UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

MÁRIO LUCIO ALEXANDRE

PROCESSO DE AUTONOMIA NA FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA: UMA PERSPECTIVA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Uberlândia
2014

MÁRIO LUCIO ALEXANDRE

PROCESSO DE AUTONOMIA NA FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA: UMA PERSPECTIVA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arlindo José de Souza Júnior

Uberlândia
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A381p
2014

Alexandre, Mário Lucio, 1988-
Processo de autonomia na formulação de problemas de matemática: uma perspectiva de formação inicial de professores / Mário Lucio Alexandre. -- 2014.
169 f. : il.

Orientador: Arlindo José de Souza Júnior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Educação.
Inclui bibliografia.

1. Educação - Teses. 2. Matemática --Estudo e ensino -- Teses. 3. Professores de matemática - Formação -- Teses. I. Souza Júnior, Arlindo José de. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Educação. III. Título.

CDU: 37

MÁRIO LUCIO ALEXANDRE

PROCESSO DE AUTONOMIA NA FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA: UMA PERSPECTIVA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Uberlândia, 24 de março de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arlindo José de Souza Júnior
Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Prof. Dr. Guilherme Saramago de Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Uberlândia
2014

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me orientaram para vida.

Dedico ainda esse texto e as horas de trabalho que culminaram nele especialmente à minha sábia avó Rosinha da Silva (in memoriam).

A outras pessoas especiais em minha vida, tais como: Mauro Lucio, Kelen Cristina, Dona Raimunda, Fernando Barbosa, Deive Alves e Douglas Carvalho.

A todos(as) que praticam o bem e sonham com uma educação de maior qualidade.

AGRADECIMENTOS

O que segue é o meu verdadeiro obrigado a todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para a minha formação e, consequentemente, para essa pesquisa. Portanto, não pretendo resumir os agradecimentos, pois são realmente parte desse trabalho. Essas são páginas para mim tão importantes quanto qualquer capítulo desse texto, qualquer citação ou conclusão que possa ser apresentada. Antes de iniciar formalmente os agradecimentos, enfatizo que, infelizmente o papel oferece, de início, apenas a oportunidade de apresentar linearmente os “obrigados”, no entanto, em minha mente, tais posições não existem tal como são escritas abaixo.

A Deus e aos meus pais, meu muito obrigado pela oportunidade de viver e ter condições físicas para digitar esses dizeres. Sr. Maurilio Lucio, meu grande pai, agradeço por estar me ensinando a sabedoria das “gambiarras” e das brincadeiras, muitas das vezes sem sentido para os desconhecidos. Dona Lindalva Rosa, minha incomparável mãe, agradeço eternamente pelo incentivo constante no que diz respeito aos estudos, bem como, pelo apoio emocional em momentos difíceis. Aos dois: obrigado por tudo, sinto-me honrado por ser filho de vocês!

Ao meu irmão Mauro Lucio, agradeço imensamente pela infância vivida em parceria. Obrigado pelas brincadeiras, abraços, risadas e sonhos. Obrigado pela cumplicidade enquanto amigo, pelos momentos inesquecíveis que vivemos juntos!

A Kelen Cristina, que tal como na graduação, me oportunizou durante o mestrado, o prazer de presenciar grandes e lindos sorrisos, sempre inspiradores e aos quais atribuo imenso valor. Além disso, não poderia esquecer de dizer: muito obrigado pelas vezes que leu e fez suas sábias considerações sobre o texto, bem como pela parceira e coordenadora que foi em projetos que participei!

Agradeço também os meus grandes parceiros acadêmicos e mestres da vida, Deive Alves e Fernando Barbosa. Uma dupla realmente incrível de seres HUMANOS que tive a honra de conhecer durante a graduação. Deive, mil vezes obrigado, de coração, pelos lanches em “épocas de vacas magras”, pelos ensinamentos, pelos abraços e brincadeiras. Fernando, pelas épocas turbulentas, pelas discussões pessoais e acadêmicas, pelas inúmeras caronas, obrigado! Obrigado pelas leituras e opiniões verdadeiramente sábias nesse texto!

Sou também muito agradecido ao meu grande amigo Gustavo Santos Fernandes, um sujeito de princípios, com quem continuo aprendendo!

Douglas Carvalho, sem dúvidas o destaque fica por conta das risadas compartilhadas e pelos artigos apresentados. Obrigado pela diversão, pelas fotos, caminhadas e discussões, bem como pela leitura de parte do texto que representa esta pesquisa!

Professor Raul, sábio dos contextos históricos, obrigado. Foi o senhor que me encaminhou inicialmente nos horizontes da pesquisa acadêmica me apresentando para meu atual orientador!

Ana Carolina, obrigado por aceitar e acreditar em minhas sugestões em seus trabalhos e também pelas discussões e conhecimentos construídos. Não menos importantes foram ainda as risadas com o restante da galera!

Maycon Pacheco e Pedro Henrique, a vocês devo também um muito obrigado especial. Aos dois agradeço por me ensinarem ainda mais sobre a humildade e perseverança a partir das histórias que cada um possui. Vocês são um dos exemplos de que um professor pode aprender muito com seus alunos. Obrigado por oportunizarem que minha esperança em um futuro melhor continuasse forte. Sinto-me honrado em tê-los conhecido e, sobretudo, ouvir de vocês que sou uma referência!

Agradeço ao Gabriel e Ygor por serem companheiros nas diversões eletrônicas e na troca de ideias.

Meus agradecimentos também à Dona Silvania que sempre me oportunizou boa comida durante minha estadia em seu lar, bem como ao Sr. Donizette pelas, ainda que breves, conversas sobre eucaliptos, que inspiraram alguns dos exemplos utilizados nesse trabalho. A outra integrante dessa bela família, Erika Poliana, meu muito obrigado pela leitura atenta desse texto, com certeza melhorando significativamente a qualidade do mesmo!

Ao meu orientador Professor Dr. Arlindo, muito obrigado por compartilhar dessa história. Pelas risadas e pelas discussões. Cresci enquanto ser humano, enquanto professor. Obrigado pelos ensinamentos!

À Professora Dra. Maria do Carmo Mendonça, bem como ao professor Dr. Guilherme Saramago pelas valiosas observações na qualificação. Professora, um obrigado especial pelos textos e pelas ótimas conversas que tivemos! Professor, sua participação como parte da banca de defesa foi de muito valor, obrigado!

Ao professor Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer, primeiramente pelos causos contados em palestras que tive a feliz oportunidade de assistir. Além disso, agradeço a disponibilidade de tempo para fazer parte da banca de defesa dessa dissertação. Professor, o senhor é um grande exemplo de que sabedoria e humildade podem conviver harmonicamente em uma pessoa!

Ao professor do curso de Ciências da Computação, Dr. Carlos Lopes pela parceria em discussões, bem como em projetos. Um grande incentivador da educação! Obrigado professor, sei que sem a parceria com o senhor, não teríamos a possibilidade de um espaço para discussões como tivemos!

Ao professor Douglas Marin, meus agradecimentos por compartilhar momentos dessa pesquisa, sobretudo pela oportunidade de vivenciar os encontros da disciplina pelo senhor ministrada durante a pesquisa. Obrigado ainda pelos comentários sábios!

Ao professor Jaime Silva, meus agradecimentos pelas contribuições com esse trabalho a partir de textos para a leitura.

Agradeço a Núbia, Lara, Istaell, Anielle, Dinei, Alessandra, Natália, Gustavo Boaventura, Brythnner, Geliaine, pelas discussões e por compartilharem comigo parte de suas histórias!

Agradeço a todos do Coletivo (RE)Ação, em especial ao professor João, por participar de discussões e também da leitura de parte dessa pesquisa. O Coletivo faz parte de minha história! A todos aqueles alunos com quem tive menos contato (como por exemplo, Rhyllare, Mauriene, Maria do Socorro, Rafael Celso), muito obrigado, apesar da pouca convivência vocês me ensinaram mais sobre a complexidade e a variedade dos caminhos que a vida pode trilhar.

Rafael e Clovis, companheiros de projeto e de discussões. A imaginação dava asas às ideias que surgiam e isso foi muito bom. Obrigado!

Agradeço a todos os alunos para os quais tive a oportunidade de lecionar até o momento. Sempre aprendendo, sempre buscando ensinar. Obrigado!

Agradeço a todos aqueles que praticam o bem. Tenho esperança de que essa pesquisa possa ser uma dessas práticas, bem como, eu enquanto professor possa exercitá-la e torná-la cada dia mais parte de mim!

Aos funcionários da coordenação da Faculdade de Matemática e aos da secretaria da pós-graduação da Faculdade de Educação da UFU, agradeço pelos ensinamentos e pela paciência. Além deles, deixo igualmente meu “muito obrigado” aos professores, todos os que tive em minha vida!

Obrigado ao povo brasileiro, pois com parte de seus impostos a CAPES financiou este estudo! Espero sinceramente honrar a todos aqueles que citei, especialmente pelo tempo que dedicaram a mim. Também anseio fazer jus aos bons momentos que tive com aqueles que agora não me recordo.

“Seja sempre você mesmo.” (Dizeres de meus pais)

RESUMO

Apesar dos esforços para que mudanças no contexto educacional ocorram, ainda vivemos imersos na realidade que valoriza a cópia de algoritmos. Diga você, leitor(a), quantas provas já fez, ou quantos trabalhos escolares ou acadêmicos você já desenvolveu em que, ao invés de responder, o objetivo fosse formular? O foco aqui é justamente esse: Formular Problemas. Nesse sentido apresentamos essa pesquisa, qualitativa com características de estudo de caso e observação participante, que foi desenvolvida durante as aulas de uma disciplina da Licenciatura em Matemática oferecida pela Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, chamada O Ensino de Matemática Através de Problemas. O objetivo foi acompanhar os alunos dessa disciplina, enquanto os mesmos vivenciavam a oportunidade de formular problemas e, ao final, verificar o processo de autonomia que essa prática pôde gerar. Para tanto, aplicamos questionário e realizamos entrevista com os discentes envolvidos, com o foco em analisar seus respectivos Projetos Integrados de Prática Educativa, cujo objetivo é promover a formação de um profissional crítico e reflexivo, que não alimente suas práticas docentes apenas com reproduções. Norteamos nossas reflexões nesse texto a fim de responder a seguinte pergunta: quais os sentidos e significados da disciplina O Ensino da Matemática Através de Problemas para os estudantes da Licenciatura em Matemática oferecida em torno da oportunidade de formular problemas? Para respondermos a esse questionamento, elaboramos o texto que segue, dividido em quatro partes. Objetivamos com a introdução, primeira das partes citadas, situar o(a) leitor(a) a respeito da origem desse pensamento, do porquê pesquisar esse tema. O capítulo 1 traz as discussões teóricas acerca dos temas propostos pela ementa da disciplina, bem como de alguns complementares utilizados nessa pesquisa. Dividimos o capítulo 2 em três partes, a primeira delas diz respeito a forma que a disciplina foi pensada durante a pesquisa, a segunda é a narrativa das trajetórias dos oito estudantes entrevistados, para a elaboração de seus respectivos Projetos Integrados de Prática Educativa, a parte três do capítulo 2 concentra nossa análise dos dados, apresentando os resultados desse trabalho. Por fim, deixamos nossas considerações finais acerca da pesquisa que envolvem a Modelagem Matemática e a autonomia do professor em formação, bem como nossas esperanças para o futuro da mesma.

Palavras-chave: Formulação de Problemas, Modelagem Matemática, Autonomia, Formação Inicial de Professores de Matemática, Projeto Integrado de Prática Educativa (PIPE).

ABSTRACT

Despite efforts to make changes in the educational context occur, still we live immersed in the reality that values the copy of algorithms. Tell you, the reader, how much evidence has ever done, or how many schoolwork or academics you've developed in that, instead of responding, the objective was to formulate? The focus here is precisely that: to formulate Problems. To this end we present this research, qualitative characteristics of case study and participant observation, which was developed during the lessons of a discipline of Mathematics degree offered by the Faculty of mathematics at the Universidade Federal de Uberlândia, called Teaching Mathematics Through problem solving. The objective was to accompany the students in this discipline, while the same experienced the opportunity to formulate problems and, at the end, check the process of autonomy that this practice could generate. To this end, we apply our questionnaire and we conduct interview with the students involved, with the analyze their respective integrated projects of educational practice whose goal is to promote the formation of a critical and reflective professional, that do not feed their teaching practices only with reproductions. We focus our thoughts in this text in order to answer the following question: what are the senses and meanings of the discipline teaching mathematics Through problem solving for students graduating in mathematics offered around the opportunity to formulate problems? To answer this question, we elaborate the text that follows, divided into four parts. Aim with the introduction, first of the parties mentioned, situate the reader (a) regarding the origin of this thought, why search this topic. Chapter 1 brings the theoretical discussions on the themes proposed by the menu of discipline, as well as some complementary used in this research. We split the 2:0 pm chapter three parts, the first of these concerns the way that discipline was thought during the search, the second is the narrative of the trajectories of the eight students interviewed, for the preparation of their respective integrated projects of educational practice, part three of Chapter 2 focuses our analysis of the data, showing the results of this work. Finally, we made our final thoughts about research involving the mathematical modelling and the autonomy of the teacher-in-training, as well as our hopes for the future of the same.

Keywords: Problem Posing, Mathematical Modeling, Autonomy, Initial Training of Teachers of Mathematics, Integrated Design of Educational Practice (PIPE).

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

CEP.........	Comitê de Ética em Pesquisas com Seres Humanos
CPA.........	Comissão Própria de Avaliação
E.U.A......	Estados Unidos da América
EMAP......	O Ensino de Matemática Através de Problemas
EMEM.....	Encontro Mineiro de Educação Matemática
ENEM.....	Encontro Nacional de Educação Matemática
FAMAT...	Faculdade de Matemática
FP............	Formulação de Problemas
GTERP....	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
LEM........	Laboratório de Ensino de Matemática
MEC........	Ministério da Educação
MM..........	Modelagem Matemática
NCTM.....	National Council of Teachers of Mathematics
NUPEME	Núcleo de Pesquisas em Mídias na Educação
OAs.........	Objetos de Aprendizagem
PCN.........	Parâmetros Curriculares Nacionais
PEIC........	Programa de Extensão Integração UFU/Comunidade
PIBID......	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PIPE........	Projeto Integrado de Prática Educativa
RIVED....	Rede Interativa Virtual de Educação
RP............	Resolução de Problemas
SEED.......	Secretaria de Educação a Distância

SHIAM....	Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática
SP...........	São Paulo
UFU.........	Universidade Federal de Uberlândia
UNESP....	Universidade Estadual de São Paulo
USP.........	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

CAPÍTULO II
ORGANIZAÇÃO DA DISCIPLINA, TRAJETÓRIA DOS LICENCIANDOS NA ELABORAÇÃO DO PIPE, ANÁLISE DOS DADOS

INTRODUÇÃO:

OS "QUÊS" E OS "PORQUÊS" DESTAS PÁGINAS

Tem gente que escreve por ego, ou só pra fazer firula. Meu texto é simples, sincero, é tinta que sai da medula.

(Gabriel o Pensador, in Música: Linhas Tortas)

Enquanto garoto, ainda menino de pouca idade, tive uma ideia que me fascinou e ocupou semanas do meu pensamento. Queria fazer um boneco que tocasse violão. Bom, meus familiares e eu não tínhamos conhecimento sobre o instrumento, tampouco compreendiam bem meu entusiasmo para criar o boneco. O tempo levou essa ideia, no entanto, muitas outras surgiram durante as várias sextas-feiras que tive em minha infância.

Esse era um dia especial, no final da tarde e a noite, após a escola (que eu não achava muito interessante) era a hora de inventar! Isso não era regra, mas meu irmão e eu, também garoto, nos reuníamos na varanda de casa com o propósito de brincar. Acontecia que, geralmente elaborávamos planos para novas brincadeiras e alguns projetos para brinquedos. Então, numa dessas noites, tivemos a ideia de fazer um par de patins! Meus pais não eram grandes fãs desse objeto, sobretudo dele nos pés de dois garotinhos que moravam em uma rua movimentada. Em nossa ingenuidade, pensamos que se não era possível comprar um, iriamos fazer um, daqueles com pares de rodas em paralelo – que interpretávamos como mais seguros. Pois bem, com alguns chinelos, barbantes, espetos de bambu e rodinhas de carrinhos fizemos a "gambiarra", que ao final estava repleta de laços que se trançavam tanto quanto nossas expectativas ali depositadas.

No decorrer da minha vida, estive inserido em outras situações que buscava solucionar, criando algo. Às vezes tudo ficava apenas nos planos, outrora conseguia sozinho ou em grupo concretizar aquilo que havia estruturado. Quanto aos patins: horas para criar, e apenas um segundo para destruir. Ao subir, os gravetos que formavam os eixos se partiram e nossas esperanças se encerraram com uma voz forte, proferindo algo temido: a hora do banho!

Minha trajetória, meu saber

Ser professor me parecia um bom objetivo

O fato mencionado anteriormente foi apenas um de tantos outros exemplos que trago em minha história. Como dito, sempre houve outros planos, outras curiosidades. Naquela época estudava no que era chamado de "Pré-primário", que cursei numa escola municipal da cidade de Uberlândia, na qual nasci e moro até o momento. Concluí o Ensino Fundamental em uma escola estadual e, no ímpeto de conseguir ingressar na universidade, com incentivo da família – especialmente de minha mãe – fiz a prova de uma instituição particular da cidade, que oferecia bolsas integrais e parciais para o Ensino Médio. Consegui uma das bolsas parciais e, dessa forma, meus familiares poderiam arcar com o custo, ainda que para isso alguns sacrifícios tivessem que ser feitos.

Fui, na maior parte do tempo, um aluno relativamente preocupado com a nota, sem muita competitividade, a não ser comigo mesmo, sobretudo no Ensino Fundamental. No Ensino Médio algo inusitado ocorreu: obtive uma pontuação abaixo da média em matemática durante um dos bimestres. Ironia do destino ou não, foi nessa etapa de minha vida que optei pelo curso de matemática. Gostava da disciplina, mas não tinha muitas ideias de como seria o curso e de quais opções teria além da licenciatura que, naquele momento, não conhecia por esse nome. Ser professor me parecia um bom objetivo.

Ingressei na Universidade Federal de Uberlândia (UFU) no ano de 2006 como aluno do curso de matemática e não conhecia outros horizontes se não o das "equações", tampouco possuía outros objetivos imediatos, se não alcançar a média, o que nem sempre acontecia. A rotina se tornou inevitável, bem como o cansaço físico e mental, mas em momento algum me arrependo, as dificuldades que trago na lembrança me auxiliam hoje como base de diversas reflexões.

Naquela época, praticamente vivenciava a matemática pela matemática. A não ser pela inquietude nos pensamentos, de forma que, apesar de não compreender o que fazer para praticar mais aquela disciplina ao invés de possuir habilidades somente na escrita da mesma, minha mente não se acomodava ou aceitava na totalidade tal realidade, não o suficiente para que eu desistisse de enxergar que para mim, ainda faltava algo. Os pensamentos eram de que, talvez quando eu me tornasse um professor estaria acalentado.

TORNAR-ME PROFESSOR É ÓTIMO!

No quarto período do curso tive meu primeiro contato propriamente dito com estudos a respeito da Educação Matemática ou, ainda, a aplicação dela ao processo de ensinar e aprender. Esse início ocorreu em 2008, quando, além de optar pela licenciatura[1], fui apresentado ao Prof. Arlindo José, o qual ainda leciona na FAMAT.

Durante um semestre fiz, ainda que de modo superficial, alguns estudos sobre informática e educação, com auxílio dos Professores Deive Alves e Arlindo José. Logo surgiu a oportunidade de me tornar parte da equipe da Rede Interativa Virtual de Educação – RIVED (MEC/SEED) da Universidade Federal de Uberlândia, bem como do Núcleo de Pesquisa em Mídias na Educação – NUPEME[2], que foram de fundamental importância para minha forma de pensamento atual. Mediante encontros, leituras de textos e pesquisas de materiais, me deparei com boas ideias, excitantes em sua maioria, que permitiam o exercício e aprimoramento da minha criatividade – bem como dos demais colegas participantes – e, sobretudo, contribuíam para oportunizar a prática do valor das vivências pregressas, corroborando, enfim, para a criação de Objetos de Aprendizagem[3] - OAs.

---

[1] Na referida universidade, na época citada, até o quarto período do curso todas as disciplinas são comuns aos estudantes. A opção por bacharelado ou licenciatura ocorre a partir desse período.

[2] WebSite: <http://nupeme.blogspot.com.br/> Acessado em: 14 de fevereiro de 2014.

[3] Recursos interativos e atividades multimídia, que se apresentam na forma de animações e simulações. São ferramentas que possibilitam testar e simular diferentes situações.

O grupo (RIVED) do qual fiz parte como colaborador e bolsista criou diversos objetos de aprendizagem, dentre eles: **“Aprendendo Matemática com Cores”** que tem o objetivo de propiciar que o aluno atue como um aspirante a estagiário numa fábrica de tintas, na qual, para o mesmo conseguir o cargo desejado, lhe é proposto um teste que envolve o quotidiano da empresa, perpassando por conceitos matemáticos; **“Pescando Conhecimento”** que é um objeto construído para se trabalhar com o conteúdo de progressões geométricas a partir da ideia de uma população de peixes em um lago. Por fim, um dos grandes catalizadores do meu processo de formação, **“A Matemática no Fim do Túnel”**, um objeto que permitiu que minha imaginação fosse muito utilizada, o tempo todo, no ímpeto de criar uma história envolvendo *anime* (desenho animado japonês) e a matemática. A ideia deu certo e o enredo se constitui em torno de “Douglinha”, um ninja que vem do cerrado até a “Aldeia do Conhecimento” para ajudar o prefeito “Lucin” e o “Sábio” da aldeia a encontrarem uma boa maneira de unir, a partir da construção de um túnel, duas vilas separadas por uma montanha. Os objetos podem ser vistos abaixo, na figura 1.

Figura 1: Objetos de Aprendizagem em construção
Fonte: Arquivo pessoal

Finalmente aquela aflição e embate entre aquietar a criatividade frente aos objetivos intelectuais de somente visar à nota nas disciplinas começou a enfraquecer.

Nesse mesmo ano me tornei professor voluntário de um curso preparatório para o ingresso no Ensino Superior, conhecido como Futuro Pré-vestibular Alternativo, que oferece até hoje, a baixo custo, oportunidades para que alunos do Ensino Médio possam se preparar melhor para o vestibular e, mais recentemente, para o Exame Nacional do Ensino Médio. Tive o prazer de atuar no mesmo até 2010 e a oportunidade de discutir ideias e conhecer pessoas que contribuíram muito para minha história, bem como para o sujeito que sou hoje. Estava aí então minha primeira vivência como a figura que escrevia no quadro e não somente apenas no caderno. O trabalho como voluntário gerava frutos que eu não percebia, mas que hoje noto com satisfação, como o fato de que quando eram elaborados os simulados do vestibular, eu preferia tentar criar as questões ao invés de copiá-las, claro, sempre no ímpeto de acompanhar o estilo e a dificuldade da prova oficial.

Minhas experiências no Futuro e no RIVED foram certamente, além das primeiras enquanto professor e bolsista, também as primeiras enquanto sujeito que "não apenas está no mundo, mas com o mundo" (FREIRE, 2011a, p. 55).

Nos dois últimos semestres do curso de licenciatura participei de um projeto financiando pela Pró-Reitoria de Graduação da UFU e que tinha por objetivo a manutenção de laboratórios de ensino na graduação, no caso específico, o da Faculdade de Matemática. Ao contribuir para a organização e funcionamento desse local passei, em alguns momentos, a colaborar com alunos e professores nas atividades educativas que eram desenvolvidas e que utilizavam, por exemplo, a lousa digital. Esse período me possibilitou a participar de projetos coletivos desenvolvidos em algumas disciplinas da área de Educação Matemática e proporcionou tempos de reflexão sobre a utilização do laboratório e de outros espaços da universidade, especialmente aqueles que não eram a sala de aula propriamente dita.

No mesmo período participei como colaborador da disciplina "O Ensino de Matemática Através de Problemas" (EMAP) oferecida para os graduandos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, o que me possibilitou continuar refletindo sobre um processo de autoria através da prática educativa com situações problemas relacionadas à realidade dos estudantes do curso de graduação. Nossos raciocínios e questionamentos foram registrados no meu trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática (Alexandre, 2011). Nesse estudo, concretizei aqueles pensamentos formulados enquanto monitor do laboratório, de maneira que procurei contribuir para o despertar a autonomia dos alunos matriculados na disciplina EMAP. Uma situação problema que criei e propus na pesquisa foi a de determinar a área da Universidade Federal de Uberlândia – Campus Santa Mônica. Com um mapa do Campus, foi sugerido que os estudantes calculassem a área da região. Vale ressaltar que não foi dada nenhuma escala.

Este problema se tornou muito interessante, certamente pela proximidade para com os alunos, no sentido de que pôde concentrá-los num verdadeiro desafio matemático. Teriam que resolver um problema ligado ao quotidiano deles, com fórmulas e cálculos explorados no curso, mas muitas vezes não contextualizados. Veja abaixo o mapa entregue:

Figura 2: Mapa entregue aos alunos
Fonte: Pós-Graduação Filosofia[4]

Apesar da proposta do problema envolver uma situação real, verificamos na ocasião que a atividade causou um estranhamento nos estudantes presentes naquela turma. Indaguei sobre o fato de durante uma aula ocorrer uma atividade que lhes exigisse sair da sala. Constatei o que pensava: de fato aquilo era inédito para aqueles alunos, bem como para mim, que, em toda a minha vida acadêmica até aquele momento, não havia participado de uma atividade durante a aula, na qual fosse oportunizada uma etapa fora da sala (exceto o Laboratório de Informática). Foi possível também verificar algo incomum entre os estudantes. Para eles, não fazia parte do quotidiano usar uma trena para resolver um problema. Aparentemente o nível de abstração havia consumido parcialmente a construção do conhecimento – não me refiro a uma forma geral desta construção, mas sim daquela que possibilita ou é possibilitada pela prática.

Desta forma passei a compreender que a Resolução de Problemas (RP), inclusive no nível superior de ensino, oferece uma possibilidade de levar os alunos e professores a enxergarem novos horizontes, distintos daqueles alicerçados na reprodução das atividades já postas em livros e apostilas, atuando diretamente com a realidade e com o meio em que aqueles indivíduos se encontram.

---

[4] Imagem disponível em: <http://posfilosofia-ufu.blogspot.com.br/p/i-seminario-discente-da-pos-graduacao.html> Acessado em: 17 de fevereiro de 2014.

Ainda no trabalho de conclusão de curso pude exaltar meu gosto por discussões “não acadêmicas” e propor outro problema, dessa vez envolvendo o esquadrejamento[5] de paredes, partindo do conhecimento de um pedreiro experiente. A problemática possibilitou discutir naquela turma outros tipos de saberes, diferente daqueles “engessados” a um algoritmo algébrico e que tinham, em sua maioria, o mesmo resultado. Como conclusão, verificamos a presença da teoria de Polya “numa roupagem moderna”:

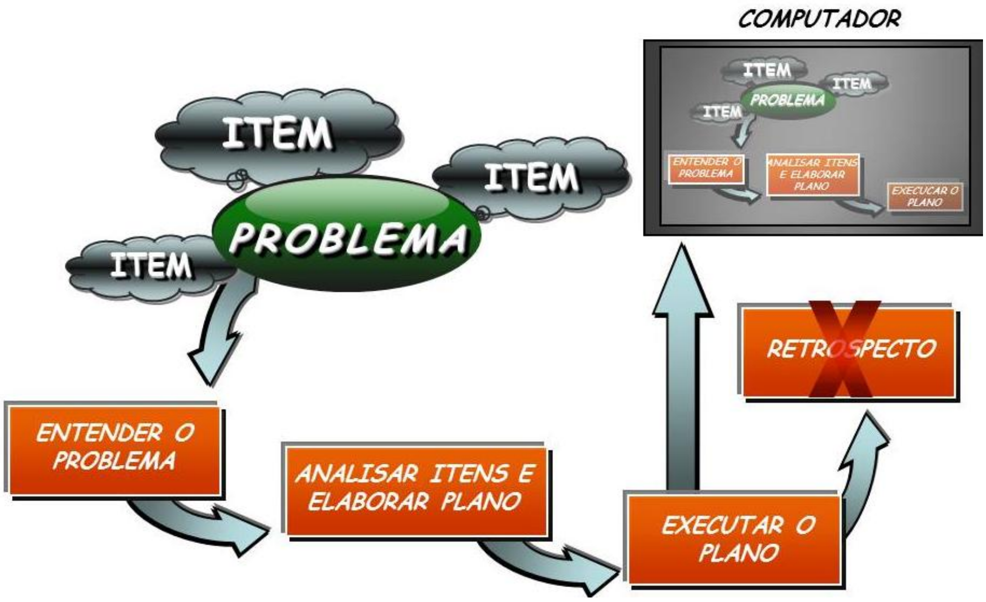

Figura 3: Esquema de resolução de problemas pelos alunos
Fonte: ALEXANDRE, 2011, p.18

Nota-se que o retrospecto existiu, porém a ferramenta escolhida pelos alunos foi a informática, ou seja, apesar de utilizarem outras tecnologias como lápis e papel para sistematizarem as contas e raciocínios no momento da resolução, ao invés de retornarem verificando os processos na folha já escrita, o refizeram no computador verificando assim a veracidade das respostas obtidas.

Ao analisar hoje esse trabalho, bem como outros decorrentes das experiências citadas e suas respectivas apresentações em eventos como: Encontro Mineiro de Educação Matemática (EMEM) – 2009, Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – 2010 e 2013, Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática (SHIAM) – 2010, dentre outros, verifico em suma alguns apontamentos e ramificações que de fato fazem jus aos meus interesses atuais, como **tecnologia na Educação Matemática**, **Educação**

[5] Termo utilizado para designar, nesse caso, uma duas paredes formando um ângulo reto entre si.

Popular e a **Criatividade** (não interpretada aqui a nível psicológico, mas sim de criação, de **formulação**).

Enfatizo que no decorrer dos períodos da graduação tive a oportunidade de conviver com grandes pessoas e me inserir em algumas situações que me fizeram delinear melhor meus pensamentos. Essas situações envolvendo o trabalho coletivo aguçavam ainda mais meus questionamentos sobre a aplicabilidade que eu, enquanto futuro professor notava, nos conteúdos que estudava. Como esclarecido por Souza Jr. (2000):

> O trabalho coletivo é um espaço privilegiado para o processo de reflexão dos professores, o diálogo entre eles é fundamental para a criação e consolidação de seus saberes profissionais e serve também para romper, muitas vezes, o isolamento existente entre eles. Pensamos que o trabalho coletivo possibilita a criação ou consolidação de um espaço de busca de autonomia e de emancipação coletiva dos professores (SOUZA JR, 2000, p.277).

Na busca por minha sintonia, tornava-se cada vez mais constante uma indagação: o quanto eu como professor conseguiria ser autor das minhas futuras aulas, fazendo delas um instrumento para a formação crítica do aluno?

Após terminar o curso de graduação resolvi dar sequência aos meus estudos com a vontade de responder àquele questionamento. Enquanto lecionava em um colégio estadual da cidade percebi ainda mais a necessidade de me preparar melhor enquanto formador, uma vez que aqueles alunos com os quais eu tinha contato necessitavam cada vez mais de atividades que englobassem suas vivências.

Em decorrência das necessidades e das perspectivas que constituíram minha trajetória até aquele momento, elaborei um projeto de pesquisa baseado nas minhas experiências educacionais no curso de formação inicial de Professores de Matemática, a fim de participar do processo seletivo para ingresso no mestrado em Educação na UFU e, sobretudo, continuar pesquisando, refletindo e aprendendo sobre situações que envolvessem os problemas em matemática. Era, para mim, muito importante dar continuidade aos pensamentos que me inquietavam, sendo aquela uma grande oportunidade para que isso se encaminhasse. Dando sequência à minha monografia de graduação construí um projeto, com um olhar mais aguçado, no qual procurava compreender a constituição de saberes docentes sobre a resolução de problemas relacionados à realidade do estudante universitário. Após alguns estudos e reflexões estruturei a seguinte pergunta de pesquisa: **Como trabalhar o Processo de Ensinar e Aprender Matemática por Meio da Resolução de Problemas utilizando a Educação Matemática Crítica na Formação Inicial de Professores?**

A Educação Matemática Crítica é entendida na preocupação de Skovsmose (2007):

> Eu estou preocupado com todo discurso que possa tentar eliminar os aspectos sociopolíticos da educação matemática e definir obstáculos de aprendizagem, politicamente determinados, como falhas pessoais [...] Eu estou preocupado com a relação entre a educação matemática e a democracia (SKOVSMOSE, 2007, p.176).

Ou seja, todo discurso que tenta eliminar os aspectos sociopolíticos da Educação Matemática deve ser analisado sistematicamente e é motivo de preocupação quando se entende a formação do sujeito à luz dessa Educação.

Em decorrência de todos esses acontecimentos e reflexões, percebi o que de fato gostaria de pesquisar. Estava decidido também que o trabalho coletivo era o que me atraía, de forma que não conseguiria me sentir bem onde pudesse apenas observar ou analisar documentos e atividades acadêmicas. O projeto que elaborei, bem como a pergunta, tornaram-se parte de minha formação, fundamentaram minha vontade pelo mestrado em educação do qual faço parte hoje como aluno.

Nesse mesmo período de pós-graduação, no ano de 2012, mais um momento de aprendizagem se iniciou: o Coletivo (RE)Ação[6]. Sendo um dos fundadores desse coletivo, posso dizer que me sinto honrado em participar do mesmo como professor voluntário e trabalhar coletivamente em prol de melhorias da qualidade de vida de nossa cidade. Participar das corridas contra o tempo para oportunizar a presença dos jovens integrantes do projeto na universidade, rir e também falar sério, tê-los primeiro como colegas e depois como estudantes é de fato algo inigualável.

Fui, no mesmo período, um dos autores de um projeto de resolução de problemas com aqueles alunos. Esse projeto perdura até hoje, porém com outros olhares, com encontros nos quais são discutidos temas como, por exemplo, o preço da passagem de ônibus. Na perspectiva atual os alunos não somente resolvem problemas, mas também os **modificam**, expondo sua forma de enxergá-los e a **maneira como atuam sobre aquelas realidades**

---

[6] Coletivo formado por graduandos, mestrandos, doutorandos e professores da UFU. O Coletivo (RE)Ação funciona em parceria com o Grupo de Pesquisa em Educação e Culturas Populares, bem como como a ONG Ação Moradia (localizada na Zona Leste da cidade de Uberlândia, região periférica), de forma que essa cede espaço para a realização dos encontros que visam auxiliar os jovens daquela região a ingressarem no Ensino Superior. Para além dos conteúdos educacionais, o coletivo trabalha para oferecer oficinas diversificadas, como de robótica, manutenção de computadores, resolução de problemas em matemática, dentre outras. WebSite: <http://reacaopopular.blogspot.com.br/> Acessado em: 14 de fevereiro de 2014.

próximas de suas vidas. Acredito que as conquistas desse coletivo ecoarão nas histórias de vida daqueles garotos e garotas. E também na minha!

Ao longo das observações e trabalhos coletivos desenvolvidos, passei a acreditar que a Resolução de Problemas ainda não abrangia toda a capacidade do professor, bem como a pura verificação de seu uso não se tornaria tão proveitosa quanto à visão do curso com o olhar do discente, ao invés do olhar puro e simplesmente teórico. Caminhamos então para a Formulação de Problemas, bem como a Modelagem Matemática, ambos previstos inclusive na ementa da disciplina EMAP. Notamos também, através de reflexões advindas da vivência naquele meio, a possibilidade da libertação crítica e criativa do professor, que se estende para além da Educação Matemática Crítica, sendo essa inquietude compreendida pela teoria da **leitura de mundo** de Paulo Freire. Na oportunidade de "usar aquela trena" para resolver um problema fora da sala de aula, nas discussões sobre o esquadrejar de uma parede e nas vivências enquanto professor voluntário e da rede pública, percebi que era possível **problematizar**! Problematizar enquanto sujeitos que somos do mundo em que vivemos. Nesse sentido, relato a seguir nossa[7] experiência em EMAP, como aluno, colaborador e pesquisador: da Resolução de Problemas à Problematização, Formulação e Modelagem dos mesmos; da Educação Matemática Crítica aos pensamentos ainda mais amplos de libertação de Paulo Freire; da imposição da verificação de uma ou mais teorias para um olhar inserido na relação entre discentes, docente e a disciplina com seus documentos norteadores.

Antes de dar seguimento às experiências vividas em EMAP julgo importante apresentar um fato que exemplifica meu apreço pela formulação de problemas, bem como a vontade de "trazê-la" sempre comigo: ainda em 2012, fui um dos autores de um minicurso ministrado durante o XI EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática. Com o título "Viemos para criar problemas!", o minicurso era embasado na criação de um problema. Cada participante – inclusive os autores deste trabalho – foi instigado a sair do espaço destinado ao minicurso para fotografar ou fazer uma pequena filmagem de uma situação, objeto etc., no entorno do local com a ideia de que aquele registro fosse o centro de um possível problema envolvendo matemática. Com um prazo estimado de 30 a 45 minutos para este momento, retornamos para que pudéssemos um a um colocar as imagens no computador, projetá-las e

[7] Apesar de atribuir o foco à minha vivência na disciplina entendo que os momentos não foram vividos apenas por mim, mas também pelos alunos, pelo professor da disciplina e ainda indiretamente pelo orientador dessa pesquisa. Entendo que todos colaboraram direta ou indiretamente para a escrita desse texto, portanto utilizo aqui esta nota para pedir a licença e a compreensão do leitor para que eu possa, numa mesma frase, atribuir o plural (nossa) e singular (aluno, colaborador e pesquisador).

dar voz aos respectivos autores. Estes então explicaram a ideia que tiveram e todos discutimos, opinamos e saudamos as tantas aulas inéditas que surgiram em torno do que foi exposto e dialogado. Como síntese desse momento, deixo aqui um poema criado por um dos grupos, expressando a originalidade, as várias possibilidades e riquezas que aquela experiência propiciou:

À procura de um problema

Andando pelo campus
À procura de um problema
Paramos para discutir
Qual o nosso dilema?

À procura de um problema
Apresentamo-nos e descobrimos
Quanta coisa em comum tínhamos.
Seja lendo
Escrevendo ou cantando
Tem gente até atuando

À procura de um problema
Decidimos recorrer a um mapa
Quer mapa melhor do que aquele que visualizamos na entrada?

Usando tecnologia
Voltamos à sala
A criação do problema
É a dúvida que nos cala

À procura de um problema
Pensamos em um caminho
Quantas maneiras possíveis
Chegamos ao nosso destino?

E se o trajeto for de carro
Só há um caminho
Voltamos a andar
Vimos formas geométricas
Caminhos escondidos...

Chegamos ao fim do campus
E agora?
Combinatória?
Geometria?
Física?
Integrais de linha?
Probabilidade?
Viajamos da educação infantil
À universidade.

Seria pouco dedicar uma nota de rodapé aos autores dessa bela obra, portanto, preferi citá-los no corpo desse texto. Agradeço a todos que participaram daquele minicurso e um obrigado especial aos poetas e poetizas: Bruno Misse, Franciele Lopes da Silva, Raphaela Costa, Cristiane Vinholes Jacomelli, Gisele Romano Paez, Marcos Hirodata Magalhães e Miliam Juliana Alves Ferreira. E, como em todo poema, cabe também ao leitor à interpretação individual, nesse caso, sobretudo em busca das conexões desses versos com momentos práticos sobre a formulação de problemas.

Em decorrência dos caminhos percorridos e das reflexões citadas, inspirado inclusive em momentos como o minicurso narrado, sintetizo esta pesquisa a partir do seguinte questionamento: **quais os sentidos e significados da disciplina EMAP, para os estudantes da Licenciatura em Matemática, oferecida em torno da oportunidade de formular problemas?**

O caminho percorrido para a compreensão e desdobramentos desse questionamento é resumido numa série de procedimentos e formas para se construir os dados desse trabalho, perpassando pelo contexto e local da pesquisa, bem como o entendimento teórico de nosso olhar a respeito da mesma. A seguir, procuramos relatar esses e outros tópicos que julgamos elementares para que o leitor compreenda com mais clareza a perspectiva desse estudo.

O CONTEXTO DA PESQUISA

Considerada pela QS Quacquarelli Symonds[8] uma das 100 melhores universidades da América Latina até a data de acesso ao WebSite, a UFU vem crescendo e conta atualmente com 68 cursos de graduação[9]. Uma das formas de corroborar esse processo de crescimento é a Avaliação Institucional, realizada pela Comissão Própria de Avaliação (CPA), e que tem sua última versão datada do ano de 2012. Tal processo visa à reflexão acerca dos encaminhamentos da Universidade segundo o entendimento de docentes, discentes e técnicos

---

[8] Web Site: < http://www.topuniversities.com./university-rankings/latin-american-university-rankings/2013 > Acessado em: 14 de fevereiro de 2014.

[9] Web Site: < http://www.ufu.br/pagina/sobre-ufu > Acessado em: 14 de fevereiro de 2014.

administrativos da instituição. São analisadas 10 dimensões, das quais destacamos as Políticas Institucionais para desencadear nossas discussões.

Entendemos que as políticas educacionais são de suma importância, uma vez que através delas se dão efetivamente a completude e a forma como o ensino é colocado na instituição, tanto em âmbito geral no entendimento de Universidade, quanto em características mais específicas em cada Faculdade. Como podemos observar no gráfico (figura 4), ainda há o que melhorar! Mais de 30% dos professores que participaram da avaliação afirmam que a correspondência entre o Projeto Pedagógico do Curso, a Ficha de Componente Curricular e/ou Plano de Ensino se dá de maneira regular ou péssima frente o perfil do egresso.

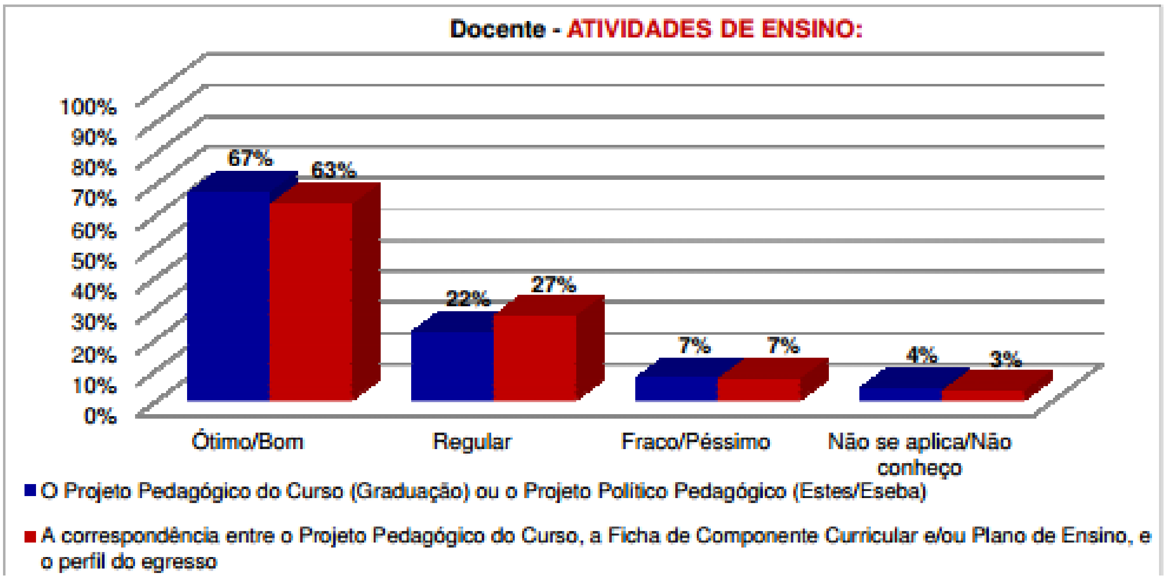

Figura 4: Avaliação aplicada aos docentes em relação às Atividades de Ensino
Fonte: UFU, 2012, p.85.

Complementando, 29% dos docentes entendem que o Projeto do Curso em que atuam é regular ou péssimo. Mostrando que podemos, no entendimento dos coletivos formados em cada área, propor e estudar meios de contribuir para a melhoria do que já está posto.

Nesse clima de compreender melhor a realidade dessa Universidade, trazemos essa pesquisa que lida com as características supracitadas de uma maneira mais específica na formação de professores de matemática. O curso, oferecido pela Faculdade de Matemática, tem a duração de quatro anos divididos em oito períodos, sendo que as disciplinas ministradas até o quarto período são comuns aos alunos, de forma que esses escolhem entre licenciatura ou bacharelado ao se matricularem para as disciplinas do quinto período.

Reconhecido desde novembro de 1972, o curso de licenciatura em matemática conta com 30 disciplinas obrigatórias, como podemos verificar no esquema a seguir (figura 5):

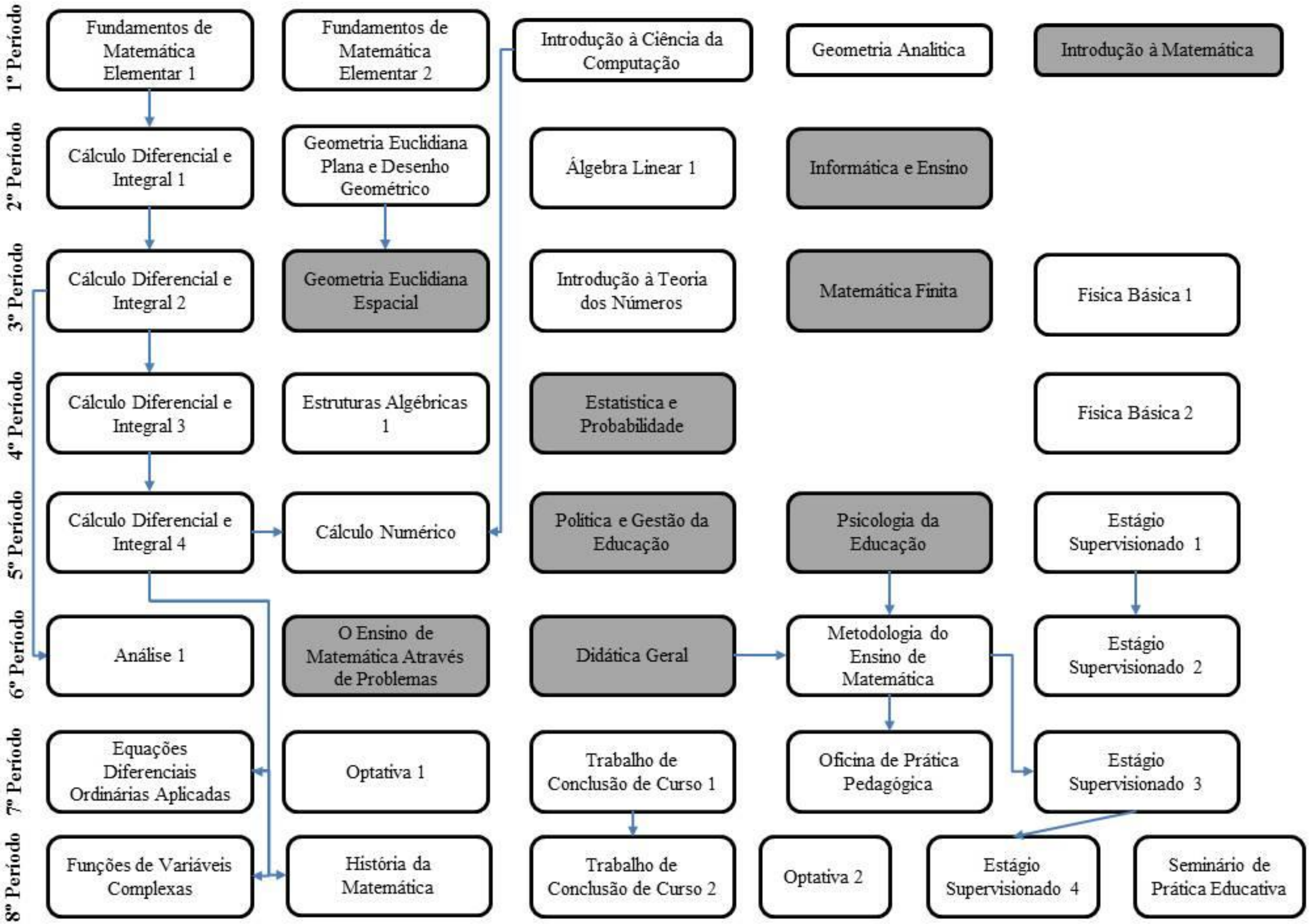

Figura 5: Disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática da UFU
Fonte: Próprio autor, baseado no projeto do curso

Além das disciplinas obrigatórias, são disponibilizadas outras 20 optativas, totalizando mais de 2000 horas-aula em conteúdos ditos científico-culturais, 405 horas em Prática como componente curricular, 410 horas de estágio supervisionado e 200 horas de atividades científico-culturais complementares. Como síntese representante de todo esse tempo respectivo às atividades do curso tem-se seu último projeto pedagógico, datado do ano de 2005, que visa

> à busca da abordagem da matemática em termos dos seus conceitos, características, história e práticas educativas, refletindo para além das questões internas relativas ao conhecimento matemático, sua existência e justificação, como também sobre questões externas relacionadas com a origem histórica, os contextos sociais e culturais de produção desse conhecimento (FAMAT, 2005b, p.4).

Dentre as disciplinas características da licenciatura, destacamos como cerne dessa pesquisa aquela conhecida como “O Ensino da Matemática Através de Problemas” que tem por objetivo geral “Capacitar o futuro professor para o exercício de uma importante metodologia de ensino da Matemática, *o ensino através de problemas*” (FAMAT, 2005a, p.1). A mesma é dividida em 60 horas práticas e 30 horas de Projeto Integrado de Prática Educativa (PIPE).

O PIPE foi implementado na UFU a partir da resolução nº 03/2005 do Conselho Universitário com o intuito de atender às mudanças ocorridas em âmbito nacional no que dizia respeito à formação de professores. Como desfecho, a resolução citada aprova nessa universidade o Projeto Institucional de Formação e de Desenvolvimento do Profissional da Educação. Como afirma o documento:

> [...] não se trata de formar simples repetidores de informações, conteúdos ou técnicas adquiridas no ambiente intelectualizado de uma Universidade. Trata-se de preparar um profissional para realizar a crítica, a reflexão e a proposição de um estilo de educação que, de fato, promova a aprendizagem, o acesso ao patrimônio cultural da humanidade e o desenvolvimento de sujeitos (ou de subjetividades) e da sociedade como um todo (UFU, 2005, p.3).

Tanto no que é ressaltado no projeto pedagógico da FAMAT, quanto na ementa da disciplina e no Projeto Institucional, compreendemos que há importância e espaço para a pesquisa que envolva o senso crítico, o contexto social e a formação de um sujeito criador de possibilidades e caminhos para superar desafios, que imagine e formule alternativas para sistematizar aquilo que lhe é posto pelo mundo em que vive. Pesquisas essas que busquem tornar aquele sujeito alguém atuante e colocador de suas produções nesse mesmo mundo.

O Projeto Institucional orienta que os cursos de licenciatura da UFU tenham em seus currículos três segmentos:

- Núcleo de Formação Específica: compreende conhecimentos da área científica, de forma inclusive a promover a iniciação à pesquisa.

- Núcleo de Formação Pedagógica: trabalha a função social e política da educação. Esse núcleo é composto pelas disciplinas de formação pedagógica, estágio supervisionado e pelo PIPE, que atua como ferramenta articuladora de conhecimentos teórico-práticos.

- Núcleo de Formação Acadêmico-Científico-Cultural: constituído por atividades acadêmicas complementares e também, a critério de cada curso, a implementação do Trabalho de Conclusão de Curso.

É importante destacar que o PIPE, segundo orientação da resolução citada e, como de fato também destaca o Projeto do Curso de Matemática, culmina em um Seminário de Prática Educativa obrigatório no curso de Licenciatura em Matemática funcionando como um

> [...] ambiente de exposição de resultados, projetos de ensino desenvolvidos e materiais didáticos de apoio ao ensino que resultem das ações executadas ao longo do PIPE [bem como] caracteriza-se como uma atividade voltada para o desenvolvimento de uma ampla e criteriosa análise do estudo de casos modelos de planejamento e execução de planos de aula; de propostas governamentais para a área de educação; da troca de experiências entre graduandos do curso de matemática e educadores que atuam no ensino básico. Ainda, como um espaço institucional capaz de fomentar entendimentos quanto a uma possível estruturação de ações conjuntas, relacionadas a órgãos públicos responsáveis por políticas de extensão, direcionadas a execução de projetos educacionais integrando Universidade-Escola-Comunidade (FAMAT, 2005b, p. 18-19).

Em suma, existe no curso de Licenciatura em Matemática da UFU uma disciplina de nome “Seminário de Prática Educativa” na qual o discente escolhe, dentre todos os trabalhos de PIPE que desenvolveu ao longo da graduação, aquele que mais lhe agradou ou pelo qual teve mais apreço. A finalidade é compartilhar a experiência, geralmente, em forma de apresentação oral com demais colegas, que já atuam ou certamente ainda atuarão como professores.

Um dos trabalhos de PIPE a ser escolhido pelo licenciando pode vir a ser aquele desenvolvido durante EMAP. Nessa disciplina os objetivos do PIPE se concentram em “Formular, discutir e resolver problemas significativos de Matemática, inclusive de natureza interdisciplinar adequando-os aos diversos níveis do ensino” (FAMAT, 2005a, p.1). Tecemos nossa pesquisa em torno não somente da disciplina, mas também, na trajetória dos alunos no que diz respeito ao Projeto Integrado de Prática Educativa desenvolvido.

O LOCAL

A pesquisa ocorreu na Universidade Federal de Uberlândia, mais especificamente no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), espaço este capaz de oferecer suporte de informação e conhecimentos atualizados a qualquer momento via internet.

Vale ressaltar que o autor desse trabalho atuou como monitor nesse mesmo laboratório durante um ano, fortalecendo ainda mais o aprofundamento no ambiente da pesquisa por já estar familiarizado com os objetos daquele espaço.

O LEM é uma sala ampla com diversos armários contendo materiais que podem ser utilizados para ensinar e aprender matemática. Durante as aulas no laboratório os alunos se distribuem no local seguindo uma disposição retangular, pois ao centro se encontram três grandes mesas retangulares, que geralmente ficam unidas e rodeadas pelas cadeiras. Em uma das laterais fica a disposição três computadores com acesso a internet. Essa, por sua vez, também está disponível por *wi-fi*, o que facilita o uso de notebooks. Por fim, a frente da sala encontram-se o projetor, a lousa digital e um televisor, geralmente usado nas apresentações.

QUANDO A PESQUISA FOI REALIZADA

Acompanhamos diretamente as aulas da disciplina durante dois semestres consecutivos, nos anos de 2012/2013, com um total de 11 alunos matriculados. Indiretamente, houve outros contatos com a mesma, tanto na formação do autor da pesquisa, quanto pela relação com demais colegas. É importante dizer que os dados não foram produzidos dos contatos indiretos, no entanto, os mesmos contribuíram para a pesquisa fomentando a busca por um estudo que contemplasse a disciplina EMAP, bem como suas “repercussões” na formação daqueles que estiveram envolvidos com a mesma.

O horário para a realização destas atividades acompanhou aquele estipulado pela coordenação do curso à disciplina, desta forma não comprometendo os demais afazeres dos sujeitos envolvidos. Quando os mesmos solicitavam discussões extraclasses eram propostos horários que contemplavam a agenda dos interessados.

CARÁTER DE INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Ressalta-se ainda que como caráter de inclusão, bastava o aluno estar matriculado na turma da disciplina frisando que aquele que porventura não quisesse participar poderia a qualquer momento se retirar do projeto, não sendo prejudicado por tal fato, isto é, para que um discente fosse desligado da pesquisa seria necessário que ele não tivesse mais interesse em participar das atividades, que não pudesse mais comparecer as aulas, ou ainda, trancasse a matrícula da disciplina EMAP.

A METODOLOGIA DA PESQUISA

Interpretamos que esse trabalho incorpora diversos aspectos metodológicos, de forma que alguns se destacam mais do que outros. De qualquer maneira, nosso olhar se firma macroscopicamente na pesquisa qualitativa. Segundo (REY, 2005, p. 105) a pesquisa desta natureza é "um processo aberto submetido a infinitos e imprevisíveis desdobramentos, cujo centro organizador é o modelo que o pesquisador desenvolve e em relação ao qual as diferentes informações empíricas adquirem significados".

Afunilando na metodologia qualitativa este trabalho se pauta, especificamente, em três vertentes que se mostram atreladas. Não se deveria estipular uma ordem para enunciá-las, pois elas ocorreram quase que mutuamente, porém apenas pela necessidade da descrição a divisão é necessária.

Do fato de estar presente nas aulas de EMAP têm-se três situações: descrição, participação, análise. De forma que as duas primeiras são características do Estudo de Caso e a última (análise) se coloca como necessária às conclusões da pesquisa.

Caracterizando a descrição temos o estudo de caso. (SARMENTO, 2003, p. 138) ao lidar com os estudos de caso de escolas diz que é "um formato metodológico que deve a sua divulgação, antes de mais, ao facto de perspectivarem holisticamente as unidades organizacionais". Ou seja, a base desta metodologia está na interpretação contextual. Ela se mostra importante neste trabalho, uma vez que há a necessidade de investigar no contexto como os participantes pensam a disciplina EMAP.

É possível convergir ainda mais nesta metodologia. Apesar de não mantermos o foco numa análise minuciosa a respeito das formas de comportamento ou produção dos sujeitos envolvidos no curso de Licenciatura em Matemática da UFU, interpretamos que há uma cultura do curso e cada disciplina também possui a sua, sendo influenciada pelo projeto do curso e pelas ementas das disciplinas. Portanto, é interessante pautarmos nossos estudos sobre EMAP em uma análise qualificada como etnográfica. Embora não queiramos nos aprofundar muito na discussão, como dissemos anteriormente, compreendemos que essa pesquisa é alicerçada por uma pluralidade de características próprias de diversas metodologias, por isso a importância de elucidarmos algumas interpretações sobre a pesquisa etnográfica. Moreira descreve que:

> [...]a metodologia etnográfica é qualitativa e holística, fazendo uso da intuição e de outras habilidades do investigador para interpretar descritivamente uma cultura. Seu interesse é descobrir (no sentido de construir uma descrição compreensiva e contextualizada) e não em verificar (MOREIRA, 2002, p. 7, tradução nossa).

Entendemos que os estudos de caso, sobretudo os etnográficos, exigem do pesquisador convivência no ambiente e com os sujeitos pesquisados, não somente para evitar o estranhamento, mas também para compreender e se inserir na cultura daquele meio a fim de prover interpretações holísticas. Ainda que saibamos que essa cultura sempre está em movimento, exaltamos o comprometimento para acompanhar o fluxo de informações, fatos e comportamentos.

Marli André ressalta que uma das características do trabalho etnográfico em educação é a presença em campo, ou seja, "o pesquisador aproxima-se das pessoas, situações, locais, eventos, mantendo com eles contato direto e prolongado" (ANDRÉ, 2008, p. 29).

Ressaltamos então que o pesquisador que vos escreve esteve presente no curso, vivenciando as dificuldades e contentamentos dos discentes, pois foi um deles. Participou como estudante da disciplina, posteriormente esteve presente em alguns encontros, os quais resultaram em seu trabalho de conclusão de curso. Quando graduado, motivado por essa pesquisa, participou "ativamente" da mesma durante dois semestres consecutivos, interagindo com o professor, bem como com os alunos, de forma a participar das discussões, inclusive de alguns trabalhos.

Cabe aqui uma observação importante. Entende-se que a participação ativa do pesquisador pode influenciar a pesquisa. Concordamos com tal afirmação, e não negamos que o fizemos, porém, nossa filosofia converge para uma "perspectiva Freiriana", na qual o "diálogo" é um "encontro de homens que pronunciam o mundo" (FREIRE, 1983, p.93), sendo ele ainda, "um ato de criação" (FREIRE, 1983, p.94). Além disso, pensamos que "Quem observa o faz de um certo ponto de vista, o que não situa o observador em erro. O erro na verdade não é ter um certo ponto de vista, mas absolutizá-lo [...]" (FREIRE, 2011b, p. 16). Compreendemos também que a partir do momento no qual nos inserimos em uma pesquisa etnográfica torna-se complicado o distanciamento dos sujeitos pesquisados, como podemos verificar nos aspectos concernentes ao caráter participativo.

Apesar de zelar pelo caráter de pesquisa que implica em certo distanciamento do pesquisador, a autora André afirma que a pesquisa etnográfica traz a interação entre o pesquisador e o objeto pesquisado, sendo que

> Os dados são mediados pelo instrumento humano, o pesquisador. O fato de ser uma pessoa o põe numa posição bem diferente de outros tipos de instrumentos, porque permite que ele responda ativamente às circunstâncias que o cercam (ANDRÉ, 2008, p. 28).

Não obstante da descrição, temos a participação nos encontros como algo que superou a observação. É natural nas descrições do estudo de caso a participação por meio da observação e para além, Moreira relata a participação na pesquisa etnográfica:

> O investigador etnográfico tem, consequentemente, dois papéis: participante e observador. Por um lado ele tem que se envolver com o grupo, por um lado ele tem que "se aculturar" ao mesmo. Por outro lado, deve ser capaz de observar, interpretar, discernir, desenvolver a perspectiva holística (MOREIRA, 2002, p. 7, tradução nossa).

Como dito anteriormente, temos ciência de que a participação nos encontros modifica o comportamento dos presentes, principalmente quando o(s) grupo(s) aos quais nos referimos são reduzidos como foi o caso nas turmas de EMAP que contribuíram com essa pesquisa. Não refutamos questionamentos dos estudantes quando os mesmos os faziam, ou seja, tudo ocorreu naturalmente.

André (2008) expõe algumas outras características do trabalho etnográfico em educação, como por exemplo, a análise de documentos como meio de contextualização dos fenômenos ou explicações mais profundas acerca dos mesmos, bem como a ênfase no processo e nem tanto no produto e também a preocupação com o significado, no sentido de que existe o cuidado "com a maneira própria com que as pessoas vêem a si mesmas, as suas experiências e o mundo que as cerca" (ANDRÉ, 2008, p. 29). Nesse trabalho entendemos que as conclusões de fato são apenas resultados do processo que estamos preocupados em analisar. O objetivo não é testar teorias para verificá-las, mas sim, a partir da ementa de EMAP, permitir liberdade aos discentes para (re)significar seus conceitos e percepções relacionadas à disciplina.

Como forma de sintetizar ideias de vários autores que escreveram sobre o estudo de caso etnográfico, André (2008, p. 51-52) enumera cinco pontos concernentes a tal metodologia e, nós além de trazê-los logo abaixo, buscamos explicar as conexões de cada um deles com essa pesquisa. Nesse sentido, o estudo de caso deve ser usado quando:

> 1 – "Se está interessado numa instância em particular, isto é, numa determinada situação, numa pessoa ou num específico programa ou currículo". Estamos interessados na disciplina EMAP.
>
> 2 – "Se deseja conhecer profundamente essa instância particular em sua complexidade e em sua totalidade". Analisando a documentação do curso e da disciplina, bem como no convívio com os alunos, entrevistas e análise de trabalhos elaborados buscamos compreender melhor como se dá o processo de formação do professor na referida disciplina.
>
> 3 – "Se estiver mais interessado naquilo que está ocorrendo e no como está ocorrendo do que nos seus resultados". Baseados no projeto, na ementa, nos trabalhos e relações dos discentes, tentamos perceber como se dá a formulação e a resolução de problemas na disciplina. Não desmerecendo os resultados finais, como os trabalhos de conclusão de EMAP, entendemo-los como parte integrante do processo.
>
> 4 – "Se busca descobrir novas hipóteses teóricas, novas relações, novos conceitos sobre um determinado fenômeno". Buscamos verificar como se dá a Formulação de Problemas por parte dos discentes, bem como suas relações e significações em meio à disciplina.
>
> 5 – "Se quer retratar o dinamismo de uma situação numa forma muito próxima do seu acontecer natural". Buscamos de fato retratar os fatos e ideias como se deram, naturalmente.

A CONSTRUÇÃO DOS DADOS

Para a construção dos dados na turma de EMAP o projeto de pesquisa seguiu normativas estabelecidas pelo Comitê de Ética em Pesquisas com Seres Humanos (CEP) da Universidade Federal de Uberlândia e utiliza os seguintes instrumentos de construção de dados:

- notas de campo,
- fotografias,
- filmagens das apresentações,
- documentos produzidos pelos alunos na pesquisa,
- registros em espaços virtuais restritos aos participantes,
- questionário,
- entrevistas.

Toda a construção dos dados foi realizada sempre preservando a integridade dos sujeitos da pesquisa e prezando sua não identificação.

Entendemos que notas de campo são importantes no processo de registro dos acontecimentos. É interessante que sua construção aconteça o quanto antes, visando registrar as diferentes informações descritivas e reflexivas. Já as fotografias possuem mensagem subjetiva, que expressa características importantes do olhar do pesquisador e serão analisadas e utilizadas de "acordo com o tipo de intenção daquela mensagem visual ou, ainda, da comunicação em que ela se insere" (DUARTE; BARROS, 2008, p. 339).

Complementando as notas de campo e fotografias, usamos as filmagens, que além de recordarem momentos da aula, registram falas, questionamentos, reflexões e expressões dos alunos que o observador/pesquisador não conseguiria registrar em tempo hábil ou que, possivelmente, perderiam algo da essência caso fossem descritas em palavras. Todas essas informações são relevantes na análise dos dados e serão observadas atentando para indicadores que satisfaçam os objetivos da pesquisa.

O questionário utilizado foi construído seguindo cuidados na elaboração, sendo limitado em tamanho e em finalidade, na busca de ser respondido no menor tempo possível. Segundo Pádua (2004) é importante escolher as questões que sejam mais relevantes à pesquisa. Afirmação com a qual concordamos uma vez que, desvirtuar os questionamentos pode levar o sujeito que responde a se desinteressar, o que por sua vez não permitirá que fatos condizentes ao estudo sejam impressos em suas respostas.

A pesquisa também se constitui na internet. Essa produção de dados exige uma constante observação e acompanhamento sistemático dos grupos através de postagens, compartilhamentos e diálogos virtuais produzidos pelos participantes, bem como questionário feito a partir de formulários disponibilizados a partir de uma ferramenta do *Google Drive*[10]. Esses dados foram analisados na forma de registro e sequência cronológica de construção do conhecimento.

Consideramos ainda que nenhuma pesquisa é isenta de riscos, o desenvolvimento do projeto ofereceu risco ínfimo à integridade física, moral, intelectual e emocional dos indivíduos que se dispuseram a participar do mesmo. No entanto, todas as atividades desenvolvidas foram de livre participação, logo, não existiram punições quanto a não participação. Um dos riscos da pesquisa é realizar alguma identificação dos participantes envolvidos na mesma. Entretanto, para evitar esse tipo de problema, foram editadas todas as imagens, vídeos e áudios utilizados a fim de preservá-los. Sendo firmado que os pesquisadores se comprometem a utilizar pseudônimos (quando possível, escolhidos pelos próprios entrevistados) e outras ações que julgarem necessárias (ou que os próprios sujeitos da pesquisa julguem) para minimizar o risco de identificação.

Mesclando todas as considerações, podemos notar um objetivo central: despertar a criatividade e autonomia dos professores em formação, exaltando e exercitando a importância do trabalho coletivo e desenvolvendo características voltadas à Educação Matemática. Como subitens ressaltamos a elaboração de trabalhos voltados à matemática vinculada à formulação de problemas, almejando a apresentação em eventos acadêmicos, bem como, uma possível sugestão para a ementa de forma a contemplar e/ou reforçar a presença da Formulação de Problemas na disciplina O Ensino de Matemática Através de Problemas.

---

[10] No Google Drive, pode criar apresentações, folhas de cálculo e documentos novos instantaneamente. Fonte: <https://www.google.com/intl/pt_BR/drive/start/features.html> Acessado em: 15 de fevereiro de 2014.

Entendemos a importância de sempre se discutir formas de maximizar a aprendizagem de matemática, vemos ainda a importância de que isso se faça em conjunto. Propomos a atuação em comunhão com a turma, a fim de aprendermos e criarmos/construirmos juntos uma visão mais arrojada da disciplina para também fomentar futuras implementações no curso.

A coletividade proporciona possibilidades da continuidade para com os alunos que cursem a disciplina, uma vez que estes podem e devem ser convidados para relatar suas experiências a futuros alunos, numa tentativa de aproximar ainda mais os futuros professores de um ambiente colaborativo e que possibilite uma desenvoltura mais apropriada às propostas da disciplina. Nessa perspectiva, o trabalho a ser desenvolvido na metodologia posta visa repensar esta estrutura afim de que se possa coletivamente obter uma estratégia que aproxime os professores em formação, bem como este pesquisador que vos escreve, de uma realidade na qual possamos nos tornar cada vez mais autores no processo educacional.

Como forma de estruturar essas e outras ideias segue o primeiro capítulo detendo informações acerca do que entendemos enquanto Problema, bem como definições e pensamentos de diversos autores sobre a Resolução e Formulação de Problemas, encerrando com a Modelagem Matemática.

O capítulo 2 trata da descrição e análise da trajetória dos estudantes pesquisados, buscando relacionar suas reflexões com as características teóricas levantadas no capítulo 1, a fim de traçar um perfil e refletir sobre as possíveis vantagens e desvantagens da metodologia empregada, bem como objetiva verificar o que pode contribuir para o processo de autonomia de professores em formação. Sendo assim, esse segundo capítulo estará dividido em 3 partes: **Organização e desenvolvimento da disciplina EMAP**, com o propósito de compreender melhor a disciplina, bem como a trajetória do trabalho coletivo dos sujeitos da pesquisa enquanto cursavam a mesma; **Trajetória dos licenciandos na elaboração do PIPE na disciplina EMAP**, parte na qual discuto os trabalhos produzidos pelos mesmos; **Análise de dados: Libertação dos futuros professores**, em que analiso os produtos dos trabalhos, bem como características do questionário e entrevista com os licenciandos que cursaram EMAP durante a pesquisa a fim de refletir sobre a autonomia dos mesmos baseado em suas problemáticas acerca de seus respectivos Projetos Integrados de Prática Educativa.

O último capítulo dedico às considerações finais, sintetizando o que foi verificado na pesquisa e deixando possíveis encaminhamentos para trabalhos que por ventura sigam na linha dessa pesquisa.

Aprendi bastante durante o trabalho e com as experiências enquanto monitor do laboratório, professor voluntário e também da rede estadual. No entanto, tenho a consciência de que ainda há muito que aprender e vivenciar! Por isso compartilho da ideia de que estou sempre em **diálogo com o mundo**, sempre me tornando professor, e isso é ótimo.

CAPÍTULO I

DISCUSSÕES TEÓRICAS

Nem a arrogância é sinal de competência, nem a competência é causa de arrogância. Não nego a competência, por outro lado, de certos arrogantes, mas lamento neles a ausência de simplicidade que, não diminuindo em nada seu saber, os faria gente melhor. Gente mais gente.

(Paulo Freire in Pedagogia da Autonomia)

Acreditamos ser importante esclarecer os motivos das discussões teóricas. O leitor perceberá que não trataremos neste capítulo apenas de Formulação de Problemas, mas também de outros tópicos como Problema de um modo geral, Problematização, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática.

A escolha de lidar com todos esses aspectos voltados à Educação Matemática se deu a partir da ementa da disciplina EMAP. Como nossa pesquisa é voltada para os desdobramentos da disciplina optamos elencar e discutir teoricamente os tópicos propostos pela ementa a fim de termos o embasamento necessário para discussões no capítulo seguinte, ao analisar os dados.

1.1. PROBLEMA

Quem já não teve um problema? Sem sombra de dúvidas é possível afirmar que todos já "enfrentaram" no mínimo um! Os problemas são inerentes à vida, várias pessoas depositam neles os motivos para crises financeiras, familiares, etc. Sem ironias, o problema na verdade não é o verdadeiro vilão dessa história. Etimologicamente a palavra em destaque deriva do grego *próblema*, que por sua vez vem de *probállein*, que significa "atirar para frente"[11].

Há diversas interpretações ou sinônimos para o termo problema. Existem problemas em várias áreas do conhecimento com explicações científicas e até espirituais, problemas que se encontram na filosofia, na matemática ou em tantas outras disciplinas quanto existirem. Na filosofia grega, por exemplo, Aristóteles em sua obra Metafísica destaca:

> Os homens começaram a filosofar, tanto agora como na origem, por causa do maravilhamento: no princípio, ficavam maravilhados diante das dificuldades mais simples; em seguida, progredindo pouco a pouco, chegaram a se colocar problemas sempre maiores, como os relativos aos fenômenos da lua, do sol e dos astros e, depois, os problemas relativos a origem de todo o universo (ARISTÓTELES, 982 b-l3/14).

É possível notar o aparecimento da palavra problema como parte da constituição da base da filosofia. Reale e Antiseri, autores do livro "História da Filosofia" na apresentação do primeiro volume (Filosofia pagã antiga) corroboram a temática:

> Os problemas filosóficos, portanto, existem, são inevitáveis e irreprimíveis; envolvem cada homem particular que não renuncie a pensar. A maioria desses problemas não deixa em paz: Deus existe, ou existiríamos apenas nós, perdidos neste imenso universo? O mundo e um cosmo ou um caos? A história humana tem sentido? (REALE; ANTISERI, 2003, apresentação).

Os autores trazem à tona os problemas filosóficos e ressaltamos que o leitor guarde a expressão "A maioria desses problemas não deixa em paz" para discussões que se seguem.

---

[11] Disponível em: <http://www.dicionarioetimologico.com.br/searchController.do?hidArtigo=F25EF6432D26FAEF0602E3AF2B25BBB1> Acessado em 15 de fevereiro de 2014.

Notoriamente, apesar de um problema ser apresentado como uma pergunta, uma pergunta nem sempre é um problema como verificamos em Saviani (2007). Tomemos um exemplo prático. Suponha um pequeno proprietário rural que planta e cultiva com suas próprias mãos eucaliptos como fonte de investimento de longo prazo. Pergunta-se a ele: quantos pés dessa árvore existem plantados em sua propriedade? Veja que essa pergunta pode não se configurar como um problema, uma vez que foi ele quem efetuou todo o plantio. Ainda que aumentemos a complexidade do questionamento para: em quantos lotes e fileiras os eucaliptos foram divididos? Ou quantas fileiras constituem cada lote? Certamente, o homem terá de recapitular em sua memória algumas informações, fazendo com que o "esforço algébrico" e a rapidez para resposta sejam "grandezas" inversamente proporcionais, isto é, exigindo mais do cálculo e tornando a resposta um pouco menos imediata. Porém, com base na situação posta inicialmente, a resposta surgirá e não se evidenciará um problema, haja vista que, para elaborar a resposta, bastaria uma busca mais minuciosa em sua memória ou em possíveis anotações feitas para o acompanhamento. Essa não é uma pergunta que certamente perturbaria a paz desse indivíduo.

Entender o problema puramente como uma pergunta cuja resposta é desconhecida também não traz grandes avanços no que buscamos. Imaginemos que ao mesmo proprietário fizéssemos o seguinte questionamento: qual a quantidade total de folhas de eucalipto em sua plantação? Essa indagação se compreende no que pode ser chamado de "não-saber", que segundo Saviani (2007), trata-se de uma corrente do uso da palavra problema, significando-o como tudo aquilo que se desconhece.

A interrogação posta não faz sentido, uma vez que não seria possível precisar quantas são as folhas e, além disso, essa quantidade está fortemente relacionada a diversos fatores, tais como ventos e brisas, chuvas, componentes do solo que certamente, ainda que por menor que seja, sofrem variação conforme a localidade, bem como ao agricultor que, por exemplo, tem interesse em vender o eucalipto para produção de carvão ou tratar a madeira para que seja utilizada na construção civil, a quantidade de folhas torna-se irrelevante.

Por fim, a assimilação do problema enquanto dúvida. O fim ou a continuidade dessa se configura pelo sim ou não. Podemos colocar a dúvida frente ao proprietário dos eucaliptos, como: duvido que você corte imediatamente parte da plantação. A partir daí há possibilidade dele cortar e acabar com a dúvida ou de não cortar e a dúvida provavelmente permanecer. Num sentido mais amplo, de uma dúvida não imposta, mas sim de algo relacionado à curiosidade, poderíamos pensar: tenho uma dúvida com relação ao padrão da distância em que as árvores foram plantadas. Essa dúvida pode ser sanada facilmente com uma pergunta, recaindo no primeiro caso discutido, ou ainda medindo as distâncias, dentre outras possibilidades plausíveis e de simples execução. Portanto, uma dúvida nem sempre pode ser colocada como sinônimo de problema.

Segundo nossa interpretação, podemos mesclar todas essas características e ainda existe a chance de não se ter um problema. Por exemplo: você duvida que eu conte todas as folhas de um dos pés de eucalipto? Veja que essa é uma dúvida posta como pergunta em torno do "não-saber". Não se sabe quantas folhas um dos pés da planta possui o que configura o "não-saber", porém é possível contá-las, tornando então a indagação superficial, apesar de complexa se implementada na realidade. Por fim, a dúvida apresentada recai na possibilidade positiva ou negativa de colocar em prática o que se discute e como citado anteriormente, possibilita o fim ou a permanência da mesma.

Apesar do exemplo citado, entendemos que um problema tem um pouco de pergunta, de "não-saber" e uma pitada de dúvida, ou seja, as colocações feitas anteriormente se reservam ao cuidado em não se generalizar, enquanto problema, os itens citados.

Segundo nosso entendimento o que liga todas as correntes discutidas na devida proporção é a **necessidade** de uma resposta. Isso começa a configurar o fato de que um problema para uma pessoa, pode não sê-lo para outra, além disso, o problema é inerente à vida humana.

> No processo de produção de sua própria existência, o homem defronta-se com situações ineludíveis, isto é: enfrenta necessidades de cuja satisfação depende a continuidade mesma da existência (não confundir existência, aqui empregada, com subsistência no estrito sentido econômico do termo). Ora, esse conceito de necessidade é fundamental para entender o significado essencial da palavra "problema" (SAVIANI, 2007, p.17).

Como complemento, justificamos a relação forte que se tem entre os problemas e a existência humana, numa só palavra: **necessidade**. Em nossa interpretação com relação ao autor há pouco citado, entendemos que as perguntas, questionamentos e dúvidas se dividem, mesmo quando não se sabe a resposta, em duas vertentes de maneira que a resposta parte de uma necessidade, ou não. Caso seja confirmada a necessidade de obter a resposta até então desconhecida, tem-se um **problema**.

Dado o entendimento do que acreditamos se caracterizar como problema, colocamos abaixo algumas definições que englobam as características encontradas em nossas pesquisas.

O autor (DANTE, 2009, p.12) entende que "Problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de nenhum caminho rápido e direto que o leve à solução".

Não muito distante, exaltamos a definição dada por (MENDONÇA, 1993, p. 46) em que um problema é "uma questão que perturba e desafia um possível resolvedor: ele ou ela sente-se diante de uma situação que *pede* solução, que necessita de resposta e esta não é óbvia". Apesar da autora não caracterizar diretamente um possível grupo resolvedor, entendemos que quando Mendonça se refere a "ele ou ela", não exclui a possibilidade de um conjunto de possíveis resolvedores. Para além, nos agrada muito a ideia de enxergar o problema como algo "que perturba", uma vez que por toda a reflexão já efetuada até aqui, percebemos que o **problema é algo que tira a comodidade do indivíduo**, por vezes pode desorientá-lo, pois de fato o perturba de algum modo, devido a necessidade de resolvê-lo. Nesse ponto é que significamos ainda mais a expressão que ressaltamos ao leitor para que lembrasse, enquanto discutíamos brevemente os problemas filosóficos. "A maioria desses problemas não deixa em paz", ou seja, desequilibra e por isso os seres humanos veem e sentem a necessidade de resolvê-los.

Apesar de termos ciência de que tanto Dante quanto Mendonça são educador e educadora matemática, as definições de problema tratadas por ambos assumem caráter geral, com o qual concordamos, uma vez que compreendemos a necessidade de lidar com as situações de uma maneira ampla e por consequência visualizar que os problemas geralmente se caracterizam por situações que se entrecruzam com temáticas distintas quando, por exemplo, a própria matemática auxilia na biologia, na medicina e assim por diante.

Uma definição que cita diretamente um problema matemático é encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, p.41, 1998) que destaca: "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la." O que nos parece de fato não se diferir tanto do que já discutimos, apesar de que o trecho acima evidencia a existência de uma sequência de ações ou operações para que se encontre o resultado, essas características algorítmicas não distanciam a definição da essência que envolve a "necessidade".

1.1.1. Problemas e suas categorias na matemática

Alguns autores classificaram os problemas, sobretudo no que se refere à educação matemática, criando categorias para os mesmos. Um deles foi Polya (1995), um importante matemático que discorreu sobre a Resolução de Problemas, tema esse que trataremos posteriormente com mais cautela. Por ora, vamos refletir sobre as classificações do autor, com relação aos problemas:

Quadro 1: Categorias de problemas para Polya

Tipo de problema	Descrição
Problema auxiliar	Entendido enquanto auxiliar para a resolução de outro problema, isto é, dado um problema, recorre-se antes a um dito auxiliar como meio de contribuir para a solução desejada inicialmente. Salienta-se que a vantagem na resolução de um problema auxiliar é poder utilizar as reflexões e resultado na resolução do problema original. O autor, porém, adverte que o tempo investido pode ser gasto em vão, pois caso não se chegue a uma resposta esse mesmo tempo poderia ter sido empregado diretamente para se tentar a solução do problema original.
Problema rotineiro	Aquele que poderá ser solucionado pela substituição direta de dados particulares no problema genérico resolvido anteriormente, ou ainda por se efetivar a partir de um passo-a-passo já repetitivo.
Problema de determinação	"[...] encontrar certo objeto, a incógnita do problema. [...] podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas.[...] Em certos problemas de Álgebra elementar, a incógnita é um número. Num problema de traçado geométrico, a incógnita é uma figura." (POLYA, 1995, p.124)
Problema de demonstração	O objetivo é mostrar de forma conclusiva se uma afirmativa, enunciada de maneira clara é verdadeira ou falsa.
Problema prático	"são diferentes, em diversos aspectos, dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmos em ambos os casos.[...] os conhecimentos necessários são mais complexos e menos nitidamente definidos nos problemas práticos do que nos problemas matemáticos." (POLYA, 1995, p. 127)

Fonte: Organizada pelo próprio autor

Na perspectiva desse autor notamos que as cinco categorias expostas variam entre demonstrações, substituições e reflexões baseadas em situações já vivenciadas em outras ocasiões, além também de poderem surgir características práticas diferentes daquelas essencialmente matemáticas.

Por sua vez, Dante (2009) caracteriza os problemas em quatro categorias:

Quadro 2: Categorias de problemas para Dante

Tipo de problema	Descrição
Problemas-padrão	a resolução envolve a aplicação de um ou mais algoritmos aprendidos anteriormente. Subdividem-se em problemas padrão simples, que são resolvidos com uma única operação e compostos, que são resolvidos com duas ou mais operações.
Problemas-processo ou heurísticos	em geral não podem ser resolvidos com a aplicação imediata de algoritmos, tampouco possui sua solução contida no enunciado exigindo do resolvedor tempo para refletir. Sendo caracterizados pelo autor como mais interessantes que problemas-padrão.
Problemas de quebra-cabeça	segundo o autor são problemas envolventes nos quais as soluções dependem da percepção de alguma regularidade no mesmo.
Problema de aplicação	problemas que procuram matematizar situações reais, do cotidiano. Podem ser apresentados em forma de projetos e, geralmente, exigem pesquisa e levantamento de dados.

Fonte: Organizada pelo próprio autor

Com algumas diferenças, os dois autores basicamente salientam que há problemas de ordem mais imediata e simples, bem como aqueles mais complexos, que demandam tempo e até uma pesquisa apurada para serem resolvidos. Verificamos que Dante, ao colocar a categoria de “problemas de quebra-cabeça”, não exalta como uma categoria separada às demonstrações. Nesse ponto julgamos importante relembrar que independente do tipo de problema, esse só se configura como tal frente à necessidade da resolução, que é pessoal. Portanto, é possível tecer um forte comentário: **uma demonstração pode não ser perturbadora a algumas pessoas enquanto que para outras (imersas em um cotidiano repleto de provas e teorias) se configura de fato como um problema**, tal qual um quebra-cabeças para uns e não para outros.

1.2. PROBLEMATIZAÇÃO

Charles Chaplin, em seu filme *Tempos modernos* (1936), alertava sobre o trabalho em linha de produção potencializado na revolução industrial, o que contribuiu para uma relação inversamente proporcional entre as múltiplas características do trabalhador e a quantidade de trabalho. O indivíduo trabalhava muito, em uma perspectiva de que com as "contribuições" da indústria para a massificação da produção, mais pessoas teriam acesso aos produtos (o que não é verificado na realidade). Apesar de muito trabalho, houve pouca diversificação e as características dos artesãos foram se esvaindo. Um homem ou mulher que desempenhava diversas funções na sociedade passava então o dia apertando parafusos. No filme, Chaplin sofre inclusive um acesso de loucura devido a essa configuração da sociedade. Em suma, esse incrível artista conseguiu uma forma cômica de problematizar uma questão social de sua época.

A revolução industrial é tratada aqui superficialmente, porém nos serve de grande exemplo de uma etapa que potencializou essa segmentação de trabalhos e inclusive de pensamentos. A necessidade de questionar sobre diversas áreas dava lugar às linhas de produção massificadas e lineares. Se antes os artesãos enfrentavam problemas para desenvolver uma nova cor de tinta, ou se questionavam sobre novas formas de trançar as fibras para balaios, no mundo industrializado os trabalhadores fabris encontram-se encobertos por um sistema unidimensional, atrofiador do pensamento amplo, ou seja, do conhecimento do todo. Chaplin nos ofereceu, de forma irreverente, uma problematização social do sistema no qual estamos inseridos.

Essa segmentação da sociedade nos parece agir de maneira inversamente proporcional ao espaço para o **diálogo**! Apesar da exclamação, não é nossa intenção nos aprofundar nessa discussão sociológica, mas sim, iniciar nossos dizeres com esse "lembrete" de como a sociedade tem organizado a forma de pensar, e refletir sobre a educação, convergindo para a educação matemática e ainda mais, para a **problematização**.

A segmentação, na contemporaneidade, está inserida no âmbito escolar. Apesar de que nos últimos anos há discussões que convergem para mudar ao menos parte dessa realidade, ainda podemos imaginar o ensino dividido em compartimentos. É claro que cada disciplina tem suas especificidades e, de modo algum, queremos radicalizar a ponto de dizer que as mitocôndrias[12] devem aparecer no estudo de rochas na geografia. Ao contrário, seguros da ideia de que as peculiaridades existem é que tentamos discutir as lacunas deixadas onde isso não se verifica. E então, não forçosamente, lembramos Freire (1983) que relata aspectos de uma educação narrada ou dissertadora, que tem sua marca evidente na sonorização. O autor, ao discutir a educação bancária, afirma:

> A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em “vasilhas”, em recipientes a serem “enchidos” pelo educador. Quanto mais vá “enchendo” os recipientes com seus “depósitos”, tanto melhor educador será. Quanto mais se deixam docilmente “encher”, tanto melhores educandos serão (FREIRE, 1983, p.66).

Apesar dos anos que se passaram desde a fala do autor, é necessária apenas uma pequena apelação aos educadores que leem esse texto, para vários concordarem que essa prática ainda persiste, mesmo que, felizmente, muitos têm tecido esforços valorosos para seu enfraquecimento.

Freire complementa dizendo que essas práticas “anulam” o poder de criação dos educandos. Praticar alguns cálculos é algo inevitável, mesmo que a forma de lidar com eles já tenha sido compreendida anteriormente. Indubitavelmente, é necessário memorizar alguns nomes e algumas outras informações. Por exemplo, não se pode “entender” o número do telefone de um amigo ou o endereço do mesmo e, ainda que se possa guardar tais informações utilizando tecnologias diversas, a velocidade para acessá-las certamente ainda é menor do que aquela desempenhada por nossa memória.

De qualquer maneira, nem Freire, nem nós estamos tratando dessas especificidades, apenas salientamo-as a fim de fortalecer nossa justificativa pelo não radicalismo de nosso pensamento, isto é, há interseções para diversos assuntos sim, no entanto há também espaços individuais para alguns. Ter uma memória exercitada e ser veloz ao efetuar cálculos pode ser muito útil junto à capacidade de utilizar outras ferramentas diminuidoras dos esforços realizados para se gravar algo ou encontrar resultados para contas mentalmente. É preciso então ter a consciência para lidar com esses entendimentos e com as formas de trabalho em sala de aula para não ocorrer o que (FREIRE, 1983, p.82) discute na concepção bancária de educação, ou seja, “o educador

[12] Mitocôndrias são organelas presentes em células de vários seres vivos.

vai ‘enchendo’ os educandos de falso saber, que são os conteúdos impostos”. Repetir a tabuada pode oferecer a maior rapidez para determinar uma soma ou produto daquelas operações postas, no entanto, não produzirá no educando a autonomia de usar uma ferramenta tecnológica para calcular um produto entre números muito grandes.

Se refletirmos então sobre diversos momentos históricos, de nossas vidas inclusive, sobre questões tecnológicas, desde a folha de papel até os supercomputadores utilizados para previsão do tempo, poderemos compreender melhor que os caminhos trilhados, os produtos criados e os usos dos mesmos se relacionam fortemente com os problemas enfrentados. As soluções, por sua vez, são norteadas pelo que podemos entender como problematização.

A autora Mendonça define que “a **problematização** é o caminho para chegar ao problema” (MENDONÇA, 1993, 274) e ao caracterizar esse caminho enfatiza que as palavras “pensar” e “agir” são essenciais. Além disso, “Toda problematização procede do pensamento e todo pensamento é tornado efetivo a partir da ação. Na verdade, a problematização é inseparável da atitude de perguntar, ou seja, admite-se o primado da pergunta.” (MENDONÇA, 1993, p.26).

Caminhamos para o entendimento de que a problematização tem papel fundamental para determinar os sujeitos que somos, observe como define a autora, as palavras **pensar** e **agir** que são muito presentes junto ao “primado da pergunta”. Disso podemos verificar que a segmentação percebida na revolução industrial é, não somente, mas também relativa à **problematização**. Ou seja, as **perguntas**, os **pensamentos** e **ações** foram direcionados à repetição de tarefas e à especialização nas mesmas para atender a uma “necessidade” da época. Da mesma forma as tecnologias atuais e os encaminhamentos pessoais que tomamos em nossas vidas se verificam baseados nos questionamentos que temos a responder, iniciados a partir de pensamentos e que culminam em ações que resultam em quem somos, no que usamos e de que forma usamos. No entanto, tudo parece mais sistematizado, elencado em categorias que muitas das vezes não se desvelam umas para as outras e têm seus **diálogos** enfraquecidos.

Freire (1983), ao lidar com a questão problematizadora retratada na educação libertadora (que se contrapõe à bancária citada anteriormente) afirma com respeito ao educador:

> Sua ação, identificando-se, desde logo, com a dos educandos, deve orientar-se no sentido da humanização de ambos. Do pensar autêntico e não no sentido da doação, da entrega do saber. Sua ação deve estar infundida da profunda crença nos homens. Crença no seu poder criador (FREIRE, 1983, p.71).

Consentimos o ideal que consiste em crer no poder criador do ser humano e acreditamos que a problematização concernente à educação libertadora é parte fundamental para a constituição de uma metodologia no ensino de matemática no viés do trabalho com problemas. Entendemos que a problematização tratada por Freire, não se insere no educador, tal como esse não insere conteúdos na mente de seus alunos. A problematização brota da criticidade e da inquietude, do homem que sempre busca ser mais, no sentido de compreender e refletir mais, no caso do educador, comparecer e fazer com seus alunos, não por eles ou para eles, mas sim, **com eles**.

Nesse ponto pausamos as discussões para preencher uma lacuna deixada de propósito e que talvez o leitor já tenha notado. Não tentamos partir a problematização em tabelas que se refiram à forma de compreendê-la, mas é preciso que se note que há qualidades de problematização que estão fortemente ligadas à intencionalidade humana. Não queremos dizer que há qualidades boas ou ruins, mas sim, intencionais. Algumas vezes o autor desse texto, ao conversar sobre tecnologias com colegas, indagava sobre o que é mais tecnológico, uma folha de papel ou um computador, e a princípio vários afirmavam ser o computador. Mas ao problematizar o uso desses objetos, os pensamentos mudavam. A conversa seguia na sugestão de se imaginar o computador sendo usado para a disseminação de “correntes de e-mail” daquelas que insistem ao final que se o indivíduo não continuar espalhando terá azar. Enquanto isso, era sugerido que outra pessoa estivesse usando uma folha de papel para criar versos do tipo: “minha terra tem palmeiras, onde canta o sabiá...[13]”. A intencionalidade do uso dita o que citamos como a qualidade da problematização.

Na educação matemática, deparamo-nos então com um educador engendrado em discutir criticamente a disciplina. Entendendo que o meio em que o próprio professor e seus alunos vivem é parte importante da aula.

A discussão pode problematizar a realidade, não como um problema ruim, mas como problemas efetivos e visíveis para os alunos. Vejamos alguns exemplos:

---

[13] Pequena parte do poema “Canção do Exílio” de Gonçalves Dias.

Dada a função f(x) = 10,8 ; $x \in [1, 2, \dots, 12]$, encontre o valor da mesma para x = 8.

Quando nos deparamos com uma questão como essa, podemos observar algumas visões a respeito. Haverá pessoas que sem pestanejar tentarão resolvê-la, algumas delas com mais rapidez do que outras, se satisfazendo por ter encontrado uma solução. Outras pessoas poderão criticá-la e dizer que é uma questão mal escrita ou que não condiz com a realidade. Então surge a pergunta: essa é uma questão fruto de uma problematização?

Isso é relativo! Esta é uma problematização que envolve apenas a álgebra e fortalece a matemática por si só. No ambiente da matemática fechada nela mesma, a questão é condizente e satisfaz pensamentos puramente algébricos. A problematização não se evidencia na forma como viemos discutindo, no entanto ela existe com outra roupagem. A questão foi problematizada pensando um domínio e uma função constante e pode-se discutir a partir dela que para qualquer valor de *x* pertencente ao domínio, o resultado será o mesmo. O domínio, por sua vez, é um subconjunto contido no conjunto dos números naturais, que é subconjunto dos números inteiros, e assim por diante. Todas essas características podem oferecer discussões e conhecimentos, contidos puramente na matemática, caracterizando a situação como problematizadora intencionalizada para um ambiente puramente algébrico.

No entanto, existe outra forma de se ver a problematização. Como lidamos antes com uma matemática aplicada à própria matemática, ao conectarmos a função ao quotidiano da prática e do senso comum entendemos que não estaremos reformulando o problema e sim criando outro, que não se insere exclusivamente no campo puramente algébrico. Podemos entender a ponte entre o saber matemático e o saber prático como uma problematização a partir de uma situação do dia a dia, a fim de formular um problema que porventura pode utilizar as mesmas características matemáticas do anterior. Para isso, imagine que o tema da aula seja preço de produtos alimentícios da cesta básica. Levantando questões e opiniões concernentes aos produtos que existem na mesma, se a família de algum aluno a recebe, quais itens poderiam ser acrescentados, políticas governamentais envolvidas, dentre outros, pode surgir uma análise específica, por exemplo, do arroz.

Dialogando sobre o **valor** desse alimento é viável trazer à tona questões que envolvem o trabalho do homem do campo, bem como do desenvolvimento do maquinário utilizado para colheita. Esse ambiente pode contar com diversas informações, tanto do senso comum, quanto daquelas oriundas de fatos históricos ou jornalísticos. Ao permitir que tais assuntos aflorem é possível utilizar a matemática para, dentre outros, entender a variação dos preços no decorrer do ano, o que seria uma das ramificações do **valor** do arroz. Supondo essa variação mínima durante os meses, pode-se escrever uma função que contribua para essa análise, de forma que o domínio não seja apenas números, mas se refira dessa vez aos meses do ano em questão, sendo $f(x)$ a função que caracterize esse valor durante o decorrer do período analisado. Nessa análise a inclinação da reta deixa de ser apenas uma referência à tangente do ângulo que a mesma "faz" com o eixo das abscissas e se refere a aumentos, decréscimos ou estabilização dos preços.

Problematizar dessa forma emancipatória "[...] tem, em geral, o poder de desinibir os poderes cognitivo, criativo e crítico dos educandos por meio do desafio de desvelar a realidade em que estão imersos" (MENDONÇA, 1993, p. 274). Portanto, a fala da autora corrobora e, de certa forma sintetiza, nossa colocação de que o ato de problematizar pode estar presente não somente em formas do cotidiano[14], mas também em pensamentos que envolvam, por exemplo, a matemática dita pura. Isso se deve ao fato de que a problematização lida com o cognitivo, bem como com a criatividade e a criticidade por meio **da realidade em que estão imersos**. Ora, se um estudante ao lidar com triângulos retângulos não os relacionar a altura de prédios e sim, apenas se questionar sobre como encontrar os ternos que satisfazem o teorema de Pitágoras, ele está contemplando sua criatividade com pensamentos críticos a respeito daquela realidade em que está inserido.

Ilustrando a segmentação outrora referida, trazemos um fato verídico ocorrido em uma aula ministrada numa região periférica da cidade e vivenciada pelo autor desse texto. A aula era de geografia, sobre os recursos hídricos no mundo. Passados vários minutos desde o início daquele encontro, quando a professora discutia a respeito da África, uma aluna pediu a palavra e falou algo do tipo: *Professora, nós estamos falando da água para população Africana, mas aqui do lado, na minha casa, não tem água*. A professora ficou um tanto desnorteada com a colocação da aluna. No entanto, todos nós

[14] Entendemos que o cotidiano é relativo a pessoa, portanto, ao estudar a matemática pura essa é o cotidiano do indivíduo que a relaciona. No entanto, referimo-nos o cotidiano, nesse momento, como aplicável diretamente à prática.

estamos sujeitos a isso, uma vez que nos formamos treinados a não problematizar, e por diversas vezes, quando o fazemos, em geral seguimos as regras postas por "entidades" que trabalham com o macro, elaborando os livros ou materiais digitais disponibilizados em massa.

Insistimos que não queremos dizer que o sistema está errado, no entanto percebemos e inclusive exemplificamos que o mesmo carece de uma educação problematizadora que se faça menos segmentada, enquanto "um esforço permanente através do qual os homens vão percebendo criticamente, como *estão sendo* no mundo *com que* e *em que* se acham." (FREIRE, 1983, p.82). Construindo um espaço para a pergunta que problematiza, que por sua vez pode então caracterizar um **diálogo**, um início próprio e com autoria que refletirá em um problema, haja vista que haverá então um **questionamento que perturbe** a todos aqueles ali presentes. Parece-nos de fato ser preciso que entendamos a problematização como

> um processo **natural** de articulação, com base no diálogo, da relação do indivíduo com o meio e consigo mesmo. Nesse processo de articulação/organização, o pensamento criativo dialoga com as experiências anteriormente acumuladas pelo sujeito da **problematização**, articulando o antigo e o novo, através da combinação que respeita a especificidade do sujeito e do objeto a ser conhecido. Resultados mais elaborados vão se construindo nesse processo, resultados estes, que se constituem em **verdadeiros problemas**. (MENDONÇA, 1993, p. 280)

É importante refletirmos sobre a matemática que estudamos e a que utilizamos. Problematizar a respeito do que e para quem? Qual o propósito de nos questionarmos sobre o preço do arroz? Problematizar transcende o preço, lida **com o valor**, **com a história**, **com o mundo**. A matemática pode ser emancipatória, pode ser libertadora, pode não ser tão "chata" quanto alguns dizem! Inevitavelmente,

> acreditamos que para verificar as possibilidades e as condições da **problematização**, temos que transformar a Educação Matemática em um ambiente educativo que tem espaço para a observação, a experimentação e o diálogo – não só o **diálogo dirigido para a formulação de problemas** que envolvem propriedades do espaço e as quantificações, mas o **diálogo** que leva em conta os aspectos **sociais, afetivos** e **emocionais** [...] (MENDONÇA, 1993, p.274)

1.3. Resolução de Problemas

1.3.1. A Resolução de Problemas no ensino: pontos destacados ao longo da história

Assim como em outros assuntos na história, o ensino de matemática sofreu mudanças ao longo do tempo. As reformas foram fortemente influenciadas pelo “caminhar” da sociedade. Como afirma Onuchic (1999) ao passar de sociedades rurais para industriais e, posteriormente, para uma sociedade da informação e em seguida do conhecimento, a necessidade de saber matemática aumentou. Os modelos antigos de ensino dessa disciplina começaram a ser contestados e, consequentemente, outras perspectivas foram surgindo. A mesma autora ressalta três momentos a partir do início do século XX que apresentamos logo abaixo:

A princípio, o ensino de matemática tinha como foco a repetição como, por exemplo, das tabuadas. Nesse período o aluno era visto como um memorizador e repetidor. Enquanto o professor falava, o discente escrevia e “armazenava” informações para repeti-las quando necessário, ainda que a visão dessa necessidade não se concentrasse no cotidiano do indivíduo.

Anos depois se sugeriu o ensino de matemática com compreensão. À primeira vista, ao se analisar o nome dado a essa reforma, é possível entendê-la como uma maneira muito interessante de se trabalhar com a disciplina, uma vez que compreender é algo extremamente importante no processo educacional. Entretanto, olhando mais profundamente para essa orientação percebemos que o aluno continuava imóvel, uma vez que o mesmo assumia um papel de “escutador e repetidor” do conteúdo. Em suma, o discente não participava da construção de seu conhecimento. Nessa época se iniciou a discussão sobre resolver problemas como um meio para aprender a disciplina.

Um novo movimento se fez presente na reforma que ocorreu nas décadas de 1960 e 1970, sendo chamado de Matemática Moderna. Essa corrente exaltava a formalização dos conteúdos e era fortemente apoiada em estruturas lógicas. Além de enfatizar a teoria dos conjuntos, destacava muitas propriedades e abstrações, criando assim um ambiente no qual o professor poderia mais facilmente se sentir inseguro e, de maneira geral, deixava o aluno distante das conexões dos conteúdos com o seu quotidiano. Os PCNs de Matemática corroboram o entendimento desse movimento de renovação:

> A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente do ensino por se considerar que, juntamente com a área de Ciências, ela constituía uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. Para tanto procurou-se aproximar a Matemática desenvolvida na escola da Matemática como é vista pelos estudiosos e pesquisadores. (BRASIL, p.19, 1998)

O documento ressalta que esse movimento provocou novas discussões no Brasil e no mundo sobre o currículo de Matemática.

O próximo passo histórico de grande destaque na literatura e, que diz respeito ao ensino de matemática, se deu em 1980, ano no qual o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) dos Estados Unidos publicou um documento chamado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's.* Segundo Onuchic (1999) o documento era um esforço cooperativo para melhorar a educação matemática, com recomendações:

> A primeira dessas recomendações dizia que "resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80" e destacava que "o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década e que o desempenho em saber resolver problemas mediria um domínio, pessoal e nacional, da competência matemática (ONUCHIC, 1999, p.204).

Os PCNs de Matemática tratam desse período e salientam que as ideias discutidas naquele ano oportunizaram a elaboração de propostas por todo o mundo entre 1980 e 1995, de forma que as mesmas tinham pontos em comum, dentre eles destacamos um: "ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas" (BRASIL, 1998, p.20).

A Resolução de Problemas tomava mais força e suas discussões amplas resultavam em coleções de problemas e estratégias para lidar com essa maneira de trabalhar matemática, mas também havia problemas. Onuchic e Allevato (2011, p.78) afirmam que não havia clareza de como os objetivos do ensino da matemática através da Resolução de Problemas seriam alcançados.

As autoras ainda destacam que existiram mais esforços no sentido do auxílio aos professores e claro, à Educação Matemática. Como exemplos, foram publicados os NCTM documentos nos anos de 1989, 1991, 1995 e 2000, sendo que a partir do último, intitulado *Standards 2000*,

> os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.80)

No Brasil houve o surgimento dos PCNs, e são justamente os Parâmetros Curriculares Nacionais uma das colocações que surgem frente à problemática evidenciada na Matemática Moderna.

> Com base na experiência malsucedida com a Matemática Moderna, alternativas para o ensino de matemática como os Parâmetros Curriculares Nacionais começaram a surgir, reforçando a importância de se reavaliar os objetivos da disciplina, mas sem propor soluções milagrosas e rápidas para o ensino. (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004, p.13)

Dos caminhos trilhados pela Educação Matemática surgem então as discussões que permeiam o ensino de matemática com temáticas envolvendo a Resolução de Problemas.

1.3.2. ALGUMAS FORMAS DE ENTENDER E PROCEDER COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dos esforços históricos de defensores da Resolução de Problemas, pesquisadores teceram em décadas passadas e na atualidade, trabalhos valorosos na Educação Matemática. Destacamos que esse texto não procura descrever tudo o que ocorreu no campo da RP, tampouco comparar formas de se trabalhar nessa temática, contudo, entendemos como primordial evidenciar alguns pensamentos acerca dessa temática. Dentre os tópicos, trazemos as fases apresentadas por Polya para RP e indicações de autores nacionais e internacionais sobre as formas que a Resolução de Problemas se encaminhou na Educação Matemática.

Documentos oficiais como os *Standards* nos E.U.A., os Parâmetros Curriculares Nacionais e Orientações Curriculares Nacionais no Brasil se empenham fortemente em contemplar a Resolução de Problemas nas aulas de matemática. Esse último adiciona que "Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano" (BRASIL, 2006, p. 69). Elucidando ainda que o trabalho com os conteúdos de matemática valorize a resolução de problemas, de aplicação prática ou teórica.

Do amplo, isto é, de textos norteadores entendidos enquanto documentos educacionais, afunilamos para as especificidades tratadas por teóricos e documentos que descrevem e encaminham propostas para a Educação Matemática nos diversos níveis de ensino.

No que tange a literatura internacional, a primeira pessoa a estruturar uma forma para se resolver problemas em matemática foi Geoge Polya, matemático húngaro que em 1945 publicou o livro "*How to solve it*", recebendo a tradução para o português como "*A arte de resolver problemas".* Atualmente sua obra é uma grande referência nessa área e relata a observação, durante as pesquisas, de quatro etapas ou fases para resolver um problema: Compreender o problema, Estabelecer um plano, Executar o plano e, por fim, o Retrospecto. Antes de descrevê-las, é importante compreender que Polya dialogava no sentido de contribuir com a aula, isto é, não narrou observações apenas para as resoluções, mas sim, para inserí-las na sala de aula.

A primeira fase, ou seja, o momento dedicado à compreensão do problema é também baseado no desejo pela resolução, sendo subdividido em "familiarização" e "aperfeiçoamento da compreensão" (POLYA, 1995, p. 25), de modo que ambas estabelecem os mesmos parâmetros iniciais – por exemplo, "por onde começar?" – porém, aperfeiçoando mais a compreensão após a familiarização – para o mesmo exemplo, começando pelo enunciado e retornando ao mesmo para que esse esteja claro, minimizando ou eliminando riscos de esquecê-lo. O autor respalda no professor a importância da escolha de um problema adequado, possibilitando ao aluno condições para identificar os dados contidos no mesmo.

Marcando essa fase o autor destaca que "É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas” (POLYA, 1995, p. 4).

Dando continuidade às observações levantadas pelo autor, estabelecer um plano é fruto de ideia(s) que pode(m) surgir gradualmente ou ainda após “tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ‘ideia brilhante’” (POLYA, 1995, p. 5). Baseando boas ideias, não exclusivamente, mas com grande peso nessa fase, o autor caminha para a procura por problemas parecidos, de que já se tenha conhecimento, como forma de alimentar pensamentos a respeito daquela resolução.

Executar o plano, de maneira geral, torna-se consequência da fase anterior, de modo que se salienta nesse passo a importância de verificar todas as etapas do plano, antes de executá-las.

Finalizando, com o problema já resolvido, inicia-se o último estágio. Chamada de retrospecto essa fase compreende a verificação da solução, averiguando novamente a resolução ou utilizando algum outro processo quando possível, como por exemplo, a prova real em adições, multiplicações, etc.

Polya (1995) reconhece que podem ocorrer casos em que se tenham ideias brilhantes e algumas das etapas sejam puladas, mas afirma que existe a possibilidade de ocorrerem equívocos caso se deixe de lado alguma das fases, ao supor, por exemplo, que se tente estruturar algébrica ou geometricamente a solução de um problema sem tê-lo compreendido.

No Brasil uma importante referência é o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), UNESP-Rio Claro/SP. Onuchic faz parte desse grupo e sugere sete etapas para uma aula “visando a um ensino-aprendizagem acompanhado de compreensão e significado, através da resolução de problemas” (ONUCHIC, 1999, 216). As etapas são: Formar grupos – entregar uma atividade, O papel do professor, Resultados na lousa, Plenária, Análise dos resultados, Consenso e Formalização.

Segundo Onuchic (1999) formar grupos é importante, pois faz parte do mundo real entender o aprendizado como um processo compartilhado, com o professor assumindo um papel de observador, ajudando os alunos a compor a partilha de informações e conhecimentos, resolvendo problemas secundários, e posteriormente anotando os resultados na lousa. Feito isso o professor coordena uma plenária, momento no qual os grupos procuram defender seus pontos de vista. Analisando os resultados, os pontos nos quais os alunos encontram dificuldades são novamente discutidos, dando ênfase, se necessário, à resolução de problemas secundários. Disso procura-se o consenso sobre o resultado que se pretende e finaliza-se na formalização que consiste em um trabalho de professor e alunos, colocando definições e demonstrações, comentando propriedades e o que de matemática nova se construiu.

Essas e outras análises sobre RP foram sistematizadas por alguns autores, no intuito de categorizar os encaminhamentos dessa temática ao longo do tempo. O que foi supracitado traz características indicadas sobre como resolver problemas. Abaixo salientamos categorias nas quais esse tipo de ensino pode ser encaixado. Apresentamos as três maneiras que Mendonça (1993) destaca:

A autora salienta o pensar a R.P como um objetivo, um processo, ou um ponto de partida. Quando se entende como um objetivo, a Resolução de Problemas torna-se tradicional, tende a "expor a teoria matemática, propor problemas mais ou menos engenhosos e explicar o conteúdo utilizado para resolvê-los" (MENDONÇA, 1993, p.260). Uma forma que torna o resolvedor mais ativo é pensar a RP como um processo, para a autora "propor problemas, analisar os passos e recursos da solução dos alunos e trabalhar no sentido da melhoria das estratégias usadas na solução dos mesmos" (MENDONÇA, 1993, p.260). Por fim, pensá-la como um ponto de partida, de forma que é utilizada precedendo inclusive os conceitos das teorias. Percebemos então uma preocupação maior em colocar a resolução de problemas como base mais consistente no ensino de matemática.

Dante (2009), por exemplo, apesar de citar outras características, encerra seu entendimento, lidando com a Resolução de Problemas como uma metodologia. Esse entendimento é fortalecido nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas [...] só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é dado [...] aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros [...] um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998, p. 40-41).

É possível verificar a proximidade do entendimento da RP enquanto metodologia, com a terceira forma de interpretação que Mendonça traz em sua tese de 1993, apesar de que quando escrita os PCNs de 1998 ainda não existiam. Mesmo que assíncronos, os dizeres se entrelaçam na importância que imprimem na Resolução de Problemas, tratando-a como uma possibilidade de embasar o ensino de matemática, como ponto inicial para desenvolvimento de conceitos e discussões, favorecendo o papel ativo do aluno na construção de seu saber. Começando com Polya e perpassando as interpretações e significações de diversos outros pesquisadores, a RP se destaca historicamente para a Educação Matemática e atualmente ainda é um assunto que demonstra muita presença em eventos e grupos de pesquisa como evidenciamos anteriormente.

1.4. FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS (FP)

Um problema não se apresenta em sua forma final de maneira imediata. Para isso precisa ser formulado. Isso não significa que ele não exista antes da formulação, porém, após essa "etapa" o mesmo estará posto de maneira a poder ser compreendido, com suas informações e características.

A Formulação de Problemas aparece como uma teoria pedagógica para o ensino de matemática, mas também se verifica em outros processos, como a Modelagem Matemática. Nosso objetivo nessa sessão é levantar algumas reflexões teóricas acerca da Formulação de Problemas que, segundo Silver (1996a), pode se referir a problemas novos ou a reformulação de problemas dados. A seguir vamos desenvolver uma reflexão sobre outras perspectivas embasadas em autores que trabalham com a temática.

Apresentaremos uma teoria que se assemelha a de algumas outras que envolvem a Resolução de Problemas, no sentido de expor um processo pautado em etapas que tentam favorecer a formulação.

Também conhecida como "*problem posing*", a formulação de problemas "geralmente se refere a um tipo diferente de atividade em que formular problemas é o foco da atenção. Nesse caso, a meta não é a solução para o problema dado, mas a criação de um novo problema para uma situação ou experiência" (SILVER, p. 294, 1996a, tradução nossa). Em nosso entendimento a situação, o contexto, o objeto são os geradores de problemas de acordo com as necessidades do(s) indivíduo(s) envolvido(s).

A expressão "*problem posing*" é utilizada para englobar as formulações que podem ocorrer em três possibilidades: antes, durante ou depois da resolução do problema. Baseados em nossas leituras de Silver (1996a) interpretamos tais caminhos e construímos o seguinte quadro para melhor compreensão:

Quadro 3: Quando a Formulação de Problemas pode ocorrer segundo Silver

Quando a Formulação de Problemas pode ocorrer	
Quando?	**De que maneira?**
Antes	Ocorre quando não há ainda um problema formulado. Estaremos focando essa pesquisa nessa área, não desmerecendo as demais.
Durante a solução; ou da solução propriamente dita	Enquanto se resolve o problema, pode ocorrer uma reformulação do mesmo.
Depois	Associado com a fase chamada de "*Looking Back*" de Polya para a resolução de Problemas.

Fonte: Organizada pelo próprio autor

Note que um bom exemplo para a formulação ocorrida antes da resolução é aquele que tratamos logo no início da discussão acerca do que se pode entender como problema, ou seja, o problema do proprietário rural e sua plantação de eucaliptos. Em complemento,

> Essa formulação de problemas pode ocorrer antes da solução do problema, como seria o caso se problemas forem gerados para uma situação artificial ou natural. Esse tipo de problema gerador para referência de formular problema, mas o processo aqui descrito é diferente para a reformulação de eventos que ocorrem dentro de soluções de problemas complexos (SILVER, p. 294, 1996a, tradução nossa).

Imagine que o proprietário queira estimar qual o valor de sua plantação. Esse é um problema, uma vez que existe a necessidade de se aproximar o valor até então desconhecido. Mas, percebe-se que há variáveis envolvidas e existe a possibilidade de fazer questionamentos do tipo:

- Qual a idade dos eucaliptos?
- A ideia é vender para madeiramento em construções ou carvoarias?

- As folhas serão aproveitadas para retirar o óleo?

Percebemos que são questões que influenciam diretamente a decisão de venda. A primeira, por exemplo, estará fortemente relacionada ao diâmetro e altura da árvore, e consequentemente ao volume de madeira.

Portanto, formular um problema “antes” de se iniciar a resolução, a partir do contexto que acabamos discutir, tende a convergir para uma questão mais consistente e estruturada, por exemplo, do tipo:

- *Qual o valor estimado para a plantação de eucaliptos, considerando que a mesma possui aproximadamente cinco anos de idade, com a finalidade de produzir carvão?*

Vê-se que o problema existe antes mesmo de ser formulado. Vale o lembrete para não confundirmos a existência com a formulação do mesmo.

Como outra possibilidade de quando pode ocorrer a formulação, podemos ainda relembrar o exemplo da função $\boldsymbol{f(x) = 10{,}8\ ;\ x \in [1, 2, \ldots, 12]}$, utilizado em nossa discussão sobre a problematização. Tal problema poderia se reconfigurar durante a resolução exaltando ainda o caráter matemático, enfatizando a álgebra, e convergindo para a discussão sobre, por exemplo, a existência de raízes dessa equação. Nesse caso, “ ‘Problem posing’ pode também ocorrer da solução de um problema particular, quando se pode examinar as condições do problema para gerar problemas relacionados” (SILVER, p. 294, 1996a). Entendemos ainda que a contextualização que discutimos sobre a função dada envolvendo o preço de produtos alimentícios é um exemplo da formulação ocorrida durante a resolução.

A última possibilidade relatada por Silver envolve o retrospecto de Polya, que nas etapas observadas na RP enfatiza a importância de retomar a resolução, mesmo depois de pronta, para verificar os cálculos e rever as ideias utilizadas durante o processo. Durante essa “etapa”, também conhecida como “*looking back*”, existe a possibilidade de encontrar outras formas de resolução, bem como de (re)formular o problema, por uma ideia partida da criatividade e das lembranças passadas de problemas que já se houvesse tido contato.

De outro modo, podemos verificar mais uma maneira de ocorrer a formulação, assim como as anteriores, partindo de um problema pronto. Chamado de "reformulação" esse é um processo que "representa um tipo de formulação de problemas, porque o indivíduo transforma o enunciado de um determinado problema numa nova versão que se torna o foco da resolução" (SILVER, 1996b,p. 141). Segundo o autor, a sugestão de Polya para buscar um problema relacionado durante a resolução, contribui para a implicação de que a reformulação exige a formulação de novos problemas. Sintetizando que

> Se a fonte do problema original é exterior ao indivíduo, a formulação de problemas ocorre quando o problema dado é reformulado e "personalizado" através do processo de reformulação. A questão operacional que estimula esta forma de formulação é: Como poderei formular este problema de maneira que ele possa ser resolvido? (SILVER, 1996b, p. 141)

Silver (1996b) além de elencar "quando" a formulação de problemas pode ocorrer, como discutimos há pouco, exalta algumas perspectivas da mesma, como podemos verificar no quadro 4:

(continua)

Quadro 4: Perspectivas para a Formulação de Problemas segundo Silver

Perspectivas para a Formulação de Problemas segundo Silver	
Formulação de Problemas como...	**Como**
Atividade criativa ou capacidade excepcional para a matemática	A F.P. foi associada à criatividade e à sabedoria matemática, no entanto, as relações feitas são confusas nos estudos analisados. Ainda sim, concluiu-se que se deve trabalhar a F.P. com todos, não somente com estudantes identificados como talentosos ou criativos.
Aspecto de ensino de cunho investigativo	O autor coloca o trabalho de Brown e Walter (1983) com o olhar investigativo e salienta que os autores "escreveram extensivamente a propósito do uso da formulação de problemas no ensino da Matemática ao nível universitário e pré-universitário. A sua abordagem de ensino salienta a formulação de novos problemas a partir de problemas previamente resolvidos, variando as condições ou os objetivos dos problemas originais" (p. 145)

Quadro 4: Perspectivas para a Formulação de Problemas segundo Silver

(conclusão)

Perspectivas para a Formulação de Problemas segundo Silver	
Formulação de Problemas como...	**Como**
Como aspecto proeminente da atividade matemática	O autor narra que "Aqueles que perspectivam os fins da educação matemática em termos de fornecer aos estudantes experiências autênticas como as que caracterizam a atividade dos matemáticos profissionais, identificarão a formulação de problemas como uma componente importante em virtude do seu papel aparentemente fundamental na criação matemática." (p. 148), no entanto, complementa com a narrativa de que uma atividade significativa de formulação de problemas ocorre não apenas na criação de Matemática pelos matemáticos profissionais, mas também na aplicação cuidadosa da Matemática pelos alunos. Por isso, a formulação de problemas será também um aspecto importante do ensino proposto por aqueles que vêm o propósito da educação matemática como sendo não tanto o de introduzir os alunos na cultura da Matemática profissional, mas sim como o de permitir aos alunos aprender os modos do pensamento e raciocínio empregues por aqueles que aplicam com eficácia o raciocínio matemático e quantitativo para resolver problemas do mundo real." (p.149)
Um meio de aperfeiçoar a RP pelos alunos	Apesar de relatar que a FP havia sido incorporada no Japão, a partir de alguns programas experimentais, como forma de auxiliar os alunos a analisar de maneira mais completa um problema, infelizmente o autor não apresenta considerações conclusivas nesse sentido, pois "Apesar do interesse na formulação de problemas devido ao seu potencial para melhorar a competência na resolução de problemas, não foi estabelecida uma relação clara e simples entre esta competência e da resolução de problemas" (p. 151)
Uma janela para a compreensão matemática pelos alunos	"Deste modo, parece que a formulação de problemas fornece não só uma janela através da qual se pode observar a compreensão matemática dos alunos, mas também um espelho que reflecte o conteúdo e o carácter da sua experiência de Matemática escolar. Abrindo a janela da formulação de problemas também surgem oportunidades de observar aspectos das atitudes e disposição dos alunos para a Matemática." (p. 153)
Meio de melhorar a disposição dos alunos para a matemática	O autor ressalta que nessa perspectiva o empenho do aluno na criação pode estimular o interesse do mesmo pela matemática.

Fonte: Organizada pelo próprio autor

Compreendemos que essas são perspectivas da Formulação de Problemas que são importantes. Apesar de não nos aprofundarmos em cada uma delas, cremos ser necessário refletir brevemente sobre o conteúdo do quadro 4 e verificar que a FP ora se apresenta em moldes mais rígidos, ora em estruturas mais flexíveis. Por vezes tende a se sustentar por ela mesma, no entanto, em algumas perspectivas, pode-se apresentar relacionada com a RP. Certamente os professores, quando trabalharem com a FP terão grande responsabilidade sobre a escolha do tipo de perspectiva que deve empregar em sua prática docente e esse é um dos fatores pelos quais interpretamos que praticar a formulação de problemas durante a formação docente é de fato importante.

Autores importantes, lembrados inclusive por Silver, são Brown e Walter. Ressaltamos em nossa pesquisa um de seus trabalhos a respeito da Formulação de Problemas, um livro chamado originalmente de "*The Art of Problem Posing*" o qual tivemos contato com a terceira edição de 2005. Os autores tratam do tema dividindo o processo em duas grandes etapas chamadas respectivamente de "*Accepting*" e "*What-if-Not*". Comentaremos abaixo nossa interpretação sobre cada uma delas.

A primeira das etapas é aquela que podemos entender como visual e de reflexão, no sentido de pensar de forma a tentar não se acomodar com aquilo que se vê. Com uma série de posicionamentos e questionamentos o livro instiga as indagações para além do que se está inicialmente proposto:

> Uma estratégia seguida para uma fase de geração de problema envolve uma tentativa de concentrar-se em observações, conjecturas, e perguntas sem se preocupar com relacioná-los em primeiro lugar. Eventualmente, no entanto, podemos tentar fazê-lo (BROWN; WALTER, 2005, p. 27, tradução nossa).

Ilustrando isso, encontramos no livro momentos como, por exemplo, o de uma visão do trabalho com o triângulo retângulo com referência mais precisa em Brown; Walter (2005, p. 12-17). A passagem começa com uma pergunta sobre o teorema de Pitágoras e se supõe possíveis considerações imediatas a respeito como três números que satisfazem a igualdade. A partir daí inicia-se a discussão sobre quais perguntas pode-se ter a respeito, além dos ternos que solucionam a equação e acrescenta-se uma mudança de ângulos internos dos triângulos, valores que satisfazem desigualdades ao invés da igualdade posta, ou ainda a substituição de quadrados por retângulos não quadrados, ou seja, há uma modificação na forma como se encara o problema, mudando sua estrutura.

Para estabelecer uma melhor compreensão desse pensamento, Brown e Walter (2005) subdividem essa primeira etapa e trazem comparações entre alguns pontos de vista para que possamos refletir melhor sobre a Formulação de Problemas.

- **Exploração Interna versus Externa:** Nesse ponto a discussão se dá em torno dos olhares a respeito do tema, olhares que podem ser restritos ao que se vê, sob nossa interpretação, respaldando a matemática pela matemática. Como exemplo, a reflexão é construída no livro a partir de um automóvel. Podemos observá-lo internamente e verificar, por exemplo, como suas peças estão dispostas, mas também é possível que tenhamos um olhar mais abrangente, referido como externo, e entender o automóvel como uma parte de um conjunto que constitui os meios de transporte, bem como relacioná-lo com a qualidade de vida na própria sociedade. Em síntese, "Olhando para trás, para esta questão, notamos que nos liberta da restrição de olhar apenas para um funcionamento interno de restrição, que muitas vezes, impomos a nós mesmos sem perceber" (BROWN; WALTER, 2005, p. 27, tradução nossa).

- **Exatidão versus Aproximação:** É importante para a exploração do problema zelar também pela aproximação. Em nosso entendimento, ela pode permitir uma maior discussão em torno do tema. Além disso, há problemas, formulados e resolvidos há várias décadas, como por exemplo, a determinação da idade de um fóssil, que em geral não permitem uma resposta exata. Compreender que o exato é tão complexo quanto o “aproximado” é importante.

- **Exploração histórica - Real versus Hipotético:** Concordamos com o autor que o processo histórico é verdadeiramente importante, no sentido da compreensão do contexto em que o tema está inserido. Utilizamos a aproximação citada anteriormente para nos referirmos às hipóteses desse tópico, uma vez que não necessariamente é preciso exatidão em toda a compreensão histórica, o que de fato nos verifica que o importante é o desenvolvimento crítico e questionador do sujeito. Ao tratar de problemas reais e hipotéticos, os autores salientam a importância de deixar a imaginação fluir. Às vezes o sujeito envolvido na formulação pode não ter tantos conhecimentos sobre os fatos históricos que permeiam determinado tema, no entanto, é possível imaginar o que poderia ter gerado discussões no passado que remetessem ao tema que está estudando, e da imaginação podem surgir novos questionamentos.

Na segunda fase, os autores discutem possibilidades "em que as condições e restrições do problema são examinadas e manipuladas" (SILVER, p. 294, 1996a), essa etapa, como dita anteriormente é chamada de "*What-if-Not*" e leva o leitor a experimentar ainda mais o questionamento. Estimula-se o refletir sobre atributos a respeito do tema e posteriormente questionar o mesmo, com uma pergunta do tipo: e se não fosse assim? Essa pergunta motivará uma resposta, uma forma diferente de se pensar a respeito. Segundo Brown e Walter (2005, p. 64) as principais etapas dessa estratégia são:

Quadro 5: Organização da Formulação de Problemas segundo Brown e Walter

	Descrição
Level 0 – Choosing a starting point	Escolher um ponto de partida para se pensar sobre os atributos.
Level I – Listing Attributes	Listar os atributos.
Level II – "What-If-Not-ing"	Questionar/negar os atributos da forma que são apresentados no pensamento inicial.
Level III – Question Asking or Problem Posing	Nessa etapa formula-se um problema decorrido da negação anterior.
Level IV – Analyzing the Problem	Analisar o problema da etapa anterior.

Fonte: Organizada pelo próprio autor

Vamos ilustrar novamente com o problema da venda de eucaliptos. Como poderíamos verificar esse processo no problema que destaca uma possível venda das árvores? O esquema abaixo contribui para esse esclarecimento.

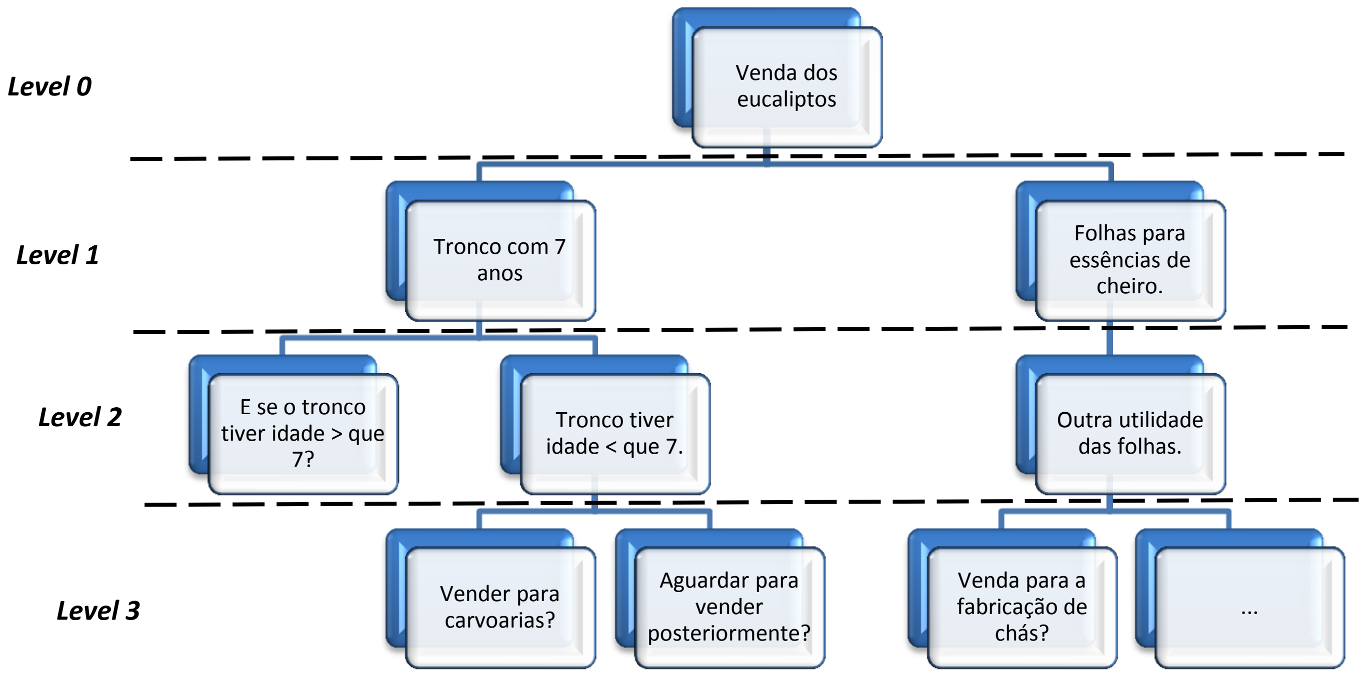

Figura 6: Exemplo de Formulação de Problemas
Fonte: Próprio do autor

A estrutura discutida pelos autores coloca em primeiro plano uma espécie de algoritmo que trabalha com um tema, que por sua vez é pensado e questionado com o propósito de que, ao final, tenhamos um ou mais problemas (re)formulados.

Até o momento discutimos possíveis práticas que podem ser associadas à Formulação de Problemas. No entanto, é possível, e até provável, que várias delas tenham relações com problemas já estabelecidos. A esse respeito podemos destacar o que (MENDONÇA, 1993, p. 267) coloca como “O erro do problema pronto”:

> Quando qualificamos como **erro** a estratégia do **problema pronto**, estamos querendo dizer que a técnica não consiste num erro propriamente dito, mas que seus objetivos raramente são alcançados. Em geral, o problema pronto contém em seu **enunciado** as **relações entre os dados** e a **pergunta** formulados de maneira explícita, dificultando, quase sempre, a abertura para dúvidas e outras considerações sobre tais dados.

A autora não coloca técnicas para se criar ou formular um problema, no entanto, baseia sua discussão na problematização, como caminho norteador para a aprendizagem. Com uma visão ampla Mendonça complementa:

> [...] temos que transformar a Educação Matemática em um ambiente educativo que tem espaço para a observação, a experimentação e o diálogo – não só o **diálogo dirigido para a formulação de problemas** que envolvem as propriedades do espaço e as quantificações, mas o **diálogo** que leva em conta os aspectos **sociais, afetivos** e **emocionais** em torno dessas questões (MENDONÇA, 1993, p. 274).

Apesar de não estabelecer técnicas para a FP, Mendonça coloca três aspectos a respeito, "cuja convergência pode cooperar na operacionalização deste processo em uma sala de aula" (MENDONÇA, 1999 , p. 24-30):

I – Os(as) alunos/as buscam compreensão/significado: a autora compreende que formular um problema, ao mesmo tempo que pressupõe uma falta de compreensão, traz também algo já compreendido uma vez que existe a curiosidade sobre o assunto. É necessário que os professores possam garantir "oportunidade para refletir e organizar suas maneiras de pensar" (MENDONÇA, 1999 , p. 25) .

II – Assegurando o desencadeamento do processo: A autora sugere quatro maneiras para desencadear a formulação de problemas. A primeira é "flagrar situações do contexto escolar ou de um contexto mais amplo" (MENDONÇA, 1999, p. 24-30) e envolve a observação do professor(a) nas situações cotidianas da escola, bem como da turma, para que no momento apropriado ele possa a partir de uma discussão dos alunos ou de uma situação que estejam vivenciando, questionar e discutir para que, junto com os discentes, possa formular problemas. O segundo é "convocar os(as) alunos/as para a escolha de 'temas geradores'" (MENDONÇA, 1999, p. 26) que estimulam a discussão com os estudantes de possíveis assuntos para fomentar os trabalhos acerca da formulação de problemas, bem como de uma compreensão crítica da realidade estudada. Em terceiro a autora sugere que o(a) professor(a) pode também iniciar as discussões a "partir de um assunto (tema) previamente escolhido" (MENDONÇA, 1999, p. 27), Mendonça salienta que considera aqui possibilidades fictícias e verificando os interesses dos alunos, todos podem enviesar as discussões para a formulação de problemas. Por último, pode-se "partir de um modelo matemático conhecido" (MENDONÇA, 1999, p. 27) que consiste em analisar modelos já compreendidos em questionamentos anteriores, agora inseridos em outros contextos.

III – O valor do conhecimento "prévio" do(a) aluno/a: a pesquisadora considera importante o posicionamento do professor como sujeito aberto à busca e compreensão do que o aluno já sabe. Exalta inclusive que sempre que possível é importante que o professor analise em cada um de seus educandos quais são seus conhecimentos a respeito da matemática.

O que exploramos nesse subitem foram alguns entendimentos sobre a Formulação de Problemas compreendida enquanto teoria. Descrevendo, ainda que de maneira sucinta, alguns trabalhos de Silver, Brown e Walter, bem como de Mendonça, exaltamos teorias que sugerem caminhos para a FP em Educação Matemática. Como dito no início desse capítulo (referente às Considerações Teóricas), buscaremos na terceira parte do capítulo 2 dessa pesquisa verificar aspectos dessas teorias que possam ter surgido na produção dos dados dos sujeitos pesquisados e, consequentemente na sua formação enquanto professor de matemática.

1.5. MODELAGEM MATEMÁTICA

A forma como enxergamos o mundo é relativa, admite infinitas variáveis sob visões distintas, inclusive quando lançamos sobre o meio em que estamos um olhar voltado para a matemática. É nesse espírito de multiplicidade que, a partir de agora, traremos algumas definições e interpretações de autores da área. Não pretendemos dispender muito espaço com definições que já estão bem consolidadas, apenas comentar o necessário para que, sob nossa interpretação possamos retomar, na análise dos dados da pesquisa (parte 3 do capítulo 2), o tema modelagem e verificar as possíveis relações da mesma com a resolução e a formulação de problemas.

1.5.1. MODELAGEM E MODELO: ENTENDENDO E REFLETINDO

1.5.1.1. MODELAGEM

O termo modelagem não se reserva somente à matemática, sendo comum encontrarmos para esse fim a expressão “Modelagem Matemática”. Crianças na pré-escola utilizam muito a modelagem de “massinhas”, artesãos modelam suas obras, arquitetos modelam grandes construções, cozinheiros fazem o mesmo com seus pratos. Em todos esses casos podemos verificar uma semelhança interessante, em geral todos começam com algo bruto e o “lapidam” de forma que, nesse processo, parte dos materiais ou informações originais acabam por não serem utilizados, bem como outros possam ser agregadas ao processo, tudo sob uma perspectiva pessoal ou coletiva, dependendo do trabalho a ser elaborado. No caso da matemática isso não muda muito, pois “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2009, p.16).

A modelagem matemática também pode ser entendida como “um processo que envolve a obtenção de um modelo” (BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p. 12). Ou ainda, de uma forma que envolva a problematização, sendo ela “[...] um **processo que se inicia numa situação real (ou suposta), problematizando-a;** o resultado dessa **problematização** é um problema que terá solução por meio de um modelo matemático [...]” (MENDONÇA, 1993, p. 284). Mas, o que é um modelo, mais especificamente um modelo matemático? É o que discutiremos a seguir.

1.5.1.2. MODELO

Quando um artesão elabora, por exemplo, um cesto, ele utiliza seu conhecimento e aplica-o no material disponível cortando, unindo, entrelaçando e culminando no objeto cesto, sendo esse seu modelo. Na matemática, um modelo pode ser entendido enquanto “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real” (BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p. 12). Bassanezi define que, “o modelo matemático é um sistema artificial que formaliza argumentos ou parâmetros de uma determinada porção da realidade” (BASSANEZI, 2009, p.19), ou ainda, “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (BASSANEZI, 2009, p.20).

Da mesma forma que o artesão ao confeccionar o cesto, o matemático ao elaborar o modelo está condicionado ao seu conhecimento naquela determinada área, podendo verificar uma quantidade maior ou menor de variáveis, de maneira que algumas só podem ser vistas e cogitadas pelos possuidores de experiências que extrapolam a matemática. Pode-se utilizar um modelo de dinâmicas populacionais que certamente dará previsões gerais sobre a população, porém, certamente um pesquisador que desenvolve um estudo em regiões economicamente desfavorecidas encontrará parâmetros diferentes, bem como algumas variáveis distintas daquele que pesquisa uma região com renda bem distribuída entre seus habitantes.

A modelagem é flexível e deve ser bem adaptável às situações analisadas. Como o autor afirma, “a modelagem não deve ser utilizada como uma panaceia descritiva adaptada a qualquer situação da realidade [...] o conteúdo e a linguagem matemática utilizados devem ser equilibrados e circunscritos tanto ao tipo de problema como ao objetivo que se propõe a alcançar” (BASSANEZI, 2009, p.25). Assim como um cesto criado para armazenar mantimentos deve servir bem para esse propósito, uma vez que nele foi investido o trabalho voltado a essa utilidade, a modelagem deve se constituir como ferramenta transformadora, “lapidadora”, produtora de benefícios para a sociedade, entendendo que, da mesma maneira que um cesto criado para suportar *n* quilos não suportará muito mais do que isso, o produto matemático da modelagem também não resultará em informações confiáveis ao utilizarmos o mesmo como “óculos” para uma realidade com mais variáveis do que ele foi pensado.

1.5.2. A Modelagem e a formação de professores

A seguir traremos pesquisas sobre a Modelagem na Educação Matemática, especialmente na formação de professores, tentando traçar um perfil do que tem sido verificado nessa área nos últimos anos. Da leitura de tais textos surgiu a necessidade de verificar uma grande fonte de dados, de maneira a poder fortalecer ou contrapor os dados de tais pesquisas. Portanto, além das teses e dissertações, buscamos trabalhos do ENEM de 2010. Iniciemos com as pesquisas verificadas.

Silva (2012) contempla-nos com sua dissertação “Possibilidades e limites vivenciados por uma professora em sua primeira experiência com modelagem na educação matemática”. A autora relata sua experiência com uma professora que atuava na primeira série do ensino médio. Silva tinha pouca experiência com relação à modelagem matemática vivida em sala de aula e, a professora conhecia modelagem apenas pela leitura de alguns textos para o concurso prestado para pleitear o cargo que exercia. As conclusões da autora giram em torno do conflito da professora com o tempo de implementação de atividades de modelagem, tanto por conta das imposições temporais de conteúdos e provas, quanto pela inexperiência em lidar com a modelagem matemática no ensino. Além disso, a professora percebeu a imprevisibilidade do trabalho com a modelagem, quando comparada com suas aulas habituais. A pesquisadora entende que a modelagem não é a única forma de trabalhar com matemática, percebendo que o planejamento é fundamental. Entendemos que tais conclusões podem chamar a atenção para que os cursos de licenciatura pensem, inclusive, em suas disciplinas de estágio, as discussões e os planejamentos de atividades às quais a modelagem matemática esteja associada.

Chaves (2012) elabora um estudo acerca das repercussões de experiências de professores de matemática envolvendo modelagem. O estudo é realizado com nove professores que, em sua maioria, afirmam que planejam continuar trabalhando com modelagem em suas aulas. Grande parte deles relata ter tido sua primeira experiência com modelagem matemática nos cursos de pós-graduação. A pesquisa se mostra importante principalmente para cursos de formação continuada, porém entendemos a necessidade de citá-la em nossas reflexões como mais um exemplo que expõe a situação de professores em contato com a modelagem fora dos cursos de graduação.

Tanto o trabalho de Silva, quanto o de Chaves, apesar de serem desenvolvidos em contextos diferentes, apresentam-nos um perfil de certa forma preocupante. Os professores se formam para depois terem contato com a Modelagem, especialmente no que diz respeito à Educação Matemática. Em contrapartida, apesar dessas experiências tardias, essa forma de se ensinar toma força nos sujeitos pesquisados, sendo possível verificar a vontade de continuar empregando a Modelagem Matemática em suas aulas. Embora esse seja um dado importante, tais leituras levaram-nos a refletir acerca do perfil tardio no qual a modelagem é vivenciada pelos professores e, com o intuito de verificar a frequência com que isso ocorre, buscamos trabalhos nos anais do ENEM de 2010, a fim de elencar mais características sobre o que tem sido feito em termos de pesquisa sobre a modelagem na formação de professores. Contudo, antes de apresentarmos as estatísticas desse pequeno estudo do “Estado da Arte”, entendemos como importante narrarmos uma terceira pesquisa, esta desenvolvida na UFU e que corroborará com esse trabalho, uma vez que mostra características de modelagem presentes em estudantes da graduação em matemática dessa universidade.

Alves (2012) conclui o mestrado com um trabalho que relata as etapas de autoria de 11 estudantes de licenciatura em matemática da UFU, dividindo tais etapas em três tempos: reprodutivo, articulativo e inventivo. Trabalhando especialmente com a cultura digital, Alves discute sobre as simulações que se tornam presentes na modelagem matemática. O autor verifica a presença de modelagem na produção dos discentes, sujeitos da pesquisa, analisando da seguinte maneira: “A modelagem matemática no planejamento da atividade educativa com o computador”, “A modelagem matemática na implementação ambiente de simulação” e “A modelagem matemática na interação com os alunos do ensino fundamental e médio”.

No estudo foram analisados trabalhos desenvolvidos pelos sujeitos da pesquisa em diversas disciplinas cursadas pelos mesmos. Dessa forma foi possível verificar que “para alguns dos participantes deste estudo há uma ruptura entre trabalho, produto e autoria, pois mesmo reconhecendo a atividade criadora como um trabalho que resulte em um produto, não conseguem ver neste produto uma autoria própria” (ALVES, 2012, p.148). O autor ainda conclui que

> a confiança das pessoas colocadas em simulações de computador depende da validade da simulação do modelo. Portanto, a verificação e validação são de importância crucial no desenvolvimento de uma simulação de computador. Outro aspecto importante das simulações de computador é a de reprodutividade dos resultados, o que significa que um modelo de simulação não deve fornecer uma resposta diferente para cada execução (ALVES, 2012, p.148).

Assim, o autor verifica a importância de compreender a modelagem matemática como uma estratégia de pesquisa e que uma das maneiras de se trabalhar com a mesma na cultura digital é por meio da simulação.

Como forma de entendimento macro no cenário nacional buscamos, como dito anteriormente, trabalhos publicados nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática.

Na décima edição do ENEM foram publicados 82 trabalhos com o tema "Modelagem", nove deles com o termo "formação de professores" no título, dos quais quatro foram verificados mais profundamente por nós, por lidarem diretamente com a "formação inicial".

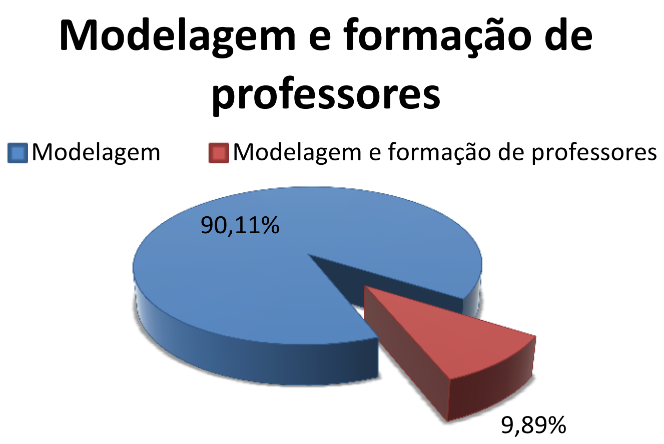

Figura 7: Gráfico sobre Trabalhos de Modelagem e Formação de Professores no X ENEM
Fonte: Próprio do autor

Dentre tais trabalhos, destacamos o de Silva, que analisa a mesma temática que estamos a fazer nesse momento: a modelagem e a formação de professores, porém em um evento diferenciado, o V CNMEM. A autora constata dez trabalhos nessa temática e dentre suas conclusões podemos observar que a maioria dos estudos analisados primam pela utilização da modelagem matemática como estratégia pedagógica, e que a maioria dos relatos trazem como informação o fato de que nos cursos relatados e que possuem modelagem, essa é apresentada nos últimos períodos da licenciatura. Além disso,

> Outra abordagem que pude observar nos trabalhos estudados é aquela que associa o fracasso do ensino da Matemática quase que exclusivamente à formação dos professores de Matemática. Identificam que os cursos de graduação não habilitam suficientemente os futuros professores para o ensino da Matemática. E, relacionam esta má formação com a falta de um trabalho mais aprofundado sobre MM (SILVA, 2010, p. 6).

Em complemento, acessamos o site do VII CNMEM[15] - 2011 e constatamos a presença de dois trabalhos relacionados à formação de professores. Infelizmente o site não dá acesso aos trabalhos.

Vale ressaltar que os demais trabalhos analisados apresentam casos particulares, mas, de maneira geral, demonstram a preocupação dos autores com a implementação pedagógica da modelagem matemática no ensino, inclusive na formação inicial de professores.

Podemos verificar que a quantidade de pesquisas na área ainda pode crescer consideravelmente, bem como nas oportunidades em que a modelagem aparece na formação de professores e as consequências serão benéficas ao ensino. Assim,

> A experiência com a Modelagem, atuando como aluno, nos possibilitou trabalhar com um tema de nosso interesse, formular um problema não matemático e resolvê-lo utilizando à matemática e ver assim a sua utilização no nosso dia–a–dia. Acreditamos que vivenciar uma atividade desta natureza na graduação contribui bastante para nossa formação enquanto futuro professor. Pois ao vivenciar essa atividade visualizamos a importância do trabalho com a Modelagem na sala de aula (SANTOS; SILVA; LUNA, 2010, p. 7).

Das leituras em dissertações e teses, despertamos o olhar curioso e estatístico para mensurar a proporção de publicações em eventos envolvendo a Modelagem

---

[15] Web Site: <http://www.cnmem7.ufpa.br/index.php?option=com_content&view=article&id=59&Itemid=53> Acessado em: 15 de fevereiro de 2014.

Matemática e a formação inicial de professores. Em suma, verificamos o fato de ainda haver muito o que fazer e entendemos que esta pesquisa tende a contribuir nesse sentido.

1.6. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, FORMULAÇÃO E MODELAGEM MATEMÁTICA: TRÊS TEORIAS E SUAS CONEXÕES

Antes de iniciarmos qualquer discussão nesse tópico, é importante ressaltar que ao se pesquisar por trabalhos desenvolvidos na Modelagem Matemática na Educação Matemática, bem como sobre a Resolução de Problemas, é possível verificar muitas pesquisas e experiências escritas sobre esses temas, várias delas em português. Não podemos dizer o mesmo sobre a Formulação de Problemas, pois são muito escassos os trabalhos nesse sentido escritos em nossa língua.

Para discorrer melhor sobre as características que aparecem na Resolução e Formulação no tocante à Modelagem, é necessário compreender e interpretar melhor esse último processo. No caso da literatura sobre Modelagem Matemática, encontramos alguns esquemas processuais da constituição da mesma. Destacamos alguns autores da área e seus entendimentos acerca da forma como se dá a Modelagem.

Para os autores Biembengut e Hein a modelagem se subdivide da seguinte maneira:

Figura 8: Esquema de Modelagem Matemática
Fonte: BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p. 12

Essas etapas são descritas logo abaixo:

Quadro 6: Descrição das etapas de Modelagem Matemática segundo Biembengut e Hein

	Descrição
Interação	Estudo da situação a ser estudada, por meio de pesquisas em trabalhos na área ou por meio de experimentação. Essa etapa é subdividida no reconhecimento da situação-problema e na familiarização com o assunto a ser modelado.
Matematização	Dividida na formulação do problema e na resolução do mesmo, a matematização se constitui como a etapa em que a situação-problema é traduzida para a linguagem matemática.
Modelo Matemático	Nessa etapa se faz a interpretação da solução, bem como a validação do modelo.

Fonte: Organizada pelo próprio autor

Já Bassanezi (2009), entende que a modelagem se constitui da seguinte maneira:

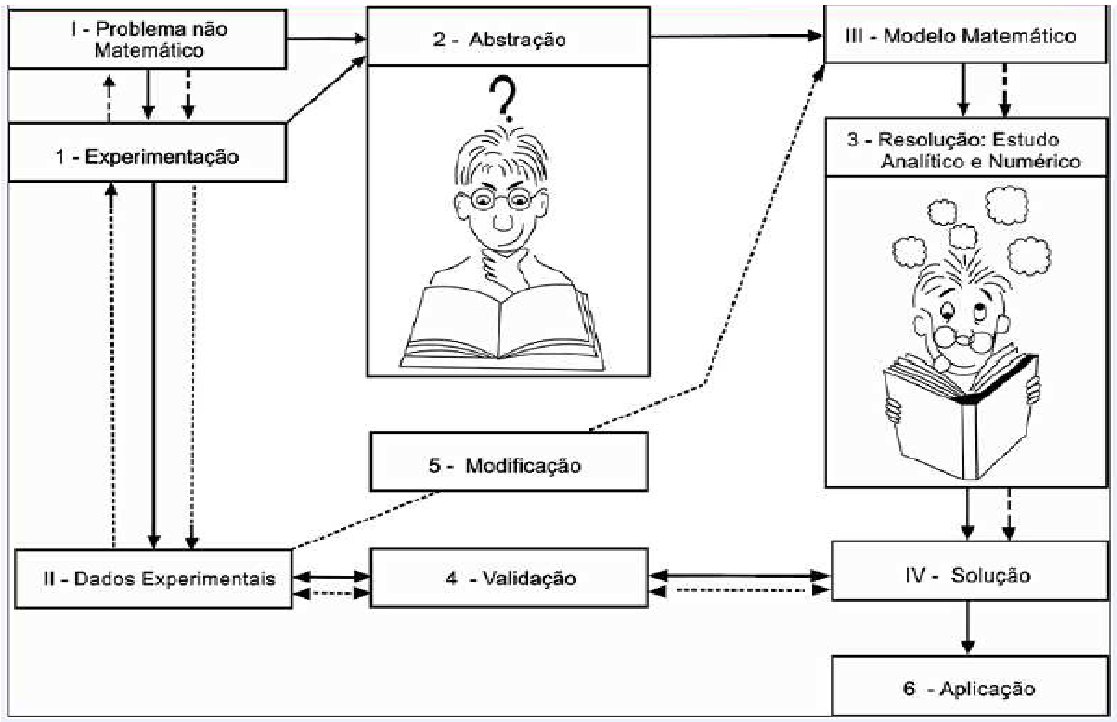

Figura 9: Esquema de Modelagem Matemática
Fonte: BASSANEZI, 2009, p.27

De forma que as etapas se descrevem como segue no quadro 7.

Quadro 7: Descrição das etapas de Modelagem Matemática segundo Bassanezi

	Descrição
Experimentação	Atividade em que se trata da obtenção dos dados.
Abstração	Precede a obtenção dos modelos procurando estabelecer a seleção das variáveis, problematização ou formulação de problemas e hipóteses, simplificação.
Resolução	Etapa da resolução do problema utilizando o modelo.
Validação	Processo em que o modelo é ou não aceito para aquela situação.
Modificação	Caso o modelo não seja aceito, é possível que uma modificação no mesmo torne-o mais adequado.

Fonte: Organizada pelo próprio autor

Outro exemplo é possível de ser verificado no livro "Modelagem em Educação Matemática" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p.42). Os autores destacam o seguinte esquema adaptado pelos mesmos:

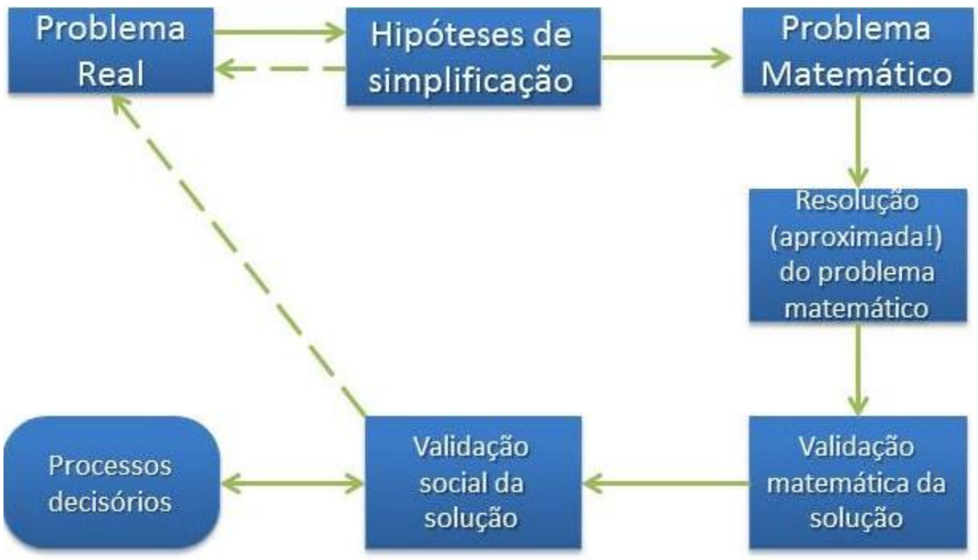

Figura 10: Esquema de Modelagem Matemática
Fonte: MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, 42

Verifica-se que todos os autores citados esquematizam a modelagem em etapas que compreendem o contato com a situação problema, bem como sua interpretação com base em dados que podem ser experimentais ou oriundos de estudos relacionados. Posteriormente dá-se início a transposição da situação para o contexto matemático, no qual o problema é formulado de maneira que possa ser resolvido e avaliado para verificar se o modelo gerado satisfaz de fato tudo que era necessário. Caso o sucesso não seja obtido é possível retomar inúmeras vezes o modelo para modificá-lo a fim de novamente verificar se o resultado é compatível.

Analisadas tais características do processo de modelagem e conhecendo os três esquemas expostos, podemos retomar seguramente as relações que incluem também à Resolução e a Formulação de Problemas. Apesar de a Modelagem Matemática trazer etapas que incluem um problema a ser formulado e posteriormente resolvido por meio de um modelo, é importante discernir e ponderar. As teorias de Resolução e Formulação de Problemas da maneira como as apresentamos separadamente em tópicos anteriores, se categorizam especialmente como formas de se ensinar e aprender matemática, que se fortalecem ao longo da história da Educação Matemática. Os esquemas de modelagem que vimos são aplicados ao processo como um todo, não discernindo entre um caráter pedagógico ou profissional.

Ao utilizarmos a Modelagem Matemática na educação, podemos incluir e utilizar etapas de formulação ou resolução, mas relembremos que a formulação, por exemplo, não necessariamente inclui somente situações práticas, podemos formular e resolver problemas de cunho puramente algébrico, ressaltando ainda que tanto situações reais, quanto aquelas abstratas, podem ou não se caracterizar como problema, sendo isso relativo à necessidade de “enfrentamento” ou não da situação. Esses são fatores que podem distanciar a formulação e a resolução de problemas da modelagem na educação.

A modelagem conta sim com etapas em que é necessária a formulação do problema, baseada na situação que se tem a necessidade de resolver, porém, não necessariamente são seguidas etapas, ou *levels* como ressaltamos sobre o que nos apresenta a literatura especializada na Formulação dos Problemas. Tampouco, todas as etapas de Polya ou Onuchic são sempre priorizadas no processo de modelagem, ainda que possam ser intuitivas para a resolução de vários problemas. Mas, tais alertas servem apenas para não confundirmos as teorias, porém é perfeitamente possível na Educação Matemática verificarmos algumas intersecções. Por exemplo:

Imagine uma sala de aula, preferencialmente de alunos interessados em propriedades rurais e plantação de eucaliptos. Suponhamos que seus pais ou parentes, ou em caso de turmas de Ensino de Jovens e Adultos (EJA), os próprios alunos tenham interesse na venda das árvores. Temos então, de pronto, uma situação problema. Os estudantes podem, a partir de suas experiências e de pesquisas que possam vir a fazer, estruturar seus pensamentos e formular um problema baseado na situação da venda como, por exemplo, saber a metragem da madeira a ser vendida. Claro que existirão variações, mas a partir do problema já estruturado pode-se considerar um modelo pronto, como o do cilindro, para fazer uma estimativa, ou negar que a árvore seja somente uma aproximação de um cilindro e a partir desse questionamento (*What-if-not*) construir um modelo que, por exemplo, considere a árvore cilíndrica até uma determinada altura e cônica de tal altura até o topo. Empregar um modelo ou outro já pode ser entendido como parte de uma resolução que pode seguir segundo as etapas já discutidas sobre a RP.

Percebemos que há características que podem surgir da intersecção dos pensamentos pedagógicos acerca dessas três teorias, mas não é correto generalizar a Formulação e a Resolução de Problemas como etapas da Modelagem Matemática.

CAPÍTULO II:

ORGANIZAÇÃO DA DISCIPLINA, TRAJETÓRIA DOS LICENCIANDOS NA ELABORAÇÃO DO PIPE NA DISCIPLINA EMAP, ANÁLISE DOS DADOS

A disciplina foi mesmo um divisor de águas pra mim. Teve antes e depois de EMAP.
(Caro[16]l)

Esse capítulo é dedicado à análise dos dados da pesquisa desenvolvida, bem como da assimilação dos mesmos com as teorias discutidas no capítulo 1. Dividimos esse capítulo em três partes: Parte 1 – Organização e desenvolvimento da disciplina EMAP; Parte 2 – Trajetória dos licenciandos na elaboração do PIPE na disciplina EMAP; Parte 3 – Análise dos dados: Libertação dos futuros professores.

A primeira parte, como o próprio nome ilustra, é destinada a esclarecer como a disciplina foi pensada durante a pesquisa elencando as atividades propostas. Entendemos a segunda parte enquanto uma síntese da trajetória dos alunos na disciplina, sobretudo no que diz respeito ao Projeto Integrado de Prática Educativa. Para finalizar, na parte 2 discutiremos a libertação dos futuros professores propiciada pela disciplina estruturada de acordo com a primeira parte. Libertação essa estruturada em nossa interpretação da teoria de Paulo Freire (1983).

[16] Carol, nesse caso, é uma das alunas entrevistados, que será apresentada na Parte 2

2.1. Parte 1 – Organização e desenvolvimento da disciplina EMAP

Diversas formas de ensinar e aprender matemática estão relacionadas aos “problemas”. Como vimos, eles aparecem como características essenciais na Resolução de Problemas, Formulação de Problemas e na Modelagem Matemática.

O curso de matemática oferece, como mencionado em nossa Trajetória Metodológica, aos licenciandos a disciplina na qual ocorreu essa pesquisa, que tem seu nome engendrado no termo “problemas”. Com 60 horas de carga horária prática e 30 horas de carga horária vinculada ao PIPE, EMAP é uma disciplina obrigatória do Núcleo de Formação Pedagógica como mostra o quadro 8:

Quadro 8: Disciplinas do Núcleo de Formação Pedagógica

DISCIPLINAS OBRIGATÓRIAS	CARGA HORÁRIA			
	TEÓRICA	PRÁTICA	PIPE	TOTAL
Introdução à Matemática	0	0	45	**45**
Informática e Ensino	0	60	30	**90**
Política e Gestão da Educação	60	0	15	**75**
Psicologia da Educação	60	0	15	**75**
Didática Geral	60	0	15	**75**
Metodologia no Ensino de Matemática	60	0	0	**60**
O Ensino de Matemática Através de Problemas	0	60	30	**90**
Oficina de Prática Pedagógica		60		**60**
TOTAIS	**240**	**180**	**150**	**570**

Fonte: FAMAT, 2005, p.16.

Durante a pesquisa baseamo-nos na ementa da disciplina e disponibilizamos na plataforma MOODLE[17] os encaminhamentos para as atividades que ocorreriam durante os semestres. No primeiro semestre as atividades foram focadas na discussão de textos como, por exemplo: “O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas”[18] bem como na produção do PIPE, que ocorreu a partir de encontros presenciais, com discussões coletivas e também individualmente. Em conversas com os

[17] MOODLE é um sistema de gerenciamento de cursos, de apoio à aprendizagem executado em um ambiente virtual.

[18] Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_07.pdf> Acessado em: 15 de fevereiro de 2014.

alunos, e por meio de um questionário aplicado ao final daquele período, indagamos sobre sugestões para o próximo semestre e vários deles relataram o mesmo que um dos alunos sintetizou sobre pontos negativos a seguinte resposta:

> Creio que ficamos muito soltos durante o semestre, isso nos deixou de certa forma mais acomodados deixando sempre para pesquisar de "última hora" (Pitágoras[19]).

Acreditamos que essa impressão foi causada pela organização da disciplina naquele momento, em que ainda estávamos compreendendo as possibilidades da ementa, bem como verificando quais seriam as atividades mais oportunas. O período em questão se pautou basicamente em leitura de textos e poucas atividades práticas. Podemos considerar duas frentes que caracterizam o primeiro semestre da pesquisa: Leitura e discussão de textos, PIPE. Com relação ao PIPE, não houve um modelo bem estruturado que indicasse os caminhos a serem percorridos, apenas discussões nos momentos das aulas, nas quais os discentes sanavam possíveis dúvidas que surgiam devido à falta de algo que estruturasse melhor aquele momento.

Já no segundo semestre de 2012, mais amadurecidos, estruturamos melhor um cronograma que contemplasse mais a prática da resolução de problemas, bem como de sua formulação.

Dentre os momentos, que se revezavam entre leitura e discussão bibliográfica e problemas práticos, a disciplina nesse período (segundo semestre de 2012) contou com onze atividades, sendo elas:

- **Atividade 1:** Problema do Bolo[20] – O problema do bolo consiste em propor a divisão em partes iguais de um bolo de formato circular. A questão que norteia o problema é a divisão em oito partes iguais, porém pode ser estendida a bolos de outros formatos ou a um número de partes diferentes.

---

[19]Pitágoras, nesse caso, é um dos alunos entrevistados, que será apresentado na Parte 2.
[20] Disponível em <http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=2350> Acessado em 10 de maio de 2014.

- **Atividade 2:** Problema do E[21] – Dada uma imagem na forma da letra "E", composta por 10 quadrados, formar com no máximo quatro cortes um quadrado de área 10 *u.a.*

- **Atividade 3:** Atividade envolvendo uma sequência de textos que tratam sobre da resolução de problemas.[22] Os textos eram lidos e discutidos em sala de aula no intuito de aumentar os conhecimentos acerca de Resolução de Problemas para colaborar com a formação do estudante, bem como com seu trabalho final da disciplina.

- **Atividade 4:** Leitura de teses sobre Resolução de Problemas.

- **Atividade 5:** Nessa atividade os alunos foram divididos em três grupos, de forma que cada um fosse responsável pela análise de um dos anais dos últimos três Encontros Nacionais de Educação Matemática até aquela data. A busca foi feita por título e palavras-chave a fim de encontrar, refletir e conhecer melhor as pesquisas e relatos acerca da Resolução de Problemas.

- **Atividade 6:** Escolher um problema do PAAES, ENEM ou Vestibular e expor argumentações sobre o quão relevante são. Elaborar problemas semelhantes que não contenham os mesmos "defeitos". Resolver e reformular com informática.

- **Atividade 7:** Essa atividade consistiu em uma apresentação sobre robótica. Um aluno da graduação que trabalha nessa área foi convidado para mostrar o material, bem como falar sobre seu estudo a respeito. Um problema

[21] HUANCA, Roger Ruben Huaman. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula.** 2006. 247 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação Matemática, Departamento de Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006. O problema do E pode ser encontrado na página 102.

[22] ONUCHIC, L. R. (1999); ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G (2011); ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p.213 - 231.

prático foi apresentado e discutido. A situação era a seguinte:

- Num carro montado com o equipamento voltado para robótica educacional, o motor recebe comandos para girar em graus.

- O motor gira em um determinado plano que é perpendicular ao plano da base do robô.

- O carro gira em torno de seu próprio eixo central.

- A pergunta consiste em: Quantos α graus o motor deve girar para que o robô gire β graus no plano?

- **Atividade 8:** Essa atividade recapitula aquela da figura 2 mostrada na introdução. Ou seja, com o mapa (sem escala) do campus Santa Mônica, da UFU, em mãos, os estudantes deveriam encontrar a área da instituição de maneira aproximada.

- **Atividade 9:** Formular um problema no campus utilizando máquina fotográfica ou filmadora para registrar possíveis informações a serem utilizadas; construir o enunciado; elaborar as possíveis resoluções para o problema.

- **Atividade 10:** PIPE – Os alunos apresentaram um problema do seu cotidiano envolvendo-o com a matemática do Ensino Fundamental ou médio. Foram investidos diversos encontros e o trabalho em sua forma final foi constituído na forma de um artigo acadêmico. Essa atividade é aquela em que destacamos nessa pesquisa e foi dividida em seis momentos:

    - Divulgação da proposta. Cada discente deveria em data estipulada divulgar sua respectiva proposta para o desenvolvimento do Projeto Integrado de Prática Educativa. Esse momento foi coletivo e não necessariamente a proposta dita deveria ser mantida. Na realidade a divulgação da proposta serviu para começar a desencadear as discussões e reflexões sobre o trabalho.

- Definição matemática do tema e exemplos. Nesse momento os discentes deveriam expor a matemática que planejavam fazer parte de seus trabalhos, colocando exemplos.

- Busca na internet do seu tema *versus* alguma tecnologia. Ao fazer buscas na internet a respeito da temática escolhida o discente deveria também organizar possíveis relações com a tecnologia, sobretudo com *softwares* que pudessem ser utilizados como ferramenta para aprimorar o trabalho.

- Sínteses das pesquisas com o apoio da internet. Foi necessário expor uma síntese do que havia sido pesquisado e elaborado até aquele momento.

- Pré-apresentação do relatório e seminário. Já em fase final, os trabalhos deveriam ser apresentados para que todos pudessem contribuir para o aprimoramento do mesmo.

- Produção de um relatório. Os momentos anteriores convergiram para a elaboração de um artigo em formato acadêmico.

- **Atividade 11:** Avaliação dissertativa – Na forma dissertativa, os alunos deveriam individualmente escrever um texto envolvendo os conceitos e as reflexões acerca da Resolução de Problemas.

Não existia uma relação fixa entre quanto tempo seria investido em cada tarefa. Na realidade a prioridade era em torno da qualidade com que a atividade era compreendida e discutida. Nesse sentido, podemos verificar na fala de Ani as considerações sobre a forma que a disciplina foi pensada:

> Eu acredito que foi mais fácil porque teve esse direcionamento, não foi tão livre. Mas foi uma questão, no início ampla, que você ia direcionando. (Ani[23])

E, portanto, compreendemos que a "reinvindicação" do discente Pitágoras foi atendida.

Outros momentos foram verificados como, por exemplo, o convite para uma aluna do primeiro semestre de pesquisa retornar ao segundo para apresentar seu trabalho referente ao PIPE. Isso ocorreu em meio aos encontros que discutiam o Projeto Integrado de Prática Educativa. Entendemos que esse momento contribuiu para aqueles discentes que ainda não haviam concluído o semestre, bem como para a valorização daquela convidada. Vale ressaltar que nem todos foram convidados devido à demanda de tempo para acompanhar o cronograma. No entanto, atualmente entendemos que nos encaminhamentos da disciplina poderiam haver mais momentos de socialização como esse, em forma de roda de conversa por exemplo, pois, "esses saberes produzidos coletivamente possibilitam o desenvolvimento do saber individual" (Souza Jr., 2000, p.166).

[23] Ani, nesse caso, é uma das alunas entrevistadas, que será apresentada na Parte 2.

2.2. PARTE 2 - TRAJETÓRIA DOS LICENCIANDOS NA ELABORAÇÃO DO PIPE NA DISCIPLINA EMAP

Tão importante quanto as discussões teóricas, são também aquelas que decorrem da prática. Sabemos que o professor é alguém que lida com ambas em seu dia a dia e nesse sentido é que se constitui essa segunda parte. Nela pretendemos descrever o trabalho de cada um dos entrevistados, iniciando por uma breve introdução, descrevendo parte da pessoalidade do indivíduo para, a seguir, elucidar as etapas e características do trabalho desenvolvido no Projeto Integrado de Prática Educativa na disciplina EMAP durante a pesquisa.

Ao leitor, salientamos dois pontos. Primeiramente, a palavra autor aparecerá diversas vezes nesse texto e, nessa segunda parte desse capítulo, faz referência ao entrevistado em questão. Entendemos que são grandes autores, de belos trabalhos. O segundo ponto é uma sugestão. Ao ler procure fazê-lo com tempo e calma, pois irão se deparar com trabalhos muito criativos e proveitosos para a prática enquanto professor de matemática.

2.2.1 ESTER

Ester completa a graduação em Licenciatura em Matemática no primeiro semestre de 2014, completando um ciclo de sua vida no qual foi monitora da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I e bolsista do PIBID, nesse último, por dois anos e meio. Tem afinidade por diversos conteúdos da matemática e escolheu cursar licenciatura pelo gosto por ensinar.

> Eu gosto também da área pura um pouco. Eu adoro, demonstração, dar conta de fazer as coisas, eu acho legal essa parte abstrata também, essa parte da álgebra eu gosto bastante. Mas, desde antes eu sempre gostei de ensinar [...] e, eu acho muito legal isso, conseguir ajudar uma pessoa a superar uma dificuldade que ela tem. Usar aquilo que eu sei para poder ajudar alguém (Ester).

No texto que sintetiza seu Projeto Integrado de Prática Educativa, Ester expõe a preocupação com a saúde e trabalha uma relação entre suco e refrigerante. Como a mesma coloca,

> O objetivo deste trabalho é utilizar a resolução de problemas para ensinar matemática e ao mesmo tempo conscientizar os alunos para cuidarem melhor de sua saúde e sair da rotina da sala de aula onde o ensino na maioria das vezes é tradicional e ainda desenvolver uma aula interdisciplinar, cujo objetivo maior será a aprendizagem do aluno (Ester).

A discente elabora três questões. Na primeira questão criada, Ester se baseia em dados de um quadro nutricional com informações sobre o refrigerante e o suco de laranja (quadro 9) para indagar:

- Observando o quadro abaixo, o que é mais saudável e possui mais nutrientes para se consumir? Justifique.

Quadro 9: Informações nutricionais do refrigerante e suco de laranja

Nutrientes	Refrigerante comum 200ml	Suco de Laranja 200 ml
Calorias	85 kcal	90 kcal
Carboidratos	21 g	20,82 g
Proteínas	0	1,4 g
Lipídeos	0	0,4 g
Fibra	0	0,4 g
Vitamina A	0	40 RE
Folato	0	30,3mcg
Vitamina C	0	100mg
Vitamina K	0	200 mg
Cálcio	0	11 mg
Magnésio	0	11 mg
Sódio	10 mg	1 mg

Fonte: PIPE - Ester[24]

[24] Disponível em: <http://grazynutricionista.blogspot.com.br/2011_01_01_archive.html> Acessado em: 15 de fevereiro de 2014.

Complementando com uma breve discussão sobre a descalcificação dos ossos que pode ser causada ou agravada pelo consumo de refrigerantes, bem como sobrepeso devido a quantidade alta de açúcar presente na bebida.

O segundo questionamento é embasado no propósito de conseguir manter o peso do corpo, quando o assunto são sucos:

- Você quer manter seu peso. Observando o quadro abaixo, qual suco é melhor? Suponha que são gastos 100g de fruta para fazer um suco.

Quadro 10: Quadros com informações nutricionais de alguns sucos

Fonte: PIPE - Ester[25]

[25] Imagem disponível em: <http://www.franquiasaladcreations.com.br/cardapio-saudavel/crie-seu-suco/> Acessado em: 15 de fevereiro de 2014.

Ao observar que para fazer qualquer um dos sucos listados no quadro 10, exceto o de melão, são utilizados 100g de fruta, Ester sugere uma análise entre o de morango e o de melão. O primeiro porque, dentre os que são elaborados a partir da porção de 100g, é o que apresenta menor quantidade de calorias (39 kcal). Já o suco de melão possui, segundo o mesmo quadro, uma quantidade inferior de calorias (5,7 kcal), no entanto, são utilizados apenas 30g da fruta. A autora sugere a resolução por uma regra de três simples (figura 12):

30 g _______ 5, 7 Kcal
100g _______ X Kcal   30 X = 570 => X = 570 / 30 => X = 19 Kcal

Logo, um suco de melão tem 19 Kcal que é menor que 39 Kcal do suco de morango. Então, o suco de melão é a melhor opção de suco para se tomar.

Figura 11: Sugestão de resolução segunda questão sobre manter o peso
Fonte: PIPE – Ester

Ester inicia a terceira questão com o que ela intitula como “texto motivador”:

> Sabendo que o consumo em excesso de refrigerantes faz mal a saúde, pois a maioria deles possui substâncias cancerígenas, são recomendados no máximo dois copos por dia. Já os sucos naturais fazem muito bem a saúde. O suco de laranja, por exemplo, protege a saúde do coração e combate o colesterol. É recomendado, no mínimo, o consumo de duas laranjas por dia (Ester).

E, a partir daí propõe uma situação na qual a pessoa decida ingerir suco de laranja todos os dias, tendo como parâmetro os dados da quadro 11.

Quadro 11: Preços e quantidade de laranja para suco

Dados para Resolver os problemas (em média)	
Preço do quilo de laranja	R$ 1,19
Preço do saco de laranja 20 Kg	R$ 16,00
Quantidade aproximada de laranjas por quilo	10 laranjas
Quantidade de laranjas para um copo de suco	4 laranjas

Fonte: PIPE - Ester

Seguida da indagação:

- O que é mais viável, comprar laranja todos os dias ou comprar um saco de 20 Kg, supondo que você gaste um quilo de laranja por dia?

E apresenta como sugestão de resposta:

Resposta: 30 x 1,19 = 35,70

1,19 x 10 = 11, 90 + 16,00 = 27,90

16,00 + 16,00 = 32,00

É mais viável comprar o saco de 20 Kg.

Figura 12: Viabilidade da compra da laranja para suco
Fonte: PIPE - Ester

Ester ainda apresenta uma quarta questão, de caráter pessoal:

- Se você está com pressa, e na geladeira tem polpa de fruta e refrigerante, qual você escolhe? Fazer um suco rápido de polpa ou tomar refrigerante? Justifique sua resposta.

Sobre toda essa construção, a autora conclui dizendo

> que com este planejamento de aula será possível desenvolver uma aula atrativa e significante para os alunos. Alcançando o objetivo de ensiná-los sobre saúde e matemática juntos num mesmo contexto se tornando uma atividade complementar. E dentro do tema aqui trabalhado é possível acrescentar mais conteúdos matemáticos para serem trabalhados, aqui é só o início de uma ideia para ser desenvolvida em sala de aula (Ester).

Portanto, Ester sintetizou seus pensamentos em torno da relação entre consumir refrigerante ou suco de laranja apresentando-nos em forma de atividades que embasam o planejamento de uma aula, criou questões e sugeriu a resolução.

2.2.2. PITÁGORAS

Pitágoras tem atualmente 22 anos. Ele frequentou durante toda sua trajetória estudantil escolas públicas e inicialmente possuía afinidade com esportes, optando por cursar Educação Física, no entanto, devido a sua dedicação às demais disciplinas se distanciou um pouco do esporte, mas o desejo por ensinar e aprender se manteve vivo, a questão era apenas optar em qual outra área atuar. Pitágoras então percebeu que tinha afinidade com Geografia e Matemática, e optou pela segunda, baseado em comentários de amigos que, por várias vezes, exaltavam a dificuldade relativa à matemática. Desde o início do curso havia optado por licenciatura. Participou de projetos voltados ao ensino, como por exemplo, o PIBID e Programa de Extensão Integração UFU/Comunidade (PEIC – UFU). Além disso, teve uma experiência acadêmica no exterior, permanecendo na Europa durante um ano.

Em EMAP, Pitágoras desenvolveu um trabalho voltado para o uso dos copos no Restaurante Universitário da UFU. Como bolsista, ele faz duas refeições diárias nesse local e, concomitantemente ao desenrolar da disciplina, o restaurante em questão estava repassando a cada aluno da instituição uma caneca de plástico durável, que substituiria os copos descartáveis usados para o consumo de suco no interior do local. Segundo o próprio estudante:

> Como bolsista do restaurante universitário da Universidade Federal de Uberlândia estou diretamente ligado às possíveis transformações e melhorias que o mesmo pode sofrer. No ano de 2012 uma importante mudança chegou ao conhecimento dos estudantes, estava espalhado em vários cartazes tanto dentro do restaurante como em regiões próximas ao mesmo. Esses cartazes traziam algumas informações sobre o cadastramento dos estudantes que frequentavam o restaurante e a troca dos copos de plástico descartável por canecas de plástico duráveis. Como aluno da disciplina de EMAP – Estudo da Matemática Através de Problemas- decidi juntamente com o docente da disciplina e demais colegas, investigar possíveis impactos desta mudança no cotidiano, tanto dos usuários do restaurante, quanto da direção do mesmo. Para tal estudo foram coletados dados reais, por meio de uma visita e conversa com diretores do restaurante, em seguida com base nesses dados resolvemos criar situações problemas que podem vir a ser trabalhadas em escolas públicas de nível fundamental e até médio e dependendo da adaptação dos dados com alunos de graduação (Pitágoras).

Apesar da sua produção não ter resultado em nenhum trabalho acadêmico, Pitágoras, assim como os outros discentes da turma, escreveu seu trabalho final da disciplina em forma de artigo e nele ressalta a forma como a disciplina foi trabalhada:

> foi proposto aos discentes desta disciplina a investigação e estudo de algum tipo de problema existente em nossa sociedade. O docente permitiu que cada aluno escolhesse o problema ao qual analisar, sendo assim cada discente poderia pesquisar e investigar um problema pelo qual se interessasse (Pitágoras).

Nesse "espírito" de escolher o problema, Pitágoras conseguiu pessoalmente conversar com funcionários do Restaurante e estes repassaram alguns dados, organizados em seu trabalho, na forma de quadros, que seguem abaixo:

Quadro 12: Quantidade de copos descartáveis utilizados no Restaurante Universitário

Restaurante Universitário Santa Mônica				
Refeição	Mês			
	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Café da Manhã	29	243	1638	1549
Almoço	2979	12152	42280	37228
Jantar	Férias	Férias	11965	10353

Fonte: PIPE – Pitágoras

Quadro 13: Gastos com copos descartáveis no Restaurante Universitário

Restaurante Universitário Santa Mônica					
Volume dos copos	Quantidade de copos gastos por dia	Preço do pacote com 100 unidades	Gastos Diários	Gastos Mensais	Gastos Anuais
300ml	3000	R$ 3,85	R$ 115,50	R$ 2.656,50	R$ 21.252,00
200ml	500	R$ 2,30	R$ 11,50	R$ 264,50	R$ 2.116,00
100ml	3700	R$ 2,00	R$ 74,00	R$ 444,00	R$ 3.552,00
50ml	300	R$ 1,00	R$ 3,00	R$ 69,00	R$ 552,00

Fonte: PIPE – Pitágoras

Com essas informações, criou quatro atividades, que coloca como sugestões para o estudo da matemática, bem como suas possíveis resoluções contando inclusive com gráficos elaborados no *software* GeoGebra:

- Atividade 1: Com base nos dados expressos nas tabelas 2 e 3 [nesse caso, quadros 12 e 13] expresse a equação da reta que expressa o gasto em reais de copos de plástico de 300 ml que o restaurante universitário tem com um cliente que frequenta o mesmo uma vez por dia.

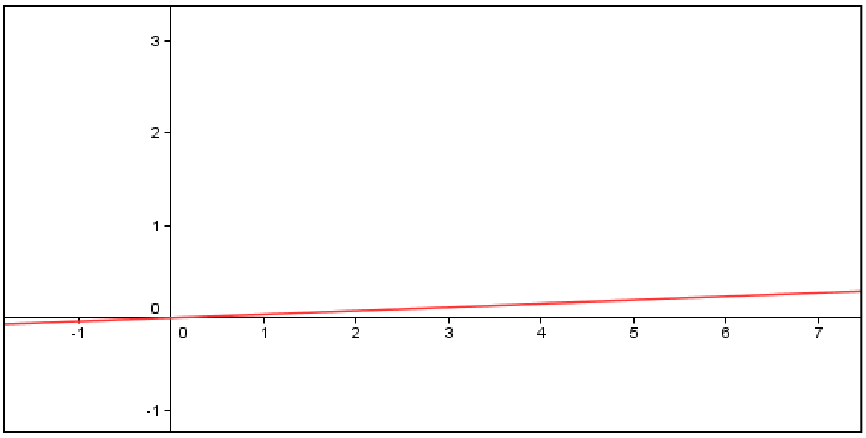

Figura 13: Gráfico do gasto em reais com copos de 300 ml por pessoa em função da quantidade de dias
Fonte: PIPE - Pitágoras

- Atividade 2: Qual a equação da reta que simboliza o gasto do restaurante universitário com um cliente que utiliza a caneca de plástico durável cedida pelo restaurante na campanha de troca.

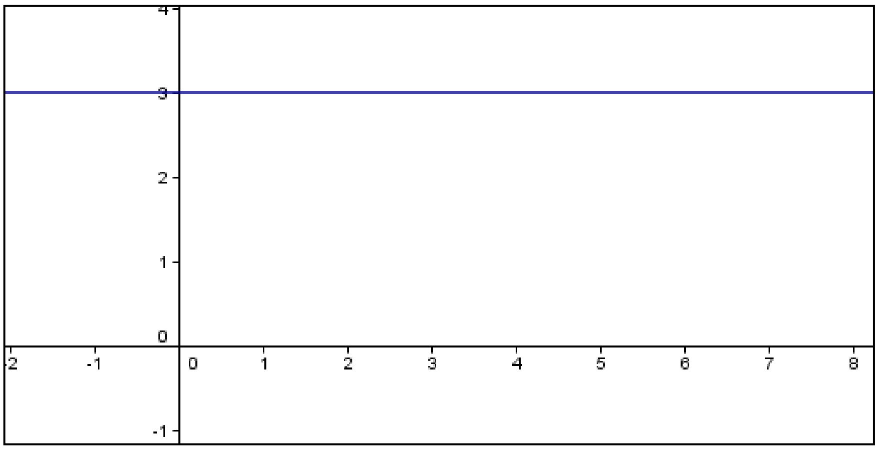

Figura 14: Gráfico do gasto do restaurante com um usuário que utiliza a caneca
Fonte: PIPE – Pitágoras

- Atividade 3: Quantos copos de plástico descartáveis são gastos com um cliente até que o mesmo use R$ 3.00 em copos descartáveis que é o preço da caneca durável?

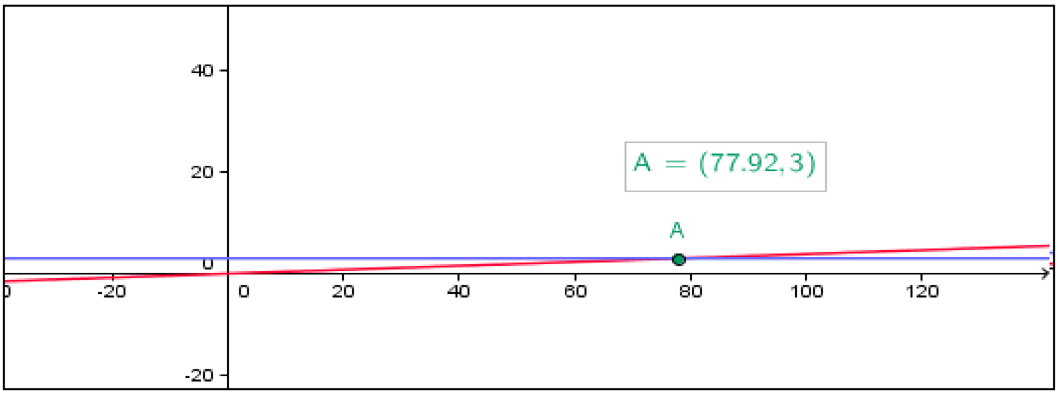

Figura 15: Relação entre quantidade de copos descartáveis e o preço da caneca
Fonte: PIPE - Pitágoras

- Atividade 4: Com base nos dados da tabela 3 [quadro 13], calcule a economia anual que o restaurante universitário terá quando a distribuição de copos descartáveis for cancelada.

Apesar de elaborar as atividades, Pitágoras demonstra em sua fala o porquê não qualifica seu trabalho como excelente:

> Porque, pelo pouco tempo que eu tive para pesquisar, acho que produzi uma certa quantidade boa. Só que eu não coloquei excelente porque vi que as situações que eu fiz não estavam tão boas assim. Eu achei muito bom, consegui coletar os dados, organizar os dados. A gente tentou criar algumas situações problemas pros meninos mexerem com os dados (Pitágoras).

É importante ressaltar que justamente nessa época, Pitágoras se preparava para sua viagem de estudos no exterior, no entanto, retrata bem a realidade vivida pelos discentes na época e consegue sintetizá-la em forma de atividades, que entende como propícias à sala de aula.

2.2.3. LULUZINHA

Luluzinha tem 22 anos de idade e, apesar de ter inicialmente a ideia de concorrer a uma vaga no curso de administração, atualmente se sente contente em cursar matemática. Durante a graduação, teve a oportunidade de participar do projeto PIBID por cerca de um ano, tendo de deixá-lo devido a demais compromissos no curso, que fizeram-na julgar necessária tal escolha. Possui gosto por estatística e, inclusive, desenvolve seu trabalho de conclusão de curso nessa área.

Intitulando seu Projeto Integrado de Prática Educativa de "A Resolução de Problemas e a Tecnologia na Variação de Preços dos Supermercados", Luluzinha escreve e analisa uma situação baseada em fatos pessoais e, segundo ela,

> Atualmente com a correria do dia-a-dia muitas pessoas deixam de observar alguns fatos que nos causam prejuízo. Diante disso, ao observar que alguns supermercados superfaturam na venda de produtos que utilizamos resolvi pesquisar esses estabelecimentos e fazer uma análise para ver qual o impacto que isso causa no bolso do consumidor [...] Diante disso pesquisei em quatro supermercados diferentes o preço de dezoito produtos que utilizo em minha casa e em seguida comparei e constatei a variação de preços de um estabelecimento para o outro (Luluzinha).

Segundo Luluzinha, o trabalho teve por objetivo analisar matematicamente a variação de preços dos produtos como forma de tentar conscientizar os consumidores sobre o quanto é importante pesquisar antes de efetuar a compra.

Ao narrar o processo de construção do trabalho a discente enfatiza:

> Na mesma semana para que os preços não sofressem alteração, percorri quatro supermercados diferentes (A, B, C e D) no intuito de pesquisar os preços dos produtos consumidos em minha casa. Essa parte deu muito trabalho, pois alguns produtos não tinham nos quatro supermercados ao mesmo tempo. Além disso, alguns supermercados são contra a esse tipo de pesquisa por causa da concorrência entre os estabelecimentos comerciais (Luluzinha).

E como síntese apresenta a quadro 13:

Quadro 14: Preços nos supermercados

Produtos	Quantidade	Supermercado A	Supermercado B	Supermercado C	Supermercado D
Arroz Cocal	5 KG	10,69	11,58	9,98	11,90
Sal Marlin	1 KG	1,29	1,29	1,45	0,99
Leite Calu	1 L	2,05	2,13	1,99	2,09
Macarrão Reimassas	500 G	1,89	2,29	1,65	2,19
Achocolatado Tody	800 G	8,49	9,49	7,55	8,99
Colgate Total 12	90 G	3,19	4,59	3,19	3,99
Sabão em Pó Omo	500 G	4,85	4,15	3,25	4,89
Carne Coxão Mole	1 KG	16,03	14,49	11,50	12,99
Café Cajubá	250 G	4,09	4,19	3,59	4,09
Extrato Elefante	340 G	2,59	3,29	2,65	2,79
Maçã	1 KG	1,98	1,39	2,69	3,59
Sabonete Palmolive	90 G	0,79	1,10	0,97	1,59
Farinha de Trigo Sol	1 KG	2,89	2,89	2,05	2,79
Batata	1 KG	2,99	3,59	2,95	3,99
Tomate	1 KG	6,99	7,99	5,99	7,99
Ovo	1 Dúzia	4,99	4,45	3,39	2,29
Cebola	1 KG	2,98	5,99	3,85	4,99
Banana Terra	1 KG	3,49	2,49	2,80	3,49
Total		82,26	87,38	71,49	85,63

Fonte: PIPE - Luluzinha

Concluindo que, nesse caso, o preço mais elevado para as compras é verificado no Supermercado B, enquanto o menor, no Supermercado C. E, ao considerar 1, uma constante a ser multiplicada pela "quantidade" do quadro, ou seja, ao se comprar uma porção de cada um daqueles itens, a diferença entre as compras poderia chegar a R$ 15,89. Luluzinha ainda considera um aumento para essas "porções" e organiza um novo quadro:

Quadro 15: Simulação de compras nos supermercados pesquisados

Produtos	Quantidade Comprada = Qc	Custo no A	Custo no B	Custo no C	Custo no D
Arroz Cocal	6	64,14	69,48	59,88	71,4
Sal Marlin	2	2,58	2,58	2,9	1,98
Leite Calu	5	10,25	10,65	9,95	10,45
Macarrão Reimassas	6	11,34	13,74	9,9	13,14
Colgate Total 12	6	19,14	27,54	19,14	23,94
Achocolatado Tody	1	8,49	9,49	7,55	8,99
Sabão em Pó Omo	4	19,40	16,6	13	19,56
Carne Coxão Mole	30	480,90	434,7	345	389,7
Café Cajubá	4	16,36	16,76	14,36	16,36
Extrato Elefante	4	10,36	13,16	10,6	11,16
Maçã	4	7,92	5,56	10,76	14,36
Sabonete Palmolive	12	9,48	13,2	11,64	19,08
Farinha de Trigo Sol	1	2,89	2,89	2,05	2,79
Batata	8	23,92	28,72	23,6	31,92
Tomate	10	69,9	79,9	59,9	79,9
Ovo	4	19,96	17,8	13,56	9,16
Cebola	3	8,94	17,97	11,55	14,97
Banana Terra	4	13,96	9,96	11,2	13,96
Total		799,93	790,7	636,54	752,82

Fonte: PIPE -Luluzinha

Concluindo que o aumento das "porções" implicaria em uma diferença ainda maior no valor das compras. Luluzinha utiliza o GeoGebra para representar graficamente os valores, segundo a seguinte função:

$$f(x) = Q * x$$

Tal que "Q" é a quantidade a ser comprada e "x" representa o valor unitário de cada produto. A figura 16 exemplifica o caso para $Q = 6$:

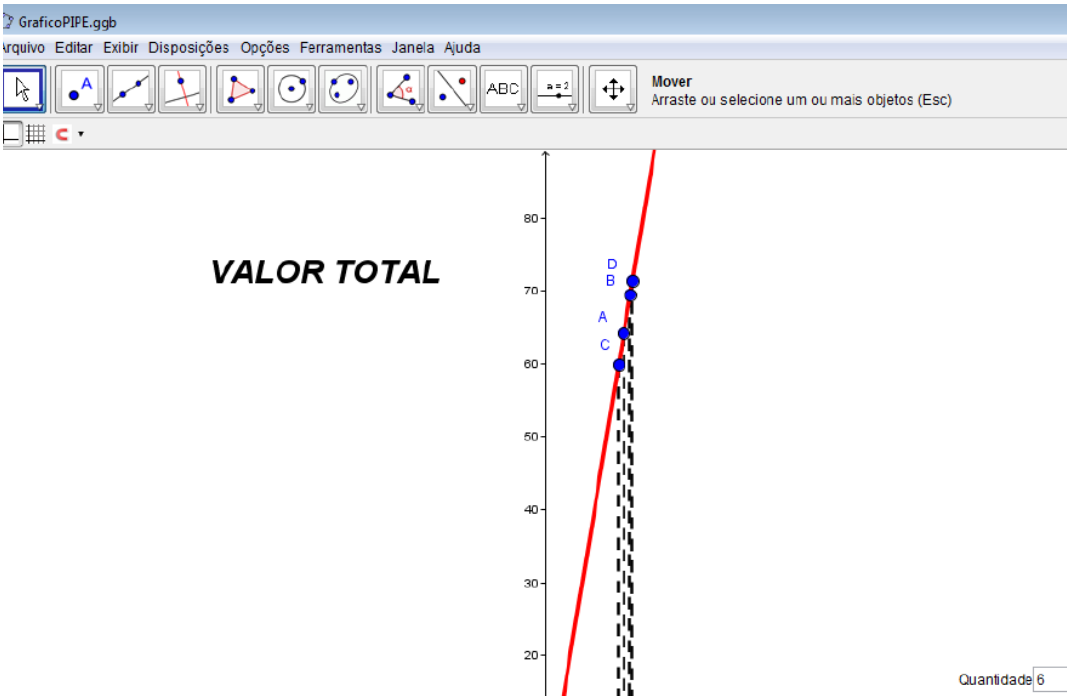

Figura 16: Gráfico do valor total em função dos valores unitários
Fonte: PIPE - Luluzinha

E, para finalizar, analisa os itens individualmente, segundo sua maior variação (figura 17).

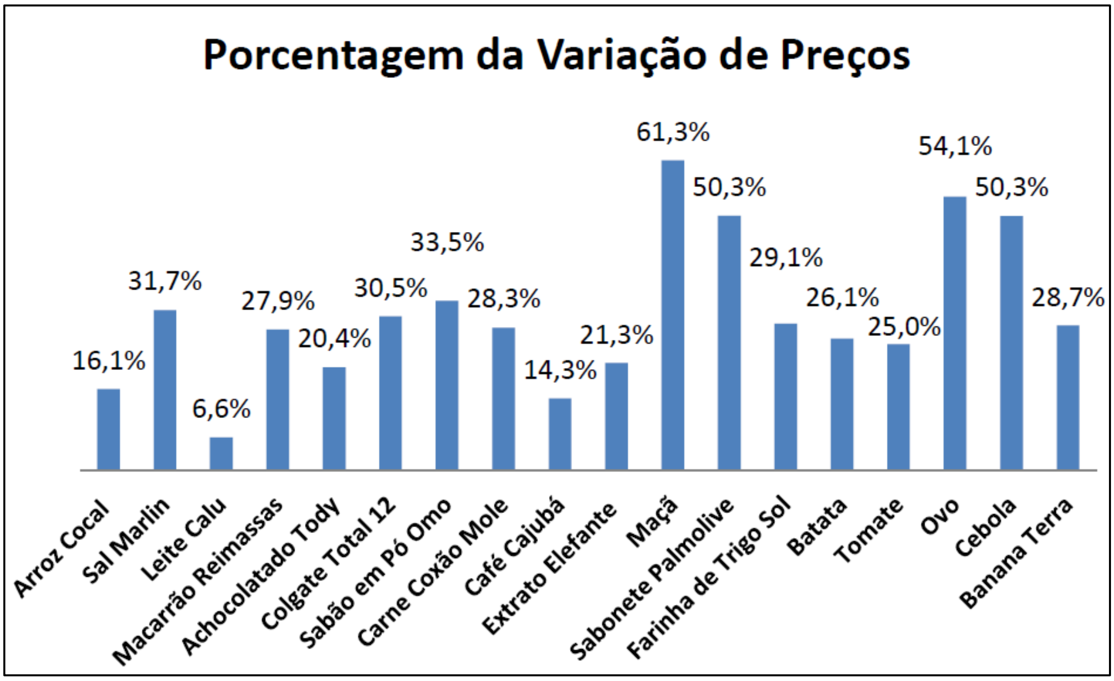

Figura 17: Gráfico da porcentagem da variação de preços
Fonte: PIPE - Luluzinha

Luluzinha encerra salientando:

> Logo percebemos que os três produtos que apresentam maior variação nos preços são: Maçã, Ovo e Cebola. Essa diferença se dá pelo fato desses produtos terem pouca durabilidade. Dessa forma quando eles estão perto de estragar os supermercados vendem-nos barato para não terem prejuízos com essa perda (Luluzinha).

De um questionamento pessoal, decorrente do trabalho de sua mãe, a autora analisou e criou situações que podem, em seu entendimento, serem vivenciadas numa sala de aula.

2.2.4. PASCOALINA

Ingressando em 2010 na universidade no curso de matemática, Pascoalina desenvolveu preferência pela área de geometria e há dois anos participa do PIBID.

Pascoalina se locomovia da casa para a faculdade de duas maneiras: com o pai, quando o mesmo ia para o trabalho, ou por transporte coletivo e viu em EMAP a oportunidade de desenvolver um trabalho no qual fosse possível relacionar algumas características dos dois meios de transporte e tecer considerações, dando origem “A Resolução de Problemas e o dilema: ir de transporte público ou privado para a faculdade?”

> Era um problema meu, porque assim, às vezes eu venho com o meu pai, às vezes venho de ônibus e eu queria ver qual era mais vantajoso, se era vir de ônibus, ou com ele (Pascoalina).

Para lidar com esse questionamento, a autora inicia mostrando algumas informações acerca de taxas e impostos pagos para se manter um veículo particular, no caso específico, aquele que seu pai possuía na ocasião.

Quadro 16: Taxas e impostos de veículo

IMPOSTO	VALOR ANUAL	VALOR MENSAL
IPVA	1.134,27	94,52
DPVAT	101,16	8,43
TRLAV	71,30	5,95
TOTAL	1.306,73	108,90

Fonte: PIPE - Pascoalina

Além disso, Pascoalina adota uma taxa de depreciação do veículo equivalente a 20% ao ano e considera o valor do automóvel de R$28900,00. No entanto, seu pai dirigia um total de 50km por dia, sendo a autora responsável por 3,4 km de desvio entre sua moradia e o trabalho de seu pai (considerando somadas a ida e a volta), que equivale a 6,8% do total. Disso a discente elabora as seguintes considerações:

Quadro 17: Valores a serem pagos pela pesquisadora

Anos	Valor Anual Total	Valor Anual pago pela pesquisadora	Valor Mensal pago pela pesquisadora
1º ano	R$ 5.780,00	R$ 388,41	R$ 32,36
2º ano	R$ 4.624,00	R$ 310,73	R$ 25,89
3º ano	R$ 3.699,20	R$ 248,58	R$ 20,71
4º ano	R$ 2.959,36	R$ 198,86	R$ 16,57
5º ano	R$ 2.367,49	R$ 159,09	R$ 13,25
TOTAL	R$ 19.430,05	R$ 1.305,67	R$ 108,78

Fonte: PIPE - Pascoalina

Além dos impostos e da depreciação do veículo, a autora considera também o gasto com o combustível e, a esse respeito relata que:

> O preço do litro gasolina em Uberlândia é, em média, de R$ 2,99. A rota acima apresentada como já foi dito é de 1,7 km. Sabendo que o carro pesquisado faz em média 11 km / litro e que serão percorridos 3,4 km no dia, então gastaremos 0, 31 litros de gasolina e assim o custo para fazer este percurso de ida e volta é de R$ 0,92. Portanto, por mês o gasto com combustível a mais será de R$ 18,48 (Pascoalina).

Por conseguinte, após efetuar os cálculos, Pascoalina afirma que:

> somando a gasolina, os impostos e a depreciação, o custo total por mês da pesquisadora no primeiro ano será de R$ 66,66 (Pascoalina).

O contraponto, do dilema inicial, parte do transporte público. A discente em seu trabalho dedica parte do seu texto a essa discussão:

> Já o custo com transporte público é fácil de ser encontrado, pois teremos que calcular quantas passagens serão gastas por mês e logo após multiplicar pelo valor do transporte público que no caso é considerado o valor da passagem estudantil, onde o estudante paga apenas 60% do valor da mesma. Após a contagem chegou-se a conclusão de que são gastos no mínimo 40 vales por mês e o valor de cada vale é de R$ 1,71, logo o valor total gasto por mês com o transporte público é de R$ 69,40 (Pascoalina).

Portanto, no caso analisado, é mais vantajoso (financeiramente) utilizar o automóvel da família para ir da residência da autora até a universidade em que ela estuda (considerando a carona oferecida pelo pai). Pascoalina foi uma das discentes que escreveu um artigo acadêmico e publicou em um evento de nível nacional.

2.2.5. STALLONE

Stallone escolheu cursar matemática após ponderar também sobre engenharia. Além de gostar de vídeo games, se caracteriza como alguém que sempre gostou de resolver problemas, como por exemplo, ao se deparar com algum objeto danificado em sua casa, procurava ele mesmo, arrumar. Além disso, possui grande apreço pelo *software* GeoGebra pois, segundo ele, é possível "fazer várias atividades".

Natural de Uberlândia, Stallone deseja ser professor de matemática, atuando especialmente no Ensino Fundamental, pois segundo seus pensamentos, acredita que na etapa posterior, ou seja, durante o Ensino Médio, ensinar torna-se uma questão de "passar no vestibular", diminuindo assim as discussões e problemáticas que podem surgir na disciplina. Foi bolsista do PIBID durante um ano trabalhando com Jogos e Geometria. Atualmente participa do projeto PEIC, colaborando com atividades realizadas em uma escola da área rural da cidade de Uberlândia.

Nesse caso, o protagonista da história apresenta seu Projeto Integrado de Prática Educativa em EMAP da seguinte maneira:

> O problema tratado nesse trabalho foi apresentado ao autor numa noite enquanto o mesmo estava curtindo um show de uma banda que apresentava em uma praça pública de sua cidade. Então, durante esse show, apareceu um de seus amigos e disse "que bom ter ver aqui, tenho um problema pra você!". Na sequência ele disse: vou participar de uma exposição de artes utilizando minhas fotos e envolvendo a matemática também, minha ideia é colocar as fotos dentro de um círculo disse o amigo (Stallone).

Segundo Stallone, seu amigo saiu em busca de algo para rascunhar sua ideia. Pouco depois retornou com um guardanapo e uma caneta conseguidos numa venda próxima e ali mesmo começou a expor seus pensamentos, representados na figura abaixo:

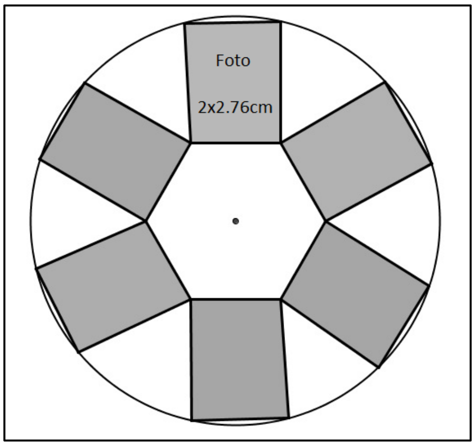

Figura 18: Disposição das fotografias
Fonte: PIPE - Stallone

Seu amigo lhe disse que precisaria saber qual o diâmetro do círculo no qual as fotos seriam colocadas segundo o desenho a pouco confeccionado[26], para que o marceneiro pudesse cortar corretamente a madeira.

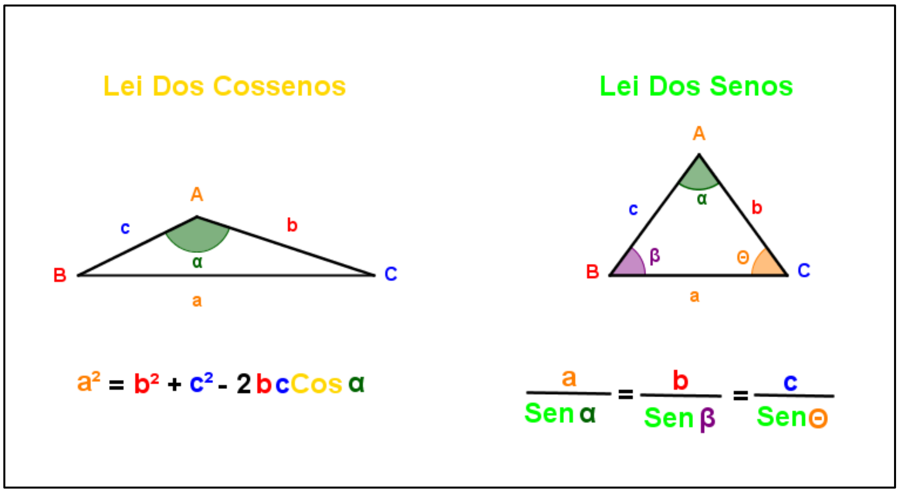

Figura 19: Lei dos senos e Lei dos cossenos
Fonte: PIPE - Stallone

Para expor as soluções encontradas, Stallone descreve antes alguns conceitos e observações que irá utilizar, como por exemplo, a lei dos senos e dos cossenos (Figura 19).

Além disso, traz também em seu trabalho alguns polígonos regulares inscritos em circunferências, tecendo observações para o caso especial do hexágono regular, que

[26] Apesar do modelo ilustrado ser com seis fotos, era necessário descobrir os diâmetros dos círculos para se utilizar de cinco a nove fotografias.

é formado por seis triângulos equiláteros, e também para outros, os quais verifica a congruência dos ângulos da base dos triângulos que constituem o determinado polígono (figura 20).

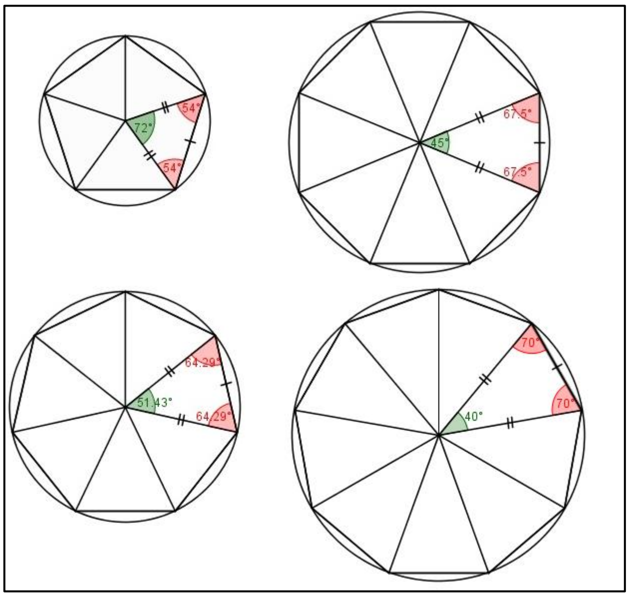

Figura 20: Polígonos regulares inscritos em circunferência
Fonte: PIPE- Stallone

Stallone resolve primeiro o problema para seis fotografias. Segundo ele,

> No caso em que utilizamos seis fotos, precisamos somente da lei dos cossenos e saber que o raio do círculo que circunscreve o hexágono regular tem a mesma medida do lado desse hexágono regular (Stallone).

Desta forma, o autor exemplifica com ilustrações elaboradas utilizando o GeoGebra, sendo “r” o raio da circunferência maior. Observe ainda o triângulo equilátero, devido aos ângulos internos de sessenta graus:

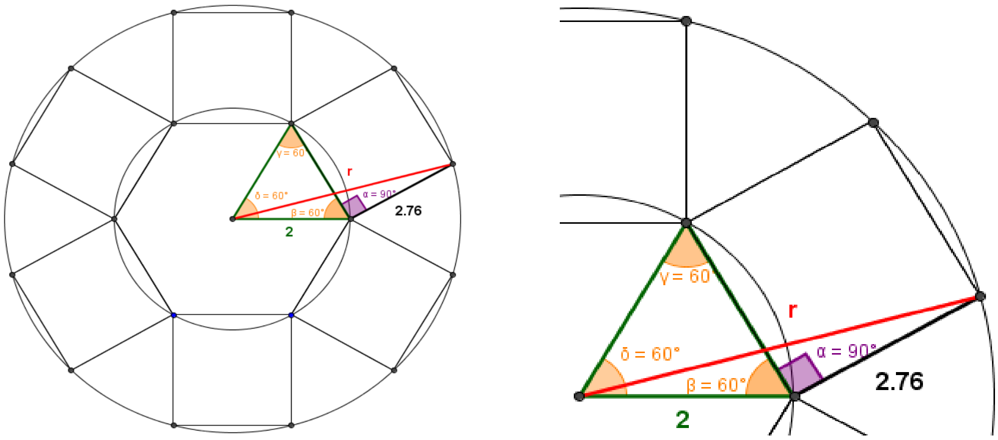

Figura 21: Resolução para seis fotografias
Fonte: PIPE - Stallone

Utilizando a lei dos cossenos, o autor da solução conclui:

$$r^2 = (2{,}76)^2 * 2^2 - \left(2 * 2{,}76 * 2 * cos(60° + 90°)\right)$$

$$r = 4{,}6020cm$$

Stallone ainda resolve o problema para sete fotografias (Figura 22).

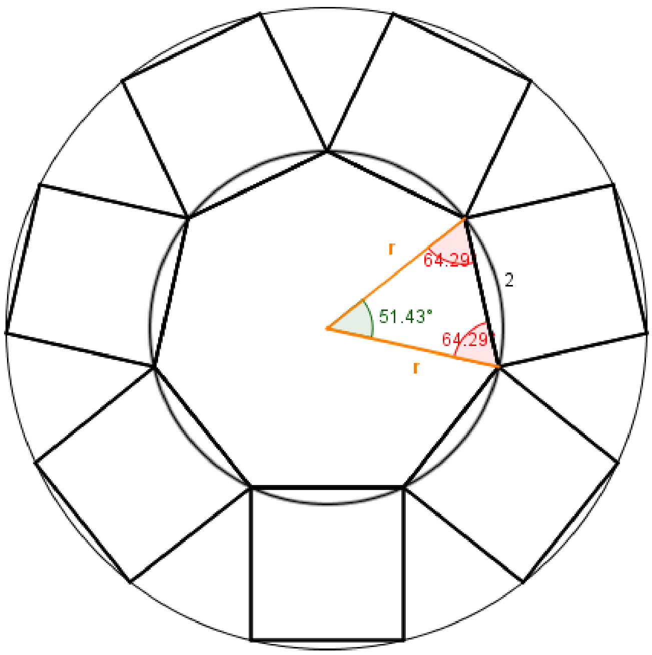

Figura 22: Resolução para sete fotografias
Fonte: PIPE - Stallone

No entanto, exalta o uso da lei dos senos para encontrar a medida de um dos lados dos triângulos, chamado de "r" (que, nesse caso, também é o raio da circunferência menor) na figura 22. Dessa maneira calcula:

$$\frac{r}{sen(64{,}29°)} = \frac{2}{sen(51{,}43°)} \Rightarrow r = 2{,}3cm$$

Complementando,

> Agora que encontramos o valor do raio do círculo menor, vamos utilizar a lei dos cossenos, para encontrar o raio do círculo maior, como foi feito no caso que utilizamos seis fotos (Stallone).

E expõe:

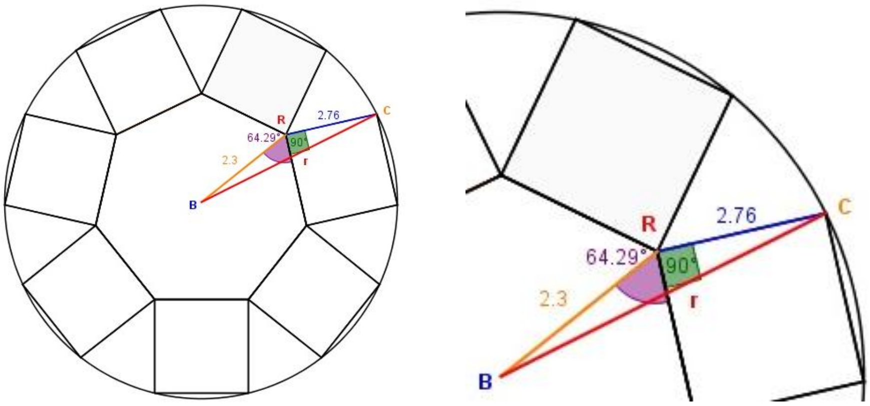

Figura 23: Raio maior para sete fotografias
Fonte: PIPE - Stallone

Aplicando a lei dos cossenos:

$$r^2 = 2{,}76^2 * 2{,}3^2 - \left(2 * 2{,}76 * 2{,}3 * cos(64{,}29° + 90°)\right)$$
$$r = 4{,}93cm$$

Por fim, o discente generaliza para qualquer número de fotos ou tamanho das mesmas:

> Vamos obter uma fórmula para calcular o raio do círculo maior para qualquer que seja o número de fotos e o tamanho das fotos, seja “a” o lado da foto que forma o polígono regular que é circunscrito pelo circulo menor (Stallone).

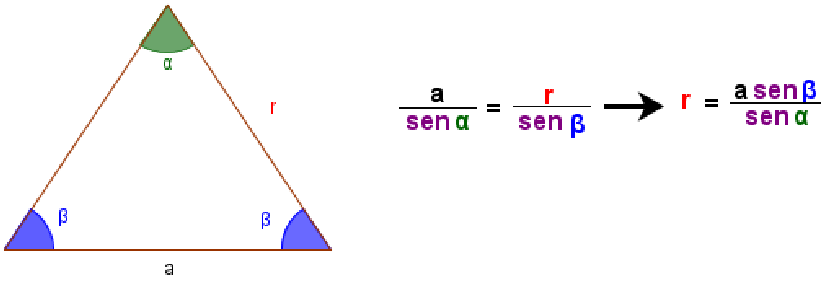

Figura 24: Generalização do raio da circunferência menor
Fonte: PIPE – Stallone

E por fim, utilizando a lei dos cossenos, Stallone conclui:

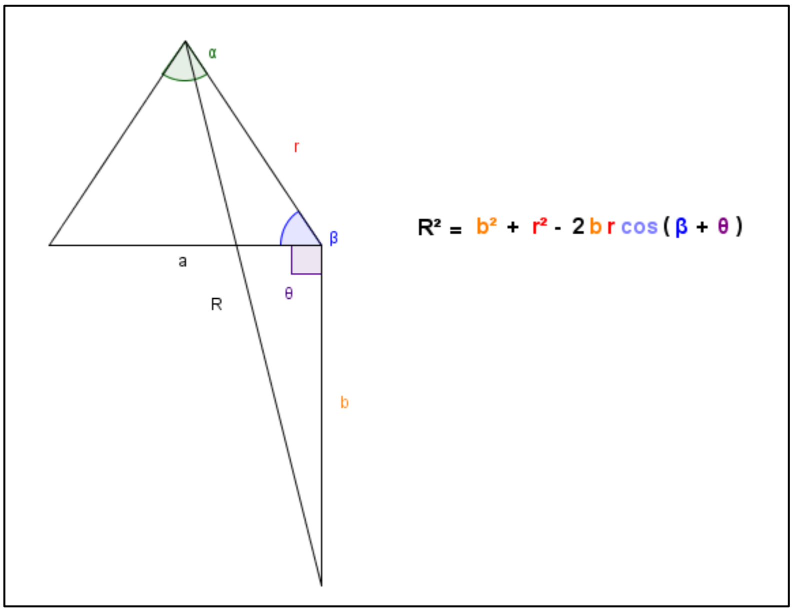

Figura 25: Generalizando raio da circunferência maior
Fonte: PIPE - Stallone

Stallone nunca soube se sua resposta havia sido útil para aquela exposição de fotografias, no entanto deixa uma generalização para algo que sentiu a necessidade de contribuir, de resolver.

2.2.6. TSUNAME

Tsuname ingressou no curso de matemática no ano de 2009, contudo, demonstrava apreço por engenharia. O discente explica:

> Como eu tinha um pouco de facilidade em matemática e gostava de matemática. Naquele conhecimento que eu tinha até o momento eu sabia que engenharia seria muito difícil [...] (Tsuname).

Logo, após optar por matemática, Tsuname escolheu Licenciatura e tornou-se bolsista do PIBID. Trabalha há um ano e meio em uma escola da região periférica da cidade de Uberlândia desenvolvendo trabalhos voltados para a Robótica Educacional.

O Projeto Integrado de Prática Educativa de Tsuname, exposto em forma de artigo acadêmico, traz uma discussão sobre a tarifa de ônibus e o impacto do aumento da mesma em meio a uma família. Segundo o autor:

> A matemática é uma disciplina por vezes distante do aluno no sentido de que muitos encontram dificuldades em vivenciar os conteúdos estudados. Por uma preocupação pessoal e moral este trabalho visa exaltar o caráter crítico da Educação Matemática e se faz como uma sugestão para a aplicação em sala de aula [...]Alguns jornais já avisaram que a tarifa de ônibus em Uberlândia estava para subir na segunda quinzena de janeiro de 2012, até então o valor da passagem era de R$ 2,40. Esta situação nos levou a uma reflexão e enquanto professores de matemática não podíamos deixar a oportunidade de discussão sobre o tema "passar em branco". Criamos então uma sugestão para implementar tais ideias (Tsuname).

Na oportunidade de discutir sobre o assunto, o discente cria uma sugestão de aula para que as ideias possam ser vivenciadas no ambiente escolar, com uma análise à luz da matemática. São expostas duas etapas:

- 1ª Etapa: Situando o aluno e começando uma reflexão crítica.
- 2ª Etapa: Fazendo alguns cálculos.

Na primeira etapa, Tsuname sugere que sejam formados grupos de alunos e que os mesmos façam “um pequeno orçamento dos gastos familiares”. O objetivo maior nesse caso é:

> fazer com que os alunos entrem em comum acordo para manter os gastos de uma pessoa que anda de ônibus 22 dias úteis no mês, já que nos grupos poderão haver alunos de famílias que ganham 1, 2 e até 3 salários mínimos, com 1, 2 ,3 e até 4 pessoas andando de transporte coletivo (Tsuname).

O autor ainda sugere:

> Procure fazer perguntas do tipo: Quem sairia com mais prejuízo, uma pessoa que ganha 1 ou 2 salários mínimos? E quanto mais salário mínimo, menor será o prejuízo se for pensar em apenas uma pessoa utilizando ônibus? O objetivo aqui é fazer com que os alunos percebam que quanto maior o salário, menor é o impacto digamos assim, na vida da família (Tsuname).

Na segunda etapa, Tsuname lida com os cálculos que sugere. Entendendo que são 22 os dias de cada mês em que um membro de uma família utiliza o transporte público para trabalhar ou estudar, bem como o valor de ida e volta que é igual a R$ 5,20, o autor sintetiza os dados (quadro 18) criando, inclusive, um índice que representa uma fração na qual o numerador é o gasto com transporte e o denominador, o valor do salário mínimo.

Quadro 18: Valores e relações do gasto com ônibus e quantidade de salários

Salários	Valor gasto com ônibus com um indivíduo	Representação de fração	Índice
622	114,40	114,40/622	0, 183922283
1244	114,40	114,40/1244	0, 091961414
1866	114,40	114,40/1866	0, 061307609
2488	114,40	114,40/2488	0, 045980707
3110	114,40	114,40/3110	0, 036784565
...	...	...	...
...	...	...	...
6220	114,40	114,40/6220	0, 018392282

Fonte: PIPE - Tsuname

Tsuname então sugere um gráfico baseado na relação entre o índice e a quantidade de salários, como evidencia a figura 26.

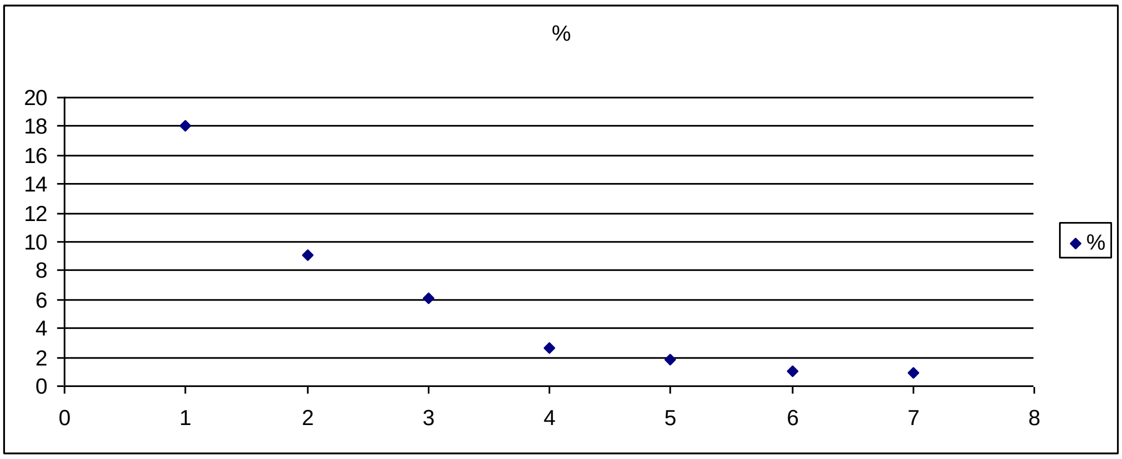

Figura 26: Gráfico do índice em função da quantidade de salários
Fonte: PIPE - Tsuname

Em complemento ao gráfico podem ser feitos alguns questionamentos:

> Podemos criar mais discussões sobre esse gráfico: É possível ligar os pontos? Explique como. Existe outra representação gráfica desse índice criado? O objetivo na sala é levantar questões que não são necessariamente de matemática, mas que no seu interior foi feita uma exploração matemática. E se aumentássemos o número de pessoas que usasse o transporte coletivo em uma família o que aconteceria com o nosso índice de impacto, sendo o salário mínimo agora fixo? (Tsuname, trabalho PIPE)

Como parte de suas considerações finais, destacamos:

> O fato de trabalharmos com temas reais como este, irá mostrar para os alunos que os conteúdos matemáticos estão presentes em seu cotidiano, isso será um motivo para dar significado à Matemática que vem sendo odiada por eles nos dias atuais (Tsuname).

Tsuname adaptou e publicou seu trabalho em um evento regional voltado para a Educação em Ciências e Matemática. Além disso, lhe surgiu a oportunidade de aplicar suas ideias em uma aula do Coletivo (RE)Ação[27]. O encontro ocorreu em 2013, em meio às discussões e manifestações nacionais sobre as tarifas de ônibus. Foi possível criar o gráfico com os alunos e discutir sobre o fato de que, quanto mais salários, menor o impacto da tarifa de ônibus.

2.2.7. ANI

Ani é uma garota que, assim como Carol, mora em uma república próxima a universidade. Começou a cursar engenharia civil em outra universidade, no entanto, optou por seguir matemática na UFU. Relata ter tido bons professores de matemática desde o Ensino Fundamental e se sente influenciada por eles e por seus pais, que têm apreço pela disciplina. A estudante pretende cursar pós-graduação em Educação. Apesar da comparação com Carol, as duas vivem uma situação que se distingue em um ponto: a distância entre Uberlândia e a cidade em que suas respectivas famílias residem (sua cidade natal). No caso de Ani, a distância é de aproximadamente 260 km de Uberlândia.

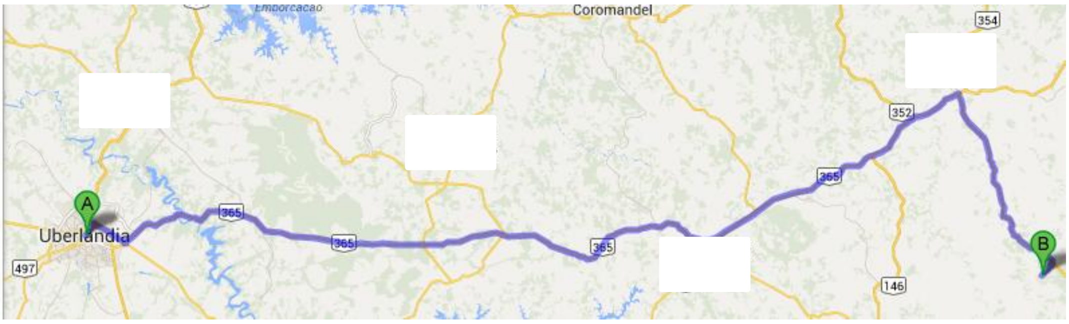

Figura 27: Trajeto até a cidade natal
Fonte: PIPE - Ani

As constantes viagens para a casa motivaram a estudante a tentar compreender melhor os gastos envolvidos para as pessoas que, assim como ela, procuram sempre por caronas. Nos dizeres de Ani:

[27] Citado na introdução da pesquisa. Funcionando em um espaço cedido por uma ONG da cidade, o Coletivo (RE)Ação é um projeto voltado para aulas e oficinas com jovens da localidade, em que uma das finalidades é auxiliar que os mesmos ingressem no Ensino Superior.

> O nosso problema está no fato de que diversos estudantes universitários ao ingressarem em cursos de graduação, geralmente são obrigados a mudar de suas cidades natais para estudarem em outras localidades e com frequência acabam voltando para visitar pais, amigos, familiares, entre outros. Porém, para alguns, existem impasses e um deles é o custo do transporte, seja de ônibus, táxi ou avião. Uma solução para isto são as caronas. Mas, encontramos outro problema que é quanto deve se cobrar dos “caroneiros” (Ani).

Como forma de buscar as desejadas caronas, a estudante relata participar de grupos de discussão na internet, nos quais os viajantes que possuem carros oferecem vagas cobrando uma determinado valor, que por sua vez é variável. Como forma de sistematizar um possível custo para uma determinada carona, Ani utiliza os seguintes dados: valor e depreciação do carro; impostos, tais como, IPVA, seguro obrigatório e licenciamento; distância percorrida semanalmente em kilômetros; o consumo de combustível (kilômetros por litro) e, por fim, o valor do combustível.

A autora baseia o cálculo do valor e da depreciação do veículo na tabela disponibilizada pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (FIPE), bem como em dados da Secretaria da Fazenda. Segundo a pesquisa realizada pela estudante, o valor do IPVA em Minas Gerais é de 4% do valor do carro. A depreciação, baseada na tabela da FIPE é igual a 7% do valor do veículo. Ani, discute:

- Valor do carro: A
- Valor do IPVA: $\frac{4}{100}A$
- Depreciação: $\frac{7}{100}A$
- Valor do seguro obrigatório: B
- Valor do licenciamento: C
- Distância percorrida semanalmente em Km: D
- Consumo do carro (km/litro): E
- Valor do combustível: F
- Gasto anual: GA

A estudante calcula primeiro, com base nos itens anteriores, qual o gasto anual para que se possua o carro, sem retirá-lo da garagem, ou seja, para deixá-lo apenas guardado:

$$GA = (0{,}04 + 0{,}07)A + B + C = 1{,}1A + B + C$$

Ani complementa com um cálculo semanal (X). Logo, considerando que o ano possui 52 semanas, as despesas são de:

$$\frac{GA}{52} = X$$

Posteriormente inicia as considerações para o valor (Y) gasto com combustível:

$$Y = \frac{D}{E} * F$$

Concluindo então que as despesas são dadas pela soma $X + Y$ e que, se considerarmos, quatro passageiros, o valor a ser cobrado poderia ser dado pela seguinte expressão:

$$\frac{X + Y}{4} = \frac{\left(\frac{1{,}1A + B + C}{52} + \frac{D}{E} * F\right)}{4}$$

Para ilustrar, Ani apresenta o seguinte quadro:

Quadro 19: Taxas e depreciação do carro

Valor do carro	**R$ 30,000.00**
IPVA	R$ 1,200.00
Seguro Obrigatório	R$ 105.65
Licenciamento	R$ 71.30
Depreciação	R$ 2,100.00

Fonte: PIPE – Ani

Baseada na distância de 268 km entre as cidades, Ani ainda ressalta que o consumo médio do carro analisado é de 13 km/litro na estrada e o valor do litro combustível é de R$3,00. Concluindo que o valor que deveria ser cobrado, segundo as considerações feitas, seria de R$ 32,18 por pessoa. A estudante conclui em seu trabalho que, com esses parâmetros a “carona” é vantajosa se comparamos aos gastos com uma passagem de ônibus, que segundo ela era de aproximadamente R$70,00. Ani publicou o trabalho em um evento de âmbito nacional. Atualmente a discente escreve seu trabalho de conclusão de curso e esse envolve a temática “Problemas”, no entanto não tivemos acesso ao mesmo, uma vez que ainda não foi publicado.

Para além dos cálculos particulares, a autora criou, em uma planilha eletrônica, um quadro no qual é possível inserir as informações e que retorna o valor sugerido para a carona.

Quadro 20: Planilha para o cálculo do valor a ser cobrado

	Valor a ser cobrado
	R$ 32,18
Valor do carro	R$ 30.000,00
IPVA	R$ 1.200,00
Seguro Obrigatório	R$ 105,65
Licenciamento anual	R$ 71,30
Depreciação	R$ 2.100,00
Gasto anual do carro	R$ 3.476,95
Gasto anual do carro dividido entre semanas	R$ 66,86
Número de semanas que você irá oferecer carona	52
Distância percorrida semanal/e - km	268
Quilômetros/litros	13
Valor do Combustível	R$ 3,00
Gasto semanal de Combustível	R$ 61,85

Fonte: PIPE – Ani

A planilha é importante para que mais pessoas possam ter um acesso facilitado à sugestão de Ani, uma vez que não exige do usuário o conhecimento matemático para entender os cálculos necessários para se chegar ao preço sugerido para a carona.

Ani publicou um artigo sobre o tema em um evento de âmbito nacional. Atualmente a discente escreve seu trabalho de conclusão de curso e esse envolve a temática “Problemas”, no entanto não tivemos acesso ao mesmo, uma vez que ainda não foi publicado.

2.2.8. CAROL

Nascida em 1989 em uma cidade próxima a Uberlândia, Carol a princípio tinha a ideia de cursar Ciências da Computação, no entanto, com 17 anos, optou por matemática enquanto morava com seus tios. Decidiu-se pelo curso por conta de um professor que discutiu o conteúdo de funções de uma maneira na qual, pela primeira vez, ela compreendeu. A estudante relata que não possuía dificuldades, no entanto, memorizava tudo, até que com aquela aula percebeu que era possível entender a matemática que estudava.

Carol iniciou o Curso de Bacharelado em Matemática, tomou gosto pela licenciatura e efetuou a mudança. Formou-se em 2013 e relata que deseja ser professora universitária uma vez que, apesar de gostar do ensino básico, percebe a desvalorização dos professores que atuam nessa área.

Participando da primeira turma acompanhada pelo autor dessa pesquisa, a aluna inicialmente tinha a intenção de escrever algo sobre a alimentação e nutrição, no entanto encontrava dificuldade para relacionar os dados.

> Não era nem as compras, tinha a questão de quanto a gente comia em relação ao quanto a gente gastava. Eu não sabia se eu sabia essa tal divisão, relacionando calorias ou melhor alimentação (Carol).

Logo, ao começar a estruturar os dados em tabelas ou quadros e refletir junto com o professor e demais colegas da turma, ela optou por continuar com a alimentação e relacioná-la aos custos. Afunilando ainda mais no tema, Carol desenvolveu o trabalho final da disciplina voltado para o ambiente em que residia. Apesar da proximidade da cidade natal, a estudante optava por passar os dias úteis em Uberlândia, dessa maneira conseguia mais tempo para se dedicar aos estudos. Sendo assim, ela residia juntamente com outras duas garotas em uma república universitária, na qual as despesas alimentícias eram divididas. Seu trabalho está relacionado a essas despesas e segundo a própria autora:

> O trabalho teve como principal objetivo criar um método que pudéssemos dividir as compras do supermercado de uma república de uma maneira que considerássemos justa. Algo que iria responder nossas expectativas, mas que fosse algo diferente apenas da média aritmética (Carol).

Até então os gastos com alimentos eram divididos por três, salvo algumas exceções, nas quais um produto era consumido exclusivamente por uma das moradoras. Com a disciplina, a moradora e estudante percebeu a possibilidade de utilizar a matemática para modificar essa divisão de uma maneira que ela considerava mais justa.

> Nosso primeiro passo foi elaborar uma lista de compras de acordo com o que iriam gastar em alimentação durante um mês. Na nossa pesquisa, utilizamos o exemplo de uma república com o total de três garotas que se conheciam a mais de 2 anos. A lista concluída possuía 23 itens, sendo que cada uma das garotas deveria avaliar esses alimentos de acordo com a preferência pessoal, possuindo um total de 100 pontos para serem distribuídos entre os alimentos. Por exemplo: se eu gosto muito de arroz e resolvo designar 15 dos 100 pontos a este alimento, devo lembrar que restam 85 para distribuir entre os alimentos que compõem o restante da lista (Carol).

Carol ressalta que para que os pontos fossem distribuídos pelas garotas, deveria haver um parâmetro, pois caso isso não ocorresse uma das garotas, ao gostar muito de um alimento, poderia classificá-lo com a mesma quantidade de pontos do que outra moradora que não gostasse daquele produto:

> Por exemplo, se uma das garotas gosta muito de carne e sua nota atribuída é 15, já a outra garota também gosta, mas não tanto quanto a primeira, e a sua nota seria 20. Então ficaria injusto e não teria sentido algum fazer esta partilha (Carol).

A solução para esse impasse foi utilizar a pontuação dada por uma das garotas para embasar a decisão das outras. Aplicando essa ideia na república, os dados foram organizados no seguinte quadro:

Quadro 21: Preferências das garotas pelos alimentos

Alimento	Preferência G1	Preferência G2	Preferência G3	Total
Arroz	5	4	5	14
Açúcar	5	4	3	12
Creme de Leite	3	3	3	9
Margarina	5	3	1	9
Presunto	4	3	5	12
Ovos	5	5	6	16
Carne: Suína	5	7	9	21
Carne: Bovina	5	15	10	30
Carne: Ave	5	8	8	21
Leite	5	4	5	14
Queijo	4	5	5	14
Massa Tomate	3	1	2	6
Alho	1	1	1	3
Cebola	1	1	1	3
Cenoura	1	3	5	9
Milho	1	2	2	5
Beterraba	2	2	1	5
Banana	5	5	1	11
Maça	2	4	5	11
Macarrão	10	3	5	18
Pão	10	4	5	19
Batata	3	3	7	13
Café	10	10	5	25

Fonte: PIPE - Carol

De posse dessas informações, a estudante estabelece uma forma de comparar a nota dada por uma moradora a um determinado alimento, com o total de pontos distribuídos para o mesmo. Carol cita como exemplo a primeira linha do quadro, com os números 5, 4, 5, que juntos somam 14, ou seja, o total que todas as garotas estabeleceram para o arroz. Desta forma, as "preferências" das garotas 1 e 2 com relação ao total dado ao alimento da linha 1, podem ser estabelecidas, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\frac{5}{14} = 0{,}3571 \qquad \frac{4}{14} = 0{,}2857$$

Cada uma dessas razões era multiplicada pelos preços dos respectivos alimentos, resultando assim em quanto cada uma das moradoras deveria pagar por aquele determinado produto, frente à sua preferência. Carol buscou generalizar a expressão no seguinte quadro (para a "Garota 1"):

Quadro 22: Generalizando custo de cada alimento para cada moradora desconsiderando a quantidade de dias que cada uma ficava na república

Alimento	Linhas	Fórmula
Arroz	1	$PP_1 x\left(\frac{P_{1,1}}{PT_1}\right) xQA_1$
Açúcar	2	$PP_2 x\left(\frac{P_{1,2}}{PT_2}\right) xQA_2$
⋮	⋮	⋮
K	K	$PP_k x\left(\frac{P_{1,k}}{PT_k}\right) xQA_k$

Fonte: PIPE - Carol

Em que PP_ké o preço do alimento na linha K do quadro que representa a lista de alimentos, $P_{1,k}$ é a "preferência" da "Garota 1" pelos alimentos da linha K, QA_k é a quantidade do alimento também na linha K e PT_k o somatório dos pontos distribuídos pelas três moradoras ao alimento da k-ésima linha.

Carol resume a expressão para a "garota 1", generalizando a expressão para *n* alimentos, a partir de um somatório:

$$T_{M_1} = \sum_{k=1}^{n} \left(PP_k \left(\frac{P_{1,k}}{PT_k} \right) QA_k \right)$$

Devido a vivência no ambiente de república, a estudante ainda percebia outro fator que deveria ser levado em consideração, como a mesma relata: "outro ponto que foi considerado neste método para tornar a partilha ainda mais justa está relacionado com a quantidade de dias que cada uma das garotas ficava na república em um intervalo de 30 dias. Isto é, a razão entre os dias que ficam em casa" (Carol).

Como exemplo, Carol cita a "Garota 1", relatando que a mesma poderia ficar na república apenas 28 dos 30 dias do mês, e expõe essa informação matematicamente a partir da seguinte razão:

$$\frac{28}{30} = 0{,}9333$$

No trabalho da estudante, essa relação foi exemplificada da maneira abaixo:

$$G_1 = \underbrace{R\$7{,}99}_{Preçodoarroz}\, x\ \overbrace{0{,}3571}^{Preferência}\, x\ \underbrace{1}_{Quantidade}\ x\ \overbrace{0.933}^{Razão\ entre\ os\ dias} = R\$2{,}67$$

No entanto, ao utilizar a "Razão entre os dias" para ajustar ainda mais a expressão, ocorria um erro. Ao somar os valores que deveriam ser pagos pelas moradoras, por exemplo, para o arroz, o resultado final era inferior ao preço do alimento. Isso ocorria porque em geral, a "Razão entre os dias" era um número menor que 1. Porém, Carol discute uma maneira de sanar esse problema a partir de uma expressão adaptada e que leva em consideração a divisão do que equivaleria aos demais dias em que a "Garota 1" não ficava na república, entre as garotas 2 e 3. O mesmo acontecia para as demais moradoras. A estudante conclui a seguinte expressão para a moradora 1, que é análoga às demais garotas:

$$\mathrm{T_{G_1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{PP_k} \left(\frac{\mathrm{P_{1,k}}}{\mathrm{PT_k}} \right) \mathrm{QA_k} \left(\frac{(\mathrm{QD_1})}{\mathrm{QDT}} \right) + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{\mathrm{QD_2}}{\mathrm{QDT}} \right) \right)}{2} \right) \mathrm{PP_k} \left(\frac{\mathrm{P_{2,k}}}{\mathrm{PT_k}} \right) \mathrm{QA_k} + \left(\frac{\left(1 - \left(\frac{\mathrm{QD_3}}{\mathrm{QDT}} \right) \right)}{2} \right) \mathrm{PP_k} \left(\frac{\mathrm{P_{3,k}}}{\mathrm{PT_k}} \right) \mathrm{QA_k} \right)$$

Em que QD_2, QD_3 é a quantidade de dias que as garotas 2 e 3 ficam na república no intervalo entre as compras e QDT é este intervalo. Observe que nesse caso a “Garota 1” paga por metade dos dias que as Garotas 2 e 3 não ficavam na república e essa expressão é adaptada às demais moradoras, tentando assim compensar entre si, os dias em que as mesmas não estavam presentes.

Somado ao trabalho escrito, Carol criou uma planilha eletrônica, na qual bastava inserir os pontos para os alimentos e os dias em que cada moradora ficava na república nos intervalos entre as compras (na planilha, não necessariamente, as compras ocorriam mensalmente, sendo possível inserir a quantidade de dias para ocorrer a nova compra). Veja na figura 28 a seguir:

Por favor, preencha apenas os campos destacados em amarelo.

Intervalo entre as compras	15	Morador(a) 1		Morador(a) 2		Morador(a) 3	
Insira a qtde de dias		10		10		10	
ALIMENTOS	PREÇO	GOSTO	VALOR	GOSTO	VALOR	GOSTO	VALOR
Arroz	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Açúcar	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Creme de leite	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Margarina	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Presunto	R$ 12,00	1	R$ 0,57	10	R$ 5,71	10	R$ 5,71
Ovos	R$ 12,00	1	R$ 1,33	3	R$ 4,00	5	R$ 6,67
Carne: Suína	R$ 12,00	1	R$ 1,50	2	R$ 3,00	5	R$ 7,50
Carne: Bovina	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Carne: Bovina	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Carne: Ave	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Carne: Ave	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Leite	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Queijo	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Massa Tomate	R$ 12,00	1	R$ 1,09	5	R$ 5,45	5	R$ 5,45
Alho	R$ 12,00	2	R$ 2,00	5	R$ 5,00	5	R$ 5,00
Cebola	R$ 12,00	2	R$ 2,00	5	R$ 5,00	5	R$ 5,00
Cenoura	R$ 12,00	2	R$ 2,00	5	R$ 5,00	5	R$ 5,00
Milho	R$ 12,00	2	R$ 3,43	5	R$ 8,57	0	R$ 0,00
Beterraba	R$ 12,00	2	R$ 2,40	4	R$ 4,80	4	R$ 4,80
Banana	R$ 12,00	2	R$ 6,00	1	R$ 3,00	1	R$ 3,00
Maça	R$ 12,00	3	R$ 7,20	1	R$ 2,40	1	R$ 2,40
Macarrão	R$ 12,00	3	R$ 7,20	1	R$ 2,40	1	R$ 2,40
Pão	R$ 12,00	45	R$ 11,49	1	R$ 0,26	1	R$ 0,26
Batata	R$ 12,00	22	R$ 11,00	1	R$ 0,50	1	R$ 0,50
Café	R$ 12,00	1	R$ 4,00	1	R$ 4,00	1	R$ 4,00
Qtde de pts restantes		0		0		0	
TOTAL	R$ 300,00		R$ 87,06		R$ 106,82		R$ 106,12

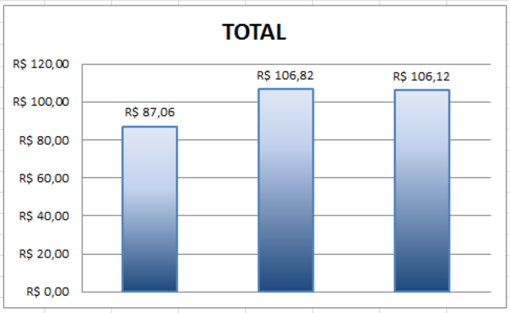

Figura 28: Planilha para o cálculo dos custos para cada moradora
Fonte: PIPE - Carol

A utilização da planilha eletrônica não é obrigatória, no entanto torna-se interessante para que as pessoas não precisem compreender ou executar todos os cálculos do modelo.

Os trabalhos de Carol envolvendo os questionamentos sobre as divisões das despesas na república não pararam em EMAP. Em 2013 a estudante publicou dois trabalhos em eventos nacionais, sendo um resumo e um trabalho completo, além disso, parte do estudo que elaborou em seu Trabalho de Conclusão de Curso, conhecido como TCC, está relacionado ao que foi desenvolvido em EMAP. Segundo a entrevistada, o objetivo do trabalho consiste em “apresentar como foi o processo de formulação dos problemas e a criação dos modelos que respondessem nossas perguntas [...]”(Carol, Trabalho de Conclusão de Curso). Ao ser questionada sobre o porquê decidiu retomar a discussão em seu TCC, a estudante responde: “porque depois de EMAP eu comecei a estudar um pouco mais sobre modelagem. Não muito, já que no TCC 1 eu fazia sobre jogos.”

Carol teve dificuldades ao defender o que chama informalmente de “Modelo da República”, pois sua banca avaliadora questionou as variáveis envolvidas.

Como o modelo estava pronto, Carol citou como maior dificuldade a parte concernente aos referenciais teóricos da modelagem que não foram vistos em EMAP, além do rigor matemático. Outro ponto que se apresentou como obstáculo no trabalho foi a formulação da pergunta principal, que em seu ponto de vista está relaciona à formulação do problema. Nesse sentido a autora afirma que

> [teve] dificuldade também em saber qual é a pergunta principal do trabalho, acho que ai tem a questão da formulação do problema (Carol).

A estudante, no entanto, aproveitou a oportunidade para aprimorar a escrita do trabalho, resolvendo assim os problemas que até então passavam despercebidos. Reescrevendo e generalizando a expressão, sendo “p” a quantidade de pessoas e $i = 1, 2, 3, \ldots, p$, obteve:

$$T_{\tilde{M}_j} = T_{M_j} * R_j + \sum_{\substack{n=i \\ i \neq j}}^{p} \frac{E_n}{p-1}$$

- $T_{\tilde{M}_j}$: Total que a moradora “j” deverá pagar.
- T_{M_j}: Total que a moradora “j” deveria pagar levando em consideração apenas sua preferência com relação aos produtos.
- R_j: Fração de tempo que cada moradora permanece na república.
- E_n: Valor que a moradora “n” não deverá pagar por não permanecer na república no intervalo de tempo estabelecido entre as compras.

A planilha eletrônica também foi modificada pela estudante:

Quadro 23: Segunda versão da planilha eletrônica para o cálculo dos valores a serem pagos por cada moradora

DIVISÃO DOS VALORES NA REPÚBLICA

Intervalo entre as compras	30	Morador(a) 1		Morador(a) 2		Morador(a) 3	
Insira a qtde de dias		28		30		24	
ALIMENTOS	PREÇO	GOSTO	VALOR	GOSTO	VALOR	GOSTO	VALOR
Arroz	R$ 7,99	5	R$ 2,10	4	R$ 1,68	10	R$ 4,21
Açúcar	R$ 7,59	5	R$ 3,80	5	R$ 3,80	0	R$ 0,00
Creme de leite	R$ 2,60	3	R$ 0,60	5	R$ 1,00	5	R$ 1,00
Margarina	R$ 3,50	3	R$ 0,81	5	R$ 1,35	5	R$ 1,35
Presunto	R$ 4,00	6	R$ 0,92	10	R$ 1,54	10	R$ 1,54
Ovos	R$ 3,00	3	R$ 0,82	3	R$ 0,82	5	R$ 1,36
Carne: Suína	R$ 6,00	10	R$ 3,53	2	R$ 0,71	5	R$ 1,76
Carne: Bovina	R$ 12,00	2	R$ 2,00	5	R$ 5,00	5	R$ 5,00
Carne: Bovina	R$ 12,00	3	R$ 2,77	5	R$ 4,62	5	R$ 4,62
Carne: Ave	R$ 5,00	10	R$ 2,50	5	R$ 1,25	5	R$ 1,25
Carne: Ave	R$ 4,00	7	R$ 1,65	5	R$ 1,18	5	R$ 1,18
Leite	R$ 5,79	5	R$ 1,93	5	R$ 1,93	5	R$ 1,93
Queijo	R$ 5,00	2	R$ 0,83	5	R$ 2,08	5	R$ 2,08
Massa Tomate	R$ 3,00	2	R$ 0,50	5	R$ 1,25	5	R$ 1,25
Alho	R$ 2,00	2	R$ 0,33	5	R$ 0,83	5	R$ 0,83
Cebola	R$ 2,00	2	R$ 0,33	5	R$ 0,83	5	R$ 0,83
Cenoura	R$ 3,00	4	R$ 0,86	5	R$ 1,07	5	R$ 1,07
Milho	R$ 3,00	4	R$ 1,33	5	R$ 1,67	0	R$ 0,00
Beterraba	R$ 2,00	6	R$ 0,86	4	R$ 0,57	4	R$ 0,57
Banana	R$ 4,00	3	R$ 2,00	2	R$ 1,33	1	R$ 0,67
Maça	R$ 3,00	2	R$ 1,50	1	R$ 0,75	1	R$ 0,75
Macarrão	R$ 5,59	2	R$ 2,80	1	R$ 1,40	1	R$ 1,40
Pão	R$ 2,89	3	R$ 1,73	1	R$ 0,58	1	R$ 0,58
Batata	R$ 3,60	3	R$ 2,16	1	R$ 0,72	1	R$ 0,72
Café	R$ 7,80	3	R$ 4,68	1	R$ 1,56	1	R$ 1,56
Qtde de pts restantes		0		0		0	
TOTAL	120,35	R$ 44,20		R$ 44,70		R$ 31,45	

Fonte: PIPE – Carol

No semestre seguinte Carol foi convidada pelo professor da disciplina para apresentar seu trabalho, como forma de motivar os novos estudantes, bem como contribuir para que novas ideias surgissem.

No mesmo ano em que concluiu a graduação, a estudante pleiteou uma vaga no mestrado em Modelagem Matemática e foi classificada para iniciar o curso em 2014 na UNICAMP. Atualmente, além da pós-graduação, Carol discute informalmente com amigos a criação de um aplicativo para celulares que desempenhe a mesma função da planilha eletrônica e que torne ainda mais acessível essa ferramenta.

2.3. Parte 3 - Análise dos dados: A libertação dos professores

A análise dos dados traz, explora e discute as contribuições da disciplina EMAP oferecida em torno da formulação de problemas, para a libertação do professor de matemática em formação.

A libertação a qual nos referimos não é, em suma, aquela exaltada por Paulo Freire que discute a relação oprimidos e opressores. O apelo aqui não é diretamente ligado aos posicionamentos de classes dominantes, contudo, nosso pensamento é fortemente baseado em sua teoria, embora seja, nessa pesquisa, entendida à luz da formação do professor de matemática e de sua libertação para criar, ou seja, a "libertação não é simplesmente estar contra o centro, nem sequer significa romper a dependência. É muito mais que isso: é ter a criatividade de sermos realmente capazes de construir a novidade, um novo momento histórico" (MATOS, 2008, p. 97).

Portanto, nesta terceira parte, iremos vislumbrar a libertação dos professores de matemática em formação no que diz respeito à oportunidade de vivenciar a disciplina EMAP em comunhão com a formulação de problemas. No entanto, se faz necessário entrelaçar as discussões teóricas do capítulo 1 com a trajetória dos discentes da disciplina, observações feitas na Parte 2 do capítulo 2, para mostrarmos a criatividade que os alunos foram capazes de construir no momento histórico dessa pesquisa. Para tanto, inicialmente apresentamos o quadro 24, que mostra um perfil dos estudantes, bem como sintetiza a trajetória dos licenciandos para a elaboração do PIPE e os recursos utilizados.

(continua)

Quadro 24: Síntese da trajetória dos estudantes entrevistados

Estudante	Sexo	Cursou EMAP no	Origem do problema	TIC's utilizadas	Tratamento do problema	Aplicação do PIPE em sala de aula	Aplicação para a vida pessoal	Publicação de artigos (baseados no PIPE) em eventos
Ester	Fem.	2º Semestre	Problema envolvendo reflexões acerca do cotidiano, com relação à saúde.	• Internet; • Editor de textos.	• Imagens; • Quadros; • Regra de três simples.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Não publicou até o momento da entrevista.
Luluzinha	Fem.	2º Semestre	Sua origem está relacionada a indagações pessoais a respeito dos gastos envolvendo a profissão de sua mãe.	• Internet; • Editor de textos; • GeoGebra.	• Imagens; • Quadros; • Gráficos; • Função do primeiro grau.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Ocorreu esporadica-mente, uma vez que sua mãe nem sempre refletia sobre o assunto.	Não publicou até o momento da entrevista.
Pascolina	Fem.	2º Semestre	Parte do questionamento (caso particular) entre utilizar o transporte público ou particular para ir até à universidade.	• Internet; • Editor de textos.	• Quadros; • Regra de três simples; • Porcentagem	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Ocorreu. Sempre que possível Pascoalina tomava carona com o pai.	Publicou um artigo em evento nacional.

Quadro 24: Síntese da trajetória dos estudantes entrevistados

(continuação)

Estudante	Sexo	Cursou EMAP no	Origem do problema	TIC's utilizadas	Tratamento do problema	Aplicação do PIPE em sala de aula	Aplicação para a vida pessoal	Publicação de artigos (baseados no PIPE) em eventos
Pitágoras	Masc.	1º Semestre	A origem está na própria universidade e se relaciona à mudanças ocorridas no restaurante universitário.	• Internet; • Editor de textos; • GeoGebra.	• Quadros; • Gráficos; • Função do primeiro grau.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Não publicou até o momento da entrevista.
Stallone	Masc.	2º Semestre	O problema tornou-se pessoal a partir de sua curiosidade a respeito da exposição de fotografias.	• Internet; • Editor de textos; • GeoGebra.	• Imagens; • Lei dos Senos; • Lei dos Cossenos.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Não publicou até o momento da entrevista.
Tsuname	Masc.	1º Semestre	A origem do problema está na relação existente entre o preço da passagem do transporte público e o salário mínimo.	• Internet; • Editor de textos; • Planilha eletrônica (para gráficos).	• Gráfico; • Razão.	Ocorreu durante um encontro com jovens do Coletivo (RE)Ação.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Publicou um artigo em evento regional.

Quadro 24: Síntese da trajetória dos estudantes entrevistados

(conclusão)

Estudante	Sexo	Cursou EMAP no	Origem do problema	TIC's utilizadas	Tratamento do problema	Aplicação do PIPE em sala de aula	Aplicação para a vida pessoal	Publicação de artigos (baseados no PIPE) em eventos
Ani	Fem.	2º Semestre	O problema é pessoal mas atinge caráter amplo por se tratar de uma tentativa de compreensão e generalização de gastos com caronas.	• Internet; • Editor de textos; • Planilha eletrônica.	• Imagem; • Quadro; • Razão; • Equação.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Ocorreu. Conscientizou Ani a respeito dos gastos com as caronas.	Publicou um artigo em evento nacional.
Carol	Fem.	1º Semestre	O problema é pessoal e torna-se também amplo uma vez que lida com partilha de despesas em repúblicas universitárias.	• Internet; • Editor de textos; • GeoGebra.	• Quadros; • Gráficos; • Razão; • Somatório.	Não ocorreu até o momento da entrevista.	Ocorreu. Carol aplicou na república em que morava mudando a forma de dividir algumas despesas.	Publicou um resumo e um artigo completo.

Fonte: Próprio autor

Essas informações são exposições daquilo que pudemos notar em entrevistas e nos trabalhos dos discentes durante a pesquisa. O que segue a partir de agora retoma as discussões teóricas e enfatiza traços das mesmas nos trabalhos daqueles que foram pesquisados. Portanto, deixa o caráter apenas expositivo e toma forma de expor e refletir a respeito dos Projetos, ou seja, vai além daquilo que ficou evidente na fala ou nos artigos entregues ao final de cada semestre letivo.

2.3.1. Do problema e da problematização

Precedido por outras atividades que envolviam criar um problema, como pode ser observado na Parte 1 desse capítulo, o PIPE em EMAP oportunizou aos estudantes uma situação, que a maioria, ainda não havia vivenciado: formular um problema, de preferência envolvendo seu cotidiano, para ser resolvido. A originalidade é ilustrada na fala de Stallone, que ao ser questionado sobre outra oportunidade de desenvolver um problema durante o, afirma que

> não, não, não teve não. Sempre assim, o cara da o problema pronto lá e o cara inventou a teoria, fez lá o teorema dele, aí traz o exercício que já está pronto e que eu não sei nem quem fez e você tem que resolver, mas aí você fica só resolvendo exercícios, resolvendo exercícios, cosseno ‘não sei do que igual a seno do sei do que’ aí então, acho que assim foi bem legal essa maneira de propor essa atividade, eu acho que... acho não, tenho certeza de que deve acontecer mais esse tipo de proposta. (Stallone)

Pitágoras também expõe um pensamento com características semelhantes em relação a não ter vivenciado esse tipo de situação:

> eu não estou acostumado a chegar e falar assim: ou escolhe aí um problema. Aí você pensa assim, um problema, por exemplo, semáforos... tem um monte de problemas. Outra coisa, eu não tinha maturidade [e complementa] Desde as minhas experiências no ensino fundamental e médio eu não tive nada parecido, por exemplo, o professor chegar e falar: ‘ah, vocês vão criar um problema’. Já tive assim: pesquisa sobre relevo, e apresenta. Aí você pesquisa, cola umas

> gravuras e apresenta na frente, só que assim, você não criou, por exemplo: crie um problema envolvendo erosão. O cara ver se o terreno pode ser erosivo, se poderia dar uma cratera... será que eu posso construir uma casa em cima de uma montanha, é viável? Nunca tive isso. Aí já veio disso, aí chegou no curso e no início também continuou. O que mudava era assim: escolha o tema de uma aula, então eu escolhia o tema. Então você diferencia um pouco do clássico, mas nem era tão diferente. Então eu atribuo a tudo, desde pequeno até o curso, pois o curso não incentiva isso. (Pitágoras)

Como se pode observar, os discentes afirmam não terem presenciado uma situação de criar problemas. Desse grupo de alunos, apenas um relatou ter vivenciado em sua graduação (até o momento da entrevista) uma situação prática com o ato de criar. Ainda sim, a coloca de forma diferente:

> Antes eu já tinha criado alguns problemas quando eu desenvolvi uma atividade de estágio, então eu elaborei uma proposta de um jogo adaptado e eu que criei todos os problemas, mas em cima daquela situação. Um pouco diferente de EMAP que é mais amplo. (Ester)

De todas as atividades de EMAP que foram apresentadas nessa pesquisa, a que explora e é totalmente dedicada ao ato de criar ou formular um problema é justamente o PIPE e, foi nele em que os discentes relatam dificuldades no desenvolvimento. Isso fica evidente no questionário aplicado (Anexo 1), no qual, dentre os oito entrevistados, quatro relatam "dificuldade moderada", dois afirmam que tiveram "dificuldades extremas" e dois que tiveram pouca dificuldade. Corroborando também a esse respeito, Tsuname relata que

> Foi um baque assim, foi uma coisa nova para mim e essa experiência não chegou nem perto de nada que eu havia feito até aquele momento. [...] é porque é assim, a gente está acostumado a copiar, quando a gente fala "cria uma coisa", meu Deus do céu, é muito difícil. (Tsuname)

Esta dificuldade nos parece oriunda da falta de prática, pois como vimos no relato de Pitágoras e Stallone não é uma ação costumeira do curso incentivar a formulação e criação de problemas. Contudo, as propostas do PIPE resultaram em trabalhos muito significativos para a Educação Matemática.

Em se tratando desses educadores em formação, podemos afirmar que todos lidaram com problemas, enquanto necessidade de resolver algo que de certa maneira os perturbava. Alguns casos como, por exemplo, o de Ani e suas caronas para a cidade natal, bem como Carol com as compras da república em que morava e Pascoalina com seu dilema entre utilizar o transporte público ou particular para ir até a universidade representam verdadeiramente a essência de lidar com um **problema**, uma vez que eram situações que as incomodavam em dois sentidos: enquanto diretamente envolvidas por ser algo de seu cotidiano, enquanto professoras em formação, preocupadas em discutir temas que envolvessem o dia a dia. Tanto elas quanto os demais refletiram e questionaram circunstâncias que de alguma maneira os tiravam de seu equilíbrio. Outro exemplo é o de Luluzinha que lidou com um problema envolvendo as despesas familiares. Como sua mãe é cuidadora de algumas crianças, existe a preocupação com a alimentação de qualidade para as mesmas e, portanto, com os gastos que permeiam essa atividade. Já Pitágoras, com sua bolsa de alimentação, também recorreu a uma temática discutida na época: as canecas de plástico durável no restaurante universitário.

No entanto, alguns não lidaram com temáticas presentes diretamente em suas vidas, como nos casos de Ester e Tsuname. Ambos elencaram questionamentos que de fato os perturbavam de alguma maneira, mas que não estavam diretamente relacionados ao seu cotidiano. Tsuname ilustra essa relação entre não ser de fato algo pessoal e, ainda sim, um problema. Ao ser questionado se o tema do transporte coletivo lhe afligia, ele responde:

> Não, pessoalmente? Não. Talvez para mim não, mas talvez para uma pessoa que more na periferia, que falte condições financeiras. Para essa faz diferença. (Tsuname)

A princípio, podemos interpretar que, sobretudo pelo discutido no capítulo 1 dessa pesquisa, Tsuname não lidou com um problema, pois de fato, ele confirma que naquele momento a situação que descrevia em seu PIPE nada o afetava. Porém, ao analisarmos seu trabalho, bem como sua fala, na perspectiva de professor, concebemos sim a ideia de problema, uma vez que percebemos sua preocupação com aqueles cujas condições econômicas são precárias. Portanto, temos uma discussão que por um lado não afetava o discente, mas que, por outro motivava sua preocupação. O caso de Ester é semelhante, pois existe a preocupação com a realidade do aluno:

> [...] como eu estou na área de licenciatura é algo que eu penso muito, é trazer essa realidade para o aluno. (Ester)

Observa-se que os problemas de cada um possuem suas respectivas trajetórias, que extrapolam aquelas discutidas na Parte 2, uma vez que, além da escrita do texto, a forma como EMAP foi pensada e praticada destacava aulas inteiras para o **diálogo** em grupo. Os problemas não surgiram da noite para o dia, muito pelo contrário, diversos entrevistados colocam suas dificuldades para formulá-lo, como já discutimos, pela falta de hábito.

Contudo, os temas e os problemas foram sendo elaborados a partir dos encontros no LEM[28], em que os professores em formação trocavam ideias e experiências, contribuindo diretamente para o trabalho dos colegas, questionando, relatando, e se posicionando frente aos argumentos. Entendemos esse processo como o de **Problematização**. Como colocamos nas discussões teóricas dessa pesquisa, para Mendonça (1993) a problematização precede o problema e envolve muito do pensar e agir. O professor em formação encontrou em EMAP, naqueles momentos, uma iniciativa, uma oportunidade para nele desenvolver, a partir desse pensar e agir, uma **atitude** de formular problemas. Ilustramos nosso pensamento nos dizeres de Freire (2011a), que ao discutir problemas sociais e políticos de sua época, ressalta: “entre nós, repita-se, a educação teria de ser, acima de tudo, uma tentativa constante de mudança de atitude” (FREIRE, 2011a, p.123). Portanto, em nosso entendimento, a problematização surgiu em EMAP, quando essa oportunizou ao discente uma situação em que ele pudesse criar e até resolver um problema de sua autoria. Isso significou para muitos uma mudança de atitude frente ao curso, como podemos notar na fala de Stallone:

> Eu acho que até eu no curso, nem vou por eles, vou por eu mesmo, depois que eu fiz essa disciplina já tive mais uma vocação maior para a matemática. **Buscar, criar problemas, fazer construções no GeoGebra, motiva muito**!(Stallone)

Stallone nos mostra uma mudança de atitude (ou a construção de uma nova), de forma ampla em que todos os discentes passaram no decorrer da disciplina: buscar, criar, fazer foram ações alcançadas por todos. No entanto, houve aqueles que internalizaram de forma mais arraigada ao ponto de **viver uma liberdade no seu pensar e nas suas ações enquanto sujeito**. Nesse sentido destacamos a fala de Carol, que caracteriza a disciplina EMAP como um divisor de águas:

[28] Relembro que as aulas de EMAP ocorreram no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

> A disciplina foi mesmo um divisor de águas pra mim. Teve antes e depois de EMAP. (Carol)

Bem como Stallone que afirma:

> EMAP foi um divisor de águas para minha cultura como professor, para mim foi um divisor muito grande. (Stallone)

Apesar de não ressaltar com a mesma expressão, Ester, ao ser questionada sobre ser observadora da matemática do dia a dia, complementa:

> Não era, mas depois, de certa forma, sim [...] depois de EMAP isso ficou mais apurado. (Ester)

Pascoalina também se manifesta a respeito e resume:

> Se eu tiver condições de continuar assim, eu quero sim continuar e levar isso pra sala porque eu acho que motiva muito os alunos [...] mas assim, **eu estou mudando.** (Pascoalina)

Pitágoras descreve sua opinião a respeito:

> Antes eu não via tanto as coisas como matemática, por exemplo, se tiver algo na escola, por exemplo, algum evento, eu posso pegar alguma coisa disso e trazer pra aula. O primeiro estalo foi EMAP. Nenhum professor tinha falado 'pega um problema da sua escola e trabalha na sala', por exemplo, a escola está gastando muita água ou a escola está com muitas luzes queimadas, já dá pra fazer alguma coisa disso. Então com certeza afetou. Passava despercebido, tipo, vai construir mais dez blocos na UFU, mas será que vai ficar restrita a área? Não sei! Vai ter que destruir rua ou o estacionamento, vai ficar menor? Eu não pensava nisso... beleza, vai construir 10 blocos... bom! Era automático, igual quando um cara te oferece uma bala, é sim ou não, é automático. Então se a UFU está com várias lâmpadas queimadas: nó tinha que por mais né, cadê os funcionários que trocam? Você pensa é em coisa elaborada que você tá acostumado e quando o cara pega um livro de matemática aplicada ou pura, não tem lá: uma faculdade tinha tantas lâmpadas queimadas, qual seria o seu problema? Tem assim: tal escavação tem a EDO tal se ele vai cavar mais dois metros o que vai acontecer com o valor final, vai acrescentar uma constante ou vai ter outra variável? Aí o cara tá acostumado com isso. (Pitágoras)

Percebemos que houve mudanças na percepção de Pitágoras, sendo isso, mais um exemplo que se agrega ao processo de libertação do professor em formação, no sentido de que há um aprofundamento maior das relações entre a matemática e o seu dia a dia e, portanto em suas atitudes para com essas relações.

Entendemos que, ao perceber com mais frequência a matemática em seu cotidiano, o licenciando potencializa sua caminhada rumo ao tempo inventivo, discutido por Alves (2012)[29]

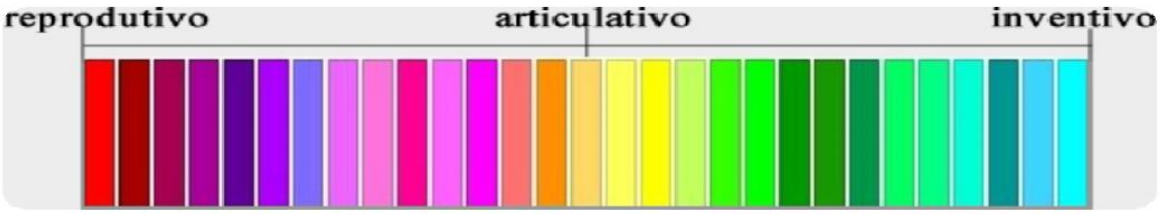

Figura 29: Tempos da atividade produtiva
Fonte: ALVES, 2012, p. 113

Essa mudança enquanto movimento aproxima cada vez mais o discente do tempo inventivo que, em nosso entendimento, motiva e é motivado por uma **atitude**. Estas, são decisões, em que o licenciando vivencia a sua própria liberdade. O processo de estar em movimento, tendo atitudes e vivenciando a liberdade, que é uma construção e uma conquista do próprio aluno, culmina na autonomia do mesmo ao usar a matemática no cotidiano. Zatti, por meio de seus estudos sobre a obra Pedagogia da Autonomia, de Paulo Freire, corrobora com essa análise ao afirmar que “autonomia é a condição sócio-histórica de um povo ou pessoa que tenha se libertado, se emancipado, das opressões que restringem ou anulam sua liberdade de determinação” (ZATTI, 2007, p. 53) e, portanto, a liberdade é condição necessária.

Observamos nos dizeres de Pitágoras essa expressão:

> Eu interpretei que esse PIPE me fez crescer mais assim, em termos de **autonomia**, então contribuiu para qualquer outra disciplina. Tive que aprender outra forma de fazer um trabalho. Aqui na faculdade a gente tá acostumado a fazer trabalho em dupla ou trio, trabalho mais teórico. Aí não, eu já tive que: oh, eu vou ter que conversar com outras pessoas, tenho que ir lá, nem conheço o cara... aí vou ter que escrever isso, tenho que escrever sozinho pra depois os caras olharem e falar alguma coisa. **Em termos de disciplina, não vejo um impacto**

[29] É possível ver mais detalhes no capitulo de discussões teóricas dessa pesquisa.

> **direto, é mais amplo. Te ajuda na disciplina no sentido de que ajuda na sua vida, mudou um pouco o meu olhar assim [...] É, eu acho que eu consigo tomar mais decisões por mim agora**. Tipo eu nunca peguei aula ainda porque eu não me sentia seguro, não me via ali, por isso que eu não pegava. Eu me sinto seguro devido ao crescimento (Pitágoras).

Zatti (2007) afirma também que "autonomia deve ser conquistada, construída a partir das decisões, das vivências, da própria liberdade. [... No entanto,] ninguém é espontaneamente autônomo, ela é uma conquista que deve ser realizada" (ZATTI, 2007, p. 41).

A atitude de formular incentiva esta caminhada, bem como o processo de caminhar incentiva e potencializa ainda mais a atitude de formular. Compreendemos que esta é uma ação decisória, direcionada e consciente do ato de questionar, como por exemplo: se relembrarmos as situações envolvendo a plantação de eucalipto, o sujeito pode questionar sobre quantas folhas da árvore existem na plantação, no entanto, como frisamos anteriormente, esse questionamento é infundado quando exaltamos a ideia de problema enquanto a necessidade para o proprietário rural naquele momento. Isto se faz enquanto uma indagação que não sintetiza uma ação consciente do ato de questionar. Pitágoras, no entanto, conversou com outras pessoas, buscou informações, viveu as ações decisórias para responder a um questionamento pessoal e ao mesmo tempo amplo, fundamentado, consciente, pois descreve e analisa os problemas referentes às canecas do R.U., um assunto que repercutia e impactava a ele e a muitos da comunidade acadêmica. E nesse “[...] jogo constante de suas respostas, [o sujeito] altera-se no próprio ato de responder” (FREIRE, 2011a, p.55). Portanto, interpretamos dessa atitude e dessa autonomia o fato de que

> Há uma pluralidade nas relações do homem com o mundo, na medida em que responde à ampla variedade dos seus desafios. Em que não se esgota num tipo padronizado de resposta. A sua pluralidade não é só em face dos diferentes desafios que partem de seu contexto, mas em face de um mesmo desafio. **No jogo constante de suas respostas, altera-se no próprio ato de responder. Organiza-se. Escolhe a melhor resposta. Testa-se. Age. Faz tudo isso com a certeza de quem usa uma ferramenta, com a consciência de quem está diante de algo que o desafia**. Nas relações que o homem estabelece com o mundo há, por isso mesmo, uma pluralidade na própria singularidade. E há também uma nota de criticidade. A captação que faz dos dados objetivos de sua realidade, como dos laços que prendem um dado a outro, ou um fato a outro, é naturalmente crítica e, por isso, reflexiva [...] (FREIRE, 2011a, p.55 -56, grifo nosso)

Do processo de tomadas de decisões que, por sua vez, culmina na libertação do professor em formação de possíveis amarras que não o oportunizavam lidar com o seu criar, é que interpretamos o brotar da autonomia desse sujeito, que tem o potencial para ser um indivíduo atuante no mundo e, sobretudo, em sua prática docente. Tanto é que

> toda vez que se suprime a liberdade, fica ele um ser meramente ajustado ou acomodado. E por isso que, minimizado e cerceado, acomodado a ajustamentos que lhe sejam impostos, sem o direito de discuti-los, o homem sacrifica imediatamente a sua capacidade criadora (FREIRE, 2011a, p.59).

O resultado desse processo cíclico é um sujeito mais crítico, que pode se adaptar melhor às pluralidades, aos locais em que ministrará suas aulas. Sujeito que cria, que dialoga sobre sua criação, e que certamente buscará, no cotidiano de seus alunos, situações que contemplem a realidade do local no qual exercerá sua profissão.

Uma situação que ilustra a prática do sujeito resultante do processo descrito ocorreu com Stallone. Bolsista do projeto PEIC, trabalha com jovens da área rural da cidade e, na oportunidade de promover uma atividade fora da escola, sugeriu formar grupos entre os alunos para que os mesmos formulassem problemas nesse novo ambiente, no caso o Parque do Sabiá[30]. Segundo ele, essa atitude

> veio de EMAP, por isso que estou falando, se eu não tivesse gostado eu teria anulado aquilo da minha cabeça. (Stallone)

A atitude que discutimos, que no caso de Stallone, há pouco citado, extrapola o ato de formular problemas e se intersecta com seu próprio planejamento enquanto professor, nos leva a acreditar que é possível, que os futuros professores se estabeleçam cada vez mais próximos do "tempo inventivo".

Compreendemos que a estrutura que EMAP foi pensada durante a pesquisa, sobretudo o trabalho com o PIPE, contribui de maneira significativa para que essa proximidade se efetive, tornando menos frequentes as práticas reprodutivas do futuro professor.

---

[30] Um parque de Uberlândia que possui um zoológico em seu interior e é circunscrito por uma pista de caminhada de 5 km de extensão. Com um grande bosque e uma bela represa, o local é muito atrativo para famílias e esportistas.

Em suma, percebemos que, de um tema surgia a problematização que sintetizamos enquanto as discussões e questionamentos eram baseados em determinado assunto central. Oportunizar tais momentos, bem como crer na criação advinda dos discentes marca o primeiro passo para que as atitudes comecem a surgir. Germinadas a partir do pensamento e da ação, essas sementes (atitudes) geram e são geradas por mudanças. Esse processo ocorre tendo como base a oportunidade de formular problemas. Quando o discente pratica essas atitudes, ou processos decisórios conscientes, começa a construir e viver sua própria liberdade, caminhando rumo ao tempo inventivo, mudando, se (re)inventando.

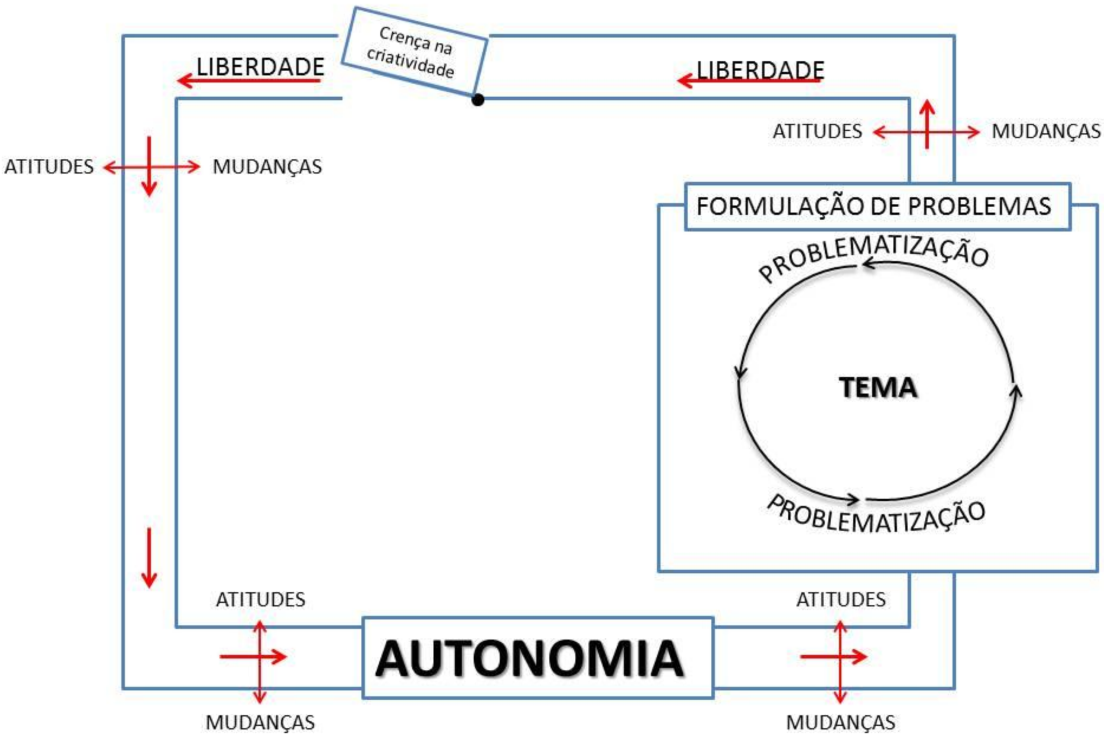

Figura 30: Esquema de autonomia propiciada pela oportunidade de formular problemas em EMAP
Fonte: Próprio autor, 2014

E nesse ciclo inicialmente alimentado pela formulação de problemas, colocamos a liberdade enquanto fluxo que simboliza o movimento, o qual instiga e incentiva que o processo não cesse e que alimenta e é alimentado por mudanças e atitudes. No entanto, há chaves que podem interrompê-lo, como exemplificamos, a crença na criatividade do professor em formação. Se essa crença não se conecta, a libertação não ocorre, pois o fluxo não existirá, tampouco as mudanças e atitudes que são o exercício real dessa liberdade. Ao contrário, se há a conexão da crença na criatividade passa-se o fluxo a entrelaçar nas atitudes e mudanças resultando, no sujeito, a autonomia para que o mesmo continue a formular e problematizar, conscientemente, temas do seu cotidiano. Todavia, o sujeito liberto por ele mesmo, ou seja, por suas atitudes, pode continuar vivendo esse ciclo e a cada vez que isso ocorrer, certamente sua autonomia aumentará, pois mais liberdade o mesmo conquistará.

Este movimento deve ser constante. Percebemos que esse é um processo que poderíamos, de maneira figurada, comparar com a primeira lei de Newton: um corpo que está em repouso, tende a permanecer em repouso, a menos que uma força resultante não nula haja sobre ele, e de fato é isso que nos parece ter ocorrido. EMAP simbolizou a força resultante, que não se anulou, e agiu sobre os discentes, se diferenciando em apenas um aspecto: EMAP não atuou somente sobre, mas também com os estudantes, pois era dinâmica, se renovou a cada encontro, a cada comentário e é nessa perspectiva que completamos com a segunda parte da primeira lei de Newton, que a grosso modo afirma que aquele corpo que está em movimento, tende a permanecer em movimento. No entanto, ao contrário do que afirma a lei, entendemos que a velocidade desse movimento, no caminhar rumo ao tempo inventivo, não é constante, podendo variar, uma vez que o processo é dinâmico, se alimenta de ideias internas e externas, de comentários, de diálogos, de reflexões pessoais, etc.

2.3.2. DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Apesar da preocupação envolvendo a Resolução de Problemas, que notamos nos discursos teóricos nos trabalhos entregues em forma de artigos como síntese do PIPE de cada discente, verificamos em todos eles que a preocupação maior não era de fato prosseguir segundo passos sugeridos por Polya (1995) ou Onuchic(1999).

Em todos os trabalhos encontramos traços da teoria de RP, no entanto, a prática pensada para cada problema não se concentrava em etapas para a sua resolução e sim em descrever a situação, bem como sugerir a solução (como é possível observar na Parte 2 desse capítulo). Nessas sugestões verificamos em vários casos o uso do computador como ferramenta para auxiliar a visualização dos dados, bem como a utilização dos modelos por aqueles que não têm o conhecimento matemático empregado no mesmo (caso da Carol com a planilha eletrônica).

2.3.3. Da formulação de problemas e modelagem matemática

Ao formular um problema, há de se ter em mente um tema, seja ele envolvendo matemática ou qualquer outra disciplina. Sem um tema, não há problema, como podemos observar na dinâmica da modelagem matemática utilizada no ensino, segundo Biembengut e Hein (2013).

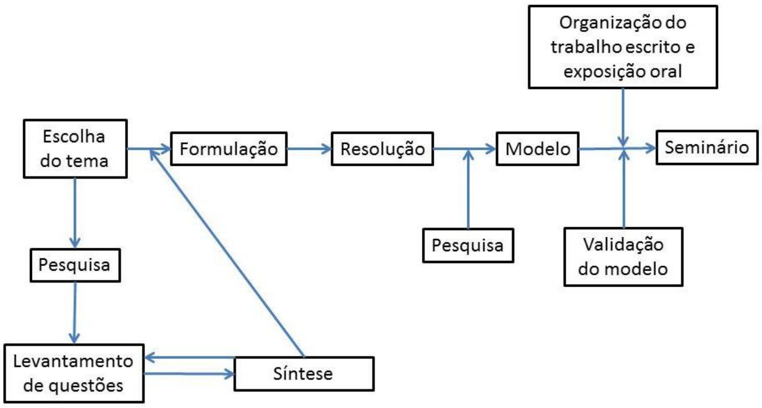

Figura 31: Modelagem na educação
Fonte: BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p. 12

Note que, a formulação ocorre justamente após a escolha do tema, quando pensamos a modelagem matemática na educação. Além disso, na própria teoria sobre formulação de problemas podemos encontrar indícios sobre a importância do tema. Mendonça (1999) quando sugere algumas maneiras para desencadear o processo de formulação, coloca três das quatro sugestões com aspectos que envolvem direta ou indiretamente a escolha de um tema. Como enfatizamos no capítulo de discussões teóricas, a autora em questão enfatiza que pode ser possível flagrar situações de um contexto escolar ou de um contexto mais amplo, convocar os(as) alunos/as para a escolha de temas geradores, partir de um assunto (tema) previamente escolhido, partir de um modelo matemático conhecido. As três primeiras sugestões envolvem diretamente temas para motivar a formulação de problemas e a quarta, em nossa compreensão, também, no entanto o faz de maneira indireta, pois perceba que ao se ter um modelo existe um tema que o cerca. Um modelo de dinâmicas populacionais traz o tema de crescimento populacional, por exemplo. Um modelo para se encontrar as raízes de uma função do segundo grau tem também um tema, que pode ser tanto prático (lucro de uma empresa, por exemplo), quanto teórico (lidar com os "zeros" de uma função).

Além de Mendonça (1999), Brown e Walter (2005) ao colocarem o *level* zero como etapa inicial da Formulação de Problemas, o caracterizam como etapa de escolha de um ponto de partida para se pensar os atributos. Nesse caso, o ponto de partida também pode ser um modelo pronto, no entanto o mesmo está, em nosso entendimento, sempre imerso em um tema, podendo ser de cunho teórico ou prático. Claro que às vezes o pensamento a respeito do problema surge simultaneamente com o tema, no entanto, esse é essencial para que exista a formulação, bem como a modelagem.

Vários dos discentes entrevistados relatam que, não fosse o auxílio e as discussões, do professor e da turma, para a escolha do tema, os trabalhos teriam grandes chances de não existirem, como exemplifica Pitágoras em uma de suas falas:

> eu não tinha uma ideia e o professor jogou essa ideia e eu achei legal, porque eu não ia ter essa ideia, aí teve essa ideia na aula, eu gostei dessa, é relevante e é legal e eu estou envolvido [...] Acho que a parte mais difícil é definir um tema. Enquanto eu não tinha um tema eu fiquei "pressionado". Depois que definiu o tema, metade das dificuldades foram embora. Quando você não tem o tema ali você fica muito solto. (Pitágoras)

Nesse sentido destacamos uma observação relevante que verificamos nessa pesquisa: é importante que no processo de formular o professor auxilie na escolha do tema, sobretudo quando seus alunos não têm essa prática como algo natural em sua formação. Logo, "a atuação do professor, nesse momento, volta-se primordialmente para a utilização de estratégias que facilitem aos alunos a escolha de um assunto abrangente, motivador e sobre o qual seja fácil obter dados ou informações" (BIEMBENGUT; HEIN, 2013, p. 24).

Do tema e da problematização em torno do mesmo surge a formulação do problema e, embora tenhamos percebido na trajetória dos licenciandos durante a elaboração do PIPE (Parte 2) que, tanto em suas buscas teóricas, quanto em suas discussões práticas ou metodológicas, não tenham surgido variados embasamentos na teoria de Formulação de Problemas, há alguns pontos que podemos considerar.

Nessa perspectiva, a formulação problemas, na disciplina EMAP, durante a pesquisa, se manifestou nos discentes a partir do tempo que Silver (1996a) caracteriza como "antes", ou seja, os problemas criados não surgiram durante a resolução de outro, tampouco após a mesma. Todos os nossos entrevistados apresentaram tal característica.

Podemos, ainda, nos referir sobre a "exploração externa" dos fatos, bem como interpretações mais dinâmicas da relação "exatidão versus aproximação" (BROWN; WALTER, 2005).

Exemplificamos essa característica, a partir de uma situação que ocorreu durante as reflexões de Tsuname sobre seu trabalho. Ele desenvolveu o PIPE voltado para a tarifa de ônibus frente ao salário mínimo. No início dos diálogos durante as aulas no laboratório a ideia foi se moldando, no entanto, Tsuname parecia apreensivo e incomodado em não conseguir olhar para a realidade e "tomar" dela todas as variáveis para aquele problema. Tentamos, durante dias, argumentar a respeito da naturalidade de não se conseguir modelar a realidade e suas dinâmicas em seus mínimos detalhes, no entanto o jovem parecia irredutível, até que plotamos no GeoGebra o gráfico da função $f(x) = x^2$, e ele reconheceu de pronto a curva como uma parábola. Utilizamos a ferramenta *zoom* para ampliar a curva, a ponto de que quando se olhava para o monitor do computador, via-se apenas uma reta, ou algo muito próximo disso. Nesse momento ele foi questionado sobre o quão exato ele conseguiria ser ao visualizar as características de uma situação na realidade e isso lhe causou um conflito interno, que consequentemente, tornou-o mais flexível ao perceber que, para determinado fragmento do domínio daquela função, um segmento de reta pode ser aplicado e ter semelhança com a curva original, tornando-se uma aproximação a ser considerada frente a uma determinada situação.

Ainda que outros traços da teoria de Formulação de Problemas não tenham sido diretamente evidenciados nos Projetos Integrados de Prática Educativa dos entrevistados, percebemos que a oportunidade de criar os problemas colabora para evitar o erro do problema pronto (MENDONÇA, 1993), de modo que, ao invés de trabalhar com as relações entre os dados e a pergunta já postas no problema pronto, o discente tem que criá-las. Para Tsuname,

> Criar um problema parte de você, não tem nada que vai te ensinar a criar um problema, vem lá do eu. (Tsuname)

Com uma visão ampla Mendonça destaca:

> [...] temos que transformar a Educação Matemática em um ambiente educativo que tem espaço para a observação, a experimentação e o diálogo – não só o **diálogo dirigido para a formulação de problemas** que envolvem as propriedades do espaço e as quantificações, mas o **diálogo** que leva em conta os aspectos **sociais, afetivos** e **emocionais** em torno dessas questões (MENDONÇA, 1993, p. 274).

Dessa forma, EMAP pôde contribuir para a formação de um professor que viva mais o diálogo e que enfatize os aspectos sociais, afetivos e emocionais, uma vez que ele mesmo foi sujeito de sua criação e, portanto, pôde perpassar por todo e qualquer pensamento que fosse oriundo de sua imaginação, incluindo emoções, críticas à economia, interpretações financeiras, dentre outros que pudemos notar nas próprias temáticas dos Projetos Integrados de Prática Educativa.

Em verdade, outro aspecto consistente é verificado na prática em que essa pesquisa esteve imersa. Durante o processo de elaboração dos trabalhos, os discentes começaram a percorrer caminhos que perpassavam por uma realidade vivida por eles ou por outros, sendo que, em alguns casos, é possível constatar a criação de um modelo matemático. Dentre esses casos, uma parte concebe todo o processo de Modelagem Matemática e a outra não por completo (Quadro 25).

Quadro 25: Processo de Modelagem Matemática em EMAP

(continua)

Formulação	**Formulação + Resolução**	**Formulação + Resolução + Aplicação + Validação**
MODELAGEM MATEMÁTICA		
Forma incompleta		**Forma completa**
Problema	**Problema + Modelo**	**Problema + Modelo + Aplicação + Validação**[31]
Ester – Suco e Refrigerante	Stallone – Exposição de fotografias	Ani – Caronas Universitárias
Luluzinha – Despesas com alimentos	Tsuname – Tarifa de ônibus e o salário mínimo	Carol – Modelo da República

[31] Podemos observar essa características na síntese que elaboramos no tópico 1.6

Quadro 25 Processo de Modelagem Matemática em EMAP

(conclusão)

Forma incompleta		**Forma completa**
Problema	**Problema + Modelo**	**Problema + Modelo + Aplicação + Validação**
Pascoalina – Dilema entre transporte público e particular		
Pitágoras – Canecas do Restaurante Universitário		

Fonte: Próprio autor, 2014

Ao observarmos os trabalhos de Pitágoras, Ester, Luluzinha e Pascoalina é possível verificar que os mesmos criaram os problemas e apesar de alguns utilizarem gráficos e quadros, não observamos o surgimento de um Modelo Matemático para a solução do problema.

Tsuname obteve um modelo para o “impacto” do preço das passagens de ônibus frente ao salário mínimo. No entanto, apesar de apresentar uma proposta para uma aula envolvendo as discussões, ele não tentou aplicar o modelo criado e, portanto, não foi possível realizar a aplicação e validação. Disso, concluímos que, o modelo foi criado, no entanto, o processo de modelagem como um todo não se deu por completo.

Ani criou o problema, elaborou o modelo e constatou que para o seu caso o preço cobrado estava sendo justo, portanto consideramos que a mesma concluiu o processo de modelagem, pois concretizou a aplicação e verificação (validação) do mesmo. Carol e seu “modelo da república” também perpassou todas as etapas do processo de modelagem, inclusive a validação do modelo que se deu em duas etapas (antes de considerar os dias em que cada moradora permanecia na república e posteriormente).

Por fim, Stallone, criou e generalizou seu modelo para a exposição de fotografias de seu amigo, no entanto, o mesmo não pôde confirmar se foi utilizado na prática, logo não poderemos ser precisos a respeito da completude do processo de modelagem.

Percebemos, então, que quando EMAP foi pensada e oferecida aos discentes com o propósito que oportunizou que os mesmos formulassem problemas surgiu, ainda que sem um planejamento prévio, um processo de Modelagem Matemática que se deu de forma (in)completa. Se apresentar incompleta não é um problema para o ensinar e aprender matemática, uma vez que a mesma é aprendida,

> desde a formulação das hipóteses, o diálogo torna-se fundamental; podemos arriscar afirmar que, em Modelagem, não temos escolha, devemos aprender a fazê-la por meio de negociação, do convívio e da construção coletiva do conhecimento (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 127).

Logo, se devemos aprendê-la, entendemos que aqueles que não concluíram todo o processo de Modelagem estão nessa caminhada, aprendendo a fazê-la. Ainda para os autores, em se tratando do diálogo e de aprender sobre e como fazer modelagem matemática a partir do mesmo, fica entendido que, "nessa perspectiva, ela pode contribuir para a leitura do mundo em seus muitos e diversos aspectos" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 127). Nesse sentido, Freire (2011a) ressalta que "Não há nada que mais contradiga e comprometa a emersão popular do que uma educação que não jogue o educando às experiências do debate e da análise dos problemas e que não lhe propicie condições de verdadeira participação" (FREIRE, 2011a, p.123).

Com este espírito de emersão e libertação, nesse caso do licenciando em matemática, é que entendemos que a formulação de problemas, que por sua vez criou oportunidades de vivenciar a modelagem matemática, é a catalisadora do caminhar para o "tempo inventivo", bem como para a autonomia. Ao compreendermos a atitude enquanto a vivência da própria liberdade conquistada e, a autonomia o resultado dessa liberdade do ser humano podemos, a partir dessa investigação, colocar a formulação de problemas como uma atitude que permite se iniciar a modelagem. Essa, por sua vez, se evidencia de modo semelhante à autonomia, uma vez que ao aprender a fazê-la, quem vai aprendendo vai refletindo, problematizando, criando modelos, resolvendo os problemas, verificando, experimentando e consequentemente se consolidando enquanto sujeito cada vez mais liberto e, mais autônomo.

É importante ver a autonomia enquanto condição de libertação, e também enquanto processo contínuo, pois não podemos nos confundir e dizer que somente aqueles que fizeram modelagem de forma completa foram os que vivenciaram a autonomia. Um contra exemplo é o de Tsuname que viveu a prática docente pautada no trabalho que desenvolveu no PIPE. Tsuname conquistou mais uma parcela de liberdade por meio de suas atitudes na busca pela oportunidade de discutir em sala de aula o que havia pensado, portanto caminhou e conquistou mais autonomia do que tinha antes. Os outros discentes, mesmo que não tenham vivenciado a prática docente em torno de seus Projetos, formularam, criaram problemas e alguns também os modelos. Esses também conquistaram mais da liberdade e, nesse sentido, também se tornaram mais autônomos a partir da oportunidade de formular os problemas.

Sendo a formulação de problemas essa força instigadora, EMAP pode ser assim entendida enquanto o momento, no curso, para que se inicie ou se fortaleça de vez a ação criadora da atitude de formular problemas e até de praticar a modelagem matemática. A esse respeito Carol enfatiza que:

> A partir de EMAP eu consegui, eu não sei, ter uma maior facilidade, não sei se foi pela prática mesmo de conseguir, de pegar alguns problemas que a gente via e tentar resolver, mas **a relação da disciplina com o problema, com a criatividade que tem de pegar um problema da vida real e tentar transformar ele num problema matemático e depois tentar criar um modelo em cima daquilo e depois tentar resolver aquele seu problema real, aquilo me abriu um leque para outras questões**. Não só a questão da república, não só questão individual, porque aquilo no momento era individual pra mim, mas uma questão mais geral mesmo, tanto que depois daquela disciplina foram mais três ou quatro problemas que eu tentei modelar. (Carol, grifo nosso)

Nessa perspectiva, vislumbramos EMAP enquanto uma disciplina que, durante a pesquisa oportunizou uma vivência da teoria e da prática. Não de uma teoria pré-moldada, engessada e que fosse inserida na mente dos discentes, mas, na realidade de uma teoria que pode ser vivida e que gera mudanças, gera continuidade, tal como para Carol que exemplifica com mais três ou quatro problemas criados após a disciplina. Sobre esse tipo de teoria, entendemos que Freire (2011a) corrobora:

> De teoria, na verdade, precisamos nós. De teoria que implica uma inserção na realidade, num contato analítico com o existente, para comprová-lo, para vivê-lo e vivê-lo plenamente, praticamente. Nesse sentido é que teorizar é contemplar. Não no sentido distorcido que lhe damos, de oposição à realidade. De abstração. Nossa educação não é teórica porque lhe falta esse gosto da comprovação, da invenção, da pesquisa. Ela é verbosa. Palavresca. É “sonora”. É “assistencializadora”. Não comunica. Faz comunicados, coisas diferentes. (FREIRE, 2011a, 123)

Não faltou a oportunidade da comprovação, tampouco da invenção. Nossa teoria foi colocada de forma inacabada, não no sentido de imperfeição ou de descaso, mas afirmando nossa crença na criatividade do docente, tornando essa o incremento daquela, ou seja, permitindo a dinâmica de (re)inventar e ir aos poucos encorpando nossa teoria, a cada criação. Embora tenhamos apresentado um breve planejamento do que esperávamos para o PIPE, entendemos que nossa teoria comunicou, ao invés de fazer comunicados, exatamente pela sustentação na iniciativa à mudança e a verificação que essa pôde se enraizar, como uma teoria tal qual aquela que acabamos de defender:

> antes, fazer um projeto no estágio, vamos supor, aí vou fazer um projeto sobre ângulos, aí você ia falar que ângulo é formado por uma semirreta, e tem um ponto ali, tem um ponto cá, etc. Agora hoje não, **se eu fosse trabalhar com ângulo eu ia buscar lá na natureza, no ambiente, para ensinar o aluno o que é o ângulo, fazer ele ir lá experimentar o que é o ângulo**, para depois eu vim falar, 'ah tem um ponto aqui'... [e sintetiza] **meu modo de trabalhar agora seria buscar atividade, não ficar somente escrevendo no quadro e resolvendo exercícios.** (Stallone, grifos nossos)

E, portanto temos esse conjunto formado pelo diálogo, pela crença no que o aluno já conhece, pelo respeito mútuo, pela força de mudar, pela atitude de criar, de formular, de exclamar! E entender o aberto e inacabado enquanto algo que sempre pode ser aprimorado foi de fato um belo caminho.

Por todas as características já citadas, complementamos que a prática com relação à formulação de problemas tornou possível que os pensamentos sobre os quais o PIPE foi alicerçado fossem evidenciados. Retomamos inclusive os encaminhamentos da resolução nº 03/2005 do Conselho Universitário, com relação ao Projeto Integrado de Prática Educativa, outrora citado:

> [...] não se trata de formar simples repetidores de informações, conteúdos ou técnicas adquiridas no ambiente intelectualizado de uma Universidade. Trata-se de preparar um profissional para realizar a crítica, a reflexão e a proposição de um estilo de educação que, de fato, promova a aprendizagem, o acesso ao patrimônio cultural da humanidade e o desenvolvimento de sujeitos (ou de subjetividades) e da sociedade como um todo (UFU, 2005, p.3).

Entendemos que, a análise de dados permite-nos concluir que o intuito do documento, bem como das reflexões nele encaminhadas, se fizeram presentes a partir da vivência da formulação de problemas, na disciplina EMAP.

Como caminhada rumo a tempos diferenciados, mais lapidados e amadurecidos é que encerramos as considerações acerca da libertação criativa do professor em formação, verificando ser possível e viável que os mesmos criem, formulem e reinventem suas práticas enquanto educadores, enquanto sujeitos críticos e mais conscientes de que têm em suas mãos e em sua imaginação o privilégio de fazer diferente para si próprio e com aqueles que os cercam.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já escrevi, desde criança tenho apreço pelo ato de criar e durante as experiências em minha vida coloquei essa caraterística em evidência. No entanto, havia frustação quando o assunto era a escola, sentia-me, de certa forma, atado, sem grandes oportunidades de criação. Enquanto discente do Ensino Superior, cursando Licenciatura em Matemática, essa inquietude continuou. Quando vivenciei a disciplina Ensino da Matemática Através de Problemas notei práticas que contemplavam e enfatizavam, sobretudo, sua resolução. Essa experiência se agregou àquelas outrora vividas e motivou essa pesquisa.

As inquietações convergiram para a compreensão de "**quais os sentidos e significados da disciplina EMAP para os estudantes da Licenciatura em Matemática oferecida em torno da oportunidade de formular problemas?"**. O processo elaborado para produzir a resposta a esse questionamento foi disposto da seguinte maneira:

Quadro 26: Disposição da pesquisa

(continua)

INTRODUÇÃO	Minha trajetória, meu saber	Ser professor me parecia um bom objetivo
		Tornar-me professor é ótimo
	O contexto da pesquisa	O local
		Quando a pesquisa foi realizada
		Caráter de inclusão e exclusão
	A metodologia da pesquisa	A construção dos dados

Quadro 26: Disposição da pesquisa

(conclusão)

<table>
<tr><td rowspan="9">CAPÍTULO I</td><td>Problema</td><td colspan="2">Problemas e suas categorias na matemática</td></tr>
<tr><td>Problematização</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Resolução de problemas</td><td colspan="2">A RP no ensino: pontos destacados ao longo da história</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algumas formas de entender e proceder com a RP na Educação Matemática</td></tr>
<tr><td>Formulação de problemas</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Modelagem Matemática</td><td rowspan="2">Modelagem e Modelo: Entendendo e Refletindo</td><td>Modelagem</td></tr>
<tr><td>Modelo</td></tr>
<tr><td colspan="2">A modelagem e a formação de professores</td></tr>
<tr><td>RP, FP e Modelagem Matemática: três teorias e suas conexões</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="12">CAPÍTULO II</td><td>Parte 1 – Organização e desenvolvimento da disciplina EMAP</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="8">Parte 2 – Trajetória dos licenciandos na elaboração do PIPE na disciplina EMAP</td><td colspan="2">Carol</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pitágoras</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tsuname</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ani</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ester</td></tr>
<tr><td colspan="2">Luluzinha</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pascoalina</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stallone</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Parte 3 – Análise dos dados: Libertação dos futuros professores</td><td colspan="2">Do problema e da problematização</td></tr>
<tr><td colspan="2">Da resolução de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Da formulação de problemas e modelagem matemática</td></tr>
<tr><td colspan="4">CONSIDERAÇÕES FINAIS</td></tr>
</table>

Fonte: Próprio autor, 2014

Desde o início dessa pesquisa acreditávamos nas potencialidades criadoras dos discentes, bem como, nos conhecimentos dos mesmos. Acompanhamos durante dois semestres a disciplina EMAP oferecida pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Em parceria com o docente que ministrava as aulas, e contando com a compreensão e boa fé dos discentes, pudemos dialogar e entrevistar oito desses estudantes, que se mostraram interessados em compartilhar suas opiniões e experiências.

O foco da pesquisa foi o Projeto Integrado de Prática Educativa desenvolvido pelos estudantes em EMAP. O objetivo foi perceber, na trajetória daqueles alunos, o resultado criador que a oportunidade de formular problemas poderia lhes causar.

Para tanto, a disciplina em evidência foi pensada em torno da oportunidade de formular problemas, sendo que, no primeiro semestre da pesquisa, EMAP foi subdividida em leitura, discussão de textos e o trabalho dos discentes com o PIPE. O segundo semestre foi organizado em torno de 11 atividades, das quais a décima consistia no Projeto referido. Além disso, a discussão de textos ainda foi muito presente. Essa nova organização trouxe mais estabilidade para a disciplina, uma vez que as demais atividades, sobretudo as anteriores ao PIPE, foram pautadas na resolução de problemas, na criatividade e também em aspectos teóricos. No entanto, percebemos que os trabalhos produzidos foram relevantes, tanto no primeiro quanto no segundo semestres. Essa conclusão se deve ao olhar dessa pesquisa no que se refere ao PIPE, o qual foi sistematizado de maneira igual em ambos os semestres, sobretudo no que diz respeito aos momentos dedicados a debates e reflexões.

Dos oito entrevistados, três (Carol, Pitágoras e Tsuname) cursaram EMAP no primeiro semestre dessa pesquisa e os demais (Ani, Ester, Luluzinha, Pascoalina e Stallone), no segundo. Alguns dos trabalhos, que foram entregues ao professor da disciplina em forma de artigo acadêmico, apresentaram traços de Modelagem Matemática (problema ou problema + modelo), outros em nosso entendimento percorreram todo o processo (problema + modelo + aplicação + validação). Daí, dividimos os resultados em duas categorias, sendo uma para aqueles que fizeram a modelagem de forma incompleta (apresentaram um problema ou um modelo matemático) e outra para os que fizeram a modelagem matemática de forma completa.

Os discentes que apresentaram a modelagem de forma incompleta, não superando a fase do problema foram: Pitágoras com seu trabalho sobre as canecas do Restaurante Universitário, Ester e a discussão sobre suco e refrigerante, Luluzinha e as despesas com alimentação, Pascoalina com seu dilema entre utilizar o transporte público ou particular para ir até a universidade.

Outro agrupamento, que teve por objetivo reunir aqueles que apresentaram além de um problema formulado um modelo matemático para o mesmo, mas, que não o aplicaram e validaram, foi constituído por: Stallone com a exposição de fotografias, Tsuname com a relação entre o salário mínimo e a tarifa de ônibus.

Encerrando, elencamos os trabalhos que apresentavam todos os traços do processo de Modelagem Matemática, tal como problema, modelo, aplicação e validação. Nesse último agrupamento encontram-se os trabalhos de Ani que discute as caronas universitárias e, também, Carol com o estudo a respeito de despesas com a república.

Quadro 27: Processo de modelagem matemática em EMAP

Formulação	**Formulação + Resolução**	**Formulação + Resolução + Aplicação + Validação**
MODELAGEM MATEMÁTICA		
Forma incompleta		**Forma completa**
Problema	**Problema + Modelo**	**Problema + Modelo + Aplicação + Validação**
Ester – Suco e Refrigerante	Stallone – Exposição de fotografias	Ani – Caronas Universitárias
Luluzinha – Despesas com alimentos	Tsuname – Tarifa de ônibus e o salário mínimo	Carol – Modelo da República
Pascoalina – Dilema entre transporte público e particular		
Pitágoras – Canecas do Restaurante Universitário		

Fonte: Próprio autor, 2014

A divisão em categorias não tira a qualidade de nenhum dos trabalhos. Entendemos que todos são de grande contribuição para a Educação Matemática e por isso dedicamos atenção especial para a elaboração da parte 2 do capítulo 2 dessa pesquisa, no qual detalhamos as características de cada PIPE desenvolvido. É importante ressaltar ainda que, dentre os oito Projetos, quatro foram publicados em eventos regionais e nacionais. Um deles, no caso o do modelo da república, serviu de inspiração para a elaboração do trabalho de conclusão de curso de Carol.

Apesar dos belos trabalhos criados, verificamos a existência de dificuldades iniciais no que diz respeito à escolha dos temas para os projetos. Vários dos entrevistados afirmam terem tido dificuldades naquele momento, uma vez que situações assim não haviam sido vivenciadas por eles até então. Constatamos nesse ponto a importância do papel do professor formador enquanto sujeito que dialoga, instiga e que, inclusive, sugere caminhos. Embora não tenhamos a oportunidade de acompanhar os discentes em outros momentos, acreditamos que em oportunidades futuras essa dificuldade não será tão intensa quanto em EMAP. Como relata Ani:

> Nessa parte de pensar num problema agora, você consegue pensar mais amplo. (Ani)

E pensando "mais amplo" podemos discutir problemas daqueles que precisam do transporte público, expor fotografias ou fazer compras para casa. Discutir os problemas formulados é uma das características da autonomia e um exercício de liberdade que se expressa, ora de forma subjetiva, com os diálogos em grupo, com preocupações daquelas de coçar a cabeça, ora de forma objetiva, por meio de cálculos, quadros, com fórmulas e generalizações.

Daí a resposta para a questão criada a partir das minhas inquietações e que motivaram essa pesquisa pode ser sintetizada em uma só palavra: libertação. Libertação que é a vivência das atitudes. Atitude que se originou da formulação, que por sua vez resultou na Modelagem Matemática e, sobretudo, de acreditar que os alunos possuem um grande saber, que outrora permanecia oculto ou ressabiado, envergonhado de se mostrar, mas que ao mesmo tempo é amplo, poderoso o suficiente para causar mudanças, para motivar a elaboração de artigos acadêmicos e apresentação dos mesmos em eventos, para criar um trabalho de conclusão de curso e inspirar a pós-graduação. E esse processo que expomos na figura 32 expressa a trajetória dessa pesquisa no que diz respeito às observações e conclusões do processo de libertação vivenciado em EMAP.

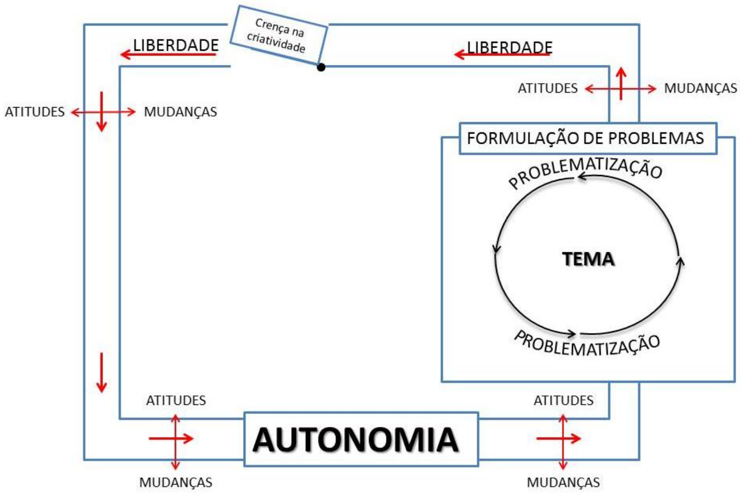

Figura 32: Esquema de autonomia propiciada pela oportunidade de formular problemas em EMAP
Fonte: Próprio autor, 2014

Nas aspirações sobre a liberdade compreendemos que a autonomia também é representada pela ponta da seta do quadro 27, quando o sujeito se liberta "caminhando sobre a seta" vai conquistando e vivendo essa liberdade ao ponto que pode vivenciar também a autonomia, no entanto, como entendemos autonomia enquanto a condição de um povo ou pessoa que tenha se libertado, pensamos que o sujeito na ponta da seta tem maior autonomia, contudo aquele que caminha sobre a seta também vivencia uma intensidade diferente da mesma, uma vez que está se libertando.

Verificamos que a capacidade criadora pode ser ainda mais potencializada quando se formula. Para um professor, a formulação pode ser tão interessante quanto a resolução, partindo do princípio de não se ter um "enunciado" ou estrutura já pronta, por mais criativa ou contextualizada que a mesma seja. O educador se liberta quando não depende, por exemplo, do livro didático para a totalidade de sua aula, sobretudo no que diz respeito às discussões a respeito da prática de seus educandos. A liberdade da qual falamos se encontra quando o professor não se vê mais sempre dependente de conseguir estratégias para amortizar a "distância" entre o livro ou demais mídias e o que os seus alunos entendem como problema. Ao invés disso existem as atitudes de formular, as ideias fluem, são compartilhadas e dialogadas. E, daí podemos afirmar que, nesse sentido,

> a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios (BRASIL, 1998, p. 27).

Ao oportunizar a formulação de problemas, verificamos que um dos resultados foi a vivência de parte ou de todo o processo de Modelagem Matemática e acreditamos que esse é um grande exemplo do experimentar – naquele caso por parte dos professores em formação – da criatividade, iniciativa pessoal e autonomia, tornando-os, como vimos em suas falas, mais confiantes em sua capacidade para lidarem com os desafios.

Portanto, em síntese, essa pesquisa mostra que as possibilidades de ocorrer a Modelagem Matemática podem ser potencializadas quando se propicia a formulação de problemas, que há de se ter um professor que seja parceiro de seus alunos durante essa caminhada, sobretudo, quando os mesmos nunca tiveram tal oportunidade. Além disso, o ato de formular abre caminhos para a libertação, por meio de atitudes, respeitando o conhecimento do discente, contribuindo para que o mesmo pratique a ação, a imaginação e se liberte de estruturas pré-concebidas e que não contemplam todas as possíveis realidades de seus futuros alunos.

Almejamos que essa criatividade se adentre no sistema educacional, que se encontra em constante mudança, juntamente aos discentes entrevistados. Nesse sentido de melhorar, embora algumas realidades educacionais permaneçam intactas há anos, diversos esforços têm sido realizados com o intuito de modificar os espaços e formas de se ensinar e aprender. Esperamos que essa pesquisa faça parte dessas mudanças e possa contribuir para a formação de futuros professores e, consequentemente, de seus respectivos alunos.

Contudo, é também compreensível que se encontrem dificuldades. Embora tenhamos verificado o processo de libertação dos professores, ou o início dele, motivado pela formulação de problemas, entendemos que esses momentos por enquanto estão inconclusos, uma vez que é importante persistir com esse trabalho, tanto na disciplina pesquisada, quanto em outras, para que isso de fato passe a ser parte do pensamento dos discentes do curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, a realidade da escola pode impactar tornando complicada a vivência dessa liberdade se a mesma não possuir bases sólidas para que se possa ter a flexibilidade que o sistema e o bom senso do educador exigem.

Antes de encerrarmos, é importante ressaltar que, por todas as características já citadas, a prática com relação à formulação de problemas tornou possível que os pensamentos sobre os quais o PIPE foi alicerçado fossem evidenciados. Retomamos inclusive os encaminhamentos da resolução nº 03/2005 do Conselho Universitário, com relação ao Projeto Integrado de Prática Educativa, outrora citado:

> [...] não se trata de formar simples repetidores de informações, conteúdos ou técnicas adquiridas no ambiente intelectualizado de uma Universidade. Trata-se de preparar um profissional para realizar a crítica, a reflexão e a proposição de um estilo de educação que, de fato, promova a aprendizagem, o acesso ao patrimônio cultural da humanidade e o desenvolvimento de sujeitos (ou de subjetividades) e da sociedade como um todo (UFU, 2005, p.3).

Entendemos que a análise de dados permite-nos concluir que o intuito do documento, bem como das reflexões nele encaminhadas, se fizeram presentes a partir da vivência da formulação de problemas, na disciplina EMAP.

Esperamos que, a prática de criar, de formular persista, sobretudo nos dois estágios supervisionados presentes no curso após o período em que EMAP se encontra. Nesse sentido, contribui-se de maneira significativa para que o processo cíclico de incentivar e ser incentivado pelo caminhar rumo ao tempo inventivo continue. E dessa forma o pensar crítico e criativo possa também se libertar das disciplinas e viver na prática e nos pensamentos dos futuros professores de matemática que experimentaram a prática da formulação.

Deixamos em aberto para pesquisas futuras os aspectos concernentes à prática de formular problemas enquanto docente atuante na rede pública ou particular, bem como a possibilidade de que essa prática se efetive de tal forma no curso que ela se desprenda de uma disciplina e abranja uma quantidade maior de experiências, que motive e seja motivada por uma consciência coletiva, superando diferenças de pensamentos e de fato se enraizando nos planejamentos e práticas das disciplinas. Ainda para o futuro, esperamos ser possível estudar a superação do tempo inventivo, para algo que ultrapasse o inventar e na vivência cada vez maior da liberdade adquirida se verifique também em tempos aplicativos. Pensamos ser importante observar a autonomia crescendo em cada um desses indivíduos que experimentou a oportunidade de formular problemas a cada ciclo vivido. No entanto, por ora discursar sobre esse novo tempo, bem como sobre o aumento ou maior consolidação da autonomia seria especulação, uma vez que sabemos que o olhar a respeito das aplicações vivenciadas na liberdade e autonomia conquistada pelos indivíduos que tiveram suas práticas pautadas em torno da possibilidade de formular problemas, exige tempo para o acompanhamento, além de novas discussões teóricas.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, Mário Lucio. **A Resolução de Problemas na formação dos professores:** Uma abordagem com ênfase no uso da tecnologia. 2011. 29 f. Monografia (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.

ALVES, Deive Barbosa. **O Processo de Autoria na Cultura Digital:** A Perspectiva dos Licenciandos em Matemática. 2012. 171 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.

ANDRÉ, Marli Eliza Damazo Afonso de. **Etnografia da Prática Escolar.** 15. ed. Campinas: Papirus, 2008.

ARISTÓTELES. Livro I. In: **Aristóteles Metafísica.** Porto Alegre: Globo S.A., 1969. P 39-40.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2009. 389 p.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013. 127 p.

BRASIL. MINISTÈRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Parâmetros nacionais de matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: Brasília (DF), 1998.

______ ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (volume 2)

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. **Percepções de Professores Sobre Repercussões de suas Experiências com Modelagem Matemática.** 2012. 132 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** Teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.

DUARTE, Jorge; BARROS, Antônio. **Métodos e técnicas de pesquisa em comunicação** -2.ed., 2. reimpr. – São Paulo: Atlas, 2008.

FAMAT. Universidade Federal de Uberlândia. **Ficha de disciplina: O Ensino de Matemática Através de Problemas**. Uberlândia, 2005a. 3 p. Disponível em:

<http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/MA_FD_06_Lic_EMAP.pdf > Acessado em: 19 de agosto de 2013>

______. Universidade Federal de Uberlândia. **Projeto Pedagógico do Curso de Matemática**. Uberlândia, 2005b. 50 p. Disponível em: <http://www.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/MA_ProjetoPedagogico.pdf > Acessado em: 19 de agosto de 2013

FREIRE, Paulo. **Educação como Prática da Liberdade.** 14. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011a. 189 p.

______. **Pedagogia da Autonomia:** Saberes Necessários à Prática Educativa**.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011b. 143 p.

______. **Pedagogia do Oprimido.** 14. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1983. 218 p.

MENDONÇA, Maria do Carmo Domite. **Problematização:** Um caminho a ser percorrido em Educação Matemática. 1993. 307 f. Tese (Doutorado) - Departamento de Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

______. Resolução de Problemas Pede (Re)Formulação. In: ABRANTES, Paulo et al (Org.). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo.** Lisboa: Grupo "Matemática Para Todos - Investigações na Sala de Aula" (CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1999. p. 15-33.

MEYER, João Frederico da Costa de A.; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula Dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 142 p.

MOREIRA, M. A. 2002. **Investigación en Educación en Ciencias:** Métodos Cualitativos, Texto de Apoyo nº 14, Programa Internacional de Doctorado en Ensenãnza de las Ciencias, Universidad de Burgos, España. UFRGS, Porto Alegre, Brasil. Disponível em < http://www.if.ufrgs.br/~moreira/metodoscualitativos.pdf >. Acessado em: 29 de outubro de 2012.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **Ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas**. In: Pesquisa em educação matemática**:** concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas:** caminhos, avanços e novas perspectivas. In: BOLEMA. Rio Claro (SP): UNESP, v. 25, n. 41, dez. 2011. p. 73-98.

PÁDUA, Elisabete Matallo Marchesini de. **Metodologia da Pesquisa**: Abordagem teórico-prática. 10ª Ed. Ver. E atual. Campinas-SP: Papirus, 2004. (Coleção magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto metodológico matemático. [Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo]. – 2 reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

REALE, Giovanni; ANTISERI, Dario. **História da Filosofia:** filosofia pagã antiga**.** São Paulo: Paulus, 2003. 385 p.

REY, Fernando González. **Pesquisa Qualitativa e Subjetividade:** os processos de construção da informação. [Tradução Marcel Aristides Ferrada Silva]. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

SARMENTO, Manuel Jacinto. **O Estudo de caso Etnográfico em Educação**. In: ZAGO, N. CARVALHO, M. P. VILELA, R. A. T. (Orgs). Itinerários de Pesquisa: Perspectivas qualitativas em Sociologia da Educação., Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

SAVIANI, Dermeval. **A Filosofia na Formação do Educador**. In: SAVIANI, Dermeval. **Educação:** do senso comum à consciência filosófica. 17. ed. Campinas: Autores Associados, 2007. Cap. 1, p. 11-29.

SILVA, Alessandra Cristina da. **Formação de Professores em Modelagem Matemática:** Trabalhos da V CNMEM. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais X ENEM.** Salvador: SBEM, 2010. p. 1 - 8. CD-ROM.

______ . **Possibilidade e Limites Vivenciados por uma Professora em sua Primeira Experiência com Modelagem na Educação Matemática.** 2012. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

SILVER, Edward A. et al. **Posing mathematical problems in a complex task environment:** An exploratory study. In: Journal for Research in Mathematics Education, 27 (3), 1996a. p. 293-309.

______. Acerca da Formulação de Problemas. In: ABRANTES, Paulo; LEAL, Leonor Cunha; PONTE, João Pedro da (Org.). **Investigar para aprender matemática (textos selecionados).** Lisboa: Grupo "matemática Para Todos - Investigações na Sala de Aula" (CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1996b. p. 139-162.

SOARES, Flávia dos Santos; DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. **Ensino da matemática no século XX –** da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. In: Horizontes. Bragança Paulista: EDUSF, v. 22, n. 1, Jan./Jul. 2004. p. 7-15.

SOUZA JÚNIOR, Arlindo José de. **Trabalho Coletivo na Universidade: Trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral**. São Paulo: Campinas, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade.** São Paulo: Cortez, 2007.

UFU. Conselho Universitário. **Resolução nº 03/2005**: Aprova o Projeto Institucional de Formação e Desenvolvimento do Profissional da Educação. Disponível em: <http://www.reitoria.ufu.br/Resolucoes/ataCONSUN-2005-3.pdf> Acessado em: 19 de agosto de 2013>

ZATTI, Vicente. Capítulo III: A heteronomia a que Paulo Freire se opõe. In: ZATTI, Vicente. **Autonomia e educação em Immanuel Kant e Paulo Freire.** Porto Alegre: Edipucrs, 2007. Cap. 3. p. 38-52. Disponível em:

<http://www.pucrs.br/edipucrs/online/autonomiaeeducacao.pdf>. Acesso em: 18 de fevereiro de 2014.

______. Capítulo IV: Educação para a Autonomia em Paulo Freire. In: ZATTI, Vicente. **Autonomia e educação em Immanuel Kant e Paulo Freire.** Porto Alegre: Edipucrs, 2007. Cap. 4. p. 53-63. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/online/autonomiaeeducacao.pdf>. Acesso em: 18 de fevereiro de 2014.

ANEXOS

ANEXO 1 – QUESTIONÁRIO

O questionário a seguir se refere à disciplina de EMAP, mais especificamente sobre o PIPE. Contamos com a sua colaboração para que possamos contribuir juntos para o aprimoramento da disciplina e para a Educação Matemática de maneira geral.

1 - Qual seu nome?

2 – Por qual apelido prefere ser chamado?

3 – Qual o ano e o semestre que cursou a disciplina?

4 – Qual o título da sua produção final do PIPE?

5 – Resuma em um parágrafo sua produção final do PIPE.

6 – Seu envolvimento na produção do PIPE em EMAP foi de:

( ) 100%

( ) Mais de 95%

( ) Entre 90% e 95%

( ) Entre 85% e 90%

( ) Entre 75% e 85%

( ) Entre 60% e 75%

( ) Entre 50% e 60%

( ) Entre 30% e 50%

( ) Menor que 30%

( ) Outro

7 – Segundo sua própria avaliação, qual foi a qualidade da produção do seu trabalho de PIPE em EMAP?

( ) Excelente

( ) Muito bom

( ) Bom

( ) Regular

( ) Ruim

8 – Segundo sua opinião, qual a importância ou relevância do tema do PIPE em EMAP?

( ) Muito relevante, com boas contribuições.

( ) Relevante, com alguns tópicos com abordagens clássicas.

( ) O tema, e por consequência o trabalho, foram abordados de maneira totalmente clássica, apresentando grande importância, mas, no entanto, sem grandes mudanças na forma de ver e abordar a matemática.

( ) Irrelevante, sem grande importância.

9 – Considerando sua própria avaliação, a organização dos conteúdos tratados no seu trabalho do PIPE, pode ser considerada como:

( ) Excelente.

( ) Muito boa organização.

( ) Apesar de ter ficado organizado, acredito que pudesse ter ficado melhor.

( ) Ruim.

10 – Com suas reflexões de hoje, após ter concluído a disciplina, como caracterizaria a criatividade da abordagem do trabalho?

( ) Excelente, a abordagem do trabalho foi muito criativa.

( ) Muito boa, mas percebo que poderia ter sido muito mais criativo(a).

( ) Boa, não avalio o trabalho como criativo.

( ) Ruim.

11 – Quanto à originalidade da proposta, você acredita que:

( ) Foi excelente. A proposta é totalmente original e inovadora.

( ) Muito boa. A proposta é consistente e não encontrei nenhuma pesquisa a respeito.

( ) Boa. Apesar de haverem algumas pesquisas a respeito, acredito que a forma como abordei o tema fez diferença.

( ) Ruim. A ideia já foi muito usada e aparece em diversos trabalhos e pesquisas sobre o tema, bem como em atividades do cotidiano de vários professores de matemática.

12 – Os objetivos propostos foram alcançados de forma:

( ) Excelente.

( ) Muito boa.

( ) Boa.

( ) Regular.

( ) Ruim.

13 – Como você vê a contribuição de seu trabalho do PIPE nessa disciplina para a aprendizagem dos alunos?

( ) Excelente. Penso que o trabalho pode contribuir de forma significativa.

( ) Muito boa. Pode contribuir bastante, no entanto alguns detalhes deveriam ser acertados.

( ) Boa. Pode contribuir um pouco para o aprendizado.

( ) Ruim.

14 – Como você avalia a contribuição de outras disciplinas do curso para o desenvolvimento desse PIPE?

( ) Excelente.

( ) Muito boa.

( ) Boas contribuições.

( ) Regular, quase não contribuíram.

( ) Ruim, não contribuíram em nada.

15 – Contribuição do desenvolvimento desse PIPE para o seu aproveitamento em outras disciplinas:

( ) Excelente. O PIPE contribuiu muito em outras disciplinas.

( ) As contribuições foram muito boas, apesar de que poderiam ser melhores.

( ) Boas contribuições.

( ) As contribuições foram regulares, ainda poderiam ser bem melhores.

( ) Ruins, não houveram contribuições.

16 – Como você avalia o nível de dificuldade para o desenvolvimento do PIPE dessa disciplina?

( ) Tive dificuldades extremas.

( ) O desenvolvimento foi complexo.

( ) Dificuldade moderada.

( ) Regular.

( ) Não tive dificuldades.

17 – Enumere, segundo suas observações, os principais pontos positivos do trabalho do PIPE na disciplina EMAP.

18 – Enumere, segundo suas observações, os pontos vistos como negativos no trabalho do PIPE na disciplina EMAP.