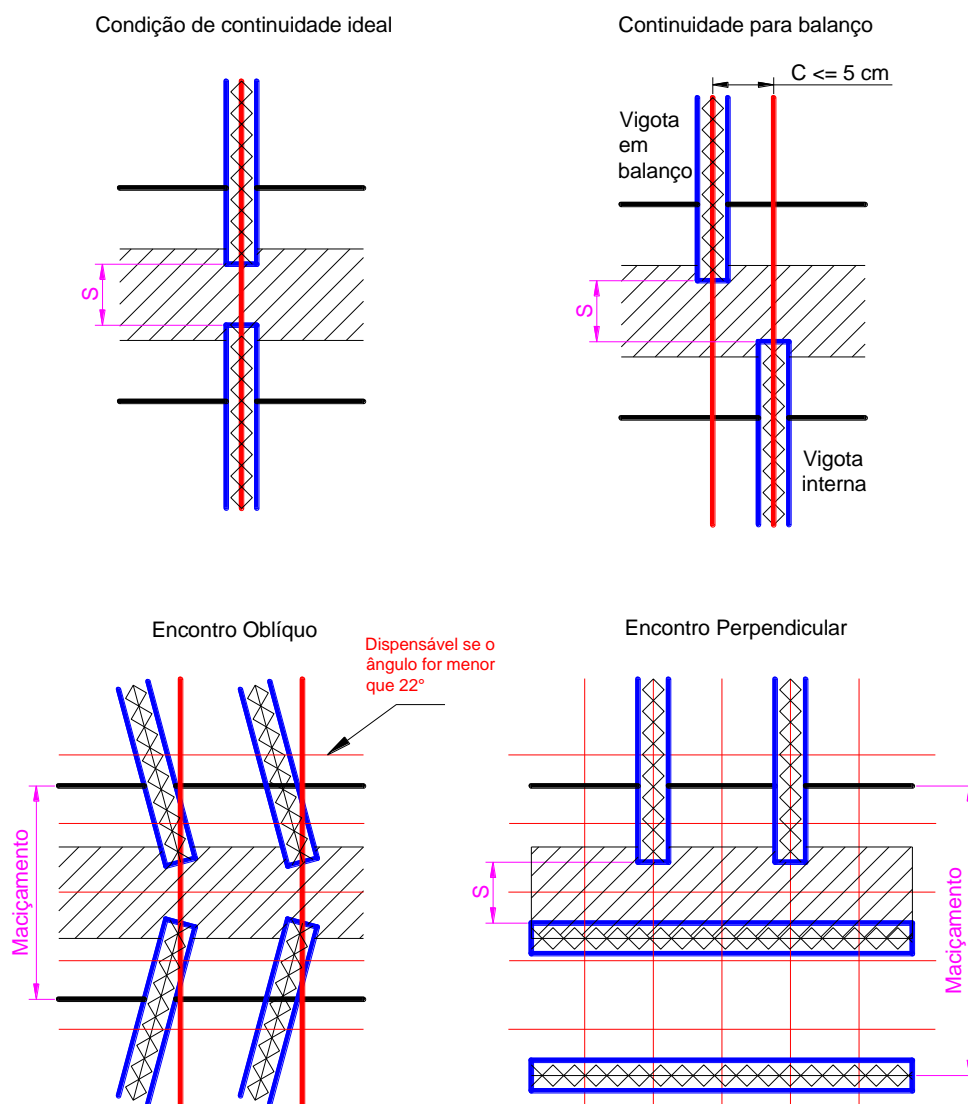
Magalhães (2001) na sua dissertação de mestrado por meio de análises teórica e experimental, fala sobre a continuidade estrutural de lajes pré-moldadas estudando o valor dos momentos fletores negativos nos apoios destas. Na comparação entre os resultados do modelo teórico com os resultados obtidos em ensaios experimentais de faixas de lajes contínuas, dimensionadas com diferentes graus de redistribuição dos momentos fletores negativos, pode ser destacado que: o modelo teórico representa bem os resultados experimentais; com alta taxa de armadura não ocorre redistribuição de esforços; por mais que tenham sido obtidos resultados entre 15% e 40% para o grau de redistribuição dos momentos fletores negativos, para o dimensionamento de lajes com nervuras pré-moldadas, as normas brasileiras e espanholas limitam à consideração máxima de 15% para essa redistribuição; independentemente das taxas de armadura negativa as flechas praticamente não mudam.

Merlin (2002) fez a avaliação dos momentos fletores negativos junto aos apoios e do comportamento de lajes formadas com vigotas protendidas e observa que utilização da continuidade favorece a redução dos deslocamentos. Destaca ainda que a principal vantagem da utilização das lajes formadas por elementos pré-moldados, do tipo vigota protendida, é a

economia relacionada ao escoramento. Como exemplo, cita que para um vão de 4 m é necessária apenas uma linha de escora durante a fase de concretagem. Por fim, mostra que, em função da grande variabilidade dos resultados obtidos, não é possível obter um valor que atenda todas as situações.

A continuidade e existência de momentos fletores junto aos apoios, estudados por Magalhães (2001) e Merlin (2002), surgem em decorrência do posicionamento das vigotas pré-moldadas em lajes próximas. Para ilustrar os possíveis arranjos de lajes adjacentes, na Figura 8 tem-se ilustradas algumas disposições presentes na norma espanhola para projetos e execução de elementos pré-moldados de concreto armado, EFHE (2002).

**Figura 8:** Situações possíveis para o encontro de lajes



**Fonte:** Adaptação de EFHE (2002)

Em todas as situações em que há condições para existir a continuidade de lajes, como ilustra a Figura 8, segundo a EFHE (2002), se faz necessário prever uma região de maciçamento. Assim, o sistema que utiliza nervuras compostas de vigotas treliçadas deve possuir uma região que tenha rigidez para suportar esforços de compressão na parte inferior, como é mostrado na Figura 9.

**Figura 9:** Continuidade de lajes em apoios internos



**Fonte:** Avilla Junior (2009)

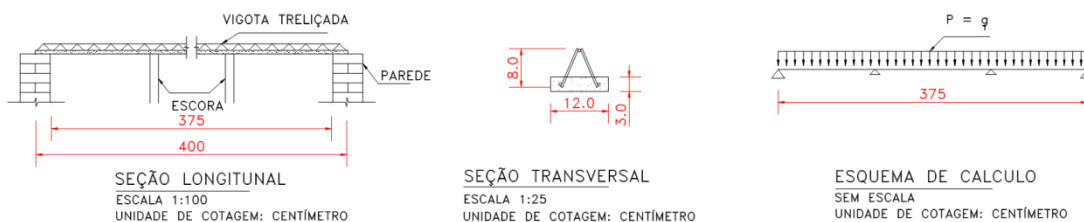
Forni (2005) analisa os custos envolvidos desde o processo de produção de vigotas treliçadas, o transporte, a montagem até a concretagem de lajes formadas por elementos pré-moldados. A função custo obtida foi analisada em alguns exemplos de cálculo de lajes uni e bidirecionais com várias dimensões. O custo de algumas lajes foi ainda otimizado pelo método de minimização de gradiente reduzido genérico (GRG) para lajes com material de enchimento de lajota cerâmica e EPS. As variáveis de projeto consideradas para a minimização da função custo foram a altura e a resistência da capa de concreto. Nas lajes com EPS, o intereixo também foi uma variável otimizada. Foi observada uma economia em torno de 4% no custo final das lajes com enchimento cerâmico e próximo a 8% para enchimento de EPS. Nas lajes com EPS, obteve-se maiores valores para o intereixo, o que resulta em menor volume de concreto e menor número de vigotas treliçadas. Foi considerada a variação de mais ou menos 40% no custo do concreto e da armadura, a fim de avaliar o efeito destes insumos no custo final. Nas lajes com enchimento cerâmico, o aumento e a diminuição no custo final das lajes ficaram em torno de 12%. Nas lajes com EPS, em virtude do intereixo ser uma variável do processo de otimização, os custos finais alteraram próximo a 8% para variações no preço do concreto e de 6 a 11% para variações no preço da armadura. Carvalho (2005) apresenta as situações que muitos dos elementos pré-moldados, do tipo



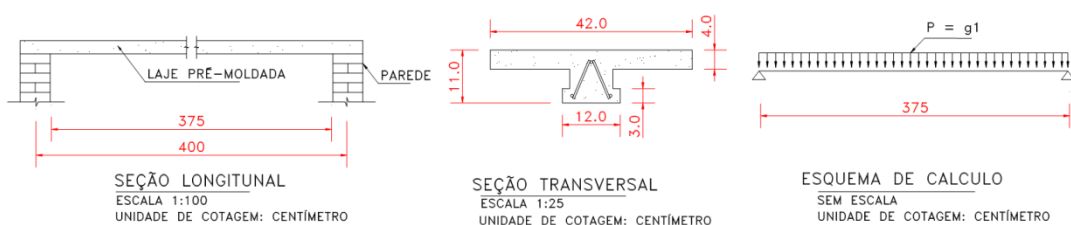
vigotas para lajes, estarão sujeitos até que estejam definitivamente em sua situação final de trabalho. Vários são os arranjos estáticos possíveis, portanto, a análise das situações mostradas na Figura 10 devem ser realizadas de modo a serem identificadas as condições críticas para o elemento estrutural.

**Figura 10:** Configurações a serem adotadas para as situações de montagem

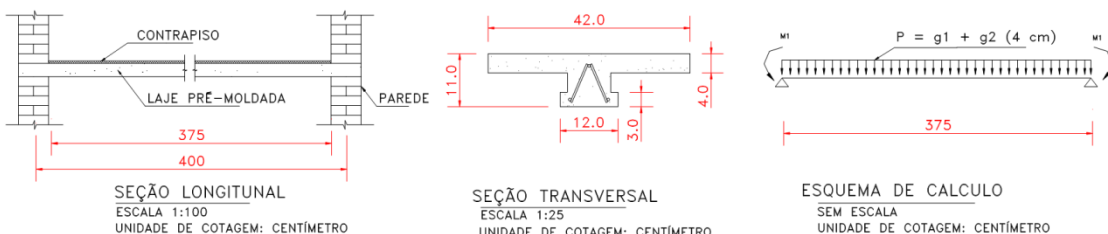
1ª SITUAÇÃO: CONCRETAGEM



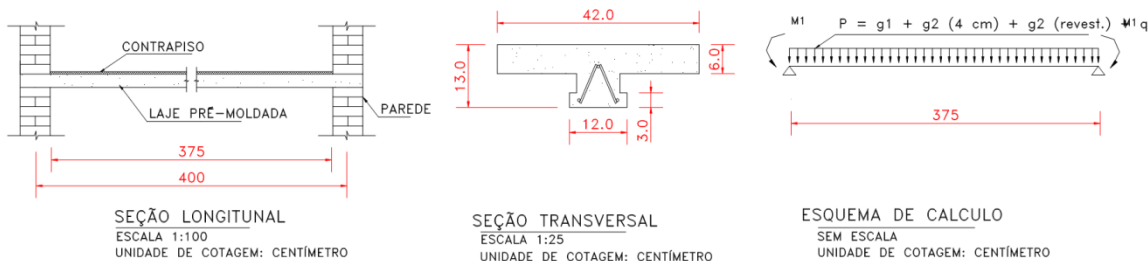
2ª SITUAÇÃO: RETIRADA DO ESCORAMENTO



3ª SITUAÇÃO: APÓS A EXECUÇÃO DA PAREDE E DURANTE A EXECUÇÃO DO CONTRAPISO



4ª SITUAÇÃO: APÓS A EXECUÇÃO DA PAREDE E DO CONTRAPISO (CONSIDERANDO 2 CM A MAIS DE CONTRAPISO)



Fonte: Carvalho (2005)

Nas etapas construtivas mostradas por Carvalho (2005) a primeira situação considera a fase de concretagem, até esse momento tem-se os esforços devido ao peso-próprio das vigotas e elementos de enchimento, além disso, deve ser previsto que no ato da concretagem há

operários se movimentando sobre a laje. Nessa etapa as nervuras estão apoiadas nas paredes e nas linhas de escoras. Caso seja necessário, é possível gerar uma contra flecha na estrutura e, nessa situação, os esforços introduzidos nas treliças que geralmente são desconsiderados devido à baixa intensidade e as sapatas das vigotas estarem trabalhando em regime elástico, logo, quando retiradas as escoras, os efeitos destas ações desaparecerão. Especialmente para o caso das vigotas treliçadas protendidas, há de se ter um cuidado especial com a protensão por conta da pequena seção de concreto que deverá equilibrar a solicitação oriunda da protensão e a influência das escoras.

A segunda situação é considerada após a retirada do escoramento, nesse momento, as ações são oriundas do peso próprio das nervuras, elementos de enchimento e o concreto lançado. Nessa etapa os apoios são formados pelas paredes e o valor do vão a ser adotado, depois da retirada do escoramento, depende das condições existentes junto aos apoios (por exemplo se será construída alguma parede sobre esses apoios). Destaca-se que nesse momento a laje já possui a seção prevista em projeto.

A terceira situação é definida pela execução das paredes laterais (caso haja), que impedem a livre rotação da laje nos apoios, e também pela a execução do contra piso. Ainda que a camada de contra piso tenha resistência inferior à do concreto, há um ganho na inércia contribuindo para minimizar as deformações. Dependendo da armadura existente, podem ocorrer momentos nas extremidades do elemento.

Por fim, tem-se a quarta situação, nesse momento a laje fica sujeita a todos carregamentos permanentes previstos e às solicitações decorrentes da utilização.

Albuquerque et al (2005) apresenta uma comparação entre a vigotas treliçadas sem protensão, vigotas protendidas do tipo volterranas e vigotas treliças com fios protendidos. Na conclusão do estudo é destacado que as vigotas treliçadas, quando há um aumento de solicitação, permitem serem complementadas com armaduras passivas, enquanto que nas vigotas com seção completa se faz necessário o aumento da protensão. O autor observa ainda que a treliça assegura uma melhor transferência de esforços entre o concreto pré-moldado e o moldado in loco.

Flório (2004) organiza uma metodologia de projeto e execução de lajes com vigotas pré-moldadas com nervuras unidirecionais. Apresenta ainda informações sobre a escolha do concreto com resistência adequada, ensaios necessários no canteiro, distância mínima entre escoras e utilização de contra flechas. Para sua pesquisa foram desenvolvidas uma série de

experimentos relacionados à deformação de lajes pré-moldas nos quais foram considerados os fenômenos de fluência e fissuração do concreto. Como conclusões de seu trabalho foram destacadas que: as lajes unidirecionais normalmente trabalham no estágio II; a flecha de lajes simplesmente apoiada é muito grande; quando há paredes colocadas transversalmente às nervuras da laje, o projetista passa a determinar a altura da nervura e a treliça a ser empregada devido a solicitações cisalhantes e não mais devido aos escoramentos e esforços de flexão.

Spohr (2008) estudou de forma comparativa sistemas estruturais convencionais e estruturas de lajes nervuradas. Seu trabalho teve como foco a análise dos custos que compõem cada um dos sistemas levando-se em conta que muitos são os sistemas estruturais disponíveis no mercado, contudo, devido às características arquitetônicas particulares, não se tem um modelo padrão aplicável a todas os empreendimentos. Da comparação dos custos totais da obra obtidos por meio da composição de preço, o autor conclui que o sistema estrutural que apresenta menor custo final é o de lajes lisas nervuradas, com uma redução de 18,1% em relação ao sistema convencional de lajes maciças. Ressalta ainda que essa alternativa também flexibiliza o layout dos pavimentos, devido a ausência de vigas altas no interior dos mesmos.

Avilla Junior (2009) apresenta o resultado de uma pesquisa realizada junto aos projetistas do país, para caracterizar que tipo de laje, culturalmente, predomina como solução estrutural. Por fim, mostra um estudo de caso real como comparativo de custos entre o sistema de lajes lisas nervuradas moldadas no local e nervuradas pré-fabricadas com vigotas treliçadas. O autor conclui que há uma redução de custos de 21,40% a favor do sistema com lajes lisas nervuradas pré-fabricadas com vigotas treliçadas.

Cunha (2012) analisa as lajes nervuradas bidimensionais considerando modelos simplificados. Em seu trabalho fez a análise do comportamento de lajes nervuradas como lajes maciças, na qual se considera a rigidez à flexão equivalente. Para tal, foram realizados os ensaios de duas lajes em tamanho real, uma nervurada e outra maciça com rigidez a flexão equivalente. Como conclusões, destaca que uma vez garantidas as condições de equilíbrio e ductilidade da estrutura, os processos simplificados são adequados ao estudo de lajes nervuradas bidirecionais; na fase elástica, há uma aproximação dos deslocamentos reais com os deslocamentos previstos com uso da tabela de Bares; o momento fletor de fissuração real é maior do que o previsto analiticamente; os resultados obtidos mostram que são válidas as simplificações adotadas para suas análises.

Sartorti e Pinheiro (2013) analisam a viabilidade técnica de lajes treliçadas com vigotas pré-moldadas de 6 cm de altura, aplicável em lajes de pequenos vãos (tipicamente adotados em obras de interesse social). O estudo foi motivado pelo fato de que se as lajes possuírem espessuras maiores do que as tecnicamente necessárias, acarretam em custo adicional indesejado e também pelo fato de que ABNT NBR 14860:2002 especificava que a menor treliça eletrossoldada possui altura de 8 cm. Para o desenvolvimento do trabalho foi realizado o dimensionamento de uma laje treliçada unidirecional e feitas todas as verificações últimas e de serviço. Como resultado do trabalho, afirma que uma treliça com altura de 6 cm, associada a lajotas cerâmicas também com 6 cm de altura, não apresenta problemas construtivos nem estruturais, com respeito à ABNT NBR 6118:2014.

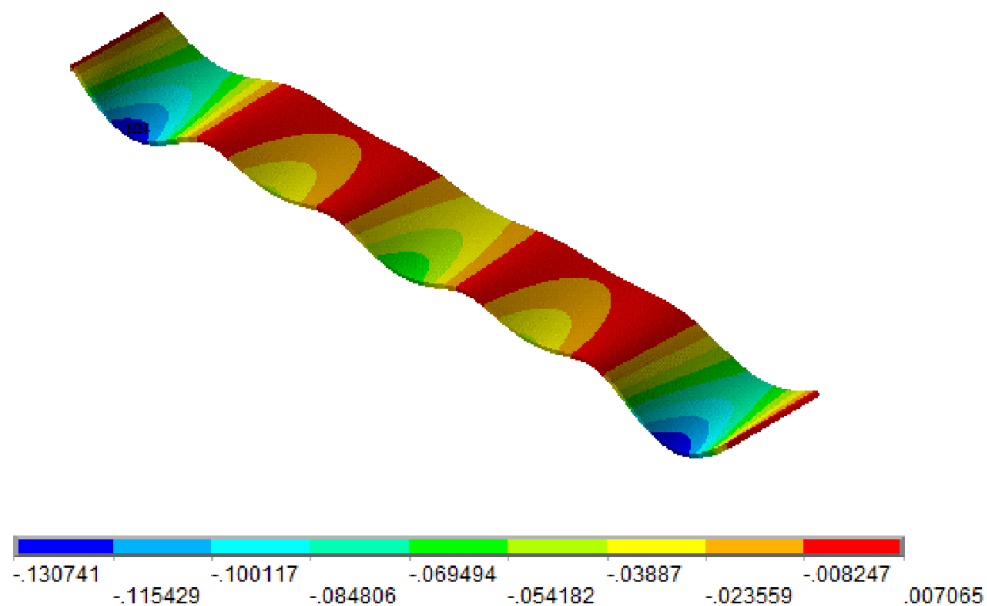
Lima et al. (2013) realizaram experimentos em vigotas treliçadas protendidas a fim de obterem parâmetros para o escoramento. Os ensaios foram realizados para cada vigota isoladamente, o que simula as situações ocorridas durante as fases de montagem e concretagem das lajes. Para todas as vigotas ensaiadas é constatado um comportamento praticamente linear até o início da flambagem do banzo superior da treliça eletrossoldada, em seguida desenvolvem-se grandes deslocamentos e aumento de fissuração na sapata de concreto. Foi observado também que as vigotas treliçadas protendidas com 2 fios de protensão possuem comportamento mais uniforme com relação à rigidez na fase elástica, tal fato é decorrente da simetria geométrica durante a fase de fabricação da vigota. Por fim, foi afirmado que a ruptura das vigotas treliçadas protendidas é governada pela flambagem do banzo superior da treliça eletrossoldada.

Valente e Gesualdo (2014) apresentam um estudo sobre os aspectos que não são suficientemente claros, na ABNT NBR 15696:2009, para fôrmas e escoramentos em estruturas de concreto. No desenvolvimento do trabalho foram realizadas simulações numéricas por meio do método dos elementos finitos, modeladas no Software ANSYS®, as quais permitiram a avaliação dos modelos de cálculo de fôrmas enrijecidas por peças de madeira maciça. Também pode ser estudada a continuidade da chapa de compensado, com interesse em verificar a eficiência de sistemas diferentes do procedimento de cálculo tradicional. Por meio da Figura 11 é possível perceber o comportamento do que diz respeito ao deslocamento da placa de compensado.

Valente e Gesualdo (2014) observaram que os deslocamentos máximos ocorrem nas extremidades das placas e que os vãos intermediários apresentam deslocamentos da ordem

de 50% do deslocamento máximo e com valores próximos entre si.

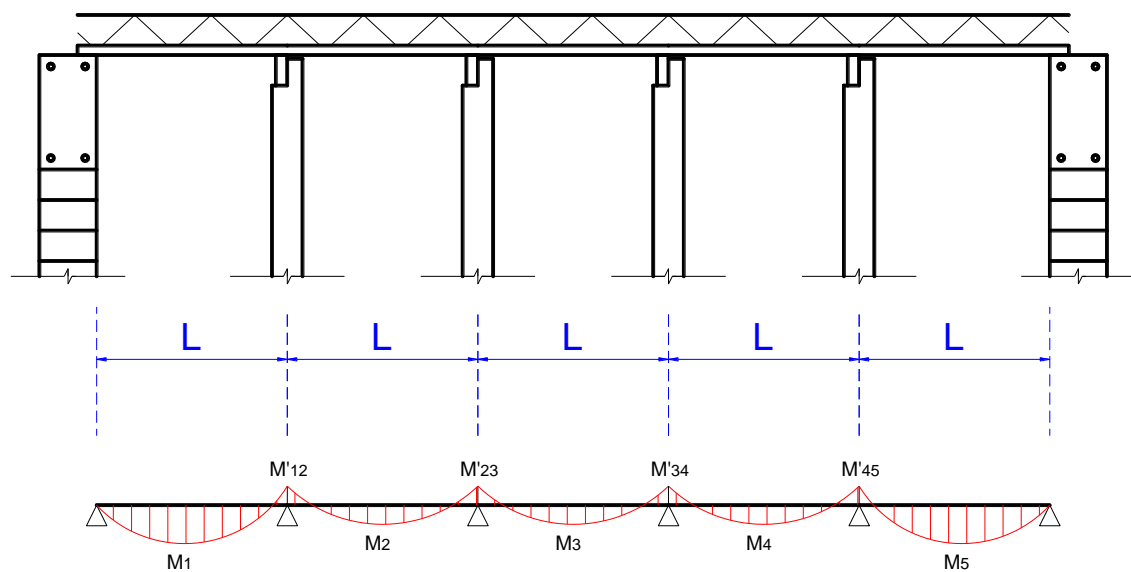
**Figura 11:** Deslocamento de placa considerando apoios equidistantes



Fonte: Valente e Gesualdo (2014)

O que foi exposto na Figura 11 é interessante para as condições de escoramento aplicados às vigotas treliçadas pois o esquema estático (Figura 12) é muito semelhante ao que se tem durante a montagem e concretagem das lajes nervuradas.

**Figura 12:** Esquema de apoio e diagrama de momento para vigotas escoradas



Fonte: Autor (2016)

Para todas as fases em que o concreto moldado *in loco* ainda não tenha adquirido resistência

e se torne autoportante, as vigotas são apenas elementos isolados e apoiados nos escoramentos e nas bordas. Junto às extremidades não existe a continuidade, assim, também não há a existência de um momento negativo que contribuiria para a redução do deslocamento nessa região.

Quando se utiliza vigotas pré-moldadas em lajes nervuradas, esses elementos se tornam a “estrutura de apoio” que recebe o concreto fresco. Assim, o dimensionamento do escoramento inicia-se com cálculo do espaçamento entre escoras. A distância entre escoras pode ser estimada tomando como critério limitante a flecha máxima para o estado limite de utilização, estabelecida pela ABNT NBR 15696:2009. Posteriormente essa estimativa inicial é verificada pela resistência no estado limite último que define se essa distância é ou não suficiente para as linhas de escoras.

O deslocamento e a tensão máxima das vigotas, quando estão escoradas, são frequentemente obtidos de maneira simplificada, assumindo um modelo estrutural linear que considera uma viga biapoiada a cada vão. Dessa forma, definindo-se o vão da extremidade como referência, obtém-se uma distância máxima para as escoras que pode ser seguramente aplicada para as demais regiões.

Como visto até aqui, vários são os detalhes que constituem e influenciam a decisão de um projetista no que diz respeito à adoção de lajes nervuradas. O trabalho apresentado nesta dissertação, torna-se uma indicação para as opções de lajes unidirecionais com nervuras formadas por vigotas treliçadas sem e com protensão. Também, surge como uma proposta de otimização que, além de gerar cenários ideais para respeitar as verificações do dimensionamento e minimização do peso total, poderia ser aplicada a outros objetivos que forem percebidas como convenientes.

# CAPÍTULO 3

## DIMENSIONAMENTO

### 3.1 Considerações sobre o dimensionamento

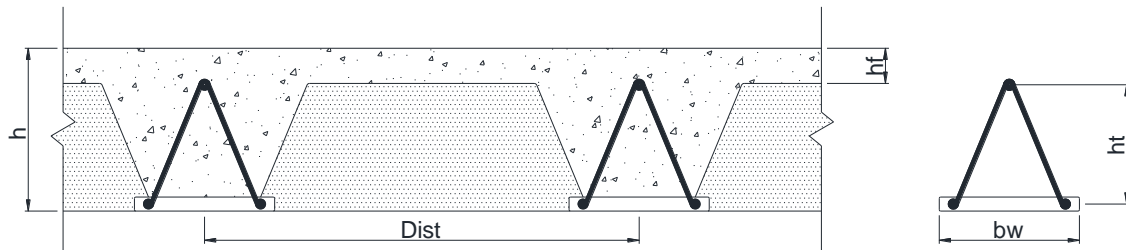
A norma ABNT NBR 14859:2016 está dividida em três partes e estabelece os critérios para lajes pré-fabricadas de concreto. A parte 1 especifica os requisitos para os elementos pré-fabricados estruturais quanto à fabricação, recebimento e utilização dos componentes empregados na construção de lajes, para qualquer tipo de edificação. A parte 2 especifica os requisitos para recebimento e utilização dos elementos inertes a serem empregados na execução de lajes pré-fabricadas nervuradas, para qualquer tipo de edificação. Por fim, a parte 3 especifica os requisitos para fabricação, ensaio, fornecimento e recebimento de armaduras treliçadas eletrossoldadas para lajes pré-fabricadas de concreto.

Sobre o dimensionamento, os parâmetros a serem definidos (Figura 13) para as lajes são:

- Vãos a serem vencidos;
- Definição das sobrecargas recomendadas para o tipo de utilização;
- Existência de cargas lineares ou pontuais atuantes na laje;
- Altura total da laje ( $h$ );
- Espessura da capa de concreto ( $h_f$ );
- Resistência característica de compressão do concreto;
- Intereixo ou distância entre as nervuras ( $Dist$ );

- Largura da base das nervuras ( $b_w$ );
- Tipo de material de enchimento;
- Altura e armadura da treliça ou vigotas ( $h_t$ ).

**Figura 13:** Esquema de laje para vigotas treliçadas



**Fonte:** Autor (2016)

Com relação ao dimensionamento de lajes com vigotas protendidas ou treliçadas protendidas, algumas diretrizes devem ser seguidas no cálculo, são elas:

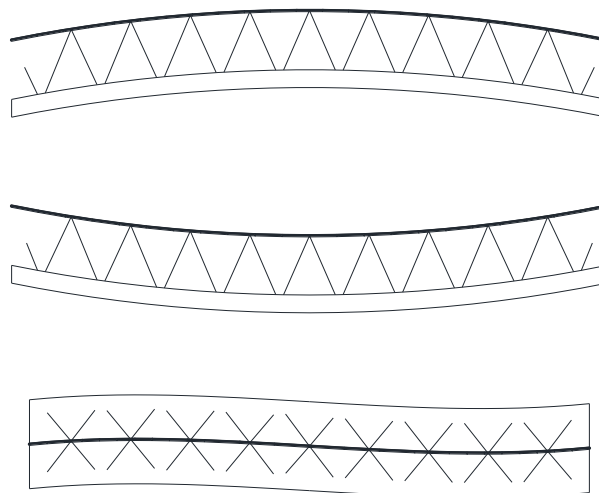
- Verificação da vigota isolada – verificação do elemento após a transferência da força de protensão;
- Verificação da vigota na fase de construção – deve ser verificada a necessidade ou não de escoramento;
- Estado limite de fissuração – deve ser projetada de tal forma que previna os efeitos da fissuração;
- Estado limite de deformação – deve ser projetado levando em consideração os efeitos instantâneos e de retração e fluência;
- Estado limite último para solicitações tangenciais – verificação de resistência à força cortante de elementos sem armadura transversal e verificação do cisalhamento da interface entre os dois concretos;
- Estado limite último para solicitações normais – verificação da resistência para as solicitações normais;
- Deve ser colocada também, uma armadura de distribuição nas vigotas treliçadas.

Logo após a retirada do elemento protendido, deve-se verificar se não há problemas de deformação excessiva advindos dos esforços da protensão. Os desvios mais comuns na



geometria do elemento após a retirada da pista de protensão são mostrados na Figura 14.

**Figura 14:** Possíveis formas de deslocamentos indesejáveis após a fabricação do elemento



**Fonte:** Autor (2016)

### 3.2 Esforços solicitantes

Os dimensionamentos de todos os elementos estruturais de uma edificação devem atender às verificações dos estados limites últimos e de serviço. Ao ser aplicado esse conceito para o sistema de lajes nervuradas com vigotas pré-moldadas treliçadas, é necessário conhecer qual a capacidade resistente das seções sob flexão, bem como a deformação máxima associada à sua utilização.

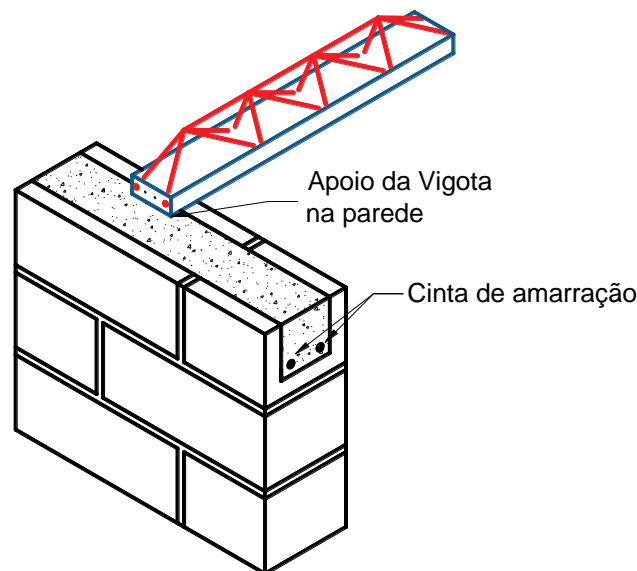
Carvalho e Figueiredo Filho (2009) mostram que o dimensionamento de estruturas de concreto armado pode ser classificado em dois grupos: os métodos clássicos (ou tensões admissíveis) em que as solicitações máximas de serviço produzirão tensões máximas e se considera o comportamento dos materiais completamente elástico, nesse caso o dimensionamento é feito ao limitar o valor máximo das tensões a uma fração das resistências dos materiais – contudo, esse método está em desuso; e o método dos estados limites que consiste na majoração das solicitações e na redução da resistência dos materiais, com os dados obtidos por métodos estatísticos. Por conta das muitas restrições existentes no método clássico, e das verificações de segurança estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014, o método dos estados limites tem sido o mais aplicado para o dimensionamento e verificações dos elementos estruturais.

De acordo com a ABNT NBR 8681:2003, as solicitações as quais os elementos estruturais estão sujeitos são as influências que produzem tensões ou deformações nesses elementos. As grandezas que provocam essa situação são denominadas de ações. Também, na ABNT NBR 6118:2014 as ações são classificadas como permanentes, variáveis e excepcionais. Permanentes são as que os valores são praticamente inalterados durante todo tempo em que a estrutura existir, variáveis são constituídas por situações que provocam esforços por um período de tempo e grandeza variável e, excepcionais são as condições de carregamento cujo controle dos efeitos não pode ser controlado por outros meios e nem definidos suas intensidades.

De maneira geral, para o caso de estruturas usuais de concreto armado, Carvalho e Figueiredo Filho (2009) resumem as ações em: permanentes, constituídas pelo peso próprio, retração, protensão, fluência e recalques; e em variáveis, estabelecidas pela acidental vertical, vento e temperatura.

Devido ao fato das vigotas treliçadas serem dispostas em uma única direção e simplesmente apoiadas nas extremidades como pode ser observado na Figura 15, as vigas ou paredes em que as nervuras se apoiam receberão a maior parte da solicitação.

**Figura 15:** Esquema do apoio da vigota junto à borda



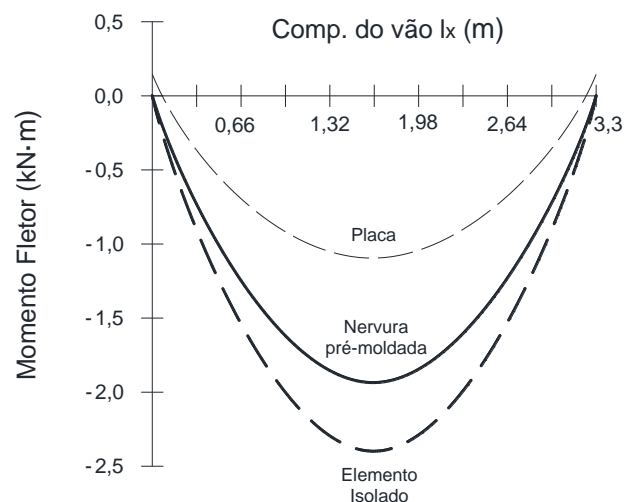
**Fonte:** Autor (2016)

Carvalho e Figueiredo Filho (2009) desenvolveram um estudo que teve como foco verificar a rigidez (mesmo pequena) que a capa de concreto atribui ao pavimento na outra direção.

Alguns métodos foram estabelecidos para pudessem ser conhecidas as parcelas de carregamento que as atuariam efetivamente, não apenas nas vigas, mas também em cada nervura que compõe essas lajes. Com o objetivo de dimensionar a armadura longitudinal das vigotas, neste trabalho focou-se os resultados para os momentos fletores.

Para definir o melhor modelo de se calcular o momento fletor, no meio do vão de uma laje, Carvalho e Figueiredo Filho (2009) fazem uma análise na qual consideraram o comportamento definido por três modelos: o primeiro como elementos independentes (isolados); o segundo como laje pré-moldada e com capa de concreto; e por fim consideraram a laje como maciça. O resultado dessas condições de análise pode ser visto na Figura 16.

**Figura 16:** Diagrama do momento fletor no vão central da menor direção



**Fonte:** Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2009)

Para o dimensionamento ser realizado a favor da segurança, como pode ser observado no diagrama da Figura 8, o ideal é que seja realizado o dimensionamento com a hipótese de elemento isolado. Em termos de cálculo esse modelo é mais simples e para a solicitação máxima característica de momento fletor tem-se a Equação 1.

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{p \cdot l^2}{8} \quad \text{Equação 1}$$

Em que:

$p$  é o carregamento distribuído;

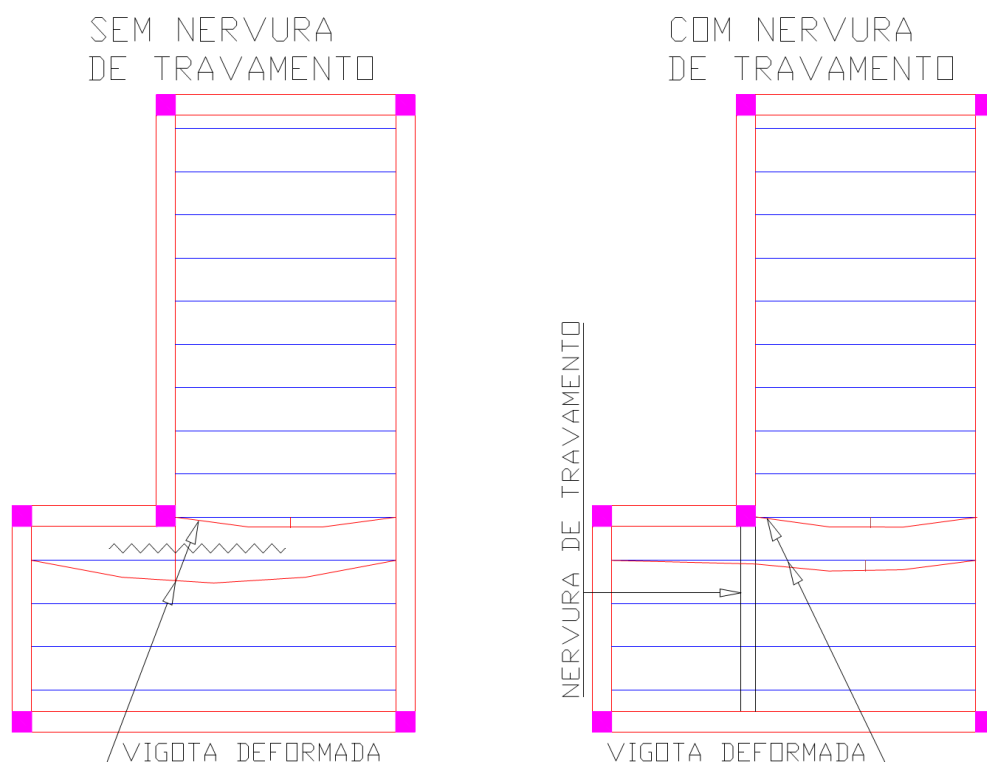
$l$  é o comprimento do vão considerado.

Contudo, a seguir serão apresentadas considerações que em observância às situações

específicas definidas para esse trabalho também são válidas. Devido aos comprimentos definidos para o dimensionamento, a ABNT NBR 14859-1:2002, faz a recomendação de que sejam inseridas nervuras de travamento. Tais nervuras são necessárias sempre que os vãos teóricos forem superiores à 4 m, ainda é exigido que sejam inseridas no mínimo duas nervuras quando o vão ultrapassar 6m.

Em vistorias realizadas por Avilla Junior (2009) a obras que adotaram lajes nervuradas com vigotas pré-fabricadas sem a utilização de nervura de travamento, como é facultado pela ABNT NBR 6118:2014, foram observadas a existência de fissuras paralelas às vigotas. Em análises patológicas foi constatada que o problema ocorria devido à falta de nervura transversal que promovesse a compatibilização dos deslocamentos, tal fato se tornava crítico principalmente quando a geometria apresentava alguma variação no “painel” da laje, de acordo como esquema apresentado na Figura 17.

**Figura 17:** Esquema da falha ocorrida por falta de nervuras transversais



Fonte: Avilla Junior (2009)

A fissura ilustrada na Figura 17 foi observada no revestimento do teto, na interface da vigota com elemento de enchimento.

Em geral, as nervuras de travamento são fáceis de serem executadas, basta que sejam espaçados os elementos de enchimento cerca de 10 cm e colocada uma fôrma, tábua ou algo do tipo, de maneira que o concreto moldado no local possa ser mantido até que endureça e consiga manter sua forma. Na Figura 18 apresenta-se o aspecto final desse tipo de nervura.

**Figura 18:** Nervuras de travamento



**Fonte:** Autor (2016)

Por conta da presença desses elementos de travamento seria adequado que se tivesse um modelo que representasse o possível efeito dessas nervuras. A seguir serão apresentados os modelos de analogia por grelha equivalente e o modelo de laje maciça unidirecional.

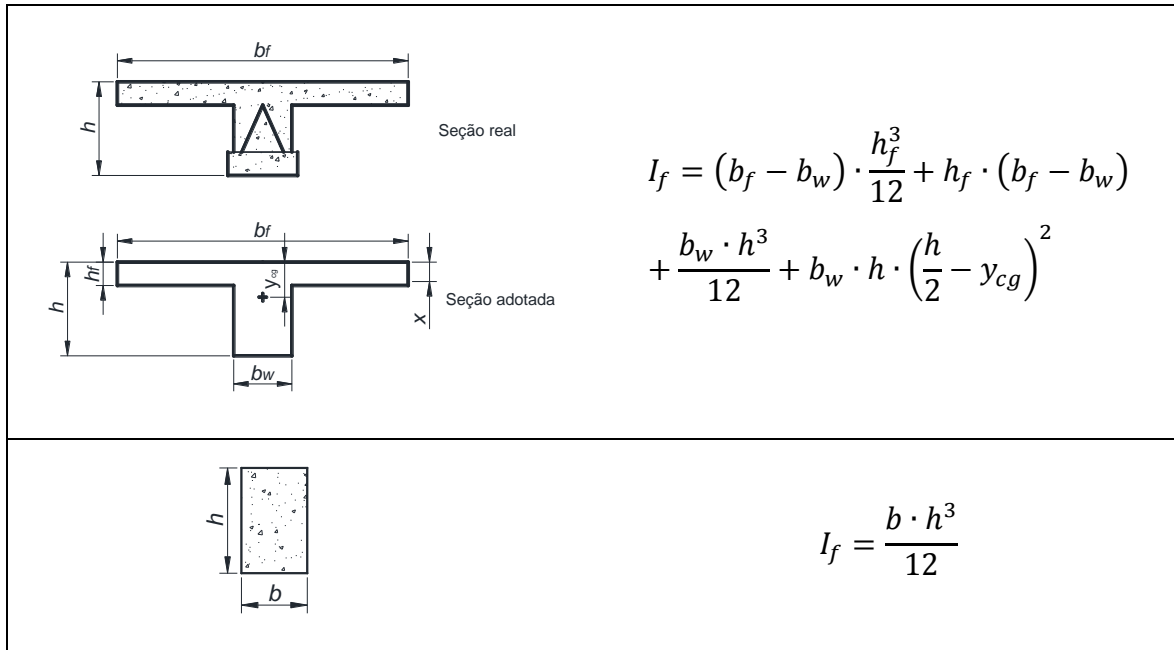
### **3.2.1 Analogia por grelhas equivalentes (simplificado)**

Uma possível forma para se obter os esforços para o dimensionamento das vigotas treliçadas e ainda se levar em conta a existência de nervuras transversais, pode ser conseguida pela utilização de elementos ortogonais de uma grelha. Nesse trabalho serão feitas algumas simplificações em virtude de o foco principal ser a análise das nervuras treliçadas pré-fabricadas da laje, a seguir são mostradas essas simplificações.

No processo de grelha equivalente aplicado às lajes com nervuras treliçadas pré-fabricadas, as vigotas longitudinais podem ser consideradas como vigas “T” na qual a capa de concreto da mesa contribui para a seção e as nervuras de travamento podem ser consideradas vigas de seção retangular, essa é uma simplificação que permite serem utilizados elementos do tipo barra para discretizar a estrutura. As propriedades geométricas referentes a esses elementos

podem ser melhor entendidas com auxílio da Figura 19.

**Figura 19:** Geometria e propriedade das seções



**Fonte:** Adaptado de Flório (2004)

A largura colaborante ( $b_f$ ) que contribui com a nervura para resistir aos esforços de compressão. Pode ser definida pela Equação 2.

$$b_f = b_w + 2 \cdot b_1 \quad \text{Equação 2}$$

Na qual:

$$b_2 = l_i - b_w \quad \text{Equação 3}$$

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,10 \cdot a = 0,10 \cdot l \\ 0,50 \cdot b_2 \end{cases} \quad \text{Equação 4}$$

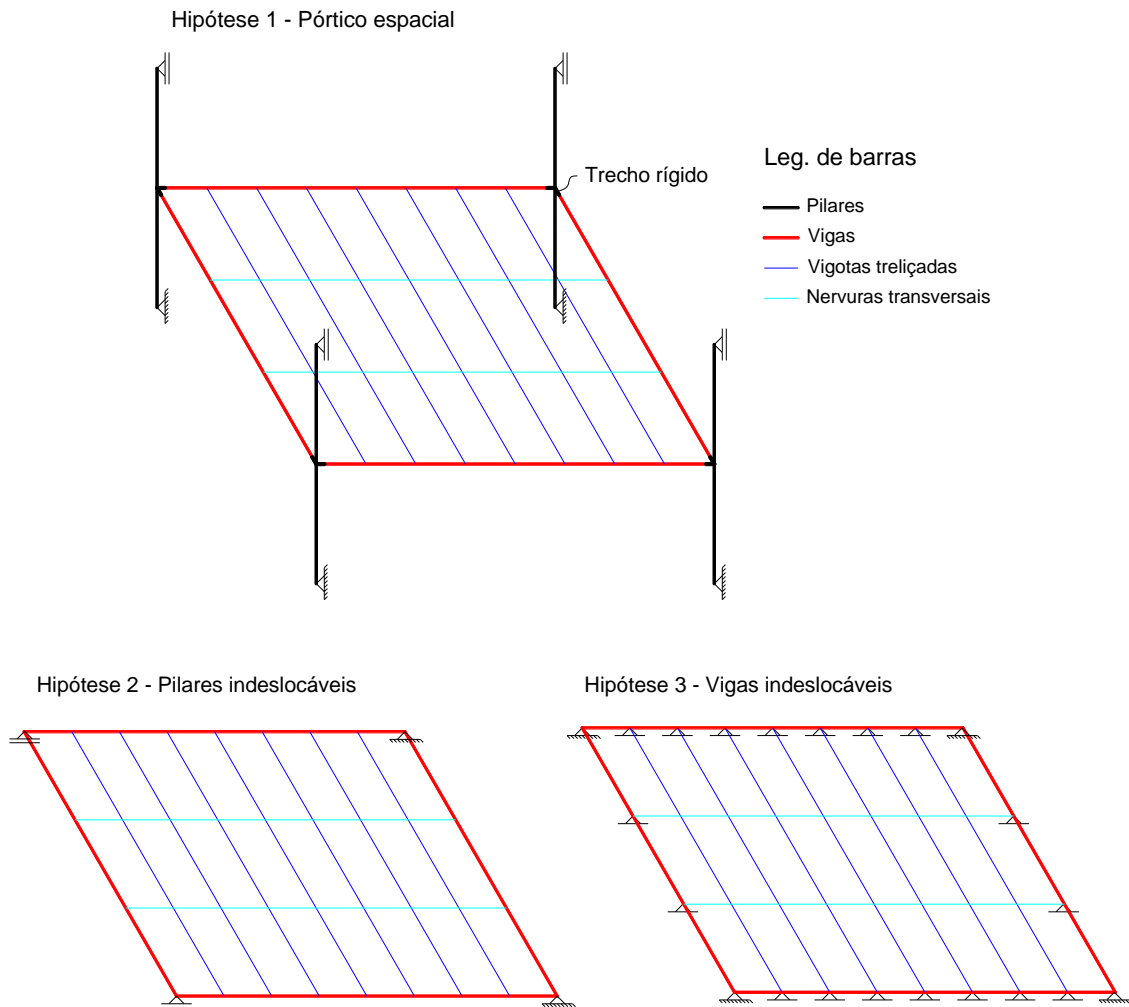
Em que:

$b_2$  é a distância de nervura à nervura;

$a$  é o valor do comprimento do vão se for vigota apoiada.

Com relação a condição de apoio será feita outra simplificação. Na prática as estruturas são compostas por uma série de elementos que também sofrem as suas deformações e estão inseridas nos limites de serviço definido pela ABNT NBR 6118:2014, ou seja, o deslocamento da estrutura não é exclusividade de um elemento isolado, faz-se necessário levar em conta a deformação e/ou rotação das vigas e pilares. As hipóteses para a modelagem da estrutura são mostradas na Figura 20.

**Figura 20:** Possibilidades de modelagem para as estruturas



**Fonte:** Autor (2016)

Como se percebe, o modelo que melhor se adequaria à realidade da maioria das estruturas é a hipótese 1, contudo será aplicado o modelo da hipótese 3 por considerar que as inércias dos outros elementos possuem rigidez suficiente para permanecerem indeslocáveis, como exemplo disso têm-se a alvenaria estrutural, ou mesmo a laje de algum reservatório com paredes de concreto.

Para Silva (2005) é adequado que as lajes nervuradas sejam analisadas pela aplicação da analogia de grelha em razão das nervuras apresentarem pequena rigidez à torção. Esta recomendação é também defendida por outros autores como Stramandinoli (2003). Nesse trabalho também será adotado tal princípio.

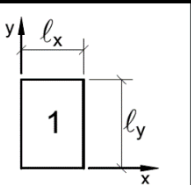
### 3.2.2 Analogia como laje maciça armada em uma direção

Outra possibilidade de dimensionamento que leva em conta o efeito de elementos ortogonais

às nervuras da laje é a consideração como laje maciça. Segundo Cunha et al (2010), a laje nervurada é uma evolução natural da laje maciça, pois produz o mesmo efeito de maneira ainda mais eficiente. No desenvolvimento do seu trabalho ele utilizou um processo que considerava a laje nervurada bidirecional como laje maciça com propriedades equivalentes, com isso pôde obter menores esforços, menores deslocamentos e consequentemente redução econômica para o dimensionamento.

No caso dessa pesquisa o foco é avaliar as lajes unidirecionais, por isso, será realizada a análise como laje maciça na qual será induzido que o comportamento seja como laje maciça armada em uma direção. Para tal o valor de  $\lambda$ , obtido da relação geométrica  $l_y/l_x$  será sempre maior que 2. Logo, os parâmetros da tabela de dimensionamento de Pinheiro (2007) com consideração de laje do tipo 1 serão sempre os mostrados na Figura 21.

**Figura 21:** Coeficientes para momento fletor e carregamento uniforme

Tipo		
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	$\mu_x$	$\mu_y$
> 2,00	12,50	3,16

Fonte: Pinheiro (2007)

Com os valores adaptados por Pinheiro (2007), o momento fletor pode ser calculado pela Equação 5.

$$M = \mu \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \text{Equação 5}$$

Em que:

$\mu$  é o coeficiente que considera os tipos de vinculações junto aos apoios;

$p$  é o carregamento uniforme;

$l_x$  é o menor vão.

Para os três processos apresentados (elemento isolado, analogia como grelha e laje maciça) foram realizados os cálculos e observou-se uma proximidade para as grandezas obtidas.



Assim, para simplificar o desenvolvimento da rotina na planilha eletrônica, utilizou-se o método representado pela Equação 1.

### 3.3 Parâmetros adotados para o estudo

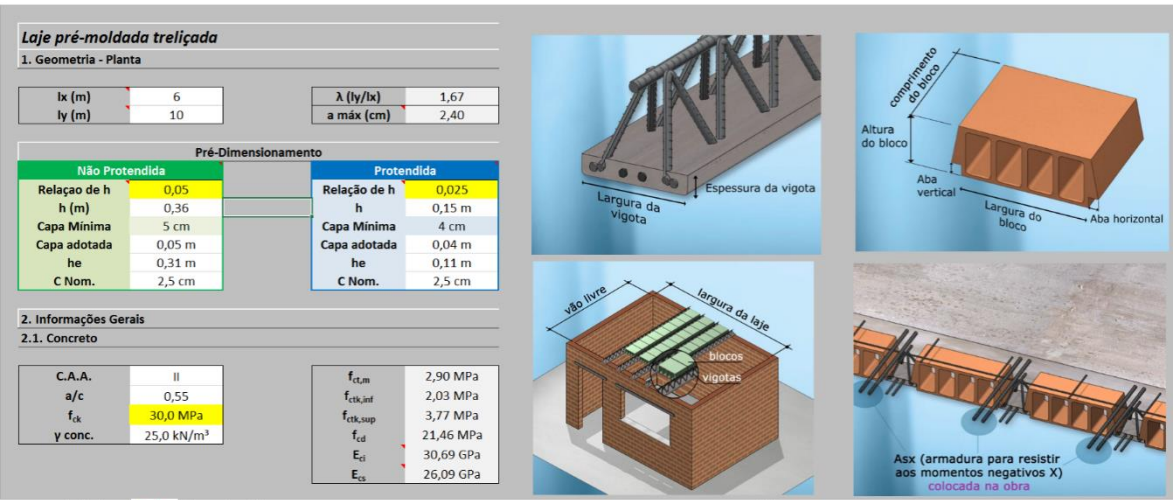
Diante da grande diversidade de vãos, carregamentos, coeficientes, configurações e possibilidades para a aplicação de lajes nervuradas com vigotas pré-fabricadas, faz-se necessário impor alguns limites e adotar certos valores para que se consiga comparar os sistemas de vigotas treliçadas não protendidas e protendidas.

Para os comprimentos dos vãos foram considerados os valores de 6 a 16 m e que as vigotas sejam simplesmente apoiadas nas extremidades.

Foram inseridas nervuras de travamento a cada dois metros de vão, isso devido à recomendação da ABNT NBR 14859-1:2002. O processo foi executado na modelagem quando se fez a obtenção de esforços com analogia de grelhas.

A classe de agressividade ambiental adotada foi a II, definida pela ABNT NBR 6118:2014 como ambiente urbano com agressividade moderada e pequeno risco de deterioração da estrutura. Por conta disso, adotou-se também: a relação a/c de 0,55, concreto com  $f_{ck}$  de 30 MPa (classe C 30) e o cobrimento nominal de 25 mm (com controle de execução). Na Figura 22 é apresentada a tela na qual foram introduzidos os valores necessário ao dimensionamento das vigotas.

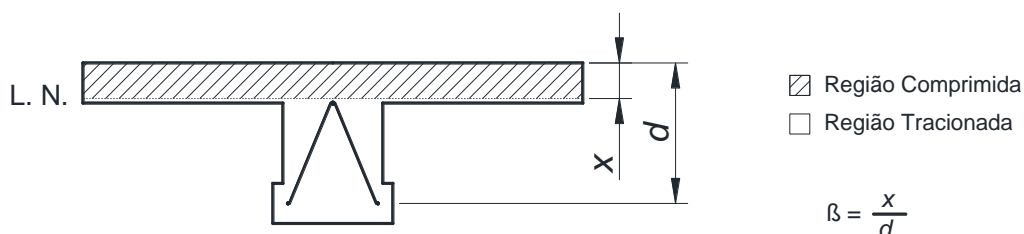
**Figura 22:** Tela de entrada de dados para inserção dos parâmetros do dimensionamento



Fonte: Autor (2016)

Em todas as situações considerou-se que as lajes estavam apenas apoiadas nas extremidades. Além disso, o valor de  $\beta$  conforme ilustrado na Figura 23 foi sempre menor que 0,45 para garantir a recomendação da ABNT NBR 6118:2014 para que não ocorra armadura dupla.

**Figura 23:** Relação entre linha neutra e posição da armadura positiva

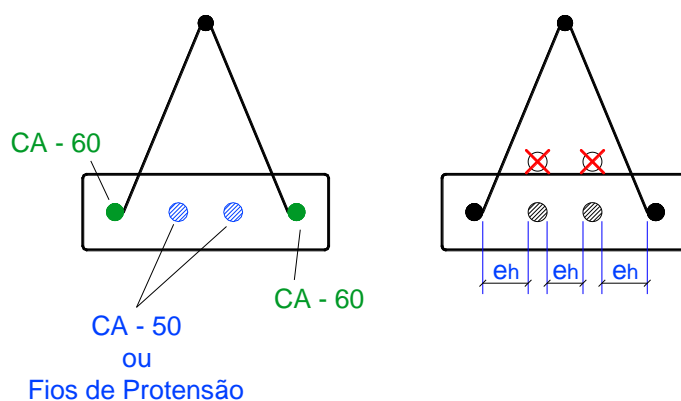


**Fonte:** Autor (2016)

O material de enchimento considerado foi o EPS, com as características definidas pela ABNT NBR 14859-1: 2016. O inteirosso máximo foi de 65 cm para que pudesse ser dispensada a verificação de flexão da mesa e ainda, para que nas verificações de cisalhamento da região das nervuras pudessem considerados os critérios de laje, conforme recomendação da seção 13.2.4.2 da ABNT NBR 6118:2014.

No desenvolvimento desse trabalho optou-se por adotar armaduras adicionais nas vigotas treliçadas sem protensão limitadas ao número de duas barras junto a sapata. Do mesmo modo para as vigotas treliçadas protendidas decidiu-se trabalhar somente com os fios de protensão, por isso evitou-se que o dimensionamento demandasse armaduras adicionais colocadas acima da sapata de concreto obra durante a execução laje. Esse detalhe pode ser observado na Figura 24.

**Figura 24:** Configuração das armaduras nas vigotas treliçadas



**Fonte:** Autor (2016)

O limite mínimo para o espaçamento horizontal ( $e_h$ ) estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014 na seção 18.3.2.2 deve ser maior ou igual à: 20 mm; diâmetro da barra; 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo. Assim, considerou-se que o agregado graúdo das sapatas fosse brita zero da classificação da ABNT NBR 7211:2009 (dimensão máxima característica 9,5 mm), logo, obteve-se para o trabalho os valores de 20 mm, 10 mm e 11,4 mm. Consequentemente o valor de  $e_h$  foi de 200 mm.

Para as ações acidentais foram adotados os valores de 1,5 kN/m<sup>2</sup>, 2,0 kN/m<sup>2</sup> e 3,0 kN/m<sup>2</sup> de forma que os resultados obtidos pudessem compreender um variado leque de utilização das lajes com vigotas treliçadas.

### 3.3.1 Flecha imediata – Modelo de Branson simplificado

Carvalho e Figueiredo Filho (2014) mostram que os elementos de concreto armado não trabalham de forma uniforme ao longo de todo o seu comprimento, pode-se ter partes do elemento nos limites dos estádios I e II enquanto outras seções já estejam em situações completamente diferentes. A fim de se calcular a flecha do elemento estrutural (vigas ou lajes) e considerar essa situação que ocorre na prática, seria necessário a aplicação de alguma expressão que introduzisse a variação de inércia na expressão de cálculo da flecha (deslocamento). Contudo há um método semiprobabilístico que permite aplicar uma inércia média para obtenção do efeito final. Esse modelo foi proposto por Branson apud CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2014.

No modelo de Branson o método semiprobabilístico toma a variação da tensão ao longo da seção transversal e ao longo do comprimento de modo simplificado e faz uso de equações empíricas que fornecem os valores médios da inércia. Assim, Branson traduz de forma aproximada o efeito da fissuração do concreto para o cálculo das deformações imediatas quando o elemento está sujeito à flexão. O procedimento simplificado de Branson pode ser utilizado para obtenção do valor da inércia intermediária ao valor no estágio I até o final do estágio II (estádio II puro). A expressão de Branson pela Equação 6.

$$I_m = \left(\frac{M_r}{M_{at}}\right)^3 \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_{at}}\right)\right]^3 \cdot I_{II} \quad \text{Equação 6}$$

Em que:

$I_m$  é o momento de inércia efetivo para uma seção ou toda a peça;

$I_I$  é o momento de inércia da peça no estágio I (seção bruta ou homogeneizada);

$I_{II}$  é o momento de inércia no estágio II puro;

$M_r$  é o momento de fissuração do concreto;

$M_{at}$  momento atuante ou de serviço na seção mais crítica.

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014 para uma avaliação aproximada da flecha imediata em vigas, pode-se utilizar a expressão de rigidez equivalente mostrada na Equação 7.

$$(EI)_{eq,t0} = E_c \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I_c \quad \text{Equação 7}$$

Em que:

$I_c$  é o momento de inercia da seção bruta de concreto;

$E_c$  é o módulo de elasticidade secante do concreto.

Ainda com relação às flechas, o melhor é considerar o valor do coeficiente de fluência ( $\phi$ ) para cálculo da flecha total como indica Rogge et al. (2002), dado que os resultados experimentais indicam melhor consistência de resultados.

A flecha adicional diferida, decorrente das cargas de longa duração em função da fluência, pode ser calculada de maneira aproximada pela multiplicação da flecha imediata pelo fator  $\alpha_f$ . O cálculo do fator  $\alpha_f$  para se obter a flecha total diferida no tempo para vigas de concreto estão apresentadas no item 17.3.2.1.2 da ABNT NBR 6118:2014.

### 3.4 Dimensionamento da armadura longitudinal das vigotas

Para o pré-dimensionamento é necessário definir a geometria da laje, na Figura 25 apresenta-se a convenção utilizada nesse trabalho.

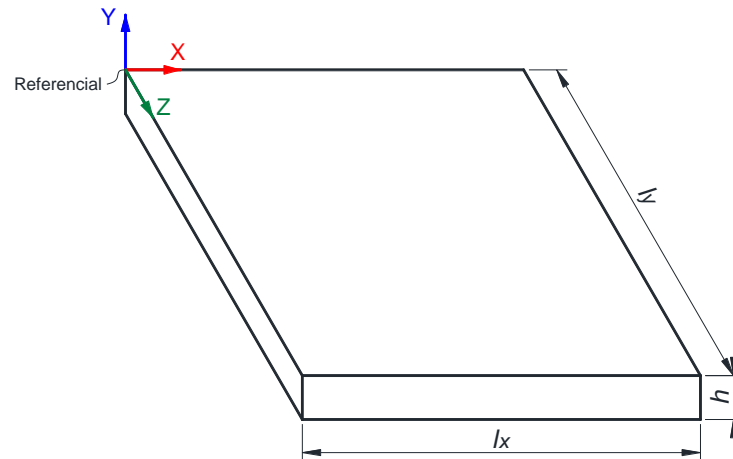
A altura de pré-dimensionamento, usualmente aplicada para vigotas treliçadas não protendidas, possui a relação dada pela Equação 8.

$$h = 5,0\% \cdot l_x \quad \text{Equação 8}$$

Em que:

$l_x$  é o comprimento do menor vão.

**Figura 25:** Elementos geométricos da laje



**Fonte:** Autor (2016)

A partir disso, pode-se ser definido em conformidade com a ABNT NBR 14859-1:2002 a altura mínima da capa e, conseqüentemente, dos materiais usados para enchimento, conforme é apresentado na Tabela 1.

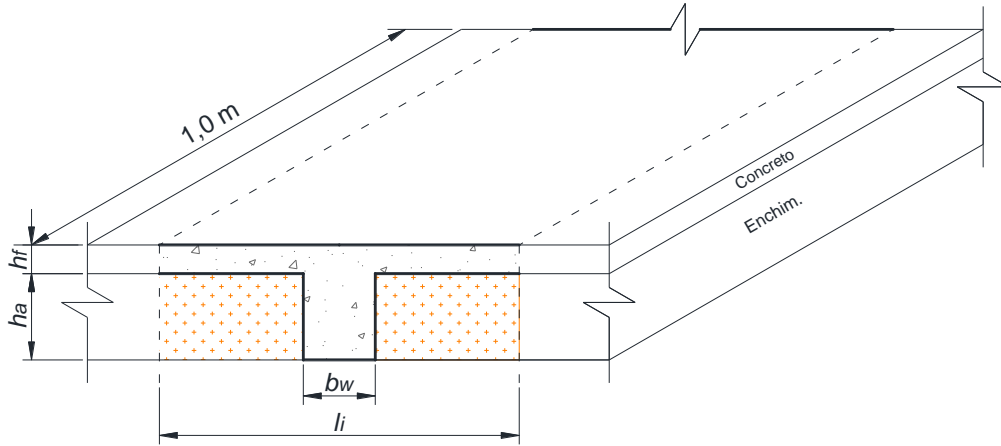
**Tabela 1:** Capa mínima para as alturas padronizadas

Altura total da laje	10,0 cm – 11,0 cm	12,0 cm – 24,0 cm	25,0 cm – 34,0 cm
Espessura mínima da capa resistente	3,0 cm	4,0 cm	5,0 cm

**Fonte:** Adaptada de ABNT NBR 14859-1 (2002)

Com a geometria definida, escolhe-se o tipo de material utilizado para o enchimento e posteriormente pode ser calculado o peso próprio. Conforme observa-se na Figura 26, as ações oriundas do peso próprio e demais valores são aplicados por área de influência ( $l_i$ ).

**Figura 26:** Região de influência de uma nervura



**Fonte:** Autor (2016)

O peso próprio é calculado por meio da Equação 9.

$$P.P_{total} = PP_{alma} + PP_{mesa} + PP_{enchimento} [kN/m^2] \quad \text{Equação 9}$$

Na qual:

$$P.P_{alma} = \frac{b_w \cdot h_a \cdot 1,0}{l_i \cdot 1,0} \times \gamma_{conc} [kN/m^2] \quad \text{Equação 10}$$

$$P.P_{mesa} = \frac{l_i \cdot h_f \cdot 1,0}{l_i \cdot 1,0} \times \gamma_{conc} [kN/m^2] \quad \text{Equação 11}$$

$$P.P_{enchimento} = \frac{(l_i - b_w) \cdot h_a \cdot 1,0}{l_i \cdot 1,0} \times \gamma_{ench} [kN/m^2] \quad \text{Equação 12}$$

Em que:

$PP$  é o peso próprio;

$b_w$  é a largura da alma da seção “T”;

$h_a$  é a altura da alma;

$h_f$  é a espessura da capa de concreto;

$l_i$  é a região de influência de uma nervura;

$\gamma_{conc}$  é o peso específico do concreto armado;

$\gamma_{ench}$  é o peso específico do material de enchimento.

Na Figura 27 apresenta-se os coeficientes e as combinações usados para os estados limites último e de serviço.

**Figura 27:** Combinações de esforços para o dimensionamento e verificação de serviço

Fonte: Autor (2016)

Para proceder o dimensionamento das armaduras longitudinais faz-se necessário estabelecer qual a largura da mesa ( $b_f$ ), visto na seção 3.2.1.

Para o cálculo da armadura longitudinal positiva é necessário o cálculo do momento fletor que atua sobre o elemento, isso pode ser obtido com algum dos modelos apresentados na seção 3.2. Para o desenvolvimento da rotina computacional adotou-se a Equação 1.

O passo seguinte foi calcular a posição da linha neutra, o que define se a seção é retangular ou “T”. Carvalho e Figueiredo Filho (2009) apresentam a Equação 13, que permite fazer a definição de parâmetros para: verificar os domínios em que a peça trabalha; definir a área de aço necessária para resistir ao momento fletor e; ainda calcular as prováveis deformações do aço e do concreto. (Obs. Para aços da classe CA-50)

$$x = \frac{0,68 \cdot d \pm \sqrt{(0,68 \cdot d)^2 - 4 \cdot 0,272 \cdot \left(\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}\right)}}{0,544} \quad \text{Equação 13}$$

Em que:

$d$  é a distância da face superior da laje à posição das armaduras do banzo inferior da treliça;

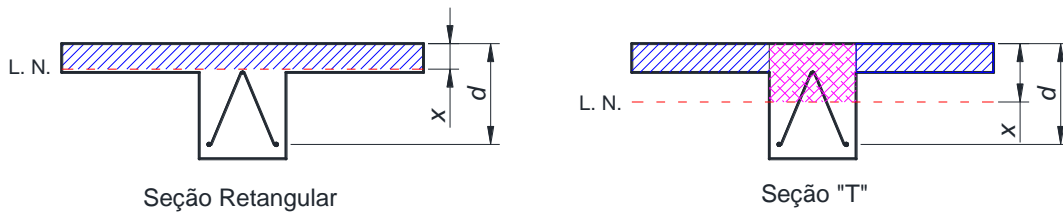
$M_d$  é o momento de cálculo para a combinação desejada;

$b_w$  é a largura da alma ou da mesa colaborante;

$f_{cd}$  é a resistência à compressão de cálculo do concreto.

Com o valor da posição da linha neutra compara se ela é superior a espessura da mesa e se os cálculos posteriores devem considerar a seção como “T” falso ou verdadeiro. Isso configura a geometria da seção como pode ser observado na Figura 28.

**Figura 28:** Seção definida em função da posição da linha neutra



**Fonte:** Autor (2016)

Caso a posição da L.N. esteja na mesa,  $b_w$  passa a ser  $b_f$ . Em seguida procede-se o cálculo e a verificação da hipótese. Caso a linha neutra não esteja na mesa é necessário calcular a parcela do momento fletor resistida pelas abas (hachuradas em uma direção na Seção “T”) e a parcela que deve ser resistida pela alma. Dados pelas equações 14 e 15.

$$M_{abas} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_f \cdot (b_f - b_w) \cdot \left(d - \frac{h_f}{2}\right) \quad \text{Equação 14}$$

$$M_{alma} = M_d - M_{abas} \quad \text{Equação 15}$$

Em que:

$b_f$  é a largura colaborante do concreto, na mesa;

$h_f$  é a espessura da capa de concreto.

Nessa situação, a área de aço necessária para resistir ao momento fletor solicitante é calculada pela Equação 16.

$$A_s = \frac{M_{abas}}{\left(d - \frac{h_f}{2}\right) \cdot f_{yd}} + \frac{M_{alma}}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}} \quad \text{Equação 16}$$



Em que:

$$KZ = 1 - \frac{0,4 \cdot x}{d};$$

A ABNT NBR 14859:2016 define que armaduras treliçadas podem ser executadas partes com aço CA-50 outras partes com CA-60. Contudo, de maneira geral os fabricantes de treliças optam por construí-las integralmente com aço CA-60. Por esse motivo, sugeriu-se aplicar uma relação que compensaria a resistência do aço adicional à treliça que normalmente são aços do tipo CA-50. Essa relação pode ser dada por:

$$\frac{CA60}{CA50} = \frac{600 \text{ MPa}}{500 \text{ MPa}} = 1,2$$

Com essa relação é necessário apenas fazer o cálculo da área de aço ( $A_s$ ) para o aço CA-60 e a área adicional, necessária para resistir ao momento fletor solicitante, pode ser feita com o aço CA-50 desde que seja aplicada a proporção conforme a Equação 17.

$$A_{s,50} = (A_s - A_{s,60}) \times 1,2 \quad \text{Equação 17}$$

### 3.5 Detalhes específicos das vigotas treliçadas protendidas

O dimensionamento das armaduras longitudinais das vigotas protendidas seguem os mesmos princípios das vigotas não protendidas, contudo existem algumas características particulares quando se faz uso da protensão que devem ser observadas com atenção específica. Os detalhes necessários ao dimensionamento que não são mencionados nesta seção são os mesmos da seção 3.4.

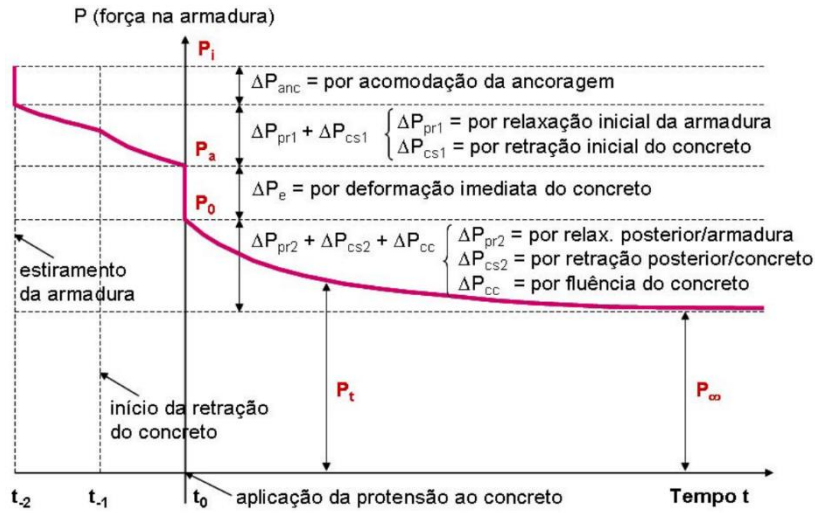
No pré-dimensionamento da laje com vigotas treliçadas protendidas pode-se adotar para a altura total da laje a relação mostrada na Equação 18.

$$h = 2,5\% \cdot l_x \quad \text{Equação 18}$$

Também, devem ser consideradas todas as perdas mostradas na Figura 29 para assegurar que, em serviço, o elemento esteja trabalhando com energia de protensão suficiente para resistir às solicitações.

Para o dimensionamento das vigotas treliçadas protendidas adota-se o valor de 30% para as perdas totais de protensão, isso se deve às recomendações feitas por Albuquerque (2005).

**Figura 29:** Perdas de protensão – cabos retos e pré-tração



Fonte: Hanai (2005)

### 3.5.1 Dimensionamento da armadura de flexão positiva

Para o estudo realizado nesse trabalho adota-se que os fio de protensão são do tipo CP175RB, ou seja, aço de resistência mínima à ruptura por tração ( $f_{ptk}$ ) de 1750 MPa e considerado de relaxação baixa. Assim, fica definido também o limite de escoamento convencional do aço de protensão que é de 85% do valor de  $f_{ptk}$ , logo, 1488 MPa.

No dimensionamento das vigotas protendidas é necessário que se tenha o cuidado de não haver uma solicitação exagerada, que acarrete deformações irreversíveis devido às tensões na armadura ativa. Para tanto, alguns limites e verificações de segurança são impostos para se definir a protensão inicial. Isso pode ser feito por meio da Equação 19.

$$\sigma_{pi} \leq \begin{cases} 0,77 f_{ptk} \\ 0,85 f_{pyk} \end{cases} \quad \text{Equação 19}$$

Em que:

$\sigma_{pi}$  é a tensão da armadura de protensão na saída do aparelho de aplicação da força inicial de protensão, dada pela Equação 20.

$$P_i = N^{\circ} \text{Fios} \cdot A_{\phi} \cdot \sigma_{pi} \quad \text{Equação 20}$$

Em que:

$N^\circ$  Fios é a quantidade de fios de protensão;

$A_\phi$  é a área da seção do fio de protensão.

Após definida  $P_i$ , pode-se calcular outros valores representativos tais como  $P_a$ ,  $P_0$  e  $P_\infty$ , que são apresentados a seguir.

Destaca-se que no ato da aplicação da força de protensão, considera que o concreto da sapata já esteja com uma resistência de 70% do  $f_{ck}$ . Para a verificação do concreto, a tensão da peça de concreto protendido deve ser inferior que a tensão limite do concreto, como mostra a Equação 21.

$$\sigma_{cp} = \frac{P_a}{A_{sap}} < \sigma_{limite} = 0,7 \cdot f_{ckj} \quad \text{Equação 21}$$

Em que:

$P_a$  é o valor da força de protensão imediatamente anterior à transferência de tensões ao concreto, pode ser calculado pela Equação 22;

$A_{sap}$  é a área da sapata de concreto;

$\sigma_{limite}$  é a tensão limite do concreto;

$f_{ckj}$  é a resistência característica à compressão do concreto na idade considerada.

$$P_a = 0,97 \cdot P_i \quad \text{Equação 22}$$

O valor de 0,97 surge em decorrência de se adotar perdas iniciais de 3% para os fios de protensão de relaxação baixa.

Considera-se a seção plena, sapata pré-moldada integrada ao concreto moldado *in loco*, logo a excentricidade dos fios de protensão passa a ser calculado pela Equação 23.

$$e_p = y_{CG} - \left( C_{nom} + \frac{\phi_{fio}}{2} \right) \quad \text{Equação 23}$$

Em que:

$y_{CG}$  é a altura do centro de gravidade da seção completa.

Para levar em conta as perdas totais de protensão é admitido o valor de 30%, logo a força de protensão após todas as perdas é dada pela Equação 24.

$$P_{\infty} = 0,7 \cdot P_i \quad \text{Equação 24}$$

Com isso, tem-se as Equações 25, 26 e 27.

$$\sigma_{cp} = \frac{P_{\infty} \cdot e_p^2}{I} + \frac{P_{\infty}}{A} \quad \text{Equação 25}$$

$$P_{nd} = 0,9 \cdot (P_{\infty} + \alpha_p \cdot A_p \cdot \sigma_{cp}) \quad \text{Equação 26}$$

$$\varepsilon_{pnd} = \frac{P_{nd}}{A_p \cdot E_p} \quad \text{Equação 27}$$

Em que:

$\sigma_{cp}$  é a tensão do concreto sob efeito da protensão;

$P_{nd}$  é a força externa ou força de neutralização;

$\varepsilon_{pnd}$  é o pré-alongamento do fio protendido.

A variável  $\alpha_p$  é a relação entre os módulos de deformação, dada pela Equação 28.

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_c} \quad \text{Equação 28}$$

Para realizar o equilíbrio de força e momento, faz-se adoção de um valor de  $x$ , e posteriormente esse valor é verificado pela restrição definida para  $\beta_x$ , Equação 29.

$$\beta_x = \frac{x}{d} \quad \text{Equação 29}$$

Carvalho e Figueiredo Filho (2014) demonstram que:

$x_{34} = 0,6283 \cdot d$  (limite entre os domínios 3 e 4);

$x_{23} = 0,259 \cdot d$  (limite entre os domínios 2 e 3);

Assim, para  $x < 0,259 \cdot d \rightarrow$  domínio 2; e para  $0,259 \cdot d < x < 0,6283 \cdot d \rightarrow$  domínio 3.

No caso considerado nesse estudo, não é usado armadura adicional sobre as vigotas e a altura dos fios de protensão e das barras dos banzo inferior da treliça é a mesma, possuem o mesmo alongamento ( $\Delta \varepsilon_p = \varepsilon_s$ ). Portanto, tem-se a Equação 30.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \frac{(1 - \beta_x)}{\beta_x} \quad \text{Equação 30}$$

O alongamento dos fios de protensão deve ser composto pelo pré-alongamento diferenciado e o alongamento de flexão, assim é dado pela Equação 31.

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pnd} + \Delta\varepsilon_p \quad \text{Equação 31}$$

Assim, consegue-se calcular a tensão nas barras da treliça e nos fios de protensão por meio das Equações 32 e 33.

$$\sigma_{sd} = E_s \cdot \varepsilon_s \quad \text{Equação 32}$$

$$\sigma_{pd} = E_p \cdot \varepsilon_p \quad \text{Equação 33}$$

Nas quais devem ser respeitados os limites:

$$\sigma_{sd} \leq f_{yd} \frac{600}{1,15} = 522 \text{ MPa}$$

E

$$\sigma_{pd} \leq f_{pyd} = 0,9 \left( \frac{1750}{1,15} \right) = 1369 \text{ MPa}$$

Assim, pode-se fazer o equilíbrio de forças entre o concreto e o aço da treliça e fios protendidos, mediante a Equação 34.

$$R_{cd} = R_{sd}(\text{treliça}) + R_{pd} \quad \text{Equação 34}$$

Em que a força resistida pelo concreto (até C50) é dada pela Equação 35.

$$R_{cd} = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) \quad \text{Equação 35}$$

Por fim, pode ser feita a verificação do equilíbrio de momentos pela Equação 36.

$$M_{rd} = R_{cd} \left( \frac{h}{2} - 0,4x \right) + \sigma_{sd} \cdot A_{s(\text{treliça})} \left( d_t - \frac{h}{2} \right) + R_{pd} \left( d_p - \frac{h}{2} \right) \quad \text{Equação 36}$$

Em que:

$$M_{rd} > M_d$$

Logo após, procede-se o dimensionamento à cortante e verificações de serviço.

### 3.6 Dimensionamento à cortante

Como foi definido na seção 3.3 que o intereixo máximo entre nervuras adotado a ABNT NBR 6118:2014 propõe pelo menos três etapas para o dimensionamento da armadura transversal dos elementos estruturais.

A primeira etapa consiste na verificação da possibilidade de dispensa da armadura transversal. Pode prescindir de armadura transversal desde que a força cortante resistente de cálculo ( $V_{Rd1}$ ) seja maior ou igual à força cortante solicitante de cálculo ( $V_{Sd}$ ), na seção 19.4.1. Tem-se:

A tensão solicitante de cisalhamento é expressa pela Equação 20.

$$\tau_{Sd} = \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d} \quad \text{Equação 37}$$

Em que:

$\tau_{Sd}$  é a tensão solicitante de cisalhamento;

$b_w$  é a largura da nervura;

$d$  é a altura útil da armadura positiva ancorada no apoio.

A tensão resistente de cisalhamento sem armadura transversal é dada pela Equação 21.

$$\tau_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1)] \quad \text{Equação 38}$$

Em que:

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c};$$

Em que:

$f_{ctk,inf}$  é a resistência característica inferior do concreto à tração;

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3};$$

$\rho_1$  é a taxa de armadura de tração ancorada no apoio;

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w \cdot d} \leq 0,02;$$

$k$  é um coeficiente que pode assumir os seguintes valores:

$k = 1,0$  para elementos em que 50% da armadura inferior não chega até os apoios;

$k = /1,6 - d/$  para os demais elementos, com  $d$  em metros.

Na qual deve ser verificado pela condição mostrada Equação 39.

$$\tau_{Rd1} \geq \tau_{Sd} \quad \text{Equação 39}$$

A segunda etapa surge diante da impossibilidade de se dispensar a armadura transversal, na qual a ABNT NBR 6118:2014, seção 19.4.2 remete o dimensionamento para os critérios de viga da seção 17.4 em que se tem a tensão de cisalhamento resistente para elementos estruturais com armadura transversal dada pela Equação 40.

$$\tau_{Rd3} = \tau_c + \tau_{sw} \quad \text{Equação 40}$$

Em que:

$\tau_c$  representa a parcela de tensão cisalhante resistida pelos mecanismos complementares da treliça generalizada de Mörsh, dado por  $0,6 \cdot \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c}$  quando são elementos sujeitos à flexão simples;

$\tau_{sw}$  é a parcela de tensão cisalhante resistida pela armadura transversal.

Condicionando a tensão solicitante de cisalhamento a ser igual ou menor a  $\tau_{Rd3}$ , obtém-se:

$$\tau_{Rd3} \geq \tau_{Sd}$$

$$\tau_{Sd} \leq \tau_c + \tau_{sw}$$

Pode-se se escrever a tensão cisalhante resistida pela armadura ( $\tau_{sw}$ ) pela Equação 41.

$$\tau_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot \frac{0,9}{b_w} \cdot f_{ywd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad \text{Equação 41}$$

Em que:

$A_{sw}$  é a área da armadura transversal;

$s$  é o espaçamento da armadura transversal;

$b_w$  é a largura da nervura;

$f_{ywd}$  é a tensão na armadura transversal;

$\alpha$  é o ângulo de inclinação da armadura transversal.

Para estribos de lajes o valor de  $f_{ywd}$  varia de 250 MPa (para lajes com espessura até 15 cm) e 435 MPa (para lajes com espessura maior ou igual a 35 cm). Para lajes com espessuras intermediárias, a ABNT NBR 6118:2014 recomenda que a tensão da armadura transversal pode ser determinada por interpolação linear. Essa limitação de tensão é justificada pela dificuldade de ancoragem de estribo sem lajes.

No caso das lajes com vigotas treliçadas, como as diagonais da treliça (sinusóides) fazem o papel de armadura transversal, essa limitação não é justificável, sendo que as diagonais são constituídas de fios contínuos soldados nos banzos superior e inferior das treliças, SARTORTI E PINHEIRO (2013);

Para a armadura transversal tem-se a Equação 42.

$$\left(\frac{A_{sw}}{s}\right) = \frac{\tau_{sw} \cdot b_w}{0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\sen \alpha + \cos \alpha)} \quad \text{Equação 42}$$

Na seção 17.4.1.1.1 a ABNT NBR 6118:2014 define a armadura mínima pela Equação 43.

$$\left(\frac{A_{sw}}{s}\right)_{min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \cdot b_w \cdot \sen \alpha = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}}}{f_{ywk}} \cdot b_w \cdot \sen \alpha \quad \text{Equação 43}$$

A armadura já existente nas diagonais da treliça é dada pela Equação 44.

$$\left(\frac{A_{sw}}{s}\right)_{Existente} = 10 \cdot \pi \cdot r_{Diagonal}^2 \quad \text{Equação 44}$$

Caso a área de armadura calculada seja maior a armadura transversal já existente, torna-se necessário colocar armadura transversal adicional. Sartorti E Pinheiro (2013) destacam que dado um trecho do comprimento da treliça, apenas metade do total de diagonais estarão dispostas na direção da tensão principal de tração ( $\sigma_I$ ) e efetivamente combatem à tração.

Por fim, tem-se a terceira etapa que consiste da verificação se não ocorrerá o esmagamento das bielas de compressão do concreto. Tal verificação é feita por meio da Equação 45.



$$\tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \geq \tau_{sd} \quad \text{Equação 45}$$

### 3.7 Verificações

#### 3.7.1 Verificação de fissuração

Estado limite de formação de fissuras (ELS-F) – a combinação rara de ações é feita pela Equação 46.

$$F_d = F_g + F_{q1} + \sum \psi_1 \cdot F_{q2} \quad \text{Equação 46}$$

Em que:

$F_d$  é o valor de cálculo da ação;

$F_g$  representa o valor característico de todas as ações permanentes;

$F_{q1}$  é o valor da ação variável considerada principal;

$F_{q2}$  é o valor da ação variável considerada secundária;

$\psi_1$  é o coeficiente de redução da ação secundária.

Para os cálculos no ELS-F a relação entre os módulos de deformação longitudinal do aço e do concreto é adotada igual a:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = 10$$

Por meio da área da seção e do momento estático em relação a borda comprimida, encontra-se a posição da linha neutra  $x$ , dada na Equação 47.

$$x = \frac{M_s}{A} \quad \text{Equação 47}$$

O momento resistente é dado pela Equação 48.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot I_c \cdot f_{ctk,inf}}{y_t} \quad \text{Equação 48}$$

Em que:

$\alpha = 1,2$  se for seção “T” ou  $1,2$  se for “T” falso;

$Y_t$  é a distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada.

Se,  $M_r \leq M_a$ , ocorre abertura de fissuras. Assim, ter-se-á que o estado limite de abertura de fissuras (ELS-W) – combinação frequente é dado pela Equação 49.

$$F_d = \sum F_g + \psi_1 \cdot F_{q1} + \sum \psi_2 \cdot F_{q2} \quad \text{Equação 49}$$

Para edificação considerada no trabalho  $\psi_I = 0,6$  e para CAAT tem-se  $w_k \leq 0,3\text{mm}$ .

Para os cálculos no ELS-W a relação entre os módulos de deformação longitudinal do aço e do concreto é adotada igual a:

$$\alpha_e = 15$$

Equilíbrio do momento estático da região comprimida e tracionada, considerando a linha neutra na mesa é dado pela Equação 50.

$$\alpha_e \cdot A_s \cdot (d - x) = 42 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s \cdot (x - d') \quad \text{Equação 50}$$

O momento de inércia da peça no estágio II puro em relação a linha neutra, se  $x_{II} \leq h_f$  é dado pela Equação 51.

$$I_{II} = \frac{b_f \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 \quad \text{Equação 51}$$

Senão, se  $x_{II} > h_f$ , passa a ser dado pela Equação 52.

$$I_{II} = \frac{(b_f \cdot b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot x_{II}^3}{3} + (b_f - b_w) \cdot \left(x_{II} - \frac{h_f}{2}\right)^2 \cdot h_f + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 \quad \text{Equação 52}$$

Assim, a abertura de fissura pode ser calculada pela Equação 53.

$$w = \frac{\phi}{12,5 \cdot \eta_1} \cdot \frac{\sigma_1}{E} \cdot R \quad \text{Equação 53}$$

Em que:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha_e \cdot M_a \cdot (d-x)}{I_{II}};$$

$$R \begin{cases} R = 3 \cdot \frac{\sigma_1}{f_{ctm}}; \\ R = \frac{4}{\rho_r} + 45 \end{cases};$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot \frac{f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{10};$$

$$w = d + 7,5 \cdot \phi;$$

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{cr}} = \frac{A_s}{w \cdot b_f}.$$

### 3.7.2 Verificação de deformação

Estado limite de deformação excessiva (ELS-DEF) – combinação quase permanente feita pela Equação 54.

$$F_d = \sum F_g + \sum \psi_2 \cdot F_q \quad \text{Equação 54}$$

Para edificação considerada  $\psi_2 = 0,4$

O cálculo da flecha inicial é realizado pela teoria de vigas, em que se considera flecha elástica para carga uniformemente distribuída e de carácter permanente, é dado pela Equação 55.

$$f_1 = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot EI} \quad \text{Equação 55}$$

Para que seja levada em conta o efeito de fissuração da peça, deve-se momento de fissuração  $M_r$ , para a verificação do estado-limite de deformação excessiva é dado pela Equação 55.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot I_c \cdot f_{ctm}}{y_t} \quad \text{Equação 56}$$

E a rigidez equivalente de Branson, dada pela Equação 56.

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I_c \quad \text{Equação 57}$$

Em que:

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

$I_{II}$  é o momento de inércia da seção fissurada no estágio II;

$M_a$  é o momento fletor na seção crítica do vão considerado;

$M_r$  é o momento de fissuração do elemento estrutural;

$I_{eq}$  é o momento de inércia para a seção analisada;

$E_{CS}$  o módulo de elasticidade secante do concreto.

Para consideração do efeito da fluência, a ABNT NBR 6118:2014 no item 17.3.2.1.2, faz o emprego do fator  $\alpha_f$ , que em função das condições de retirada dos escoramentos, supostas para esse estudo, resultou em um coeficiente de fluência igual a  $\alpha_f = 1,32$ . Assim tem-se o valor da flecha total no tempo infinito dado pela Equação 58.

$$f_{t,\infty} = f_{t,0} \cdot (1 + \alpha_f) \quad \text{Equação 58}$$

Em que:

$f_{t,0}$  é a flecha imediata para a combinação de ações considerada.

Além das flechas calculadas até aqui, para o sistema com protensão, deve ser considerada a flecha advinda desse esforço, tal valor é dado pela Equação 59.

$$f_2 = \frac{P_{\infty} \cdot e_p \cdot l^2}{8 \cdot EI} \quad \text{Equação 59}$$

Para o cálculo da flecha devido a carga acidental, segue-se a mesma Equação 55, porém substitui-se o carregamento permanente pela ação acidental considerada. Em seguida, compara-se esse valor com o limite estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014, dado pela Equação 60.

$$f_{lim,aci} = \frac{l}{350} \quad \text{Equação 60}$$

Por fim, faz-se uma redução na flecha total pelo fator de redução de combinação quase permanente para o estado limite de serviço ( $\psi_2$ ) e obtém-se o valor da flecha total pela Equação 61.

$$f_{Total} = f_g + \psi_2 \cdot f_q$$

*Equação 61*

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, deve ser respeitada a relação:

$$f_{Total} \leq f_{lim}$$

Em que:

$$f_{lim} = \frac{l}{250}$$

# CAPÍTULO 4

## OTIMIZAÇÃO

### 4.1 Introdução aos métodos de otimização

De maneira geral, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis dentro de um conjunto possível para o problema proposto. Este capítulo apresenta os processos utilizados com o intuito de conhecer os parâmetros ótimos para as lajes formadas por vigotas treliçadas com e sem protensão.

Para os problemas de engenharia, quando se consegue construir modelos matemáticos que sejam representativos ou quando se tem equações e verificações para atender aos estados limites último e de serviço, é possível aplicar as técnicas de otimização para maximizar ou minimizar essas funções. O objetivo disso é encontrar uma "solução ótima" do problema, ou seja, obter um cenário que resulte no melhor desempenho possível do sistema segundo os critérios de desempenho previamente definidos.

Os primeiros métodos matemáticos para otimização de um determinado problema foram desenvolvidos para encontrar a melhor solução de problemas que pudessem ter seus modelos representados por expressões lineares, ou seja, os problemas poderiam ser representados simbolicamente por uma reta em um gráfico. Como exemplo podem ser citadas as operações de soma, subtração ou tendência. Esses métodos foram definidos como programação linear.

Entretanto, existem funções matemáticas para definição dos problemas que naturalmente

possuem elementos desproporcionais entre si, logo, a suas representações em um gráfico poderiam ser melhores ajustadas para linhas curvas do que representada por uma reta, tais problemas foram denominados de problemas não-lineares. As funções não-lineares ocorrem quando as variáveis estiverem divididas ou multiplicadas umas pelas outras, ou quando são utilizadas funções exponenciais, ou funções de raiz, ou ainda quaisquer funções logarítmicas.

Com o objetivo de aplicar restrições não-lineares à solução de um problema Wilde e Beightler (1967) desenvolveram um algoritmo chamado de *constrained derivatives*. Posteriormente, Wolfe (1963) chamou-o de *reduced-gradient method* e, finalmente com as contribuições de Abadie e Carpentier (1969), passou a ser designado por *generalized reduced gradient* (GRG). Esse algoritmo é uma ferramenta que se baseia em métodos de restrições lineares.

A pesquisa desenvolvida por Forni (2005) abordou o problema de otimização por meio da minimização da função custo utilizando o método não-linear de gradiente reduzido genérico (GRG2). Segundo Lasdon et al (1978), o GRG2 é um método de otimização não-linear para a solução de problemas de minimização e maximização. Basicamente, o GRG2 usa uma implementação do algoritmo gradiente reduzido generalizado (*Generalized Reduced Gradient* GRG). Este procedimento é também chamado de gradiente reduzido ou método de projeção de gradiente.

Os métodos de gradiente fazem parte dos métodos de busca indireta, são mais eficientes que os de busca direta e permitem que sejam manipuladas as restrições suplementares, incluindo limitações não-lineares.

O método inicia-se com o problema de minimização não-linear escrito com restrições de igualdade. Com a finalidade de encontrar a solução do problema são acrescentadas variáveis fictícias a qualquer restrição de desigualdade, conforme o esquema a seguir:

Minimizar  $F(x)$  sujeita a:

$$g_i(x) = 0, i=1$$

$$L_j < X_j < U_j, j=1$$

Em que:  $L_j$  e  $U_j$  são os limites inferiores e superiores da variável  $X_j$ .

A ideia do gradiente reduzido generalizado é converter um problema com restrição em um problema sem restrição. As equações lineares são usadas para reduzir o número de variáveis

independentes das funções de restrição. A partir disso aplica-se as características próprias do GRG e chega-se à solução do problema a ser otimizado.

## **4.2 Otimização pela limitação da flecha ou minimização do peso próprio da laje**

Devido à quantidade de equações e verificações necessárias para o dimensionamento das lajes com nervuras pré-moldadas treliçadas, fez-se necessário o uso de um método computacional, tendo sido escolhido o recurso Solver disponível em planilha eletrônica.

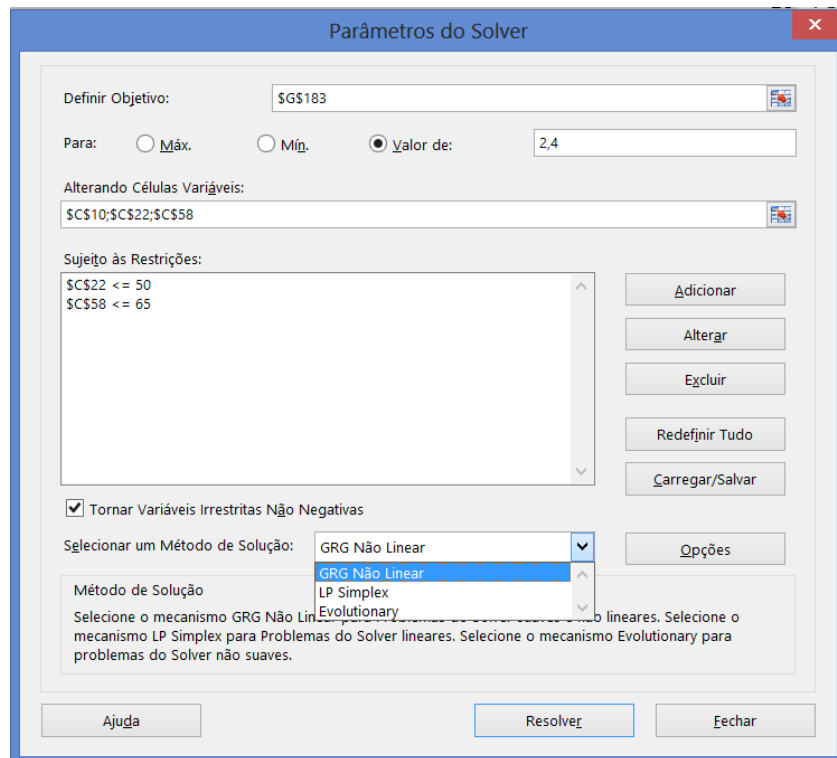
O Solver é uma ferramenta que faz parte de um conjunto de comandos denominados de análise de hipóteses. Com o Solver, pode-se localizar um valor ótimo (máximo ou mínimo) para uma célula que contenha alguma fórmula, sendo associada ao objetivo. Essa célula objetivo permite que sejam impostas restrições ou limites, considerando os valores ou fórmulas que estejam contidas em células da mesma planilha ativa.

De forma sucinta, pode-se dizer que o Solver trabalha com um grupo de células, denominadas variáveis de decisão ou simplesmente variáveis, que são os valores que a ferramenta altera para que seja alcançado o objetivo e respeitadas as restrições.

O primeiro parâmetro a ser definido é a escolha do método de solução (Figura 30). O Solver possui três algoritmos para desenvolver a otimização do problema: o método GRG2 (Generalized Reduced Gradient), utilizado para problemas não lineares uniformes; o método LP Simplex, utilizado para problemas que sejam lineares e o método Evolutionary aplicado quando o problema é não linear e não uniforme. Destaca-se que a ferramenta Solver utiliza códigos de programação desenvolvidos e implementados pela Frontline Solvers®.



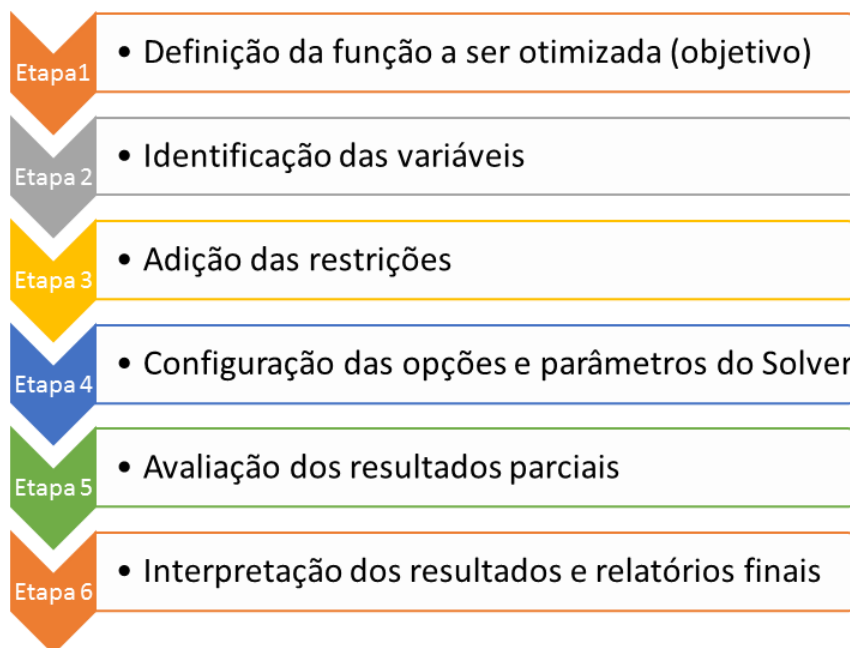
**Figura 30:** Configuração da ferramenta de otimização



Fonte: Autor (2016)

Para aplicação do Solver como ferramenta de otimização foram seguidas as etapas organizadas no fluxograma da Figura 31.

**Figura 31:** Fluxograma esquemático do processo de otimização



Fonte: Autor (2016)

A seguir apresenta-se a descrição detalhada de cada uma das etapas apontadas no fluxograma (Figura 31).

#### **4.2.1 Etapa 1: Definição da função a ser otimizada**

A função objetivo é a equação matemática cujo máximo ou mínimo deseja-se determinar. Para esse trabalho definiu-se que a função objetivo é a flecha máxima que as lajes poderão apresentar ou o objetivo o valor mínimo do peso total da laje, para reduzir as solicitações aos demais elementos estruturais (vigas, pilares e fundação).

Em termos de programação tem-se que a função objetivo é o foco principal do processo e que o valor desse objetivo precisa ser alcançado, porém deve-se respeitar o sistema de igualdade ou desigualdades intituladas de restrições do modelo.

As restrições demarcam uma região de um plano no qual poderiam ser obtidos os conjuntos de soluções viáveis para o problema que se tem. A melhor dessas soluções, ou seja, aquela que maximiza, minimiza ou condiciona a função objetiva para um determinado valor é chamada de solução ótima ou otimizada.

Em termos práticos de aplicação do Solver, a planilha deve ser elaborada de forma que sejam destacadas e, se possível, agrupadas a função objetivo e as células variáveis para facilitar a visualização e controle do processo. Durante o processo iterativo não é permitido que nenhuma célula seja editada, nem mesmo de outra pasta de trabalho. Além disso, não se consegue visualizar células que estejam posicionadas fora das proximidades da célula que contenha a função objetivo.

A célula a receber o valor da solução “ótima” é representada por uma fórmula, pois trata-se da função a ser maximizada ou minimizada. Neste trabalho essas células continham as equações de flecha total e de peso total da laje.

#### **4.2.2 Etapa 2: Identificação das variáveis**

As células variáveis são as células que contém valores numéricos (de partida) informados no início do dimensionamento e que possuam alguma relação com a função objetivo.

As variáveis independentes que aparecem na função objetivo são os parâmetros definidos como variáveis de estado, tais como o comprimento do inteiro (Figura 6), a altura total da

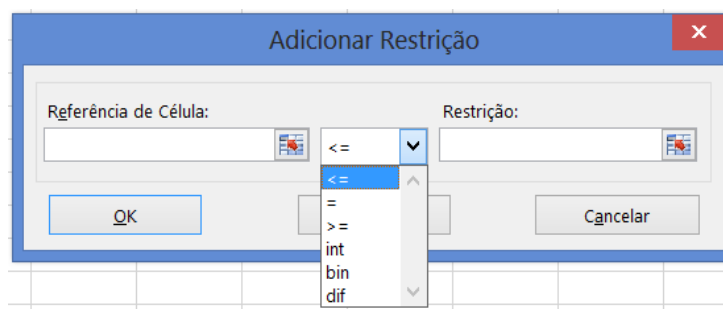
laje e o  $f_{ck}$ .

### 4.2.3 Etapa 3: Adição das restrições

As restrições são as condições que definem os limites permitidos para que o método altere os valores das variáveis, sendo necessário informar os limites mínimos e máximos referente ao espaço de busca. Na prática esses limites surgem devido às características dos materiais, por limitações técnicas ou por limitação de recursos, dentre outros. São os limites impostos ao sistema por normas de dimensionamento ou estabelecidos por leis naturais que governam o comportamento da estrutura e influenciam as variáveis de decisão. As restrições podem ser de igualdade, desigualdade ou ainda definidas para uma faixa de valores dentro de limites inferiores e superiores, pode ser um número inteiro, ou binário, ou mesmo que o valor seja diferente de algum específico.

Uma vantagem do Solver é que as restrições podem ser atribuídas não apenas para as células definidas como variáveis, mas pode-se definir condições para qualquer outra célula que esteja contida na planilha ativa. Além disso, podem ser definidas não apenas como valores fixos, a ferramenta permite que sejam inseridas células como sendo a restrição definido para a outra célula qualquer (Figura 32).

**Figura 32:** Inserção de restrições



**Fonte:** Autor (2016)

No dimensionamento das vigotas treliçadas forma definidas as restrições a seguir:

- Área de aço ( $A_s$ )  $\rightarrow A_{s,mín} \leq A_s \leq A_{s,máx}$ ;
- Abertura de fissuras ( $W$ )  $\rightarrow W \leq 0,3 \text{ mm}$ ;
- Intereixo ( $Dist$ )  $\rightarrow Dist \leq 65 \text{ cm}$ ;
- Resistência característica à compressão do concreto  $\rightarrow f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ;
- Domínios  $\rightarrow$  Dimensionamento permitido entre os domínios II e III;

- Flecha limite ( $a_{m\acute{a}x}$ )  $\rightarrow a_{m\acute{a}x} \leq lx/250$ .

#### **4.2.4 Etapa 4: Configuração das opções e parâmetros do Solver**

O objetivo desse passo é indicar as opções e parâmetros que irão atuar como gerenciadores para a solução do Solver. Essa etapa é de fundamental importância pois além de conduzir a uma solução adequada do problema, permite que esse processo seja desenvolvido com consumo menor de tempo. Portanto, de acordo com as escolhas feitas, a solução pode ser encontrada com maior ou menor rapidez e com valores mais precisos.

Ressalta-se que no início da aplicação da ferramenta, o Solver já apresenta uma definição prévia para solução de problemas menos complexos tais como extrapolações lineares de vetores tangenciais, extrapolações quadráticas, entre outras. Caso se tenham problemas mais complexos, a alteração dos parâmetros prévios permite que sejam resolvidos tais problemas e também que se tenha respostas mais refinadas para os problemas. Para a modificação dos parâmetros iniciais, a ferramenta possui um mecanismo de ajuda muito útil para se definir com níveis adequados todos os parâmetros.

No processo de otimização do problema de dimensionamento, foram testados os seguintes métodos de otimização: GRG, LP Simplex e Evolutionary. Os parâmetros de configuração foram:

Para o método GRG Não Linear definiram-se:

- Convergência: 0,0001
- Tamanho da População: 100

Para o Evolutionay:

- Convergência: 0,0001
- Taxa de Mutação: 0,075
- Tamanho da População: 100
- Propagação Aleatória: 0
- Tempo Máximo de Aperfeiçoamento: 30

Para todos os métodos definiu-se que a precisão das restrições seriam de 0,00001.

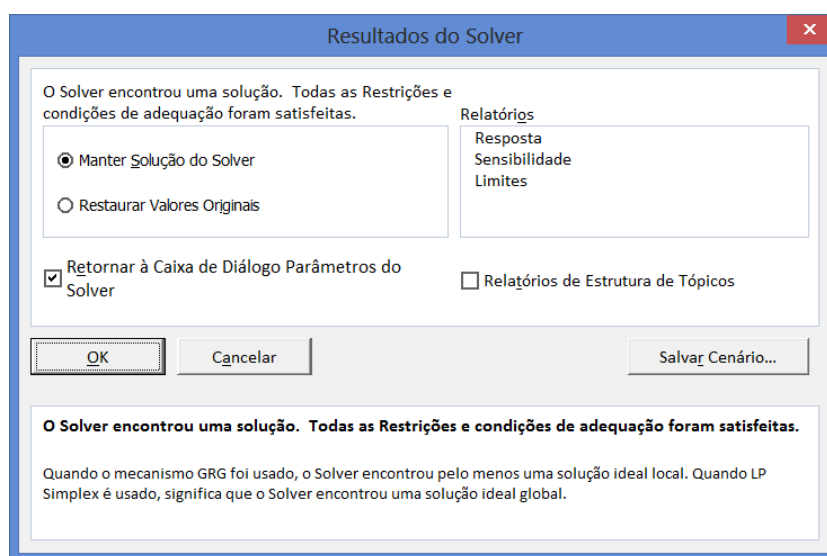
#### 4.2.5 Etapa 5: Avaliação dos resultados parciais

Caso se queira acompanhar o processo iterativo passo a passo é possível desde que se marque essa opção nas configurações da Etapa 4. Esse recurso é interessante principalmente pela possibilidade de se conseguir avaliar se a solução está progredindo para uma condição lógica ou se os valores assumidos pelas variáveis estão com incrementos adequados ao problema. Após a análise dos resultados parciais é possível continuar o processo, salvar o cenário obtido ou ainda interromper a evolução do processo mantendo ou não a solução prévia.

#### 4.2.6 Etapa 6: Interpretação dos resultados e relatórios finais

Após realizar o processo de busca da solução ótima, o Solver permite manter a solução encontrada ou restaurar os valores originais. Além disso, é possível ainda solicitar que sejam gerados o relatório de resultados, o relatório de limite e o relatório de sensibilidade (Figura 33).

**Figura 33:** Opções após o processamento do Solver



**Fonte:** Autor (2016)

Quando são mantidos os valores da solução encontrada pelo Solver fica fácil visualizar o valor que cada variável deve assumir para que se tenha o objetivo final. Assim, consegue-se perceber que o método permite a obtenção do objetivo adequado e ainda otimizar os recursos envolvidos nesse processo.

Como no dimensionamento das vigotas treliçadas o objetivo inicial é condicionar as variáveis para que a flecha limite prevista na ABNT NBR 6118:2014 seja respeitada, muitas soluções são possíveis. Contudo, deve ser atentado também para o objetivo de encontrar o

menor peso (peso mínimo) após o cálculo da “solução ótima”.

A seguir são apresentados os tipos de relatórios oriundos do Solver e o que representa cada um deles.

O relatório de resultados é basicamente um espelho dos dados informados na planilha inicial e os resultados obtidos pelo método de cálculo. No relatório são mostrados separados e agrupados o valor da célula do objetivo, das células variáveis e das restrições, conforme pode ser visto na Tabela 2. Nos relatórios, a coluna **Célula** apresenta o “endereço” da informação cujo nome está colocado na coluna ao lado. A coluna de **Valor Original** mostra o valor de partida usado pelo Solver para iniciar as iterações. O **Valor Final** contém o resultado final para o objetivo e os valores que as células variáveis assumiram para se obter o valor ótimo.

**Tabela 2:** Relatório de resultados do Solver

Célula do Objetivo (Valor de)

<b>Célula</b>	<b>Nome</b>	<b>Valor Original</b>	<b>Valor Final</b>
\$G\$184	Flecha total	15,270 cm	3,200 cm

Células Variáveis

<b>Célula</b>	<b>Nome</b>	<b>Valor Original</b>	<b>Valor Final</b>	<b>Número Inteiro</b>
\$C\$10	Relação de h	0,050	0,061	Conting.
\$C\$22	fck II	30,0 MPa	37,1 MPa	Conting.
\$C\$40	Largura EPS	37,0 cm	34,8 cm	Conting.

Restrições

<b>Célula</b>	<b>Nome</b>	<b>Valor da Célula</b>	<b>Fórmula</b>	<b>Status</b>	<b>Margem de Atraso</b>
\$C\$58	Inteiro EPS	44,8 cm	\$C\$58<=65	Não-associação	20,15853423
\$C\$58	Inteiro EPS	44,8 cm	\$C\$58>=30	Não-associação	14,8 cm
\$G\$184	Flecha total	3,200 cm	\$G\$184>=30	Associação	0
\$C\$22	fck II	37,1 MPa	\$C\$22<=50	Não-associação	12,9442928
\$C\$22	fck II	37,1 MPa	\$C\$22>=25	Não-associação	12,1 MPa

**Fonte:** Autor (2016)

Na coluna de **Fórmula** tem-se as regras que governam as restrições referentes à seção 4.2.3. A coluna de **Status** pode apresentar as respostas “Associação” ou “Não-associação”. Quando se tem “Associação” significa que não ocorreu diferença entre o valor da restrição inicial e o valor necessário para que fosse alcançando a solução ótima, ou seja, tem-se uma restrição justa, sem folgas. No caso de surgir “Não-associação” significa que ocorreu uma diferença ou ajuste no valor da célula variável com relação à restrição. Assim, surge uma folga entre o valor original e o valor final.

A coluna de **Margem de Atraso** está relacionada diretamente à coluna de **Status**. Se houver uma diferença (que é a folga) entre o valor original e o obtido no cálculo, **Status** de “Não-associação”, essa grandeza será mostrada na coluna de **Margem de Atraso**. Caso o **Status** seja “Associação”, o valor da Margem de Atraso será 0.

Outro relatório disponível no Solver é o de Relatório de Limites (Tabela 3). Nesse relatório, a planilha apresenta o valor da célula objetivo juntamente com as variáveis definidas no modelo.

Os limites inferiores são os menores valores que uma variável (células ajustáveis tais como a do intoreixo, do  $f_{ck}$ , ou da altura total da laje) pode assumir enquanto as demais células com variação permitida permanecem fixas e, ainda assim, seria possível satisfazer as restrições.

Os limites superiores são os maiores valores que uma célula variável pode assumir, mantendo-se as demais células variáveis fixas e ainda seja possível respeitar todas as restrições na solução do problema.

As colunas de **Resultado/Objetivo** correspondem ao valor da célula a ser otimizada (função objetivo) quando as células variáveis estiverem em níveis máximos ou mínimos.

Pode ser visto na Tabela 3 o relatório de limites obtido após o processo de otimização de uma vigota treliçada não protendia para o vão de 8m de comprimento.

**Tabela 3:** Relatório de limites do Solver

Objetivo		
Célula	Nome	Valor
\$G\$184	Flecha total	3,200 cm

Variável			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
\$C\$10	Relação de h	0,061	#N/D	#N/D	#N/D	#N/D
\$C\$22	$f_{ck}$ II	37,1 MPa	25,0 MPa	7,7 MPa	50,0 MPa	1,6 MPa
\$C\$40	Largura EPS	34,8 cm	20,0 cm	2,3 cm	55,0 cm	4,8 cm

**Fonte:** Autor (2016)

Observa-se que o relatório apresenta todas as variáveis definidas para o modelo, e quando não são impostos limites inferiores e/ou superiores o relatório apresenta o termo #N/D para indicar que tal variável pode assumir qualquer valor real.

O relatório de Sensibilidade (Tabela 4) apresenta a avaliação realizada após a identificação do resultado otimizado para solução de um problema. Quando se chega a uma solução ótima é indispensável que se proceda uma crítica ao modelo diante de possíveis mudanças nas variáveis que estejam relacionadas à função objetivo. Essa ação é definida como etapa de pós-otimização.

**Tabela 4:** Relatório de sensibilidade do Solver

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Gradiente
\$C\$10	Relacao de h	0,060530804	0
\$C\$22	fck II	37,0557072	0
\$C\$40	Largura EPS	34,84146577	0

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Lagrange Multiplicador
\$C\$58	Intereixo EPS	44,84146577	0
\$C\$58	Intereixo EPS	44,84146577	0
\$G\$184	Flecha total	3,199986318	0

**Fonte:** Autor (2016)

A sensibilidade está diretamente relacionada com a possibilidade de se variar uma célula ajustável dentro de um determinado limite e ainda permanecer com uma solução ótima.

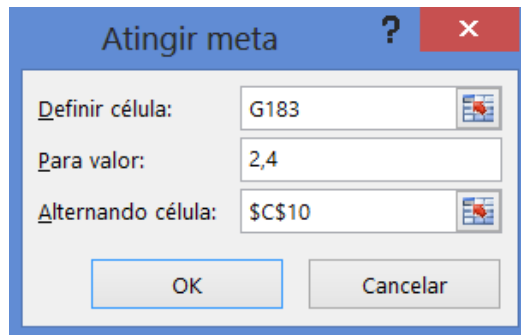
#### 4.2.1 Espaço de busca

O espaço de busca ou região viável é a região do espaço definido pelas variáveis de decisão, delimitada pelas restrições, em cujo interior ou em cuja fronteira se localiza o cenário ótimo da função objetivo.

Para delimitar esse espaço fez-se uso da ferramenta Atingir Meta. Esse recurso permite que se alcance um determinado valor para alguma “equação” que se tenha no dimensionamento. Porém, é permitido que seja alterado um único parâmetro, como pode ser percebido na Figura 34.



**Figura 34:** Ferramenta para definição do espaço de busca



Atingir meta

Definir célula: G183

Para valor: 2,4

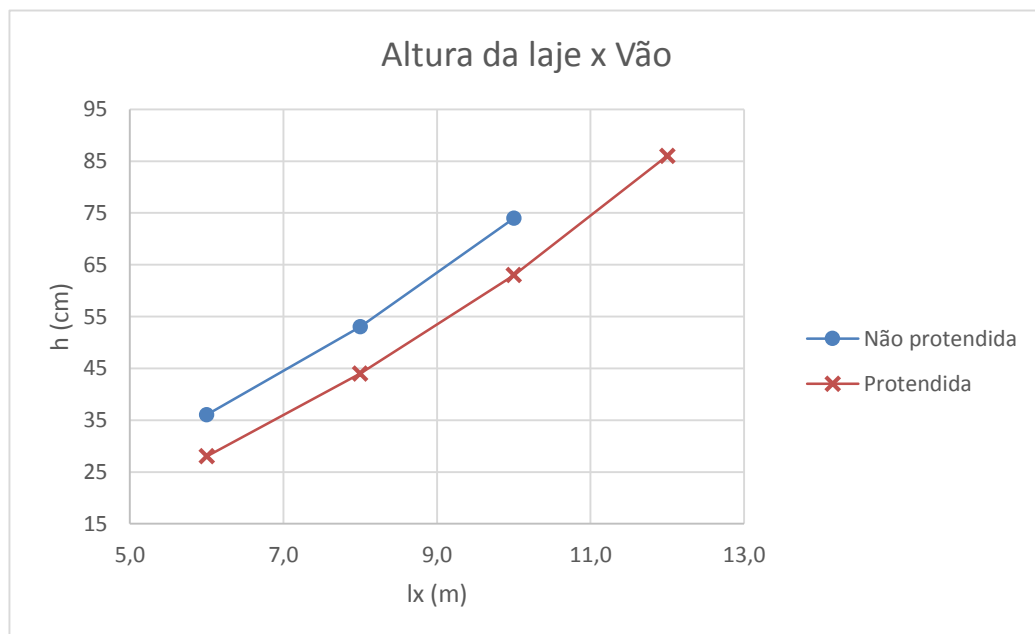
Alternando célula: \$C\$10

OK Cancelar

Fonte: Autor (2016)

Nessa situação, tem-se o objetivo de definir a célula que contém a função da flecha final para o valor máximo permitido pela ABNT NBR 6118:2014. Por exemplo, para lajes que possuam um intereixo de 47 cm, concreto C30, EPS como material de enchimento, e definidas para regiões com CCA II, consegue-se alterar apenas a variável altura a fim de ser obtido a flecha limite, logo essa única variável se torna o valor mínimo para a altura. Esse recurso pode ser aplicado para variados vãos, contudo, deve-se observar qual o valor limite para cada vão e adicioná-lo cada vez que se fizer uso do Atingir Meta. Os limites estabelecidos para o espaço de busca desse trabalho estão representados graficamente na Figura 35.

**Figura 35:** Alturas mínimas das lajes para obtenção da flecha máxima



Fonte: Autor (2016)

#### **4.2.2 Considerações sobre as limitações dos métodos de otimização e convergência**

Com relação aos demais métodos de otimização disponíveis na planilha eletrônica, foram testados. Contudo, não foi possível realizar o processo de otimização considerando o método linear do processo LP Simplex, visto que para o dimensionamento existem algumas equações que são do segundo, terceiro ou até quarto grau, como por exemplo as equações utilizadas para o cálculo da flecha e momentos de Inércia.

Na aplicação do processo Evolutionary foram realizadas tentativas de solução, contudo não produziram nenhuma alteração no valor do objetivo final e as células variáveis praticamente não alteraram durante o processo. Apesar da tentativa de diminuir a sensibilidade das células variáveis e a precisão do objetivo final, com o intuito de reduzir o número de testes do método, o Solver não gerou nenhum cenário melhor que o obtido com os valores de pré-dimensionamento. Além disso, quando se opta pelo método Evolutionary, o processo necessita de um tempo muito superior aos demais métodos para processar os cálculos.

Durante a realização do processo de otimização, a função objetivo e as restrições influenciaram a convergência na busca da solução ótima. Nas tentativas iniciais para otimização da função objetivo e/ou restrições, houveram situações com patamares (pouca sensibilidade à variação das variáveis) para alguns intervalos das variáveis e comportamento exponencial (muita sensibilidade) para outros intervalos.

# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS E ANÁLISES

### 5.1 Otimização do comportamento de lajes formadas por vigotas treliçadas

Este capítulo contém os resultados e análises do dimensionamento e otimização do comportamento de lajes nervuradas formadas por vigotas treliçadas sem e com protensão. As vigotas foram dimensionadas para situações com vãos de 6 m a 16 m, para as vigotas treliçadas protendidas foi considerada a possibilidade de se ter elementos com 1 ou com 2 fios de protensão.

Os parâmetros ou variáveis que definem a otimização do sistema de lajes nervuradas, são: a função objetivo, escrita em função das variáveis de projeto, com a finalidade de se alcançar a flecha limite e a minimização do peso próprio da laje; as restrições de projeto, que são os limites ou condições a serem respeitados no processo de busca do resultado ótimo.

A flecha limite é uma grandeza física, definida na seção 13.3 da ABNT NBR 6118:2014 como valores práticos utilizados para a verificação em serviço do estado-limite de deformações excessivas da estrutura e, considerando as situações do estudo, limita-se a no máximo 0,40% do comprimento do vão ( $L/250$ ).

A escolha do menor peso como função objetivo é decorrência do interesse em alcançar vantagens não apenas para os elementos da laje, mas também para os outros elementos estruturais que compõem todo o sistema estrutural.

Todas as lajes analisadas neste trabalho são nervuradas unidirecionais, consideradas sem continuidade e tiveram o dimensionamento realizado entre os domínios 2 e 3. As treliças padronizadas que fazem parte do banco de dados do processo de dimensionamento são as apresentadas na Tabela 5. Ressalta-se que todas elas são constituídas por aço CA-60.

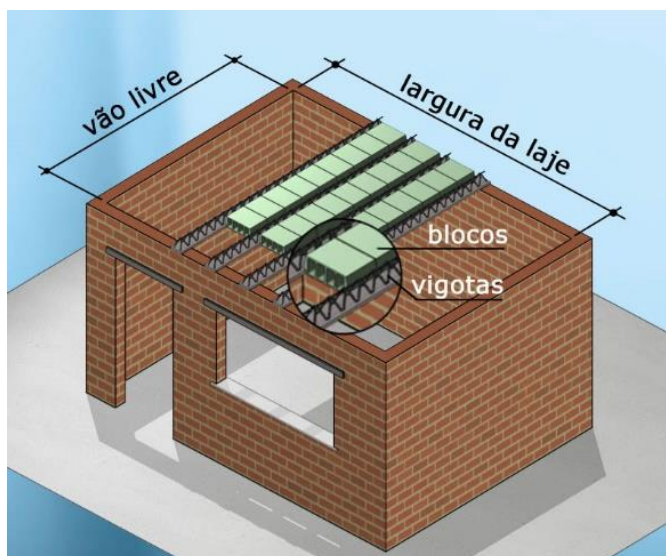
**Tabela 5:** Classificação e características das treliças disponíveis na rotina de cálculo

Designação		Peso	Altura	Diâmetros (mm)		
Gerdau	NBR 14862	(kg/m)	(cm)	Banzo Sup.	Diagonal	Banzo Inf.
TG 8 L	TR 08644	0,735	8	6	4,2	4,2
TG 8 M	TR 08645	0,821	8	6	4,2	5
TG 12 M	TR 12645	0,886	12	6	4,2	5
TG 12 R	TR 12646	1,016	12	6	4,2	6
TG 16 L	TR 16745	1,032	16	7	4,2	5
TG 16 R	TR 16746	1,168	16	7	4,2	6
TG 20 L	TR 20745	1,111	20	7	4,2	5
TG 20 R	TR 20756	1,446	20	7	5	6
TG 25 L	TR 25856	1,686	25	8	5	6
TG 25 R	TR 25857	1,855	25	8	5	7

Fonte: Autor (2016)

Esquemáticamente pode ser visto na Figura 36 os parâmetros geométricos envolvidos na otimização. O vão livre é a distância que as vigotas devem vencer, enquanto que a largura da laje serve de apoio para as vigotas. A quantidade de vigotas pode ser obtida dividindo-se o valor da largura da laje pela distância do entreixo.

**Figura 36:** Detalhes sobre o arranjo geométrica das lajes



Fonte: STG (2006)

## 5.2 Otimização para atingir flecha limite em lajes não protendidas

Uma primeira análise para o caso de uma laje com 8 m de vão, com vigotas treliçadas sem protensão é apresentada com o objetivo final de atingir a flecha limite. Na Tabela 6 são apresentadas as variáveis de interesse para o dimensionamento tais como o entreixo, a área de armadura da seção transversal, a altura da laje e o  $f_{ck}$ . Destaca-se que os valores escritos na linha de iteração “0” são oriundos do pré-dimensionamento.

**Tabela 6:** Laje sem protensão - vão de 8 metros – flecha limite

Objetivo --> Flecha final = Flecha Limite						
Vão de 8 m - Flecha limite (3,20 cm)						
Iteração	Altura (cm)	$F_{ck}$ (MPa)	Entreixo (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Peso (kN)	Flecha (cm)
0	40	30	47,0	1,929	533,35	15,27
1	45	30	47,0	1,929	568,48	8,081
2	44,9	30,2	46,3	1,929	571,57	7,999
3	43,8	30,5	40,0	1,709	606,14	7,845
4	48,8	30,5	40,0	1,547	647,10	4,327
5	49,2	34,1	40,0	1,547	650,19	3,2

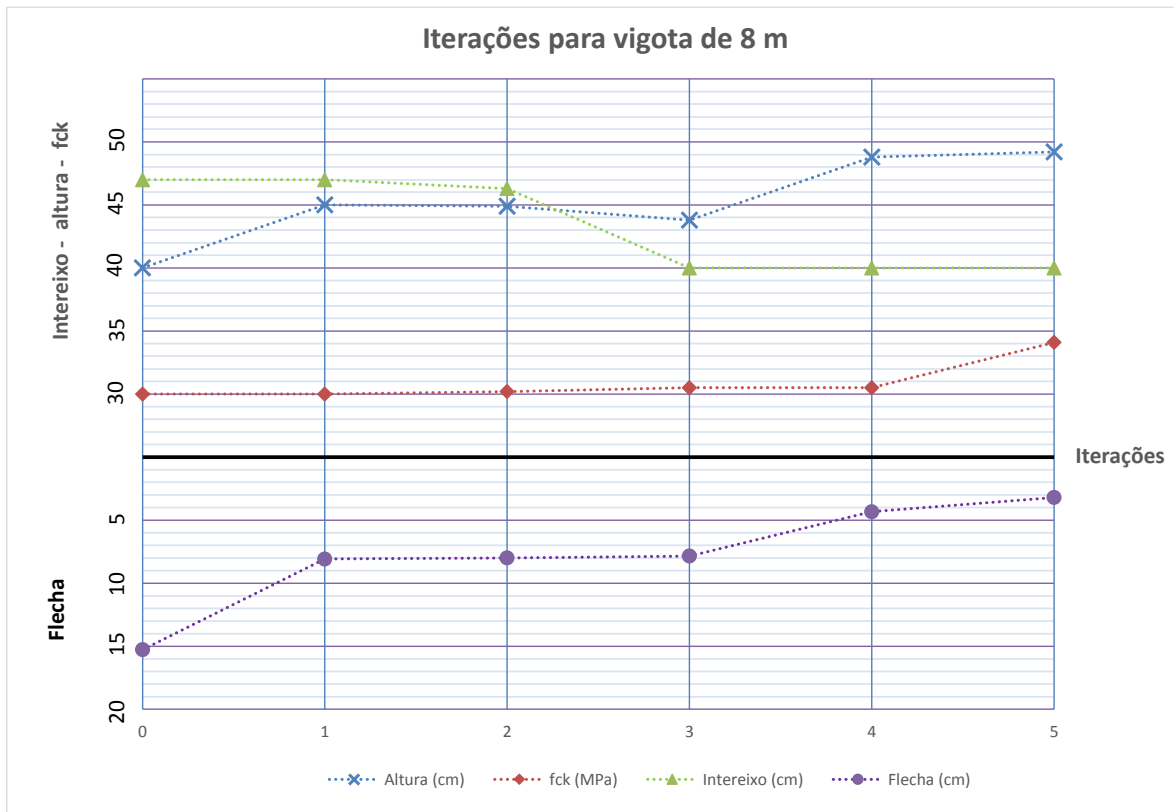
Fonte: Autor (2016)

O valor em destaque na Tabela 6 é o objetivo final alcançado em decorrência das iterações do processo, ou seja, atingir a flecha de 3,2 cm. Nessa situação, a convergência para valor de flecha limite ocorreu com 5 iterações, nas quais houveram acréscimos em cerca de 25% na altura da laje, 14% no  $f_{ck}$ , 22% no peso total da laje e reduções por volta de 15% no entreixo e 20% para a área de aço quando comparados aos valores de partida.

A Figura 37 permite observar simultaneamente o ajuste de algumas variáveis em busca da solução ótima no decorrer de cada iteração. Também, se pode observar o comportamento de aproximação da função objetivo para o valor final.

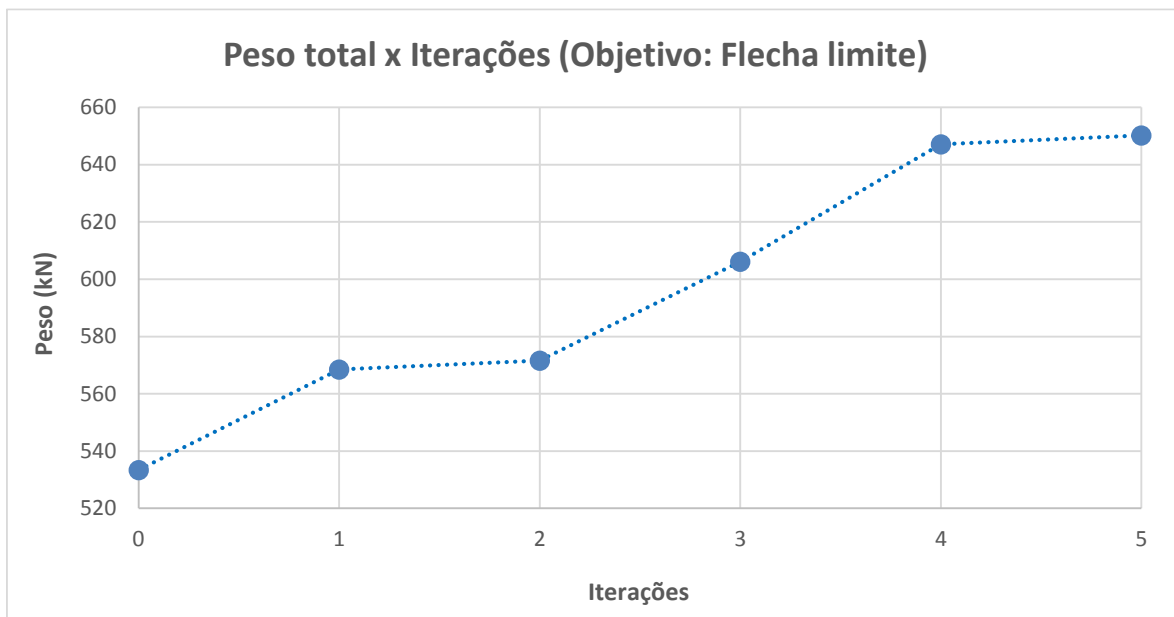
Na Figura 38 é ilustrado o comportamento do peso próprio da laje em cada uma das iterações. Para as situações em que a função objetivo era alcançar a flecha limite, o peso próprio da laje foi tido apenas como um parâmetro em observação. Para o vão de 8 m, o resultado obtido no peso próprio da laje foi de 650,19 kN.

**Figura 37:** Resultados das iterações do processo de otimização para a flecha limite de uma laje sem protensão com 8 m de vão



Fonte: Autor (2016)

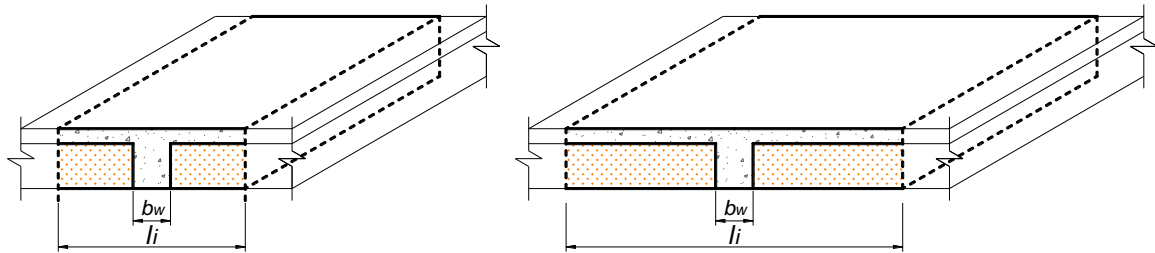
**Figura 38:** Peso total da laje sem protensão com 8 m de vão – flecha limite



Fonte: Autor (2016)

Observou-se que o processo de otimização conseguiu convergir para o valor de flecha limite definido. Contudo, diante dos valores para os entreixos estarem reduzindo no decorrer do processo de iteração, surgiu a preocupação com relação ao peso final da laje, para uma análise mais clara é necessário observar a Figura 39.

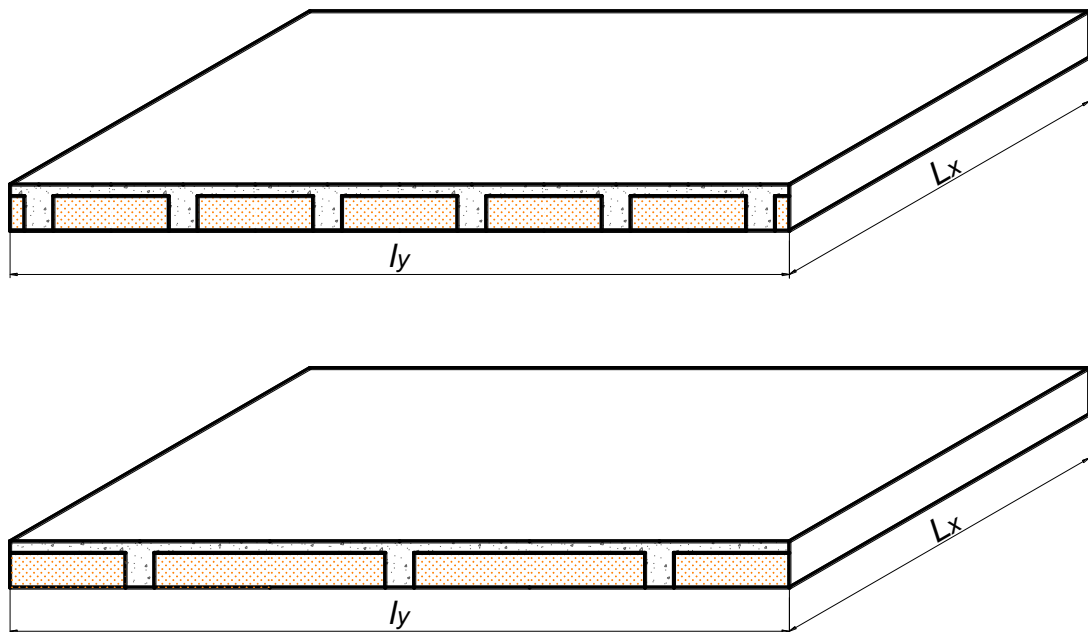
**Figura 39:** Inteiro para região de influência de uma nervura



Fonte: Autor (2016)

De fato, considerando a região de influência para uma nervura apenas, o peso diminui com a redução do inteiro. Entretanto, se for analisada a composição total da laje o valor do peso é inversamente proporcional à redução do inteiro das nervuras, como se observa na Figura 40.

**Figura 40:** Quantidade de nervuras considerando a variação do inteiro



Fonte: Autor (2016)

### 5.2.1 Minimização do peso total em laje não protendida

Ao ser definida a função objetivo como minimização do peso-próprio da laje, também foram mantidas as mesmas características para a seção de concreto armado, material de enchimento e os materiais de revestimento. Contudo, obteve-se para o peso da laje o valor de 500,88 kN, configurando uma redução na ordem de 23%.

No desenvolvimento do processo de otimização com objetivo de minimizar o peso total da laje, o cálculo da flecha final passou a ser considerada como uma restrição de cálculo, cujo valor a ser aplicado dependia do comprimento do vão. Os valores obtidos no processo iterativo são mostrados na Tabela 7 e a Figura 41 ilustra o comportamento das variáveis na busca do menor peso total da laje.

**Tabela 7:** Laje sem protensão – vão de 8 metros – menor peso com flecha limite

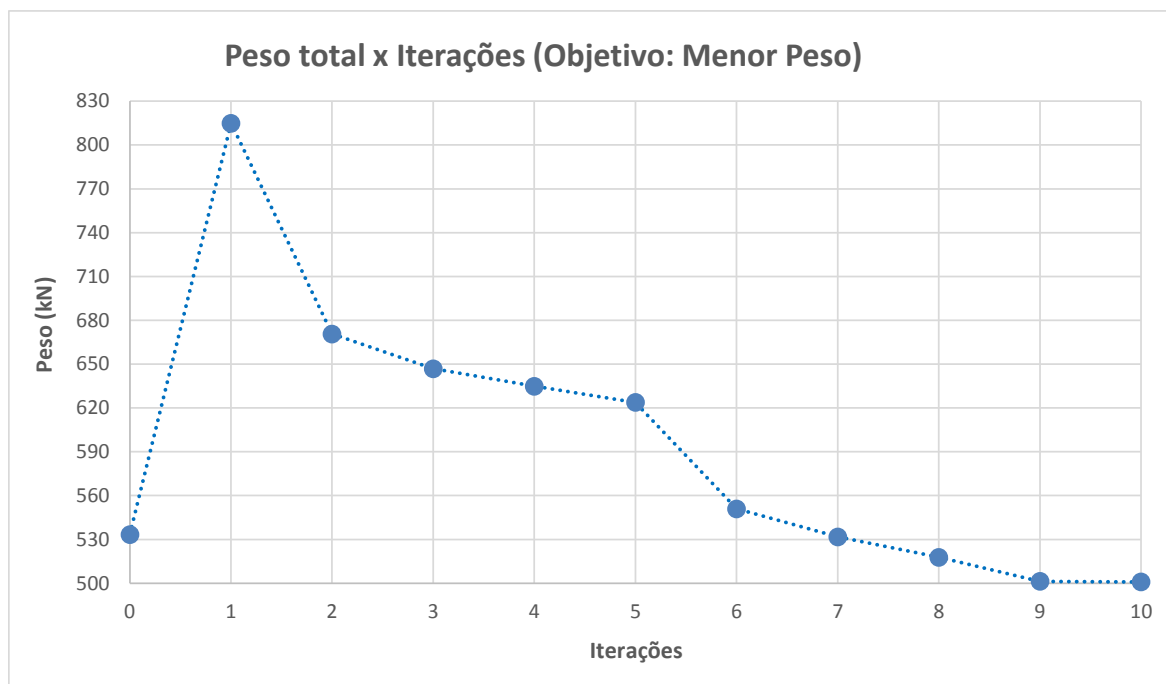
Objetivo --> Menor Peso total							
Vão de 8 m – Ação accidental de 1,5 kN/m <sup>2</sup>							
Valores de partida --> Pré-dimensionamento							
	Iteração	Altura (cm)	fck (MPa)	Inteiroixo (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	Flecha (cm)	Peso (kN)
Partida	0	40	30	47	1,929	15,27	533,35
1ª	1	80	30	46,9	1,426	0,302	814,96
2ª	2	60	30	47,4	1,547	1,586	670,65
3ª	3	56,5	30	47,3	1,547	2,247	646,87
4ª	4	54,7	30	47,3	1,547	2,7	634,92
5ª	5	53,1	30	47,2	1,709	3,2	623,76
6ª	6	56,2	30,2	65	1,929	3,2	550,98
7ª	7	52,4	36,2	65	1,929	3,2	531,79
8ª	8	49,7	41,5	65	2,494	3,2	517,77
9ª	9	46,5	49,8	65	2,494	3,2	501,24
10ª	10	46,4	50	65	2,494	3,2	500,88

Fonte: Autor (2016)

Como se observa, foi possível chegar a um novo valor para o peso total da laje e manter o limite estabelecido para a flecha limite. Destaca-se ainda que o número de iterações para a otimização convergir ao valor ótimo foi superior à situação da Seção 5.1.1.



**Figura 41:** Minimização do peso total da laje sem protensão com 8 m de vão



Fonte: Autor (2016)

### 5.2.2 Análise da variação da ação accidental

A ação accidental é a carga distribuída sobre a laje em decorrência da sua utilização. Cada edificação tem uma característica própria de ocupação de ambientes que resultam em carregamentos distintos para as lajes. A ABNT NBR 6120:1980, sugere valores para cargas accidentais mínimas que devem ser adotadas para diferentes edificações, os valores estão disponíveis em uma tabela no anexo deste trabalho.

De forma geral, as edificações que possuem potencial para adotar soluções que utilizam lajes nervuradas formadas por vigotas treliçadas são os edifícios residenciais. Nesses edifícios o valor mínimo a ser considerado para ação variável é de 1,5 a 2,0 kN/m<sup>2</sup>, dependendo do ambiente. Na **Tabela 8** é apresentado o dimensionamento e otimização considerando as mesmas condições da laje da seção 5.2.1, porém o valor da ação accidental foi admitido como 2,0 kN/m<sup>2</sup>.

**Tabela 8:** Laje sem protensão – vão de 8 metros – menor peso com flecha limite - Ação acidental de 2,0 kN/m<sup>2</sup>

Objetivo --> Menor Peso total							
Vão de 8 m – Acidental de 2,0 kN/m <sup>2</sup>							
Valores de partida --> Pré-dimensionamento							
	Iteração	Altura (cm)	fck (MPa)	Intereixo (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	Flecha (cm)	Peso (kN)
<b>Partida</b>	<b>0</b>	40	30	47	2,494	14,31	533,35
<b>1ª</b>	<b>1</b>	80	30	46,9	1,426	0,305	814,94
<b>2ª</b>	<b>2</b>	60	30	47,4	1,709	1,60	670,63
<b>3ª</b>	<b>3</b>	56,5	30	47,3	1,709	1,709	646,87
<b>4ª</b>	<b>4</b>	54,7	30	47,3	1,709	2,72	634,91
<b>5ª</b>	<b>5</b>	53,2	30	47,2	1,709	3,2	624,72
<b>6ª</b>	<b>6</b>	56,2	30,2	65	1,929	3,2	550,75
<b>7ª</b>	<b>7</b>	52,4	36,2	65	2,494	3,2	531,70
<b>8ª</b>	<b>8</b>	49,8	41,5	65	2,494	3,2	518,22
<b>9ª</b>	<b>9</b>	46,5	49,8	65	2,494	3,2	501,68
<b>10ª</b>	<b>10</b>	46,5	50	65	2,494	3,2	501,48

Fonte: Autor (2016)

Diante do exposto na **Tabela 8** observou-se que a flecha inicial para a sobrecarga de 2,0 kN/m<sup>2</sup> era de 14,31 cm, o fato chamou a atenção por conta de o valor ser inferior à flecha inicial de 15,27 cm considerando uma sobrecarga de 1,5 kN/m<sup>2</sup>. Após ser feita uma análise dos outros fatores que compõem o dimensionamento, constatou-se que o acréscimo de 0,5 kN/m<sup>2</sup> provocou o aumento da área efetiva de aço de 1,929 cm<sup>2</sup> para 2,494 cm<sup>2</sup> e consequentemente contribuiu para a redução da flecha inicial.

Observando-se a evolução do processo de otimização, nas primeiras iterações o valor do peso total era menor em função de se ter uma área de aço maior, contudo, analisando o resultado final para os dois valores de sobrecarga com vão de 8 m, percebe-se que a área de aço efetiva foi de 2,294 cm<sup>2</sup> e por conta de uma diferença de 0,10 cm na altura total da laje, o peso total para a laje com ação acidental de 2,0 kN/m<sup>2</sup> foi superior.

Houve ainda a tentativa de dimensionamento e otimização considerando uma ação acidental de 3,0 kN/m<sup>2</sup>, assim como era esperado para o pré-dimensionamento, a área de aço efetiva foi maior e a flecha inicial menor. Porém, para essa situação não foi possível realizar o dimensionamento que atendesse à flecha máxima da ABNT NBR 6118:2014 em virtude da limitação imposta para a área de aço adicional.

### 5.2.3 Análise da influência dos valores de partida das variáveis

Devido às variações existentes na quantidade de ciclos no processo de otimização, foram testadas outras situações para o início das iterações. Essa análise tem como interesse validar a influência dos valores de partida tanto para o número total de iterações, quanto para os resultados obtidos após a convergência.

São dispostas a seguir a Tabela 9 que contém valores de partida para a altura,  $f_{ck}$  e intoreixo inferiores aos obtidos no pré-dimensionamento, a Tabela 10 que contém valor de partida para a altura superior ao obtido no pré-dimensionamento. A Tabela 11 contém valor de partida da altura total da laje superior ao valor esperado com o dimensionamento, por exemplo, a flecha inicial nessa condição era de 2,35 cm enquanto que para o vão de 8 m o limite é de 3,20 cm.

**Tabela 9:** Valores de partida inferiores aos do pré-dimensionamento

GRG2 - Objetivo --> Menor Peso total							
Vão de 8 m							
Partida --> Abaixo do pré-dimensionamento							
	Iteração	Altura	fck	Intoreixo	As (cm <sup>2</sup> )	Flecha	Peso (kN)
Partida	0	36	30	45	2,494	22,15	514,62
1ª	1	76	30	44,9	1,426	0,39	808,23
2ª	2	56	30	45,4	1,547	2,28	657,9
3ª	3	53	30	45,3	1,547	3,13	636,64
4ª	4	52,8	30	45,3	1,547	3,2	635,24
5ª	5	56,2	30,2	65	1,929	3,2	550,95
6ª	6	52,4	36,2	65	1,929	3,2	531,76
7ª	7	49,7	41,5	65	2,494	3,2	517,74
8ª	8	46,5	49,8	65	2,494	3,2	501,21
9ª	9	46,4	50	65	2,494	3,2	500,88

Fonte: Autor (2016)

**Tabela 10:** Valores de partida superiores aos do pré-dimensionamento

Partida --> Acima do pré-dimensionamento							
	Iteração	Altura	fck	Intereixo	As (cm²)	Flecha	Peso (kN)
<b>Partida</b>	<b>0</b>	44	30	47,0	1,929	9,15	561,39
<b>1ª</b>	<b>1</b>	84	30	46,9	1,235	0,23	843,08
<b>2ª</b>	<b>2</b>	64	30	47,4	1,426	1,09	698,28
<b>3ª</b>	<b>3</b>	60	30	47,3	1,547	1,584	671,2
<b>4ª</b>	<b>4</b>	56	30	47,2	1,547	2,37	643,91
<b>5ª</b>	<b>5</b>	54	30	47,2	1,547	2,93	630,15
<b>6ª</b>	<b>6</b>	53,1	30	47,1	1,709	3,2	624,19
<b>7ª</b>	<b>7</b>	56,2	30,2	65	1,929	3,2	550,98
<b>8ª</b>	<b>8</b>	52,4	36,2	65	1,929	3,2	531,79
<b>9ª</b>	<b>9</b>	49,7	41,5	65	2,494	3,2	517,77
<b>10ª</b>	<b>10</b>	46,5	49,8	65	2,494	3,2	501,25
<b>11ª</b>	<b>11</b>	<b>46,4</b>	<b>50</b>	<b>65</b>	<b>2,494</b>	<b>3,2</b>	<b>500,88</b>

Fonte: Autor (2016)

**Tabela 11:** Valores de partida superiores aos do dimensionamento/ótimos

Partida --> Acima do dimensionamento							
	Iteração	Altura	fck	Intereixo	As (cm²)	Flecha	Peso (kN)
<b>Partida</b>	<b>0</b>	56,00	30	47	1,547	2,354	645,51
<b>1ª</b>	<b>1</b>	55,60	30	47	1,547	2,448	642,84
<b>2ª</b>	<b>2</b>	54,10	30	47	1,547	2,871	632,15
<b>3ª</b>	<b>3</b>	53,10	30	47	1,709	3,2	624,71
<b>4ª</b>	<b>4</b>	56,20	30,2	65	1,929	3,2	550,99
<b>5ª</b>	<b>5</b>	52,40	36,2	65	1,929	3,2	531,8
<b>6ª</b>	<b>6</b>	49,70	41,5	65	2,494	3,2	517,78
<b>7ª</b>	<b>7</b>	46,50	49,8	65	2,494	3,2	501,26
<b>8ª</b>	<b>8</b>	<b>46,40</b>	<b>50</b>	<b>65</b>	<b>2,494</b>	<b>3,2</b>	<b>500,88</b>

Fonte: Autor (2016)

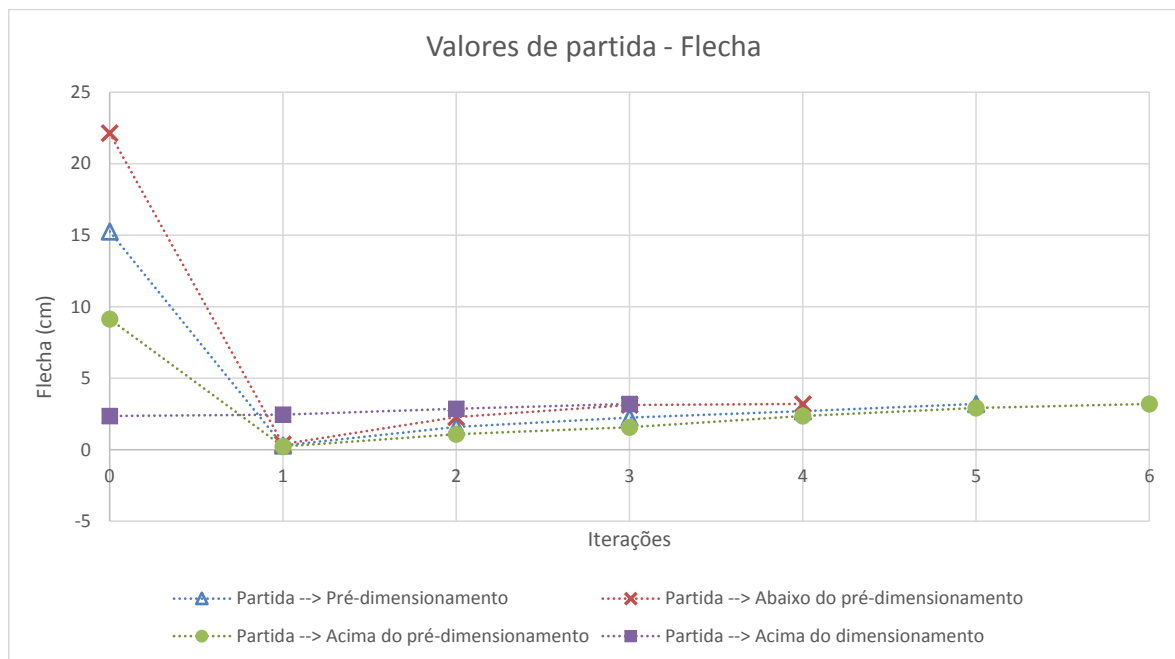
Com relação a análise feita nesta seção, pode-se dizer que a quantidade de iterações realizadas pelo método de otimização é sensível aos valores de partida. Contudo, não se consegue fazer uma definição sobre se iniciar com valores mais próximos do valor objetivo é melhor ou pior para o processo. Por exemplo, observando-se o peso na Tabela 7 o valor inicial foi com 533,35 kN e foram necessárias 10 iterações, na Tabela 9 iniciou-se com 514,62 kN e necessitaram-se de 9 iterações, na Tabela 10 o início se deu com 561,39 kN e foram necessárias 11 iterações, por fim, na Tabela 11 o valor inicial foi de 645,51 kN e necessitaram-se de 8 iterações.

Para a investigação feita nesta seção, o que pode ser considerado como mais importante é o fato de que, independentemente dos valores de partida, os valores encontrados ao final da otimização convergem para um cenário idêntico.

A Figura 42 permite visualizar a influência dos valores de partida no número de iterações até a convergência da flecha final, considerando uma otimização para o menor peso próprio. Na Figura 43 pode ser vista a influência dos valores de partida no número de iterações até a convergência para o menor peso total.

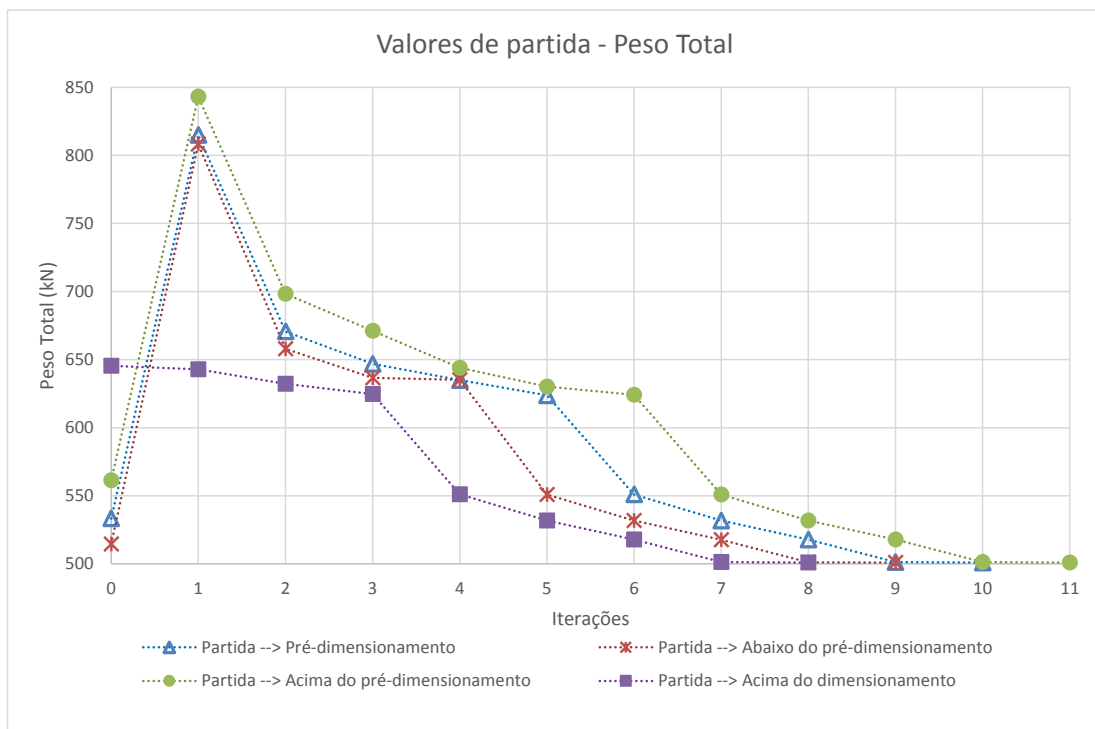
A Figura 44 e a Figura 45 mostram, respectivamente, as variações diante das iterações na altura total da laje e da resistência característica do concreto à compressão na otimização para menor peso próprio total.

**Figura 42:** Influência dos valores de partida na obtenção da flecha limite para o objetivo de menor peso total (laje sem protensão com 8 m de vão)



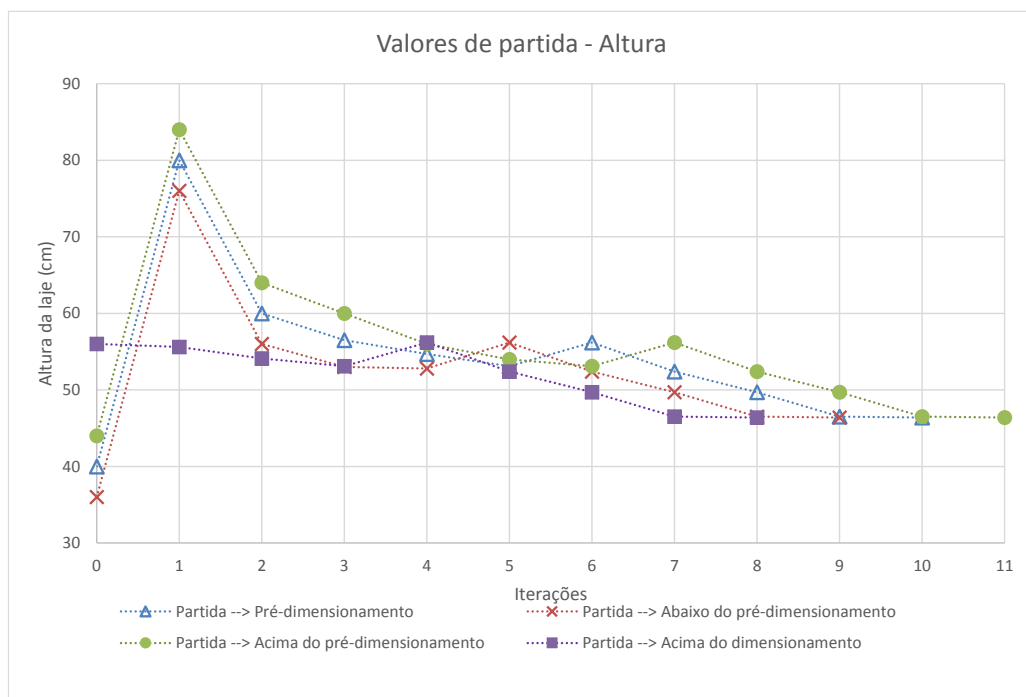
**Fonte:** Autor (2016)

**Figura 43:** Influência dos valores de partida na obtenção do menor peso (laje sem protensão com 8 m de vão)



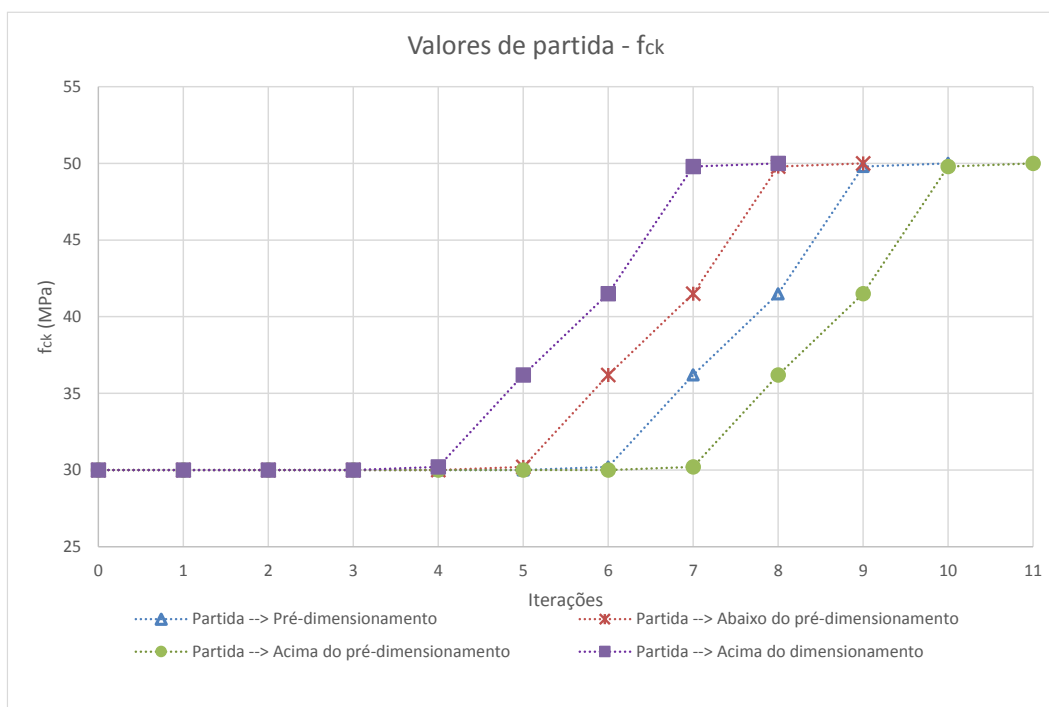
Fonte: Autor (2016)

**Figura 44:** Influência dos valores de partida na obtenção da altura da laje para o objetivo de menor peso total (laje sem protensão com 8 m de vão)



Fonte: Autor (2016)

**Figura 45:** Influência dos valores de partida na obtenção do  $f_{ck}$  para o objetivo de menor peso total (laje sem protensão com 8 m de vão)



Fonte: Autor (2016)

### 5.3 Sistema não protendido x protendido

A seguir são apresentados os resultados para uma variedade de simulações feitas com relação aos vãos das lajes. Para situações com mesmo comprimento de vão e condição de vinculação das lajes, foram calculadas as soluções ótimas para vigotas treliçadas com e sem protensão. Para todos os resultados dispostos a seguir, o método de otimização utilizado é o GRG2 e todas as lajes dimensionadas estão no domínio 2 ou 3.

Foram realizadas otimizações com o objetivo de que a flecha limite fosse alcançada e, em um segundo momento, otimizações para que se obtivessem os menores pesos para as lajes. Os valores apresentados a seguir estão resumidos apenas aos valores de partida e o resultado obtido no procedimento de otimização.

A princípio pretendia-se obter os resultados para vãos de 6 a 12 m. Contudo, devido às limitações impostas às vigotas treliçadas, por exemplo, o espaço para colocação de barras adicionais com no máximo duas barras com diâmetro de 10 mm e os tipos de treliças disponíveis (Tabela 5), impediram o processo de otimização de convergir para valores em que todas as restrições pudessem ser atendidas.

Na Tabela 12 apresenta os resultados obtidos para lajes sem protensão, aplicando como função objetivo que a flecha final fosse igual à flecha limite. Na Tabela 13 são mostrados os resultados para lajes formadas por vigotas treliçadas com dois fios de protensão de 6 mm, também com a função de atingir a flecha limite. Para o vão de 16 m, conforme pode ser visto na Tabela 13, houve falha por abertura excessiva de fissuras.

**Tabela 12:** Parâmetros para nervuras convencionais (sem protensão) em função dos vãos – objetivo flecha limite

Nervura Convencional - Material de enchimento - EPS												
Otimização - GRG Não Linear - <b>Objetivo: Flecha final = flecha limite</b>												
Cenários												
Vão (m)	Altura (cm)		fck (MPa)		Intereixo (cm)		Flecha cm		Peso T (kN)		As (cm²)	
6	30	34,1	30	30,6	47	40	6,87	2,4	260,58	296,11	1,43	1,24
7	35	40,2	30	34,9	47	40	10,43	2,8	381,51	441,04	1,71	1,43
8	40	49,2	30	34,1	47	40	15,27	3,2	533,35	650,19	1,93	1,55
9	45	55,2	30	39,5	47	40	20,46	3,6	719,38	884,74	2,49	1,93
10	50	ERRO	30	ERRO	47	ERRO	ERRO	ERRO	942,89	ERRO	ERRO	ERRO
	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final

Fonte: Autor (2016)

**Tabela 13:** Parâmetros para nervuras protendidas (2 fios) em função dos vãos – objetivo flecha limite

Nervura Protendida - Material de enchimento - EPS - 2 fios de protensão												
Otimização - GRG Não Linear - <b>Objetivo: Flecha final = flecha limite</b>												
Cenários												
Vão (m)	Altura (cm)		fck (MPa)		Intereixo (cm)		Flecha cm		Peso T (kN)		As (cm²)	
6	15	27,6	30	31,4	47	44,9	37,22	2,4	171,07	224,03	2,903	2,903
7	17,5	35,3	30	31,1	47	45,3	53,84	2,8	244,4	340,75	2,903	2,903
8	20	43,8	30	35,3	47	40	74,35	3,2	334,31	585,28	2,903	2,903
9	22,5	53,4	30	35,3	47	40	99,03	3,6	442,22	840,6	2,903	2,903
10	25	63,3	30	27,9	47	50,5	128,14	4	569,53	846,42	2,903	2,903
11	27,5	74,2	30	25	47	56,4	161,98	4,4	717,67	981,02	2,903	2,903
12	30	85,7	30	25	47	56,4	200,81	4,8	888,04	1277,17	2,903	2,903
13	32,5	98,1	30	27,1	47	52	244,97	5,2	1082,08	1838,43	2,903	2,903
14	35	110,9	30	25	47	56,4	294,55	5,6	1301,18	2067,97	2,903	2,903
15	37,5	124,7	30	25	47	56,4	350	6	1546,76	2580,89	2,903	2,903
16	40	139,3	30	25	47	56,4	411,22	6,4	1820,24	3185,32	2,903	2,903
	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final

Fonte: Autor (2016)

Comparando a proposta para vigota sem protensão com vigota protendida e considerando a



função objetivo de flecha final igual à flecha limite, obtiveram-se as variações apresentadas na Tabela 14.

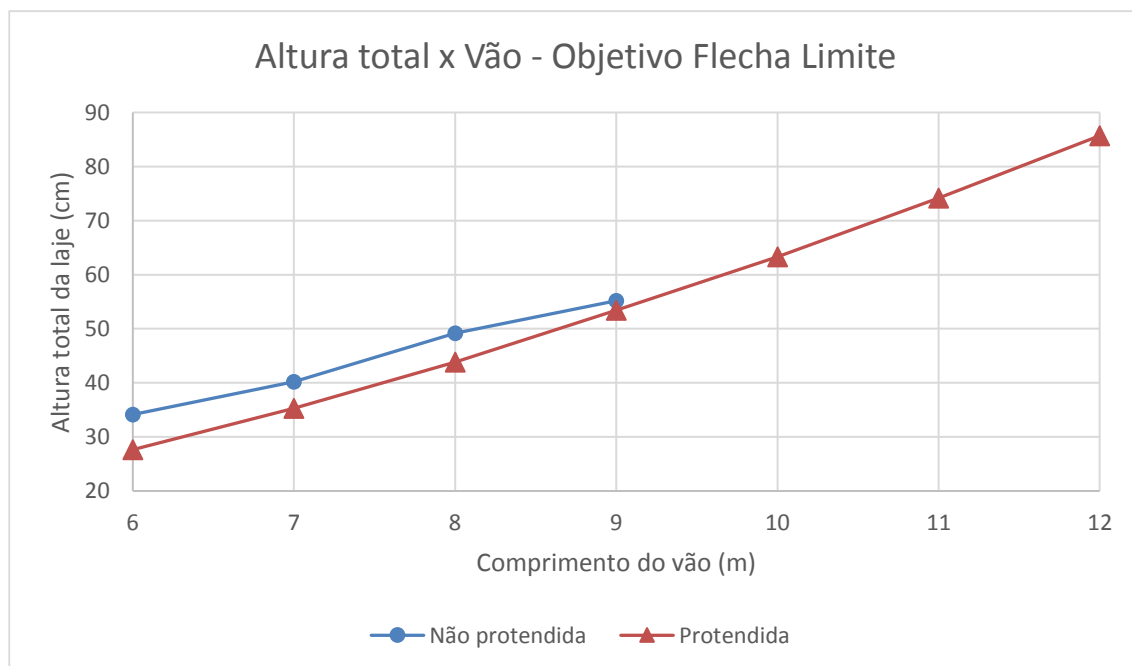
**Tabela 14:** Variação percentual do sistema não protendido para protendido para o objetivo de flecha final igual flecha limite

Variação % de convencional para protendida				
Otimização - GRG Não Linear - <b>Objetivo: Flecha final = flecha limite</b>				
Cenários				
Vão (m)	Altura	fck	Intereixo	Peso T
6	Redução de 19,1%	Aumento de 2,6%	Aumento de 12,3%	Redução de 24,3%
7	Redução de 12,2%	Redução de 10,9%	Aumento de 13,3%	Redução de 22,7%
8	Redução de 11%	Aumento de 3,5%	Manteve	Redução de 10%
9	Redução de 3,3%	Redução de 10,6%	Manteve	Redução de 5%
10	-	-	-	-

Fonte: Autor (2016)

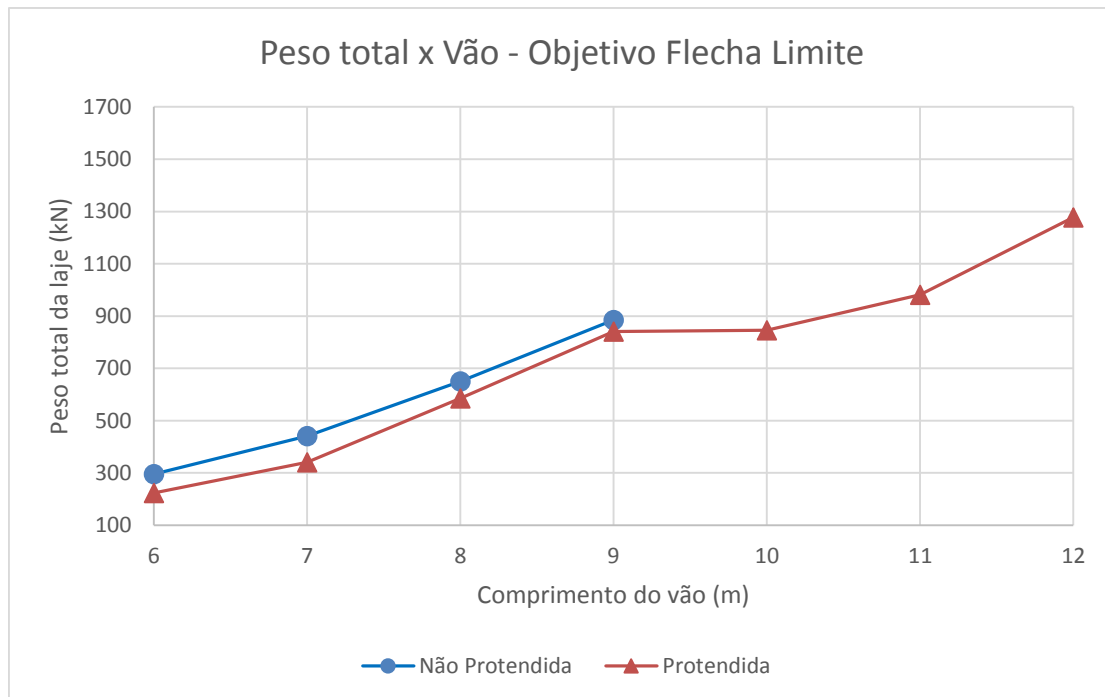
Pode ser visto na Figura 46 e na Figura 47 os cenários de convergência para as vigotas com e sem protensão, em função da altura total e do peso total da laje, respectivamente, para o caso de limitação da flecha.

**Figura 46:** Altura total das lajes com e sem protensão para a situação de limitação da flecha



Fonte: Autor (2016)

**Figura 47:** Peso total das lajes com e sem protensão para a situação de limitação da flecha



Fonte: Autor (2016)

Ao ser definida a função objetivo para resultar em menor peso, houveram melhorias no sentido de aliviar as solicitações permanente. Na Tabela 15 são apresentados os valores para as lajes formadas por vigotas treliçadas sem protensão (convencionais) e a Tabela 16 para as lajes com vigotas treliçadas protendidas com 2 fios.

**Tabela 15:** Parâmetros para nervuras convencionais (sem protensão) em função dos vãos – objetivo menor peso total

Nervura Convencional - Material de enchimento - EPS												
Otimização - GRG Não Linear - Objetivo: Menor Peso próprio total												
Cenários												
Vão (m)	Altura (cm)		fck (MPa)		Intereixo (cm)		Flecha cm)		Peso T (kN)		As (cm²)	
6	30	32,1	30	50	47	65	6,87	2,4	260,58	240,49	1,43	1,71
7	35	39	30	50	47	65	10,43	2,8	381,51	354,37	1,71	1,93
8	40	46,4	30	50	47	65	15,27	3,2	533,35	500,88	1,93	2,49
9	45	55,4	30	49	47	65	20,46	ERRO	719,38	645,02	2,49	ERRO
10	50	ERRO	30	ERRO	47	76,6	ERRO	ERRO	942,89	ERRO	ERRO	ERRO
	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final

Fonte: Autor (2016)

**Tabela 16:** Parâmetros para nervuras protendidas em função dos vãos – objetivo menor peso

Nervura Protendida - Material de enchimento - EPS - 2 fios de protensão												
Otimização - GRG Não Linear - <b>Objetivo: Menor Peso próprio total</b>												
Cenários												
Vão (m)	Altura (cm)		fck (MPa)		Intereixo (cm)		Flecha cm)		Peso T (kN)		As (cm²)	
6	15,0	28,5	30	25	47	56,4	37,22	2,4	171,07	182,25	2,903	2,903
7	17,5	36,2	30	25	47	56,4	53,84	2,8	244,4	273,18	2,903	2,903
8	20,0	44,6	30	25	47	56,4	74,35	3,2	334,31	392,56	2,903	2,903
9	22,5	53,7	30	25	47	56,4	99,03	3,6	442,22	546,00	2,903	2,903
10	25,0	63,6	30	25	47	56,4	128,14	4,0	569,53	739,83	2,903	2,903
11	27,5	74,2	30	25	47	56,4	161,98	4,4	717,67	981,02	2,903	2,903
12	30,0	85,7	30	25	47	56,4	200,81	4,8	888,04	1277,17	2,903	2,903
13	32,5	97,9	30	25	47	56,4	244,97	5,2	1082,08	1636,54	2,903	2,903
14	35,0	110,9	30	25	47	56,4	294,55	5,6	1301,18	2067,97	2,903	2,903
15	37,5	124,7	30	25	47	56,4	350,00	6,0	1546,76	2580,90	2,903	2,903
16	40,0	139,3	30	25	47	56,4	411,22	6,4	1820,24	3185,34	2,903	2,903
	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final

Fonte: Autor (2016)

Na Tabela 17 pode ser visualizada a variação do sistema não protendido para o protendido com o objetivo de se obter o menor peso total.

**Tabela 17:** Variação percentual do sistema não protendido para protendido para o objetivo de menor peso

Variação % de convencional para protendida				
Otimização - GRG Não Linear - <b>Objetivo: Menor Peso próprio total</b>				
Cenários				
Vão (m)	Altura	fck	Intereixo	Peso T
6	Redução de 11,2%	Redução de 37,2%	Redução de 13,2%	Redução de 24,2%
7	Redução de 7,2%	Redução de 37,8%	Redução de 13,2%	Redução de 22,9%
8	Redução de 3,9%	Redução de 29,4%	Redução de 13,2%	Redução de 21,6%
9	Redução de 3,1%	Redução de 28%	Redução de 13,2%	Redução de 15,4%
10	-	-	-	-

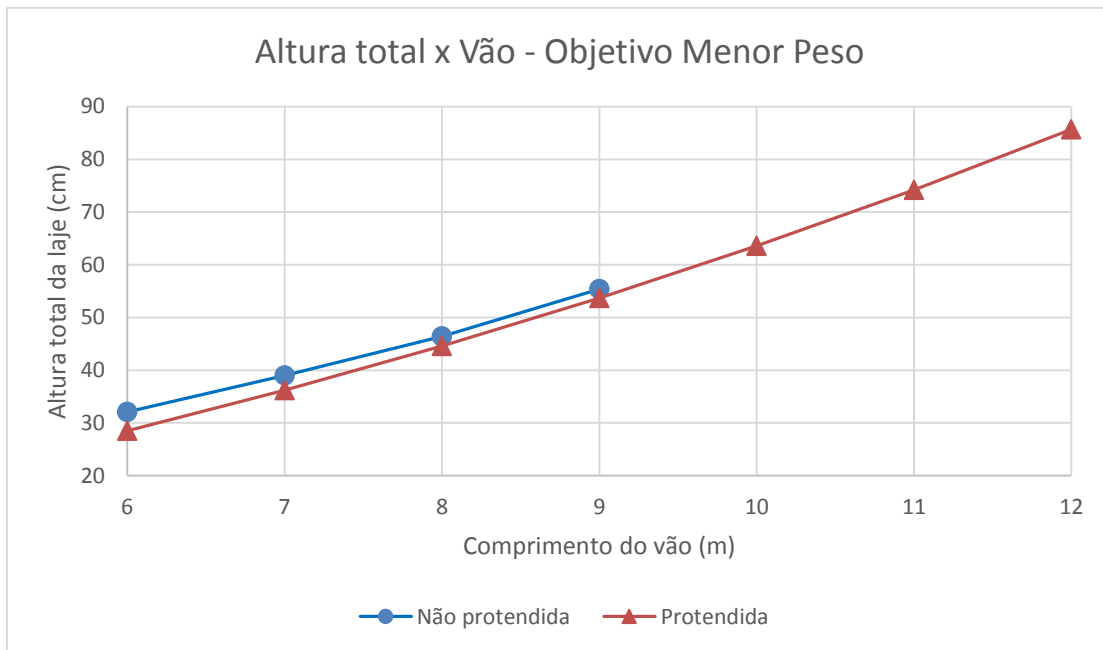
Fonte: Autor (2016)

Destaca-se, na Tabela 17, que nesse processo o valor limite para o dimensionamento de vigotas treliçadas ocorreu com 9 m, por necessitar de uma armadura superior às disponíveis para a sapata de concreto com largura de 12 cm.

Na Figura 48 e na Figura 49 são vistos os resultados do cenário de convergência para as

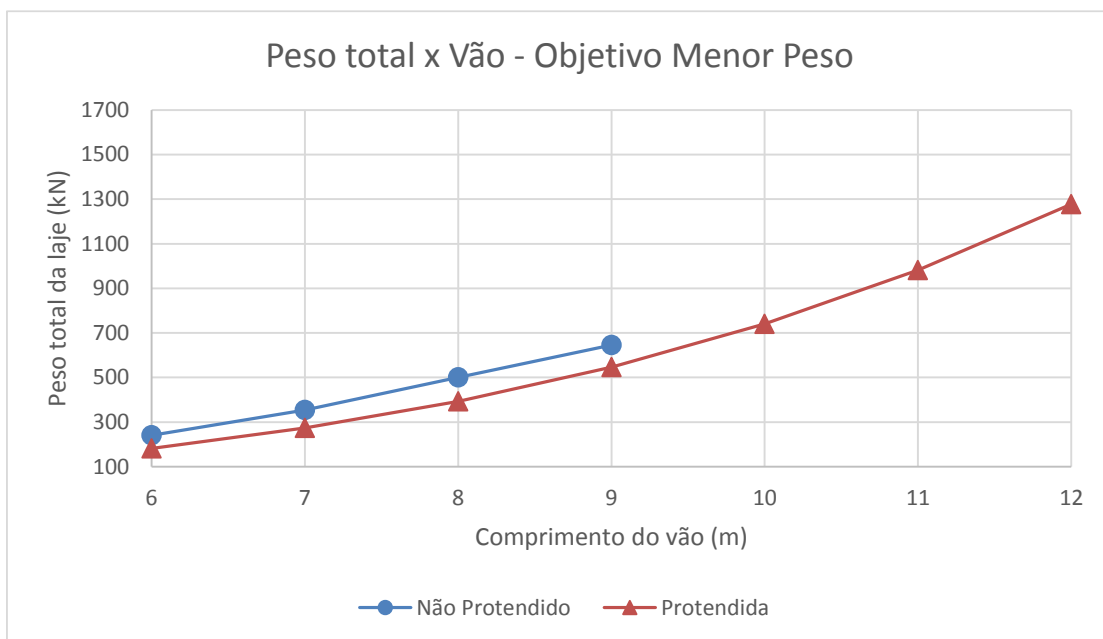
vigotas com e sem protensão, em função dos objetivos da altura total e do peso total da laje, respectivamente, para o caso de minimização do peso total com limitação da flecha.

**Figura 48:** Altura das lajes com e sem protensão para a situação de minimização do peso total da laje



Fonte: Autor (2016)

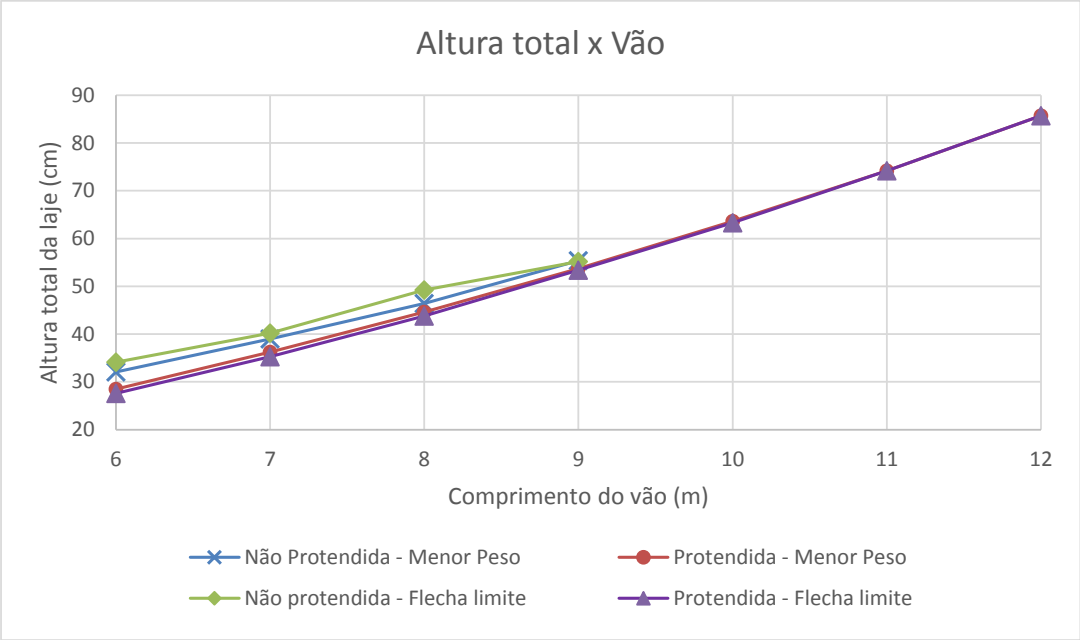
**Figura 49:** Peso total das lajes com e sem protensão para a situação de minimização do peso total da laje



Fonte: Autor (2016)

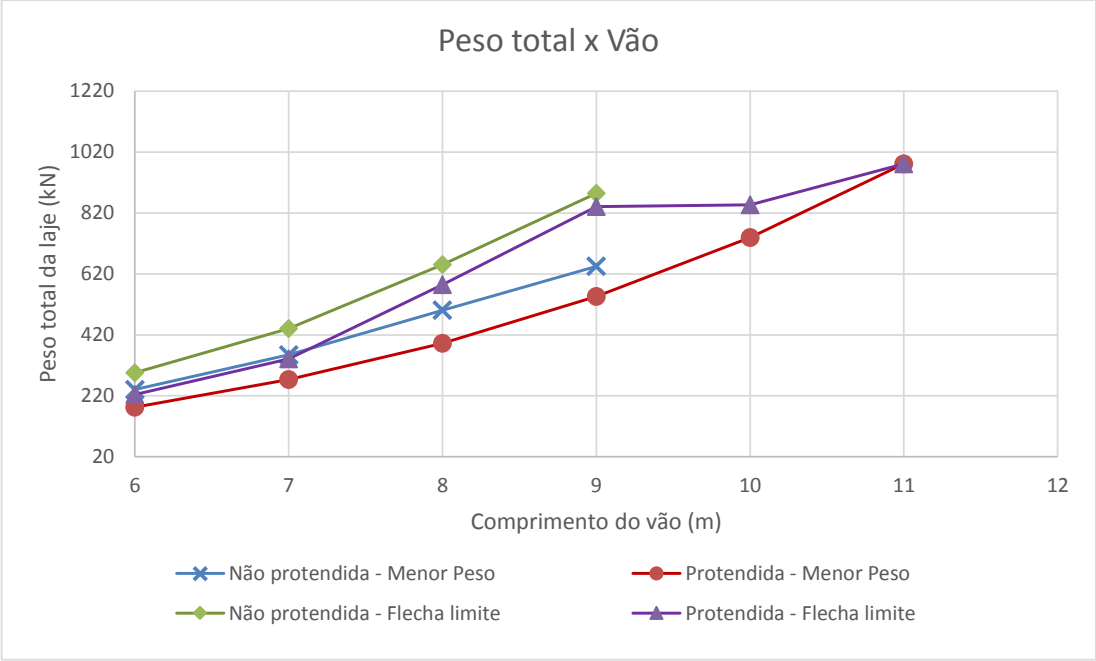
Na Figura 50 e na Figura 51 apresentam-se uma comparação prática entre os objetivos de flecha final igual à flecha limite e menor peso total da laje com flecha limite.

**Figura 50:** Altura das lajes com e sem protensão para as funções objetivo de atingir flecha limite e minimização do peso total da laje com flecha limite



Fonte: Autor (2016)

**Figura 51:** Peso total das lajes com e sem protensão para a situação de atingir flecha limite e minimização do peso total da laje com flecha limite



Fonte: Autor (2016)

Observa-se na Figura 50 que, independentemente da função definida como objetivo, as vigotas treliçadas não protendidas apresentam altura total superior à das vigotas protendidas. Para o vão de 6 m a diferença fica em torno de 19%, enquanto que para o vão de 9 m essa diferença fica em torno de 3%. Também, em termos de peso total da laje, para vãos de 6 m tem-se uma variação de 24% da vigota não protendida para a protendida, enquanto que para o vão de 9 m essa variação fica em torno de 15%, essas variações são justificadas em razão do método de cálculo da vigota sem protensão ter uma certa liberdade para ajustar outras variáveis durante a busca do cenário ótimo, como por exemplo, a área de aço.

## 5.4 Sistema protendido com 1 e 2 fios de protensão

Esta seção apresenta o estudo da alteração na quantidade de fios de protensão utilizados nas vigotas treliçadas. Foram consideradas vigotas treliçadas com um fio de protensão com objetivo de compará-las ao sistema com dois fios protendidos, dispostos na seção anterior. Os resultados organizados na Tabela 18 e na Tabela 19 são os valores obtidos para os objetivos de flecha limite e menor peso próprio respeitando a flecha limite.

**Tabela 18:** Parâmetros para as vigotas com 1 fio de protensão – objetivo flecha limite

Nervura Protendida - Material de enchimento - EPS - 1 fio de protensão												
Otimização - GRG Não Linear - <b>Objetivo: Flecha final = flecha limite</b>												
Cenários												
Vão (m)	Altura		fck (MPa)		Intereixo		Flecha cm)		Peso T (kN)		As (cm²)	
6	15	29,1	30	23,9	47	40	37,22	2,4	171,07	200,81	1,913	1,913
7	17,5	36,4	30	23,9	47	40	53,84	2,8	244,4	304,98	1,913	1,913
8	20	44,5	30	23,9	47	40	74,35	3,2	334,31	444,04	1,913	1,913
9	22,5	53,4	30	23,9	47	40	99,03	3,6	442,22	625,44	1,913	1,913
10	25	63	30	23,9	47	40	128,14	4	569,53	857,49	1,913	1,913
11	27,5	73,5	30	23,9	47	40	161,98	4,4	717,67	1149,32	1,913	1,913
12	30	84,8	30	23,9	47	40	200,81	4,8	888,04	1510,87	1,913	1,913
13	32,5	96,8	30	23,9	47	40	244,97	5,2	1082,08	1952,87	1,913	1,913
	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final	Partida	Final

Fonte: Autor (2016)

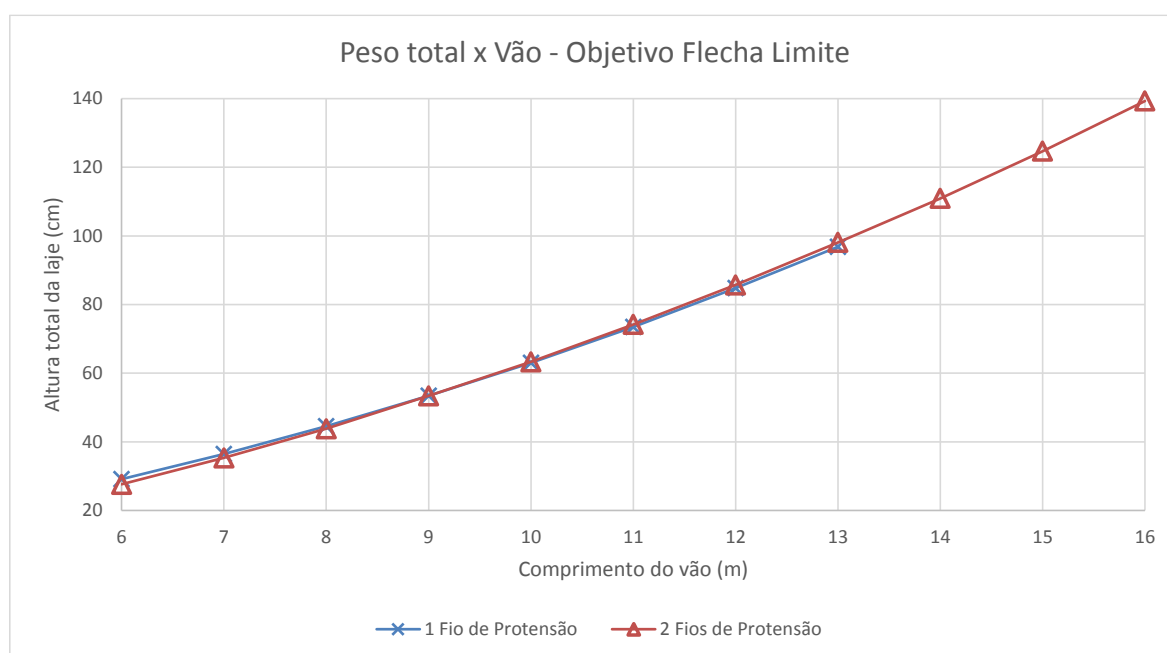
**Tabela 19:** Parâmetros para as vigotas com 1 fio de protensão – objetivo menor peso

Otimização - GRG Não Linear - <b>Objetivo: Menor Peso próprio total</b>												
Cenários												
Vão (m)	Altura		fck (MPa)		Intereixo		Flecha cm)		Peso T (kN)		As (cm²)	
6	15	30,2	30	20	47	47,7	37,22	2,4	171,07	172,51	1,913	1,913
7	17,5	37,5	30	20	47	47,7	53,84	2,8	244,4	257,46	1,913	1,913
8	20	45,5	30	20	47	47,7	74,35	3,2	334,31	368,66	1,913	1,913
9	22,5	54,3	30	20	47	47,7	99,03	3,6	442,22	511,21	1,913	1,913
10	25	63,8	30	20	47	47,7	128,14	4	569,53	690,77	1,913	1,913
11	27,5	74	30	20	47	47,7	161,98	4,4	717,67	913,58	1,913	1,913
12	30	84,9	30	20	47	47,7	200,81	4,8	888,04	1186,42	1,913	1,913
13	32,5	96,6	30	20	47	47,7	244,97	5,2	1082,08	1516,62	1,913	1,913
Partida Final Partida Final Partida Final Partida Final Partida Final Partida Final												

Fonte: Autor (2016)

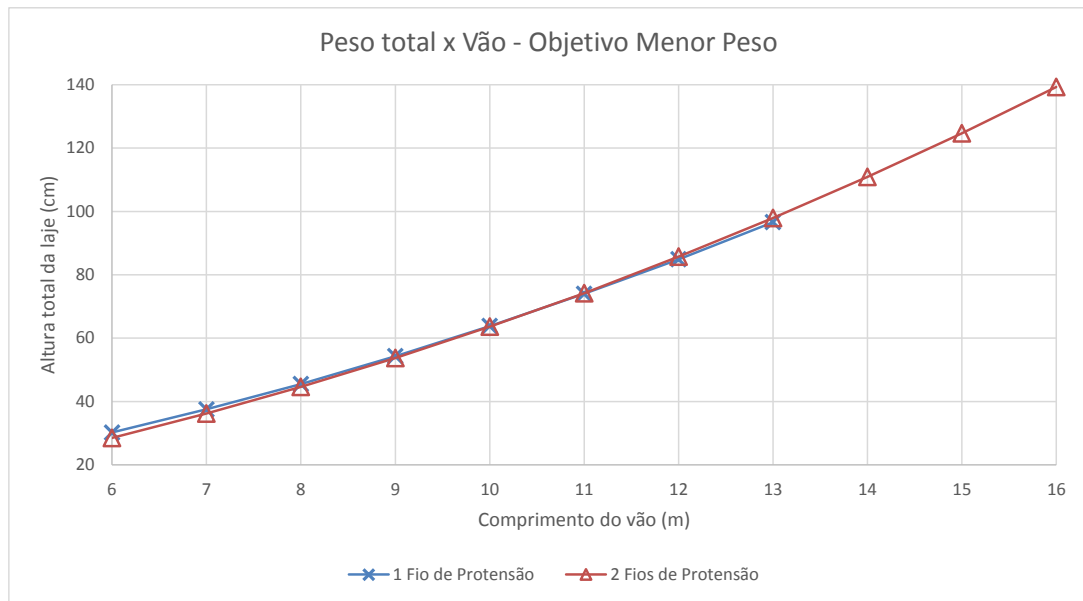
Observou-se que ao ser aplicado apenas um fio de protensão, o limite máximo ocorreu aos 12 m, e a falha ocorrida foi devido à fissuração excessiva. Na Figura 52 e na Figura 53 são feitas análises práticas visuais para essas situações.

**Figura 52:** Altura das lajes com 1 e 2 fios de protensão – função objetivo de flecha limite



Fonte: Autor (2016)

**Figura 53:** Altura das lajes com 1 e 2 fios de protensão – função objetivo menor peso

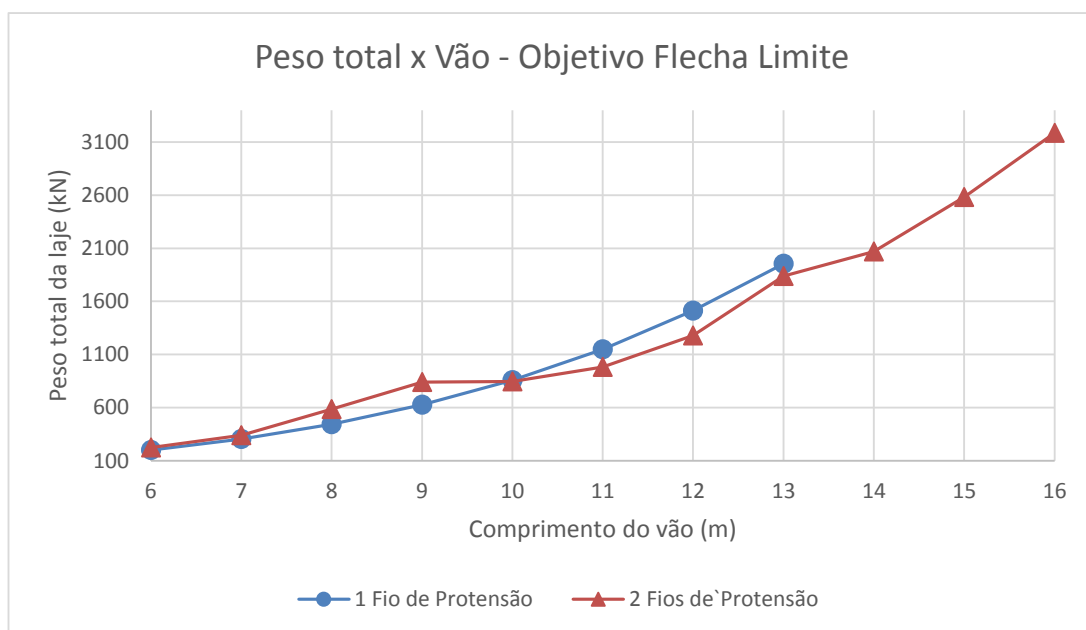


Fonte: Autor (2016)

Em termos visuais, praticamente não se pode observar variações nas alturas finais das lajes com diferentes funções para o objetivo.

Na Figura 54 e na Figura 55 é possível fazer uma comparação visual entre os pesos para lajes com 1 e 2 fios de protensão, sendo a função objetivo atender as condições de flecha final igual à flecha limite e menor peso total da laje respeitando a flecha limite, respectivamente.

**Figura 54:** Peso total das lajes com 1 e 2 fios de protensão – Objetivo flecha limite

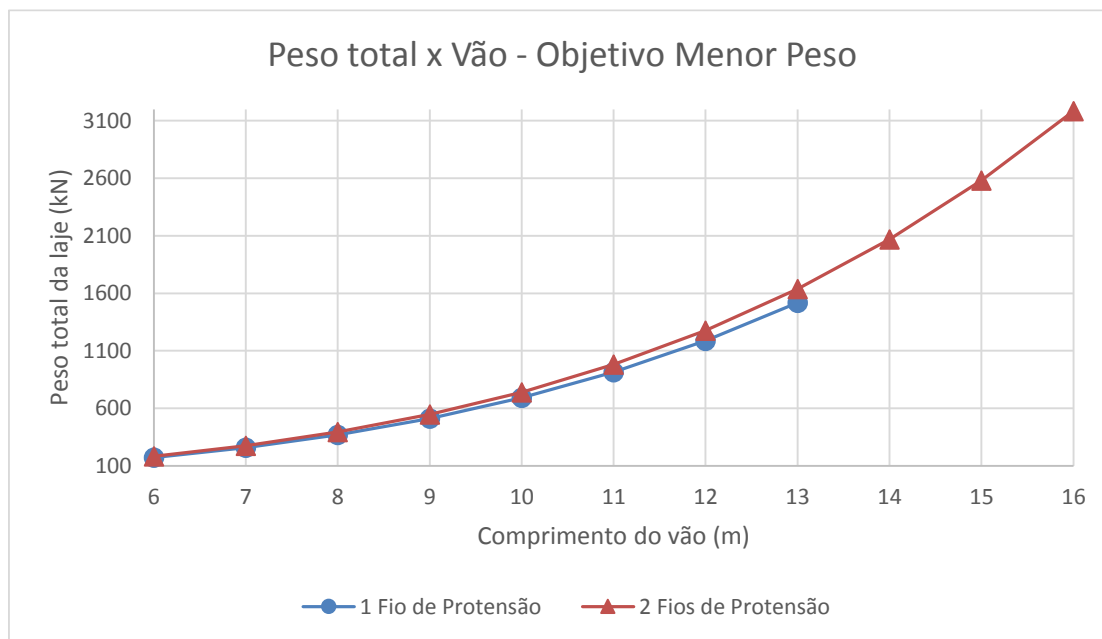


Fonte: Autor (2016)



A mudança ocorrida a partir do vão de 9 m é decorrência do método ter realizado uma variação no sentido de aumentar o entrevão, logo, tem-se a redução do peso total da laje como pode ser visto na Figura 54. Em contrapartida, a partir desse vão o processo de otimização buscou reduzir outra variável, no caso, diminuiu gradativamente os valores de  $f_{ck}$ .

**Figura 55:** Peso total das lajes com 1 e 2 fios de protensão – Objetivo menor peso



**Fonte:** Autor (2016)

Observando-se a Figura 55, percebe-se que com um fio de protensão o peso tende a ser menor a partir de 9 m, contudo, para equilibrar a seção de concreto com a armadura, a otimização reduz o valor do  $f_{ck}$ , em virtude disso, a sapata de concreto que contém o fio protendido fica mais suscetível às perdas de protensão e falhas no elemento estrutural.

Diante do que foi exposto neste capítulo, ficou claro que é possível construir um procedimento de cálculo para as lajes pré-moldadas. Além disso, é possível estruturá-lo em uma planilha eletrônica de modo que se tenha agilidade no dimensionamento e se consiga adequar as variáveis entendidas importantes por meio da otimização.

# CAPÍTULO 6

## CONCLUSÕES

### 6.1 Considerações finais e conclusões

O interesse principal do trabalho foi investigar em que condições o uso de vigotas treliçadas, para lajes nervuradas é mais adequado com ou sem a aplicação da protensão. Ao serem avaliados os resultados, para as limitações estabelecidas neste trabalho, observa-se que para lajes com vãos maiores que 10 m é tecnicamente inviável a adoção de um sistema composto por vigotas pré-moldadas sem que haja a inserção de armadura adicional fora da sapata de concreto ou aplicação da protensão.

Observando todas as dimensões adotadas para os vãos, em termos de desempenho, percebeu-se que as vigotas treliçadas protendidas sempre conseguem respeitar as exigências de dimensionamento e serviço com menores valores de  $f_{ck}$ , altura total da laje e peso total. Entretanto, não se pode afirmar categoricamente que para toda obra esse sistema é o ideal, visto que existem casos em que o peso não é tão significativo, ou ainda, nas situações em que há ocorrência de vibrações, pois as lajes com altura menor possuem menor inércia e são mais suscetíveis a propagação de ondas.

Diante dos resultados obtidos com a aplicação dos processos de otimização ressaltam-se os seguintes pontos:

- Ficou evidente que a altura total das lajes é a variável que possui maior influência tanto para o dimensionamento quanto para que sejam atendidas as condições de serviço exigidas pela ABNT NBR 6118:2014;

- Independentemente do valor adotado como partida, o processo de resolução do problema convergiu para os mesmos valores finais. Contudo, observou-se uma alteração na quantidade de iterações necessárias. Considerando as situações abordadas nesse trabalho, o fato da quantidade de ciclos para a convergência ter ficado entre 5 e 11, não foi, portanto, significativa;
- Dentre os métodos disponíveis na planilha eletrônica de otimização, pode-se concluir que o GRG2 possui potencial para ser aplicado no ajuste das variáveis envolvidas no cálculo de estruturas de concreto armado em geral. Diante de expressões que envolvem equações do segundo grau como o cálculo da posição da linha neutra, do terceiro grau como no cálculo do momento de inércia e de quarto grau como é o caso de flechas imediatas, esse método consegue abranger as condições de não linearidade e, ao mesmo tempo, aplicar ajustes suaves para permanecer dentro das condições limites impostas ao processo de dimensionamento;
- A modelagem matemática, aplicada através da ferramenta de otimização da planilha eletrônica, possibilitou o ajuste simultâneo de parâmetros fundamentais no dimensionamento de nervuras pré-moldadas treliçadas. A inserção de valores que limitavam essa “liberdade” para o método alterar as variáveis, condicionaram as grandezas como o  $f_{ck}$  e o intereixo, a área de aço, o domínio de dimensionamento, entre outras, a serem mantidos dentro de uma faixa de grandeza condizentes com a realidade de técnica;
- Com base nos resultados obtidos nesse estudo, conclui-se que há uma vantagem para as construtoras em adotar o sistema com vigotas treliçadas protendidas, pois o custo da obra leva em consideração todos os elementos estruturais. Com a redução do peso próprio das lajes em torno de 24% para os vãos de 6 m, até cerca de 15% para os vãos de 9 m, ao ser considerado também o alívio de esforço para as vigas, pilares, e fundação, têm-se uma economia global significativa em construções de múltiplos pavimentos;
- Pode-se dizer que as vigotas pré-moldadas apresentam muitas vantagens para o uso em obras residenciais. Contudo, o dimensionamento não se mostra muito favorável para as vigotas treliçadas não protendidas com sobrecargas acima de  $2,0 \text{ kN/m}^2$  e vãos a partir de 8 m. Nessas condições é necessário aplicar protensão ou prever uma adição de armadura fora da sapata de concreto.

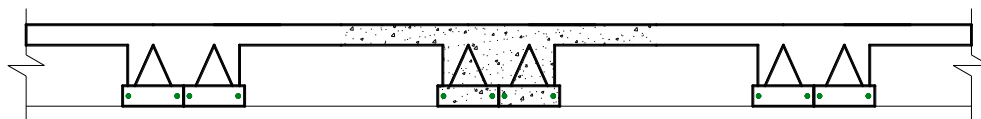
O desafio existente para uma empresa do ramo de vigotas treliçadas pré-moldadas produzir soluções com o uso da protensão, está associado fundamentalmente ao investimento inicial em equipamentos e espaço físico. O processo de produção, montagem e concretagem são muito semelhantes para o sistema sem ou com protensão. Por fim, passa a existir uma reflexão: todas as condições que podem ser alcançadas com as vigotas pré-moldadas treliçadas não protendidas, podem ser alcançadas com o uso da protensão, o caminho inverso, contudo, nem sempre é realizável.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Durante o desenvolvimento do trabalho foram levantadas algumas questões que possuem potencial para serem estudadas em trabalhos futuros, dentre elas destacam-se:

- Realizar ensaios com lajes formadas por vigotas treliçadas protendidas;
- Fazer a análise de arranjos diferentes tanto para as vigotas treliçadas, como por exemplo vigotas justapostas, quanto para situações de carregamento, como nos casos em que se tem paredes sobre as lajes, ver Figura 56;

**Figura 56:** Vigotas treliçadas justapostas



Fonte: Autor (2016)

- Desenvolver modelagens e ensaios que considerem lajes com vigotas treliçadas protendidas contínuas, com o intuito de investigar a redução do momento fletor positivo máximo, redução do deslocamento e o comportamento dos elementos protendidos quando submetidos à momentos fletores negativos;
- Avaliar os efeitos práticos nas vigotas treliçadas protendidas quando são ampliados ou reduzidos o número de linhas de escoras;
- Fazer a composição e análise dos custos de forma a levar em consideração o investimento das empresas em termos de investimentos em equipamentos e retorno. Além disso, quantificar o alívio e redução de esforços nos demais elementos estruturais devido ao alívio de esforços oriundos da redução do peso próprio quando utilizadas vigotas treliçadas protendidas.

## REFERÊNCIAS

ABADIE J., CARPENTIER, J. **Some numerical experiments with the GRG method for nonlinear programming**, Paper HR7422, Electricité de France. 1967.

ALBUQUERQUE, A. T.; MOTA, J. E.; CARACAS, J. E.; NOBRE, E. G. Lajes Treliçadas Protendidas (Pré-Tração). In: **1º. Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto pré-moldado**, São Carlos, 2005.

ALBUQUERQUE, A. T. **Otimização de pavimentos de edifícios com estruturas de concreto pré-moldado utilizando algoritmos genéticos**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.

ALMEIDA, A. G. M. **Contribuição ao estudo das lajes mistas protendidas**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 1998.

AVILLA JUNIOR, J. **Contribuição ao projeto e execução de lajes lisas nervuradas pré-fabricadas com vigotas treliçadas**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto –Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.

\_\_\_\_\_. **NBR 7211**: Agregados para concreto - Especificação. Rio de Janeiro, 2009.

\_\_\_\_\_. **NBR 8681:** Ações e segurança nas estruturas - Procedimento, 2003.

\_\_\_\_\_. **NBR 9062:** Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2006.

\_\_\_\_\_. **NBR 14859-1:** Lajes pré-fabricadas de concreto– Parte 1: Vigotas, minipainéis e painéis – Requisitos. Rio de Janeiro, 2016.

\_\_\_\_\_. **NBR 14859-2:** Lajes pré-fabricadas de concreto – Parte 2: Elementos inertes para enchimento e fôrma – Requisitos. Rio de Janeiro, 2016.

\_\_\_\_\_. **NBR 14859-3:** Lajes pré-fabricadas de concreto – Parte 3: Armadura treliçadas eletrossoldadas para lajes pré-fabricadas – Requisitos. Rio de Janeiro, 2016.

\_\_\_\_\_. **NBR 14860-1:** Laje pré-fabricada – Pré-laje – Requisitos Parte 1: Lajes bidirecionais. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. **NBR 14860-2:** Laje pré-fabricada – Pré-laje – Requisitos Parte 2: Lajes bidirecionais. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. **NBR 15696:** Fôrmas e escoramentos para estruturas de concreto - Projeto, dimensionamento e procedimentos executivos. Rio de Janeiro, 2009.

BACHMANN; H., STEINLE, A. **Precast Concrete Structures**. Ed. Ernst & Sohn. Berlin. 2011.

BOCCHI Jr., C. F. **Lajes Nervuradas de concreto armado projeto e execução**. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

BUIATE, M. **Estudo do comportamento de lajes nervuradas formadas por vigotas de concreto armado com armação tipo treliçada e vigas de borda**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, 2004.

CARVALHO, R. C. Cálculo da flecha de lajes pré-fabricadas unidirecionais considerando o processo construtivo. In: **47º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO (IBRACON)**, Olinda, 2005.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas**

**usuais de concreto armado**. 4.ed. São Carlos: Editora da UFSCar, 2014.

CUNHA, J. C.; AQUINO, I. S.; LIMA, M. C. V.; CASTILHO, V. C. Análise Experimental e Numérica de Laje Nervurada Bidirecional e Laje Maciça Equivalente. In: **52º Congresso Brasileiro do Concreto**, IBRACON, Fortaleza, 2010.

CUNHA, J. C. **Análise de Lajes Nervuradas Bidirecionais através de Modelos Simplificados**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, 2012.

DANTAS, O. D.; SILVA, E. M.; BARIONI, L. G.; OLIVEIRA, M. A. A. de; LIMA, J. E. F. W. **Comparação dos métodos GRG2 (solver do Excel) e downhill simplex para a parametrização da função beta**. Anais do XXXIX SBPO. 2007. Disponível em <<http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2007/pdf/arq0169.pdf>>. Acessado em: 12/08/2015.

DROPPA JUNIOR, A. **Análise estrutural de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo vigota com armação treliçada**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1999.

EL DEBS, M. K. **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações**. São Carlos. Projeto REENGE, EESC-USP, 2000.

ELLIOTT, K. S. **Precast Concrete Structures**. Ed. Butterworth-Heinemann. 2002.

EMERICK, A. A. **Projeto e execução de Lajes Protendidas**. Disponível em: <[www.deecc.ufc.br/Download/TB812\\_Estruturas%20de%20Concreto%20Protendido/LP.pdf](http://www.deecc.ufc.br/Download/TB812_Estruturas%20de%20Concreto%20Protendido/LP.pdf)> Acesso em: 10 jan. 2015.

FLORIO, M. C. **Projeto e execução de lajes unidirecionais com vigotas em concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos, 2004.

FORNI, D. **Custos de lajes formadas por vigotas treliçadas considerando a produção, o transporte, a montagem e a concretagem**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, 2005.

GASPAR, R. **Análise da segurança estrutural das lajes pré-fabricadas na fase de construção**. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1997.

LASDON, L. S.; WARREN, A. D.; JAIN, A.; RATNER, M. Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming. **ACM Transactions on Mathematical Software**. V. 4, No. 1, p. 34-50, 1978.

LIMA, M. C. V.; CASTILHO, V. C.; GESUALDO, F. A. R. Vigotas treliçadas protendidas: análise experimental e estudo de escoramento. In: **3º. Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto Pré-moldado**, São Carlos, 2013.

MAGALHÃES, F. L. **Estudo dos momentos fletores negativos nos apoios de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo nervuras com armação treliçada**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2001.

MERLIN, A. J. **Momentos fletores negativos nos apoios de lajes formadas por vigotas de concreto protendido**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2002.

MERLIN, A. J.; EL DEBS, M. K.; TAKEYA, T.; NETO, N. M. Análise do Efeito da Protensão em Lajes Pré-moldadas com Armação Treliçada. In: **1º Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto pré-moldado**, São Carlos, 2005.

MINISTERIO DE FOMENTO ESPAÑOL. EFHE. **Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón estructural realizados con elementos prefabricados**. Madrid, 2002.

NAAMAN, A. E. **Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals**. 3ed. Michigan: Ed. Techno Press 3000, USA, 2012.

PINHEIRO, L. M. **Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios**. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2007.

SARTORTI, A. L.; PINHEIRO, L. M. Viabilidade técnica de lajes treliçadas com vigotas pré-moldadas de 6 cm de altura. In: **3º. Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto pré-moldado**, São Carlos, 2013.

SILVA, M. A. F. **Projeto e construção de lajes nervuradas de concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Construção Civil). UFSCar, São Carlos, 2005.



SPOHR, V. H. **Análise comparativa: Sistemas estruturais convencionais e estruturas de lajes nervuradas**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Maria, 2008.

STRAMANDINOLI, J. S. B., **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

STG – **Software de treliças GERDAU**. Versão 5.1.8. Desenvolvido por Knijnik Engenharia S/S Ltda. 2006. Disponível em <[http://www.ecivilnet.com/softwares/stg\\_software\\_trelicas\\_gerdau.htm](http://www.ecivilnet.com/softwares/stg_software_trelicas_gerdau.htm)>. Acessado em: 12/06/2015.

TRELIART. **Manual de fabricação lajes treliças**. 2002. Disponível em: <<http://www.treliart.com.br/downloads/Manual%20de%20Fabricacao.pdf>>. Acessado em: 15/12/2014.

VALENTE, R. B.; GESUALDO, F. A. R. Efeitos específicos no projeto de sistemas de fôrmas e escoramentos à luz da ABNT NBR 15696:2009. In: **XIV EBRAMEM - Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira**, Natal, 2014.

WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J. G. **Reinforced Concrete Mechanics and Design**. 6 ed. USA: Ed. Pearson, 2012.

WILDED. J., BEIGHTLER, C. S. **Foundations of Optimization**. Prentice Hall. Englewood Cliffs, 1967.

WOLFE, P. Methods of nonlinear programming. **Recent Advances in Mathematical Programming**. New York: McGraw Hill, p. 67-86, 1963.