

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA  
COMPUTAÇÃO



SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS VIA COMPETIÇÃO ENTRE  
REGIÕES FUZZY - ABORDAGENS PARAMÉTRICAS E  
NÃO-PARAMÉTRICAS

VINÍCIUS RUELA PEREIRA BORGES

Uberlândia - Minas Gerais  
2011

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE COMPUTAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA**  
**COMPUTAÇÃO**



**SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS VIA COMPETIÇÃO ENTRE  
REGIÕES FUZZY - ABORDAGENS PARAMÉTRICAS E  
NÃO-PARAMÉTRICAS**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Área de Concentração: Banco de Dados

Orientadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Célia Aparecida Zorzo Barcelos

Co-Orientadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Denise Guliato

VINÍCIUS RUELA PEREIRA BORGES

**Uberlândia - Minas Gerais**  
**2011**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE COMPUTAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA**  
**COMPUTAÇÃO**

Os abaixo assinados, por meio deste, certificam que leram e recomendam para a Faculdade de Computação a aceitação da dissertação intitulada “**Segmentação de Imagens via Competição entre Regiões Fuzzy - Abordagens Paramétricas e Não-Paramétricas**” por **Vinícius Ruela Pereira Borges** como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Uberlândia, 23 de agosto de 2011

Orientadora:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Célia Aparecida Zorzo Barcelos  
Universidade Federal de Uberlândia

Co-Orientadora:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Denise Guliato  
Universidade Federal de Uberlândia

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. José Roberto Nogueira  
Universidade Estadual Paulista - Presidente Prudente/SP

---

Prof. Dr. Edgard Afonso Lamounier Júnior  
Universidade Federal de Uberlândia

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE COMPUTAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA**  
**COMPUTAÇÃO**

Data: Agosto de 2011

Autor: **Vinícius Ruela Pereira Borges**

Título: **“Segmentação de Imagens via Competição entre Regiões Fuzzy - Abordagens Paramétricas e Não-Paramétricas”**

Faculdade: **Faculdade de Computação**

Grau: **Mestrado**

Fica garantido à Universidade Federal de Uberlândia o direito de circulação e impressão de cópias deste documento para propósitos exclusivamente acadêmicos, desde que o autor seja devidamente informado.

---

Vinícius Ruela Pereira Borges

O AUTOR RESERVA PARA SI QUALQUER OUTRO DIREITO DE PUBLICAÇÃO  
DESTE DOCUMENTO, NÃO PODENDO O MESMO SER IMPRESSO OU REPRODU-  
ZIDO, SEJA NA TOTALIDADE OU EM PARTES, SEM A PERMISSÃO ESCRITA DO  
AUTOR.

# Dedicatória

*Dedico aos meus pais, Ronaldo César Borges e Janise Ruela Pereira Borges, pelo grande apoio e incentivo durante esta jornada.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela oportunidade de estar aqui vencendo mais esta difícil barreira.

Agradeço aos meus familiares, que me deram todo o suporte durante o mestrado e conversaram comigo bastante procurando me incentivar nos momentos difíceis.

Agradeço à professora Célia Zorzo pelos seus ensinamentos, apoio, paciência e orientação. Obrigado pela oportunidade de trabalhar neste projeto tão desafiador.

Agradeço também à professora Denise Guliato, que desde os tempos de graduação vem acompanhando o meu crescimento até os dias atuais. Suas idéias, incentivos e colaborações foram muito importantes para a execução deste trabalho.

Agradeço ao professor Marcos Aurélio que sempre procurou ajudar no desenvolvimento deste projeto com boas idéias.

Agradeço aos amigos da Faculdade de Computação (UFU) e do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (USP) pelo apoio e incentivo, e pelos intensos estudos na época de disciplinas. Também ressalta-se a importante ajuda do secretário da Pós-Graduação Erisvaldo, que toda vez que eu aparecia com uma dúvida relacionada com datas, prazos e obrigações, em pouco tempo a mesma era sanada.

Quero me desculpar se me esqueci de mencionar alguém. De qualquer maneira, agradeço à todos que tiveram pelo menos uma pequena parcela de responsabilidade para que este projeto de mestrado fosse concretizado.

## *Resumo*

---

---

A segmentação de imagens é uma importante etapa existente nos sistemas de reconhecimento de padrões e extração de características. Seu objetivo é subdividir uma imagem em suas regiões constituintes. Dentre os diversos trabalhos publicados na literatura, destacam-se os métodos baseados em princípios variacionais, que são ferramentas eficazes para se formular técnicas estáveis para segmentação de imagens.

Neste trabalho, são estudados alguns modelos variacionais para segmentação de imagens existentes na literatura, nos quais serão analisados as suas formulações matemáticas e as características de seus processos de minimização. Dentre estas técnicas, serão explorados em detalhes o método *Competição entre Regiões Fuzzy* e os modelos de segmentação que podem ser derivados do seu funcional de energia. Inspirados nesse método, foram propostas três modificações baseadas nesses modelos que minimizam algumas limitações de seus modelos e que surgem como alternativas para a segmentação de imagens do mundo real.

As modificações propostas foram validadas pelos bons resultados obtidos utilizando-se de imagens naturais, texturizadas e ruidosas. Além disso, são mostrados alguns resultados comparativos com outras técnicas semelhantes com o objetivo de relatar a eficiência destas propostas.

**Palavras-chave:** segmentação *soft* de imagens, Competição entre Regiões Fuzzy, Métodos Variacionais, Equações Diferenciais Parciais.

---

## *Abstract*

---

---

Image segmentation is an important step in the existing pattern recognition and feature extraction systems. The primal goal is to subdivide an image into its constituent regions. Among the many works published in the literature, we highlight the methods based on variational principles, which are effective tools to formulate stable techniques for image segmentation.

Here, we studied variational models for image segmentation present in literature, in which will be discussed their mathematical formulations and characteristics of their minimization processes. Among these techniques will be explored in detail the method *Fuzzy Region Competition* and segmentation models that can be derived from its energy functional. Inspired by this method, three modifications were proposed based on these models that minimize some of their limitations and which emerges as alternatives for real world image segmentation.

The proposed modifications were validated by the good results obtained using natural images, textured and noisy. In addition, some comparative results are shown with other similar techniques with the objective of reporting the effectiveness of the proposed models.

**Key-words:** soft image segmentation, Fuzzy Region Competition, Variational Methods, Partial Differential Equations.

# *Lista de Figuras*

---

---

2.1	Domínio de uma EDP, juntamente com seu contorno . . . . .	11
2.2	Malha Computacional . . . . .	12
2.3	Região coberta por uma malha . . . . .	13
3.1	Segmentação de uma imagem ( $256 \times 256$ ) baseada em descontinuidade: (a) Imagem original; (b) Magnitude do gradiente de $I$ ; (c) Resultado obtido pelo <i>operador de Canny</i> ; (d) Segmentação resultante pelo Laplaciano; (e) Resultado obtido pelo operador LoG. . . . .	22
3.2	(a) Função level set $\phi$ ; (b) Interface $\Gamma$ em nível zero. Imagem extraída de [Lie et al., 2006] com adaptações. . . . .	25
3.3	Imagen sintética texturizada ( $256 \times 256$ ) segmentada pelo <i>Método Level Set</i> : (a) Imagen original; (b) $\phi$ inicial; (c-d) Estados intermediários para a função $\phi$ - iteração 40 e 50, respectivamente; (e) Função $\phi$ final após 300 iterações. . . . .	27
3.4	Segmentação por limiarização: (a) Imagen original; (b) Imagen binária utilizando limiar $T = 50$ ; (c) Resultado de segmentação utilizando limiar calculado pelo <i>Método de Otsu</i> [Otsu, 1979]. . . . .	28
3.5	(a) Imagen original e a semente em vermelho; (b) Imagen segmentada utilizando o algoritmo de <i>Crescimento de Regiões</i> . . . . .	28
3.6	Segmentação de uma imagen ( $256 \times 256$ ) pelo método <i>Mumford-Shah</i> : (a) Imagen original ruidosa; (b) Função suave por partes que aproxima $I$ ; (c) Conjunto de bordas $\Gamma$ (destacado pela linha preta) sobreposto em $I$ . . . . .	30
3.7	Segmentação pelo caso constante do funcional <i>Mumford-Shah</i> : (a) Imagen original ruidosa; (b) Função constante por partes que aproxima $I$ ; (c) Conjunto de bordas $\Gamma$ (destacado pela linha preta) sobreposto em $I$ . . . . .	30
3.8	Modelo <i>Chan-Vese</i> , exemplo extraído de [Chan e Vese, 2001a]: (a) Imagen original e a posição inicial da função $\phi$ ; (b-c) Passos intermediários do processo de segmentação; (d) Posição final da função $\phi$ ; (e) Função constante por partes (3.14). . . . .	34

3.9 Ilustração de duas curvas $\phi_1 \cup \phi_2$ que particiona o domínio em 4 regiões: $\{\phi_1 > 0, \phi_2 > 0\}$ , $\{\phi_1 > 0, \phi_2 < 0\}$ , $\{\phi_1 < 0, \phi_2 > 0\}$ e $\{\phi_1 < 0, \phi_2 < 0\}$ . Imagem extraída de [Vese e Chan, 2002]. . . . .	36
3.10 Exemplo de uma imagem onde as fronteiras de suas regiões não estão bem definidas: (a) Urso em seu meio ambiente composto por floresta e rio; (b) Imagem de sensoriamento remoto; (c) Imagem de uma lesão de pele. . . . .	36
3.11 Segmentação de uma imagem em quatro regiões pelo modelo <i>Soft Mumford-Shah</i> , extraído de [Shen, 2006]: (a) Imagem original; (b-e) Funções de pertinência $p_1$ , $p_2$ , $p_3$ e $p_4$ , respectivamente. . . . .	39
3.12 Segmentação de uma imagem em três regiões pelo modelo Campos de Fase de <i>Pock</i> , extraído de [Pock e Bischof, 2006]: (a) Imagem original; (b-d) Imagens reconstruídas a partir das funções de pertinência $p_1$ , $p_2$ , $p_3$ e $p_4$ , respectivamente. . . . .	40
3.13 Segmentação de uma imagem em quatro regiões pelo modelo de <i>Barcelos et al.</i> , extraído de [Barcelos et al., 2009a]: (a) Imagem original; (b) Imagem reconstruída utilizando o campo de fase $p_1$ ; (c) Imagem reconstruída utilizando o campo de fase $p_2$ ; (d) Imagem reconstruída utilizando o campo de fase $p_3$ . . . . .	41
4.1 Áreas sombreadas mostram o domínio da imagem onde as hipóteses, testes e decisões são tomadas nos métodos: (a) <i>Contornos Ativos</i> ; (b) <i>Crescimento de Regiões</i> ; (c) Energia de Bayes/MDL. Imagem extraída de [Zhu e Yuille, 1996]. . . . .	44
4.2 Forças agindo no contorno: (a) Força suavizadora (b) Força estatística em um ponto $v$ de fronteira de regiões; (c) Força estatística em um ponto de junção de regiões. . . . .	46
4.3 Exemplo de segmentação pela técnica <i>Competição entre Regiões</i> : (a) Imagem original; (b) Posição inicial das sementes; (c) Instante de tempo $t = 10$ ; (d) $t = 20$ ; (e) $t = 60$ ; (f) $t = 100$ ; (g) $t = 135$ . Exemplo retirado de [Zhu e Yuille, 1996]. . . . .	49
5.1 Imagem da zebra ( $391 \times 596$ ) no modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Regiões amostradas: objeto (vermelho) e fundo (azul); (c) Função $g$ ; (d) Função de competição $r$ ; (e-i-m) Função de pertinência $u$ no instante inicial; (f-j-n) Passo de tempo intermediário - iteração 10; (g-k-o) Passo de tempo intermediário - iteração 60; (h-l-p) Estado final para $u$ com 350 iterações; (q) Segmentação do objeto $uI$ ; (r) Segmentação do fundo $I(1 - u)$ . . . . .	60
5.2 Análise do vetor de projeção $\mathbf{p}$ no modelo CRFS supervisionado da Figura 5.1: (a) - (d) Vetor $p^1$ nas iterações 1, 10, 60 e 350; (e)-(h) Vetor $p^2$ nas iterações 1, 10, 60 e 350; . . . . .	61

5.3 Aumento no valor do parâmetro $\lambda$ no modelo CRFS: (a) Função $u$ no instante inicial (b) Função $u$ intermediária - iteração 10 (c) Função $u$ intermediária - iteração 60 (d) Estado final para $u$ com 350 iterações. . . . .	61
5.4 Decréscimo no valor do parâmetro $\lambda$ no Modelo CRFS: (a) Função $u$ no instante inicial; (b) Função $u$ intermediária - iteração 30; (c) Função $u$ intermediária - iteração 200; (d) Estado final para $u$ com 350 iterações. . . . .	62
5.5 Aumento do valor de $\theta$ no modelo CRFS: (a) Função $u$ no instante inicial; (b) Função $u$ na iteração 10; (c) Função $u$ na iteração 60; (d) Estado final para $u$ com 350 iterações. . . . .	62
5.6 Decréscimo do valor de $\theta$ no modelo CRFS: (a) Função de pertinência $u$ no instante inicial; (b) Função $u$ na iteração 10; (c) Função $u$ na iteração 60; (d) Estado final para $u$ com 630 iterações. . . . .	63
5.7 Decréscimo do valor $\beta$ no modelo CRFS: (a) Função de pertinência $u$ no instante inicial (b) Passo de tempo intermediário - iteração 10 (c) Passo de tempo intermediário - iteração 60 (d) Estado final para $u$ com 350 iterações. . . . .	63
5.8 Aumento do valor $\beta$ no modelo CRFS: (a) Função de pertinência $u$ no instante inicial (b) Passo de tempo intermediário - iteração 10 (c) Passo de tempo intermediário - iteração 60 (d) Estado final para $u$ com 1400 iterações. . . . .	64
5.9 Redução do valor de $\mathcal{N}$ no modelo CRFS: (a) Função de pertinência $u$ no instante inicial de tempo; (b) Função $u$ na iteração 10; (c) Função $u$ na iteração 60; (d) Estado final para $u$ com 350 iterações. . . . .	64
5.10 Aumento do valor de $\mathcal{N}$ no modelo CRFS: (a) Função $u$ inicial; (b) Função $u$ na iteração 10; (c) Função $u$ na iteração 60; (d) Estado final para $u$ após 350 iterações. . . . .	65
5.11 Imagem de uma ave ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001] segmentada pelo modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Amostragem do fundo (azul) e do objeto (vermelho) da imagem; (c) Função de competição $r$ ; (d) Função $u$ inicial; (e-f) Função $u$ na iteração 20 e 40, respectivamente; (g) Função $u$ após 500 iterações; (h) Imagem segmentada $Iu$ . Os parâmetros foram fixados como: $\lambda = 0,1$ e $\beta = 0,0025$ . . . . .	66
5.12 Imagem de uma cobra ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001] segmentada pelo modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Amostragem do fundo (azul) e do objeto (vermelho) da imagem; (c) Função de competição $r$ ; (d) Função $u$ inicial; (e-f) Função $u$ na iteração 10 e 30, respectivamente; (g) Função $u$ após 1000 iterações; (h) Imagem segmentada $Iu$ . Os parâmetros foram fixados como: $\lambda = 0,25$ e $\beta = 0,0075$ . . . . .	66

5.13 Imagem de um avião ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001] segmentada pelo modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Amostragem do fundo (azul) e do objeto (vermelho) da imagem; (c) Função de competição $r$ ; (d) Função $u$ inicial; (e-f) Função $u$ na iteração 10 e 20, respectivamente; (g) Função $u$ após 500 iterações; (h) Imagem segmentada $Iu$ . Os parâmetros foram fixados como: $\lambda = 0,1$ e $\beta = 0,002$ .	67
5.14 Teste realizado no <i>CRC</i> ( $128 \times 128$ ): (a) Imagem original; (b) Função constante por partes $c$ . Três casos de teste: (c-d-e), (f-g-h) e (i-j-k), que correspondem respectivamente a: Função $u$ no instante inicial - Função $u$ na iteração 10 - Função $u$ após 100 iterações.	70
5.15 Imagem sintética ( $543 \times 390$ ) executada no modelo CRC: (a) Imagem original. Experimento 1: (b) Função $u$ no instante inicial de tempo; (c) Função $u$ após 40 iterações; (d) Função constante em partes $c$ . Experimento 2: (e) Função $u$ inicial; (f) Função $u$ após 40 iterações; (g) Função constante em partes $c$ .	71
5.16 Imagem ruidosa ( $366 \times 366$ ) executada no modelo CRC: (a) Imagem original; (b) Função $u$ inicial; (c) Função $u$ na iteração 20; (d) Função $u$ após 100 iterações; (e) Função constante por partes $c = uc_1 + (1-u)c_2$ .	71
5.17 Teste no modelo CRS: (a) Imagem original; (b) Função $s$ ; (c) Função $s_1$ ; (d) Função $s_2$ ; (e) Função $u$ no instante inicial de tempo; (f-g) Função $u$ em estados intermediários de tempo; (h) Função $u$ em estado final após 1000 iterações.	76
5.18 Imagem médica executada no modelo CRS: (a) Imagem original; (b) Função $s$ ; (c) Função suave $s_1$ ; (d) Função suave $s_2$ ; (e) Função $u$ no instante inicial de tempo; (f-g) Função $u$ em passos de tempo intermediários; (h) Função de pertinência $u$ após 400 iterações.	77
5.19 Imagem natural executada no modelo CRS: (a) Imagem original; (b) Função $s$ ; (c) Função $s_1$ ; (d) Função $s_2$ ; (e) Função $u$ no instante inicial de tempo; (f-g) Função de pertinência $u$ em estados de tempo intermediários; (h) Função $u$ após 100 iterações.	78
5.20 Teste realizado em uma imagem de avião: (a) Imagem original (b) Função de pertinência $u$ no instante inicial (c-d) Função de pertinência $u$ em passos intermediários de tempo (30 e 80); (e) Função de pertinência $u$ final após 800 iterações; (f) Imagem reconstruída a partir da pertinência $(1 - u)$ .	82
5.21 Teste realizado na imagem de um pássaro: (a) Imagem original (b) Função de pertinência $u$ no instante inicial (c-d) Função de pertinência $u$ em passos intermediários de tempo (180 e 190); (e) Função de pertinência $u$ final após 300 iterações; (f) Imagem reconstruída a partir da pertinência $u$ .	83

5.22	Teste em imagens de uma escultura: (a) Imagem original (b) Função de pertinência $u$ inicial (c-d) Função de pertinência $u$ em estados intermediários (20 e 40); (e) Função de pertinência $u$ final após 500 iterações; (f) Imagem reconstruída a partir da pertinência $(1 - u)$ .	83
5.23	Teste realizado no modelo local: (a) Imagem original de um fotógrafo (b) Função de pertinência $u$ obtida pelo modelo <i>Competição entre Regiões Fuzzy</i> baseado em funções de densidade de probabilidade global (c) Função de pertinência $u$ obtida pelo modelo <i>Competição entre Regiões Fuzzy</i> baseado em funções de densidade de probabilidade local. Experimento retirado de [Mory et al., 2007].	86
6.1	Imagens naturais com presença de textura	89
6.2	Influência do desvio-padrão $\sigma$ da Eq. (6.2) no resultado final: (a) Imagem sintética ruidosa; (b) $\sigma = 0,01$ ; (c) $\sigma = 0,04$ ; (d) $\sigma = 0,1$ .	91
6.3	Teste na imagem da zebra: (a) Imagem original; (b) Função $u$ inicial utilizada no modelo CRC; (c) Função $u$ após 100 iterações no modelo CRC; (d) Função constante por partes obtida pelo modelo CRC; Teste 1 (e-f-g-h) e Teste 2 (i-j-k-l): Função $u$ em estado inicial, função $u$ na iteração 10, função $u$ final após 100 iterações e a função constante por partes, respectivamente.	95
6.4	Imagen de um fotógrafo ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função $u$ inicial utilizada pelos modelos CRCPL e CRC; (c-d-e-f) Função $u$ obtida pelo modelo proposto CRCPL, CRC, CRFNP e CRFNPL, respectivamente.	97
6.5	Teste em imagem ruidosa ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência $u$ ; (c) Função de pertinência fuzzy $u$ obtida pelo modelo CRCPL; (d) Função de pertinência fuzzy obtida pelo modelo CRC.	97
6.6	Teste com imagem de uma bola de sinuca com ruído: (a) Imagem original; (b) Função de pertinência $u$ (c) Função de pertinência fuzzy $u$ obtida pelo modelo proposto; (d) Função de pertinência fuzzy obtida pelo modelo CRC.	98
6.7	Teste em uma imagem natural ( $320 \times 200$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência fuzzy $u$ em estado inicial; (c) Função $u$ obtida pelo modelo proposto CRCPL; (d) Função $u$ calculada pelo modelo CRC.	98
6.8	Teste em imagem natural ( $481 \times 321$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função $u$ em estado inicial; (c) Função $u$ final obtida pelo modelo proposto CRCPL; (d) Função $u$ final calculada pelo modelo CRC.	99
6.9	Imagen sintética texturizada ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência $u$ em estado inicial; (c) Função $u$ final calculada pelo modelo CRCPL; (d) Função de pertinência $u$ final obtida pelo modelo CRC.	99

6.10	Imagen construída utilizando texturas de Brodatz [Brodatz, 1956] ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência $u$ em estado inicial; (c) Função $u$ final calculada pelo modelo CRCPL; (d) Função de pertinência $u$ final obtida pelo modelo CRC.	100
6.11	Imagen médica ( $512 \times 512$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência $u$ em estado inicial; (c) Função $u$ na iteração 10; (d) Função $u$ após 100 iterações obtida pelo modelo proposto; (e) Contorno da lesão calculado a partir da função $u$ final; (f) Contorno feito pelo especialista.	101
7.1	Teste na imagem da zebra no modelo CRFNS: (a) Imagem original; (b) Segmentação resultante. Dois casos de teste distintos (c-e-g) e (d-f-h): função $u$ inicial - função $u$ intermediária - função $u$ final.	109
7.2	Imagen de um barco ( $481 \times 321$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Imagem reconstruída a partir da função $u$ final; Dois casos de teste: (c-e-g) e (d-f-h), Função $u$ inicial - Função $u$ em estado intermediário - Função $u$ final.	109
7.3	Comparação (a) Imagem original; (b) Função $u$ obtida pelo modelo CRC; (c) Função $u$ determinada pelo modelo CRFS; (d) Resultado obtido pelo modelo CRFNS.	110
7.4	Imagen ruidosa na modificação proposta CRFNS ( $300 \times 300$ ): (a) Imagem original; (b) Função $u$ inicial; (c) Função $u$ na iteração 30; (d) Função $u$ obtida pelo modelo CRFNS; (e) Resultado final obtido pelo modelo CRC; (f) Resultado obtido pelo modelo <i>Chan-Vese</i> (Função level set $\phi < 0$ ).	111
7.5	Imagen de uma escultura ( $481 \times 321$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função $u$ em instante inicial de tempo; (c) Função $u$ em estado intermediário; (d) Função $u$ final após 300 iterações; (e) Função $u$ obtida pelo modelo CRC.	111
7.6	Foto de uma pantera ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função $u$ em instante inicial de tempo; (c) Função $u$ em estado intermediário; (d) Função $u$ final após 1500 iterações; (e) Função $u$ obtida pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída $I_{REC}$ .	112
7.7	Imagen de uma cobra ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função $u$ em instante inicial de tempo; (c) Função $u$ em estado intermediário; (d) Função $u$ final após 700 iterações; (e) Função $u$ obtida pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída $I_{REC}$ .	112
7.8	Imagen de um elefante ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função $u$ em instante inicial de tempo; (c) Função $u$ em estado intermediário; (d) Função $u$ final após 1000 iterações; (e) Função $u$ obtida pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída $I_{REC}$ . Parâmetros foram fixados como: $\lambda = 0,075$ , $\beta = 0,001$ .	113



8.9 Imagem panorâmica ( $300 \times 225$ ) para segmentação em três regiões: (a) Imagem original sobreposta pelas amostras de cada região; (b-c-d) Região reconstruída a partir da imagem original utilizando-se as partições $\Omega_1$ , $\Omega_2$ e $\Omega_3$ , respectivamente.	129
8.10 Imagem texturizada ( $512 \times 512$ ) para segmentação em três regiões: (a) Imagem original sobreposta pelas amostras de cada região; (b-c-d) Pontos que representam as partições $\Omega_1$ , $\Omega_2$ e $\Omega_3$ , respectivamente. . . . .	130
8.11 Imagem texturizada para segmentação em quatro regiões ( $512 \times 512$ ): (a) Imagem original; (b) Amostras extraída para calcular os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ e $\alpha_3$ ; (c) Pontos da partição $\Omega_1$ final após 700 iterações no tempo; (d) Pontos da partição $\Omega_2$ ; (e) Pontos da partição $\Omega_3$ ; (f) Pontos da partição $\Omega_4$ . . . . .	131
8.12 Imagem de elefantes ( $321 \times 481$ ) para segmentação em três regiões [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Região reconstruída da imagem utilizando a partição $\Omega_1$ ; (c) Região reconstruída da imagem utilizando a partição $\Omega_2$ ; (d) Região reconstruída da imagem utilizando a partição $\Omega_3$ ; Parâmetros foram fixados como $\lambda = 0,25$ e $\beta = 0,0001$ . . . . .	132
8.13 Cena natural ( $481 \times 321$ ) para segmentação em três regiões [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Região reconstruída da imagem utilizando a partição $\Omega_1$ ; (c) Região reconstruída da imagem utilizando a partição $\Omega_2$ ; (d) Região reconstruída da imagem utilizando a partição $\Omega_3$ ; Parâmetros foram fixados como $\lambda = 0,3$ e $\beta = 0,001$ . . . . .	132

# *Sumário*

---

---

<b>I</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	Introdução	2
<b>II</b>	<b>Fundamentação Teórica e Revisão Bibliográfica</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos Básicos</b>	<b>8</b>
2.1	Imagem Digital . . . . .	8
2.2	Definições e Conceitos Matemáticos . . . . .	9
2.2.1	Operadores Diferenciais . . . . .	9
2.2.2	Convolução . . . . .	10
2.3	Equações Diferenciais Parciais . . . . .	10
2.3.1	Método de Diferenças Finitas . . . . .	12
2.3.2	Convergência . . . . .	15
2.4	Métodos Variacionais . . . . .	16
2.4.1	Equações de Euler-Lagrange . . . . .	17
2.5	Fundamentos de Probabilidade . . . . .	17
2.5.1	Estimativa de Probabilidade . . . . .	18
2.6	Considerações Finais . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Segmentação de Imagens</b>	<b>20</b>
3.1	Definição . . . . .	20
3.2	Segmentação baseada em Descontinuidade . . . . .	21
3.2.1	Derivadas de Primeira e Segunda Ordem . . . . .	21
3.2.2	Contornos Ativos . . . . .	23
3.2.3	Método Level Set . . . . .	24

3.3	Segmentação baseada em Similaridade . . . . .	26
3.3.1	Crescimento de Regiões . . . . .	27
3.3.2	Divisão e Fusão . . . . .	28
3.3.3	Mumford-Shah . . . . .	29
3.3.4	Modelo Chan-Vese . . . . .	31
3.4	Segmentação Soft . . . . .	35
3.4.1	Modelo Mumford-Shah Soft . . . . .	37
3.4.2	Modelo Probabilístico de Campos de Fase . . . . .	38
3.4.3	Modelo de Mistura de Gaussianas . . . . .	40
3.5	Considerações Finais . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Competição entre Regiões</b>	<b>43</b>
4.1	Competição entre Regiões . . . . .	44
4.2	Resultados . . . . .	48
4.3	Considerações Finais . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Competição entre Regiões Fuzzy</b>	<b>50</b>
5.1	Funcional de Energia . . . . .	50
5.2	Algoritmo de Projeção Dual de Chambolle . . . . .	54
5.3	Modelo Supervisionado . . . . .	57
5.3.1	Resultados Experimentais . . . . .	58
5.4	Competição entre Regiões Constantes . . . . .	65
5.4.1	Resultados Experimentais . . . . .	68
5.5	Competição entre Regiões Suaves . . . . .	71
5.5.1	Resultados Experimentais . . . . .	74
5.6	Modelo Baseado em Funções de Densidade de Probabilidade Não-Paramétricas . . . . .	77
5.6.1	Resultados Experimentais . . . . .	80
5.6.2	Extensão para Densidades Locais . . . . .	83
5.7	Considerações Finais . . . . .	85
<b>III</b>	<b>Propostas para Segmentação de Imagens</b>	<b>87</b>
<b>6</b>	<b>Competição entre Regiões Constantes Ponderada Localmente</b>	<b>88</b>
6.1	Motivação . . . . .	89
6.2	Modificação Proposta . . . . .	90
6.3	Resultados Experimentais . . . . .	93
6.4	Considerações Finais . . . . .	100

<b>7 Competição entre Regiões Fuzzy Não-Supervisionada Utilizando Distribuições de Probabilidade</b>	<b>102</b>
7.1 Motivação . . . . .	103
7.2 Modelo Proposto . . . . .	105
7.3 Resultados . . . . .	107
7.4 Considerações Finais . . . . .	113
<b>8 Competição Seletiva entre Multi-Regiões Fuzzy</b>	<b>116</b>
8.1 Motivação . . . . .	117
8.2 Modelo Proposto . . . . .	120
8.3 Resultados . . . . .	125
8.4 Considerações Finais . . . . .	130
<b>9 Considerações Finais</b>	<b>133</b>
9.1 Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	134
9.2 Publicações . . . . .	135
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>140</b>

# *Notações*

---

---

$\Omega$  : Sub-conjunto aberto do  $\mathbb{R}^m$ ;

$\partial\Omega$  : Bordas de  $\Omega$ ;

$\boldsymbol{x}$  : ponto no  $\mathbb{R}^m$ , como  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ;

$\frac{\partial u}{\partial x}, u_x, u'$  : Derivada de primeira ordem da função  $u$  em relação à  $x$ ;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xx}, u''$  : Derivada de segunda ordem da função  $u$  em relação à  $x$ ;

$\phi$ : Função Lipschitz  $\phi$ ;

$\chi$ : Função característica;

## **Abreviações**

**BV** : *Bounded Variation* (Conjunto das funções de variação limitada);

**TV**: *Total Variation* (Variação Total);

**fdp**: *função de densidade de probabilidade*;

**EDP**: Equação Diferencial Parcial;

**CRF**: Competição entre Regiões Fuzzy;

**CRFS**: Competição entre Regiões Fuzzy Supervisionado;

**CRC**: Competição entre Regiões Constantes;

**CRS**: Competição entre Regiões Suaves;

**CRFNP**: Competição entre Regiões Fuzzy Não-Paramétrica;

**CRFNPL**: Competição entre Regiões Fuzzy Não-Paramétrica Local;

**CRCPL:** Competição entre Regiões Constantes Ponderada Localmente;

**CMRF:** Competição entre Multi-Regiões Fuzzy;

**CRFNS:** Competição entre Regiões Fuzzy Não-Supervisionado;

# Parte I

## Introdução

## CAPÍTULO

# 1

### *Introdução*

---

---

Imagens são importantes recursos para representar visualmente informações que podem ser transmitidas e interpretadas por qualquer pessoa. Seu emprego data desde a Pré-História, na qual os homens desta época se comunicavam e se expressavam através de pinturas nas paredes das cavernas. Muitos destes vestígios estão preservados até os dias atuais, o que permitiu aos historiadores descobrir os costumes de nossos ancestrais que habitaram o planeta milhares de anos atrás, por meio de análise visual destas pinturas. Com a evolução do ser humano e a invenção da fotografia, o uso de imagens acabou por se tornar imprescindível para a comunicação e a divulgação de conhecimento entre as pessoas.

Com o crescente avanço da tecnologia nos aparelhos de aquisição de imagens e na capacidade de armazenamento e processamento dos computadores modernos, o uso de imagens digitais tem ganhado força no dia-a-dia do ser humano. Neste sentido, começaram a surgir sistemas autônomos que reproduzem as capacidades do sistema visual humano no que diz respeito ao processamento e análise de imagens como se fossem especialistas de uma aplicação do mundo real. Como exemplos, podem ser citados os sistemas de auxílio ao diagnóstico de câncer de mama por computador, nos quais imagens mamográficas digitais são analisadas e diagnosticadas considerando-se as características de lesões de câncer fornecidas por um médico.

Em determinadas aplicações computacionais, a utilização de toda a imagem digital pode ser computacionalmente custosa e desnecessária. Por isso, o uso de apenas algumas regiões no processo de análise de uma imagem pode ser vantajoso no que diz respeito à redução do espaço de armazenamento e do tempo de processamento. Além disso, os resultados de técnicas de análise de imagens quando se utilizam apenas as regiões de interesse da imagem tendem a ser mais satisfatórios e precisos do que empregando-se toda a imagem digital. Esta estratégia de se extrair e identificar áreas de interesse contidas na imagem se refere à segmentação, que é

normalmente utilizada como uma fase de pré-processamento de sistemas de reconhecimento de padrões e de recuperação de informação.

O objetivo da segmentação é subdividir a imagem em regiões ou objetos que a constituem, com o intuito de simplificar ou alterar a representação de uma imagem e de facilitar sua análise [Gonzalez e Woods, 2008]. A segmentação é uma etapa crítica nos sistemas de processamento de imagens, uma vez que o resultado final depende da qualidade da segmentação. Por isso, bastante atenção tem sido dada pelos pesquisadores no campo de segmentação, no intuito de desenvolver algoritmos eficientes e robustos que apresentem resultados satisfatórios em imagens provenientes de diversas aplicações do mundo real. Sendo assim, será este o objeto de estudo desta dissertação, que tratará especificamente da análise e do desenvolvimento de métodos para segmentação de imagens.

Na literatura, existem basicamente duas principais abordagens para a segmentação de imagens: segmentação baseada em contorno e segmentação baseada em região. Exemplos da primeira categoria são a modelagem de filtros, que quando convoluídas com a imagem original, produzem uma imagem de saída contendo apenas os contornos dos objetos. Na segunda categoria, destacam-se o uso de modelos baseados nas distribuição de intensidade da imagem e os métodos que utilizam critérios estatísticos locais para agrupar a imagem em regiões conexas, como o *Crescimento de Regiões* e o *Fusão-e-Divisão* [Gonzalez e Woods, 2008].

Uma alternativa para estas técnicas básicas de segmentação se refere ao uso de métodos variacionais. Em uma abordagem variacional, o problema de segmentação de imagens é apresentado como um problema de otimização, onde um estado estacionário corresponde a sua solução. Tais métodos conseguem unificar abordagens baseadas em região e em contorno, o que diminui as deficiências existentes em cada uma destas abordagens [Houhou, 2009]. Um método variacional consiste na minimização de um funcional de energia matematicamente formulado de acordo com os critérios de homogeneidade das regiões da imagem. *Contornos Ativos* [Kass et al., 1988] e *Mumford-Shah* [Mumford e Shah, 1989] são exemplos destes métodos que se tornaram populares no decorrer dos últimos anos e servem de base para as técnicas que foram posteriormente desenvolvidas.

Uma destas técnicas se refere à proposta de *Zhu e Yuille*, denominada *Competição entre Regiões* [Zhu e Yuille, 1996]. Este método descreve as regiões da imagem utilizando um critério estatístico, e combina as metodologias das técnicas de segmentação *Contornos Ativos* e *Crescimento de Regiões*. Embora *Zhu e Yuille* tenham conseguido bons resultados na segmentação de imagens naturais, seu método calcula soluções que são sensíveis à inicialização. Além disso, este método apresenta um processo de convergência lento, pois é baseado na propagação de curvas dinâmicas, que são numericamente resolvidas por meio das Equações de Euler-Lagrange associadas com esquema gradiente descendente.

Todos estes métodos citados são revisados e estudados nesta dissertação, atentando-se para os critérios de homogeneidade de regiões utilizados, a maneira pelo qual as soluções numéricas

são obtidas, além das vantagens e desvantagens. Uma maior ênfase será dada para o método *Competição entre Regiões*, que apresenta uma abordagem interessante e que é importante para o entendimento dos modelos de segmentação aqui propostos.

*Mory e Ardon* [Mory e Ardon, 2007] resolveram as limitações citadas para o caso de segmentação em duas regiões ao propor uma extensão *soft* da técnica *Competição entre Regiões*, denominada *Competição entre Regiões Fuzzy*. Neste método, a determinação das duas regiões da imagem ocorre com base nos modelos estatísticos utilizados para descrevê-las, além de definir o critério condicional existente no processo de competição. O funcional de energia do método *Competição entre Regiões Fuzzy* é convexo, o que implica na obtenção de soluções globais com fraca sensibilidade à inicialização, o que de fato representa o ponto forte do método. *Mory e Ardon* propuseram em [Mory e Ardon, 2007] e [Mory et al., 2007], cinco modelos de segmentação que foram derivados do referido funcional de energia, que se diferem na maneira pela qual as regiões da imagem são estatisticamente representadas e o paradigma do processo de segmentação, que pode ser supervisionado ou não-supervisionado. Estes modelos de segmentação são explorados e analisados separadamente nesta dissertação, destacando-se seus pontos fortes e fracos, como também as situações práticas em que cada um pode ser aplicado.

Alguns destes modelos apresentados no trabalho de *Mory e Ardon* [Mory e Ardon, 2007] possuem algumas limitações tanto no critério estatístico que caracteriza o modelo, como na aplicabilidade prática do modelo. A saber:

- *Mory e Ardon* propuseram um modelo de segmentação não-supervisionado que aproxima o objeto e o fundo da imagem por duas regiões constantes. No entanto, este modelo apresenta resultados insatisfatórios quando as regiões da imagem possuem textura ou intensidades heterogêneas em seus interiores;
- Outro modelo proposto por *Mory e Ardon* foi formulado sob uma abordagem supervisionada e utiliza um modelo estatístico para descrever as regiões da imagem. Apesar de segmentar eficientemente imagens naturais e texturizadas, o método necessita de um agente externo para o processo de segmentação, o que limita sua aplicabilidade na prática;
- O uso de funções de densidade de probabilidade não-paramétricas também foi discutido em posterior trabalho de *Mory e Ardon* [Mory et al., 2007]. Este modelo foi aplicado com sucesso em imagens naturais, mas apresenta um alto custo computacional ao se fazer a Estimação de Densidade de Kernel para essas funções durante o processo de segmentação;
- O método *Competição entre Regiões Fuzzy* foi formulado para a segmentar de imagens digitais compostas por objeto e fundo. Embora o problema esteja bem definido para estes tipos de imagens, sua aplicabilidade é restrita na prática, pois nem todas as imagens são compostas por duas regiões.

Baseando-se nestas limitações identificadas no método *Competição entre Regiões Fuzzy*, esta dissertação propõe três modificações que as minimizam e que sejam capazes de tratar eficientemente imagens naturais e do mundo real. Assim, são propostos neste trabalho:

- uma extensão local para o caso constante por partes do método *Competição entre Regiões Fuzzy*, onde considera-se uma ponderação na vizinhança em relação a cada ponto do domínio durante o processo de segmentação. Com isso, espera-se obter melhor precisão na segmentação de imagens naturais ou que possuem algum tipo de textura;
- um modelo de segmentação não-supervisionado baseado no método *Competição entre Regiões Fuzzy* que utiliza funções de densidade de probabilidade para descrever as regiões da imagem e para conduzir o procedimento de competição entre elas;
- um algoritmo para segmentação de imagens em várias regiões que incorpora o próprio modelo de segmentação em duas regiões *Competição entre Regiões Fuzzy* em sua formulação. Este método proposto foi desenvolvido utilizando-se uma abordagem supervisionada e de funções de densidade de probabilidade para descrever as regiões da imagem

Estas três propostas terão seus resultados comparados com técnicas de segmentação semelhantes. Desta maneira, será possível validar estas propostas e mostrar que podem ser aplicadas na prática.

A segunda parte desta dissertação consiste no estudo dos fundamentos básicos e dos métodos de segmentação existentes na literatura, que podem servir tanto para contextualização do problema de segmentação de imagens, como para as idéias utilizadas nos modelos propostos neste trabalho. O **Capítulo 2** revisa alguns conceitos básicos sobre processamento de imagens, Equações Diferenciais Parciais e Métodos Variacionais. Em seguida, é descrito o Método das Diferenças Finitas e são estudados conceitos relativos à Teoria da Probabilidade. O **Capítulo 3** descreve sucintamente técnicas computacionais básicas para segmentação de imagens. Em seguida, métodos variacionais clássicos para segmentação de imagens, como *Contornos Ativos*, *Mumford-Shah*, *Level Sets* e *Chan-Vese* são estudados. Ao final, métodos para segmentação *soft* de imagens descritos sob princípios variacionais são brevemente apresentados para que se tenha uma noção relativa à modelagem dos modelos propostos na dissertação. O **Capítulo 4** apresenta o algoritmo de *Competição entre Regiões*, proposto por *Zhu e Yuille*. O **Capítulo 5** detalha as idéias por trás do método *Competição entre Regiões Fuzzy*, proposto por *Mory e Ardon*, descrevendo os modelos de segmentação que são derivados do seu funcional de energia e apresenta alguns resultados que comprovam sua eficiência.

A terceira parte é dedicada a apresentar os modelos de segmentação propostos com base no método *Competição entre Regiões Fuzzy*. O **Capítulo 6** descreve o primeiro modelo proposto, denominado *Competição entre Regiões Constantes Ponderada Localmente*, que aproxima o objeto e o fundo de uma imagem por duas regiões constantes utilizando um processo de

análise local na imagem. O **Capítulo 7** apresenta o segundo modelo proposto que é baseado no uso de funções de densidade de probabilidade no processo de competição entre as regiões e em uma abordagem não-supervisionada. O **Capítulo 8** descreve o terceiro modelo proposto denominado *Competição Seletiva entre Multi-Regiões Fuzzy*, que é um algoritmo baseado no *Competição entre Regiões Fuzzy* de *Mory* e *Ardon* e no uso de funções de densidade de probabilidade para segmentação de imagens em várias regiões (multi-regiões). Finalmente, o **Capítulo 9** tem como objetivos relatar as conclusões finais sobre os modelos de segmentação desenvolvidos e sugerir trabalhos futuros para continuação da pesquisa.

## Parte II

# Fundamentação Teórica e Revisão Bibliográfica

## Fundamentos Básicos

Neste Capítulo, são brevemente apresentados fundamentos básicos sobre processamento de imagens e algumas definições e operadores matemáticos que serão utilizados no decorrer desta dissertação. Além disso, é feita uma fundamentação teórica sobre Equações Diferenciais Parciais (EDP's) e Métodos Variacionais (MV's) aplicados ao contexto de segmentação de imagens. Também será estudado o *Método das Diferenças Finitas*, que é utilizado para o cálculo de soluções numéricas de EDP's e alguns conceitos essenciais relativos à Probabilidade.

### 2.1 Imagem Digital

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio aberto e limitado, cujas bordas são dadas por  $\partial\Omega$ . Uma imagem digital é uma função contínua e limitada definida como

$$I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

onde cada elemento  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$  é denominado ponto (ou *pixel*) e  $I(\mathbf{x})$  fornece a intensidade em nível de cinza (brilho) do ponto  $\mathbf{x}$ .

Uma imagem digital é obtida a partir de uma imagem analógica por meio de um processo de amostragem e quantização, denominado digitalização []. Basicamente, a idéia é sobrepor uma matriz uniforme sobre uma imagem analógica e atribuir um valor de intensidade para cada elemento desta matriz. O processo de amostragem da imagem está relacionado com o número de linhas e colunas desta matriz, que determina a resolução da imagem discreta. Já a quantização define a quantidade de bits que é necessária para representar uma intensidade em nível de cinza. Usualmente, imagens monocromáticas representam cada ponto do domínio por um *byte*.

## 2.2 Definições e Conceitos Matemáticos

Nesta seção, considera-se que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é o domínio de uma imagem  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e define-se  $(x_1, x_2)$  como um ponto deste domínio.

### 2.2.1 Operadores Diferenciais

**Gradiente:** O gradiente de uma imagem  $f$  é um operador definido por meio de derivadas de primeira ordem, dado pelo vetor

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad (2.2)$$

sabendo-se que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  são derivadas parciais de  $f$  com relação a  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. A magnitude do gradiente é calculada como

$$mag(\nabla f) = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2}, \quad (2.3)$$

e a direção do gradiente é dada por

$$\Theta(x_1, x_2) = \tan^{-1} \left( \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial f / \partial x_1} \right). \quad (2.4)$$

**Laplaciano:** O Laplaciano de uma imagem  $f$  é definido por uma derivada de segunda ordem, de acordo com:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \quad (2.5)$$

**Divergente:** O operador divergente é definido pela soma das derivadas de primeira ordem de cada uma das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , como se segue:

$$div(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad (2.6)$$

## 2.2.2 Convolução

De acordo com *Gonzalez e Woods* [Gonzalez e Woods, 2008], convolução é o processo de movimentar uma máscara pela imagem calculando-se a soma dos produtos em cada ponto do domínio. Dada a imagem  $f$  e uma máscara  $\omega$ , a convolução é dada pela função:

$$f * \omega : \mathbf{x} \rightarrow \int_{\Omega} \omega(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.7)$$

Considerando-se o domínio discreto  $\Omega_D \subset \mathbb{R}^2$  e a máscara  $\omega_D$  de tamanho  $n_1 \times n_2$ , a Eq. (2.7) é calculada como

$$f * \omega = \sum_{w_1=-a}^a \sum_{w_2=-b}^b \omega_D(w_1, w_2) f(x_1 - w_1, x_2 - w_2) \quad (2.8)$$

dado que  $a = (n_1 - 1)/2$  e  $b = (n_2 - 1)/2$ , sabendo-se que  $n_1$  e  $n_2$  são números ímpares.

## 2.3 Equações Diferenciais Parciais

A formulação matemática da maioria dos problemas envolvendo taxas de variação de duas ou mais variáveis independentes, geralmente representando tempo, comprimento e ângulo, conduz a uma Equação Diferencial Parcial (EDP) ou a um conjunto de tais equações [Smith, 1985]. Estas equações são utilizadas para formular e fornecer a solução de problemas que envolvem fenômenos físicos na natureza, como propagação de som, escoamento de fluidos, eletrodinâmica, elasticidade etc.

EDP's refletem dois tipos básicos de fenômenos físicos: transientes e estacionários. Os primeiros são regidos por equações que descrevem a variação de uma grandeza física no tempo e no espaço. Por sua vez, os escoamentos estacionários pressupõem um estado em que o valor da grandeza física não se altera no tempo, fazendo com que as equações relacionem-se somente com sua grandeza espacial [Fortuna, 2000].

As seções seguintes definem conceitualmente as EDP's, as classificações destas equações e discutem os métodos de aproximação de EDP's, juntamente com todas as condições e restrições envolvidas.

### Definição

De um modo geral, uma EDP é uma equação que contém uma ou mais funções desconhecidas de duas ou mais variáveis e suas derivadas parciais em relação a essas variáveis.

Considere a equação diferencial em duas variáveis  $x$  e  $y$ , que não necessariamente representam coordenadas espaciais:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0, \quad (2.9)$$

onde as variáveis  $a, b, c, d, e, f$ , e  $g$  podem ser funções das variáveis independentes  $x$  e  $y$  e da variável dependente  $u$ , no qual é definida dentro de uma região  $\Omega$  no plano  $x-y$ , ou podem ser constantes.

Alternativamente, pode-se utilizar a seguinte notação para os termos de uma EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x \equiv u' \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx} \equiv u''$$

A solução de uma EDP em uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  implica na obtenção de valores para a variável dependente em cada ponto de  $\Omega$ . Como podem ser obtidas diversas soluções a partir de uma EDP, a seleção de uma função  $u$  que é a solução para o problema exige imposição de restrições que a caracterizem. Tais restrições são denominadas condições inicial e de contorno.

Uma condição inicial é uma restrição que é imposta em todo o domínio da EDP no instante de tempo inicial. Em outras palavras, são valores da solução e/ou suas derivadas em pontos específicos, no caso para o instante inicial de tempo  $t_0$ . Geralmente, são escritos da seguinte maneira:

$$u(x, y, t_0) = u_0$$

Já as condições de contorno, ou de fronteira, são condições que devem ser impostas em todos os pontos do contorno de região  $\Omega$  onde a EDP está definida, como mostra a Figura 2.1, dado o vetor normal  $\vec{n}$ .

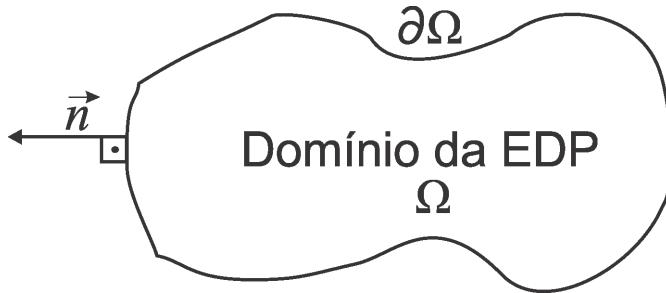


Figura 2.1: Domínio de uma EDP, juntamente com seu contorno

Erros na especificação destas condições fazem com que a solução obtida não seja satisfatória e se distancie do problema físico modelado.

Um tipo de classificação de uma EDP se refere à ordem, que é o grau do expoente da maior derivada parcial presente na equação. Por exemplo, a Eq. (2.9) é classificada como uma equação diferencial de segunda ordem.

A EDP pode ser resolvida tanto analiticamente como numericamente [Fortuna, 2000]. Em uma abordagem analítica, objetiva-se encontrar uma solução fechada para o problema a partir de simplificações teóricas no modelo matemático da EDP. Na abordagem numérica, a região  $\Omega$  de uma EDP é discretizada para que soluções aproximadas sejam calculadas com uma certa

taxa de erro. Como o foco do presente trabalho é a obtenção da solução numérica das EDP's, algumas considerações devem ser feitas no que diz respeito à região discreta destas EDP's.

As condições iniciais e de contorno, as funções coeficientes e variáveis correspondem ao problema modelado por uma EDP. Para que seja possível resolver numericamente este problema, é importante que ele esteja *bem posto*, isto é, que a solução:

- exista;
- seja única;
- e que dependa continuamente das condições inicial e de contorno.

Caso uma destas restrições não seja satisfeita, a EDP é mal-posta.

A Seção seguinte descreverá um método pelo qual uma solução numérica de uma EDP pode ser calculada de uma maneira simples e computacionalmente eficiente.

### 2.3.1 Método de Diferenças Finitas

Existem diversos modelos na literatura que tratam sobre a modelagem de aproximações para a soluções das EDP's. Um método bastante popular é o *Método das Diferenças Finitas*, onde o domínio da EDP é discretizado em pontos e as operações algébricas podem facilmente tratadas computacionalmente. O conjunto destes pontos é denominado malha computacional e possui estrutura semelhante à uma matriz computacional, como pode ser visto na Figura 2.2.

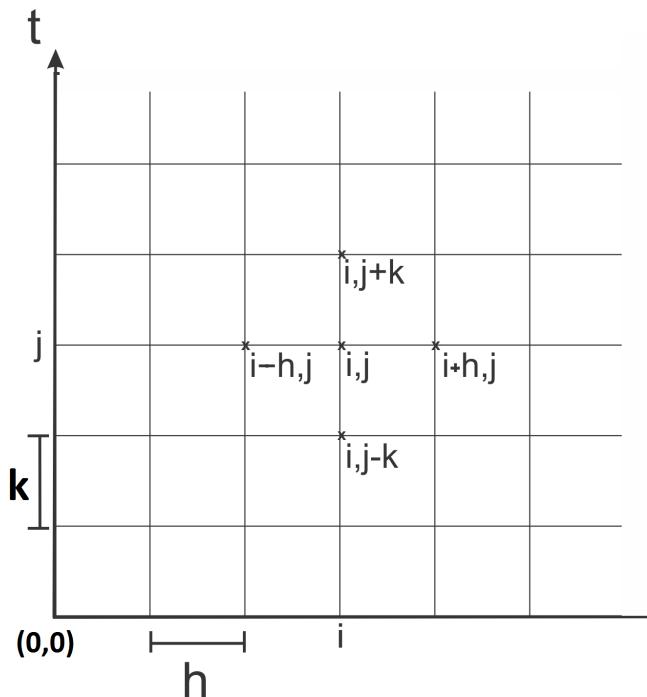


Figura 2.2: Malha Computacional

Seja  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis independentes  $x$  e  $y$  ( $u = u(x, y)$ ). Pode-se subdividir o plano  $xy$ , formado pela função  $u$ , em células retangulares iguais com espaçamento nas laterais  $\delta x = h$  no eixo  $x$  e  $\delta y = k$  no eixo  $y$ . Define-se assim que um ponto desta malha é formado pela coordenada  $(x_i, y_j)$ , onde

$$\begin{aligned}x_i &= x_0 + ih \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots \\y_j &= y_0 + jk \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

sendo que  $(x_0, y_0)$  é o ponto de referência do sistema de coordenadas  $xy$ . A coordenada  $(0, 0)$  é comumente utilizada para designar este ponto.

É importante observar que quanto maior o número de pontos discretos, ou, quanto mais fina for a malha, melhores serão as aproximações numéricas obtidas para uma EDP. Assim, os erros de arredondamento e discretização são minimizados, no entanto, o processamento resultará em maior custo computacional.

A discretização da região  $\Omega$  consiste em sobrepor o domínio com uma malha computacional como indicado na Figura 2.3, com espaçamentos  $h$  e  $k$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Logo, os valores de grandeza da EDP são relacionados com os pontos de malha  $(x_i, y_j)$ , tornando-se possível obter expressões algébricas que são escritas em função destes pontos de malha. Tais expressões são denominadas *aproximações por diferenças finitas* e o resultado final desse processo de discretização é uma equação algébrica denominada *Equação de Diferenças*.

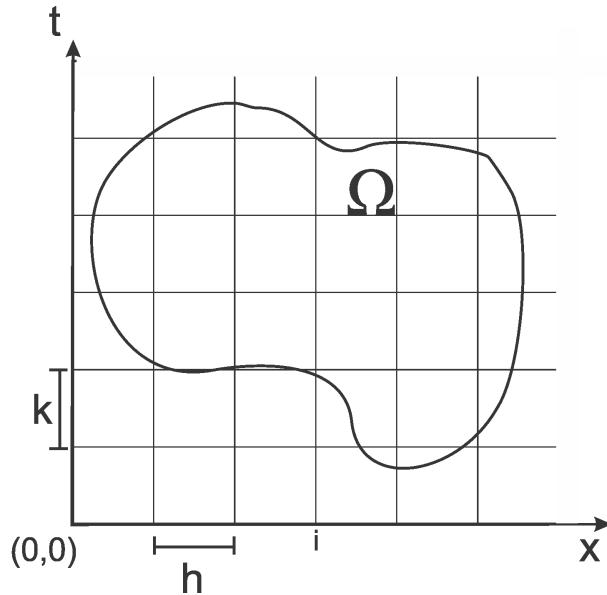


Figura 2.3: Região coberta por uma malha

Vale ressaltar que as ED's retornam soluções aproximadas, pois podem ocorrer erros de aproximação numérica das condições inicial e de contorno, erros de discretização e de arredondamento nos cálculos feitos pelo computador.

As aproximações por diferenças finitas são obtidas fazendo-se expansões em Série de Taylor, considerando-se o espaçamento  $h$  e  $k$  da malha computacional. Para isso, considere uma função  $u = u(x, y)$  contínua e que possua apenas derivadas contínuas. Desta maneira, é possível expandir  $u$  em série de Taylor da seguinte maneira:

$$u(x + h, y) = u(x, y) + hu'(x, y) + \frac{1}{2!}h^2u''(x, y) + \frac{1}{3!}h^3u'''(x, y) + \dots \quad (2.10)$$

$$u(x - h, y) = u(x, y) - hu'(x, y) + \frac{1}{2!}h^2u''(x, y) - \frac{1}{3!}h^3u'''(x, y) + \dots \quad (2.11)$$

Desprezando-se o termo  $\frac{1}{2!}h^2u''(x, y) + \frac{1}{3!}h^3u'''(x, y) + \dots$  da equação (2.10), obtém-se:

$$u'(x, y) = \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} \quad (2.12)$$

que é a aproximação progressiva para derivada de primeira ordem. Analogamente, obtemos em (2.11)

$$u'(x, y) = \frac{u(x, y) - u(x - h, y)}{h} \quad (2.13)$$

a aproximação regressiva para a primeira derivada.

Somando-se as expressões das Eqs. (2.10) e (2.11), tem-se que

$$u(x + h, y) + u(x - h, y) = 2u(x, y) + h^2u''(x, y) + \frac{2}{4!}h^4u'''(x, y) + \dots \quad (2.14)$$

Desprezando-se o termo  $\frac{2}{4!}h^4u'''(x, y) + \dots$  da Eq. (2.14), obtém-se:

$$u''(x, y) = \frac{u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)}{h^2} \quad (2.15)$$

que é a aproximação por diferenças centradas para derivadas de segunda ordem. Caso seja feita a subtração entre as Eqs. (2.10) e (2.11), tem-se que

$$u(x + h, y) - u(x - h, y) = 2hu'(x, y) + \frac{2}{3!}h^3u'''(x, y) + \dots \quad (2.16)$$

no qual despreza-se os termos de ordem maior ou igual a 3, obtendo-se

$$u'(x, y) = \frac{u(x + h, y) - u(x - h, y)}{2h} \quad (2.17)$$

que é a diferença central para derivada de primeira ordem. As aproximações para as derivadas na direção  $y$  são obtidas de maneira análoga.

Geralmente, os métodos de diferenças finitas fornecem soluções satisfatórias uma vez aproximadas de uma fórmula analítica. No entanto, estes métodos não são restritos aos problemas nos quais as soluções analíticas não podem ser encontradas, onde as soluções numéricas obtidas

são mais eficientes.

### 2.3.2 Convergência

A convergência é uma condição extremamente importante para verificar se a solução de uma ED é uma boa aproximação em relação a uma solução de uma EDP parabólica ou hiperbólica.

Geralmente, a convergência de uma ED é demonstrada utilizando-se o *Teorema da Equivalência de Lax*, onde a partir de um problema linear de valor inicial e de contorno bem posto e de um esquema de diferenças finitas que satisfaz a condição de consistência, uma condição necessária e suficiente para a convergência é a estabilidade numérica.

Formalmente, se  $U$  representa a solução exata de uma EDP com variáveis independentes  $x$  e  $y$ , e  $u$  é a solução exata da ED aproximada da EDP, então a ED converge quando  $u$  tende para  $U$  em um ponto fixo ou em um determinado nível de tempo, os espaçamentos  $\delta x$  e  $\delta y$  tendem a zero.

#### Consistência

A consistência de uma ED ocorre quando sua solução numérica converge para a solução exata da EDP aproximada quando os espaçamentos  $h$  e  $k$  da malha tendem a zero. Assim, verifica-se que o conjunto de soluções da ED faz parte do conjunto de soluções da EDP.

Para garantir a consistência de uma ED em relação a uma EDP, deve-se calcular o Erro de Truncamento Local da função aproximada da EDP e verificar se este tende a zero quando os espaçamentos  $h$  e  $k$  da malha tendem a zero.

#### Estabilidade

Um esquema numérico é dito estável quando o mesmo tem a capacidade de impedir o crescimento de erros originados pelas discretizações das equações, arredondamentos em cálculos feitos pelo computador etc. Em outras palavras, esses erros permanecem limitados com o passar do tempo, fazendo com que os valores da solução numérica não cresçam ou diminuam arbitrariamente.

A estabilidade dos métodos numéricos pode ser classificada como:

*Incondicionalmente estável:* O método numérico será estável independentemente de valores como  $\delta x$  ou  $\delta y$ , não necessitando satisfazer nenhum tipo de critério ou condição;

*Condisionalmente estável:* O método numérico é considerado estável sob alguma restrição ou condição. Estas imposições envolvem a limitação superior ou inferior de valores de como  $\delta x$  ou  $\delta y$ ;

*Instável:* O método numérico será considerado instável se não for condicionalmente ou incondicionalmente estável.

Existem duas abordagens para garantir a estabilidade de um método numérico: o Critério da Matriz e o Critério de Von Newmann [Smith, 1985]. O primeiro é pouco utilizado na prática.

Já o segundo é baseado no princípio da superposição, onde o erro global é a soma dos erros mais simples, também conhecido por harmônicos.

## 2.4 Métodos Variacionais

Métodos variacionais são formulações baseadas em energia que tratam uma aplicação por meio de um problema de minimização, onde seu estado estacionário corresponde à solução desta aplicação. A notação de um problema de minimização possui a seguinte forma:

$$\min_u F(u) \quad (2.18)$$

onde  $F$  é um funcional de energia que deve ser contínuo e diferenciável. Basicamente, um funcional de energia é uma função de funções. A função  $u$  é um minimizador de  $F$ , isto é, uma função que minimiza o referido funcional.

Em se tratando de segmentação de imagens, o funcional da Eq. (2.18) pode ser expresso de várias formas, dependendo da natureza dos dados. Geralmente, um funcional de energia regularizado é composto por um termo de fidelidade e por um termo regularizador. O termo de fidelidade calcula uma energia com base em modelos matemáticos que utilizam propriedades de uma imagem de referência. Por sua vez, o termo regularizador é importante para o processo de difusão na imagem e é responsável por auxiliar o termo regularizador a manter as características mais importantes da imagem original. Genericamente, um termo regularizador pode ser descrito de acordo com

$$\mathcal{R}(I, u) = \int_{\Omega} |\mathcal{Q}u|^p \quad (2.19)$$

onde  $p$  é uma constante ou função que varia no intervalo  $[1, 2]$ , e  $\mathcal{Q}$  é algum dos operadores mencionados abaixo

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} I_d & \text{Operador Identidade} \\ \nabla & \text{Operador Gradiente} \\ \Delta & \text{Operador Divergente} \end{cases}$$

A escolha do operador  $\mathcal{Q}$  e da constante  $p$  depende do problema a ser modelado. Por exemplo, pode-se utilizar  $\mathcal{Q} = \nabla$  e  $p \neq 2$  para se detectar variações nas amplitudes da função  $u$ , ou até mesmo ruídos. Esta combinação enfatiza a importância na identificação/manutenção de bordas da imagem de referência  $I$ . Caso contrário, se  $p = 2$ , a suavização na imagem será maior, fazendo com que as bordas da imagem sejam deterioradas.

Um funcional de energia pode ser classificado como convexo e não-convexo. A propriedade da convexidade garante a obtenção de uma única solução (global). Já os funcionais não-convexos calculam soluções locais e costumam apresentar sensibilidade com relação às condições iniciais estabelecidas. A seguir, será detalhado uma estratégia para se obter a solução numérica de

funcionais de energia.

### 2.4.1 Equações de Euler-Lagrange

A busca por uma solução ótima de um método variacional requer a minimização de um funcional de energia. Uma maneira convencional de resolver um problema de minimização é determinar e resolver sua equação de Euler-Lagrange correspondente.

Uma equação de Euler-Lagrange é um método baseado em uma EDP que consiste em encontrar pontos críticos de um funcional  $F(u)$ . Seja o funcional de energia

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, u_x) dx \quad \text{onde} \quad a \leq x \leq b \quad (2.20)$$

onde a função  $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , denominada *Lagrangeano*, é assumida ser contínua e diferenciável no intervalo  $[a, b]$ , com condições de contorno  $u(a) = \mathcal{L}_1$  e  $u(b) = \mathcal{L}_2$ . Desta maneira, deve-se encontrar uma função  $u$  que minimiza estes tipos de funcionais.

Para o funcional apresentado na Eq. (2.20), utilizando-se de cálculo variacional, a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) = 0 \quad (2.21)$$

Esta idéia pode ser aplicada também em funcionais mais gerais. Por exemplo, para  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $(x_1, x_2) \in \Omega$ , tem-se que:

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) dx_1 dx_2 \quad (2.22)$$

gerando a seguinte equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{x_1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{x_2}} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Detalhes sobre a demonstração das Eqs. (2.21) e (2.23) podem ser encontradas em [Farlow, 1993].

## 2.5 Fundamentos de Probabilidade

Um experimento aleatório é o ato de medir um processo cuja resposta é incerta. O conjunto de todas as possíveis respostas de um experimento aleatório é o espaço amostral  $\mathbf{S}$ . Um evento  $E \subset \mathbf{S}$  corresponde ao subconjunto destas respostas. Baseado nisso, a probabilidade  $Pr$  é uma função de valor real definida no espaço amostral  $\mathbf{S}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- Para cada evento  $E \subset \mathbf{S}$ ,  $0 \leq Pr(E) \leq 1$ ;

- $P(\mathbf{S}) = 1$ ;
- Para eventos distintos  $E_1, E_2, \dots, E_K \subset \mathbf{S}$ ,  $Pr(\bigcup_{i=1}^K E_i) = \sum_{i=1}^K Pr(E_i)$

onde a probabilidade  $Pr(E)$  é dada pela fração de vezes que o evento  $E$  é observado em uma quantidade ilimitada de experimentos.

Considera-se uma variável aleatória um valor quantitativo que depende da resposta de um experimento aleatório. O valor de uma variável aleatória pode ser discreto ou contínuo. Assim, a partir de uma variável aleatória discreta  $X$ , a probabilidade de  $X$  possuir um valor  $t$  é dado pela probabilidade de todas as respostas  $e$  no qual  $X(e) = t$ :

$$Pr(X = t) = P(E = \{e | e \in \mathbf{S}, X(e) = t\}) \quad (2.24)$$

onde o lado direito da Eq. (2.24) é uma distribuição de probabilidade, já que a variável aleatória  $X$  é discreta. Caso  $X$  seja uma variável aleatória contínua, a probabilidade de  $X$  pertencer ao intervalo  $[a, b]$  é dada por:

$$Pr(a < X < b) = \int_a^b P(x) \quad (2.25)$$

sendo que  $P(x)$  é uma função de densidade de probabilidade (fdp).

Em processamento de imagens, especificamente no campo de segmentação de imagens, fdp's são bastante utilizadas como medidas de caracterização das diferenças das regiões da imagem. Para isso, as intensidades de uma imagem  $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são consideradas variáveis aleatórias, tornando possível o cálculo de critérios estatísticos sobre as regiões da imagem.

A seguir, são apresentadas duas categorias de métodos que podem ser utilizados para a estimativa destas fdp's.

### 2.5.1 Estimativa de Probabilidade

O uso de FDP's para descrever estatisticamente as regiões da imagem é útil quando as regiões possuem textura ou intensidades que variam muito em seus interiores [Houhou, 2009]. Para isso, são empregadas duas categorias de modelos que estimam fdp's, denominadas paramétricas e não-paramétricas.

#### Modelo Paramétrico

Modelos paramétricos impõem fortes hipóteses sobre as fdp's das regiões da imagem. Geralmente, escolhe-se uma distribuição Gaussiana para modelar estatisticamente as intensidades de uma imagem  $I$  sobre uma determinada região  $\Omega_i$ :

$$P_i(I(\mathbf{x}) | \{\mu_i, \sigma_i\}) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(I(\mathbf{x}) - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) , \quad (2.26)$$

onde  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  são a média e o desvio-padrão (variância) da região  $\Omega_i$ , respectivamente.

A média das intensidades de uma região  $\Omega_i$  da imagem é calculada como

$$\mu = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.27)$$

e é bastante utilizada para descrever imagens cujas regiões são constantes ou suaves nas intensidades. Já a variância  $\sigma_i^2$  é obtida como:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} (I(\mathbf{x}) - \mu)^2 d\mathbf{x}, \quad (2.28)$$

sendo útil na identificação de regiões que possuem intensidades bastante irregulares e heterogêneas.

### Modelo Não-Paramétrico

Modelos não-paramétricos são utilizados para a estimação de FDP's com o objetivo de fornecer uma descrição mais genérica em relação às distribuições das regiões da imagem. Uma característica particular deste modelos se refere ao fato de que nenhuma hipótese é feita sobre as FDP's das regiões da imagem. Uma técnica que pode ser utilizada para estimar estas FDP's desconhecidas se refere às *Janelas de Parzen* [Parzen, 1979], que suaviza localmente o histograma de intensidades da imagem. O modelo de Parzen é descrito como se segue

$$p_i(l) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} K(I(\mathbf{x}) - l) d\mathbf{x} \quad , \forall l \in \mathcal{L} \quad (2.29)$$

onde  $K$  é uma janela simétrica Gaussiana de média 0 e variância 1 e  $|\Omega_i|$  é uma norma pré-especificada da região  $\Omega_i$ .  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$  é o histograma da imagem, sendo que o elemento  $l$  é uma intensidade em nível de cinza.

## 2.6 Considerações Finais

Neste Capítulo, foram apresentados os principais conceitos que são importantes para o entendimento das formulações matemáticas presentes nesta dissertação. No próximo Capítulo, será descrita uma revisão bibliográfica sobre algumas das principais técnicas para segmentação de imagens, incluindo os métodos baseados em princípios variacionais que foram desenvolvidos ao longo dos últimos anos.

# Segmentação de Imagens

Este capítulo se dedica, exclusivamente, a explorar os fundamentos básicos sobre segmentação de imagens. Primeiramente, são descritos alguns métodos de segmentação baseados em descontinuidades, como os operadores baseados em derivadas parciais, *Contornos Ativos* e *Método Level Set*. Em seguida, são explorados os métodos de segmentação baseado em similaridade que utilizam de características das intensidades das regiões da imagem como critério de homogeneidade. Ainda, são brevemente discutidos alguns modelos para segmentação *soft* de imagens, que é o objeto de estudo desta dissertação.

## 3.1 Definição

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  o domínio de uma imagem  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Alguns processos de segmentação partitionam a imagem  $I$  em suas  $N$  subregiões  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  de tal forma que:

1.  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$ ;
2.  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  para todo  $i$  e  $j$ , onde  $i \neq j$ ;
3.  $Q(\Omega_i) = VERDADEIRO$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ , considerando se um critério de homogeneidade de região  $Q$  da região  $\Omega_i$ ;
4.  $Q(\Omega_i \cup \Omega_j) = FALSO$  para quaisquer regiões adjacentes  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ .

A propriedade 1 diz que todo ponto do domínio deve pertencer à alguma região. Isto significa que após um processo de segmentação, não deve existir vácuo, que são pontos do domínio que não estão rotulados com nenhuma das  $N$  regiões da imagem. A propriedade 2 diz que todas as regiões devem ser disjuntas entre si, isto é, um ponto do domínio está relacionado

exclusivamente a uma única região da imagem. A propriedade 3 se refere às condições que devem ser satisfeitas pelos pontos pertencentes em uma determinada região. A propriedade 4 diz que a união de duas regiões adjacentes não deve satisfazer as condições impostas pelo predicado  $Q$ .

De acordo com [Gonzalez e Woods, 2008], existem duas principais abordagens para segmentação de imagens monocromáticas: segmentação baseada em descontinuidade e similaridade. A primeira consiste em segmentar a imagem analisando-se as mudanças abruptas nos níveis de cinza, caracterizadas pela presença de pontos isolados, linhas ou bordas na imagem. A última abordagem tem como propósito agregar os pontos do domínio que satisfazem um critério de similaridade das regiões da imagem. Estas duas abordagens são exploradas separadamente nas Seções subsequentes.

## 3.2 Segmentação baseada em Descontinuidade

Neste tipo de segmentação, assume-se que a borda do objeto e do fundo da imagem são suficientemente diferentes uma da outra, tornando possível suas detecções utilizando-se as intensidades destas regiões. Neste sentido, devem ser encontrados pontos da imagem nos quais a intensidade se altera abruptamente, o que significa que tais pontos estão na divisa de duas regiões distintas no que se refere às características na intensidade.

### 3.2.1 Derivadas de Primeira e Segunda Ordem

Diferenças nas intensidades de uma imagem podem ser detectadas utilizando-se derivadas de primeira ou segunda ordem. A diferença entre elas se baseia no fato de que a de segunda ordem utiliza informações de dois pontos vizinhos adjacentes em relação ao ponto central, enquanto que na derivada de primeira ordem, apenas um dos vizinhos é utilizado. Com isso, tais derivadas possuem maior sensibilidade na identificação de mudanças abruptas de intensidade do que na derivada de primeira ordem, além de enfatizar o início e o final de mudanças graduativas na intensidade. Assim, espera-se que derivadas de segunda ordem sejam mais sensíveis na detecção de detalhes finos e ruídos da imagem. Como resultado, as derivadas de primeira ordem produzem resultados cujas bordas são mais grossas e suaves comparadas aos resultados das derivadas de segunda ordem, que apresentam bordas mais finas e firmes.

As derivadas de primeira e segunda ordem são importantes para se definir o uso de operadores de detecção de bordas como o *Gradiente* e o *Laplaciano*. O primeiro utiliza informação proveniente da magnitude do gradiente da imagem para a identificação de mudanças locais das intensidades. O gradiente é um vetor que indica os locais nos quais as intensidades sofrem maior variação, como descrito na Seção 2.2. Exemplos de métodos de detecção de bordas pelo uso de derivadas de primeira ordem recaem sobre os *operadores de Roberts*, *operadores de Prewitt* e *operadores de Sobel* [Gonzalez e Woods, 2008]. Estes operadores são compostos por duas máscaras, uma utilizada na direção vertical e outra na direção horizontal, que são convoluídas

com a imagem original, resultando em uma imagem com as bordas detectadas. Um método para detecção de bordas bastante popular se refere ao operador de *Canny*, proposto por *Canny et al.* [Canny, 1986], que determina a localização de pontos de borda por meio de orientação de magnitude do gradiente. Além disso, existem etapas que consistem na suavização da imagem e na limiarização que suprime magnitudes menores para melhorar a precisão na identificação das bordas.

Diferentemente do operador *Gradiente*, o operador *Laplaciano* é definido em termos de derivadas de segunda ordem. Entre os métodos que utilizam derivadas de segunda ordem, destaca-se o operador *Laplaciano do Gaussiano* (LoG) [Marr e Hildreth, 1980], que combina a filtragem Gaussiana com o uso de um operador *Laplaciano*. Embora os contornos dos objetos sejam fechados, suas arestas são arredondadas e a conectividade entre as junções de contornos são comprometidas devido à suavização que ocorre no processo de convolução.

A Figura 3.1 apresenta alguns exemplos de segmentação utilizando abordagens baseadas em descontinuidades aplicadas na Figura 3.1(a). A Figura 3.1(b) mostra o resultado de uma detecção de bordas utilizando a magnitude do gradiente. Um resultado obtido pelo método de *Canny* é mostrado na Figura 3.1(c). A Figura 3.1(d) ilustra a detecção de bordas pelo operador *Laplaciano*. Já a Figura 3.1(e) mostra o resultado obtido pelo operador LoG.

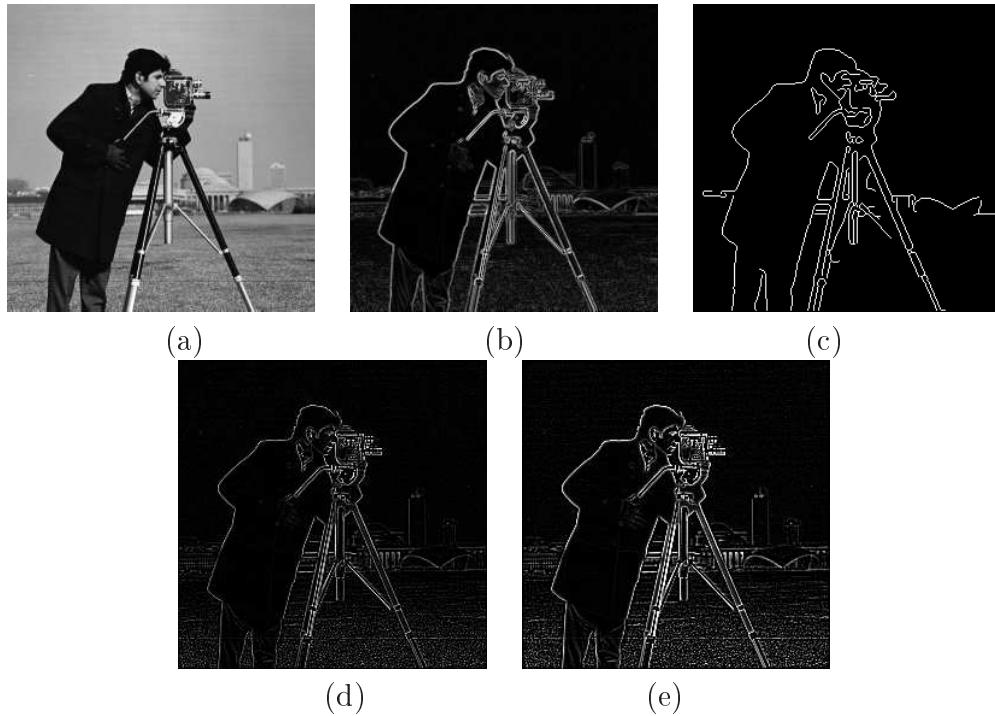


Figura 3.1: Segmentação de uma imagem ( $256 \times 256$ ) baseada em descontinuidade: (a) Imagem original; (b) Magnitude do gradiente de  $I$ ; (c) Resultado obtido pelo operador de *Canny*; (d) Segmentação resultante pelo *Laplaciano*; (e) Resultado obtido pelo operador LoG.

Uma categoria de técnicas que tem se tornado popular nos últimos anos se refere aos *Métodos Variacionais*. Tais métodos são obtidos pela minimização de funcionais de energia formulados

sob critério de homogeneidade de regiões da imagem. Métodos variacionais têm sido amplamente utilizados e estudados em processamento de imagens nas duas últimas décadas devido à sua flexibilidade na modelagem e várias vantagens na implementação numérica. Na Seção seguinte, será feito um estudo sobre a técnica de *Contornos Ativos* e sua extensão, o modelo *Balão*.

Outra possibilidade se refere ao uso de modelos baseados em Equações Diferenciais Parciais (EDP's), como o *Método Level Set*, que também será explorado adiante.

Nestes métodos, considera-se que  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é a imagem a ser segmentada, onde o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é aberto e limitado, cujas bordas são dadas por  $\partial\Omega$ .

### 3.2.2 Contornos Ativos

Em 1987, Kass et al. desenvolveram um método de segmentação baseado na propagação de curvas dinâmicas, denominado *Método dos Contornos Ativos* [Kass et al., 1988]. Este método consiste em subdividir um domínio  $\Omega$  em dois subdomínios disjuntos  $\Omega_1$  e  $\Omega \setminus \Omega_1$  utilizando uma curva dinâmica fechada, que pode se mover dentro do domínio sob a influência de forças internas, que são compostas por um termo suavizador da curva, e forças externas, composta por um termo de atração da curva para as bordas do objeto.

Seja uma curva dinâmica  $\Gamma$  parametrizada como  $\Gamma(q) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A solução do *Método dos Contornos Ativos* é obtida ao minimizar o seguinte funcional de energia:

$$F_{CA}(\Gamma) = \zeta \int_0^1 |\Gamma'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |\Gamma''(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(\Gamma(q))|^2 dq , \quad (3.1)$$

onde  $\zeta$ ,  $\beta$  e  $\lambda$  são parâmetros positivos que balanceiam seus respectivos termos. No funcional de energia da Eq. (3.1), os dois primeiros termos são responsáveis por controlar a suavização da curva e o último termo direciona a curva  $\Gamma$  para as bordas do objeto de interesse da imagem.

Na prática, o método pode apresentar algumas limitações. Uma delas se refere ao fato da curva  $\Gamma$  não estar suficientemente próxima às bordas do objeto de interesse da imagem. Outra limitação ocorre quando não existe nenhuma força atuando sobre a curva  $\Gamma$ , fazendo com que ela encolha com o passar do tempo. Além disso, atenta-se ao fato de que o *Método dos Contornos Ativos* calcula soluções locais que são altamente dependentes das condições iniciais, já que o funcional da Eq. (3.1) é não-convexo [Cremers et al., 2007]. Assim, para que o método retorne uma solução satisfatória, é necessário que a curva  $\Gamma$  esteja posicionada próxima ao objeto de interesse, assim as forças que nela atuam possam direcioná-la até as bordas do objeto  $\partial\Omega_1$ .

#### Modelo Balão

Em 1991, Cohen [Cohen, 1991] propôs o *Método Balão*, que extende o método dos *Contornos Ativos* ao aderir um termo de pressão  $\rho \int_{\Omega_1} d\mathbf{x}$  na força externa do funcional de energia da Eq.

(3.1) fazendo com que a curva  $\Gamma$  se comporte como um balão em processo de inflação.

O funcional em questão é descrito abaixo:

$$F_{BAL}(\Gamma) = \alpha \int_0^1 |\Gamma'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |\Gamma''(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(\Gamma(q))|^2 dq - \rho \int_{\Omega_1} d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

onde  $\rho$  é uma constante que balanceia a amplitude da força normal no ponto  $q$  (valores positivos fazem a curva inflar, enquanto que com valores negativos ocorre um processo de deflação da curva  $\Gamma$ ) e o termo de pressão.

O que diferencia o funcional de energia da Eq. (3.2) em relação ao funcional da Eq. (3.1) é o termo de pressão. Este termo utiliza de informações do gradiente da imagem e tenta localizar uma curva em um ponto máximo de gradiente, ou seja, as forças provenientes do gradiente da imagem atraem o contorno  $\Gamma$  para as bordas dos objetos nela contidos ao invés de calcular o gradiente e extrair seu valor máximo.

Resumidamente, o modelo *Balloon* maximiza a área interna da curva dinâmica  $\Gamma$  enquanto suaviza o contorno e maximiza o gradiente da imagem em cada ponto da referida curva. Apesar das melhorias propostas por este método, ainda existe a dificuldade de se manipular mudanças topológicas e geométricas na imagem como no método *Contornos Ativos*. Além disso, o resultado final depende das condições iniciais, já que o funcional de energia (Eq. (3.2)) é não-convexo.

### 3.2.3 Método Level Set

*Osher e Sethian* [Osher e Sethian, 1988] propuseram o *Método Level Set*, que é baseado na propagação de curvas dinâmicas com uma representação implícita. Neste método, mudanças topológicas durante a propagação da curva dinâmica, como divisões e quebras, são automaticamente e eficientemente tratadas. As facilidades apresentadas na representação da curva e na resolução numérica fizeram com que os Métodos *Level Set* se tornassem bastante populares, sendo utilizados para problemas de classificação [Samson et al., 2000], visão computacional [Osher et al., 2003], entre outros.

Em um Método *Level Set*, uma curva dinâmica  $\Gamma$ , também chamada de interface, divide o domínio  $\Omega$  em dois subdomínios disjuntos e é representada implicitamente como o nível zero de uma função *Lipschitz*  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (ou função level set) tal que

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} < 0 & \text{se } \mathbf{x} \text{ é interno a } \Gamma \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma \\ > 0 & \text{se } \mathbf{x} \text{ é externo a } \Gamma \end{cases}$$

onde  $\phi(\mathbf{x}, t)$  se refere à posição da curva no domínio  $\Omega$  em um dado instante de tempo  $t$ . A Figura 3.2 ilustra uma representação para uma função *level set*. A Figura 3.2(a) apresenta a

função *level set* e a Figura 3.2(b) mostra sua interface associada.

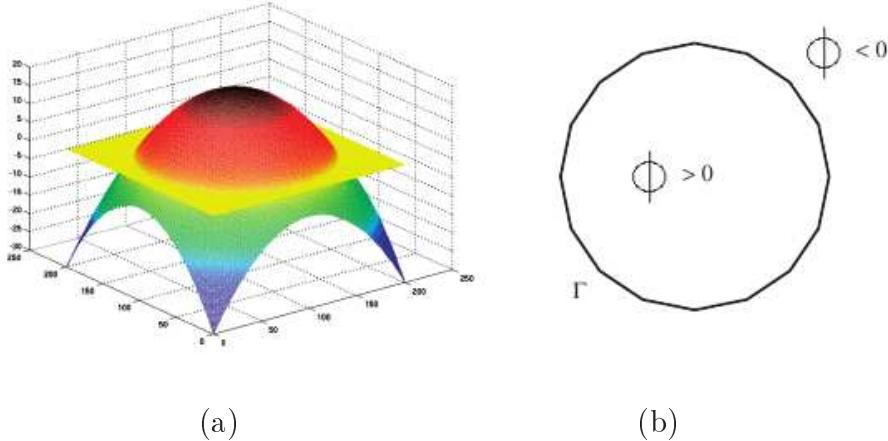


Figura 3.2: (a) Função level set  $\phi$ ; (b) Interface  $\Gamma$  em nível zero. Imagem extraída de [Lie et al., 2006] com adaptações.

Uma maneira típica de se definir uma função level set  $\phi$  é por meio de uma função de distância com sinal, como, por exemplo, a distância Euclidiana  $d_E$ :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} -d_E(\mathbf{x}, \Gamma) & \text{se } \mathbf{x} \text{ é interno a } \Gamma \\ d_E(\mathbf{x}, \Gamma) & \text{se } \mathbf{x} \text{ é externo a } \Gamma \end{cases}$$

A função level set  $\phi$  propaga-se na direção normal pelo domínio  $\Omega$  e com velocidade  $F$  através da *Equação Level Set*, dada pela Equação Diferencial Parcial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F|\nabla \phi| = 0, \quad (3.3)$$

sabendo-se que  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x})$  é a posição inicial da curva no domínio  $\Omega$  e  $F$  é o termo de velocidade de propagação da curva. Um caso típico para  $F$  é o movimento pelo método de *curvatura média*, onde

$$F = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right) \quad (3.4)$$

que é a curvatura de  $\phi$  no ponto  $\mathbf{x}$ . Uma outra alternativa se refere ao uso de um *Contorno Ativo Geométrico* [Caselles et al., 1997], cujo termo  $F$  é dado por

$$F = g(|\nabla I|)|\nabla \phi| \left( \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right) + \rho \right) \quad (3.5)$$

onde a interface  $\Gamma$  se propaga até as bordas do objeto de interesse da imagem. A constante  $\rho$  é um termo de correção que evita que a força que movimenta a curva não seja nula ou negativa. A função  $g$  é um potencial de bordas positivo definido como uma função decrescente com relação

ao gradiente da imagem. Esta função determina valores positivos e próximos de 1 para pontos do domínio pertencentes a regiões homogêneas e valores próximos a zero nas bordas da imagem:

$$g(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \beta |\nabla I|^2} \quad (3.6)$$

em que  $\beta$  é uma constante positiva, responsável por controlar a influência do gradiente da imagem.

A Eq. (3.3) é resolvida utilizando-se de métodos numéricos para Equações Diferenciais Parciais, como por exemplo o *método das Diferenças Finitas*. O cálculo da propagação da curva pela Eq. (3.3) pode degradar a função *level set* por causa da instabilidade numérica. Com a finalidade de contornar este problema, é utilizada uma equação de reinicialização, dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{sign}(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|) \quad (3.7)$$

em que  $\text{sign}(\phi_0)$  é calculado como

$$\text{sign}(\phi(\mathbf{x}, t)) = \begin{cases} -1 & \text{se } \phi(\mathbf{x}, t) < 0 \\ 0 & \text{se } \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \\ +1 & \text{se } \phi(\mathbf{x}, t) > 0 \end{cases}$$

Apesar de ser uma ferramenta numérica robusta e eficiente, *Métodos Level Set* calculam a solução numérica por Equações de Euler-Lagrange associadas com esquema gradiente-descendente, o que torna o processo de convergência lento. Outro efeito indesejado da solução numérica se refere à necessidade de reinicialização da função *level set* para evitar a ocorrência de instabilidade numérica.

A Figura 3.3 apresenta um exemplo de segmentação realizada pelo *Método Level Set* utilizando o termo de velocidade dado pela Eq. (3.5). A Figura 3.3(a) se refere à imagem original e a Figura 3.3(b) mostra a função *level set*  $\phi$  em sua posição inicial, demarcada pelo quadrado com linha branca. As Figuras 3.3(c) e 3.3(d) ilustram os estados intermediários desta função  $\phi$ . A Figura 3.3(e) mostra a posição final da função *level set*.

Nas próximas Seções, serão discutidos algumas técnicas para segmentação baseada em similaridade, onde destacam-se *Crescimento de Regiões*, *Divisão-e-Fusão*, e os métodos variacionais *Mumford-Shah* e *Chan-Vese*. Mais adiante, são apresentados alguns modelos para segmentação *soft* de imagens, que se fundamentam em uma versão *soft* do modelo *Mumford-Shah*.

### 3.3 Segmentação baseada em Similaridade

A segmentação baseada em similaridade consiste em particionar uma imagem em suas regiões constituintes que são similares de acordo com um critério pré-definido de homogeneidade. Métodos desta categoria se baseiam nas características das regiões da imagem, como as inten-

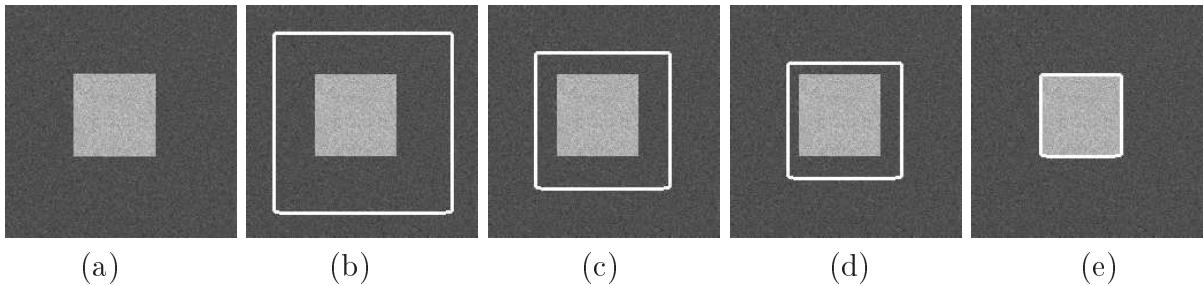


Figura 3.3: Imagem sintética texturizada ( $256 \times 256$ ) segmentada pelo *Método Level Set*: (a) Imagem original; (b)  $\phi$  inicial; (c-d) Estados intermediários para a função  $\phi$  - iteração 40 e 50, respectivamente; (e) Função  $\phi$  final após 300 iterações.

sidades ou propriedades, para formular tal critério.

Uma das maneiras mais simples de se segmentar uma imagem se refere à limiarização. Seu funcionamento consiste em particionar o histograma de uma imagem utilizando um ou mais limiares (*thresholds*) [Pedrini e Schwartz, 2008]. Uma operação de limiarização pode ser definida como

$$I_L(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } I(\mathbf{x}) \leq T \\ 1 & \text{se } I(\mathbf{x}) > T \end{cases}$$

onde  $T$  é o limiar e  $I_L$  é uma imagem binária, onde pontos pertencentes ao objeto possuem valor 1 e pontos pertencentes ao fundo da imagem possuem valor 0. Vale ressaltar a importância do limiar  $T$  para o sucesso da segmentação. Existem diversos métodos estatísticos que calculam automaticamente o valor deste limiar, como o método de *Otsu* [Otsu, 1979] e algumas técnicas iterativas, como *Tentativa e Erro* [Gonzalez e Woods, 2008].

A Figura 3.4 apresenta um exemplo de segmentação por limiarização, onde a imagem da Figura 3.4(a) possui intensidades que variam entre  $[0, 255]$ . A Figura 3.4(b) ilustra a imagem binária resultante utilizando-se um limiar  $T = 50$  e a Figura 3.4(c) é o resultado final utilizando-se o limiar calculado pelo método de *Otsu*, no qual foi obtido  $T = 121$ .

### 3.3.1 Crescimento de Regiões

É uma técnica de segmentação *bottom-up*, no qual pontos que satisfazem um critério de homogeneidade são agregados em regiões. Nesta técnica, cada região da imagem é iniciada a partir de um ponto “semente”. Estas regiões crescem à medida que pontos adjacentes que satisfazem o critério de homogeneidade aderem à região.

O critério de similaridade deve ser fixado de acordo com as características das regiões da imagem. Geralmente, são empregadas medidas estatísticas com base nas intensidades da região, como momentos e outros critérios para diferenciar texturas. Já as condições de parada, que verificam se um ponto é similar à uma região da imagem, são modeladas utilizando-se de testes



Figura 3.4: Segmentação por limiarização: (a) Imagem original; (b) Imagem binária utilizando limiar  $T = 50$ ; (c) Resultado de segmentação utilizando limiar calculado pelo *Método de Otsu* [Otsu, 1979].

condicionais baseados nos critérios de homogeneidade das regiões da imagem.

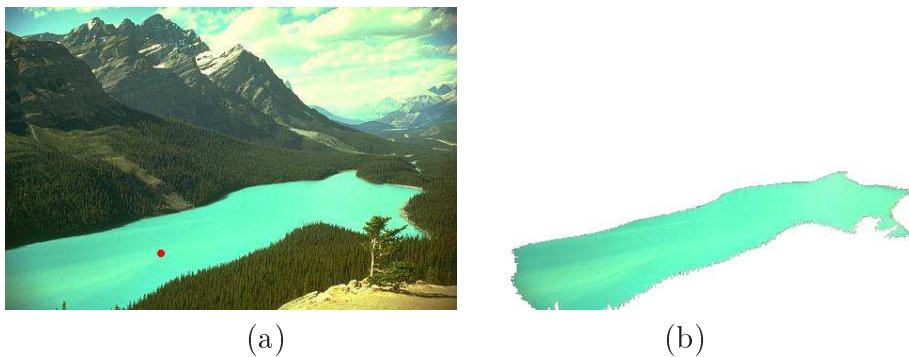


Figura 3.5: (a) Imagem original e a semente em vermelho; (b) Imagem segmentada utilizando o algoritmo de *Crescimento de Regiões*.

A Figura 3.5 ilustra um exemplo de segmentação pelo método de *Crescimento de Regiões* onde deseja-se segmentar o rio. A imagem original e o ponto semente, em vermelho, são mostrados pela Figura 3.5(a), enquanto que a Figura 3.5(b) apresenta o resultado final. Neste exemplo, utilizou-se a cor RGB como critério de similaridade e a distância Euclidiana como condição de parada.

Uma dificuldade inerente ao algoritmo de *Crescimento de Regiões* se refere à escolha da posição inicial das sementes. Por exemplo, o posicionamento de duas sementes em uma região homogênea é redundante, uma vez que com apenas uma semente pode-se identificar a região inteira.

### 3.3.2 Divisão e Fusão

Este método utiliza uma estratégia diferente do algoritmo de *Crescimento de Regiões*, pois não utiliza pontos semente. A idéia desta abordagem consiste em subdividir a imagem em blocos quadrados onde um determinado critério de homogeneidade de regiões  $Q$  não é satisfeito. Este processo deve se repetir até que nenhuma subdivisão seja possível, isto é, quando todas as

regiões satisfazerem  $Q$ . Agora, deve-se unir todas as regiões adjacentes que satisfaçam  $Q$ , até que nenhuma união seja possível. O algoritmo é descrito nos seguintes passos:

1. Desmembre em quatro quadrantes disjuntos qualquer região  $\Omega_i$  no qual  $Q(\Omega_i) = \text{FALSO}$ .
2. Quando nenhuma divisão for mais possível, une quaisquer regiões  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  no qual  $Q(\Omega_i \cup \Omega_j) = \text{VERDADEIRO}$ .
3. Pare quando nenhuma divisão for mais possível.

### 3.3.3 Mumford-Shah

O modelo *Mumford-Shah* [Mumford e Shah, 1989] foi um dos primeiros métodos variacionais desenvolvidos para segmentação de imagens. Sua formulação serve de base para diversas técnicas de segmentação baseadas em região que vem sendo desenvolvidas até os dias atuais. Uma característica particular deste método é a capacidade simultânea de suavização da imagem e preservação das bordas, durante o processo de segmentação. Por isso, o método *Mumford-Shah* é útil tanto para remoção de ruídos, como para segmentação de imagens.

O funcional *Mumford-Shah* foi formulado considerando-se que, dada uma imagem  $I$ , deve-se determinar uma aproximação suave por partes  $s$  e um conjunto de bordas  $\Gamma$  que dividem as “partes” de  $s$ . Em outras palavras, deve-se calcular o par ótimo  $(s, \Gamma)$  minimizando-se o seguinte funcional de energia:

$$F_{MSS}(s, \Gamma) = \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - s(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \beta \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla s(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \rho \int_{\Gamma} dq , \quad (3.8)$$

onde  $\rho$  e  $\beta$  são parâmetros positivos para balanceamento de seus respectivos termos. No funcional de energia da Eq. (3.8), o primeiro termo verifica o quanto  $s$  está próximo de  $I$ , o segundo termo requer que  $s$  não varie muito no interior de cada “parte” e o terceiro termo mantém o menor tamanho possível para o conjunto de bordas  $\Gamma$ . Isto significa que a função  $s$  deve variar suavemente em seu interior e descontinuamente nas bordas.

A minimização do funcional da Eq. (3.8) resulta na obtenção do par ótimo  $(s, \Gamma)$ , onde  $\Gamma$  aproxima as bordas da imagem  $I$  e fornece a segmentação final, enquanto que  $s$  é suave somente em  $\Omega \setminus \Gamma$ . Na Figura 3.6, é ilustrado um exemplo de segmentação de uma imagem pelo método *Mumford-Shah*. A Figura 3.6(a) apresenta a imagem original ruidosa. A Figura 3.6(b) ilustra a função suave por partes  $s$  que aproxima a imagem  $I$ , onde pode-se observar a suavização e a preservação das bordas. A Figura 3.6(c) mostra a sobreposição do conjunto de bordas  $\Gamma$ , destacado em linha preta, sobre a imagem original.

Um caso particular do método *Mumford-Shah* da Eq. (3.8) ocorre quando  $\beta \rightarrow \infty$  e requer que  $s$  seja uma função constante por partes. Isto significa que  $s$  não varia no interior de cada

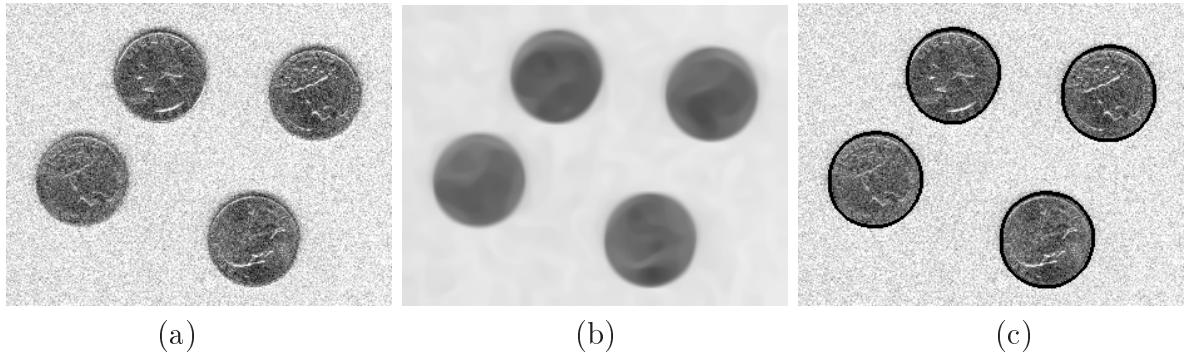


Figura 3.6: Segmentação de uma imagem ( $256 \times 256$ ) pelo método *Mumford-Shah*: (a) Imagem original ruidosa; (b) Função suave por partes que aproxima  $I$ ; (c) Conjunto de bordas  $\Gamma$  (destacado pela linha preta) sobreposto em  $I$ .

região, possuindo um valor constante  $c_i$  dentro de cada componente  $\Omega_i$ . Desta maneira, o funcional da Eq. (3.8) pode ser reescrito como

$$F_{MSC}(c_i, \Gamma) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (I(\mathbf{x}) - c_i)^2 d\mathbf{x} + \rho \int_{\Gamma} dq , \quad (3.9)$$

Assim, mantendo-se  $\Gamma$  fixo, verifica-se que o funcional da Eq. (3.9) é minimizado em relação à variável  $c_i$  calculando-se uma média aritmética da imagem  $I$  no componente  $\Omega_i$ . Na Figura 3.7, é ilustrado um exemplo de segmentação de uma imagem pelo caso constante do funcional *Mumford-Shah*. A Figura 3.7(a) apresenta a imagem original ruidosa. A Figura 3.7(b) ilustra a função constante por partes que aproxima a imagem  $I$ , onde duas constantes foram determinadas, uma delas com a intensidade mais baixa (as moedas) e a outra com intensidade mais alta (fundo). A Figura 3.7(c) mostra a sobreposição das bordas  $\Gamma$ , destacado em linha preta, sobre a imagem original.

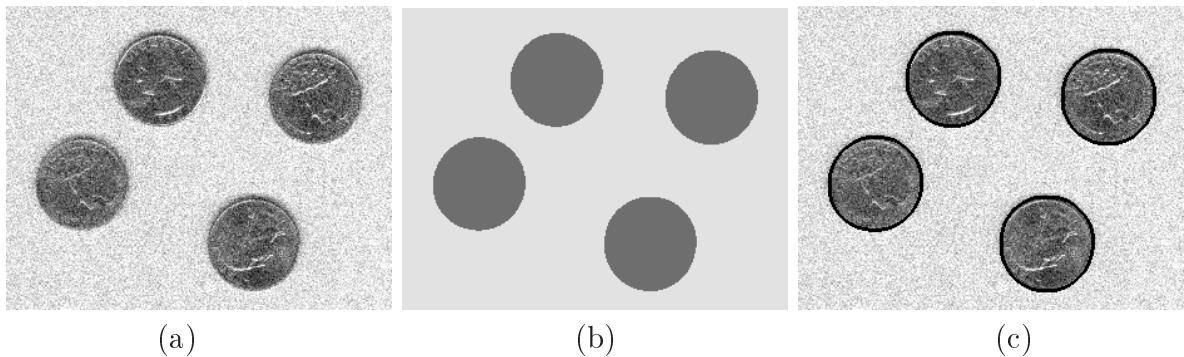


Figura 3.7: Segmentação pelo caso constante do funcional *Mumford-Shah*: (a) Imagem original ruidosa; (b) Função constante por partes que aproxima  $I$ ; (c) Conjunto de bordas  $\Gamma$  (destacado pela linha preta) sobreposto em  $I$ .

O funcional *Mumford-Shah* é difícil de ser estudado e implementado na prática, pois além

da não-convexidade do funcional das Eqs. (3.8) e (3.9), a aproximação  $s$  e o conjunto de bordas  $\Gamma$  não são conhecidos. Tal fato torna a discretização deste funcional uma tarefa um tanto complexa.

Diversas estratégias foram propostas para o cálculo da solução do funcional *Mumford-Shah*. Uma estratégia comum é calcular uma aproximação fraca para o funcional de *Mumford-Shah* utilizando a teoria da  $\Gamma$ -*Convergência* [Ambrosio e Tortorelli, 1990], proposta por *Ambrosio e Tortorelli*, que propuseram substituir o par minimizador  $(s, \Gamma)$  por duas funções suaves que são resolvidas por métodos numéricos de Equações Diferenciais Parciais. *Chambolle et al.* [Chambolle, 1995] aproximou o funcional da Eq. (3.9) por vários funcionais regulares definidos em um espaço de *Sobolev*, cujas soluções numéricas convergem para o funcional *Mumford-Shah*. Em posterior trabalho, *Chambolle e Dal Maso* [Chambolle e Dal Maso, 1999] utilizaram a teoria da *Convergência-Γ* baseada no *método dos Elementos Finitos* para obter uma aproximação fraca.

A seguir, é apresentado um modelo que resolve o funcional *Mumford-Shah* utilizando-se método *Level Set*. Tal modelo oferece facilidades na implementação, comparando-se as soluções sugeridas anteriormente.

### 3.3.4 Modelo Chan-Vese

*Chan e Vese* [Chan e Vese, 2001a] desenvolveram um método de segmentação que resolve o caso constante do método *Mumford-Shah* utilizando uma formulação *Level Set*. O objetivo é determinar um tipo de contorno ativo baseado em região que detecta objetos de uma imagem de referência sem a utilização do operador gradiente. Com isso, é obtido um contorno ativo menos sensível em relação à posição inicial e mais eficiente na segmentação de imagens contaminadas por ruído.

Para isso, [Chan e Vese, 2001a] propuseram minimizar o seguinte funcional de energia para segmentar uma imagem de referência  $I$  em duas regiões

$$F_{2CV}(c_1, c_2, \Gamma) = \lambda_1 \int_{\Omega_1} (I(\mathbf{x}) - c_1)^2 d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega \setminus \Omega_1} (I(\mathbf{x}) - c_2)^2 d\mathbf{x} + \rho \text{Área}(\Omega_1) + \nu |\Gamma| \quad (3.10)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\rho$  são parâmetros positivos,  $\Omega_1$  e  $\Omega \setminus \Omega_1$  são as regiões internas e externas do contorno  $\Gamma$ , respectivamente. O terceiro termo do funcional da Eq. (3.10) se refere à área da região  $\Omega_1$ , enquanto que o quarto termo é o tamanho da curva dinâmica  $\Gamma$ . As constantes  $c_1$  e  $c_2$  representam a intensidade uniforme das regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega \setminus \Omega_1$ , respectivamente.

O funcional de energia da Eq. (3.10) pode ser representado e resolvido numericamente por uma formulação *level set*. Seguindo a estratégia proposta por *Zhao et al.* [Zhao et al., 1996] e considerando-se que

$$\begin{cases} \Gamma &= \{\mathbf{x} \in \Omega | \phi(\mathbf{x}) = 0\} \\ \Omega_1 &= \{\mathbf{x} \in \Omega | \phi(\mathbf{x}) > 0\} \\ \Omega \setminus \Omega_1 &= \{\mathbf{x} \in \Omega | \phi(\mathbf{x}) < 0\} \end{cases}$$

e que o contorno  $\Gamma$  é representado implicitamente por uma função level set  $\phi$ , utiliza-se uma função Heaviside  $H(\phi)$  e a medida Dirac  $\delta_0$ , definidas respectivamente por:

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\delta_0(z) = \frac{d}{dz} H(z) \quad (3.12)$$

Assim, os termos do funcional  $F_{2CV}$  da Eq. (3.10) podem ser expressos como:

$$\begin{aligned} |\{\phi = 0\}| &= \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \delta_0(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\text{Área}(\{\phi \geq 0\}) = \int_{\Omega} H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\phi>0} |I(\mathbf{x}) - c_1|^2 d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} |I(\mathbf{x}) - c_1|^2 H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ \int_{\phi<0} |I(\mathbf{x}) - c_1|^2 d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} |I(\mathbf{x}) - c_2|^2 (1 - H(\phi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Desta maneira, o funcional  $F_{2CV}$  da Eq. (3.10) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} F_{2CVLSM}(c_1, c_2, \phi) &= \lambda_1 \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - c_1)^2 H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - c_2)^2 (1 - H(\phi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} + \\ &\quad \nu \int_{\Omega} \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \rho \int_{\Omega} H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A função constante por partes  $c$  pode ser obtida calculando-se

$$c = c_1 H(\phi) + c_2 (1 - H(\phi)) \quad (3.14)$$

Mantendo-se  $\phi$  fixo, a minimização do funcional de energia da Eq. (3.13) em relação às constantes  $c_1$  e  $c_2$  pode ser feita de acordo com:

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} I(\mathbf{x}) H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}} \quad (3.15)$$

$$c_2 = \frac{\int_{\Omega} I(\mathbf{x})(1 - H(\phi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}} \quad (3.16)$$

se  $\int_{\Omega} H(\phi) > 0$  e  $\int_{\Omega} (1 - H(\phi)) > 0$ , respectivamente. Caso tais restrições não sejam satisfeitas,  $c_1$  e  $c_2$  são calculados como

$$\begin{cases} c_1 &= \text{média de } I \text{ em } \{\phi(\mathbf{x}) \geq 0\} \\ c_2 &= \text{média de } I \text{ em } \{\phi(\mathbf{x}) < 0\}. \end{cases}$$

Por sua vez, a função  $\phi$  é calculada pelas Equações de Euler-Lagrange associadas com um esquema gradiente descendente regularizando-se o funcional da Eq. (3.13) por aproximações suaves para as funções Heaviside e Dirac. Esta estratégia está descrita em detalhes no trabalho de *Chan e Vese* [Chan e Vese, 2001a].

A Figura 3.8 apresenta um exemplo de segmentação realizado pelo *Modelo Chan-Vese*. A Figura 3.8(a) se refere à imagem original com a função *level set*  $\phi$  em sua posição inicial, demarcada pelo quadrado com linha preta. As Figuras 3.8(b) e 3.8(c) ilustram os estados intermediários desta função  $\phi$ . A Figura 3.8(d) mostra a posição final da função *level set* e a Figura 3.8(e) representa a função constante por partes  $c$  calculada pela Eq. (3.14).

Dentre as vantagens que se pode citar está a robustez do método em relação à presença de ruído e a facilidade com que as mudanças topológicas são tratadas pelo método. Logo, os objetos da imagem não precisam possuir uma forma convexa, já que buracos, quebras e divisões foram eficientemente considerados, como no resultado da Figura 3.8. Por isso, o modelo é menos sensível à inicialização do que o clássico método dos *Contornos Ativos*, não necessitando que a curva esteja sempre próxima ao objeto de interesse da imagem e o mínimo global às vezes pode ser determinado.

Posteriormente, os autores apresentaram uma proposta que consiste em utilizar a formulação *Level Set* para calcular soluções do caso suave do método *Mumford-Shah* [Chan e Vese, 2001b]. Em seguida, uma extensão deste modelo para segmentação de imagens em várias regiões foi desenvolvida e será abordada na Sub-Seção seguinte.

### Extensão para Segmentação de Várias Regiões

Visando aumentar a aplicabilidade do modelo para imagens constituídas por mais do que duas regiões, *Vese* e *Chan* [Vese e Chan, 2002] propuseram o uso de várias funções *level sets* para desenvolver um modelo de segmentação de uma imagem em várias regiões. O objetivo é resolver de maneira eficiente o método *Mumford-Shah* utilizando várias funções *level sets*, onde

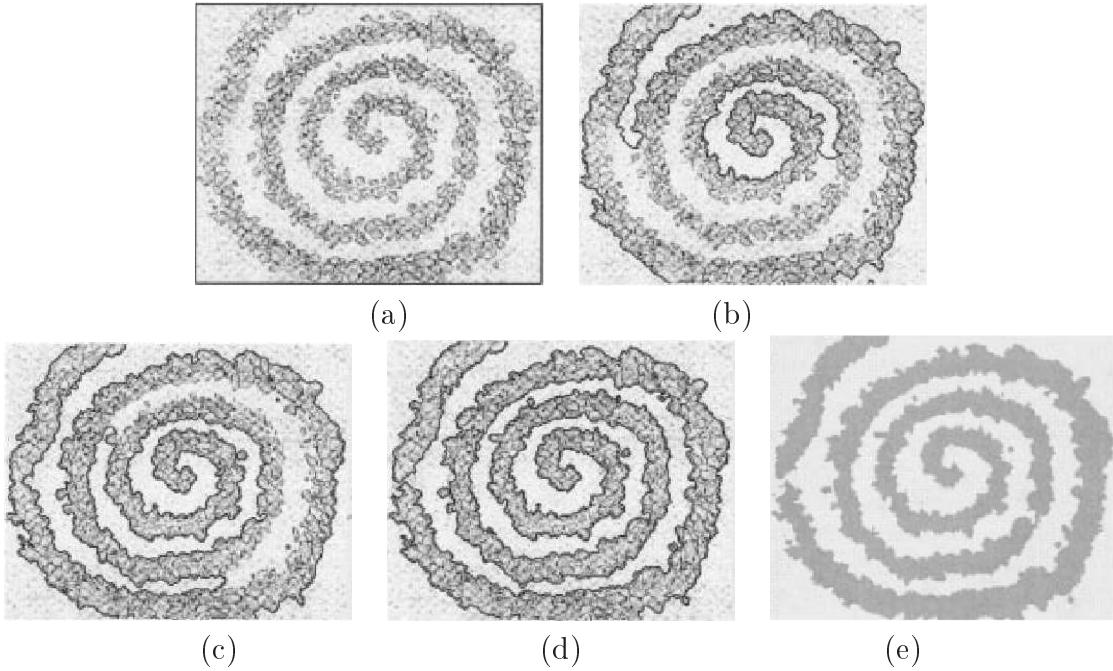


Figura 3.8: Modelo *Chan-Vese*, exemplo extraído de [Chan e Vese, 2001a]: (a) Imagem original e a posição inicial da função  $\phi$ ; (b-c) Passos intermediários do processo de segmentação; (d) Posição final da função  $\phi$ ; (e) Função constante por partes (3.14).

áreas externas, internas e intersecções entre as curvas fornecem as regiões da imagem. Com isso, o modelo trata eficientemente a ocorrência de junções triplas, que são representadas por pontos do domínio que fazem fronteira com mais do que duas regiões, e topologias complexas.

Neste modelo, são necessários  $\log_2^N$  funções *level sets* para representar  $N$  regiões da imagem. Considere que  $l = \log N$  *level sets*,  $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_N\}$  é o conjunto das constantes,  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  é o vetor das funções *level sets* e que  $H(\Phi) = \{H(\phi_1), \dots, H(\phi_N)\}$ . O funcional proposto por *Vese* e *Chan* é dado por

$$F_{NCVLSM}(\mathbf{c}, \Phi) = \sum_{1 \leq i \leq N=2^l} \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - c_i)^2 \chi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{1 \leq j \leq l} \zeta \int_{\Omega} |\nabla H(\phi_j(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} \quad (3.17)$$

$\chi$  é uma função característica relacionada com a região  $i$ . De fato, para  $N = 2$ , o funcional da Eq. (3.13) pode ser trivialmente obtido, onde  $\chi_1(\mathbf{x}) = H(\phi)$  e  $\chi_2(\mathbf{x}) = (1 - H(\phi))$ . Para  $N = 4$ , duas *level sets* são necessárias para formular o seguinte funcional de energia:

$$\begin{aligned}
 F_4(\mathbf{c}, \Phi) &= \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - c_1)^2 H(\phi_1(\mathbf{x})) H(\phi_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - c_2)^2 H(\phi_1(\mathbf{x})) (1 - H(\phi_2(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - c_3)^2 (1 - H(\phi_1(\mathbf{x}))) H(\phi_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \zeta \int_{\Omega} |\nabla H(\phi_1(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} + \\
 &+ \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - c_4)^2 (1 - H(\phi_1(\mathbf{x}))) (1 - H(\phi_2(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} + \zeta \int_{\Omega} |\nabla H(\phi_2(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo que a função constante por partes é obtida como:

$$\begin{aligned}
 c &= c_1 H(\phi_1) H(\phi_2) + c_2 H(\phi_1) (1 - H(\phi_2)) + c_3 (1 - H(\phi_1)) H(\phi_2) + \\
 &+ c_4 (1 - H(\phi_1)) (1 - H(\phi_2)) .
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

As constantes  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  são calculadas a partir da minimização do funcional da Eq. (3.18) e são obtidas como:

$$\begin{aligned}
 c_1(\Phi) &= \frac{\int_{\Omega} I(\mathbf{x}) H(\phi_1(\mathbf{x})) H(\phi_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} H(\phi_1(\mathbf{x})) H(\phi_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}} \\
 c_2(\Phi) &= \frac{\int_{\Omega} I(\mathbf{x}) H(\phi_1(\mathbf{x})) (1 - H(\phi_2(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} H(\phi_1(\mathbf{x})) (1 - H(\phi_2(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}} \\
 c_3(\Phi) &= \frac{\int_{\Omega} I(\mathbf{x}) (1 - H(\phi_1(\mathbf{x}))) H(\phi_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi_1(\mathbf{x}))) H(\phi_2(\mathbf{x})) d\mathbf{x}} \\
 c_4(\Phi) &= \frac{\int_{\Omega} I(\mathbf{x}) (1 - H(\phi_1(\mathbf{x}))) (1 - H(\phi_2(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi_1(\mathbf{x}))) (1 - H(\phi_2(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}}.
 \end{aligned}$$

As funções level set  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são determinadas como no modelo *Chan-Vese* para segmentação em duas regiões. Detalhes podem ser encontrados em [Vese e Chan, 2002].

A Figura 3.9 apresenta o domínio particionado utilizando as duas funções *level set*. Observe que as áreas das *level sets*, suas intersecções e seu exterior formam quatro regiões disjuntas.

Ainda no mesmo trabalho, [Vese e Chan, 2002] exploraram o uso de várias funções *level set* para calcular soluções aproximadas para o caso suave do método *Mumford-Shah*. Como aplicado ao caso constante, este modelo multi-regiões baseado em *level sets* calcula soluções locais dada a não-convexidade do funcional, fazendo com que o estado final das curvas *level set* dependem da maneira pela qual são posicionadas inicialmente no domínio.

## 3.4 Segmentação Soft

Em certos tipos de imagens, é comum a ocorrência de situações em que é difícil determinar a exata localização das bordas de um objeto ou quando seus pontos possuem uma incerteza

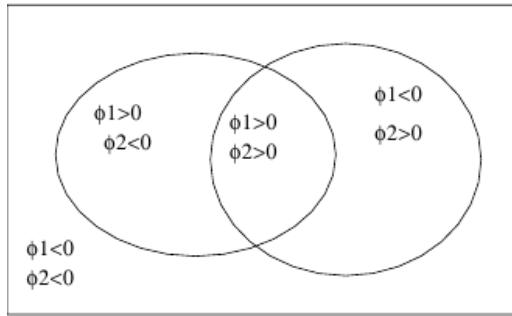


Figura 3.9: Ilustração de duas curvas  $\phi_1 \cup \phi_2$  que particiona o domínio em 4 regiões:  $\{\phi_1 > 0, \phi_2 > 0\}$ ,  $\{\phi_1 > 0, \phi_2 < 0\}$ ,  $\{\phi_1 < 0, \phi_2 > 0\}$  e  $\{\phi_1 < 0, \phi_2 < 0\}$ . Imagem extraída de [Vese e Chan, 2002].

quando se quer classificar como sendo pertencente à alguma região ou padrão da imagem. Por exemplo, a Figura 3.10 ilustra algumas situações onde isso pode ocorrer. No caso da Figura 3.10(a), não é possível dizer com precisão qual é a fronteira comum entre as regiões do rio e da floresta, e do rio com a grama. No caso da Figura 3.10(b), é ilustrada uma imagem de satélite onde é difícil delimitar regiões de florestas. Já a Figura 3.10(c) mostra uma imagem de raio-X no qual a fronteira entre osso e o tecido é difícil de se determinar.

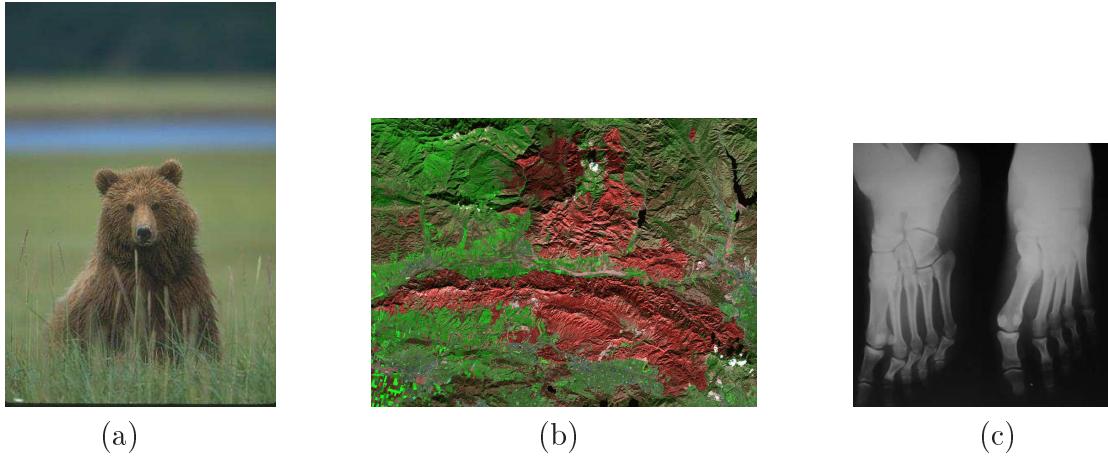


Figura 3.10: Exemplo de uma imagem onde as fronteiras de suas regiões não estão bem definidas: (a) Urso em seu meio ambiente composto por floresta e rio; (b) Imagem de sensoriamento remoto; (c) Imagem de uma lesão de pele.

Segmentar imagens semelhantes às apresentadas na Figura 3.10 por alguma técnica *hard* poderia comprometer os resultados no sentido de que os pontos do domínio pertencentes às estas fronteiras seriam rotulados com exclusividade a uma única região. Para contornar esta situação, modelos de segmentação *soft* tem sido desenvolvidos e possuem a vantagem de possibilitar que um ponto da imagem possa conter informações de mais do que uma região, ou seja, um ponto pode pertencer a várias regiões com um certo grau de relação. Com isso, o ganho que se obtém ao preservar apenas os graus de pertinência pode ser importante para processos de

pós-segmentação, quando tais valores tratados de maneira adequada [Shen, 2006].

De maneira simplificada, foi visto que a segmentação *hard* consiste em determinar uma partição ótima para o domínio  $\Omega$  em  $N$  regiões, de tal forma que:

$$\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \quad (3.20)$$

cuja notação equivalente é dada por

$$\sum_{i=1}^N \chi_{\Omega_i}(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.21)$$

sendo que  $\chi_{\Omega_i}(\mathbf{x})$  é uma função característica que significa que  $\mathbf{x} \in \Omega_i$ . Diferentemente da segmentação *hard*, a segmentação *soft* determina funções de pertinência  $p_i(\mathbf{x})$  que caracterizam o grau com que  $\mathbf{x}$  pertence à região  $\Omega_i$ . Este grau de relação é denominado pertinência. Desta maneira, a seguinte propriedade deve ser satisfeita sobre as funções de pertinência  $p_i(\mathbf{x})$ :

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{x}), \quad 0 \leq p_i \leq 1. \quad (3.22)$$

Comparado à segmentação *hard*, a segmentação *soft* possui algumas vantagens. Uma partição *soft* pode ser facilmente convertida para a segmentação *hard* obtendo-se o maior grau de pertinência de um ponto ( $x$ ) dentre as  $N$  regiões. Além disso, percebe-se que o resultado de uma segmentação *soft* de uma imagem pode ser útil e aplicado de diversas maneiras em posteriores processamentos na imagem.

A seguir, serão descritos três métodos variacionais recentemente desenvolvidos para segmentação *soft* de imagens. Um dos primeiros modelos propostos se refere ao *Mumford-Shah soft* de *J. Shen* [Shen, 2006], que é explorado na Seção 3.4.1. Outra abordagem para segmentação *soft* se trata de paradigmas probabilísticos, como o método baseado em *Campos de Fase* de *Pock e Bischof* [Pock e Bischof, 2006], analisado na Seção 3.4.2. Finalmente, a Seção 3.4.3 descreve um modelo de *Mistura de Gaussianas* baseado no método *Soft Mumford-Shah* de *Shen* [Shen, 2006].

### 3.4.1 Modelo Mumford-Shah Soft

*Shen* desenvolveu em [Shen, 2006], um modelo de segmentação *soft* baseado no funcional *Mumford-Shah* que utiliza fundamentos estocásticos e princípios Bayesianos em sua formulação. As variáveis estocásticas são empregadas para indicar os graus de pertinências de cada ponto do domínio em cada região da imagem, onde cada região  $i$  da imagem é aproximada por uma distribuição Gaussiana, sendo que todas juntas compartilham a mesma variância.

Considere que  $I \subset \mathbb{R}^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é a imagem original e que para cada região  $i$ , tal que  $i = 1, \dots, N$ , existe um campo de média  $s_i \in H^1(\Omega)$  e uma função de pertinência  $p_i$  associada. Sabendo-se que  $\mathbf{S} = \{s_1, \dots, s_N\}$  e  $\mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$ , o objetivo deste método é estimar o par

vetorial ótimo, dado por

$$(P_*, S_*) = \arg \max_{(P, S)} P(\mathbf{P}, \mathbf{S} | I) \quad (3.23)$$

onde assume-se que  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{S}$  são independentes. O par ótimo da Eq. (3.23) é determinado minimizando-se o seguinte funcional de energia:

$$\begin{aligned} F_{SMS}(\mathbf{P}, \mathbf{S}) &= \zeta \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla s_i(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \lambda \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (I(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{x}))^2 p_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( 9\varepsilon |\nabla p_i(\mathbf{x})|^2 + \frac{p_i(\mathbf{x})(1-p_i(\mathbf{x}))^2}{\varepsilon} \right) d\mathbf{x} , \end{aligned} \quad (3.24)$$

tal que  $p_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, N$  e  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$  e as constantes  $\lambda$  e  $\zeta$  são positivas e balanceiam seus respectivos termos. O terceiro termo do funcional da Eq. (3.24) é uma energia do tipo *Modica-Mortola* [Modica, 1987] que regulariza as pertinências, fazendo com que este modelo não se distancie muito do clássico modelo *Mumford-Shah hard*. O parâmetro  $\varepsilon$  é responsável por controlar a largura das bordas *soft* de  $p_i$ , mantendo-as regulares na espessura. Comumente,  $\varepsilon$  é um valor bem menor do que 1, o que resulta em uma polarização das pertinências  $p_i$ 's para os valores próximos a 0 ou 1 quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

O funcional de energia da Eq. (3.24) é resolvido em duas etapas sucessivas executadas alternadamente. Primeiramente, fixam-se  $\{p_1, \dots, p_N\}$  e atualizam-se as médias  $s_i$ . Posteriormente, fixam-se as médias  $\{s_1, \dots, s_N\}$  e otimizam-se as funções de pertinência  $p_i$ . Tais passos podem ser feitos por meio da discretização das Equações de Euler-Lagrange e, como o funcional de energia da Eq. (3.24) é não-convexo, soluções locais que são sensíveis em relações às condições iniciais são calculadas.

A Figura 3.11 apresenta a segmentação de uma imagem composta por quatro regiões, dada pela Figura 3.11(a): céu, mar, grama e areia. As Figuras 3.11(b), 3.11(c), 3.11(d) e 3.11(e) mostram as funções de pertinência  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$  que representam cada um destes padrões. Nesta Figura, percebe-se que o modelo de *Shen* apresentou um resultado próximo ao que o ser humano interpreta padrões em uma cena natural, ao mostrar que regiões de borda possuem alto grau de incerteza em relação a um padrão ou região em específico.

### 3.4.2 Modelo Probabilístico de Campos de Fase

*Pock et al.* [Pock e Bischof, 2006] desenvolveram um modelo probabilístico para segmentação variacional de imagens em várias regiões utilizando como base o *Método de Campos de Fase* [Ambrosio e Tortorelli, 1990]. Neste modelo, cada região da imagem é aproximada por uma função de densidade de probabilidade e os *campos de fase* são tratados como funções de

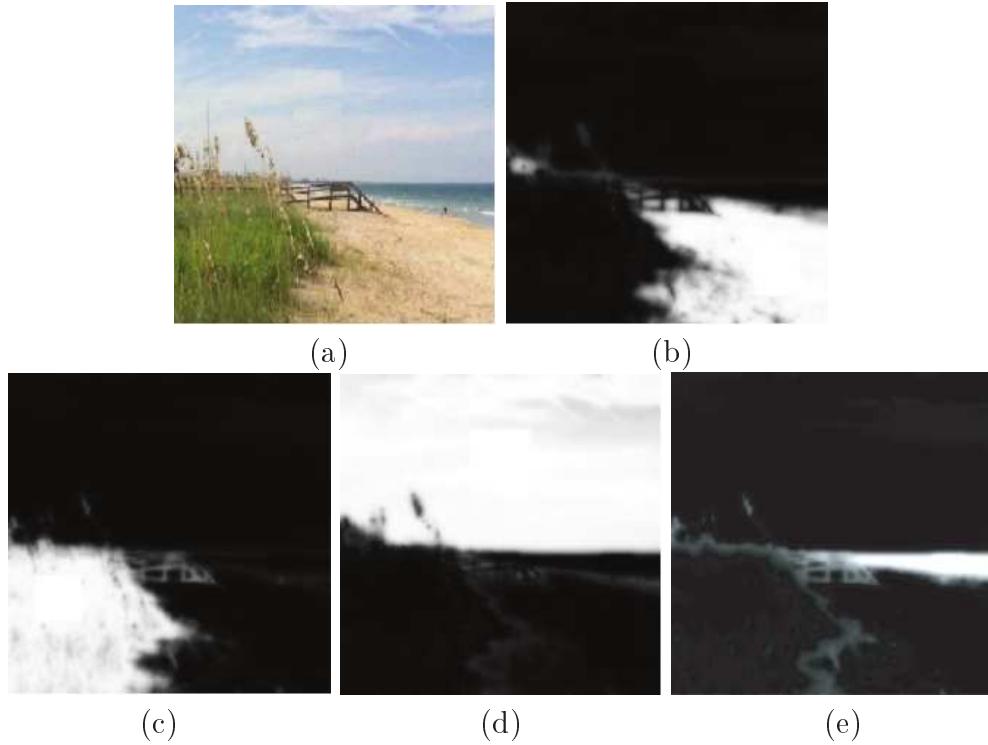


Figura 3.11: Segmentação de uma imagem em quatro regiões pelo modelo *Soft Mumford-Shah*, extraído de [Shen, 2006]: (a) Imagem original; (b-e) Funções de pertinência  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$ , respectivamente.

pertinências. O processo de segmentação consiste em maximizar a informação mútua entre os *campos de fase* e as funções de densidade de probabilidade.

Sabendo-se que  $p_i(\mathbf{x})$  é a probabilidade de um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  pertencer à região  $i$ ,  $\mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$  é o conjunto de todas as  $N$  funções de pertinência e  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  são os parâmetros das distribuições de probabilidade, o funcional de energia deste modelo é dado por:

$$\begin{aligned} F_{CF}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\alpha}) &= - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} p_i(\mathbf{x}) \log(P_i(I(\mathbf{x})|\alpha_i)) d\mathbf{x} + \\ &+ \beta \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( \varepsilon |\nabla p_i(\mathbf{x})|^2 + \frac{p_i(\mathbf{x})(1-p_i(\mathbf{x}))^2}{\varepsilon} \right) d\mathbf{x} , \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde o parâmetro  $\beta$  é utilizado para controlar a influência do termo de energia do campo de fase e  $\varepsilon$  é a mesma constante positiva apresentada no funcional da Eq. (3.24).  $P_i$  é uma distribuição de probabilidade relacionada à região  $i$ , cujos parâmetros são dados por  $\alpha_i$ . Pock e Bischof utilizaram uma distribuição Gaussiana multi-variada, onde a média e a matriz de co-variância são os parâmetros.

A minimização do funcional da Eq. (3.25) pode ser feita em duas etapas sucessivas execu-

tadas alternadamente. Primeiro, fixam-se as pertinências  $p_i$  e calculam-se os parâmetros  $\alpha_i$ ; posteriormente fixam-se os parâmetros ótimos  $\alpha_i$  e otimizam-se as funções de pertinência  $p_i$ .

Um exemplo de segmentação por este método é apresentado na Figura 3.12. A Figura 3.12(a) se refere a uma imagem natural e as Figuras 3.12(b), 3.12(c) e 3.12(d) ilustram as regiões da imagem reconstruídas a partir das funções de pertinência  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , respectivamente, determinadas no processo de segmentação. O uso das distribuições Gaussianas é suficiente para distinguir o objeto do fundo da imagem e com a formulação de banda estreita, apenas pontos existentes em uma faixa de transição entre as regiões são considerados.

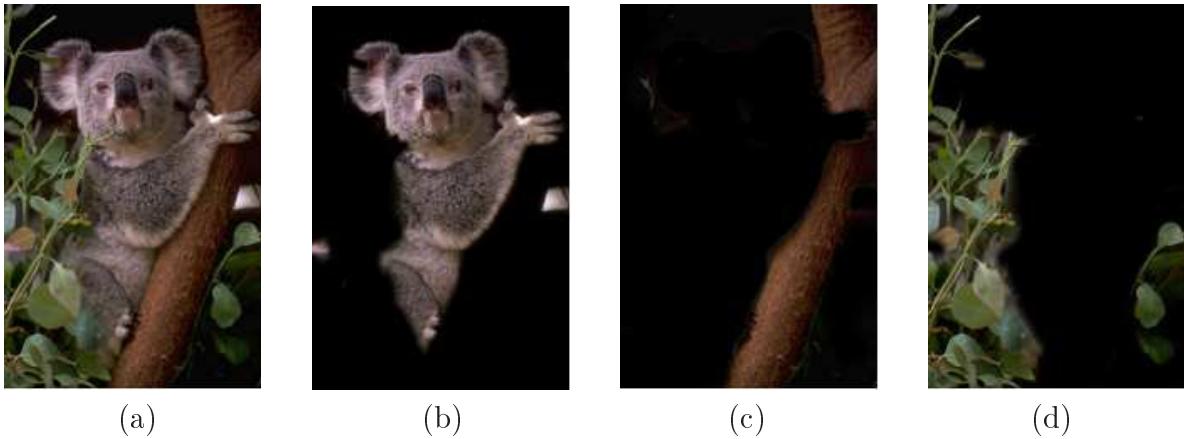


Figura 3.12: Segmentação de uma imagem em três regiões pelo modelo Campos de Fase de Pock, extraído de [Pock e Bischof, 2006]: (a) Imagem original; (b-d) Imagens reconstruídas a partir das funções de pertinência  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$ , respectivamente.

### 3.4.3 Modelo de Mistura de Gaussianas

*Barcelos et al.* [Barcelos et al., 2009a] [Barcelos et al., 2009b] propuseram um método variacional para segmentação *soft* de imagens em várias regiões que se baseia no funcional *Mumford-Shah* e no uso do modelo de *Mistura de Gaussianas*. A formulação do modelo consiste em maximizar toda a informação existente entre os campos de fase e as funções de densidade de probabilidade que modelam as características das regiões da imagem.

Neste método, os *campos de fase* são tratados como as probabilidades de que os pontos do domínio pertençam à cada região da imagem. Como nos trabalhos de *Shen e Pock et al.*, os campos de fase  $p_i$  são funções de pertinência que satisfazem à restrição  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$  e que de fato formulam o funcional *Mumford-Shah* por uma abordagem *soft*.

Suponha que a imagem possui  $N$  regiões e que as intensidades  $I(\mathbf{x})$  de cada ponto do domínio são independentes em relação a uma amostra de uma distribuição Gaussiana com média  $s_i$  e desvio padrão  $\sigma_i$ . Em outras palavras, considerando-se que todos os pontos  $\mathbf{x} \in \Omega_i$  de uma região  $i$  compartilham o mesmo desvio padrão  $\sigma_i$ , mas com diferentes médias  $s_i(\mathbf{x})$ , *Barcelos et al.* propuseram substituir o segundo termo do funcional da Eq. (3.24) por uma função de densidade de probabilidade Gaussiana.

Desta maneira, *Barcelos et al.* propuseram minimizar o seguinte funcional de energia:

$$\begin{aligned} F_{SMSGM}(\mathbf{P}, \mathbf{S}, \sigma) &= \zeta \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla s_i(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( 9\varepsilon |\nabla p_i(\mathbf{x})|^2 + \frac{p_i(\mathbf{x})(1-p_i(\mathbf{x}))^2}{\varepsilon} \right) d\mathbf{x} \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \log \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \frac{(I(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{x}))^2}{2\sigma_i^2} p_i(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} , \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $\lambda$  e  $\zeta$  são parâmetros positivos que ponderam seus respectivos termos. O primeiro termo do funcional da Eq. (3.26) é responsável por suavizar a função  $s_i$ , o segundo termo é uma função de densidade de probabilidade que aproxima a região  $i$  da imagem utilizando-se como campos de média as funções suaves  $s_i$  e o desvio padrão  $\sigma_i$ . O terceiro termo é o mesmo descrito no modelo *Shen* para regularizar as funções  $p_i$ .

Como resultado, este modelo calcula aproximações suaves para a imagem original, enquanto que tais aproximações no modelo de *Shen* são funções constantes por partes, visto que o desvio padrão é igual para todas as funções de densidade. O modelo de *Barcelos et al.* apresentou maior robustez em relação à ruídos do que o modelo de *Shen*, além de ser mais flexível pela facilidade em se tratar adequadamente o desvio padrão das fdp's.

A Figura 3.13 apresenta a segmentação de uma imagem natural pelo modelo de *Barcelos et al.*. A Figura 3.13(a) mostra a imagem original e as Figuras 3.13(b), 3.13(c) e 3.13(d) ilustram as imagens reconstruídas a partir dos campos de fases  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , respectivamente. Por este experimento, nota-se que o modelo *Barcelos et al.* simula a percepção natural das imagens que não possuem fronteiras bem definidas entre os objetos.

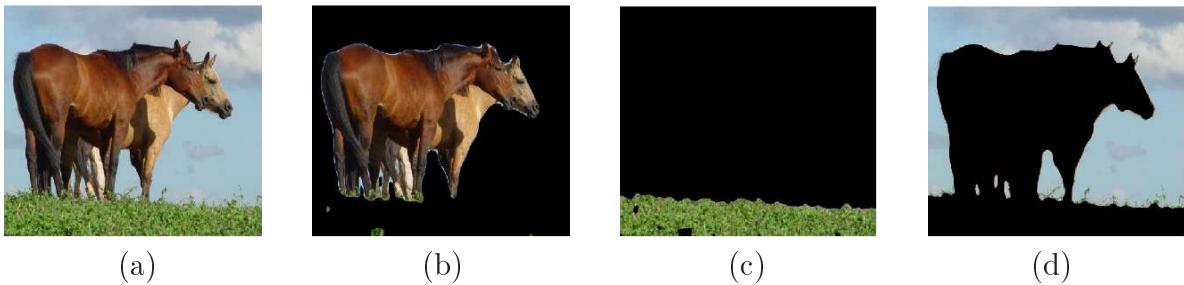


Figura 3.13: Segmentação de uma imagem em quatro regiões pelo modelo de *Barcelos et al.*, extraído de [Barcelos et al., 2009a]: (a) Imagem original; (b) Imagem reconstruída utilizando o campo de fase  $p_1$ ; (c) Imagem reconstruída utilizando o campo de fase  $p_2$ ; (d) Imagem reconstruída utilizando o campo de fase  $p_3$ .

## 3.5 Considerações Finais

Neste Capítulo, foi apresentado uma breve revisão das técnicas de segmentação de imagens, como limiarização, métodos baseados em descontinuidade e em similaridade, entre outros. Tam-

bém foram explorados alguns dos métodos variacionais difundidos na literatura, como o funcional *Mumford-Shah* e o método *Level Set*, visto que a grande maioria dos recentes algoritmos propostos que possuem princípios variacionais em sua formulação se baseiam nestes modelos. Uma semelhança entre todos estes métodos visto é a existência de minimizadores locais, onde não existe unicidade na solução.

Devido ao escopo desta dissertação abranger método de segmentação *soft*, foram introduzidos alguns modelos variacionais recentes que incorporam funções de pertinências em seus funcionais de energia. No entanto, estas formulações apresentam limitações no que se refere à sensibilidade à inicialização.

Um método que resolve esta limitação é o *Competição entre Regiões Fuzzy* [Mory e Ardon, 2007]. No próximo Capítulo, será explorado o clássico algoritmo *Competição entre Regiões*, cuja natureza estatística e metodologia são importantes para o entendimento do primeiro, que é o objeto de estudo deste trabalho.

## CAPÍTULO

# 4

## *Competição entre Regiões*

---

---

No Capítulo anterior, foram apresentados alguns métodos para segmentação de imagens baseados em contorno e em região. Dentre as abordagens baseadas por contorno, foi visto que os métodos *Contornos Ativos* e *Level Sets* direcionam uma curva dinâmica até as bordas de um objeto da imagem. Também foram estudados alguns métodos de segmentação baseados em região, como o funcional *Mumford-Shah*, o algoritmo *Crescimento de Regiões* e o modelo *Chan-Vese* que resolve o funcional *Mumford-Shah* utilizando *Método Level Sets*.

Métodos como estes citados fazem hipóteses sobre a imagem, realizam testes condicionais sobre suas características e tomam decisões por meio de uma limiarização implícita ou explícita durante o processo de segmentação. As áreas sombreadas na Figura 4.1 mostram a grande diferença entre as técnicas *Contornos Ativos*, *Crescimento de Regiões* e *Energia de Bayes/MDL (Minimum Description Length)* [Rissanen, 2004] [Barron et al., 1998] no que se refere ao domínio onde as hipóteses, os testes e as decisões são tomadas. A Figura 4.1(a) descreve o domínio utilizado pela técnica *Contornos Ativos* para movimentar a curva dinâmica em direção aos objetos da imagem. Devido ao uso de informações próximas às regiões de bordas, o contorno deve ser posicionado inicialmente próximo à solução esperada. Já a Figura 4.1(b) apresenta o domínio no qual o algoritmo *Crescimento de Regiões* realiza o processo de segmentação. Neste caso, pontos no interior de uma região que não satisfazem o critério de homogeneidade podem gerar irregularidades nas bordas e pequenos buracos. Diferentemente destes dois métodos que adotam critérios locais para segmentação, a Figura 4.1(c) retrata a natureza global de uma energia Bayesiana/MDL. No entanto, apesar de se utilizar este critério global, existe a dificuldade de se minimizar tal energia e determinar uma solução que seja global.

*Zhu e Yuille* [Zhu e Yuille, 1996] propuseram um modelo de segmentação estatístico que combina as características geométricas do modelo *Contornos Ativos* e a ideologia baseada em

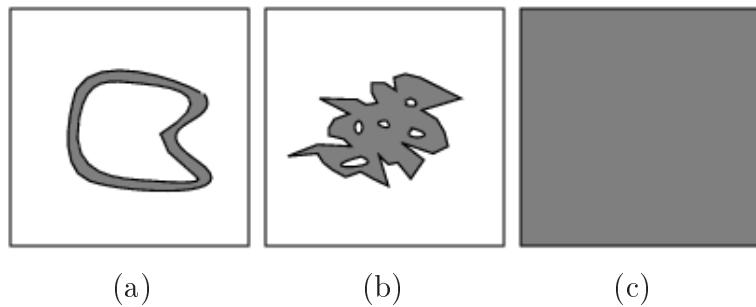


Figura 4.1: Áreas sombreadas mostram o domínio da imagem onde as hipóteses, testes e decisões são tomadas nos métodos: (a) *Contornos Ativos*; (b) *Crescimento de Regiões*; (c) Energia de Bayes/MDL. Imagem extraída de [Zhu e Yuille, 1996].

região existente no algoritmo de *Crescimento de Regiões*. O modelo proposto por *Zhu e Yuille*, denominado de *Competição entre Regiões*, é derivado de um critério MDL que é uma energia proveniente da estatística Bayesiana e é formulado sob um problema de otimização. Assim, é garantido ao referido modelo a obtenção de soluções locais e as limitações existentes nas abordagens baseadas em contorno e região são minimizadas, uma vez que tais abordagens são unificadas em um único modelo.

O método *Competição entre Regiões* de *Zhu e Yuille* serviu de base para diversos modelos variacionais posteriormente desenvolvidos e algumas idéias apresentadas estão relacionadas com os modelos de segmentação propostos nesta dissertação. Por isso, este Capítulo estuda a metodologia por trás da técnica *Competição entre Regiões* e está organizado da seguinte maneira: a Seção 4.1 descreve a fundamentação teórica do algoritmo *Competição entre Regiões*. A Seção 4.2 apresenta um exemplo de uma execução do clássico algoritmo *Competição entre Regiões* para a segmentação de uma imagem colorida. A Seção 4.3 apresenta as considerações finais sobre este algoritmo.

## 4.1 Competição entre Regiões

Considere que as regiões de uma imagem de referência  $I \subset \Omega$  que se quer segmentar possuem intensidades que foram geradas por uma família de distribuições de probabilidade  $P(I|\alpha)$  previamente especificadas, onde  $\alpha$  são os parâmetros desta distribuição. Assume-se também que tais distribuições de probabilidade são diferentes para as distintas regiões da imagem.

Assume-se que o domínio  $\Omega$  da imagem  $I$  esteja inicialmente segmentado em  $N$  regiões homogêneas, de tal forma que  $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ , onde  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ . O algoritmo de *Crescimento de Regiões* é utilizado para tal finalidade, onde adicionam-se  $N$  sementes na imagem, deixando-as crescerem até formarem as regiões. Considere também que  $\partial\Omega_i$  é a borda da região  $\Omega_i$  e que o conjunto de bordas  $\Gamma = \cup_{i=1}^N \Gamma_i$  é resultante da segmentação, onde  $\Gamma(q) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ .

Basicamente, este método segmenta uma imagem em  $N$  regiões ao minimizar o seguinte

funcional de energia, descrito por um critério Bayes/MDL:

$$F_{CR}(\Gamma, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\zeta}{2} \int_{\Gamma_i} dq - \log P(I(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega_i | \alpha_i) \right\} \quad (4.1)$$

onde  $\zeta$  é um parâmetro positivo e  $\Gamma_i$  é a borda da região  $\Omega_i$ . O primeiro termo se refere ao tamanho do conjunto de bordas em relação a cada região  $\Omega_i$  e o segundo termo é o custo de atribuir cada ponto do domínio para a região  $i$  da imagem de acordo com uma função de distribuição de probabilidade.

Assumindo que as distribuições de probabilidade de cada região são independentes entre si, o termo  $\log P(I(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega_i | \alpha_i)$  pode ser reescrito como

$$\log P(I(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega_i | \alpha_i) = \int_{\Omega_i} \log P_i(I(\mathbf{x}) | \alpha_i) d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

A minimização do funcional de energia da Eq. (4.1) ocorre em duas etapas. Na primeira delas, o conjunto de contornos  $\Gamma$  é mantido fixo e os parâmetros  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$  são estimados maximizando-se as probabilidades condicionais. De certo modo, isto minimiza o custo de se descrever estatisticamente cada região da imagem, o que é equivalente a dizer que

$$\alpha_i^* = \arg \min_{\alpha_i} \left\{ - \int_{\Omega_i} \log P(\alpha_i | I(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right\}. \quad (4.3)$$

A segunda etapa, o conjunto de parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$  é mantido fixo e o contorno  $\Gamma$  é otimizado pelo esquema gradiente descendente para cada  $\mathbf{v} \in \Gamma$ , dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{\partial F_{CR}(\Gamma, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \sum_{j \in Q(\mathbf{v})} -\frac{\zeta}{2} \kappa(\mathbf{v}) n_j(\mathbf{v}) + \log P_j(I(\mathbf{v}) | \alpha_j) n_j(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que  $Q(\mathbf{v}) = \{j | \mathbf{v} \in \Gamma_j\}$ ,  $\kappa(\mathbf{v})$  é a curvatura no ponto de borda  $\mathbf{v}$  e  $n_j(\mathbf{v})$  é o vetor normal a  $\Gamma_j$  no ponto  $\mathbf{v}$ . Pela Eq. (4.4), percebe-se que o contorno é movido pelas forças de suavização, representada pelo primeiro termo, e estatística, descrita pelo segundo termo. A força de suavização atua com mais intensidade em pontos com alta curvatura, enquanto que a força estatística comprime a região quando  $\log P_j(\mathbf{v} | \alpha_j) \leq 0$ . Quanto maior for o valor de  $P_j(I | \alpha_j)$ , maior é a similaridade do ponto para com a região  $j$  e menor é a força estatística.

A ação de tais forças no movimento do contorno são ilustradas na Figura 4.2. A Figura 4.2(a) mostra a força de suavização atuando nos pontos de bordas. Tal força é independente

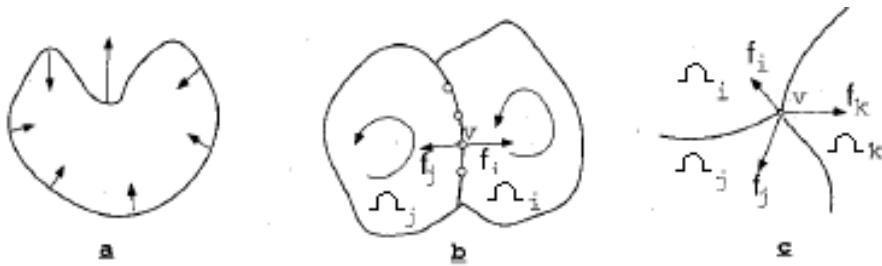


Figura 4.2: Forças agindo no contorno: (a) Força suavizadora (b) Força estatística em um ponto  $\mathbf{v}$  de fronteira de regiões; (c) Força estatística em um ponto de junção de regiões.

da direção da curva e a torna o mais suave possível. A Figura 4.2(b) ilustra um ponto que é comum em relação às bordas de duas regiões  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  e suas forças  $f_i$  e  $f_j$ . Sabendo-se que as curvas  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_j$  tem vetores normais inversos ( $n_i = -n_j$ ) no referido ponto, então  $\kappa_i n_i = \kappa_j n_j$ . Assim, pode-se reescrever a Eq. (4.4) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\zeta \kappa_i(\mathbf{v}) n_i(\mathbf{v}) + (\log P_i(I(\mathbf{v})|\alpha_i) - \log P_j(I(\mathbf{v})|\alpha_j))) n_i(\mathbf{v}) \\ &= -\zeta \kappa_i(\mathbf{v}) n_i(\mathbf{v}) + \log \left( \frac{P_i(I(\mathbf{v})|\alpha_i)}{P_j(I(\mathbf{v})|\alpha_j)} \right) n_i(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

O movimento do ponto de borda  $\mathbf{v}$  é determinado pelo teste de log-verossimilhança entre as forças estatísticas de  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ . Sejam  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  os parâmetros das regiões  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ , respectivamente. Se  $P_i(I(\mathbf{v})|\alpha_i) > P_j(I(\mathbf{v})|\alpha_j)$ , isto é, se a intensidade em  $\mathbf{v}$  se adapta melhor à distribuição da região  $i$  em relação à região  $j$ , então a borda se movimenta em direção a região  $j$  (na direção de  $n_i$ ). Caso contrário, a borda se movimenta em direção à região  $i$ . A Figura 4.2(c) mostra a ação da força estatística em ponto comum às bordas de três regiões.

O algoritmo *Competição entre Regiões* pode ser reduzido aos clássicos métodos *Crescimento de Regiões* e *Contornos Ativos*. No primeiro caso, considere uma distribuição de probabilidade  $P_1(I|\alpha_1)$  de uma região 1 e uma distribuição de probabilidade uniforme de uma região correspondente ao fundo da imagem  $P_2(I)$ , de maneira que  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ . A equação de movimento de um ponto  $\mathbf{v} \in \Gamma$  é escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\log P_1(I(\mathbf{v})|\alpha_1) - \log(P_2)) n(\mathbf{v}) \quad (4.6)$$

sendo que  $n(\mathbf{v})$  é o vetor normal da região do objeto. Neste caso, o algoritmo *Crescimento de Regiões* se verifica quando  $P_2$  é utilizado como o limiar de um critério de parada e a distribuição de probabilidade  $P_1$  sempre é comparada com  $P_2$  durante o crescimento das regiões. Além disso, a técnica de *Competição entre Regiões* pode ser reduzida ao modelo *Contornos Ativos/Balloon*,

onde detalhes são apresentados no trabalho de *Zhu e Yuille* [Zhu e Yuille, 1996].

Outra importante característica do algoritmo *Competição entre Regiões* se refere à fusão de duas regiões adjacentes para decrescer a energia do funcional. Suponha que as distribuições  $P_i(I|\alpha_i)$  sejam Gaussianas, cujos parâmetros são a média  $\mu_i$  e o desvio padrão  $\sigma_i$  ( $\alpha_i = \{\mu_i, \sigma_i\}$ ). Seja  $\Omega_{ij}$  e  $\Gamma_{ij}$  a região e o conjunto de bordas resultantes da fusão entre duas regiões adjacentes  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ , respectivamente. Sabendo-se que os parâmetros da região  $ij$  são  $\alpha_{ij} = \{\mu_{ij}, \sigma_{ij}\}$  e,  $d_i = |\Omega_i|$  e  $d_j = |\Omega_j|$  ( $|\Omega|$  é a cardinalidade de  $\Omega$ ), tem-se que

$$\begin{aligned}\mu_{ij} &= \frac{1}{d_i + d_j} (d_i \mu_i + d_j \mu_j) \\ \sigma_{ij}^2 &= \frac{1}{d_i + d_j} \left\{ d_i \sigma_i^2 + d_j \sigma_j^2 + \frac{d_i d_j}{d_i + d_j} (\mu_i - \mu_j)^2 \right\}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Portanto a energia gasta para a fusão entre as regiões  $i$  e  $j$  é dada por

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\zeta \int_{\Gamma_{ij}} dq - \rho + \int_{\Omega_i} \log P_i(I|\alpha_i) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_j} \log P_j(I|\alpha_j) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{ij}} \log P_{ij}(I|\alpha_{ij}) d\mathbf{x} \\ &= -\zeta |\Gamma_i \cap \Gamma_j| - \rho + \frac{1}{2} \left( d_i \log \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_j^2} + 1 \right)\end{aligned}\tag{4.8}$$

Se  $\Delta E \leq 0$ , então a fusão das regiões  $i$  e  $j$  decresce a energia do funcional.

Resumidamente, o algoritmo *Competição entre Regiões* é executado nos seguintes passos:

1. Coloque  $N$  sementes aleatoriamente pela imagem, sendo que áreas não ocupadas por nenhuma semente são tratadas como uma região descrita por uma distribuição de probabilidade uniforme;
2. Enquanto o movimento das bordas  $\Gamma$  não convergir, faça
  - (a) Mantendo-se  $\Gamma$  fixo, atualizam-se os parâmetros  $\alpha$  de acordo com a Eq. (4.3);
  - (b) Mantendo-se  $\alpha$  fixo, movimente a borda  $\Gamma$  minimizando o funcional da Eq. (4.1). Quando duas regiões adjacentes possuírem fronteiras em comum, faça a competição nestes pontos da fronteira;
3. Se o fundo da imagem estiver sem semente, coloque nova semente nesta região e volte ao passo 2;
4. Una duas regiões adjacentes para ocorrer decréscimo de energia e vá ao passo 2. Se a fusão não decrescer a energia, encerre o algoritmo;

Uma questão importante que deve ser considerada se refere à distribuição espacial inicial das sementes no domínio da imagem. À medida que o algoritmo avança no tempo, as sementes vão crescendo, como acontece na técnica *Crescimento de Regiões*, e quando as regiões se encontram, a competição ocorre nos pontos da fronteira. Se estas duas regiões adjacentes são estatisticamente parecidas, ocorrerá um processo de fusão (*merging*), fazendo com que a energia do funcional diminua. Tal fato pode ocorrer quando se colocam duas sementes em uma mesma região da imagem ou se estas regiões da imagem são semelhantes estatisticamente.

Ao algoritmo, é garantida a convergência para um mínimo local, visto que o funcional de energia do método é não-convexo. Além disso, é possível considerar o caso constante por partes do funcional *Mumford-Shah* como um caso especial do algoritmo *Competição entre Regiões*. Para isso, basta considerar que todas as distribuições Gaussianas  $P_i(I|\{\mu_i, \sigma_i\})$  compartilham o mesmo desvio padrão  $\sigma_i$ .

Mais detalhes sobre o algoritmo *Competição entre Regiões*, relativos à extensão local para melhorar a acurácia a detecção de bordas e uma extensão para imagens coloridas, podem ser encontradas no artigo de *Zhu e Yuille* [Zhu e Yuille, 1996].

## 4.2 Resultados

Nesta Seção, é ilustrado um resultado obtido pelo clássico algoritmo *Competição entre Regiões* de *Zhu e Yuille*. A Figura 4.3 apresenta um caso de teste relacionado à segmentação de uma imagem colorida, mostrada na Figura 4.3(a). As 20 sementes iniciais estão representadas pelas pequenas regiões brancas da Figura 4.3(b). As Figuras 4.3(c), 4.3(d) e 4.3(e) mostram o crescimento das regiões a partir dos pontos sementes até o estado estacionário ser alcançado, como ilustra a Figura 4.3(f). As pequenas regiões escuras da Figura 4.3(f) são os espaços que não foram ocupados por nenhuma semente. Estas regiões necessitam ser identificadas para participar do processo de competição com as outras. Logo, uma semente é adicionada em cada área escura, formando novas regiões. Após o processo de fusão de regiões, o algoritmo atinge o estado estacionário, mostrado na Figura 4.3(g).

É importante observar que devido à influência de iluminação na imagem, regiões do corpo da mulher, como o braço esquerdo e parte do pescoço, foram divididas em várias regiões como mostra a Figura 4.3(f). Após o processo de fusão, apresentado na Figura 4.3(g), verifica-se que o braço esquerdo da mulher, antes dividido em duas regiões, foi corretamente segmentado ao unir estas duas regiões. A mesma situação ocorreu com o pescoço, que também fora dividido em duas regiões, mas que ao final foram fundidas em uma única partição.

## 4.3 Considerações Finais

Neste capítulo, foi apresentado o algoritmo *Competição entre Regiões*, desenvolvido por *Zhu e Yuille*, que combina características da técnica *Contornos Ativos* e do método baseado em região *Crescimento de Regiões*. Neste modelo, minimiza-se um funcional de energia formulado

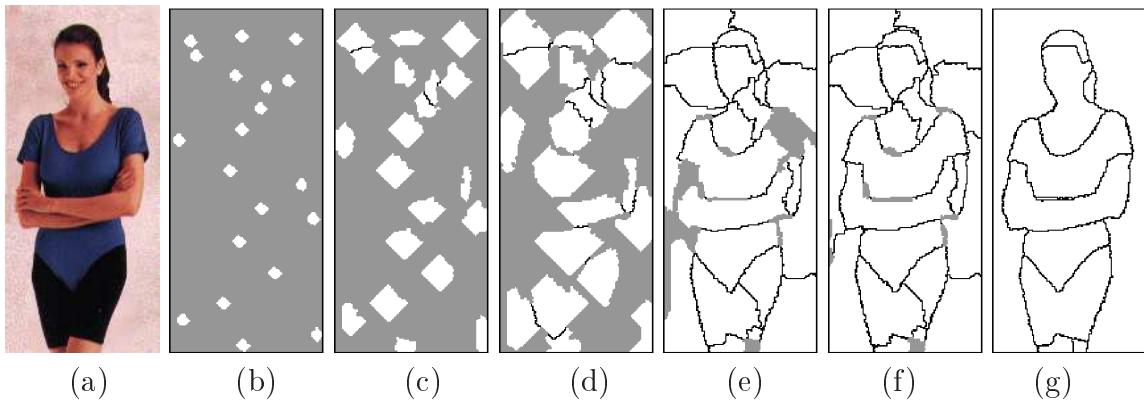


Figura 4.3: Exemplo de segmentação pela técnica *Competição entre Regiões*: (a) Imagem original; (b) Posição inicial das sementes; (c) Instante de tempo  $t = 10$ ; (d)  $t = 20$ ; (e)  $t = 60$ ; (f)  $t = 100$ ; (g)  $t = 135$ . Exemplo retirado de [Zhu e Yuille, 1996].

com base em um critério MDL, que incorpora funções de distribuição de probabilidade para representar as regiões da imagem e a movimentação de curvas dinâmicas para delimitar as regiões da imagem.

Este método é base fundamental para a sua versão *soft*, o método *Competição entre Regiões Fuzzy* proposto por *Mory e Ardon*, que será detalhado no próximo Capítulo. O método *Competição entre Regiões Fuzzy* minimiza alguns problemas que existem na técnica *Competição entre Regiões* e é base para os modelos de segmentação propostos nesta dissertação.

## CAPÍTULO

# 5

## *Competição entre Regiões Fuzzy*

---

---

Com o objetivo de se buscar alternativas em que a segmentação de imagens por uma abordagem *hard* é difícil, *Mory e Ardon* [Mory e Ardon, 2007] propuseram um modelo variacional que incorpora a idéia apresentada por *Zhu e Yuille* [Zhu e Yuille, 1996] e que utiliza uma abordagem *soft*, representada por uma função de pertinência convexa que é a solução para o problema de segmentação.

Este Capítulo tem como objetivo detalhar o funcional de energia que constitui o método *Competição entre Regiões Fuzzy*, os cinco modelos que foram derivados deste funcional, propostos por *Mory e Ardon* [Mory e Ardon, 2007] [Mory et al., 2007], e alguns resultados obtidos a partir dos experimentos realizados.

Assim, este Capítulo está organizado da seguinte maneira: A Seção 5.1 apresenta como o funcional de energia do método *Competição entre Regiões Fuzzy* foi obtido e as maneiras pelo qual pode ser resolvido. As Seções subsequentes descrevem cada um dos modelos propostos por *Mory e Ardon* que foram derivados do funcional de energia do método *Competição entre Regiões Fuzzy*, descrevendo-se suas idéias e apresentando alguns resultados experimentais.

### 5.1 Funcional de Energia

A forma geral de um problema de minimização que segmenta uma imagem  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  em duas regiões é dado por

$$\min_{\Omega_1, \alpha} \left\{ F_0(\Omega_1, \alpha) = \int_{\Gamma} g(\Gamma(s))ds + \int_{\Omega_1} r_1^{\alpha_1}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_1} r_2^{\alpha_2}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right\} \quad (5.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é o domínio da imagem  $I$ ,  $\Omega_1 \subset \Omega$  representa o objeto,  $\Omega_1 \setminus \Omega$  representa o fundo da imagem e  $\Gamma = \partial\Omega_1$  é a fronteira do domínio  $\Omega_1$ . A função  $g$  é um potencial de bordas positivo definido como uma função decrescente com relação ao gradiente da imagem. As funções erro  $r_i^{\alpha_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  possuem informações relativas a intensidade de cada região, que são modeladas utilizando-se de análise estatística sobre os parâmetros das regiões  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ . Tais parâmetros são utilizados por estas funções erro e podem assumir valores escalares [Zhu e Yuille, 1996], constantes [Chan e Vese, 2001a] ou funções [Mumford e Shah, 1989]. Caso os parâmetros ótimos  $\boldsymbol{\alpha}$  sejam conhecidos *a priori*, o problema da Eq. (5.1) é supervisionado, caso contrário, a segmentação é não-supervisionada, onde  $\boldsymbol{\alpha}$  deve ser otimizado. Estas funções erro calculam o custo de atribuir cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  para a região  $i$ . Utilizando-se diferentes tipos de funções erro, diferentes modelos de segmentação podem ser obtidos. São comumente empregadas:

- $r_i^{\alpha_i} = -\lambda \log(P_i(I|\alpha_i))$ , onde  $P_i(I|\alpha_i)$  é uma distribuição de probabilidade, com parâmetros  $\alpha_i$  escalares, sendo que  $\alpha_i \in (\mathbb{R}^k)^2$ . Especificamente, tratando-se de uma distribuição de probabilidade Gaussiana, os parâmetros  $\alpha_i$  são a média e o desvio-padrão. Esta função de erro é utilizada nos métodos *Competição entre Regiões* [Zhu e Yuille, 1996] e *Regiões Geodésicas Ativas* [Paragios e Deriche, 2002];
- $r_i^{\alpha_i} = \lambda(I - c_i)^2$ , onde os parâmetros  $\alpha_i = c_i$  são constantes, tal que  $c_i \in \mathbb{R}^2$ . Esta função de erro é utilizada no modelo *Chan-Vese* [Chan e Vese, 2001a], visto na Seção 3.3.4;
- $r_i^{\alpha_i} = \lambda(I - s_i)^2 + \zeta |\nabla s_i|^2$ , onde os parâmetros  $\alpha_i = s_i$  são funções que variam no espaço, tal que  $s_i \in (\mathcal{C}^1)^2$ . Esta função de erro é utilizada na técnica *Mumford-Shah* [Mumford e Shah, 1989];

dado que  $\lambda$  é um parâmetro regularizador positivo, que balanceia a suavização e a competição do modelo de segmentação.

Uma maneira de resolver o problema de minimização da Eq. (5.1) é reescrevendo-se o funcional utilizando apenas integrais de linha via *Teorema de Green*, juntamente com o esquema gradiente descendente para encontrar as condições ótimas. Geralmente, a solução numérica é obtida via *Método Level Set*, onde cada curva  $\Gamma$  é representada implicitamente por uma função *level set*  $\phi$ , tal que  $\Gamma = \phi^{-1}(0)$ . No entanto, surgem algumas limitações relacionadas à convergência, como a alta dependência das condições iniciais, provocada pela natureza não-convexa do funcional envolvido e do espaço de otimização.

Outra abordagem possível é reescrever o problema da Eq. (5.1) por meio de integrais sobre todo o domínio  $\Omega$ . Para isso, substitui-se a região  $\Omega_1$  por uma função *Heaviside*  $H(\phi)$  e deriva-se as Equações de Euler-Lagrange em relação a  $\phi$ , sem o uso explícito da fronteira. Entre as dificuldades encontradas, cita-se o fato de que o problema é mal-posto (problema inverso) e

o espaço de otimização é não-convexo, possibilitando que uma quantidade infinita de soluções  $\phi$  sejam válidas para representar o contorno ótimo da partição  $\Omega_1$ . Estes contratempos motivaram o desenvolvimento de métodos convexos que minimizam globalmente funcionais de energia baseados na regularização por variação total.

Como foi dito anteriormente, a formulação variacional da Eq. (5.1) pode ser resolvida como um problema de otimização utilizando-se apenas integrais sobre todo o domínio  $\Omega$ . Uma maneira de se fazer isso é expressando este problema de minimização em termos de um conjunto de funções características  $\chi$ . No entanto, o problema formulado continua não-convexo, pois como o funcional da Eq. (5.1) é não-convexo, qualquer subdomínio  $\Omega_1 \in \Omega$  também será não-convexo. Reescrevendo-se este funcional com as funções características  $\chi$  resulta em:

$$\min_{\chi, \boldsymbol{\alpha}} \left\{ \hat{F}_0(\chi, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) |\nabla \chi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x}) r_1^{\alpha_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (1 - \chi(\mathbf{x})) r_2^{\alpha_2}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} . \quad (5.2)$$

Utilizando-se a idéia apresentada no funcional da Eq. (5.2), pode-se obter um funcional de energia convexo a partir da Eq. (5.1). Neste sentido, substitui-se a função característica  $\chi$  por uma função de pertinência *fuzzy* pertencente ao espaço de funções de variação limitada (*BV* - *bounded variation*) restrito ao intervalo  $[0, 1]$ . Logo, reescrevendo-se o funcional da Eq. (5.2) utilizando-se uma função de pertinência  $u \in BV(\Omega)_{[0,1]}$ , o problema de minimização da Eq. (5.2) é reescrito como:

$$\min_{u \in BV(\Omega)_{[0,1]}, \boldsymbol{\alpha}} \left\{ F_{CRF}(u, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{\Omega} g |\nabla u| + \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) r_1^{\alpha_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (1 - u(\mathbf{x})) r_2^{\alpha_2}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} . \quad (5.3)$$

Este novo problema de minimização para segmentação variacional de imagens é denominado *Competição entre Regiões Fuzzy* (CRF). O primeiro termo se refere a regularização por variação total (*total variation* - TV), responsável pela suavização na função  $u$ , ponderada pela função  $g$ . Já o segundo e o terceiro termos se referem ao custo de atribuir cada ponto do domínio para as regiões do objeto e do fundo da imagem, respectivamente.

O funcional presente na Eq. (5.3) é convexo em relação a  $u$ , o que implica que, quando minimizado em relação a  $u$ , mantendo-se  $\boldsymbol{\alpha}$  fixo, podem-se obter soluções globais ótimas. No caso supervisionado, tais soluções são calculadas independentemente da inicialização da função  $u$ . Já no caso não-supervisionado, os parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$  necessitam ser otimizados e soluções globais podem ser obtidas com baixa sensibilidade em relação às condições iniciais. De uma maneira geral, a minimização de um problema não-supervisionado da Eq. (5.3) compreende a execução sucessiva dos dois passos abaixo:

(i.) Mantendo-se  $u$  fixo, calcula-se valores ótimos para os parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$ , de acordo com a

função erro escolhida;

- (ii.) Mantendo-se  $\alpha$  fixo, atualiza-se a função de pertinência  $u$  minimizando-se a Eq. (5.3) em relação a  $u$ ;

Na etapa (i.), deve-se conhecer a função erro  $r_i^{\alpha_i}$  para determinar as equações que encontram valores ótimos para  $\alpha_i$  (tais funções são detalhadas nas próximas Seções). Esta etapa é somente realizada em um caso de segmentação não-supervisionado, pois os parâmetros  $\alpha$  não são conhecidos *a priori* e devem ser otimizados. Já na etapa (ii.), a função de pertinência pode ser convencionalmente determinada calculando-se as Equações de Euler-Lagrange relativas ao problema da Eq. (5.3) associadas com um esquema gradiente descendente.

Para o cálculo das Equações de Euler-Lagrange, considera-se que  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ . Reescrevendo-se o funcional  $F_{CRF}$  da Eq. (5.3) como:

$$F_{CRF}(u, \alpha) = \int \int_{\Omega} L(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) dx_1 dx_2 \quad (5.4)$$

tem-se que

$$L(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = g|\nabla u| + u(x_1, x_2)r_1^{\alpha_1}(x_1, x_2) + (1 - u(x_1, x_2))r_2^{\alpha_2}(x_1, x_2) \quad (5.5)$$

Logo, a Equação de Euler-Lagrange do funcional da Eq. (5.3) em relação à função  $u = u(x_1, x_2)$ , onde  $r = r(x_1, x_2)$  e  $I = I(x_1, x_2)$  para todo  $(x_1, x_2) \in \Omega$  é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{x_1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{x_2}} \right) = 0, \quad (5.6)$$

sendo que no primeiro termo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{\partial(g|\nabla u|)}{\partial u} + \frac{(ur_1^{\alpha_1})}{\partial u} + \frac{((1-u)r_2^{\alpha_2})}{\partial u} \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= r_1^{\alpha_1} - r_2^{\alpha_2}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

para o segundo termo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{x_1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial(g\sqrt{u_{x_1}^2})}{\partial u_{x_1}} + \frac{\partial(ur_1^{\alpha_1})}{\partial u_{x_1}} + \frac{\partial((1-u)r_2^{\alpha_2})}{\partial u_{x_1}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( g \frac{u_{x_1}}{\sqrt{u_{x_1}^2}} + 0 + 0 \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( g \frac{u_{x_1}}{\sqrt{u_{x_1}^2}} \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

e para o terceiro termo, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{x_2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial(g\sqrt{u_{x_2}^2})}{\partial u_{x_2}} + \frac{\partial ur_1^{\alpha_1}}{\partial u_{x_2}} + \frac{\partial(1-u)r_2^{\alpha_2}}{\partial u_{x_2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( g \frac{u_{x_2}}{\sqrt{u_{x_2}^2}} + 0 + 0 \right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( g \frac{u_{x_2}}{\sqrt{u_{x_2}^2}} \right).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Substituindo-se as Eqs. (5.7), (5.8) e (5.9) na Eq. (5.6), obtém-se:

$$\begin{aligned}r_1^{\alpha_1} - r_2^{\alpha_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( g \frac{u_{x_1}}{\sqrt{u_{x_1}^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( g \frac{u_{x_2}}{\sqrt{u_{x_2}^2}} \right) &= 0 \\ r_1^{\alpha_1} - r_2^{\alpha_2} - \operatorname{div} \left( g \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= 0\end{aligned}\quad (5.10)$$

Adicionando-se o termo temporal  $\frac{\partial u}{\partial t}$  para associar a Equação de Euler-Lagrange com um esquema gradiente descendente, pode-se obter que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left( g \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - (r_1^{\alpha_1} - r_2^{\alpha_2}) \quad (5.11)$$

onde a partir da EDP presente na Eq. (5.11), pode-se utilizar o *Método das Diferenças Finitas* para o cálculo da solução numérica. Mais detalhes sobre as Equações de Euler-Lagrange para minimizar o funcional (5.3) podem ser encontradas em [Freitas, 2011].

Vale ressaltar que na etapa (ii.), a minimização no espaço  $BV(\Omega)_{[0,1]}$  é equivalente a minimizar o funcional da Eq. (5.3) como  $F_{con} = \int_{\Omega} g|\nabla u| + \int_{\Omega} ur$  no espaço  $BV$  com restrição em  $u$ ,  $0 \leq u \leq 1$ , onde  $r = r_1 - r_2$  é a função de competição. Este último funcional possui o mesmo conjunto de minimizadores do funcional  $F_1(u) = \int_{\Omega} g|\nabla u| + \int_{\Omega} ur + \rho\nu(u)$ , em que  $\nu(\varepsilon) = \max(0, |2\varepsilon - 1| - 1)$  e  $\rho > \frac{1}{2}|r|_{\infty}$ . O funcional  $F_1(u)$  pode ser resolvido através de um esquema de gradiente descendente baseado nas equações de Euler-Lagrange, mostradas pelas Eqs. (5.11). No entanto, esta estratégia de minimização não aproveita a vantagem da convexidade do funcional  $F_1(u)$  da Eq. (5.3).

Um esquema de minimização que pode ser utilizado para a minimização global do funcional de energia da Eq. (5.12) se refere ao algoritmo de projeção *dual* de Chambolle [Chambolle, 2004], explorado na Seção seguinte.

## 5.2 Algoritmo de Projeção Dual de Chambolle

Termos de variação total (como o primeiro termo do funcional da Eq. (5.3)) foram introduzidos em funcionais de energia por *Rudin et al.* [Rudin et al., 1992] como critérios de

regularização para a resolução de problemas inversos. Seu uso se mostrou bastante eficiente no que se refere à regularização de funções sem que as bordas dos objetos sejam suavizadas.

*Antonin Chambolle* [Chambolle, 2004] desenvolveu um algoritmo que minimiza funcionais de energia que contenham termos de variação total de uma maneira simples e eficiente. O esquema proposto por *Chambolle* determina minimizadores globais e é baseado em uma formulação *dual*.

Como dito anteriormente, o funcional de energia da Eq. (5.3) pode ser eficientemente minimizado pelo esquema de projeção *dual* de *Chambolle*. Para isso, seguindo a estratégia proposta por [Bresson et al., 2007], adiciona-se uma função auxiliar  $v$  e considera-se a seguinte aproximação para o funcional do problema da Eq. (5.3):

$$\min_{(u,v) \in BV(\Omega)_{[0,1]}} \left\{ F_{AP}(u, v) = \int_{\Omega} g|\nabla u| + \frac{1}{2\theta} \int_{\Omega} |u - v|^2 + \int_{\Omega} rv + \rho\nu(v) \right\}, \quad (5.12)$$

onde  $v$  é uma função que aproxima a função  $u$ ,  $\theta$  é um valor suficientemente pequeno para que o par minimizador  $(u^*, v^*)$  seja quase idêntico em relação a norma  $L^2$ . Verifica-se que o funcional da Eq. (5.12) é convexa tanto na função  $u$ , como na função  $v$ . Além disso, o funcional da Eq. (5.12) depende da função  $u$  somente nos dois primeiros termos, os quais são exatamente os termos do problema de minimização resolvido por *Chambolle*. Baseado neste fato, esta formulação variacional pode ser minimizada de maneira eficiente pelo algoritmo de projeção *dual* de *Chambolle* executando-se as seguintes etapas:

i. Mantendo-se  $u$  fixo, calcula-se  $v$ :

$$v = \max\{\min\{u - \theta r, 1\}, 0\}, \quad (5.13)$$

sabendo-se que  $r = r_1 - r_2$  é a função de competição entre regiões.

ii. Mantendo-se  $v$  fixo e considerando que  $\mathbf{p} = (p^1, p^2)$  é um vetor, onde  $\mathbf{p} \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , calcula-se a função  $u$ :

$$u = v - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}, \quad (5.14)$$

Sabendo-se que o vetor  $\mathbf{p}$  é solução da seguinte equação [Bresson et al., 2007]:

$$(\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)) - \frac{1}{g} |\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)| \mathbf{p}^{n+1} = 0. \quad (5.15)$$

Discretizando-se a Eq. (5.15) pelas Equações de Euler-Lagrange em relação ao tempo e *Diferenças Finitas* no vetor  $\mathbf{p}$ , temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n}{\tau} &= (\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)) - \frac{1}{g} |\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)| \mathbf{p}^{n+1} \\
 \mathbf{p}^{n+1} &= \mathbf{p}^n + \tau \left[ (\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)) - \frac{1}{g} |\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)| \mathbf{p}^{n+1} \right] \\
 \mathbf{p}^{n+1} &= \mathbf{p}^n + \tau (\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)) - \frac{\tau}{g} |\nabla(\theta \operatorname{div} \mathbf{p} - v)| \mathbf{p}^{n+1} \\
 \mathbf{p}^{n+1} &= \mathbf{p}^n + \tau (\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p} - \frac{v}{\theta})) - \frac{\tau}{g} |\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p} - \frac{v}{\theta})| \mathbf{p}^{n+1} \\
 \mathbf{p}^{n+1} \left( 1 + \frac{\tau}{g} |\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p} - \frac{v}{\theta})| \right) &= \mathbf{p}^n + \tau (\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p} - \frac{v}{\theta})),
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

obtendo-se, portanto, um algoritmo de ponto fixo, iterando-se para  $n \geq 0$

$$\mathbf{p}^{n+1} = \frac{\mathbf{p}^n + \tau \nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}^n - v/\theta)}{1 + \tau |\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}^n - v/\theta)|/g} \tag{5.17}$$

onde  $\tau < 1/8$  garante a estabilidade numérica do esquema e  $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$ .

Agora, considere que as dimensões de  $u$ ,  $v$ ,  $r$  e  $\mathbf{p}$  são discretizadas em uma malha computacional de dimensões  $M_1 \times M_2$  e que  $(i, j)$  denota um ponto. Desta maneira, o esquema de projeção *dual* de Chambolle é dado por:

$$\mathbf{p}_{i,j}^{n+1} = \frac{\mathbf{p}_{i,j}^n + \tau \nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}/\theta)}{1 + \tau |\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}/\theta)|/g_{i,j}} \tag{5.18}$$

onde  $v_{i,j} = \max\{\min\{u_{i,j} - \theta r_{i,j}, 1\}, 0\}$  e  $u_{i,j} = v_{i,j} - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}$ . Assim, pode-se definir o operador discreto divergente  $\operatorname{div}$  como [Chambolle, 2004]:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\mathbf{p})_{i,j} &= \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{se } 1 < i < M_1 \\ p_{i,j}^1 & \text{se } i = 1 \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{se } i = M_1 \end{cases} \\
 &+ \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{se } 1 < j < M_2 \\ p_{i,j}^2 & \text{se } j = 1 \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{se } j = M_2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Este esquema apresenta estabilidade numérica no processo de minimização, possui um efeito relaxante na regularização e é extremamente vantajoso para o processo de convergência. Em [Freitas, 2011], [Bresson et al., 2007] e [Chambolle, 2004] são fornecidos mais detalhes sobre o esquema de projeção *dual* e o algoritmo de ponto fixo.

Nas seções seguintes, são descritos os diferentes modelos que podem ser obtidos substituindo-se cada um das funções erro  $r_i^{\alpha_i}$  citadas no funcional de energia do método *Competição entre Re-*

giões Fuzzy representado pela Eq. (5.3). Primeiramente, é descrito o modelo de segmentação que utiliza a função erro  $r_i^{\alpha_i} = -\lambda \log P_i(I|\alpha_i)$  em uma abordagem supervisionada. Depois são tratados os modelos que podem ser obtidos usando as funções erros restantes sob paradigmas não-supervisionados.

## 5.3 Modelo Supervisionado

O modelo *Competição entre Regiões Fuzzy* supervisionado (CRFS) é obtido quando utiliza-se o termo de região estatístico  $r_i^{\alpha_i} = -\lambda \log P_i(I|\alpha_i)$ , proveniente do clássico modelo de segmentação *Competição entre Regiões* [Zhu e Yuille, 1996] e *Regiões Geodésicas Ativas* [Paragios e Deriche, 2002].

Este modelo é dito supervisionado porque  $\alpha$  é conhecido *a priori*, não sendo necessário otimizar estes parâmetros durante a minimização da Eq. (5.12). Geralmente, os parâmetros  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  são obtidos de duas amostras, uma de cada região (objeto e fundo). As distribuições de probabilidade  $P_i(I|\alpha_i)$  são estimadas com base nos parâmetros extraídos destas amostras, que se refere ao processo de aprendizagem destas regiões da imagem. A partir disso, a função de competição  $r$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= r_1^{\alpha_1}(\mathbf{x}) - r_2^{\alpha_2}(\mathbf{x}); \\ r(\mathbf{x}) &= -\lambda \log P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1) - (-\lambda \log P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)); \\ r(\mathbf{x}) &= \lambda \log P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2) - \lambda \log P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1); \\ r(\mathbf{x}) &= \lambda \log \left( \frac{P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)}{P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1)} \right); \end{aligned} \quad (5.20)$$

O processo de segmentação deste modelo supervisionado consiste em atualizar apenas a variável  $u$ , dado que as distribuições de probabilidade de cada região são previamente conhecidas.

Sabendo-se que  $P_1(I|\alpha_1)$  se refere a distribuição de probabilidade da região 1 e  $P_2(I|\alpha_2)$  se refere a distribuição de probabilidade da região 2, se um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  é estatisticamente mais semelhante a região 2, então  $P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2) > P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1)$ , logo:

$$\begin{aligned} \frac{P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)}{P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1)} &> 1 \\ \log \left( \frac{P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)}{P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1)} \right) &> 0; \end{aligned} \quad (5.21)$$

Caso contrário, se um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  é estatisticamente mais semelhante a região 1, então  $P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1) > P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)$ , assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)}{P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1)} &< 1 \\ \log\left(\frac{P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)}{P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1)}\right) &< 0; \end{aligned} \quad (5.22)$$

Desta maneira, verifica-se que a região vencedora em uma competição por um ponto da imagem é determinada pelo sinal resultante do teste log-verossimilhança calculado pela função  $r$ .

O algoritmo do modelo CRFS é descrito abaixo, onde  $AM_1$  é uma amostra do objeto da imagem e  $AM_2$  é uma amostra do fundo da imagem. Neste trabalho, utilizou-se uma Distribuição Normal (Gaussiana), cujos parâmetros de uma região são a média e o desvio-padrão. O domínio  $\Omega$  é discretizado em  $M_1 \times M_2$  pontos, dispostos por  $\Omega_D = [1, M_1] \times [1, M_2]$ , onde cada elemento  $\mathbf{x} \in \Omega$  é representado pelo par ordenado  $\{(i, j) \in \Omega_D | 1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq M_2\}$ . A constante  $T$  se refere ao número de iterações no tempo e  $\mathcal{N}$  é o número de iterações no algoritmo de *Chambolle*.

### 5.3.1 Resultados Experimentais

Nesta seção, são ilustrados alguns resultados da execução do *Competição entre Regiões Fuzzy* Supervisionado (CRFS) para determinadas imagens naturais. Com estes experimentos, buscou-se investigar a influência de cada parâmetro na solução final e a utilização do modelo na segmentação de imagens naturais e texturizadas.

O primeiro experimento, representado pela Figura 5.1, tem como objetivo ilustrar os resultados obtidos quando se inicia a função de pertinência  $u$  de três maneiras distintas. Inicialmente, deve-se extrair duas amostras da imagem original, onde uma é utilizada para modelar estatisticamente o fundo (janela em azul na Figura 5.1(b)) e a outra modela o objeto (janela em vermelho na Figura 5.1(b)). A Figura 5.1(c) ilustra uma imagem que representa a função  $g$  (Eq. (3.6)) da imagem da Figura 5.1(a). A Figura 5.1(d) mostra uma imagem que representa a função de competição  $r = \log(P_2/P_1)$ . As Figuras 5.1(e), 5.1(i) e 5.1(m) mostram três inicializações distintas para a função de pertinência. As Figuras 5.1(f-g), 5.1(j-k) e 5.1(n-o) apresentam funções de pertinência em estados intermediários (iteração 10; iteração 60) de tempo. As Figuras 5.1(h), 5.1(l) e 5.1(p) ilustram as funções de pertinências em estado final. Pode-se perceber que, o modelo de segmentação forneceu a mesma solução independentemente das condições iniciais estabelecidas. Os parâmetros utilizados foram  $\tau = 0, 1$ ,  $\theta = 0, 15$ ,  $\mathcal{N} = 15$ ,  $\lambda = 0, 25$  e  $\beta = 0, 00025$ .

No experimento identificado pela Figura 5.2, ilustram-se as imagens que representam a variável *dual*  $\mathbf{p} = (p^1, p^2)$ . Este teste se baseia no exemplo da Figura 5.1(e-h) e mostra o comportamento das duas projeções  $p^1$  e  $p^2$  no decorrer das iterações. A seqüência de imagens que compreende as Figuras 5.2(a) até 5.2(d) se referem a variável  $p^1$ , enquanto que as imagens

---

### Algoritmo 1 : CRFS

---

- 1: Calcule a média  $\mu_1$  e o desvio padrão  $\sigma_1$  para a amostra  $AM_1$ ;
- 2: Calcule a média  $\mu_2$  e o desvio padrão  $\sigma_2$  para a amostra  $AM_2$ ;
- 3: Determine as distribuições de probabilidade relacionadas a cada região da imagem para cada ponto  $(i, j)$  de  $\Omega_D$ :

$$(P_1)_{i,j} \Leftarrow \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(I_{i,j} - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right)$$

$$(P_2)_{i,j} \Leftarrow \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(I_{i,j} - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right)$$

- 4: Calcule para cada ponto  $(i, j)$  de  $\Omega_D$  a função competição entre regiões:

$$r_{i,j} \Leftarrow \lambda \log \left( \frac{(P_2)_{i,j}}{(P_1)_{i,j}} \right)$$

- 5: Inicialize aleatoriamente a função de pertinência  $u_{i,j}^0$ ;
- 6: Faça  $v_{i,j}^0 \Leftarrow u_{i,j}^0$ ;
- 7: **PARA**  $t \Leftarrow 0, 1, 2, \dots T$  **FAÇA**
- 8:     Inicialize  $\mathbf{p}_{i,j}^0 = (p_{i,j}^{1,0}, p_{i,j}^{2,0}) \Leftarrow 0$ ;
- 9:     **PARA**  $n \Leftarrow 0, 1, 2, \dots \mathcal{N}$  **FAÇA**

$$p_{i,j}^{1,n+1} \Leftarrow \frac{p_{i,j}^{1,n} + \tau \nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

$$p_{i,j}^{2,n+1} \Leftarrow \frac{p_{i,j}^{2,n} + \tau \nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

- 10:     **FIM PARA**
  - 11:      $v_{i,j}^{t+1} \Leftarrow \max(\min(u_{i,j}^t - \theta r_{i,j}, 1), 0)$ ;
  - 12:      $u_{i,j}^{t+1} \Leftarrow v_{i,j}^{t+1} - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}$ ;
  - 13:     **FIM PARA**
-

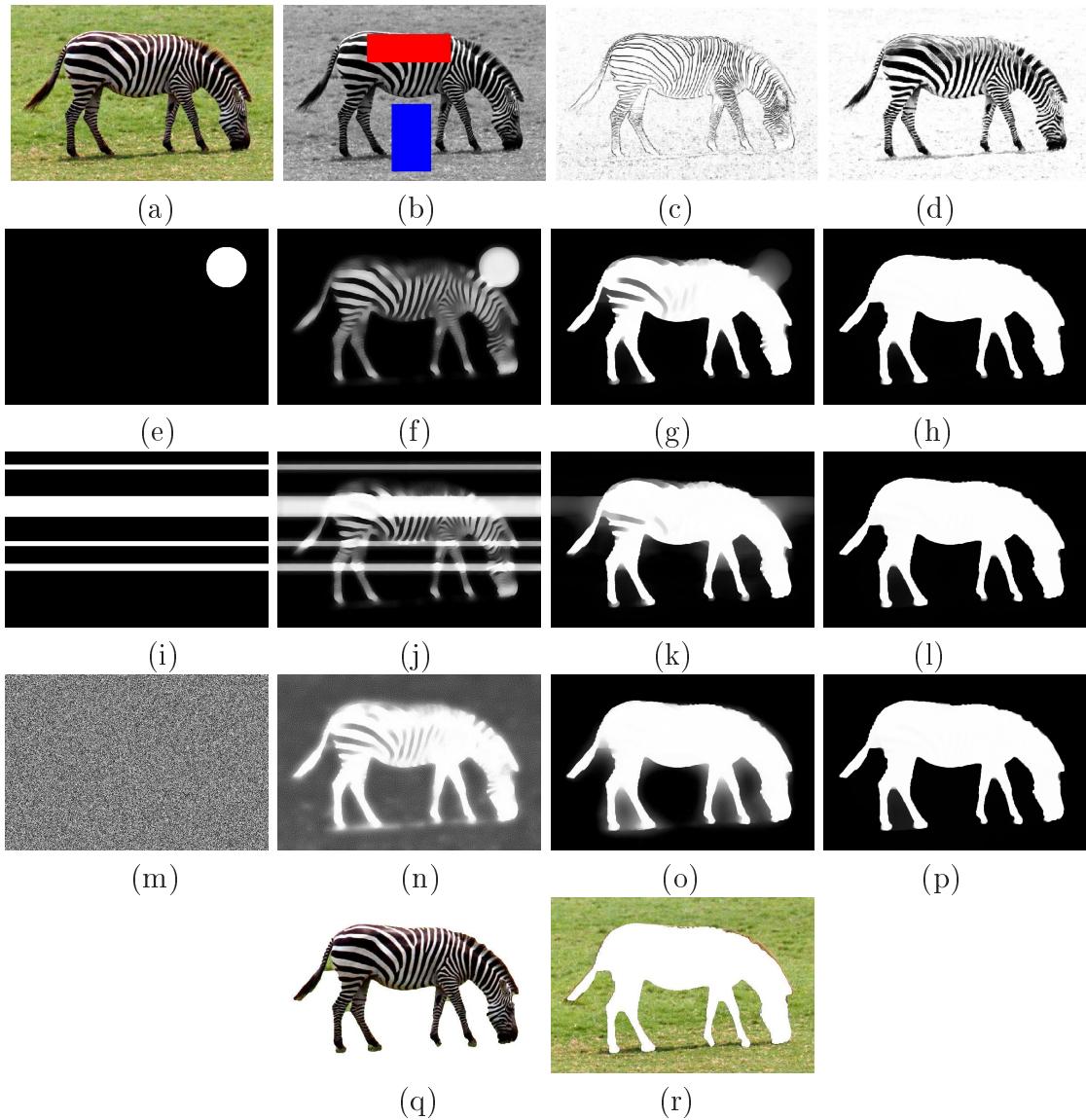


Figura 5.1: Imagem da zebra ( $391 \times 596$ ) no modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Regiões amostradas: objeto (vermelho) e fundo (azul); (c) Função  $g$ ; (d) Função de competição  $r$ ; (e-i-m) Função de pertinência  $u$  no instante inicial; (f-j-n) Passo de tempo intermediário - iteração 10; (g-k-o) Passo de tempo intermediário - iteração 60; (h-l-p) Estado final para  $u$  com 350 iterações; (q) Segmentação do objeto  $uI$ ; (r) Segmentação do fundo  $I(1 - u)$ .

compreendidas entre as Figuras 5.2(e) e 5.2(h) tratam da variável  $p^2$ . Pode-se perceber pela análise das imagens a influência da função  $g$  nas variáveis  $p^1$  e  $p^2$  e a direção do fluxo de suavização e da difusão.

### 5.3.1.1 Investigação do parâmetro $\lambda$

No experimento mostrado pela Figura 5.3, o valor de  $\lambda$  foi aumentado em relação ao experimento da Figura 5.1 e os valores de  $\beta$ ,  $\theta$  e  $\mathcal{N}$  foram mantidos fixos. Na teoria, esta situação acarreta em uma maior contribuição da competição no decréscimo da energia durante a mi-

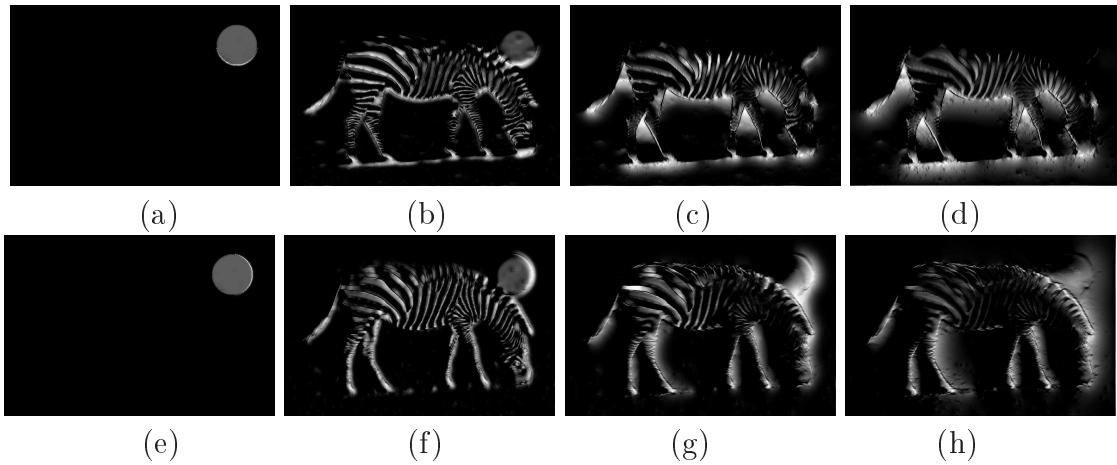


Figura 5.2: Análise do vetor de projeção  $\mathbf{p}$  no modelo CRFS supervisionado da Figura 5.1: (a) - (d) Vetor  $p^1$  nas iterações 1, 10, 60 e 350; (e)-(h) Vetor  $p^2$  nas iterações 1, 10, 60 e 350;

nimização do funcional da Eq. (5.3). Neste teste,  $\lambda = 0,5$  e os demais parâmetros tem seus valores iguais aos descritos na Figura 5.1. A Figura 5.3(a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.3(b) e 5.3(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.3(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 350. Por estes resultados, percebe-se uma redução na difusão, pois certas listras brancas da zebra não foram corretamente segmentadas. Os parâmetros utilizados foram  $\tau = 0,1$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\theta = 0,15$ ,  $\mathcal{N} = 15$  e  $\beta = 0,00025$ .

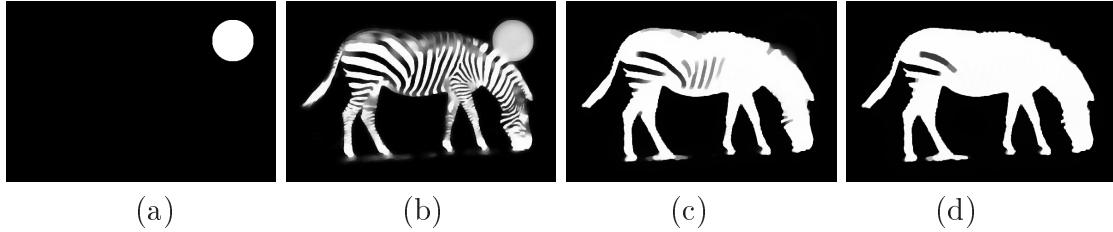


Figura 5.3: Aumento no valor do parâmetro  $\lambda$  no modelo CRFS: (a) Função  $u$  no instante inicial (b) Função  $u$  intermediária - iteração 10 (c) Função  $u$  intermediária - iteração 60 (d) Estado final para  $u$  com 350 iterações.

Por outro lado, diminuindo-se o valor de  $\lambda$ , verifica-se uma baixa influência da função de competição  $r$  e um aumento da difusão na função  $u$ , como descreve o experimento da Figura 5.4. Neste caso, o valor de  $\lambda$  foi fixado em 0,075 e os demais parâmetros tem seus valores iguais aos descritos na Figura 5.1. A Figura 5.4(a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.4(b) e 5.4(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.4(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 350. A redução na força da competição no processo de segmentação resultou em uma partição onde o objeto identificado ultrapassou os limites do objeto (zebra) existente na imagem. Neste experimento,  $\tau = 0,1$ ,  $\theta = 0,15$ ,  $\mathcal{N} = 15$  e  $\beta = 0,00025$

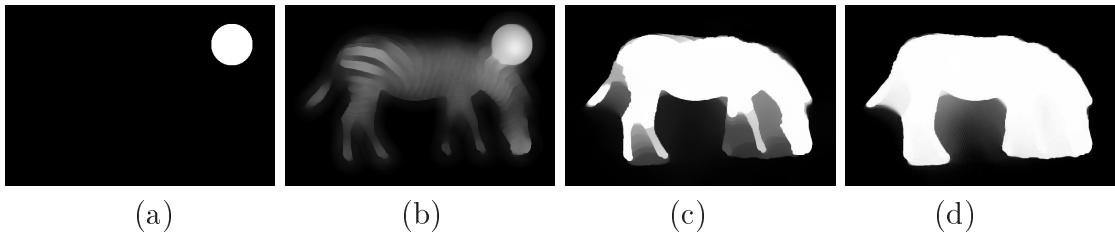


Figura 5.4: Decréscimo no valor do parâmetro  $\lambda$  no Modelo CRFS: (a) Função  $u$  no instante inicial; (b) Função  $u$  intermediária - iteração 30; (c) Função  $u$  intermediária - iteração 200; (d) Estado final para  $u$  com 350 iterações.

### 5.3.1.2 Investigaçāo do parāmetro $\theta$

O parāmetro  $\theta$  estā diretamente ligado a questão da estabilidade do processo de minimização pelo algoritmo de *Chambolle*. Aumentando-se o valor de  $\theta$  e mantendo-se os outros parāmetros fixos, verifica-se que a função de pertinência  $u$  caminha mais rapidamente para o estado final. No entanto, foi verificado que ocorreu instabilidade numérica para valores de  $\theta$  maiores do que o estabelecido no experimento da Figura 5.5. A Figura 5.5(a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.5(b) e 5.5(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.5(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 350. Os parāmetros foram ajustados como:  $\tau = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $\mathcal{N} = 15$  e  $\beta = 0,00025$ .

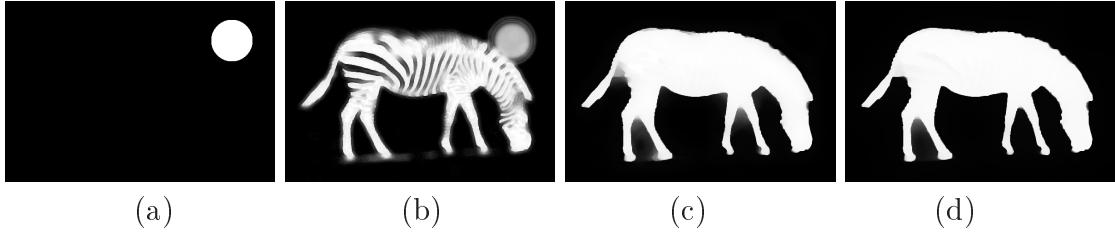


Figura 5.5: Aumento do valor de  $\theta$  no modelo CRFS: (a) Função  $u$  no instante inicial; (b) Função  $u$  na iteração 10; (c) Função  $u$  na iteração 60; (d) Estado final para  $u$  com 350 iterações.

A redução do valor  $\theta$  torna o processo de minimização mais lento, porém mais estável, mostrado na Figura 5.6. É perceptível a qualidade de segmentação do objeto comparado-se as Figuras 5.5(d) e 5.6(d). A Figura 5.6(a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.6(b) e 5.6(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.6(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 630. Os parāmetros foram fixados como:  $\tau = 0,1$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $\theta = 0,075$ ,  $\mathcal{N} = 15$  e  $\beta = 0,00025$ .

### 5.3.1.3 Investigaçāo do parāmetro $\beta$

Nesta seção, estudam-se os efeitos do parāmetro  $\beta$ , presente na função  $g$  (Eq. (3.6)) do funcional da Eq. (5.12), responsável por controlar a força do gradiente da imagem na difusão da função

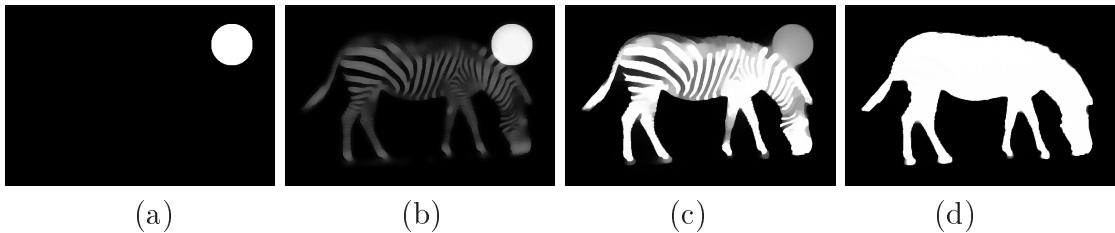


Figura 5.6: Decréscimo do valor de  $\theta$  no modelo CRFS: (a) Função de pertinência  $u$  no instante inicial; (b) Função  $u$  na iteração 10; (c) Função  $u$  na iteração 60; (d) Estado final para  $u$  com 630 iterações.

de pertinência.

Neste primeiro experimento, apresentado na Figura 5.7, utilizou-se um valor para  $\beta$  menor em relação ao valor fixado no experimento da Figura 5.1. Pode-se observar que em determinadas regiões da imagem, como nas patas traseiras da zebra, a difusão foi maior do que a força do gradiente, fazendo com que ocorresse a junção destes membros. A Figura 5.7 (a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.7(b) e 5.7(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.7(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 350. Neste experimento,  $\tau = 0, 1$ ,  $\lambda = 0, 25$ ,  $\theta = 0, 15$ ,  $\mathcal{N} = 15$  e  $\beta = 0, 00005$ .

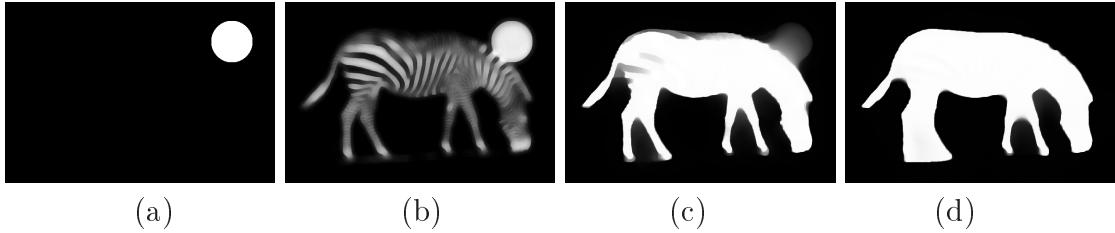


Figura 5.7: Decréscimo do valor  $\beta$  no modelo CRFS: (a) Função de pertinência  $u$  no instante inicial (b) Passo de tempo intermediário - iteração 10 (c) Passo de tempo intermediário - iteração 60 (d) Estado final para  $u$  com 350 iterações.

A Figura 5.8 mostra um teste que foi executado com um valor  $\beta$  maior em relação ao teste da Figura 5.1. Pode-se observar que a difusão nas bordas foi maior do que no experimento anterior, tanto que as listras da zebra foram separadas em regiões distintas. A Figura 5.8(a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.8(b) e 5.8(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.8(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 1400. Os parâmetros foram ajustados como  $\tau = 0, 1$ ,  $\lambda = 0, 25$ ,  $\theta = 0, 15$ ,  $\mathcal{N} = 15$  e  $\beta = 0, 01$ .

Pode-se concluir que o valor  $\beta$  é muito importante para determinar o quanto as bordas da imagem devem ser suavizadas. Esta força controla o processo de difusão e o efeito de suavização na função de pertinência  $u$ , limitando a difusão até as fronteiras das regiões quando seu valor é alto, ou, permitindo que ocorra uma fusão entre duas ou mais regiões adjacentes quando seu

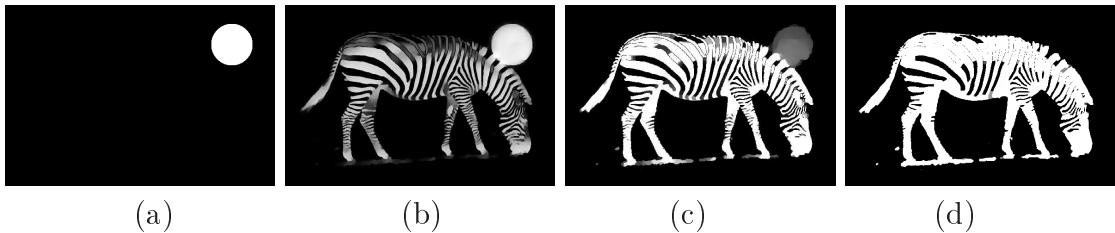


Figura 5.8: Aumento do valor  $\beta$  no modelo CRFS: (a) Função de pertinência  $u$  no instante inicial (b) Passo de tempo intermediário - iteração 10 (c) Passo de tempo intermediário - iteração 60 (d) Estado final para  $u$  com 1400 iterações.

valor de  $\beta$  é baixo.

#### 5.3.1.4 Investigaçāo do nāmero de iterações do algoritmo de ponto fixo de Chambolle

Nas Figuras 5.9 e 5.10, é investigado a relevância da quantidade de iterações  $\mathcal{N}$  no algoritmo de ponto fixo *Chambolle* que se deve efetuar. Para isso, os parâmetros  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $\beta$  foram fixados iguais ao experimento da Figura 5.1.

No experimento representado pela Figura 5.9, verifica-se que quanto menor o valor de  $\mathcal{N}$ , menor é a suavização e a difusão na função de pertinência  $u$ . Além disso, é perceptível pelos resultados apresentados a instabilidade numérica existente no processo de minimização. Neste teste, o valor  $\mathcal{N} = 1$ . A Figura 5.9(a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.9(b) e 5.9(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.9(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 350.

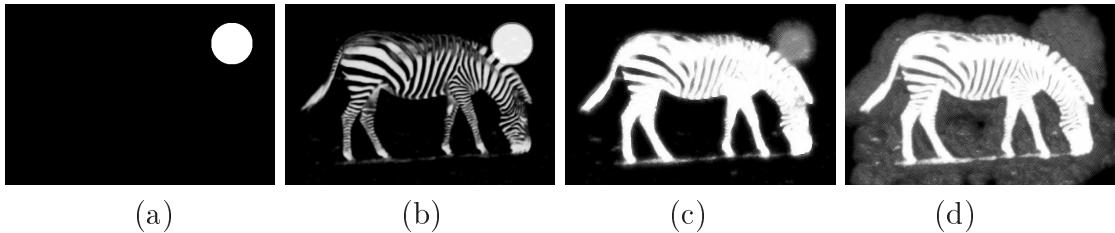


Figura 5.9: Redução do valor de  $\mathcal{N}$  no modelo CRFS: (a) Função de pertinência  $u$  no instante inicial de tempo; (b) Função  $u$  na iteração 10; (c) Função  $u$  na iteração 60; (d) Estado final para  $u$  com 350 iterações.

No próximo experimento, dado pela Figura 5.10, o valor de  $\mathcal{N}$  foi aumentado em relação ao valor utilizado no teste da Figura 5.10. Neste teste, o valor  $\mathcal{N} = 25$ . A Figura 5.10(a) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.10(b) e 5.10(c) são as funções de pertinência em estados intermediários de tempo (iterações 10 e 60, respectivamente). A Figura 5.10(d) ilustra a função de pertinência  $u$  na iteração 350. Pelos resultados obtidos, verifica-se que a função de pertinência  $u$  alcança o estado final mais lentamente comparado ao experimento da Figura 5.1. Portanto, não se faz necessário fixar altos valores para  $\mathcal{N}$ , uma vez

que o custo computacional está diretamente ligado ao desempenho do algoritmo do modelo de segmentação.

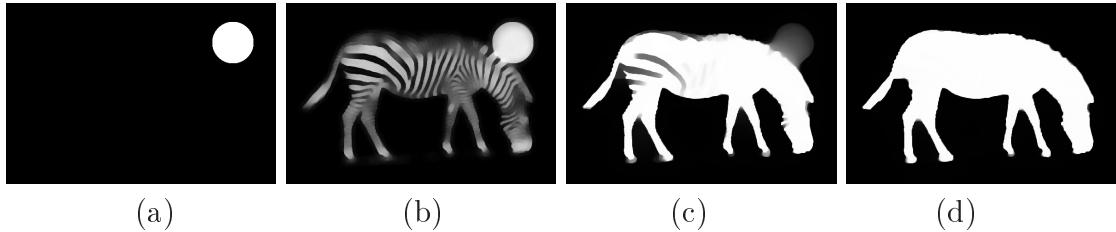


Figura 5.10: Aumento do valor de  $\mathcal{N}$  no modelo CRFS: (a) Função  $u$  inicial; (b) Função  $u$  na iteração 10; (c) Função  $u$  na iteração 60; (d) Estado final para  $u$  após 350 iterações.

Os experimentos a seguir ilustram alguns exemplos de segmentação utilizando-se de imagens da base de dados *Berkeley Segmentation Dataset* [Martin et al., 2001]. Esta base de dados pública contém imagens naturais e do cotidiano, cada uma com um nível de dificuldade. Para os próximos testes, foram escolhidas imagens compostas visualmente por duas regiões da referida base de dados. Os parâmetros do algoritmo de *Chambolle* foram mantidos fixos para todos os experimentos:  $\tau = 0,1$ ,  $\theta = 0,15$  e  $\mathcal{N} = 15$ . Já os parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$  (utilizado na função  $g$ , dada na Eq. (3.6)) foram ajustados para cada imagem.

São ilustrados nas Figuras 5.11(a), 5.12(a) e 5.13(a) a imagem original. As Figuras 5.11(b), 5.12(b) e 5.13(b) apresentam as amostras extraídas de cada imagem, sabendo-se que a janela em azul está relacionada com a amostragem do fundo da imagem, enquanto que a janela em vermelho se refere à amostragem do objeto. As Figuras 5.11(c), 5.12(c) e 5.13(c) mostram a função competição entre regiões  $r = \lambda \log(P_2/P_1)$ . As Figuras compreendidas entre 5.11(d-g), 5.12(d-g) e 5.13(d-g) ilustram a função de pertinência  $u$  em estado inicial, em dois estados intermediários de tempo e em estado final. Finalmente, as Figuras 5.11(h), 5.12(h) e 5.13(h) apresentam a segmentação obtida.

Em cada uma das próximas três seções, é descrito um modelo de segmentação, onde não se faz necessária a amostragem das regiões da imagem. Isto significa que os parâmetros das regiões são otimizados durante o processo de segmentação. Primeiramente, investiga-se um modelo de segmentação que aproxima a imagem original por uma função constante por partes, e posteriormente, é detalhado a extensão desta abordagem para um modelo suave por partes. Ao final é descrita uma abordagem estatística não-paramétrica formulada sob a metodologia *Competição entre Regiões Fuzzy*.

## 5.4 Competição entre Regiões Constantes

Nesta seção, é apresentado um caso não-supervisionado de segmentação para o método *Competição entre Regiões Fuzzy*, que se baseia no modelo *Chan-Vese* [Chan e Vese, 2001a], denominado *Competição entre Regiões Constantes* (CRC). Como visto na Seção 3.3.4, o modelo *Chan-Vese* divide a imagem em duas regiões com intensidades constantes sem a utilização do

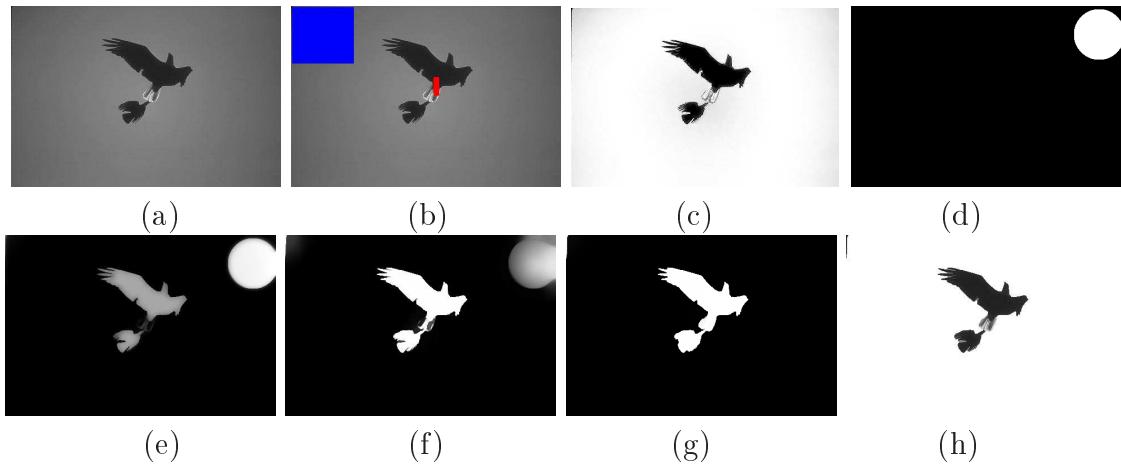


Figura 5.11: Imagem de uma ave ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001] segmentada pelo modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Amostragem do fundo (azul) e do objeto (vermelho) da imagem; (c) Função de competição  $r$ ; (d) Função  $u$  inicial; (e-f) Função  $u$  na iteração 20 e 40, respectivamente; (g) Função  $u$  após 500 iterações; (h) Imagem segmentada  $Iu$ . Os parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,1$  e  $\beta = 0,0025$ .

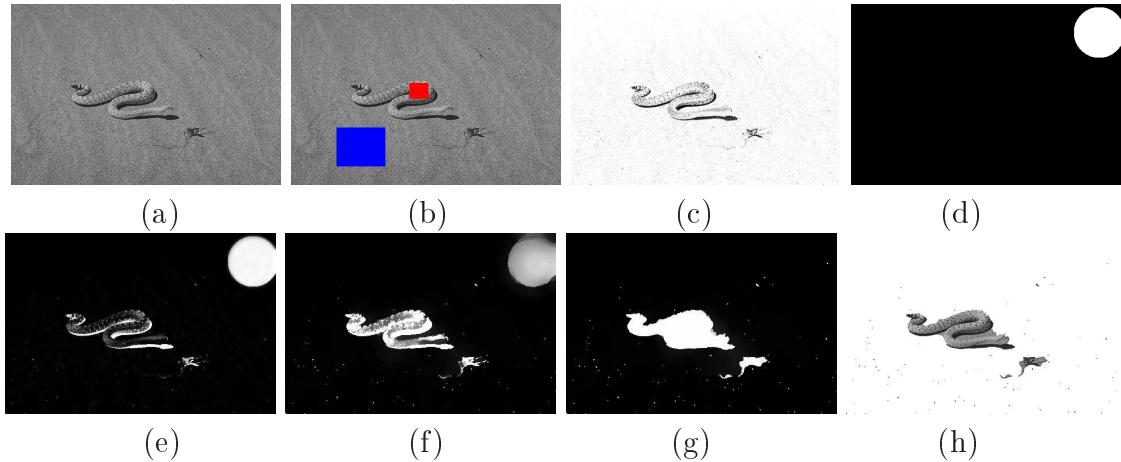


Figura 5.12: Imagem de uma cobra ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001] segmentada pelo modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Amostragem do fundo (azul) e do objeto (vermelho) da imagem; (c) Função de competição  $r$ ; (d) Função  $u$  inicial; (e-f) Função  $u$  na iteração 10 e 30, respectivamente; (g) Função  $u$  após 1000 iterações; (h) Imagem segmentada  $Iu$ . Os parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,25$  e  $\beta = 0,0075$ .

operador gradiente. Este modelo utiliza o *Método Level Set* em sua formulação para aproximar soluções do caso constante do funcional *Mumford-Shah*, enquanto que o modelo CRC, proposto por *Mory e Ardon*, possui uma abordagem *soft*, já que incorpora em seu funcional de energia uma função de pertinência.

Diferentemente do modelo CRFS, onde já se conhece *a priori* os parâmetros  $\alpha$  das funções erro ( $r_i^{\alpha_i}$ ), no modelo (CRC) é preciso otimizá-los durante o processo de segmentação. Isto significa que os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  têm seus valores iniciais ajustados com base na inicialização

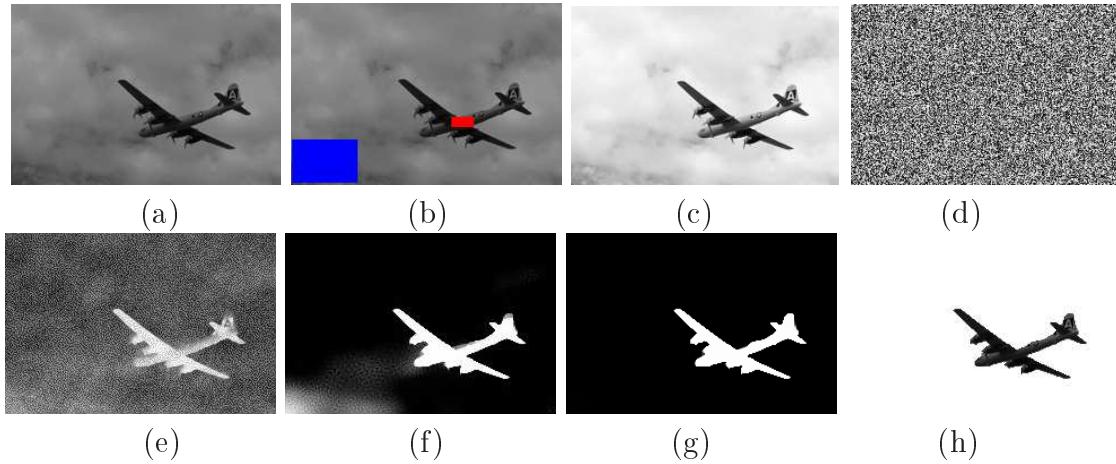


Figura 5.13: Imagem de um avião ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001] segmentada pelo modelo CRFS: (a) Imagem original; (b) Amostragem do fundo (azul) e do objeto (vermelho) da imagem; (c) Função de competição  $r$ ; (d) Função  $u$  inicial; (e-f) Função  $u$  na iteração 10 e 20, respectivamente; (g) Função  $u$  após 500 iterações; (h) Imagem segmentada  $Iu$ . Os parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,1$  e  $\beta = 0,002$ .

da função  $u$ , e que durante a minimização desta função, seus valores se alteram dependendo das características de intensidade da imagem e da função  $u$ .

Assumindo que as regiões da imagem possuem intensidades homogêneas, *Mory e Ardon* [Mory e Ardon, 2007] propuseram utilizar a função erro  $r_i^{c_i} = \lambda(I - c_i)^2$  no funcional da Eq. (5.3), cujos parâmetros das regiões  $\alpha_i$  são constantes  $c_i$ . Assim, mantendo-se a função  $g = 1$ , o modelo *Chan-Vese* pode ser modelado sob a formulação *Competição entre Regiões Constantes* de acordo com:

$$\min_{u \in BV(\Omega)_{[0,1]}(c_1, c_2) \in R^2} \left\{ F_{CRC}(u, c_1, c_2) = \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\Omega} u(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - c_1)^2 d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega} (1 - u(\mathbf{x}))(I(\mathbf{x}) - c_2)^2 d\mathbf{x} \right\}. \quad (5.23)$$

Como foi dito anteriormente, as constantes  $c_1$  e  $c_2$  de cada região devem ser incluídas em um processo de otimização. Assim, os valores ótimos de  $c_1$  e  $c_2$  são obtidos calculando-se as Equações de Euler-Lagrange do funcional da Eq. (5.23), no qual se obtém:

$$c_1^* = \frac{\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad c_2^* = \frac{\int_{\Omega} (1 - u(\mathbf{x})) I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} (1 - u(\mathbf{x})) d\mathbf{x}} \quad (5.24)$$

Por sua vez, a função de pertinência  $u$  é determinada resolvendo-se a equação da evolução descrita na Eq. (5.11). Alternativamente, pode-se utilizar o eficiente esquema de projeção *dual* de *Chambolle*, como apresentado na Seção 5.2 para uma minimização mais rápida e eficiente.

Para isso, utiliza-se a seguinte função de competição  $r$  no funcional da Eq. (5.12) que aproxima o funcional  $F_{CRC}$ :

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= r_1^{c_1}(\mathbf{x}) - r_2^{c_2}(\mathbf{x}) \\ r(\mathbf{x}) &= \lambda[(I(\mathbf{x}) - c_1)^2 - (I(\mathbf{x}) - c_2)^2] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Finalmente, o processo de minimização do problema da Eq. (5.23) é feito de acordo com o esquema mostrado na Seção anterior:

- i. Mantendo-se  $u$  fixo, calcula-se valores de  $c_1$  e  $c_2$  de acordo com as Eqs. (5.24);
- ii. Mantendo-se  $c_1$  e  $c_2$  fixos, atualiza-se a função de pertinência *fuzzy*  $u$  minimizando-se o funcional da Eq. (5.23) em relação a função de pertinência  $u$  pelo esquema gradiente descendente da Eq. (5.11) ou pelo esquema de projeção *dual* de *Chambolle*.

Este método foi implementado utilizando-se o esquema de projeção *dual* de *Chambolle*. O algoritmo do modelo CRC é descrito abaixo, onde o domínio  $\Omega$  é discretizado em  $M_1 \times M_2$  pontos, dispostos por  $\Omega_D = [1, M_1] \times [1, M_2]$ , onde cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  é representado pelo par ordenado  $\{(i, j) \in \Omega_D | 1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq M_2\}$ . O parâmetro  $T$  se refere ao número de iterações no tempo e  $\mathcal{N}$  é o número de iterações no algoritmo de ponto fixo de *Chambolle*.

#### 5.4.1 Resultados Experimentais

Nesta seção, objetiva-se validar o modelo CRC em imagens que possuem regiões com intensidades homogêneas. Os parâmetros  $\lambda$ ,  $\theta$  e o número de iterações no algoritmo de *Chambolle* se comportam da mesma maneira como verificado no caso supervisionado (descrito na Seção anterior), gerando efeitos idênticos no resultado final. Os parâmetros  $\tau$ ,  $\theta$  e o número de iterações no algoritmo de *Chambolle* foram mantidos fixos para todos os testes, enquanto que  $\lambda$  teve que ser ajustado para cada imagem. Assim,  $\tau = 0, 1$ ,  $\theta = 0, 15$  e 10 iterações no algoritmo de *Chambolle* foram efetuadas em cada experimento.

No primeiro teste, procurou-se utilizar uma típica imagem ruidosa e comprovar a eficiência do método de segmentação nestas condições. Neste teste, consideram-se três experimentos, cada um com uma inicialização distinta para a função de pertinência  $u$ . A Figura 5.14(a) se refere a imagem original e a Figura 5.14(b) mostra a função constante por partes  $c = c_1u + c_2(1 - u)$  que aproxima a imagem original. As Figuras 5.14(c), 5.14(d) e 5.14(e) ilustram três funções de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.14(f), 5.14(g) e 5.14(h) mostram estas respectivas três funções de pertinência em estados intermediários durante o processo de segmentação. As Figuras 5.14(i), 5.14(j) e 5.14(k) apresentam as três respectivas funções de pertinências  $u$  obtidas pelo modelo proposto. Pode-se observar que, o modelo de segmentação dado pelo

---

### Algoritmo 2 : CRC

---

1: Inicialize aleatoriamente a função de pertinência  $u_{i,j}^0$ ;

2: Faça  $v_{i,j}^0 \Leftarrow u_{i,j}^0$ ;

3: **PARA**  $t \Leftarrow 0, 1, 2, \dots T$  **FAÇA**

4: Atualize as constantes  $c_1$  e  $c_2$  de acordo com:

$$c_1^t \Leftarrow \frac{\sum_i \sum_j u_{i,j} I_{i,j}}{\sum_i \sum_j u_{i,j}} \quad c_2^t \Leftarrow \frac{\sum_i \sum_j (1 - u_{i,j}) I_{i,j}}{\sum_i \sum_j (1 - u_{i,j})}$$

5: Calcule para cada  $(i, j) \in \Omega_D$  a função competição entre regiões:

$$r_{i,j}^t \Leftarrow \lambda[(I_{i,j} - c_1^t)^2 - (I_{i,j} - c_2^t)^2]$$

6: Inicialize  $\mathbf{p}_{i,j}^0 = (p_{i,j}^{1,0}, p_{i,j}^{2,0}) \Leftarrow 0$ ;

7: **PARA**  $n \Leftarrow 0, 1, 2, \dots N$  **FAÇA**

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{1,n+1} &\Leftarrow \frac{p_{i,j}^{1,n} + \tau \nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|} \\ p_{i,j}^{2,n+1} &\Leftarrow \frac{p_{i,j}^{2,n} + \tau \nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|} \end{aligned}$$

8: **FIM PARA**

9:  $v_{i,j}^{t+1} \Leftarrow \max(\min(u_{i,j}^t - \theta r_{i,j}^t, 1), 0)$ ;

10:  $u_{i,j}^{t+1} \Leftarrow v_{i,j}^{t+1} - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}$ ;

11: **FIM PARA**

---

funcional da Eq. (5.3) é fracamente dependente da inicialização de  $u$ , pois a partir três inicializações distintas para a função de pertinência *fuzzy u*, o método apresentou resultados bastante semelhantes. Neste teste, o parâmetro  $\lambda$  foi fixado em 0,00005.

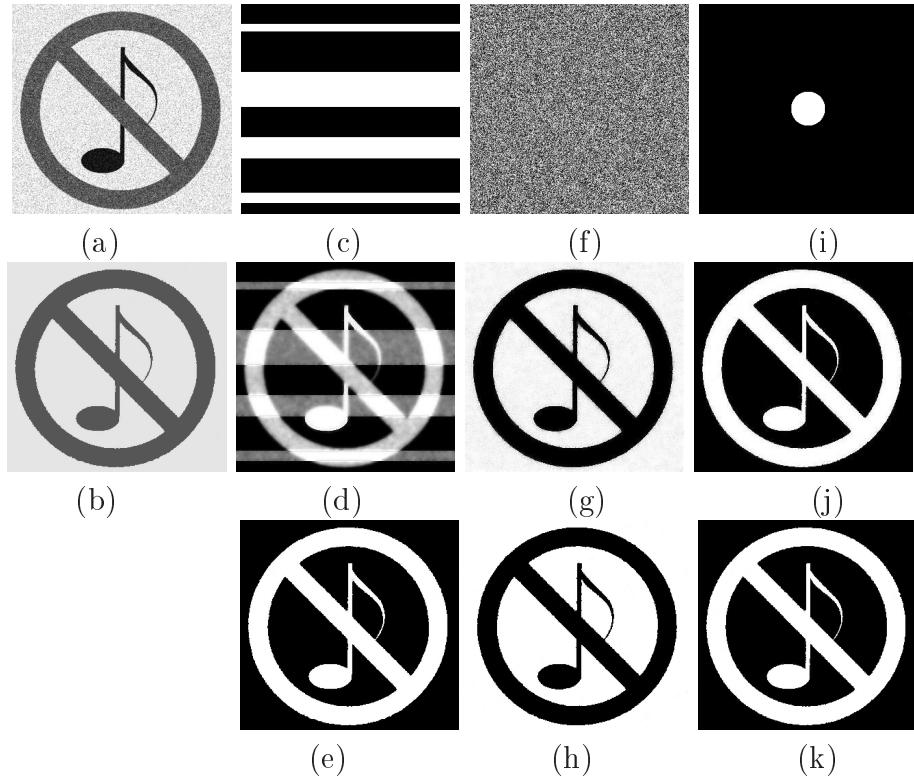


Figura 5.14: Teste realizado no *CRC* ( $128 \times 128$ ): (a) Imagem original; (b) Função constante por partes  $c$ . Três casos de teste: (c-d-e), (f-g-h) e (i-j-k), que correspondem respectivamente a: Função  $u$  no instante inicial - Função  $u$  na iteração 10 - Função  $u$  após 100 iterações.

Na Figura 5.15, são apresentados dois experimentos onde objetiva-se verificar um caso onde a partir de duas inicializações distintas são obtidos dois resultados distintos. A Figura 5.15(a) mostra uma imagem sintética utilizada para a segmentação. As sequências que compreendem as Figuras 5.15(b-c) e 5.15(e-f) ilustram a função de pertinência  $u$  em estado inicial e final. As Figuras 5.15(d) e 5.15(g) mostram as respectivas funções constantes por partes  $c = c_1u + c_2(1 - u)$ . Verifica-se que o modelo CRC retornou resultados diferentes a partir de funções de pertinência inicializadas de formas distintas, o que comprova a existência de uma sensibilidade do modelo CRC com relação à inicialização da função  $u$ . Neste experimento,  $\lambda = 0,05$ .

No experimento representado pela Figura 5.16, a imagem sintética está corrompida com ruído pimental e sal, juntamente com ruído Gaussiano. O objetivo é segmentar toda a região com intensidade de níveis de cinza mais escura, composta por objetos de diferentes formas topológicas. A Figura 5.16(a) apresenta a imagem original. A Figura 5.16(b) se refere a função de pertinência  $u$  em estado inicial. As Figuras 5.16(c) e 5.16(d) ilustram a função de pertinência  $u$  em estados intermediários de tempo. A Figura 5.16(e) se refere a função de pertinência  $u$

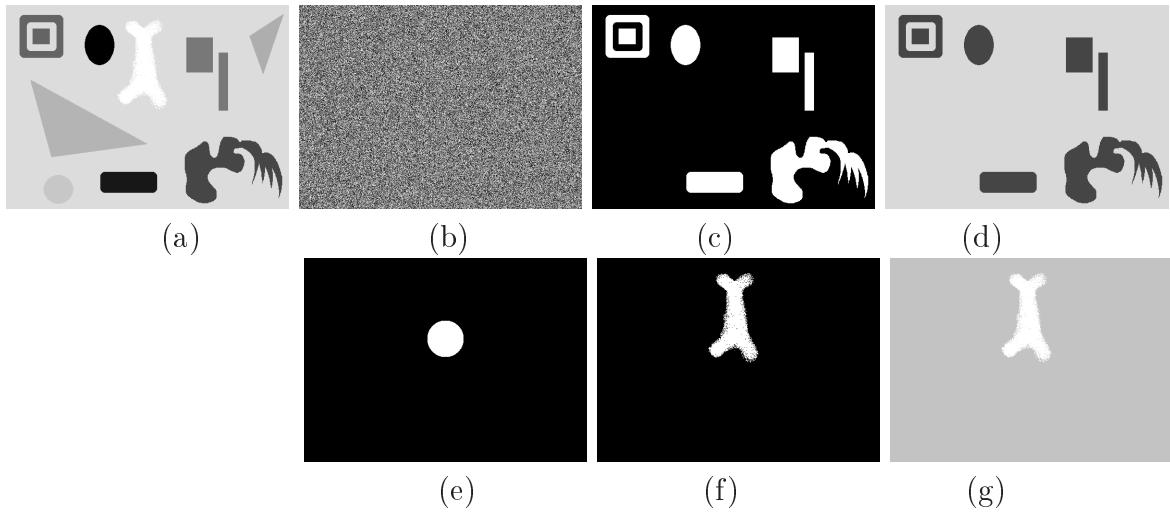


Figura 5.15: Imagem sintética ( $543 \times 390$ ) executada no modelo CRC: (a) Imagem original. Experimento 1: (b) Função  $u$  no instante inicial de tempo; (c) Função  $u$  após 40 iterações; (d) Função constante em partes  $c$ . Experimento 2: (e) Função  $u$  inicial; (f) Função  $u$  após 40 iterações; (g) Função constante em partes  $c$ .

após 100 iterações. Pelos resultados, pode-se concluir a eficiência do método em imagens ruidosas, visto que a imagem 5.16(a) está bastante degradada e boa parte de seu objeto pode ser detectado. Neste caso de teste, o parâmetro  $\lambda$  foi fixado em 0,00002.

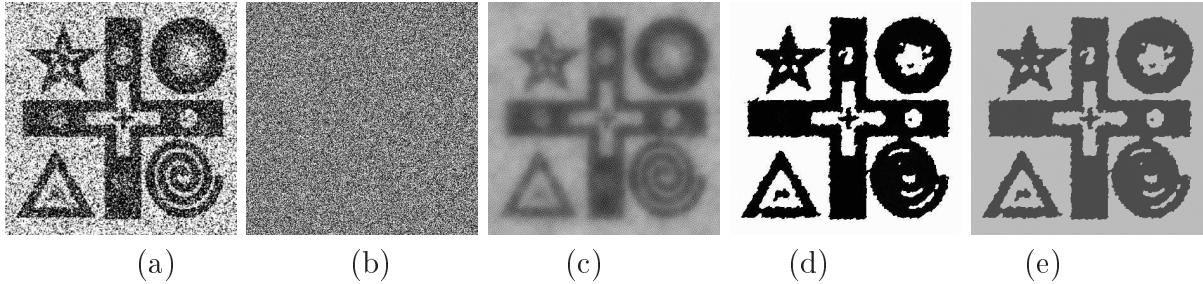


Figura 5.16: Imagem ruidosa ( $366 \times 366$ ) executada no modelo CRC: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  inicial; (c) Função  $u$  na iteração 20; (d) Função  $u$  após 100 iterações; (e) Função constante por partes  $c = uc_1 + (1 - u)c_2$ .

Na próxima seção, será apresentado um modelo que permite suaves variações de intensidade no interior das regiões da imagem, o que aumenta sua aplicabilidade em problemas do mundo real.

## 5.5 Competição entre Regiões Suaves

Na Seção anterior, foi descrito o modelo *Competição entre Regiões Constantes* (CRC), que é muito útil para segmentar imagens cujas regiões possuem intensidades homogêneas ou que estão corrompidas por ruídos com variação constante. Na prática, não apenas este modelo, mas métodos baseados em regiões de intensidades constantes, têm sua aplicabilidade bastante

restrita, uma vez que é difícil de se encontrar imagens com as características citadas.

Geralmente, imagens são influenciadas pela (falta de) iluminação e possuem algum tipo de textura, o que produz variações na intensidade que podem ser suaves ou abruptas. Assim, o uso de métodos que aproximam uma imagem por uma função constante por partes pode trazer resultados insatisfatórios, pois estas variações de intensidades podem ser atribuídas como regiões distintas da imagem, ou podem até ser consideradas ruído.

Deficiências como estas são comumente resolvidas utilizando métodos que aproximam a imagem original por uma função suave por partes. Estas funções são generalizações das funções constantes por partes, com o diferencial de admitir suaves (leves) variações na intensidade, pois podem variar no espaço. Desta maneira, enquanto que no caso constante os pontos do domínio de uma mesma região possuem a mesma intensidade, no caso suave, os pontos do domínio de uma mesma região podem assumir valores distintos.

*Mory e Ardon* [Mory e Ardon, 2007] observaram que suaves variações na intensidade pode ser obtidas ao se considerar vizinhanças em relação a cada ponto do domínio de uma função constante por partes. Neste sentido, *Mory e Ardon* formularam uma extensão do modelo CRC que utiliza uma análise local para considerar estas lentes variações de intensidade na imagem. Esta abordagem local foi implementada por meio de uma função janela simétrica  $\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que funciona como uma soma local de uma função constante por partes.

Na Seção anterior, foi visto que a contribuição global do objeto para o erro total no modelo CRC é dada por:

$$E = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - c_1)^2 d\mathbf{x}. \quad (5.26)$$

Introduzindo-se a janela  $\omega$ , onde consideram-se os pontos vizinhos em relação a um ponto central  $\mathbf{y} \in \Omega$ , tem-se que a contribuição local do objeto da imagem para o erro em uma vizinhança de um ponto  $\mathbf{y}$  é:

$$e(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - s_1(\mathbf{y}))^2, \quad (5.27)$$

onde a constante  $c_1$  é agora uma função integrável  $s_1(\mathbf{y})$  que varia no espaço. Assim, a nova contribuição do objeto para o erro global é  $\int_{\mathbf{y} \in \Omega} e(\mathbf{y})$ . Adicionando-se uma contribuição para o fundo da imagem e invertendo-se a ordem de integração, pode-se obter o modelo *Competição entre Regiões Suaves* (CRS), cujo problema de minimização é dado por

$$\min_{u \in BV(\Omega)_{[0,1]} s_1, s_2 \in L^1} \left\{ F_{CRS}(u, s_1, s_2) = \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - s_1(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} d\mathbf{x} \right. \\ \left. \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 - u(\mathbf{x})) \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - s_2(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} d\mathbf{x} \right\}, \quad (5.28)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que balanceia os termos da região e a regularização por variação total. Pelo funcional da Eq. (5.28), verifica-se que a função erro do modelo SRC é definida como:

$$r_i^{s_i}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y}. \quad (5.29)$$

Geralmente, utiliza-se uma função janela Gaussiana normalizada para representar  $\omega$ :

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.30)$$

onde o desvio-padrão  $\sigma$  é um parâmetro que fornece a noção de escala relacionada com as variações de intensidade que podem existir em cada região. Quando  $\sigma \rightarrow \infty$ , o problema de minimização da Eq. (5.28) funciona como o modelo CRC. O modelo CRS é local no sentido que a janela  $\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  considera as intensidades da imagem em pontos  $\mathbf{x}$  próximos a um ponto central  $\mathbf{y}$  com maior influência nos minimizadores  $s_1$  e  $s_2$  do funcional da Eq. (5.28), enquanto que os pontos  $\mathbf{x}$  mais distantes de  $\mathbf{y}$  pouco influenciam nos valores de  $s_1$  e  $s_2$ .

Os valores ótimos relativos das funções  $s_1$  e  $s_2$  que minimizam o funcional da Eq. (5.28) são calculados através das Equações Euler-Lagrange. Como  $s_1$  e  $s_2$  são funções que minimizam o funcional  $F_{CRS}$  e satisfazem para cada  $\mathbf{y} \in \Omega$  as Equações de Euler-Lagrange seguintes, tem-se que:

$$s_1(\mathbf{y})^* = \frac{\int_{\mathbf{x} \in \Omega} (I(\mathbf{x})u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{x}}{\int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{x}} \\ s_2(\mathbf{y})^* = \frac{\int_{\mathbf{x} \in \Omega} (I(\mathbf{x})(1 - u(\mathbf{x})))\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{x}}{\int_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 - u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{x}}. \quad (5.31)$$

Portanto, o par de funções  $(s_1^*, s_2^*)$  minimiza  $F_{SRC}(u, s_1, s_2)$  para todo  $\mathbf{y} \in \Omega$  quando  $u$  é mantido fixo. Segundo *Mory e Ardon* [Mory e Ardon, 2007],  $s_1$  e  $s_2$  podem ser reescritos como convoluções normalizadas, desde que  $\omega$  seja uma função positiva e que para um conjunto onde para todo  $\mathbf{x} \in M_0$  (respectivo  $M_1$ , para a outra região),  $u(\mathbf{x}) \neq 0$  ( $u(\mathbf{x}) \neq 1$ , em relação a  $M_1$ ):

$$s_1(\mathbf{y})^* = \frac{[\omega * (Iu)](\mathbf{y})}{[\omega * u](\mathbf{y})} \quad s_2(\mathbf{y})^* = \frac{[\omega * (I(1-u))](\mathbf{y})}{[\omega * (1-u)](\mathbf{y})}. \quad (5.32)$$

As convoluções normalizadas são responsáveis por gerar as variações de intensidade dentro de cada região, criando as aproximações suaves  $s_1$  e  $s_2$  em relação ao objeto e o fundo da imagem  $I$ , onde as funções de pertinência  $u$  e  $(1-u)$  são suas medidas de certeza, respectivamente.

Já a função de pertinência  $u$  é determinada resolvendo-se a equação da evolução descrita na Eq. (5.11). Alternativamente, pode-se utilizar o eficiente esquema de projeção *dual* de *Chambolle*, como apresentado na Seção 5.2 para uma minimização mais rápida e eficiente. Para isso, utiliza-se a seguinte função de competição  $r$  no funcional da Eq. (5.12) que aproxima o funcional  $F_{CRS}$ :

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= r_1^{s_1}(\mathbf{x}) - r_2^{s_2}(\mathbf{x}) \\ r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - s_1(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} - \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - s_2(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} \\ r(\mathbf{x}) &= \lambda[\omega * (s_1^2 - s_2^2)](\mathbf{x}) - 2I(\mathbf{x})[\omega * (s_1 - s_2)](\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

O algoritmo do modelo CRS proposto por *Mory* e *Ardon* tem seu funcional minimizado de acordo com os seguintes passos abaixo:

- i. Mantendo-se  $u$  fixo, calcula-se os valores de  $s_1$  e  $s_2$  de acordo com a Eq. (5.32);
- ii. Mantendo-se  $s_1$  e  $s_2$  fixos, atualiza-se a função  $u$  pelo esquema gradiente descendente da Eq. (5.11) ou considerando-se a aproximação Eq. (5.12) e utilizando-se o esquema de *Chambolle*, como descrito na Seção 5.2.

Neste modelo, foi utilizado o esquema de projeção *dual* de *Chambolle* para a minimização de  $u$ . O algoritmo *Competição entre Regiões Suaves* é descrito abaixo, onde o domínio  $\Omega$  é discretizado em  $M_1 \times M_2$  pontos, dispostos por  $\Omega_D = [1, M_1] \times [1, M_2]$ , onde cada elemento  $\mathbf{x} \in \Omega$  é representado pelo par ordenado  $\{(i, j) \in \Omega_D | 1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq M_2\}$ . A janela discreta  $\omega$  possui dimensões  $W_1 \times W_2$ , onde cada coeficiente  $\omega(w_1, w_2)$  é dado por  $\{(w_1, w_2) \in \Omega_D | 1 \leq w_1 \leq W_1, 1 \leq w_2 \leq W_2\}$ . O parâmetro  $T$  se refere ao número de iterações no tempo e  $\mathcal{N}$  é o número de iterações no algoritmo de ponto fixo de *Chambolle*.

### 5.5.1 Resultados Experimentais

Nos experimentos abaixo, procurou-se avaliar o método CRS por meio de imagens ruidosas e que contenham lentes variações de intensidade em seu interior. São mostrados três experimentos, onde em cada um é descrito o processo de segmentação e as funções suaves  $s_1$  e  $s_2$  calculadas. Os parâmetros  $\tau$ ,  $\theta$  e  $\mathcal{N}$ , do algoritmo de projeção *dual* de *Chambolle* foram mantidos fixos para todos os testes ( $\tau = 0, 1$ ,  $\theta = 0, 15$  e  $\mathcal{N} = 10$ ) e o parâmetro  $\lambda$  foi ajustado manualmente para

---

### Algoritmo 3 : CRS

---

1: Inicialize aleatoriamente a função de pertinência  $u_{i,j}^0$ ;

2: Faça  $v_{i,j}^0 \Leftarrow u_{i,j}^0$ ;

3: **PARA**  $t \Leftarrow 0, 1, 2, \dots T$  **FAÇA**

4: Atualize as funções  $s_1$  e  $s_2$  de acordo com:

$$(s_1)_{i,j}^t \Leftarrow \frac{\sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{t_1, t_2} (u_{i-w_1, j-w_2}^t I_{i-w_1, j-w_2})}{\sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} u_{i-w_1, j-w_2}^t}$$

$$(s_2)_{i,j}^t \Leftarrow \frac{\sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} [(1 - u_{i-w_1, j-w_2}^t) I_{i-w_1, j-w_2}]}{\sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} (1 - u_{i-w_1, j-w_2}^t)}$$

5: Calcule para cada ponto  $(i, j)$  do domínio a função competição entre regiões:

$$G_{i,j} \Leftarrow \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} ([(s_1)_{i,j}^t]^2 - [(s_2)_{i,j}^t]^2);$$

$$H_{i,j} \Leftarrow \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} ((s_1)_{i,j}^t - (s_2)_{i,j}^t);$$

$$r_{i,j}^t \Leftarrow \lambda [G_{i,j} - 2I_{i,j} H_{i,j}];$$

6: Inicialize  $\mathbf{p}_{i,j}^0 = (p_{i,j}^{1,0}, p_{i,j}^{2,0}) \Leftarrow 0$ ;

7: **PARA**  $n \Leftarrow 0, 1, 2, \dots N$  **FAÇA**

$$p_{i,j}^{1,n+1} \Leftarrow \frac{p_{i,j}^{1,n} + \tau \nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

$$p_{i,j}^{2,n+1} \Leftarrow \frac{p_{i,j}^{2,n} + \tau \nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

8: **FIM PARA**

9:  $v_{i,j}^{t+1} \Leftarrow \max(\min(u_{i,j}^t - \theta r_{i,j}^t, 1), 0)$ ;

10:  $u_{i,j}^{t+1} \Leftarrow v_{i,j}^{t+1} - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}$ ;

11: **FIM PARA**

---

cada imagem.

Neste primeiro experimento, será tratado um caso de uma imagem natural com variações suaves de intensidade, caracterizadas pela influencia de iluminação e a textura no fundo. O objetivo deste teste é identificar os cavalos como sendo uma região e o pasto como a outra região. A Figura 5.17(a) mostra a imagem original. A Figura 5.17(b) ilustra a imagem que representa a função aproximada em partes suaves da imagem original  $s = us_1 + (1 - u)s_2$ . As Figuras 5.17(c) e 5.17(d) ilustram respectivamente as componentes suaves  $s_1$  e  $s_2$ . As Figuras 5.17(e) até 5.17(h) ilustram um caso de segmentação, onde a Figura 5.17(h) é a função de pertinência em estado inicial, as Figuras 5.17(f) e 5.17(g) representam duas funções de pertinência em estado intermediário e a Figura 5.17(h) se refere a função de pertinência  $u$  após 1000 iterações no tempo. Neste experimento, utilizou-se uma janela de desvio-padrão 0, 1 e o  $\lambda = 0,0025$ .

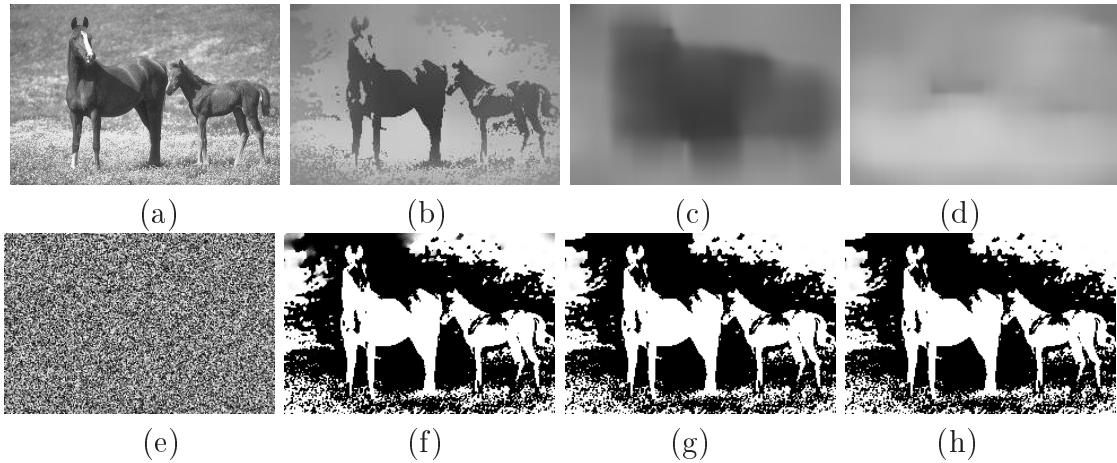


Figura 5.17: Teste no modelo CRS: (a) Imagem original; (b) Função  $s$ ; (c) Função  $s_1$ ; (d) Função  $s_2$ ; (e) Função  $u$  no instante inicial de tempo; (f-g) Função  $u$  em estados intermediários de tempo; (h) Função  $u$  em estado final após 1000 iterações.

No experimento da Figura 5.18, será tratado um caso de uma imagem médica, onde o cérebro apresenta suaves variações de intensidade nos seus tecidos. Nesta imagem, deseja-se identificar o tecido com intensidade mais clara na imagem tomográfica do cérebro. A Figura 5.18(a) mostra a imagem original. A Figura 5.18(b) ilustra a imagem que representa a função aproximada em partes suaves da imagem original  $us_1 + (1 - u)s_2$ . As Figuras 5.18(c) e 5.18(d) mostram respectivamente as componentes suaves  $s_1$  e  $s_2$ . A sequênciça que compreende as Figuras 5.18(e) até 5.18(h) ilustram um teste, onde a Figura 5.18(e) é a função de pertinência em estado inicial, as Figuras 5.18(f) e 5.18(g) representam duas funções de pertinência em estado intermediário e a Figura 5.18(h) se refere a função de pertinência  $u$  final. O desvio-padrão  $\sigma$  foi ajustado em 0,05 e  $\lambda = 0,0005$ .

No experimento da Figura 5.19, objetiva-se segmentar o carro de corrida em uma pista que possui influencia de iluminação, caracterizando-se uma suave variação na intensidade. Observa-se que existem pequenas variações de intensidade no asfalto e na carenagem do veículo.

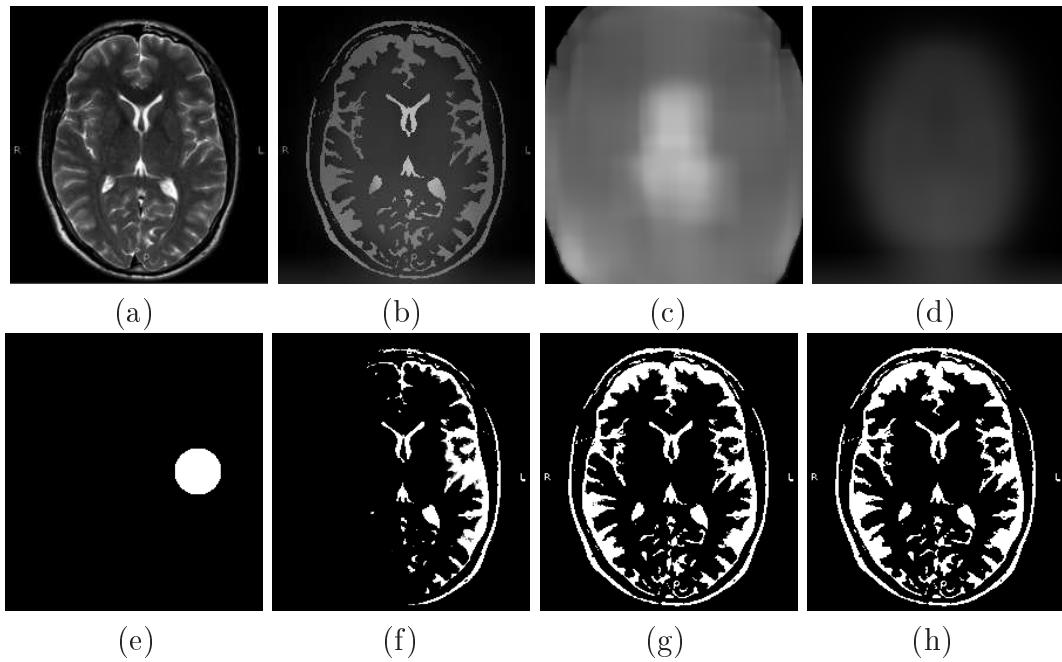


Figura 5.18: Imagem médica executada no modelo CRS: (a) Imagem original; (b) Função  $s$ ; (c) Função suave  $s_1$ ; (d) Função suave  $s_2$ ; (e) Função  $u$  no instante inicial de tempo; (f-g) Função  $u$  em passos de tempo intermediários; (h) Função de pertinência  $u$  após 400 iterações.

A Figura 5.19(a) mostra a imagem original. A Figura 5.19(b) ilustra a imagem que representa a função aproximada em partes suaves da imagem original  $us_1 + (1 - u)s_2$ . As Figuras 5.19(c) e 5.19(d) ilustram respectivamente as componentes suaves  $s_1$  e  $s_2$ . As Figuras 5.19(e) até 5.19(h) ilustram um caso de segmentação, onde a Figura 5.19(e) é a função de pertinência em estado inicial, as Figuras 5.19(f) e 5.19(g) representam duas funções de pertinência em estado intermediário e a Figura 5.19(h) se refere a função de pertinência  $u$  final. O desvio-padrão  $\sigma$  utilizado foi 0,06 enquanto que  $\lambda = 0,001$ .

Na próxima seção, será descrito um modelo que descreve as regiões da imagem utilizando-se de funções de densidade de probabilidade (fdp's) não-paramétricas, onde são relatadas as vantagens em se utilizar esta abordagem comparada ao uso de uma fdp paramétrica.

## 5.6 Modelo Baseado em Funções de Densidade de Probabilidade Não-Paramétricas

Alguns modelos de segmentação baseados em região e baseados em contorno utilizam análise estatística para descrever as características de intensidade, cor ou textura das regiões da imagem. Nas Seções anteriores, foram analisados métodos variacionais que utilizam princípios *Bayesianos* em suas formulações. Tais métodos assumem hipóteses sobre as funções de densidade de probabilidade (fdp's) paramétricas para que apenas um conjunto de parâmetros seja otimizado e derivam um critério estatístico da maximização da probabilidade *a posteriori* na segmentação.

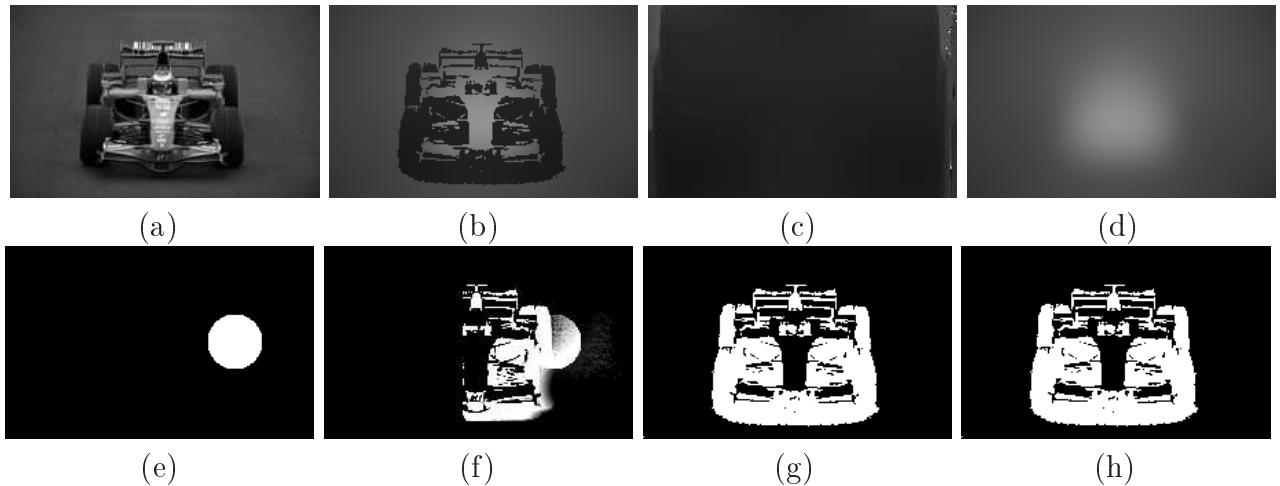


Figura 5.19: Imagem natural executada no modelo CRS: (a) Imagem original; (b) Função  $s$ ; (c) Função  $s_1$ ; (d) Função  $s_2$ ; (e) Função  $u$  no instante inicial de tempo; (f-g) Função de pertinência  $u$  em estados de tempo intermediários; (h) Função  $u$  após 100 iterações.

A performance de técnicas paramétricas pode não ser satisfatória quando o modelo estatístico utilizado para descrever as regiões da imagem não é adequado para um conjunto de imagens que se quer segmentar [Kim et al., 2005]. Especificamente, resultados ruins são obtidos quando a imagem é extremamente ruidosa e/ou quando as regiões da imagem são preferencialmente descritas por distribuições de intensidade multi-modais, onde apenas o uso de uma única distribuição de probabilidade global não é suficiente o bastante na identificação de certas estruturas e objetos na imagem [Guo e Chen, 2006]. Além disso, todos os modelos estatísticos baseados em fdp's paramétricos são unimodais [Duda et al., 2001]. Desta maneira, uma técnica paramétrica é capaz de segmentar satisfatoriamente apenas uma restrita classe de imagens.

Estes contratemplos podem ser superados pela utilização de técnicas não-paramétricas que estimam as distribuições de probabilidade desconhecidas, *a priori*, de um certo conjunto de dados sem fazer hipóteses concretas sobre suas estruturas. Assim, espera-se que a utilização de técnicas não-paramétricas forneça uma descrição mais abrangente das distribuições das regiões e que aumente a aplicabilidade de técnicas estatísticas para uma maior classes de imagens.

Os primeiros modelos paramétricos para segmentação de imagens que foram desenvolvidos utilizam abordagens variacionais baseadas em contorno [Kim et al., 2005] [Rousson et al., 2005]. Tais métodos utilizam uma metodologia comum no processo de estimativa da função de densidade. Primeiro, derivam um critério estatístico de algumas medidas da teoria da informação nas funções de densidade. Por último, utilizam a técnica *janelas de Parzen* (ou estimador de densidade por Janela) [Parzen, 1979] para estimar as fdp's desconhecidas antes do processo de segmentação. No entanto, a minimização destas técnicas é feita por intermédio de esquemas de evolução de bordas, onde a convergência é lenta e dependente das condições iniciais, e o critério de minimização assume que cada região pode ser estatisticamente representada por uma distribuição global única.

*Mory e Ardon* [Mory et al., 2007] desenvolveram um modelo variacional para segmentação de imagens baseado no método *Competição entre Regiões Fuzzy* que utiliza fdp's não-paramétricas. Assim, a utilização desta técnica estatística incorporada ao funcional de energia convexo do método *Competição entre Regiões Fuzzy*, resolvem todos os problemas acima verificados nas metodologias baseadas em curvas dinâmicas.

Partindo-se do funcional de energia mostrado na Eq. (5.3), *Mory e Ardon* formularam uma função erro, onde as funções de densidade de probabilidade a serem estimadas são os parâmetros das regiões desconhecidos. Dado que  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$  é o domínio de valores da imagem, define-se a seguinte função erro:

$$r_i^{p_i}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\mathcal{A}} (p_i(a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 da \quad (5.34)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que balanceia a competição e a suavização,  $p_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função e  $K$  é um núcleo, tal que  $\int_{\mathcal{A}} K(a)da = 1$  e  $K(a) > 0 \forall a \in \mathcal{A}$ , geralmente escolhida pela sua simplicidade e eficiência, como uma Gaussiana  $m$ -dimensional:

$$K(a) = \frac{1}{(2\pi)^{(m/2)} |M|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} a^T M^{-1} a\right) \quad (5.35)$$

sendo que  $M$  é a matriz de Covariância, que neste caso, tem como função informar a dependência entre as  $m$  dimensões do domínio da imagem. Outros tipos de janelas que podem ser utilizadas são descritas em [Parzen, 1979]. Substituindo-se a função erro da Eq. (5.34) e mantendo-se  $g = 1$  no funcional presente da Eq. (5.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} F_{NPRC}(u, p_1, p_2) &= \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \int_{a \in \mathcal{A}} (p_1(a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 d\mathbf{x} \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 - u(\mathbf{x})) \int_{a \in \mathcal{A}} (p_2(a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.36)$$

que é denominado *Competição entre Regiões Fuzzy por funções de densidade de probabilidade não-paramétricas* (CRFNP). Os valores ótimos de  $p_1$  e  $p_2$  são obtidos através das Equações de Euler-Lagrange do funcional da Eq. (5.36) em relação a estas funções:

$$\begin{aligned} p_1^*(a) &= \frac{\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) K(I(\mathbf{x}) - a) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \\ p_2^*(a) &= \frac{\int_{\Omega} (1 - u(\mathbf{x})) K(I(\mathbf{x}) - a) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} (1 - u(\mathbf{x})) d\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Estas funções ótimas correspondem a versões contínuas das estimativas de densidade de *Parzen*. A função de pertinência  $u$  é determinada resolvendo-se a equação da evolução descrita na Eq.

(5.11). Alternativamente, pode-se utilizar o eficiente esquema de projeção *dual* de *Chambolle*, como apresentado na Seção 5.2 para uma minimização rápida e eficiente.

O algoritmo do modelo CRFNP tem seu funcional minimizado de acordo com os seguintes passos:

- i. Mantendo-se  $u$  fixo, calcula-se os valores de  $p_1^*$  e  $p_2^*$  de acordo com as Eqs. (5.37);
- ii. Mantendo-se  $p_1$  e  $p_2$  fixos, minimiza-se a aproximação da Eq. (5.12) em relação a função de pertinência  $u$  pelo esquema gradiente descendente da Eq. (5.11) ou considerando-se a aproximação Eq. (5.12) e utilizando-se o esquema de *Chambolle*, como descrito na Seção 5.2. Neste último caso, a função de competição  $r$  é definida como:

$$\begin{aligned}
 r(\mathbf{x}) &= r_1^{p_1}(\mathbf{x}) - r_2^{p_2}(\mathbf{x}) \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathcal{A}} (p_1(a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 da - \lambda \int_{\mathcal{A}} (p_2(a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 da \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathcal{A}} (p_1(a)^2 - 2K(I(\mathbf{x}) - a)p_1(a) + K(I(\mathbf{x}) - a)^2 da \\
 &\quad - \lambda \int_{\mathcal{A}} (p_2(a)^2 - 2K(I(\mathbf{x}) - a)p_2(a) + K(I(\mathbf{x}) - a)^2 da) \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathcal{A}} p_1(a)^2 - p_2(a)^2 - 2K(I(\mathbf{x}) - a)p_1(a) + 2K(I(\mathbf{x}) - a)p_2(a) da \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathcal{A}} p_1(a)^2 - p_2(a)^2 + 2K(I(\mathbf{x}) - a)(p_2(a) - p_1(a)) da \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathcal{A}} p_1(a)^2 - p_2(a)^2 da + 2\lambda \int_{\mathcal{A}} K(I(\mathbf{x}) - a)(p_2(a) - p_1(a)) da \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

O algoritmo do modelo CRFNP é descrito abaixo, onde o domínio  $\Omega$  é discretizado em  $M_1 \times M_2$  pontos, dispostos por  $\Omega_D = [1, M_1] \times [1, M_2]$ , onde cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  é representado pelo par ordenado  $\{(i, j) \in \Omega_D | 1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq M_2\}$ . O espaço  $\mathcal{A}$  é discretizado em  $L$  pontos como  $A = [1, L]$ , onde  $\{l \in A | 1 \leq l \leq L\}$ . O parâmetro  $T$  se refere ao número de iterações no tempo e  $\mathcal{N}$  é o número de iterações no algoritmo de ponto fixo de *Chambolle*.

### 5.6.1 Resultados Experimentais

Nesta seção, são mostrados alguns experimentos realizados no modelo CRFNP utilizando-se três imagens da base de dados *Berkeley Segmentation Dataset* [Martin et al., 2001]. Os parâmetros  $\tau = 0, 1$ ,  $\theta = 0, 15$  e o número de iterações no algoritmo de *Chambolle*  $\mathcal{N} = 15$  foram mantidos fixos e iguais para todos os experimentos, enquanto que o parâmetro  $\lambda$  foi ajustado para cada imagem. Para o conjunto  $\mathcal{A}$ , foram escolhidos apenas dois níveis de cinza com o objetivo de não tornar o custo computacional muito alto.

Na Figura 5.20, é ilustrada uma imagem onde deseja-se segmentar o avião do restante da

---

**Algoritmo 4 : CRFNP**

---

- 1: Inicialize aleatoriamente a função de pertinência  $u_{i,j}^0$ ;
- 2: Faça  $v_{i,j}^0 \Leftarrow u_{i,j}^0$ ;
- 3: **PARA**  $t \Leftarrow 0, 1, 2, \dots T$  **FAÇA**
- 4:     Para cada ponto  $l$  do espaço  $A$ , atualize as funções  $pr_1$  e  $pr_2$  de acordo com:

$$(P_1)_l^t \Leftarrow \frac{\sum_i \sum_j u_{i,j}^t K(I_{i,j} - A_l)}{\sum_i \sum_j u_{i,j}^t} \quad (P_2)_l^t \Leftarrow \frac{\sum_i \sum_j (1 - u_{i,j}^t) K(I_{i,j} - A_l)}{\sum_i \sum_j (1 - u_{i,j}^t)}$$

- 5:     Calcule para cada ponto  $(i, j)$  de  $\Omega_D$  a função competição entre regiões:

$$r_{i,j}^t \Leftarrow \lambda \left[ \sum_{l \in A} ([(P_1)_l^t]^2 - [(P_2)_l^t]^2) + 2 \sum_{l \in A} K(I_{i,j} - A_l)((P_1)_l^t - (P_2)_l^t) \right]$$

- 6:     Inicialize  $\mathbf{p}_{i,j}^0 = (p_{i,j}^{1,0}, p_{i,j}^{2,0}) \Leftarrow 0$ ;
- 7:     **PARA**  $n \Leftarrow 0, 1, 2, \dots N$  **FAÇA**

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{1,n+1} &\Leftarrow \frac{p_{i,j}^{1,n} + \tau \nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|} \\ p_{i,j}^{2,n+1} &\Leftarrow \frac{p_{i,j}^{2,n} + \tau \nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|} \end{aligned}$$

- 8:     **FIM PARA**
  - 9:      $v_{i,j}^{t+1} \Leftarrow \max(\min(u_{i,j}^t - \theta r_{i,j}^t, 1), 0)$ ;
  - 10:     $u_{i,j}^{t+1} \Leftarrow v_{i,j}^{t+1} - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}$ ;
  - 11:    **FIM PARA**
-

imagem representada pela Figura 5.20(a). A Figura 5.20(b) mostra a função de pertinência  $u$  em estado inicial de tempo e as Figuras 5.20(c-d) apresentam a função de pertinência nas iterações 30 e 80. A Figura 5.20(e) mostra a função  $u$  final após 800 iterações no tempo. Utilizando-se a função  $u$ , a Figura 5.20(f) apresentam uma imagem reconstruída contendo o avião. Para redução do custo computacional do modelo, foram selecionadas as intensidades 40 e 100 para comporem o conjunto  $\mathcal{A}$ . O parâmetro  $\lambda$  foi ajustado em 0,25.

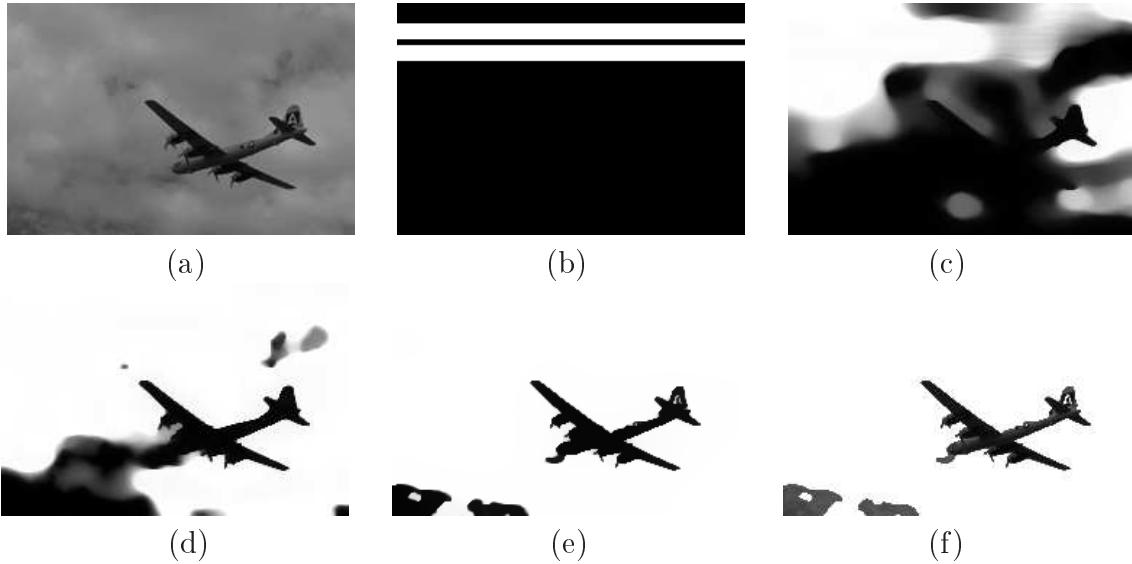


Figura 5.20: Teste realizado em uma imagem de avião: (a) Imagem original (b) Função de pertinência  $u$  no instante inicial (c-d) Função de pertinência  $u$  em passos intermediários de tempo (30 e 80); (e) Função de pertinência  $u$  final após 800 iterações; (f) Imagem reconstruída a partir da pertinência  $(1 - u)$ .

A Figura 5.21(a) apresenta uma imagem onde o objetivo é segmentar apenas o pássaro. A Figura 5.21(b) mostra a função de pertinência  $u$  inicial. As Figuras 5.21(c-d) ilustram a função de pertinência  $u$  em estados intermediários (iterações 180 e 190). A Figura 5.21(e) mostra a função de pertinência  $u$  em estado final após 300 iterações. A Figura 5.21(f) apresenta uma imagem reconstruída utilizando a função  $u$  que contém apenas o pássaro. Neste experimento, utilizou-se as intensidades 10 e 70 para a representação do conjunto  $\mathcal{A}$ . Neste experimento,  $\lambda = 0,5$ .

Neste experimento representado pela Figura 5.22, tem-se a segmentação da imagem de uma escultura e um jardim, dadas na Figura 5.22(a). A Figura 5.22(b) ilustra a função de pertinência  $u$  inicial, enquanto que as Figuras 5.22(c) e 5.22(d) mostram a função  $u$  nas iterações 20 e 40. Na Figura 5.22(e), é ilustrada a função  $u$  final após 500 iterações. A Figura 5.22(f) apresenta uma imagem reconstruída contendo apenas as esculturas. Foram selecionadas as intensidades 30 e 130 para comporem o conjunto  $\mathcal{A}$ . O parâmetro  $\lambda$  foi fixado em 0,3.

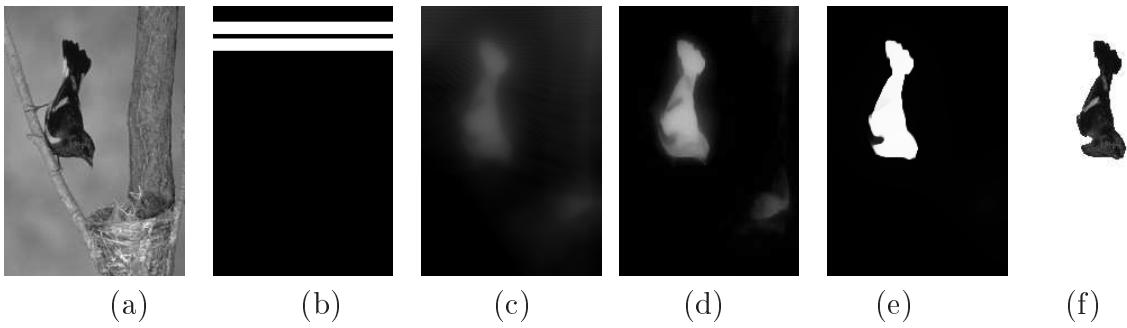


Figura 5.21: Teste realizado na imagem de um pássaro: (a) Imagem original (b) Função de pertinência  $u$  no instante inicial (c-d) Função de pertinência  $u$  em passos intermediários de tempo (180 e 190); (e) Função de pertinência  $u$  final após 300 iterações; (f) Imagem reconstruída a partir da pertinência  $u$ .

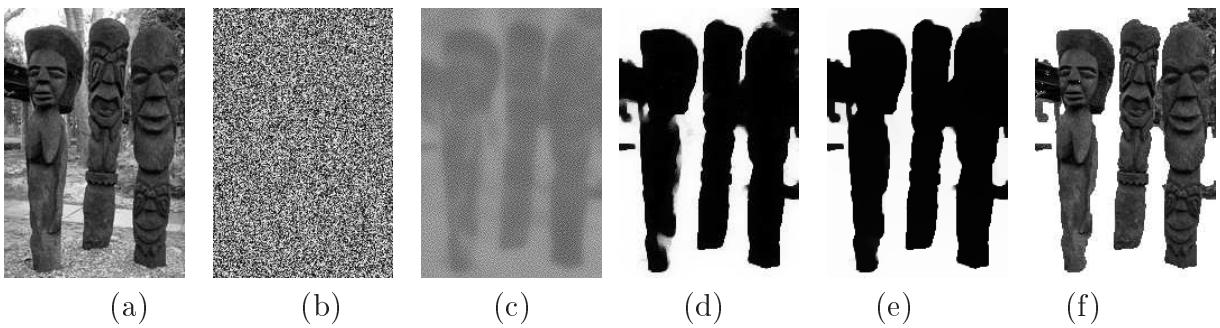


Figura 5.22: Teste em imagens de uma escultura: (a) Imagem original (b) Função de pertinência  $u$  inicial (c-d) Função de pertinência  $u$  em estados intermediários (20 e 40); (e) Função de pertinência  $u$  final após 500 iterações; (f) Imagem reconstruída a partir da pertinência  $(1 - u)$ .

## 5.6.2 Extensão para Densidades Locais

*Mory e Ardon* [Mory et al., 2007] propuseram formular uma generalização do modelo não-paramétrico global que considera o uso de informações locais para estimar as funções de densidade de probabilidade, denominado *Competição entre Regiões Fuzzy* baseado em funções de densidade de probabilidade Não-Paramétricas Locais (CRFNPL). Com o emprego de análise local, é possível detectar com maior precisão as bordas dos objetos da imagem, já que abordagens globais possuem formulações mais simples, não sendo adequadas para tal finalidade.

Para isso, considere a contribuição do objeto para o erro global no modelo CRFNP dada por:

$$E = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \int_{a \in \mathcal{A}} (p_1(a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2. \quad (5.39)$$

Para considerar o erro em uma determinada localidade em relação a um ponto  $\mathbf{y} \in \Omega$ , incorpora-se uma função janela simétrica  $\omega$ , como definida na Eq. (5.30), obtendo-se uma contribuição local do objeto para o erro:

$$e(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) \int_{a \in \mathcal{A}} (p_1(\mathbf{y}, a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 \quad (5.40)$$

onde a função  $p_1(\mathbf{y}, a)$  pode variar no espaço, já que depende da posição  $\mathbf{y}$ . Assim, a contribuição total da região do objeto da imagem para o erro global é calculada como  $\int_{\mathbf{y} \in \Omega} e(\mathbf{y})$ . Adicionando-se a contribuição da região do fundo da imagem e invertendo-se a ordem de integração, pode-se formular o seguinte funcional de energia:

$$\begin{aligned} F_{CRFNPL}(u, p_1, p_2) &= \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{a \in \mathcal{A}} (p_1(\mathbf{y}, a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 \\ &\quad + \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 - u(\mathbf{x})) \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{a \in \mathcal{A}} (p_2(\mathbf{y}, a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

o que corresponde ao uso da seguinte função erro:

$$r_i^{p_i}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{a \in \mathcal{A}} (p_i(\mathbf{y}, a) - K(I(\mathbf{x}) - a))^2 \quad , \quad (5.42)$$

e a função competição entre regiões  $r(\mathbf{x}) = r_1^{p_1}(\mathbf{x}) - r_2^{p_2}(\mathbf{x})$  é calculada como:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{\mathcal{A}} p_1(\mathbf{y}, a)^2 - p_2(\mathbf{y}, a)^2 da + \\ &\quad + 2\lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{\mathcal{A}} K(I(\mathbf{x}) - a)(p_2(\mathbf{y}, a) - p_1(\mathbf{y}, a)) da \quad . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Utilizando convoluções normalizadas, a Eq. (5.43) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= \omega * \left[ \int_{\mathcal{A}} p_1(\mathbf{y}, a)^2 - p_2(\mathbf{y}, a)^2 da \right](\mathbf{x}) \\ &\quad + 2\lambda \omega * \left[ \int_{\mathcal{A}} K(I(\mathbf{x}) - a)(p_2(\mathbf{y}, a) - p_1(\mathbf{y}, a)) da \right](\mathbf{x}) \quad . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Neste modelo, as diferenças entre estas probabilidades locais são medidas por meio de uma vizinhança na intensidade e no espaço, dadas pela janela de Estimação de Densidade  $K$  em  $I(\mathbf{x})$  e a janela  $\omega$  centralizada em  $\mathbf{x}$ , respectivamente.

A minimização do funcional da Eq. (5.41) é feita considerando-se a otimização de  $u$  e do par  $(p_1^*, p_2^*)$  sucessivamente. Mantendo-se  $(p_1^*, p_2^*)$  fixos, a  $u$  é minimizado utilizando o esquema de projeção dual de Chambolle, como estudado na Seção 5.2. Por sua vez, os valores ótimos das funções locais  $p_1^*$  e  $p_2^*$  são obtidos através das Equações de Euler-Lagrange e são dadas por:

$$\begin{aligned} p_1^*(\mathbf{y}, a) &= \frac{\int \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})[u(\mathbf{x})K(I(\mathbf{x}) - a)]d\mathbf{x}}{\int \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{x})d\mathbf{x}} \\ p_2^*(\mathbf{y}, a) &= \frac{\int \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})[(1 - u(\mathbf{x}))K(I(\mathbf{x}) - a)]d\mathbf{x}}{\int \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(1 - u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde  $u$  é mantido fixo. Considerando-se que  $f_a(\mathbf{x}) = K(I(\mathbf{x}) - a)$ , as Eqs. (5.45) podem ser reescritas utilizando-se convoluções:

$$\begin{aligned} p_1^*(\mathbf{y}, a) &= \frac{[\omega * (uf_a)](\mathbf{y})}{[\omega * u](\mathbf{y})} \\ p_2^*(\mathbf{y}, a) &= \frac{[\omega * ((1 - u)f_a)](\mathbf{y})}{[\omega * (1 - u)](\mathbf{y})} , \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde para cada valor de  $a \in \mathcal{A}$ , as funções de densidade de probabilidade locais são obtidas por uma suavização espacial da função  $f_a$ . Esta suavização é seletiva: os valores de  $p_1$  são ponderados pela função  $u$ , enquanto que os valores de  $p_2$  são ponderados pela função  $(1 - u)$ . Embora o resultado final deste modelo de segmentação seja uma solução binária, com baixa suavização nas bordas, o conjunto solução  $(u^*, p_1^*, p_2^*)$  pode ser considerado como uma aproximação suave por partes da função de densidade de probabilidade local da imagem.

Na Figura 5.23 é apresentado um exemplo retirado de [Mory et al., 2007] que mostra a vantagem em se utilizar uma abordagem local ao invés de uma abordagem global. A Figura 5.23(a) apresenta a imagem original. A Figura 5.23(b) mostra a função de pertinência obtida pela abordagem global, onde percebe-se que o modelo falha na detecção correta das bordas, como no tripé e no contorno da câmera do fotógrafo, e outras detalhes da imagem como a parte interna da câmera do fotógrafo. Por sua vez, a abordagem local conseguiu superar estas falhas, pois este método considera no processo de competição a influência da vizinhança, como mostra a função de pertinência  $u$  final na Figura 5.23(c).

Este modelo local é fracamente sensível em relação às condições iniciais, no entanto soluções estáveis podem ser obtidas ao se utilizar o algoritmo de projeção *dual* de *Chambolle*. Na prática, este modelo tem aplicabilidade limitada, visto que apresenta um custo computacional muito elevado. Tal afirmação se sustenta no fato de que seu funcional de energia envolve uma integração no espaço  $\mathcal{A}$ , juntamente com operações de convoluções sobre todo o domínio da imagem.

## 5.7 Considerações Finais

Neste Capítulo, foram apresentados cinco modelos de segmentação baseados no método *Competição entre Regiões Fuzzy* propostos por *Mory* e *Ardon*. Tal método utiliza um funcional

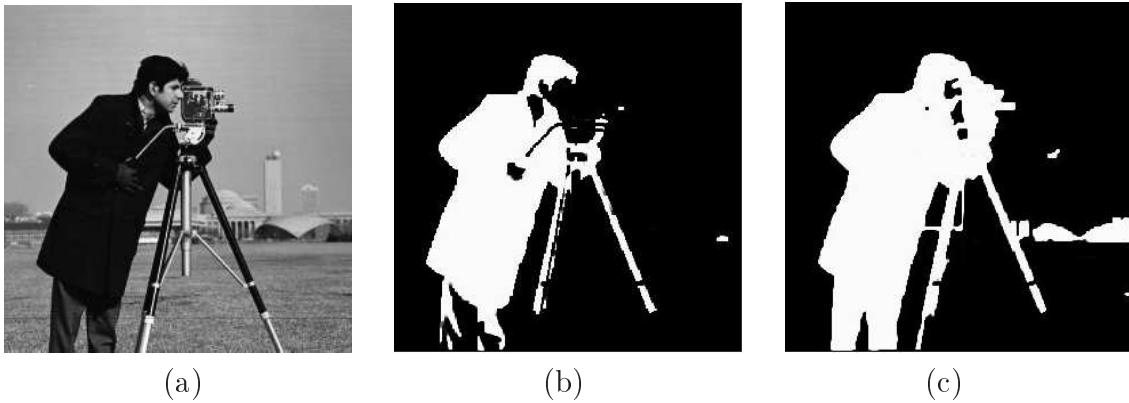


Figura 5.23: Teste realizado no modelo local: (a) Imagem original de um fotógrafo (b) Função de pertinência  $u$  obtida pelo modelo *Competição entre Regiões Fuzzy* baseado em funções de densidade de probabilidade global (c) Função de pertinência  $u$  obtida pelo modelo *Competição entre Regiões Fuzzy* baseado em funções de densidade de probabilidade local. Experimento retirado de [Mory et al., 2007].

de energia convexo em relação a função de pertinência  $u$ , possibilitando a obtenção de soluções globais ótimas podem ser obtidas independentemente da inicialização no modelo CRFS e com baixa sensibilidade nos demais. Cada modelo foi obtido alterando-se a maneira pela qual as regiões da imagem são estatisticamente representadas.

Primeiramente, foi estudado um modelo de segmentação supervisionado que descreve as regiões da imagem por uma fdp. Posteriormente, a representação das regiões da imagem por funções constantes e suaves por partes, provenientes do funcional *Mumford-Shah*, também foram incorporadas ao funcional do método *Competição entre Regiões Fuzzy*. Finalmente, o uso de fdp's não-paramétricas foi abordado, juntamente com uma extensão local para esta representação.

Para todos os modelos propostos por *Mory e Ardon*, resultados experimentais foram apresentados com o objetivo de se mostrar a eficiência dos referidos modelos e as situações aos quais podem ser úteis. Com isso, verificou-se que todos os modelos apresentaram um rápido e estável processo de convergência, graças ao uso do esquema de projeção *dual de Chambolle*.

Nos próximos três capítulos, são apresentadas três modificações em relação à alguns dos modelos vistos para segmentação de imagens de *Mory e Ardon*. Primeiramente, será estudado uma modificação que introduz um processo de análise local no modelo CRC de *Mory e Ardon*. A segunda modificação é uma versão não-supervisionada do modelo CRFS que estima as distribuições de probabilidade e optimiza os parâmetros das regiões da imagem durante o processo de segmentação. Por último, é descrita uma extensão do método *Competição entre Regiões Fuzzy* para segmentar uma imagem em várias regiões, aplicada sob o modelo CRFS.

## Parte III

# Propostas para Segmentação de Imagens

## *Competição entre Regiões Constantes Ponderada Localmente*

---

Em uma das Seções do Capítulo anterior, foi apresentado o modelo *Competição entre Regiões Constantes* (CRC), que aproxima uma imagem de referência por uma função constante por partes. Este modelo assume que as regiões da imagem são homogêneas, podendo ser aproximadas por um único valor constante. Por isso, é um modelo útil para segmentar imagens que possuem regiões com intensidades homogêneas, ou até quando estão corrompidas por ruído gaussiano.

Embora o modelo CRC apresente bons resultados nas imagens com intensidades homogêneas, além de ser robusto a ruído, resultados insatisfatórios podem ser obtidos quando as regiões da imagem possuem textura ou variações bruscas na intensidade. Tal fato se deve ao uso de informações globais para determinar as constantes que aproximam as regiões da imagem. Estas limitações motivaram o desenvolvimento de um modelo que consiste em determinar uma função constante por partes utilizando-se de um processo de análise local na imagem a ser segmentada.

O modelo proposto é detalhado neste Capítulo, que está organizado da seguinte maneira: A Seção 6.1 apresenta as motivações que levaram ao desenvolvimento deste modelo. A Seção 6.2 detalha o modelo proposto e apresenta a estratégia adotada para considerar informações locais no processo de análise da imagem na segmentação. A Seção 6.3 apresenta alguns experimentos realizados para validar o modelo proposto. A Seção 6.4 descreve as considerações finais e conclusões relativas ao modelo proposto.

## 6.1 Motivação

Como descrito nas Seções anteriores, modelos baseados em funções constantes por partes, como o *Competição entre Regiões Constantes* (CRC) [Mory e Ardon, 2007] e *Chan-Vese* [Chan e Vese, 2001b], mostraram ser bastante úteis na segmentação de imagens compostas por regiões com intensidades homogêneas. No entanto, como nem todas as imagens são constituídas por estes tipos de regiões, a aplicabilidade destes modelos em imagens do mundo real é restrita, visto que, na prática, pode-se encontrar facilmente imagens texturizadas ou que possuem regiões com intensidades heterogêneas. Tais características são bastante comuns em imagens naturais, como mostra a Figura 6.1, onde são ilustradas imagens constituídas por objeto e fundo que possuem texturas distintas.



Figura 6.1: Imagens naturais com presença de textura

A utilização de métodos baseados em funções constantes por partes na segmentação de imagens texturizadas pode apresentar resultados insatisfatórios. Tais métodos determinam médias que aproximam as regiões da imagem utilizando-se de informações provenientes de uma análise global, o que é insuficiente para que uma textura seja representada apropriadamente. Uma textura é normalmente caracterizada por pequenas ou grandes diferenças de intensidade em uma determinada localidade e o uso de um método com abordagem global pode separar estas intensidades como regiões distintas.

Embora diversos métodos baseados em estatística Bayesiana [Paragios e Deriche, 2002] [Zhu e Yuille, 1996] [Mory et al., 2007] e em funções suaves por partes [Tsai et al., 2001] [Chan e Vese, 2001b] foram propostos especificamente para segmentar imagens texturizadas, uma formulação baseada na determinação de funções constantes por partes pode ser vantajosa no que se refere ao baixo custo computacional de se armazenar uma constante e pela simplicidade em se representar estatisticamente uma região. Por isso, mantendo-se esta representação, a maneira pela qual a imagem é analisada pode ser alterada para uma análise local a fim de que textura e mudanças abruptas de níveis de cinza possam ser devidamente segmentadas.

Alguns trabalhos que se baseiam no modelo *Chan-Vese* e que utilizam informações locais foram propostos com o objetivo de melhorar a segmentação em imagens com heterogeneidade nas intensidades. *Lankton e Tannenbaum* [Lankton e Tannenbaum, 2008] propuseram um tipo de contorno ativo baseado em região que utiliza informações locais da imagem para movimentar uma curva dinâmica a partir de uma posição inicial em direção às bordas do objeto de interesse

da imagem. A formulação local deste modelo consiste em definir uma área circular em relação a cada ponto da curva, onde apenas pontos internos à esta área contribuem para sua evolução. *Wang et al.* [Wang et al., 2010] desenvolveram um modelo que combina informações globais e locais para movimentar uma curva dinâmica a partir de uma posição inicial para as bordas do objeto de interesse da imagem. *Li et al.* [Li et al., 2007] propuseram o método *Local Binary Fitting*, que utiliza informações locais para segmentar imagens que apresentam intensidades com variações suaves. A idéia básica é incorporar uma função janela Gaussiana ao funcional do *Modelo Chan-Vese* (dado na Eq. (3.10)), tornando possível uma eficiente análise de informações locais.

No entanto, verifica-se que todos os trabalhos acima citados possuem funcionais de energia não-convexos e que foram formulados por uma abordagem *hard* baseada no *Método Level Set*. Como resultado, tais métodos possuem uma convergência lenta e são computacionalmente caros, além de apresentarem maior sensibilidade à presença de ruídos.

Utilizando-se dos argumentos mencionados acima, é apresentado neste capítulo um modelo de segmentação baseado no método CRC que realiza a competição entre as regiões pelos pontos do domínio considerando uma influência ponderada de seus vizinhos. Assim, com o emprego de análise local, espera-se que informações como textura e heterogeneidade na intensidade sejam adequadamente tratadas. Além disso, como se trata de um modelo derivado do funcional *Competição entre Regiões Fuzzy*, seu resultado final deve ser fracamente dependente da inicialização da função de pertinência e robusto na presença de ruídos, o que são vantagens do modelo proposto em relação aos métodos locais.

## 6.2 Modificação Proposta

No modelo *Competição entre Regiões Suaves* (CRS), apresentado na Seção 5.5, *Mory e Ardon* propuseram uma extensão local para o modelo CRC que considera a influência de uma vizinhança em uma função constante por partes. Assim, ao invés de se obter constantes que representam médias de intensidade em cada região da imagem, o que se obtém no modelo CRS são funções suaves variantes no espaço que aproximam uma dada imagem de referência.

A modificação proposta, denominada *Competição entre Regiões Constantes Ponderada Localmente* (CRCPL), é inspirada na análise local apresentada pelo método CRS e tem o mesmo objetivo do modelo CRC, que é aproximar uma imagem por uma função constante por partes. Considerando o resultado final de um processo de segmentação do CRC, que é a função  $u$  e as constantes  $c_1$  e  $c_2$ , sabe-se que a contribuição global do erro de uma região da imagem, representada por  $u$ , é dada por

$$E = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - c_1)^2 d\mathbf{x} . \quad (6.1)$$

No método CRS [Mory e Ardon, 2007], *Mory e Ardon* utilizaram uma janela simétrica  $\omega : \Omega \rightarrow$

$\mathbb{R}^+$  para considerar uma extensão local por meio da onde  $\omega(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  quando  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ . A função  $\omega$  é a mesma definida como Eq. (5.30):

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6.2)$$

onde valores altos para o desvio padrão  $\sigma$  suavizam mais a imagem e preservam menos detalhes, enquanto que valores mais baixos para  $\sigma$  mantêm mais detalhes com menor difusão na imagem. A Figura 6.2(a) apresenta uma imagem que possui alguns detalhes pequenos e outros maiores. A Figura 6.2(b) ilustra uma segmentação obtida ao utilizar  $\sigma = 0,01$ , onde a remoção de ruído da imagem é satisfatória, mas o objeto foi segmentado com alguns buracos. Na Figura 6.2(c), o valor de  $\sigma$  foi aumentado para  $0,04$  e percebe-se que os menores detalhes foram agregados ao objeto, enquanto que os buracos maiores pouco alteraram. A Figura 6.2(d) mostra o resultado obtido ao fixar  $\sigma = 0,1$ , onde verifica-se que todo o objeto e seus buracos internos foram agrupados como uma única região. Em contrapartida, é importante notar a suavização da forma do objeto, comprometendo levemente sua topologia.

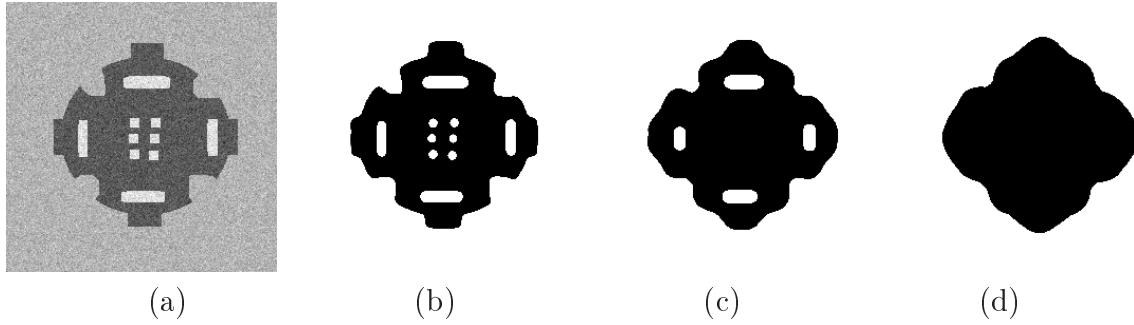


Figura 6.2: Influência do desvio-padrão  $\sigma$  da Eq. (6.2) no resultado final: (a) Imagem sintética ruidosa; (b)  $\sigma = 0,01$ ; (c)  $\sigma = 0,04$ ; (d)  $\sigma = 0,1$ .

Assim, com a incorporação da janela da Eq. (6.2) em uma vizinhança de um ponto central  $\mathbf{y} \in \Omega$ , o erro global da Eq. (6.1) se torna um erro local, dado por

$$e(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - s_1(\mathbf{y}))^2 \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} , \quad (6.3)$$

em que  $s_1(\mathbf{y})$  é uma função integrável que varia no espaço. Assim, a idéia do método CRS é calcular o erro no ponto central  $\mathbf{y}$  em relação à sua vizinhança, onde os valores das funções  $s_1$  e  $s_2$  são similares às intensidades da imagem original nos pontos próximos de cada  $\mathbf{y}$ .

No entanto, estamos interessados em aproximar cada região da imagem por um valor constante, visto que, além da abordagem ser simples, o custo computacional de se armazenar as componentes  $s_1$  e  $s_2$  é alto. Neste sentido, as constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem ser definidas como a contribuição total de uma componente suave associada. Assim, substituindo-se a função variável  $s_1(\mathbf{y})$  por uma constante  $c_1$  na Eq. (6.3), pode-se obter o erro global:

$$E_G = \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - c_1)^2 \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} , \quad (6.4)$$

onde nesta formulação, o erro global ponderado localmente é a contribuição total de todo  $\mathbf{y} \in \Omega$  da função  $s_1$ . De fato, o que se obtém é uma constante global que aproxima uma região da imagem, calculada como uma média da imagem de referência ponderada localmente pela função de pertinência  $u$ . Agora adicionando um termo semelhante de contribuição de energia do fundo da imagem e alterando-se a ordem de integração em cada um dos termos, pode-se obter o funcional de energia do modelo CRCPL, dado por:

$$\min_{u \in BV(\Omega)_{[0,1]}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}} \left\{ F_{CRCPL}(u, c_1, c_2) = \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - c_1)^2 d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \lambda \int_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 - u(\mathbf{x})) \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - c_2)^2 d\mathbf{y} d\mathbf{x} \right\} \quad (6.5)$$

em que  $\lambda$  balanceia os termos das funções erro e o termo de variação total. Não é difícil verificar que, considerando o funcional *Competição entre Regiões Fuzzy* da Eq. (5.3), a função erro desta modificação é descrita por

$$r_i^{c_i}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - c_i)^2 d\mathbf{y} , \quad (6.6)$$

Os valores ótimos  $c_1$  e  $c_2$  são obtidos calculando-se as Equações de Euler-Lagrange para o funcional da Eq. (6.5) mantendo-se  $u$  fixo. Tais cálculos resultam em:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\int_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} I(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\int_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ c_2 &= \frac{\int_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} I(\mathbf{x})(1 - u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\int_{\mathbf{y} \in \Omega} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 - u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Utilizando-se do teorema da convolução normalizada, os valores ótimos de  $c_1^*$  e  $c_2^*$  são obtidos como:

$$\begin{aligned} c_1^* &= \frac{\int [\omega * (Iu)](\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{\int [\omega * u](\mathbf{y}) d\mathbf{y}} \\ c_2^* &= \frac{\int [\omega * (I(1 - u))](\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{\int [\omega * (1 - u)](\mathbf{y}) d\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde estas convoluções, criam aproximações suaves para as regiões da imagem utilizando as funções de pertinência  $u$  e  $(1 - u)$  como medidas de certeza associadas. Por isso, diz-se que  $c_1$  e  $c_2$  são médias ponderadas de suas respectivas componentes suaves.

O processo de minimização do funcional de energia da Eq. (6.5) ocorre como nos métodos não-supervisionados *Competição entre Regiões Fuzzy* apresentados no Capítulo 5:

1. Inicialize  $u$  de maneira aleatória, de tal forma que  $u(\mathbf{x}) \in [0, 1]$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;
2. Enquanto  $u$  não alcançar o estado estacionário, faça
  - 1.1. Mantendo-se  $u$  fixo, calcule valores para  $c_1^*$  e  $c_2^*$  utilizando a Eq. (6.8);
  - 1.2. Mantendo-se  $c_1^*$  e  $c_2^*$  fixos, atualize a função  $u$  minimizando o funcional da Eq. (6.5) com relação a  $u$ ;
3. A segmentação final é  $c_1u + c_2(1 - u)$ ;

No passo 1.2, o esquema de projeção *dual* de *Chambolle* é utilizado para otimizar a função  $u$ , como nos métodos *Competição entre Regiões Fuzzy* detalhados no Capítulo 5. Deve-se minimizar o funcional de energia da Eq. (5.12) em relação à  $u$ , onde a função de competição  $r$  é calculada como:

$$\begin{aligned}
 r(\mathbf{x}) &= r_1(\mathbf{x}) - r_2(\mathbf{x}) \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - c_1)^2 d\mathbf{y} - \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x}) - c_2)^2 d\mathbf{y} \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x})^2 - 2I(\mathbf{x})c_1 + c_1^2) d\mathbf{y} - \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(I(\mathbf{x})^2 - 2I(\mathbf{x})c_2 + c_2^2) d\mathbf{y} \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(c_1^2 - c_2^2) d\mathbf{y} - 2I(\mathbf{x})\lambda \int_{\mathbf{y} \in \Omega} \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y})(c_1 - c_2) d\mathbf{y} \\
 r(\mathbf{x}) &= \lambda[\omega * (c_1^2 - c_2^2)](\mathbf{x}) - 2I(\mathbf{x})[\omega * (c_1 - c_2)](\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

O algoritmo do modelo CRCPL é descrito abaixo, onde considera-se que o domínio  $\Omega$  é discretizado em  $M_1 \times M_2$  pontos, dispostos por  $\Omega_D = [1, M_1] \times [1, M_2]$ , onde cada elemento  $\mathbf{x} \in \Omega$  é representado pelo par ordenado  $\{(i, j) \in \Omega_D | 1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq M_2\}$ . A janela discreta  $\omega$  possui dimensões  $W_1 \times W_2$ , onde cada coeficiente  $\omega(w_1, w_2)$  é dado por  $\{(w_1, w_2) \in \Omega_D | 1 \leq w_1 \leq W_1, 1 \leq w_2 \leq W_2\}$ . A constante  $T$  se refere ao número de iterações no tempo e  $\mathcal{N}$  é o número de iterações no algoritmo de *Chambolle*.

## 6.3 Resultados Experimentais

Nesta seção, são apresentados alguns resultados obtidos pelo modelo de segmentação proposto CRCPL. O objetivo dos experimentos realizados é verificar a dependência do modelo

---

**Algoritmo 5 : CRCPL**

---

1: Inicialize aleatoriamente a função de pertinência  $u_{i,j}^0$ ;

2: Faça  $v_{i,j}^0 \Leftarrow u_{i,j}^0$ ;

3: **PARA**  $t \Leftarrow 0, 1, 2, \dots T$  **FAÇA**

4: Atualize as funções  $c_1$  e  $c_2$  de acordo com:

$$c_1^t \Leftarrow \frac{\sum_i \sum_j \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{t_1, t_2} (u_{i-w_1, j-w_2}^t I_{i-w_1, j-w_2})}{\sum_i \sum_j \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} u_{i-w_1, j-w_2}^t}$$

$$c_2^t \Leftarrow \frac{\sum_i \sum_j \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} [(1 - u_{i-w_1, j-w_2}^t) I_{i-w_1, j-w_2}]}{\sum_i \sum_j \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} (1 - u_{i-w_1, j-w_2}^t)}$$

5: Calcule para cada ponto  $(i, j)$  do domínio a função competição entre regiões:

$$G_{i,j} \Leftarrow \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} ([c_1^t]^2 - [c_2^t]^2);$$

$$H_{i,j} \Leftarrow \sum_{w_1} \sum_{w_2} \omega_{w_1, w_2} (c_1^t - c_2^t);$$

$$r_{i,j}^t \Leftarrow \lambda [G_{i,j} - 2I_{i,j} H_{i,j}];$$

6: Inicialize  $\mathbf{p}_{i,j}^0 = (p_{i,j}^{1,0}, p_{i,j}^{2,0}) \Leftarrow 0$ ;

7: **PARA**  $n \Leftarrow 0, 1, 2, \dots N$  **FAÇA**

$$p_{i,j}^{1,n+1} \Leftarrow \frac{p_{i,j}^{1,n} + \tau \nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

$$p_{i,j}^{2,n+1} \Leftarrow \frac{p_{i,j}^{2,n} + \tau \nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

8: **FIM PARA**

9:  $v_{i,j}^{t+1} \Leftarrow \max(\min(u_{i,j}^t - \theta r_{i,j}^t, 1), 0)$ ;

10:  $u_{i,j}^{t+1} \Leftarrow v_{i,j}^{t+1} - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}$ ;

11: **FIM PARA**

---

em relação às condições iniciais, a robustez em relação a ruídos e a qualidade da segmentação final em imagens que possuem textura. Nos experimentos serão utilizados imagens naturais sintéticas e texturizadas, sendo algumas corrompidas por ruído.

Os resultados obtidos pelo modelo proposto serão comparados com o método CRC [Mory e Ardon, 2007], de *Mory* e *Ardon* tornando possível evidenciar as vantagens em se utilizar o modelo proposto. Em todos os experimentos, os parâmetros  $\theta$  e  $\tau$  foram mantidos fixos enquanto que os parâmetros  $\lambda$  e  $\sigma$  necessitam ser ajustados para cada imagem, dependendo do nível de dificuldade e da quantidade de ruído existente.

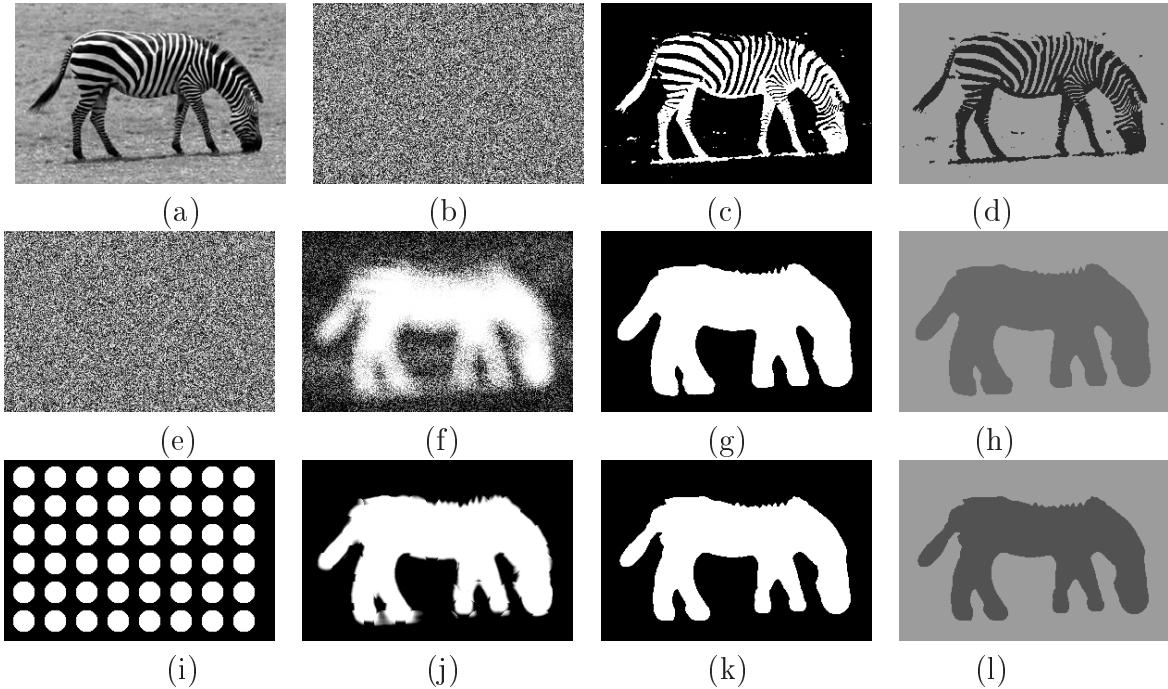


Figura 6.3: Teste na imagem da zebra: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  inicial utilizada no modelo CRC; (c) Função  $u$  após 100 iterações no modelo CRC; (d) Função constante por partes obtida pelo modelo CRC. Teste 1 (e-f-g-h) e Teste 2 (i-j-k-l): Função  $u$  em estado inicial, função  $u$  na iteração 10, função  $u$  final após 100 iterações e a função constante por partes, respectivamente.

O experimento 6.3 tem como objetivo avaliar a sensibilidade do modelo com relação às condições iniciais e sua capacidade na segmentação de objetos texturizados, como no caso da zebra. A Figura 6.3(a) mostra a imagem original. As Figuras 6.3(b) e 6.3(c) mostram a função de pertinência  $u$  inicial e final no modelo CRC, de *Mory* e *Ardon*, respectivamente. A Figura 6.3(d) apresenta a função constante por partes obtida pelo modelo CRC. As seqüências das Figuras 6.3(e-h) e 6.3(i-l) mostram dois casos de teste executados pelo modelo proposto CRCPL, onde a função  $u$  foi inicializada de maneiras diferentes em cada um, conforme as Figuras 6.3(e) e 6.3(i). As Figuras 6.3(f) e 6.3(j) ilustram os respectivos estados intermediários da função  $u$  em cada caso de teste e as Figuras 6.3(g) e 6.3(k) ilustram a função  $u$  final. As funções constantes por partes de cada teste, calculadas como  $c_1u + c_2(1 - u)$ , são mostradas

nas Figuras 6.3(h) e 6.3(l).

Percebe-se neste experimento que o modelo CRCPL calculou duas funções de pertinência finais com resultados bastante próximos, a partir de duas inicializações diferentes. Isto mostra a baixa sensibilidade do modelo com as condições iniciais, devido ao seu funcional de energia ser convexo. Além disso, o modelo proposto uniu as listras brancas e petras da zebra como uma única região, diferentemente dos outros modelos que as separaram em duas regiões distintas. Isto se deve ao emprego de análise local no processo de competição entre as regiões da imagem.

A Figura 6.4(a) apresenta uma imagem de um fotógrafo e o objetivo é comparar os resultados obtidos pelo modelo CRCPL com outros métodos baseados na técnica *Competição entre Regiões Fuzzy*: CRC, modelos *fuzzy* não-paramétricos CRFNP e CRFNPL, estes dois últimos descritos na Seção 5.6. A Figura 6.4(b) ilustra a função de pertinência  $u$  no instante inicial de tempo para os modelos CRCPL e CRC. A Figura 6.4(c) apresenta o resultado obtido pelo modelo CRCPL (local), enquanto que a Figura 6.4(d) ilustra o resultado obtido pelo modelo CRC. As soluções calculadas pelos modelos *Competição entre Regiões Fuzzy* baseadas nos métodos não-paramétricos global e local são mostradas nas Figuras 6.4(e) e 6.4(f), respectivamente. Foram executadas 300 iterações no tempo nos modelos CRC e CRCPL e o parâmetro  $\lambda$  foi fixado em 0,005. No modelo proposto, o desvio-padrão  $\sigma$  foi fixado em 0,01.

O modelo CRCPL obteve um resultado similar em relação ao resultado calculado pelo modelo não-paramétrico local, onde é importante destacar que este último faz cálculos computacionalmente caros, como convoluções e estimativa de densidade. Além disso, o modelo proposto apresentou resultados superiores ao modelo CRC, que detectou erroneamente alguns pontos da grama como pertencentes à região representada pelo fotógrafo, e ao modelo paramétrico global, que não identificou as pernas do fotógrafo corretamente.

O experimento mostrado pela Figura 6.5 se refere a uma imagem sintética e ruidosa de um tabuleiro contendo dois padrões distintos, dado pela Figura 6.5(a). A Figura 6.5(b) representa a função de pertinência  $u$  inicial utilizada em ambos os modelos. As Figuras 6.5(c) e 6.5(d) apresentam os resultados obtidos pelos modelos CRCPL e CRC, respectivamente. Neste teste, para ambos os modelos, foram executadas 300 iterações no tempo e o parâmetro  $\lambda = 0,005$ . No modelo proposto, o desvio-padrão  $\sigma$  foi fixado em 0,1.

Note que o modelo proposto foi capaz de separar corretamente o tabuleiro do fundo da imagem, além de apresentar robustez ao ruído, o que não ocorreu no modelo CRC.

A Figura 6.6(a) mostra uma imagem natural de uma bola de sinuca corrompida por ruído, cujo objetivo é segmentá-la, inclusive com o círculo branco interno. A Figura 6.6(b) se refere à função de pertinência  $u$  em estado inicial para ambos os modelos. A Figura 6.6(c) apresenta o resultado obtido pelo modelo proposto CRCPL, enquanto que a Figura 6.6(d) ilustra o resultado obtido pelo modelo CRC. Pode-se observar que no modelo proposto, toda a bola de sinuca foi identificada como uma única região, diferentemente do outro modelo, onde somente a intensidade preta foi considerada como uma única região.

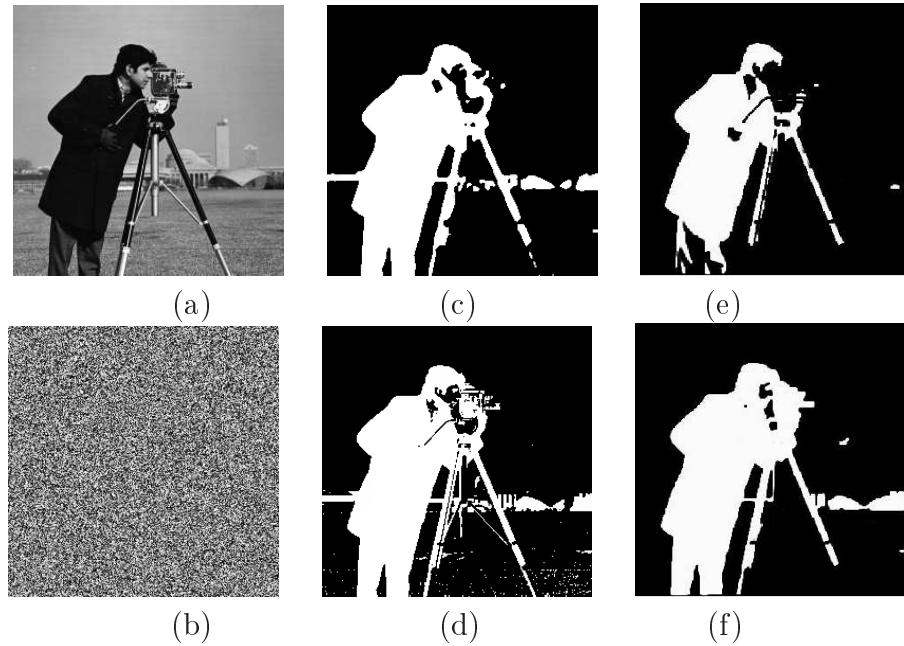


Figura 6.4: Imagem de um fotógrafo ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função  $u$  inicial utilizada pelos modelos CRCPL e CRC; (c-d-e-f) Função  $u$  obtida pelo modelo proposto CRCPL, CRC, CRFNP e CRFNPL, respectivamente.

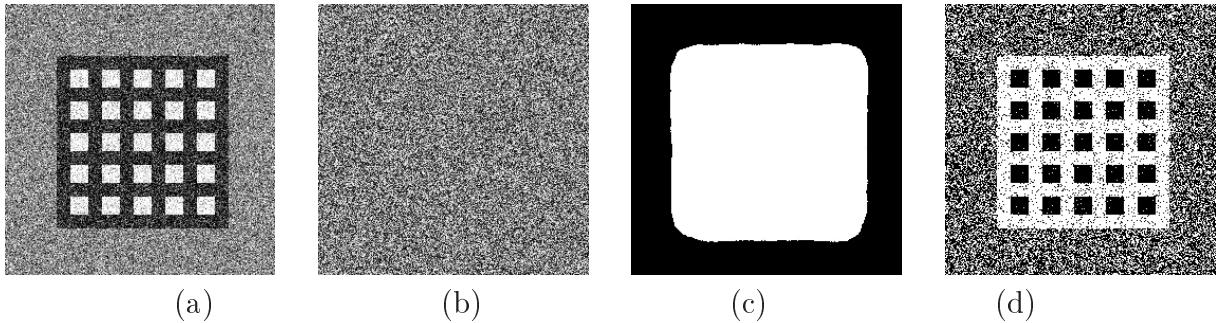


Figura 6.5: Teste em imagem ruidosa ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência  $u$ ; (c) Função de pertinência fuzzy  $u$  obtida pelo modelo CRCPL; (d) Função de pertinência fuzzy obtida pelo modelo CRC.

Neste teste, os parâmetros utilizados foram  $\lambda = 0,0001$  para ambos os modelos, e  $\sigma = 0,1$  na janela  $\omega$  da equação (6.2) do modelo proposto. Foram executadas 200 iterações para ambos os modelos.

Na Figura 6.7, é apresentado caso de segmentação de uma imagem natural de um avião-caça, dado pela Figura 6.7(a). A Figura 6.7(b) mostra a função de pertinência  $u$  inicial utilizada em ambos os modelos. A Figura 6.7(c) apresenta o resultado obtido pelo modelo proposto CRCPL e a Figura 6.7(d) mostra a solução calculada pelo modelo CRC. Os parâmetros utilizados foram  $\lambda = 0,005$  para ambos os modelos e no modelo proposto, o desvio-padrão  $\sigma$  da janela  $\omega$  foi fixado em 0,03. Em ambos os modelos, foram executadas 100 iterações no tempo.

Verifica-se nos resultados que o modelo proposto apresentou uma segmentação sem buracos

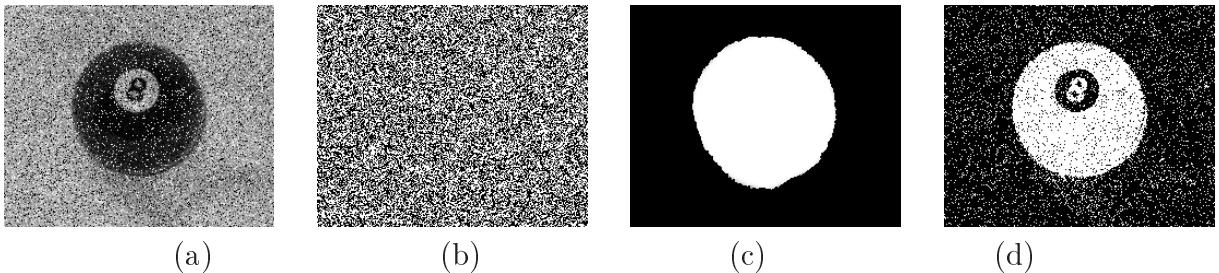


Figura 6.6: Teste com imagem de uma bola de sinuca com ruído: (a) Imagem original; (b) Função de pertinência  $u$ ; (c) Função de pertinência fuzzy  $u$  obtida pelo modelo proposto; (d) Função de pertinência fuzzy obtida pelo modelo CRC.

internos, representando corretamente o avião-caça, diferentemente do modelo *Competição entre Regiões Constantes*.

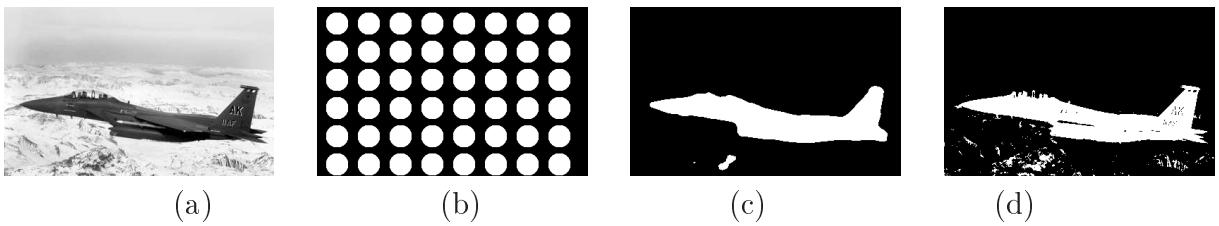


Figura 6.7: Teste em uma imagem natural ( $320 \times 200$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência fuzzy  $u$  em estado inicial; (c) Função  $u$  obtida pelo modelo proposto CRCPL; (d) Função  $u$  calculada pelo modelo CRC.

A Figura 6.8(a) apresenta uma imagem natural extraída da base de dados *Berkeley Segmentation Dataset* [Martin et al., 2001] e a meta é segmentar o círculo central. A Figura 6.8(b) ilustra a função de pertinência  $u$  inicializada para ambos os modelos. A Figura 6.8(c) mostra a função de pertinência fuzzy  $u$  final calculada pelo modelo CRCPL. A Figura 6.8(d) ilustra a função de pertinência  $u$  final obtida pelo modelo CRC. Para ambos os métodos,  $\lambda = 0,005$  e para o modelo proposto, o desvio-padrão  $\sigma$  da janela  $\omega$  foi fixado em 0,06. Em ambos os modelos, foram executadas 150 iterações no tempo.

Este resultado mostra claramente a vantagem em se utilizar uma análise local em imagens que possuem textura. Alguns pontos que estão no fundo da imagem possuem intensidades semelhantes às intensidades da textura do círculo central e que em métodos de análise global, tais pontos podem ser erroneamente segmentados, como relatado no experimento. Mas como se tratam de pontos isolados, cujos vizinhos possuem intensidade mais alta que caracterizam a textura do fundo, o cálculo do grau de pertinência de cada ponto do domínio é influenciado pela ponderação de seus pontos vizinhos, tornando possível identificar com maior precisão o fundo da imagem.

A Figura 6.9(a) mostra uma imagem sintética construída utilizando-se duas texturas distintas da base de dados Brodatz [Brodatz, 1956]. A Figura 6.9(b) representa a função de

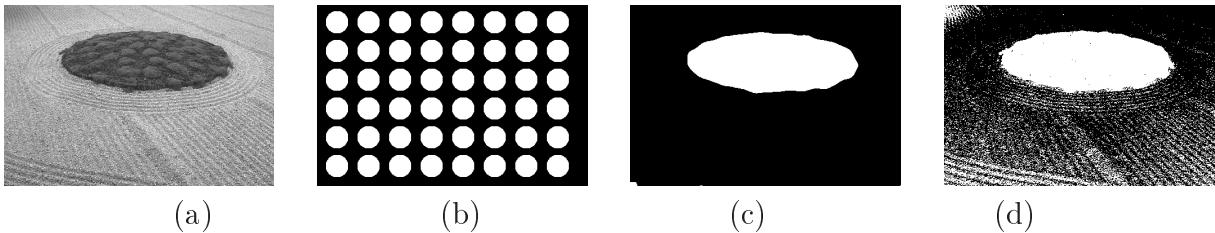


Figura 6.8: Teste em imagem natural ( $481 \times 321$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  em estado inicial; (c) Função  $u$  final obtida pelo modelo proposto CRCPL; (d) Função  $u$  final calculada pelo modelo CRC.

pertinência  $u$  inicial utilizada em ambos os modelos. As Figuras 6.9(c) e 6.9(d) apresentam os resultado obtidos pelos modelos proposto CRCPL e CRC, respectivamente. Neste teste, para ambos os modelos, foram executadas 100 iterações no tempo e o parâmetro  $\lambda = 0,005$ . No modelo proposto, o desvio-padrão  $\sigma$  foi fixado em 0,1.

O resultado obtido pelo modelo proposto apresenta o objeto corretamente segmentado, enquanto que a função de pertinência  $u$  calculada pelo modelo CRC possui diversos pontos erroneamente segmentados. Assim, ressalta-se a importância em se considerar uma vizinhança ponderada para determinar o grau de pertinência de cada ponto do domínio para imagens texturizadas.

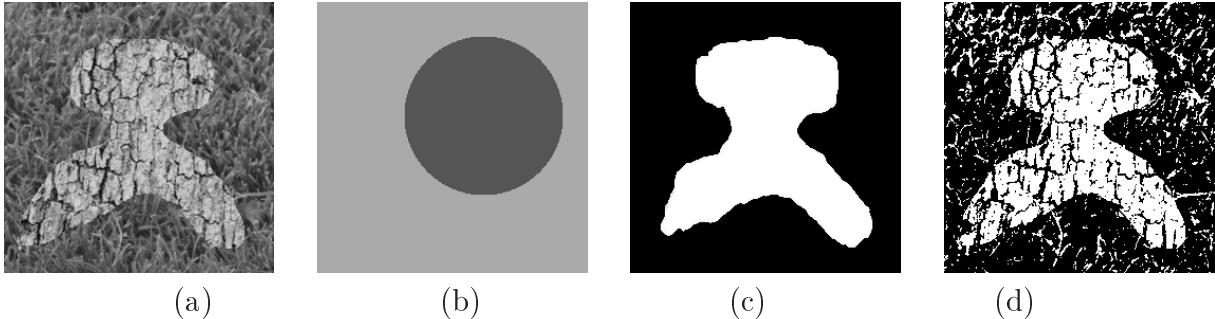


Figura 6.9: Imagem sintética texturizada ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência  $u$  em estado inicial; (c) Função  $u$  final calculada pelo modelo CRCPL; (d) Função de pertinência  $u$  final obtida pelo modelo CRC.

Outro teste envolvendo uma imagem texturizada é mostrado na Figura 6.10. A imagem dada pela Figura 6.10(a) foi construída utilizando-se das texturas da base de dados *Brodatz* [Brodatz, 1956]. A Figura 6.10(b) ilustra a função de pertinência  $u$  em estado inicial utilizada em ambos os modelos. A Figura 6.10(c) apresenta a função de pertinência  $u$  em estado final no modelo proposto CRCPL após 150 iterações no tempo e a Figura 6.10(d) se refere ao resultado obtido pelo modelo CRC. Os parâmetros foram fixados como  $\lambda = 0,01$  em ambos os modelos e para o modelo proposto, o desvio-padrão  $\sigma$  foi fixado em 0,04.

Pelos resultados apresentados, enfatiza-se o fato de que o modelo proposto segmentou corretamente o círculo central devido ao uso de análise local, enquanto que o modelo CRC identificou

um círculo com pequenos buracos e o fundo com listras, que possuem intensidades similares à textura do círculo.

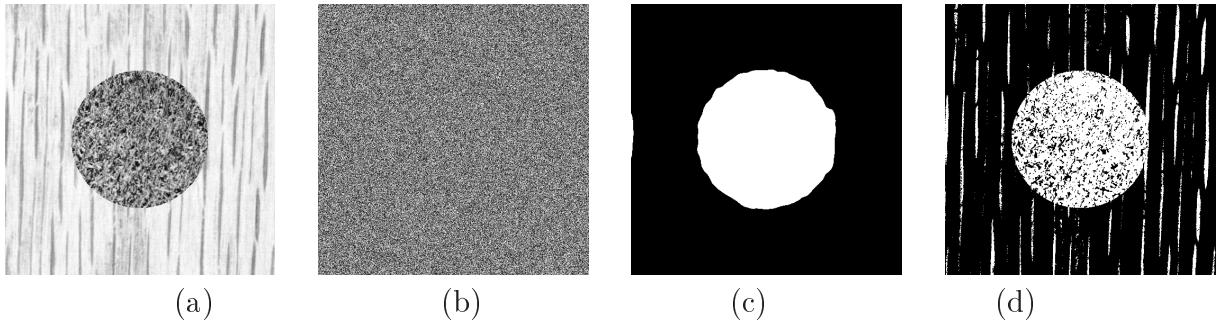


Figura 6.10: Imagem construída utilizando texturas de Brodatz [Brodatz, 1956] ( $256 \times 256$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência  $u$  em estado inicial; (c) Função  $u$  final calculada pelo modelo CRCPL; (d) Função de pertinência  $u$  final obtida pelo modelo CRC.

O experimento da Figura 6.11 apresenta a segmentação de uma lesão em uma imagem mamográfica, representada pela Figura 6.11(a). A Figura 6.11(b) representa a função de pertinência  $u$  inicial. As Figuras 6.11(c) e 6.11(d) apresentam a função  $u$  em estado intermediário e após 100 iterações, respectivamente. A Figura 6.11(e) mostra o apenas a contorno da lesão obtido após sua extração pelo método de *Crescimento de Regiões*. A Figura 6.11(f) ilustra o contorno feito pelo especialista, indicando a correta localização das fronteiras da lesão. Neste teste, os parâmetros  $\lambda$  e  $\sigma$  foram ajustados para 0,05.

Por este resultado, verifica-se que o modelo proposto pode ser eficientemente aplicado à segmentação de imagens médicas, pois o contorno obtido é similar ao contorno feito pelo especialista em radiologia.

De um modo geral, os resultados mostraram que o modelo proposto CRCPL mostrou ser eficaz na segmentação de imagens cujos objetos apresentam textura. No entanto, algumas limitações podem ser identificadas, como o alto custo computacional referente às operações de convolução e em alguns casos específicos, quando o objeto de interesse na imagem possui estruturas de diferentes tamanhos, como a zebra na Figura 6.3, cujas pernas e cauda são menores do que o tronco. Neste último caso, o resultado final da segmentação pode apresentar distorções nestas estruturas menores, como mostra a dilatação das pernas e na cauda da zebra visto que o valor do desvio-padrão é o mesmo para toda a imagem.

## 6.4 Considerações Finais

Neste capítulo, foi proposto um método de segmentação de imagens para duas regiões que introduz uma abordagem local para o modelo *Competição entre Regiões Constantes*, utilizando como princípio e motivação a idéia de análise de vizinhança por meio de uma função janela. O modelo proposto tem como objetivo fazer a competição entre as regiões em uma determinada vizinhança da imagem, como também calcular as médias dos pontos das regiões considerando

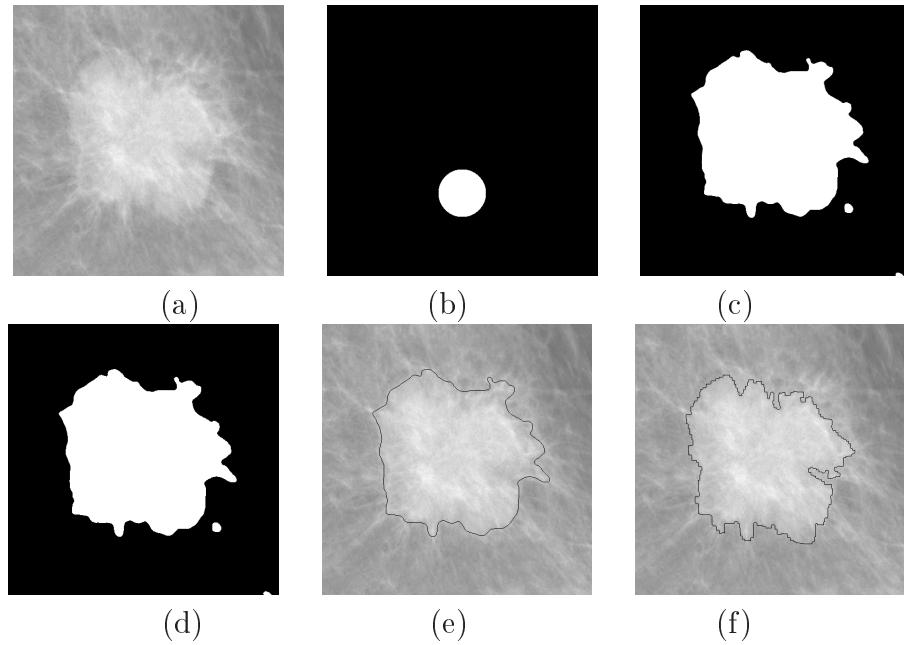


Figura 6.11: Imagem médica ( $512 \times 512$ ): (a) Imagem original; (b) Função de pertinência  $u$  em estado inicial; (c) Função  $u$  na iteração 10; (d) Função  $u$  após 100 iterações obtida pelo modelo proposto; (e) Contorno da lesão calculado a partir da função  $u$  final; (f) Contorno feito pelo especialista.

uma ponderação sobre a vizinhança em relação à cada ponto do domínio. Os experimentos mostraram que a modificação proposta é robusta na presença de ruídos e em imagens que possuem detalhes que caracterizam textura. Além disso, seu funcional de energia é convexo em relação à função  $u$ , resultando em baixa sensibilidade em relação às condições iniciais e um processo de convergência estável.

No próximo Capítulo, será apresentado um modelo que se trata de uma modificação da técnica *Competição entre Regiões Fuzzy Supervisionado* para uma abordagem não-supervisionada. Nesta proposta, a representação da região é feita por distribuições Gaussianas, sendo, portanto, mais complexa comparada às constantes utilizadas na modificação proposta neste Capítulo.

# *Competição entre Regiões Fuzzy Não-Supervisionada Utilizando Distribuições de Probabilidade*

---

Foram vistos até o presente momento duas abordagens pelas quais um modelo de segmentação pode ser formulado: supervisionada e não-supervisionada. Nos problemas de segmentação de imagens, o que difere um paradigma supervisionado de um não-supervisionado é a maneira pela qual as informações que caracterizam as regiões da imagem são obtidas. No caso de uma segmentação supervisionada, esta informação é previamente conhecida antes do processo de segmentação, enquanto que na segmentação não-supervisionada tal informação é adquirida no decorrer deste processo.

Alguns dos modelos de segmentação não-supervisionados baseados no método *Competição entre Regiões Fuzzy* vistos até o presente momento, como o *Competição entre Regiões Constantes* (CRC) e *Competição entre Regiões Suaves* (CRS), representam as regiões da imagem por constantes e funções suaves por partes, respectivamente. Uma característica comum à estes métodos se refere ao fato de otimizarem estas referidas representações durante o processo de segmentação. Embora seja uma estratégia simples, tais modelos assumem que as regiões da imagem devem ser homogêneas ou que possuam uma leve variação na intensidade. Na prática, isto pode ser um limitante para o modelo, visto que nem todas as imagens possuem regiões homogêneas, ou suave por partes.

Como foi visto na Seção 5.3, *Mory e Ardon* desenvolveram um modelo de segmentação supervisionado, denominado *Competição entre Regiões Fuzzy Supervisionado* (CRFS), que possui uma abordagem estatística para representação das regiões da imagem. Apesar de ser um modelo

adequado para a segmentação de imagens naturais e texturizadas, é necessário extrair amostras da imagem para determinar previamente as informações estatísticas das regiões da imagem a serem utilizadas no processo de segmentação. Tal fato pode restringir a aplicação do método na prática, pois necessita-se de um agente externo para conduzir uma parte da segmentação.

Tais limitações para os modelos de segmentação baseados no *Competição entre Regiões Fuzzy* inspiraram o desenvolvimento do método apresentado neste Capítulo. Em linhas gerais, a modificação proposta possui uma abordagem não-supervisionada e utiliza distribuições de probabilidade para aproximar as regiões da imagem e para coordenar o processo de competição entre as regiões.

A organização deste Capítulo para descrever a modificação proposta ocorrerá da seguinte maneira: A Seção 7.1 apresenta as razões pelo qual motivaram o desenvolvimento deste modelo e trabalhos relacionados que utilizam abordagens relacionadas. A Seção 7.2 descreve a metodologia utilizada para formular uma abordagem não-supervisionada e que aproxima as regiões da imagem por distribuições de probabilidade. A Seção 7.3 mostra alguns resultados obtidos pela modificação proposta e os compara com o método *Competição entre Regiões Constantes* de *Mory e Ardon*. A Seção 7.4 apresenta as considerações finais relativas à modificação proposta.

## 7.1 Motivação

Na Seção 5.3, foi descrito o modelo de segmentação supervisionado CRFS, que emprega uma função erro que é formulada utilizando as informações estatísticas das regiões de uma imagem  $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  no funcional do método *Competição entre Regiões Fuzzy*. Tal função erro é baseada no princípio de probabilidade máxima *a posteriori* [Geman e Geman, 1984] e é dada por:

$$r(\mathbf{x}) = -\lambda \log(P_i(I(\mathbf{x})|\alpha_i)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

*Mory e Ardon* derivaram o modelo CRFS utilizando-se a função erro acima, onde os parâmetros  $\alpha_i$  são conhecidos *a priori* e com isso a segmentação é obtida apenas pela otimização do funcional com relação à função de pertinência *fuzzy*  $u$  a partir de valores já determinados para estes parâmetros. É por esta razão que este modelo calcula soluções globais que independem da inicialização de  $u$ .

No modelo CRFS, os parâmetros  $\alpha$  são obtidos utilizando-se informações estatísticas de amostras extraídas do objeto e do fundo da imagem por meio de um agente externo ao modelo de segmentação, fazendo com que o processo de segmentação não seja totalmente automático. Isto pode limitar a aplicabilidade do modelo na prática, vista a necessidade de ter que se amostrar cada região da imagem que se quer segmentar. Além disso, o resultado final da segmentação é altamente dependente da qualidade das amostras extraídas, pois os parâmetros uma vez calculados, não são alterados durante o processo de segmentação. Isto significa que as amostras extraídas podem não ser representativas o suficiente para aproximar adequadamente

uma determinada região da imagem.

Alternativamente, alguns métodos não-supervisionados e que utilizam uma modelagem estatística sobre as regiões da imagem foram propostos. É o caso do modelo baseado em funções *Level Sets* de *Cremers* [Cremers et al., 2007], onde uma função *level set* é direcionada às bordas do objeto da imagem por meio de funções de densidade de probabilidade (fdp's) que são calculadas durante sua evolução. No entanto, por se tratar de uma abordagem baseada no *Método Level Set*, algumas limitações são observadas, como o lento processo de convergência, a necessidade de re-inicialização da curva dinâmica e sensibilidade do referido método com relação à posição inicial desta curva.

O uso de um modelo com abordagem *soft* minimiza alguns destes problemas. Como foi visto na Seção 3.4.3, *Barcelos et al.* [Barcelos et al., 2009b] [Barcelos et al., 2009a] formularam um modelo de segmentação que se baseia no modelo *Soft Mumford-Shah* de *Shen* [Shen, 2006] ao aproximar cada região da imagem por uma função Gaussiana. Embora o modelo de *Barcelos et al.* apresentou resultados mais satisfatórios em comparação ao modelo de *Shen*, seu funcional de energia é não-convexo e a solução obtida depende das condições iniciais estabelecidas antes do processo de segmentação. Uma alternativa é utilizar a técnica não-paramétrica *Competição entre Regiões Fuzzy*, denominada CRFNP e proposta por *Mory et al.* como descrito na Seção 5.6, onde fdp's não-paramétricas são estimadas por meio da técnica *Janelas de Parzen* [Parzen, 1979] enquanto ocorre o processo de segmentação. No entanto, este modelo de *Mory e Ardon* é computacionalmente elevado, uma vez que a estimativa destas fdp's envolve a análise sobre todo o domínio de intensidades da imagem.

Embora os modelos de segmentação CRC e CRS propostos por *Mory e Ardon* apresentem uma melhor performance comparados à técnica CRFNP, existem algumas dificuldades no que se refere à segmentação de imagens naturais e texturizadas. Estes modelos assumem que as regiões da imagem são homogêneas ou que possuem suaves variações na intensidade para representarem as regiões da imagem por valores constantes ou funções suaves, respectivamente. Estas representações não são adequadas para caracterizar adequadamente uma textura ou um padrão mais sofisticado que constitui uma região da imagem.

Desta maneira, será apresentado na próxima Seção um modelo de segmentação baseado na técnica *Competição entre Regiões Fuzzy* que modela estatisticamente as regiões da imagem por distribuições de probabilidade, como no modelo CRFS, e que possui o paradigma não-supervisionado descrito nos modelos CRC e CRS. A idéia deste modificação proposta em relação aos modelos de *Mory e Ardon* é utilizar estas distribuições de probabilidade para guiar procedimento de competição entre as regiões meio de teste de log-verossimilhança, estimando-as no decorrer do processo de segmentação. Com isso, evita-se que o resultado final seja completamente diferente da segmentação esperada, o que pode ocorrer no modelo CRFS, onde uma amostragem pouco representativa das regiões da imagem pode levar a um resultado insatisfatório, uma vez que as distribuições de probabilidade não são alteradas no processo de

segmentação.

## 7.2 Modelo Proposto

Conforme dito anteriormente, a modificação proposta consiste em descrever cada região da imagem por uma distribuição de probabilidade. Isto pode ser feito utilizando-se a função erro do modelo CRFS, dada por

$$r(\mathbf{x}) = -\lambda \log(P_i(I(\mathbf{x})|\alpha_i)), \quad (7.1)$$

onde a família de funções de densidade de probabilidade  $P_i(I|\alpha_i)$  são conhecidas *a priori*. Substituindo-se a função erro da Eq. (7.1) no funcional da Eq. (5.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} F_{CRFNS}(u, \boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\Omega} g |\nabla u| - \lambda \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \log(P_1(I(\mathbf{x})|\alpha_1)) d\mathbf{x} \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} (1 - u(\mathbf{x})) \log(P_2(I(\mathbf{x})|\alpha_2)) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde assume-se que as funções de densidade de probabilidade  $P_i(I|\alpha_i)$  são distribuições Gaussianas cujos parâmetros são  $\alpha_i = \{\mu_i, \sigma_i\}$ , dado que  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  são a média e o desvio-padrão da região  $i$ , respectivamente. Esta modificação proposta é denominada *Competição entre Regiões Fuzzy Não-Supervisionada* (CRFNS).

Observa-se que utilizando-se Gaussianas para representar as distribuições de probabilidade  $P_i$  no funcional da Eq. (7.2), a modificação proposta é um caso particular e simplificado da formulação variacional desenvolvida por Barcelos *et al.* considerando-se duas regiões, como mostra a Seção 3.4.3. No entanto, o funcional de energia da modificação proposta, dado pela Eq. (7.2), é convexo, sendo possível a obtenção de soluções locais fracamente dependente da inicialização da função  $u$ .

O funcional da Eq. (7.2) é minimizado considerando-se a otimização dos parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $u$  em sucessivas etapas executadas alternadamente. Primeiramente, a função  $u$  é mantida fixa e os parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$  determinados de acordo com as Equações de Euler-Lagrange. Depois, mantendo-se  $\boldsymbol{\alpha}$  fixo, minimiza-se o funcional da Eq. (7.2) em relação à  $u$ .

Os valores ótimos dos parâmetros  $\alpha_1 = \{\mu_1, \sigma_1\}$  e  $\alpha_2 = \{\mu_2, \sigma_2\}$  são obtidos calculando-se as Equações de Euler-Lagrange do funcional da Eq. (7.2) em relação a cada um dos parâmetros. Os valores ótimos para as médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são dados por:

$$\mu_1^* = \frac{\int I(\mathbf{x})u(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\int u(\mathbf{x})d\mathbf{x}} \quad \mu_2^* = \frac{\int I(\mathbf{x})(1 - u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}}{\int (1 - u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}}. \quad (7.3)$$

Por sua vez, os valores ótimos para os desvios padrão  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são:

$$\begin{aligned}\sigma_1^* &= \sqrt{\frac{\int u(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - \mu_1)^2 d\mathbf{x}}{\int u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}} \\ \sigma_2^* &= \sqrt{\frac{\int (1 - u(\mathbf{x}))(I(\mathbf{x}) - \mu_2)^2 d\mathbf{x}}{\int (1 - u(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}},\end{aligned}\quad (7.4)$$

em que as funções de pertinência  $u$  e  $(1 - u)$  são as medidas de certeza de cada região. Quando os desvios-padrões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são previamente conhecidos e são iguais ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ), isto é, apenas as médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são otimizadas, a função erro  $r_i = -\lambda \log(P_i(I|\{\mu_i, \sigma_i\}))$  pode-se reduzir para a forma  $r_i = \lambda_i(I - \mu_i)^2$  [Mory et al., 2007], que é a função erro utilizada na técnica *Chan-Vese* para segmentar imagens com regiões homogêneas.

A função de pertinência  $u$  pode ser otimizada por meio das Equações de Euler-Lagrange associadas com um esquema de evolução como foi mostrado na Eq. (5.11). Alternativamente, o esquema de projeção *dual* de *Chambolle* pode ser empregado para a determinação da função  $u$ , como descrito na Seção 5.2. Nesta última estratégia, utiliza-se a função de competição  $r = \lambda \log(P_2/P_1)$  no funcional da Eq. (5.12) que aproxima o funcional da Eq. (7.2).

Em linhas gerais, o problema de minimização da Eq. (7.2) pode ser resolvido de acordo com o algoritmo abaixo:

1. Inicializa-se a função de pertinência  $u$  aleatoriamente;
2. Enquanto  $u$  não alcançar o estado estacionário, faça
  - (a) Mantendo-se  $u$  fixo, calcule valores ótimos para  $\mu_1$  e  $\mu_2$  pelas Eqs. (7.3), e  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  utilizando as Eqs. (7.4). A seguir, determine as distribuições de probabilidade Gaussianas  $P_1$  e  $P_2$  de acordo com a Eq. (2.26) utilizando-se os respectivos parâmetros calculados;
  - (b) Mantendo-se  $\{\mu_1, \sigma_1\}$  e  $\{\mu_2, \sigma_2\}$  fixos, atualiza-se a função de pertinência  $u$  utilizando o esquema gradiente descendente como mostra a Eq. (5.11). Alternativamente, o esquema de projeção *dual* de *Chambolle* pode ser empregado para a determinação da função  $u$ , como descrito na Seção 5.2. Nesta última estratégia, define-se a função de competição como  $r = \lambda \log(P_2/P_1)$ ;

As soluções obtidas pelo modelo CRFNS são fracamente dependentes da inicialização da função  $u$ , pois os parâmetros  $\alpha$  no instante inicial de tempo são calculados com base nessa função  $u$  inicial e são otimizados durante o processo de segmentação, de acordo com as mudanças ocorridas na função  $u$ .

O algoritmo da modificação proposta CRFNS é descrito abaixo, onde o domínio  $\Omega$  é discretizado em  $M_1 \times M_2$  pontos, dispostos por  $\Omega_D = [1, M_1] \times [1, M_2]$ , onde cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  é

representado pelo par ordenado  $\{(i, j) \in \Omega_D | 1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq M_2\}$ . A constante  $T$  se refere ao número de iterações no tempo e  $\mathcal{N}$  é o número de iterações no algoritmo de ponto fixo de *Chambolle*.

### 7.3 Resultados

Nesta Seção, a modificação proposta CRFNS é validada utilizando-se de imagens naturais da base de dados *Berkeley Segmentation Dataset* [Martin et al., 2001] e uma imagem ruidosa. O objetivo é mostrar a eficiência do método na segmentação de imagens que possuem textura e regiões com intensidades heterogêneas. Para isso, os resultados obtidos pelo modelo proposto serão comparados com o modelo CRC, que possui natureza não-supervisionada. Além disso, é apresentado uma comparação de resultado entre o modelo proposto e o modelo CRFS, pois ambos são baseados em abordagem estatística.

Para todos os experimentos, os parâmetros  $\theta$ ,  $\tau$  e o número de iterações no algoritmo de ponto fixo de *Chambolle*  $\mathcal{N}$  foram mantidos fixos. Seus valores fixados como  $\theta = 0,15$ ,  $\tau = 0,1$  e  $\mathcal{N} = 10$ . Os parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$  (função  $g$  da Eq. (5.12)) devem ser ajustados para cada imagem e serão indicados em cada um dos experimentos.

A Figura 7.1 apresenta um experimento onde deseja-se segmentar a zebra e verificar a sensibilidade do método em relação à inicialização da função  $u$ . A Figura 7.1(a) mostra a imagem original e a Figura 7.1(b) a imagem reconstruída  $I_{REC}$  a partir da função de pertinência  $u$  determinada pelo modelo proposto ( $I_{REC} = Iu$ ). As sequências das Figuras 7.1(c-e-g) e 7.1(d-f-h) descrevem dois casos de teste onde a função  $u$  foi inicializada distintamente em cada um. As Figuras 7.1(c-d) ilustram as funções de pertinência no instante inicial de tempo para cada um dos testes. As Figuras 7.1(e-f) ilustram as funções de pertinência no estado intermediário, enquanto que as Figuras 7.1(g-h) mostram a função de pertinência  $u$  final após 500 e 3000 iterações, respectivamente. Os parâmetros utilizados foram  $\lambda = 0,25$  e  $\beta = 0,00025$ .

Pode-ser observar que a partir de duas inicializações completamente distintas, dois resultados finais semelhantes foram obtidos pelo modificação proposta. No entanto, inicializações mais distantes da solução ideal gastam mais iterações até chegar à função de pertinência  $u$  final, visto que com a inicialização do segundo caso foram necessárias 3000 iterações.

O experimento mostrado na Figura 7.2 também avalia a dependência do modelo CRFNS com relação à inicialização da função de pertinência. As Figuras 7.2(a) e 7.2(b) ilustram a imagem original e sua reconstrução a partir da função de pertinência  $u$  obtida pelo modelo CRFNS. As sequências das Figuras 7.2(c-e-g) e 7.2(d-f-h) apresentam os dois testes realizados, igualmente organizados como no exemplo anterior. O número de iterações para a primeira inicialização foi de 400, enquanto que para a segunda inicialização foi de 1500. Os parâmetros utilizados foram:  $\lambda = 0,25$  e  $\beta = 0,0001$ .

A Figura 7.3 apresenta uma comparação de resultados entre o resultado obtido pela modificação proposta CRFNS com os modelos CRFS e CRC, estudados nas Seções 5.3 e 5.4,

---

**Algoritmo 6 : CRFNS**


---

- 1: Inicialize aleatoriamente a função de pertinência  $u_{i,j}^0$ ;
- 2: Faça  $v_{i,j}^0 \leftarrow u_{i,j}^0$ ;
- 3: **PARA**  $t \Leftarrow 0, 1, 2, \dots T$  **FAÇA**
- 4:     Calcule a média e o desvio padrão para cada região da imagem:

$$\mu_1^t \leftarrow \frac{\sum_i \sum_j I_{i,j} u_{i,j}}{\sum_i \sum_j u_{i,j}} \quad \mu_2^t \leftarrow \frac{\sum_i \sum_j I_{i,j} (1 - u_{i,j})}{\sum_i \sum_j (1 - u_{i,j})}$$

$$\sigma_1^t \leftarrow \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j u_{i,j} (I_{i,j} - \mu_1^t)^2}{\sum_i \sum_j u_{i,j}}} \quad \sigma_2^t \leftarrow \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (1 - u_{i,j}) (I_{i,j} - \mu_2^t)^2}{\sum_i \sum_j (1 - u_{i,j})}}$$

- 5:     Calcule as distribuições Gaussianas para cada região

$$(P_1)_{i,j}^t \leftarrow \frac{1}{\sigma_1^t \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(I_{i,j} - \mu_1^t)^2}{2(\sigma_1^t)^2} \right)$$

$$(P_2)_{i,j}^t \leftarrow \frac{1}{\sigma_2^t \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(I_{i,j} - \mu_2^t)^2}{2(\sigma_2^t)^2} \right)$$

- 6:     Calcule para cada ponto  $(i, j)$  de  $\Omega_D$  a função competição entre regiões:

$$r_{i,j}^t \leftarrow \lambda \log \left( \frac{(P_2)_{i,j}^t}{(P_1)_{i,j}^t} \right)$$

- 7:     Inicialize  $\mathbf{p}_{i,j}^0 = (p_{i,j}^{1,0}, p_{i,j}^{2,0}) \Leftarrow 0$ ;
- 8:     **PARA**  $n \Leftarrow 0, 1, 2, \dots N$  **FAÇA**

$$p_{i,j}^{1,n+1} \leftarrow \frac{p_{i,j}^{1,n} + \tau \nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

$$p_{i,j}^{2,n+1} \leftarrow \frac{p_{i,j}^{2,n} + \tau \nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)}{1 + \tau |\nabla (div \mathbf{p}_{i,j}^n - v_{i,j}^t / \theta)|}$$

- 9:     **FIM PARA**
  - 10:     $v_{i,j}^{t+1} \leftarrow \max(\min(u_{i,j}^t - \theta r_{i,j}^t, 1), 0)$ ;
  - 11:     $u_{i,j}^{t+1} \leftarrow v_{i,j}^{t+1} - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_{i,j}^{t+1}$ ;
  - 12:    **FIM PARA**
-

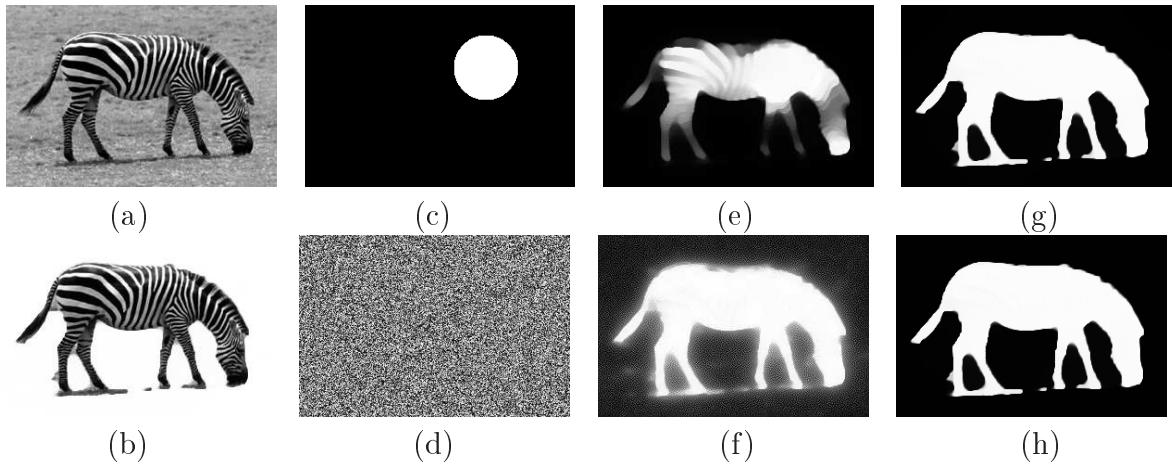


Figura 7.1: Teste na imagem da zebra no modelo CRFNS: (a) Imagem original; (b) Segmentação resultante. Dois casos de teste distintos (c-e-g) e (d-f-h): função  $u$  inicial - função  $u$  intermediária - função  $u$  final.

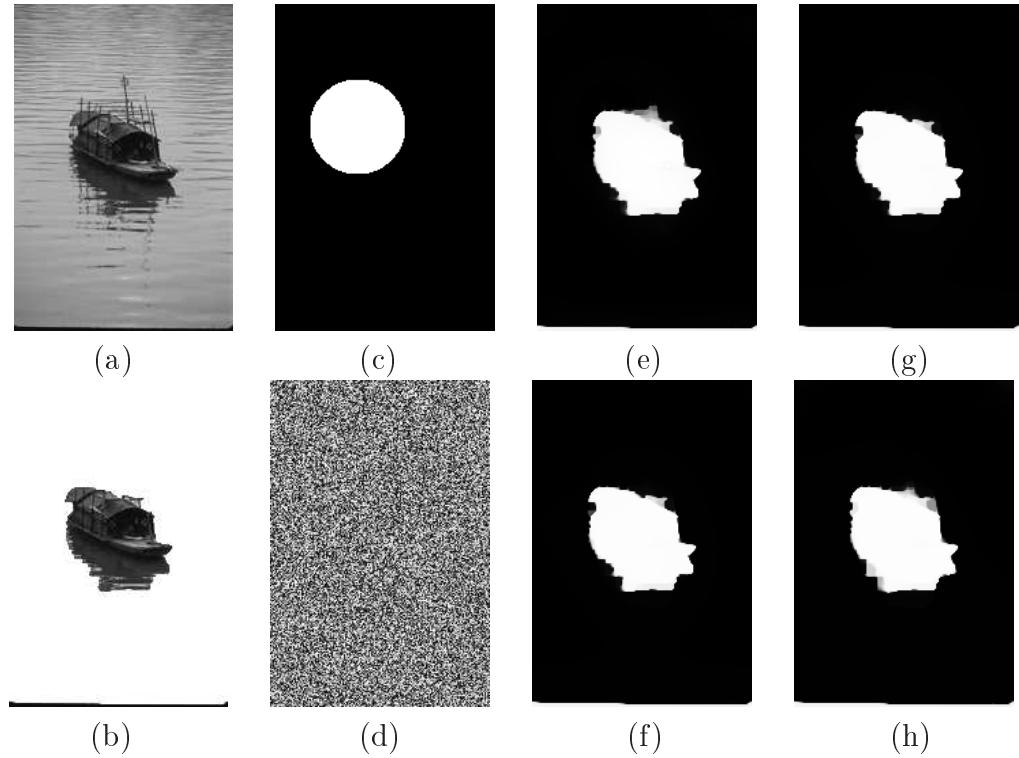


Figura 7.2: Imagem de um barco ( $481 \times 321$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Imagem reconstruída a partir da função  $u$  final; Dois casos de teste: (c-e-g) e (d-f-h), Função  $u$  inicial - Função  $u$  em estado intermediário - Função  $u$  final.

respectivamente, utilizando a Figura 7.1(a) como a imagem a ser segmentada. As Figuras 7.3(b) e 7.3(c) apresentam os resultados obtidos pelos modelos CRC e CRFS, respectivamente. A Figura 7.3(d) ilustra o resultado obtido pelo modelo CRFNS. Foi utilizada a função  $u$  inicial mostrada na Figura 7.1(d) para os três modelos.

Embora o resultado obtido pelo modelo CRFNS tenha apresentado alguma informação que não seja a zebra, por exemplo, sua sombra projetada na grama, deve-se levar em consideração que nenhuma informação dos parâmetros das regiões foram dadas *a priori*. Vale ainda salientar que, se uma amostra não for suficientemente representativa, o resultado da segmentação pelo modelo CRFS pode ser insatisfatório, o que não acontece com o método CRFNS, pois os parâmetros vão de ajustando no decorrer do processo de segmentação.

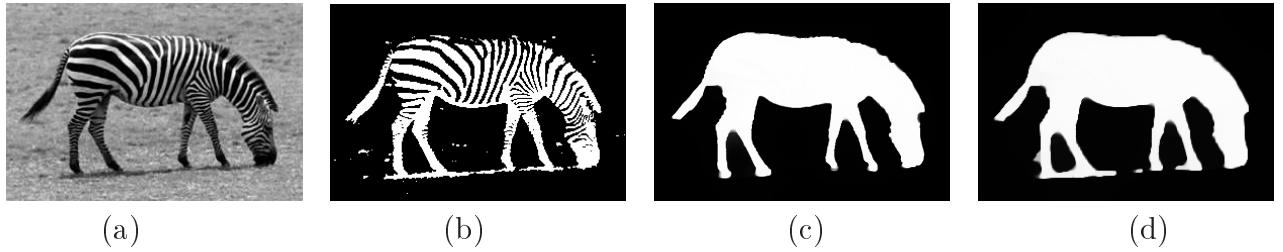


Figura 7.3: Comparação (a) Imagem original; (b) Função  $u$  obtida pelo modelo CRC; (c) Função  $u$  determinada pelo modelo CRFS; (d) Resultado obtido pelo modelo CRFNS.

Na Figura 7.4, é descrito um experimento executado em uma imagem ruidosa. O objetivo é verificar a robustez do modelo na segmentação de imagens ruidosas. A Figura 7.4(a) mostra a imagem original. A Figura 7.4(b) ilustra a função de pertinência  $u$  em estado inicial de tempo. A Figura 7.4(c) se refere à função  $u$  na iteração 30 e a Figura 7.4(d) a função  $u$  final após 400 iterações. As Figuras 7.4(e) e 7.4(f) apresentam os resultados obtidos pelos modelos CRC e pelo clássico *Chan-Vese*, respectivamente. O modelo CRFNS apresentou ser robusto ao ruído presente na imagem, tanto que obteve um resultado similar ao determinado pelo modelo CRC e bastante superior ao obtido pelo modelo *Chan-Vese*. Os parâmetros utilizados foram  $\lambda = 1$  e  $\beta = 0$ .

A Figura 7.5 mostra outro exemplo de segmentação de uma imagem natural onde objetiva-se segmentar as esculturas. A Figura 7.5(a) ilustra a imagem original. As Figuras 7.5(b), 7.5(c) e 7.5(d) mostram a função de pertinência  $u$  em estado inicial, intermediário e após 300 iterações, respectivamente. A função de pertinência obtida pelo modelo CRC é mostrada na Figura 7.5(e). Por este experimento, é importante salientar a precisão na segmentação do modelo CRFNS comparado ao modelo CRC, que deformou bastante as formas das esculturas na imagem. Neste experimento, os parâmetros foram fixados como  $\lambda = 0,3$  e  $\beta = 0,0001$ .

A Figura 7.6 apresenta uma imagem de uma pantera, onde o fundo possui grande variação na intensidade. A Figura 7.6(a) mostra a imagem original. A Figura 7.6(b) se refere à função  $u$  no instante inicial de tempo. As Figuras 7.6(c) e 7.6(d) apresentam a função de pertinência  $u$  nas iterações 200 e 1500 (final), respectivamente. A Figura 7.5(e) mostra o resultado obtido pelo modelo CRC. Já a Figura 7.5(f) ilustra a imagem reconstruída  $I_{REC} = I_u$  a partir da função  $u$  final mostrada na Figura 7.6(d). Como o modelo CRC assume que as regiões da imagem possuem intensidades homogêneas, a segmentação do fundo ficou comprometida, visto que as variações de intensidade são abruptas nesta região. Por sua vez, o modelo CRFNS segmentou

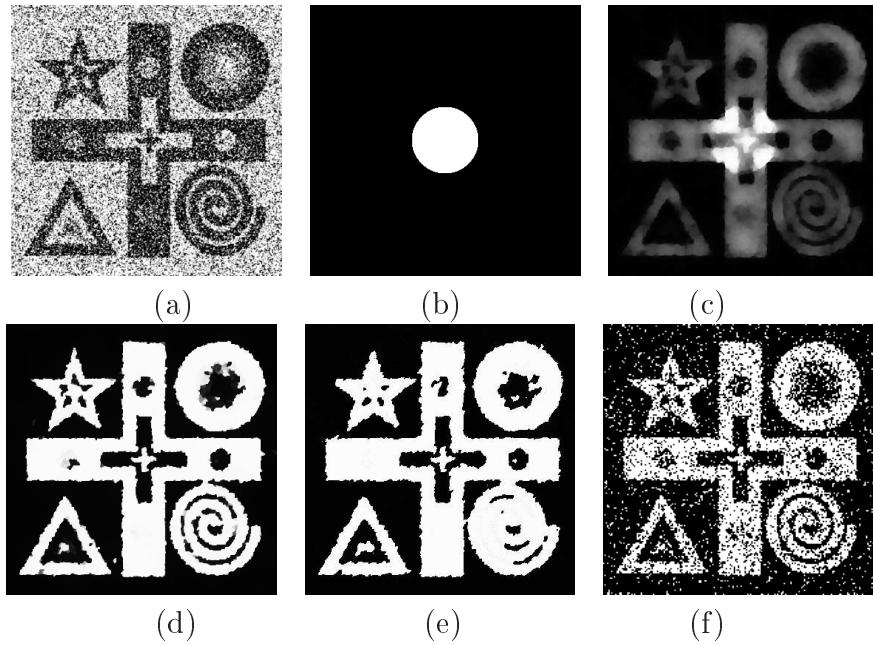


Figura 7.4: Imagem ruidosa na modificação proposta CRFNS ( $300 \times 300$ ): (a) Imagem original; (b) Função  $u$  inicial; (c) Função  $u$  na iteração 30; (d) Função  $u$  obtida pelo modelo CRFNS; (e) Resultado final obtido pelo modelo CRC; (f) Resultado obtido pelo modelo *Chan-Vese* (Função level set  $\phi < 0$ ).

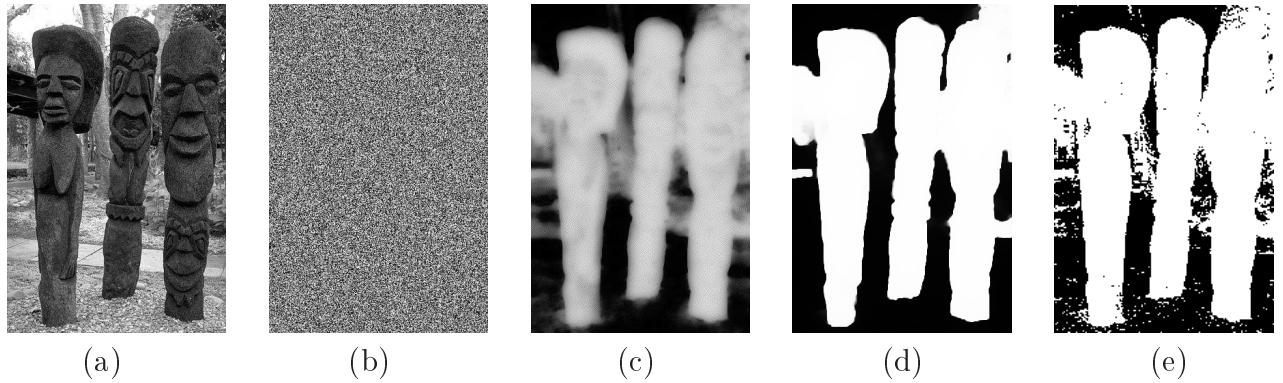


Figura 7.5: Imagem de uma escultura ( $481 \times 321$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  em instante inicial de tempo; (c) Função  $u$  em estado intermediário; (d) Função  $u$  final após 300 iterações; (e) Função  $u$  obtida pelo modelo CRC.

corretamente a pantera da imagem, justificando a eficácia do modelo nestas situações. Os parâmetros utilizados para este experimento foram fixados em  $\lambda = 0,05$  e  $\beta = 0,0005$ .

A Figura 7.7 é um difícil problema de segmentação, onde o objeto e o fundo possuem intensidades semelhantes. Nesta imagem, deve-se segmentar a cobra e a areia da imagem. A Figura 7.7(b) ilustra a função  $u$  em estado inicial. A função  $u$  em estado intermediário de tempo (iteração 20) é apresentada na Figura 7.7(c) e a Figura 7.7(d) mostra a função  $u$  final após 700 iterações no tempo. A Figura 7.7(e) apresenta a função  $u$  obtida pelo modelo CRC. A imagem reconstruída  $I_{REC} = Iu$  a partir da função  $u$  da Figura 7.7(d) é ilustrada na Figura

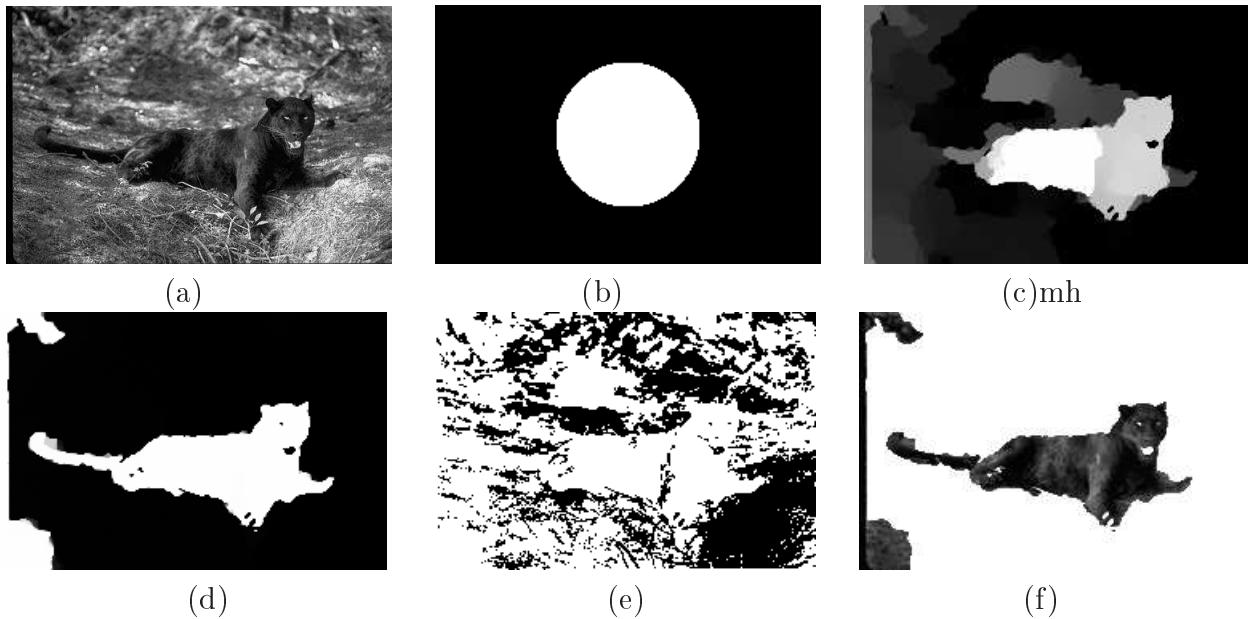


Figura 7.6: Foto de uma pantera ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  em instante inicial de tempo; (c) Função  $u$  em estado intermediário; (d) Função  $u$  final após 1500 iterações; (e) Função  $u$  obtida pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída  $I_{REC}$ .

7.7(f). Pode-se verificar que a cobra foi segmentada corretamente, enquanto que no modelo CRC a segmentação falhou. Neste experimento, os parâmetros foram fixados em  $\lambda = 0,4$  e  $\beta = 0,005$ .

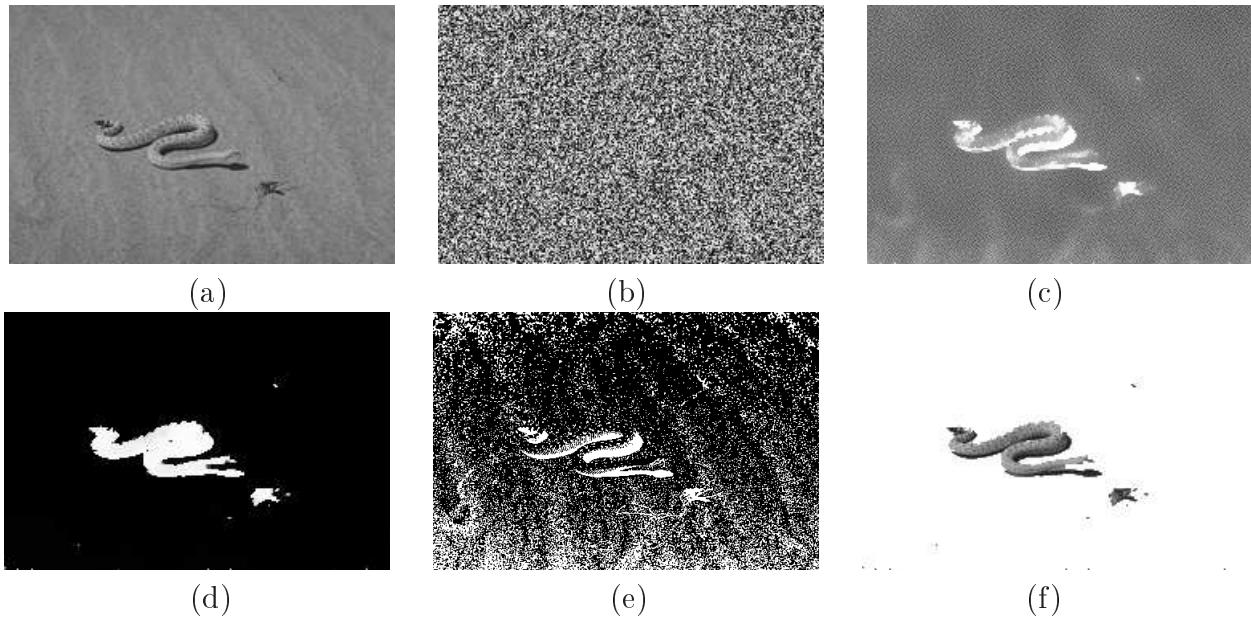


Figura 7.7: Imagem de uma cobra ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  em instante inicial de tempo; (c) Função  $u$  em estado intermediário; (d) Função  $u$  final após 700 iterações; (e) Função  $u$  obtida pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída  $I_{REC}$ .

As Figuras 7.8, 7.9, 7.10 e 7.11 apresentam exemplos de imagens naturais que foram avaliadas na modificação proposta CRFNS. Nestas Figuras, as representadas por (a) apresentam a imagem original. As funções de pertinência  $u$  em estado inicial são mostradas nas figuras (b) de cada exemplo. Seus respectivos estados intermediário e final são ilustradas nas imagens representadas por (c) e (d). As Figuras nomeadas por (e), são mostrados os resultados obtidos pelo modelo CRC e as Figuras denotadas por (f) se referem às imagens reconstruídas  $I_{REC} = Iu$ . Em linhas gerais, destaca-se a capacidade do modelo em segmentar textura comparando-se aos modelos não-supervisionados baseados no método *Competição entre Regiões Fuzzy*, como também a precisão que se consegue obter em imagens cujos objetos possuem duas intensidades bem homogêneas, como no caso das Figuras 7.8 e 7.11.

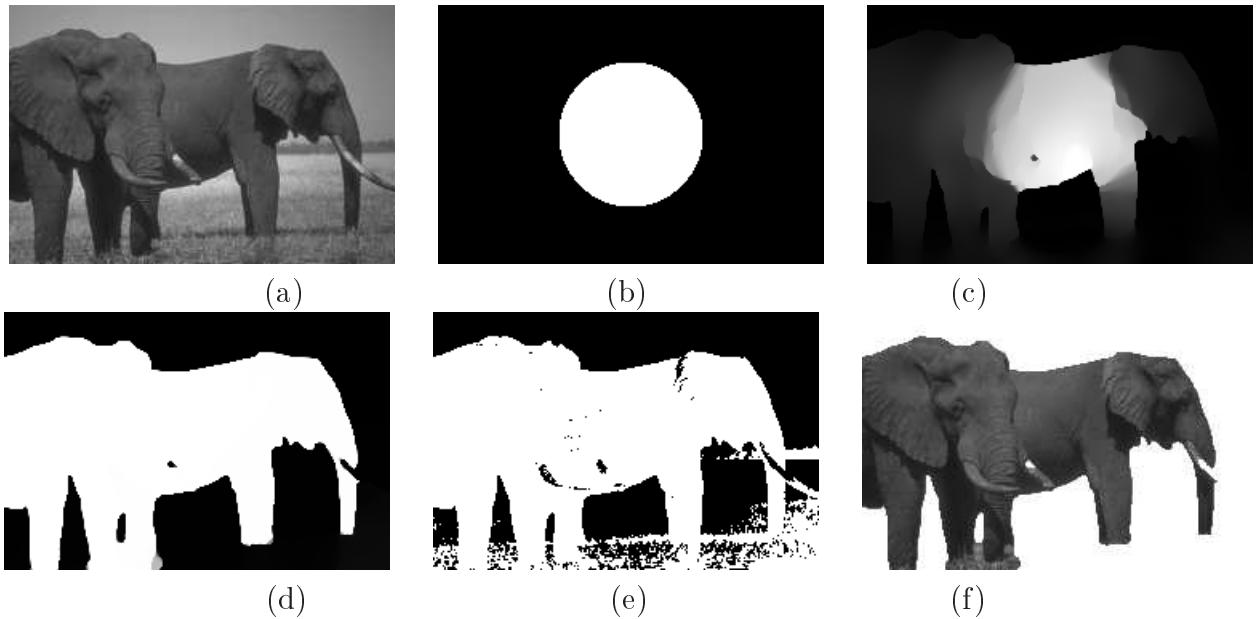


Figura 7.8: Imagem de um elefante ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  em instante inicial de tempo; (c) Função  $u$  em estado intermediário; (d) Função  $u$  final após 1000 iterações; (e) Função  $u$  obtida pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída  $I_{REC}$ . Parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,075$ ,  $\beta = 0,001$ .

## 7.4 Considerações Finais

Neste Capítulo, foi descrito um modelo de segmentação não-supervisionado baseado no método *Competição entre Regiões Fuzzy* que utiliza distribuições de probabilidade. Diferentemente dos outros métodos não-supervisionados *Competição entre Regiões Fuzzy*, os quais aproximam as regiões da imagem constantes ou funções suaves, a modificação proposta CRFNS aproxima as regiões da imagem por distribuições de probabilidade. Como resultado, imagens naturais e texturizadas podem ser eficientemente segmentadas devido ao modelo estatístico adotado, ao contrário dos outros métodos que assumem que as regiões da imagem são homogêneas na intensidade ou que variam levemente na intensidade.

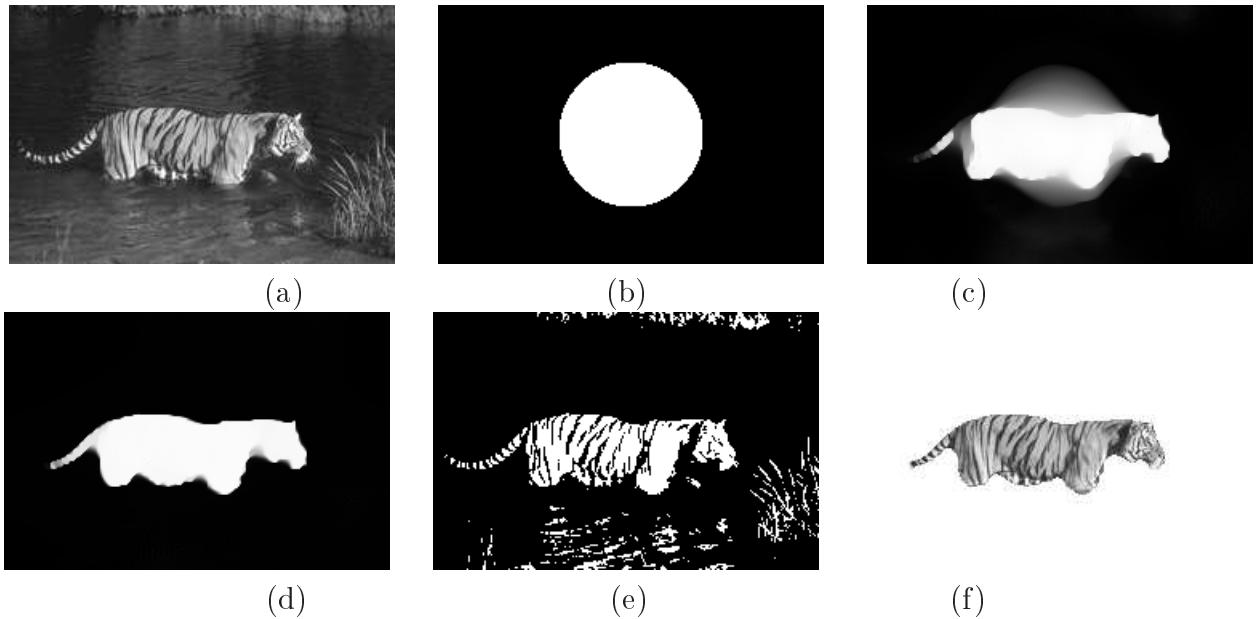


Figura 7.9: Imagem de um tigre ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Inicialização da função  $u$ ; (c) Função  $u$  em estado intermediário; (d) Função  $u$  final após 500 iterações; (e) Função  $u$  obtida pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída  $I_{REC}$ . Parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,25$ ,  $\beta = 0,0001$ .

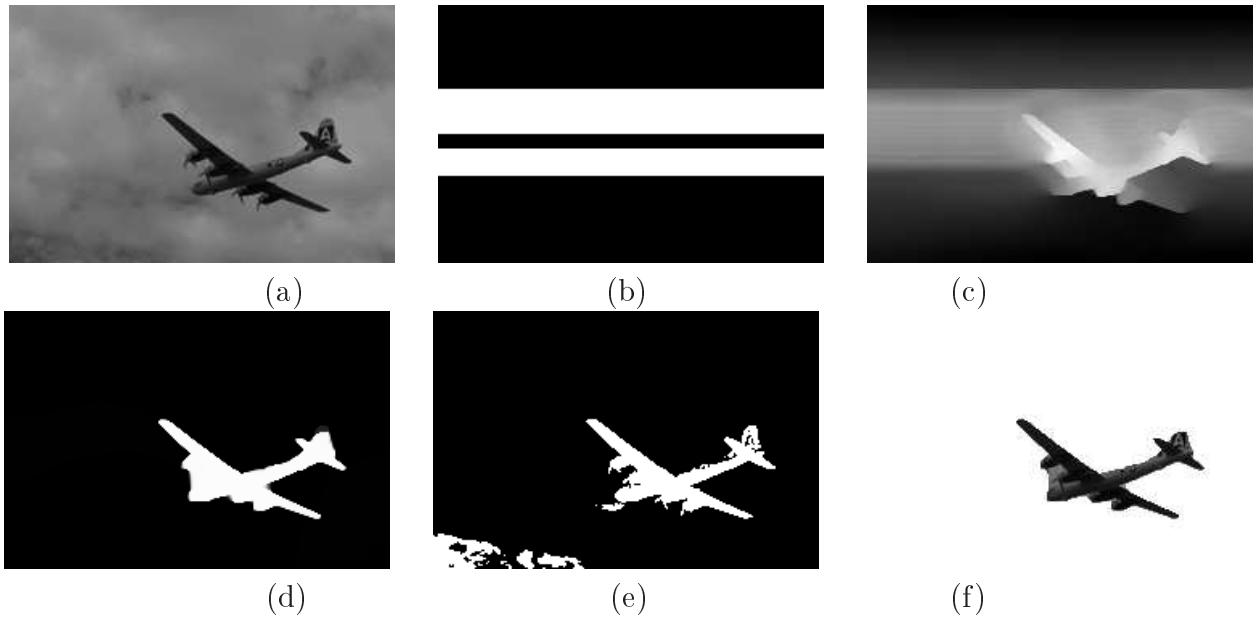


Figura 7.10: Imagem de um avião ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  inicial; (c) Função  $u$  em estado intermediário; (d) Função  $u$  em estado final após 400 iterações; (e) Resultado obtido pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída  $I_{REC}$ . Parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,25$ ,  $\beta = 0,0075$ .

No modelo CRFNS, as distribuições de probabilidade são utilizadas no processo de competição entre as regiões para um teste de log-verossimilhança e são otimizadas enquanto ocorre

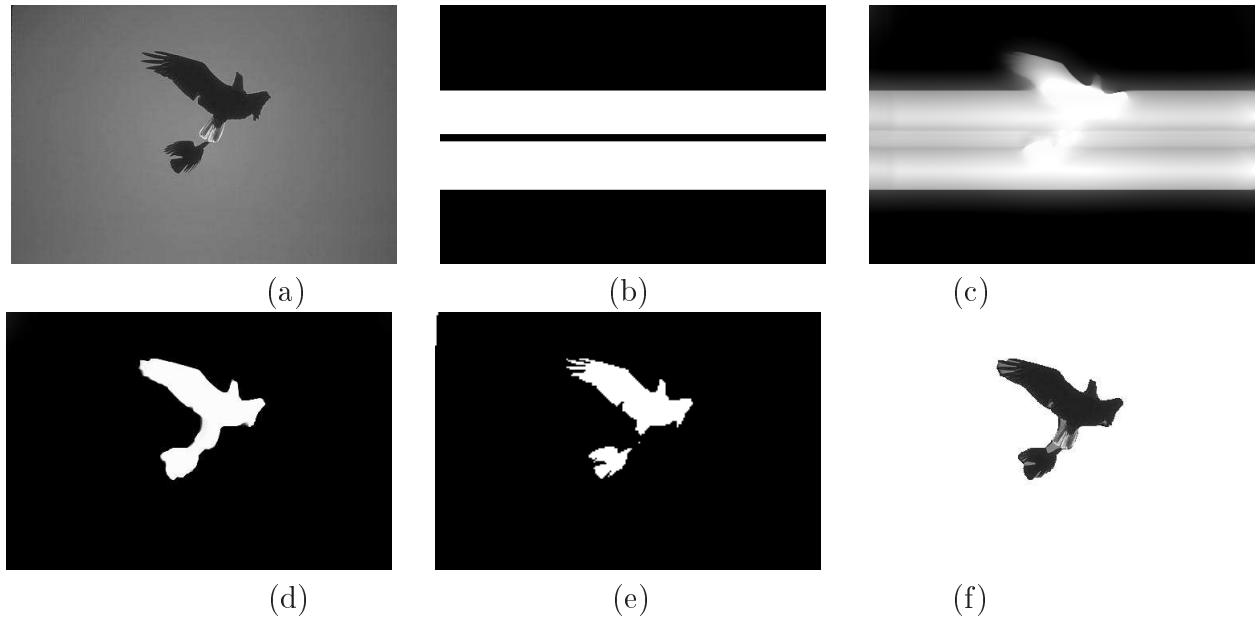


Figura 7.11: Imagem de um pássaro ( $321 \times 481$ ) [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Função  $u$  inicial; (c) Função  $u$  em estado intermediário; (d) Função  $u$  em estado final após 1200 iterações; (e) Resultado obtido pelo modelo CRC; (f) Imagem reconstruída a partir da função  $u$  obtida pelo modelo CRFNS. Parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,1$ ,  $\beta = 0,00025$ .

o processo de segmentação. O funcional de energia proposto é convexo e foi verificado que é fracamente sensível em relação às condições iniciais. Os experimentos realizados demonstraram que a modificação proposta CRFNS apresentou uma boa precisão na segmentação de imagens naturais e que resultados parecidos com o modelo supervisionado, que também utiliza a mesma abordagem estatística, além de ser robusto a ruído como os outros métodos não-supervisionados *Competição entre Regiões Fuzzy*.

No próximo Capítulo, será mostrado uma proposta para extensão do método *Competição entre Regiões Fuzzy* para a segmentação em várias regiões. A abordagem de segmentação em várias regiões ainda foi pouco estudada utilizando-se a metodologia *Competição entre Regiões Fuzzy* por se tratar de uma formulação bastante complexa comparada à segmentação de duas regiões.

## Competição Seletiva entre Multi-Regiões Fuzzy

Os modelos variacionais vistos até o presente momento limitam-se apenas a segmentar imagens em apenas duas regiões. No entanto, existem diversas imagens digitais que são constituídas por diversas regiões, como as ilustradas na Figura 8.1.

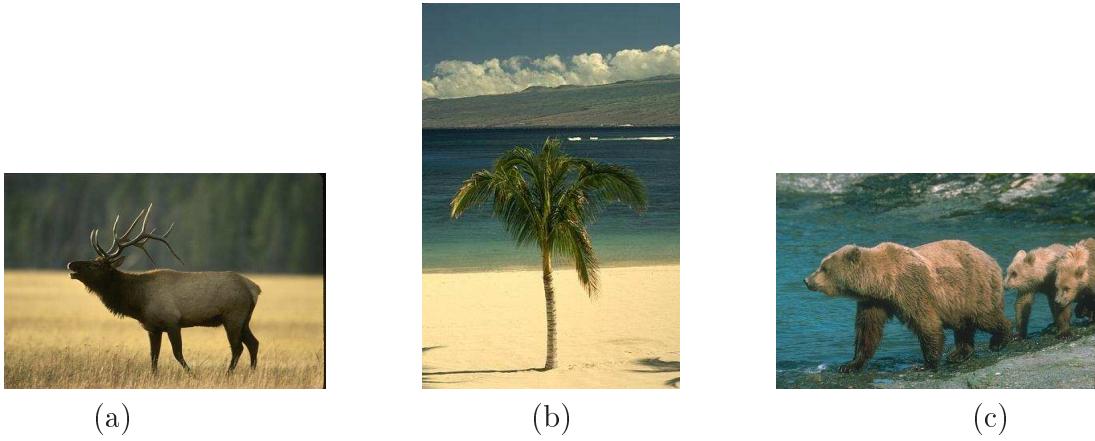


Figura 8.1: Exemplo de imagens constituídas de várias regiões.

A aplicabilidade de modelos para a segmentação em duas regiões em imagens constituídas por várias regiões pode apresentar resultados insatisfatórios, pois estes modelos restringem sua aplicabilidade para imagens que são compostas apenas por objeto e fundo. Nestes tipos de imagens, o ideal seria utilizar técnicas de segmentação que dividem a imagem em várias regiões.

Por isso, objetivando-se segmentar uma imagem em  $N$  regiões ( $N \geq 2$ ), é proposto um algoritmo baseado no método *Competição entre Regiões Fuzzy*, de Mory e Ardon, que possui uma abordagem supervisionada e que descreve as regiões da imagem estatisticamente por meio de funções de densidade de probabilidade. A idéia é executar o tradicional modelo *Competição*

entre Regiões Fuzzy  $N - 1$  vezes, onde em cada aplicação do método, obtém-se uma função de pertinência que é transformada em uma partição *hard* da imagem. Ao final, a  $N$ -ésima partição da imagem é obtida pelo complementar da união das  $N - 1$  partições restantes em relação a todo domínio  $\Omega$ . Desta maneira, o modelo evita a ocorrência de sobreposição de regiões e de pontos do domínio que não pertencem à nenhuma região.

Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: A Seção 8.1 descreve os motivos que levaram ao desenvolvimento deste modelo de segmentação, relatando alguns trabalhos relacionados existentes na literatura. Na Seção 8.2, é apresentada a metodologia seguida no desenvolvimento do algoritmo que constitui o modelo proposto. Resultados experimentais utilizando-se de imagens que possuem mais do que duas regiões são mostrados na Seção 8.3 com o objetivo de se validar o modelo proposto. Ao final, algumas conclusões e considerações finais sobre o modelo proposto são tratadas na Seção 8.4.

## 8.1 Motivação

A maioria dos métodos variacionais que segmentam imagens em várias regiões foram desenvolvidos utilizando-se uma abordagem *hard*. Especificamente, estes métodos otimizam duas ou mais funções *level sets*, onde as áreas internas, externas e as intersecções destas funções fornecem as regiões da imagem. No entanto, surgem alguns contratemplos inerentes ao uso de *level sets*, como sensibilidade à presença de ruídos e a posição inicial da curva, a necessidade de reinicialização periódica da função *level set* e o lento processo de convergência. Neste sentido, estas abordagens baseadas em *level sets* demandam alto custo computacional, o que pode inviabilizar seu uso na prática [Mansouri et al., 2006] [Lie et al., 2006].

Além das abordagens *hard*, métodos *soft* surgem como uma alternativas para a segmentação de uma imagem em várias regiões. O trabalho de *Shen* [Shen, 2006], estudado na Seção 3.4.1, não somente impulsionou o desenvolvimento de métodos *fuzzy* de segmentação em duas regiões, como serviu de base para outras formulações variacionais desenvolvidas posteriormente. Geralmente, estes métodos possuem uma abordagem probabilística e necessitam de regularização para aproximar os termos de borda da imagem.

Nos métodos de segmentação em várias regiões, a maior dificuldade consiste em evitar com que existam pontos do domínio pertençam a mais de uma região (sobreposição de regiões) ou não pertençam à nenhuma região (região de vácuo). Por exemplo, no modelo multi-regiões baseado em *Level Sets* de *Vese* e *Chan* [Vese e Chan, 2002], detalhado na Seção 3.3.4, tais dificuldades são superadas devido à natureza simples com que as curvas dinâmicas são tratadas. Por sua vez, no método *soft* de *Shen*, uma estratégia mais complexa foi explorada no trabalho de *Shen*, onde certas restrições impostas sobre as  $N$  funções de pertinência são consideradas no processo de regularização, fazendo com que esta dificuldade seja automaticamente tratada.

Utilizando os argumentos acima como motivação, é apresentado neste capítulo um algoritmo para segmentação de imagens em várias regiões que se baseia no modelo *Competição entre Re-*

giões Fuzzy (CRF), de *Mory e Ardon*, e que utiliza uma abordagem supervisionada. Como foi dito anteriormente, o modelo proposto evita a ocorrência de sobreposição de regiões e vácuo, possui baixa sensibilidade em relação às condições iniciais e é computacionalmente eficiente, visto que algumas vantagens são herdadas do referido método de *Mory e Ardon*.

Antes de descrever a metodologia do modelo proposto, será brevemente explorado uma extensão multi-regiões do método CRF que foi recentemente proposto por *Li et al.* [Li et al., 2010] [Li e Ng, 2010].

## Competição entre Multi-Regiões Fuzzy

*Li et al.* propuseram em [Li et al., 2010] uma extensão do método CRF para a segmentação em várias regiões, denominado *Competição entre Multi-Regiões Fuzzy* (CMRF). Por se tratar de um problema de minimização mais complexo do que o caso de segmentação em duas regiões, *Li et al.* introduziram determinadas restrições para manter a convexidade do funcional, que são tratadas pela técnica *Karush-Kuhn-Tucker* durante o processo de minimização.

Considere que  $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a imagem a ser segmentada. Tomando  $\mathbf{U} = \{u_1, \dots, u_N\}$  como o conjunto de todas as  $N$  funções de pertinência, tal que  $u_i \in BV(\Omega)_{[0,1]}$ , e  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  sendo definido pelo conjunto dos parâmetros das regiões, o funcional de energia proposto por *Li et al.* é dado por

$$F_{CMRF}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla u_i| + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_i^q(\mathbf{x}) r_i^{\alpha_i}(\mathbf{x}) , \quad (8.1)$$

e está sujeito às restrições

$$\sum_{i=1}^N u_i = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq u_i \leq 1. \quad (8.2)$$

Na Eq. (8.1),  $r_i^{\alpha_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções erro que caracterizam estatisticamente as regiões da imagem em termos de suas intensidades utilizando os parâmetros  $\alpha_i$ , que podem assumir valores escalares, constantes ou funções que variam no espaço, como no modelo CRF.  $q$  é um parâmetro positivo que determina a suavização da função  $u_i$  durante o processo de segmentação.

O funcional de energia da Eq. (8.1) é minimizado como no modelo CRF. Primeiramente, fixa-se o conjunto  $\mathbf{U}$  e calcula-se o conjunto de parâmetros  $\boldsymbol{\alpha}$ , calculando-se as Equações de Euler-Lagrange. Em seguida, fixa-se  $\boldsymbol{\alpha}$  e atualiza-se cada função de pertinência  $u_i \in \mathbf{U}$ . *Li et al.* exploraram o uso da função erro  $r_i^{\alpha_i} = (I - c_i)^2$ , onde  $\alpha_i = c_i$  é uma constante que representa a média das intensidades da imagem  $I$  na região  $i$ . As Equações de Euler-Lagrange do funcional  $F_{CMRF}$  em relação à  $c_i$  levam a:

$$c_i^* = \frac{\int_{\Omega} u_i^q(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u_i^q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}. \quad (8.3)$$

Em posterior trabalho, *Li et al.* introduziram funções de densidade de probabilidade (fdp's) não-paramétricas no funcional da Eq. (8.1) [Li e Ng, 2010]. O objetivo foi estender o modelo não-paramétrico baseado na competição entre regiões *fuzzy* de *Mory* e *Ardon* [Mory et al., 2007] para segmentar textura. Sabendo-se que  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$  é o conjunto das  $N$  fdp's não-paramétricas, o funcional de energia proposto é definido por:

$$F_{NP CMRF}(\mathbf{U}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla u_i| d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \lambda \int_{\Omega} u_i \log P_i(I, u_i) d\mathbf{x} , \quad (8.4)$$

onde  $P_i$  é estimado com base na técnica *Densidade de Janelas* (Janelas de Parzen) [Parzen, 1979] durante o processo de segmentação.

As funções de pertinência *fuzzy*  $u_i$  são otimizadas minimizando-se o funcional da Eq. (8.1) (respectivo funcional da Eq. (8.4)) pelo eficiente esquema de projeção *dual* de *Chambolle*. Para isso, relaxa-se a restrição (i) na Eq. (8.2) de acordo com:

$$u_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} u_i, \quad (8.5)$$

introduz-se um conjunto de funções auxiliares  $\mathbf{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$  e considera-se a seguinte aproximação para o funcional da Eq. (8.1):

$$\hat{F}_{MFRC}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\Omega} |\nabla v_i| d\mathbf{x} + \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\Omega} u_i r , \quad (8.6)$$

onde a função de competição  $r = r_1 - r_N$ , de acordo com o funcional da Eq. (8.4), é dada por

$$r = \lambda \log \left( \frac{P_N(I, u_N)}{P_i(I, u_i)} \right). \quad (8.7)$$

Pode ser visto que o processo de competição é guiado por um teste de log-verossimilhança entre a região  $i$  e o fundo da imagem, representado pela região  $N$ .

De acordo com *Li et al.* [Li et al., 2010], para  $N \geq 3$ , o modelo CMRF é sensível à inicialização, porém calcula soluções globais e apresenta estabilidade no cálculo da solução numérica. Além disso, ressalta-se a importância de se inicializar as  $N$  funções de pertinência de tal forma que as restrições na Eq. (8.2) sejam satisfeitas.

Na Seção seguinte, será apresentado o modelo proposto, que determina uma função de pertinência por vez ao executar o modelo CRF  $N - 1$  vezes ao invés de otimizar simultaneamente as  $N$  funções de pertinência, como ocorre no método de *Li et al.*.

## 8.2 Modelo Proposto

Nesta seção, é apresentado o algoritmo *Competição Seletiva entre Multi-Regiões Fuzzy* (CSMRF) que possui uma abordagem supervisionada e um critério proveniente da estatística *Bayesiana* para descrever as regiões da imagem. Especificamente, cada região da imagem é representada por uma fdp, que são estimadas com base nos parâmetros estatísticos extraídos de amostras das respectivas regiões da imagem. Estas FDP's, juntamente com os parâmetros, são previamente conhecidos antes do processo de segmentação, que consiste na determinação de cada partição da imagem.

O objetivo do modelo proposto é segmentar o domínio  $\Omega$  de uma imagem  $I$  em  $N$  regiões, cada uma sendo representada por uma partição *hard*, de maneira que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^N \Omega_i \text{ e } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset. \quad (8.8)$$

definindo-se  $\Omega_0 = \emptyset$ .

A idéia por trás do modelo proposto é executar o método CRF para duas regiões  $N - 1$  vezes, determinando-se uma função de pertinência *fuzzy* por vez. Em cada passo  $i$  (para  $i = 1, \dots, N - 1$ ), a função  $u_i$  calculada no domínio  $\Omega \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Omega_j$  é transformada em uma partição *hard* por meio de uma limiarização. A  $N$ -ésima partição *hard* é calculada como o complemento do conjunto formado pela união das outras  $N - 1$  partições *hard* com relação a  $\Omega$ . Com isso, o processo de segmentação do modelo proposto é *soft*, enquanto que o resultado final é *hard*.

Em outras palavras, primeiro determina-se as funções  $u_1$  e  $(1 - u_1)$  utilizando o modelo CRF, onde  $u_1$  é a função de pertinência da primeira região e  $(1 - u_1)$  é a pertinência do “fundo” em relação à primeira região. Este “fundo” da primeira região é composto por  $N - 1$  regiões as quais possuem diferentes fdp's. No entanto, somente uma FDP será utilizada para representar o fundo da imagem, para que um teste de log-verossimilhança decida se um ponto pertence à primeira região ou ao seu referido fundo. Depois de determinar estas funções de pertinência, a função  $u_1$  é limiarizada para se obter a partição  $\Omega_1$ . Agora, as funções  $u_2$  e  $(1 - u_2)$  são calculadas somente nos pontos do domínio que não pertencem à partição  $\Omega_1$ , isto é, em  $\Omega \setminus \Omega_1$ . Aplicando este mesmo procedimento descrito para determinar a segunda região  $\Omega_2$ , a função  $u_3$  é calculada nos pontos do domínio que não pertencem às partições  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ , isto é, em  $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Este processo é repetido até que a partição  $\Omega_{N-1}$  seja obtida. Ao final, A  $N$ -ésima partição *hard* é calculada como:

$$\Omega_N = \Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{N-1} \Omega_i. \quad (8.9)$$

Pode ser visto que as restrições dadas pela Eq. (8.8) são satisfeitas, uma vez que todos os pontos do domínio possuirão um único rótulo de região após a determinação das  $N$  partições.

O processo de segmentação acima pode ser formulado como a minimização de  $N - 1$  funcionais de energia, onde cada procedimento de minimização tem como meta determinar uma função de pertinência *fuzzy*  $u_i$ , para  $i = 1, \dots, N - 1$ . O algoritmo do modelo proposto consiste em minimizar  $N - 1$  funcionais de energia:

$$F_i(u_i) = \int_{\Omega'_i} g|\nabla u_i| + \int_{\Omega'_i} u_i(\mathbf{x})r_i^{\alpha_i}(\mathbf{x})dx + \int_{\Omega'_i} (1 - u_i(\mathbf{x}))r_{s_i}(\mathbf{x})d\mathbf{x} , \quad (8.10)$$

onde  $r_i^{\alpha_i}(\mathbf{x})$  é uma função erro definida como no método *Competição entre Regiões Fuzzy* (CRF).  $\alpha$  é o conjunto de parâmetros das regiões, que é definido como  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ .  $\Omega'_i$  é um subdomínio da imagem  $I$ , onde ocorrerá a competição para a determinação da função de pertinência  $u_i$ . Para  $i = 1, \dots, N - 1$ , este subdomínio é obtido de acordo com

$$\Omega'_i = \Omega \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Omega_j \quad (8.11)$$

sabendo-se que  $\Omega_0 = \emptyset$  e

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \Omega'_i | u_i(\mathbf{x}) > T\} \quad (8.12)$$

é uma limiarização sobre a função de pertinência  $u_i$  utilizando um limiar  $T$  ( $0 \leq T \leq 1$ ) que fornece a partição *hard* que contém os pontos do domínio que pertencem à região  $i$ . Valores próximos a 1 para  $T$  implicam na desconsideração de incertezas razoáveis da função de pertinência  $u_i$ . Neste trabalho, o valor utilizado foi 0,5.

Como mencionado anteriormente, o modelo proposto representa as regiões da imagem por distribuições de probabilidade. Desta maneira, utilizando-se a função erro  $r_i(\mathbf{x})^{\alpha_i} = -\lambda \log(P_i(I(\mathbf{x})|\alpha_i))$ , a função erro referente à região do fundo  $r_{s_i}$  é formulada de modo que a região  $i$  sempre compete com a região  $j$  que possui a maior probabilidade dentre as demais regiões, considerando-se cada ponto do domínio individualmente. Neste sentido,  $r_{s_i}$  pode ser escrita de acordo com

$$r_{s_i}(\mathbf{x}) = -\lambda \log(P_s(I(\mathbf{x})|\alpha_s))) \quad (8.13)$$

onde

$$s = \arg \max_{j=i+1, \dots, N} (P_j(I(\mathbf{x})|\alpha_j)). \quad (8.14)$$

Seguindo os modelos estatísticos formulados até agora, as distribuições de probabilidade  $P_i$  são Gaussianas, dadas pela Eq. (2.26), no qual os parâmetros da região  $\alpha_i = \{\mu_i, \sigma_i\}$  são a média  $\mu_i$  e o desvio padrão  $\sigma_i$  da amostra extraída da região  $i$  antes do processo de segmentação, respectivamente.

O funcional de energia da Eq. (8.10) é minimizado em relação à  $u_i$  utilizando-se o algoritmo de projeção *dual* de *Chambolle*, como no modelo CRF. Portanto, seguindo a estratégia apresentada por *Bresson* [Bresson et al., 2007], considera-se a seguinte aproximação para o funcional da Eq. (8.10):

$$\min_{(u_i, v_i) \in BV(\Omega'_i)_{[0,1]}} \left\{ F_{MAP}(u_i, v_i) = \int_{\Omega'_i} g |\nabla u_i| + \frac{1}{2\theta} \int_{\Omega'_i} |u_i - v_i|^2 + \int_{\Omega'_i} r v_i + \rho \nu(v_i) \right\}, \quad (8.15)$$

sabendo-se que  $v_i$  é uma função auxiliar que aproxima a função  $u_i$ ,  $\nu(\varepsilon) = \max(0, |2\varepsilon - 1| - 1)$ ,  $\rho > \frac{1}{2}|r|_\infty$  e  $\theta$  é um valor suficientemente pequeno para que o par minimizador  $(u^*, v^*)$  seja quase idêntico em relação a norma  $L^2$ . A função de competição  $r = r_i - r_{s_i}$  pode ser reescrita simplificadamente como

$$r(\mathbf{x}) = \lambda \log \left( \frac{P_s(I(\mathbf{x})|\alpha_s)}{P_i(I(\mathbf{x})|\alpha_i)} \right). \quad (8.16)$$

o que difere da função de competição do modelo CMRF de *Li et al.*, onde a competição ocorre entre a região  $i$  e a região do fundo, denotada por região  $N$ , como mostra a Eq. (8.7).

O funcional da Eq. (8.15) depende somente da função  $u_i$  nos dois primeiros termos, os quais são exatamente os termos do problema de minimização resolvido por *Chambolle*. Logo, o algoritmo de projeção *dual* de *Chambolle* pode ser utilizado para minimizar o funcional  $F_{MAP}$ . Baseado nisso, a solução deste funcional é calculada executando-se alternadamente sucessivas etapas de minimização sobre as funções  $u_i$  e  $v_i$  de acordo com:

1. Mantendo-se  $u_i$  fixo, determine  $v_i$ :

$$v_i = \max\{\min\{u_i - \theta r, 1\}, 0\} \quad (8.17)$$

2. Mantendo-se  $v_i$  fixo, calcule a função  $u_i$ :

$$u_i = v_i - \theta \operatorname{div} \mathbf{p}_i \quad (8.18)$$

onde o vetor  $\mathbf{p}_i = (p_i^1, p_i^2) \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  pode ser calculado pelo algoritmo de ponto fixo de *Chambolle*, iterando-se para  $n \geq 0$ :

$$\mathbf{p}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{p}_i^n + \tau \nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_i^n - v/\theta)}{1 + \tau |\nabla (\operatorname{div} \mathbf{p}_i^n - v/\theta)|/g} \quad (8.19)$$

dado que  $\mathbf{p}_i^0 = 0$ ,  $\tau < 1/8$  garante a estabilidade numérica do esquema. A função  $g$  é calculada como:

$$g(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \beta |\nabla I|^2} \quad (8.20)$$

Finalmente, o algoritmo do modelo proposto é descrito pelas seguintes etapas abaixo:

1. Extraia amostras de cada região da imagem e calcule os parâmetros  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ ;
2. Estime as distribuições de probabilidade Gaussianas  $P_1, \dots, P_N$ ;
3.  $\Omega_0 \leftarrow \emptyset$ ;
4. Para  $i = 1, \dots, N - 1$ , faça
  - (i.) Calcule  $\Omega'_i$  de acordo com a Eq. (8.11);
  - (ii.) Determine a função de competição  $r$  pela Eq. (8.16);
  - (iii.) Calcule a função  $u_i$  pela minimização do funcional da Eq. (8.15) para todo  $x \in \Omega'_i$ ;
  - (iv.) Obtenha a partição *hard*  $\Omega_i$  utilizando a Eq. (8.12);
5. Determine a partição  $\Omega_N$  pela Eq. (8.9).

Neste modelo, cada função de pertinência  $u_i$  pode ser inicializada aleatoriamente devido à fraca sensibilidade do modelo em relação às condições iniciais. A única restrição que deve ser satisfeita para a função  $u_i$  inicial é que  $u_i \in BV(\Omega'_i)$ .

Um exemplo meramente ilustrativo de um processo de segmentação pelo modelo proposto CSMRF é descrito a seguir. Suponha que desejamos segmentar a imagem da Figura 8.2(a) em três regiões: quadrado, triângulo e fundo.

Primeiramente, devemos extrair as amostras de cada região da imagem, como mostra a Figura 8.2(b). As janelas vermelha, verde e azul possuem intensidades do quadrado (região 1), do triângulo (região 2) e do fundo (região 3), respectivamente. Em seguida, calculam-se a média

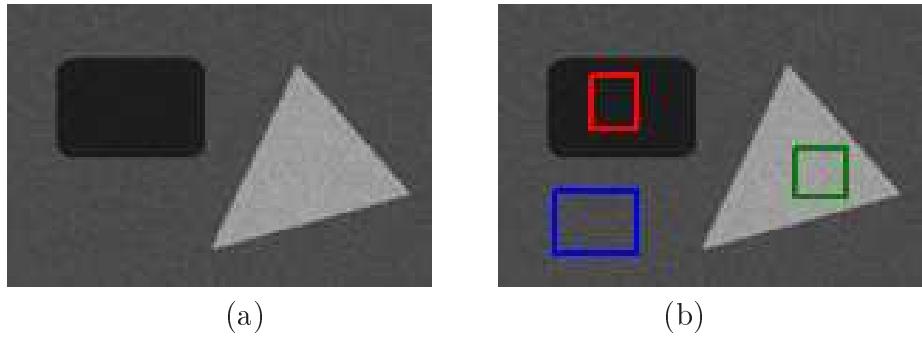


Figura 8.2: Exemplo do modelo proposto CSMRF: (a) Imagem original; (b) Amostras extraídas da imagem para as regiões 1, 2 e 3, em vermelho, verde e azul, respectivamente.

$\mu_i$  e o desvio padrão  $\sigma_i$  das intensidades de cada uma das amostras, obtendo-se  $\alpha_1 = \{\mu_1, \sigma_1\}$ ,  $\alpha_2 = \{\mu_2, \sigma_2\}$  e  $\alpha_3 = \{\mu_3, \sigma_3\}$  como os parâmetros das respectivas regiões 1, 2 e 3. Agora, as distribuições de probabilidade  $P_1(I|\alpha_1)$ ,  $P_2(I|\alpha_2)$  e  $P_3(I|\alpha_3)$  são estimadas com base nos parâmetros calculados.

A primeira partição a ser determinada se refere à região 1. Nesta primeira rodada, a competição ocorre em todos os pontos do domínio  $\Omega$ , pois como calculado na Eq. (8.11),  $\Omega'_1 = \Omega$ . A função de pertinência  $u_1$  é inicializada como mostra a Figura 8.3(a) e a função competição  $r$  é calculada considerando-se as distribuições de probabilidade de todas as 3 regiões. O processo de otimização da função  $u_1$  se inicia e a Figura 8.3(b) mostra seu estado intermediário. Após a obtenção do estado final da função  $u$  (após 70 iterações), ilustrada na Figura 8.3(c), a função  $u_1$  é limiarizada como na Eq. (8.12) para se determinar a partição *hard*  $\Omega_1$ , representada pela Figura 8.3(d).

Após a obtenção da partição  $\Omega_1$ , deve-se definir os pontos do domínio que irão participar do processo de competição para determinação da partição da região 2. Tais pontos fazem parte do subdomínio  $\Omega'_2$ , onde os pontos que pertencem à partição  $\Omega_1$  não serão mais utilizados no modelo proposto. Agora, a função  $r$  é determinada pela Eq. (8.16) considerando-se apenas as distribuições Gaussianas das regiões 2 e 3, visto que a região 1 já foi determinada. Neste momento, a função de pertinência  $u_2$  é inicializada como ilustra a Figura 8.4(a), onde o quadrado negro se refere aos pontos da partição  $\Omega_1$  que não mais participam do processo de segmentação. A Figura 8.4(b) apresenta um estado intermediário da função  $u_2$  e a Figura 8.4(c) ilustra o estado final da função  $u_2$ , que é limiarizada para se obter a partição  $\Omega_2$ , apresentada na Figura 8.4(d).

Finalmente, a região 3 é determinada calculando-se a Eq. (8.9). Assim, as imagens recons-truídas a partir das partições *hard* calculadas são ilustradas na Figura 8.5.

Na próxima seção, são apresentados alguns experimentos executados no modelo proposto utilizando-se imagens sintéticas texturizadas, imagens naturais e uma ruidosa.

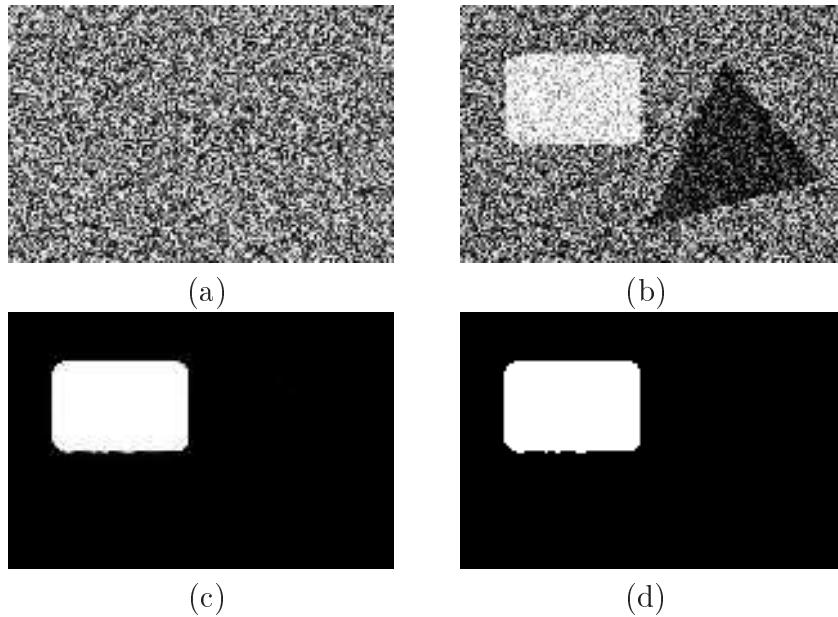


Figura 8.3: Primeira rodada no modelo proposto CSMRF: (a) Função  $u_1$  inicial; (b) Função  $u_1$  em estado intermediário; (c) Função  $u_1$  final; (d) Partição hard obtida.

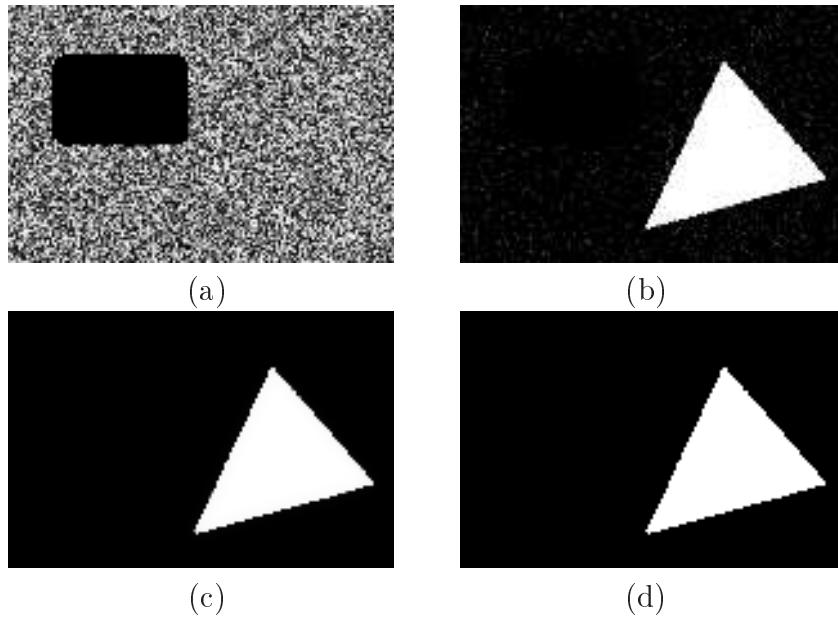


Figura 8.4: Segunda rodada no modelo proposto CSMRF: (a) Função  $u_2$  inicial; (b) Função  $u_2$  em estado intermediário; (c) Função  $u_2$  final; (d) Partição hard obtida.

### 8.3 Resultados

Nesta seção, o modelo proposto é avaliado no que se refere à performance e a eficiência na segmentação de imagens texturizadas e naturais, e uma imagem ruidosa. Alguns resultados serão comparados com o modelo *Competição entre Multi-Regiões Fuzzy* de Li et al. nas abordagens constante por partes [Li et al., 2010] e em funções de densidade de probabilidade

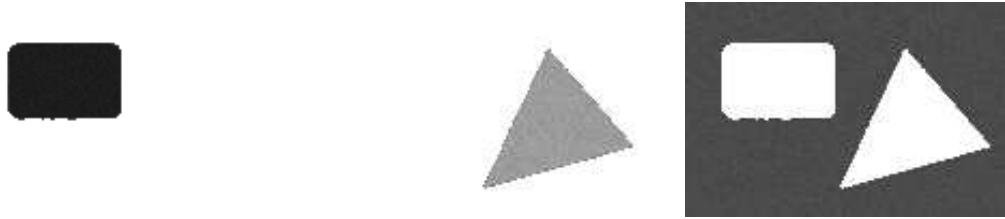


Figura 8.5: Imagem reconstruída utilizando as partições *hard* obtidas pelo modelo proposto.

não-paramétricas [Li e Ng, 2010]. As funções de pertinência *fuzzy*  $u_i$ , para  $i = 1, \dots, N - 1$ , foram inicializadas aleatoriamente, como mostrado na Figura 8.3.

Os parâmetros do algoritmo de ponto fixo de *Chambolle* foram mantidos fixos para todos os experimentos:  $\theta = 0.05$ ,  $\tau = 0.1$  e o número de iterações foi ajustado para 30. Já em relação aos parâmetros restantes,  $\lambda$  (da Eq. (8.16)) e  $\beta$  (da Eq. (8.20) necessitam ser ajustados para cada imagem de teste.

O primeiro experimento consiste de uma segmentação em três regiões em uma imagem texturizada mostrada na Figura 8.6. O objetivo é segmentar os dois objetos e o fundo, os quais possuem diferentes texturas. Os resultados obtidos serão comparados ao obtidos pelo modelo CMRF com FDP's não-paramétricas de *Li et al.* [Li e Ng, 2010]. A Figura 8.6(a) ilustra a imagem original e a Figura 8.6(b) ilustra as amostras extraídas das regiões, onde o quadrado azul é a amostra utilizada para calcular  $\alpha_1$ , o quadrado amarelo é a amostra utilizada para determinar  $\alpha_2$  e o quadrado verde se refere as amostras obtidas para determinar  $\alpha_3$ . As Figuras 8.6(c), 8.6(e) e 8.6(g) apresentam as três regiões da imagem reconstruída utilizando-se as partições  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  obtidas pelo modelo CMFRS. As Figuras 8.6(d) e 8.6(f) ilustram as funções de pertinência *fuzzy*  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente, e a Figure 8.6(h) mostra a segmentação final calculada pelo modelo CMRF de *Li et al.*. Pode ser visto que as três regiões texturizadas foram corretamente segmentadas e estão similares comparadas às regiões obtidas pelo modelo CMRF. Os parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0.5$ ,  $\beta = 0$  e 600 iterações no tempo para calcular cada partição.

A segmentação de uma imagem ruidosa em quatro regiões é mostrada no experimento da Figura 8.7. O objetivo é verificar se o modelo é robusto em relação ao ruído e comparar os resultados obtidos pelo modelo proposto CSMRF com o modelo CMRF de *Li et al.* quando se utiliza a função erro  $r_i^{c_i} = (I - c_i)^2$ . A Figura 8.7(b) representa as amostras extraídas da imagem original, indicadas pelas intensidades que estão contidas no interior de cada quadrado colorido, que são úteis para o cálculo dos parâmetros  $\alpha$ . As Figuras 8.7(c-d-e-f) ilustram os pontos que pertencem às partições *hard* obtidas pelo modelo proposto e as Figuras 8.7(g-h-i-j) apresentam as funções de pertinência obtidas pelo modelo CMRF de *Li et al.*. Os parâmetros foram fixados em:  $\lambda = 0.5$ ,  $\beta = 0$  e 1000 iterações foram executadas para determinar cada partição. Pode-se verificar que o modelo proposto apresentou robustez ao ruído presente na imagem original e resultados semelhantes foram calculados comparando-se com o modelo de *Li*.

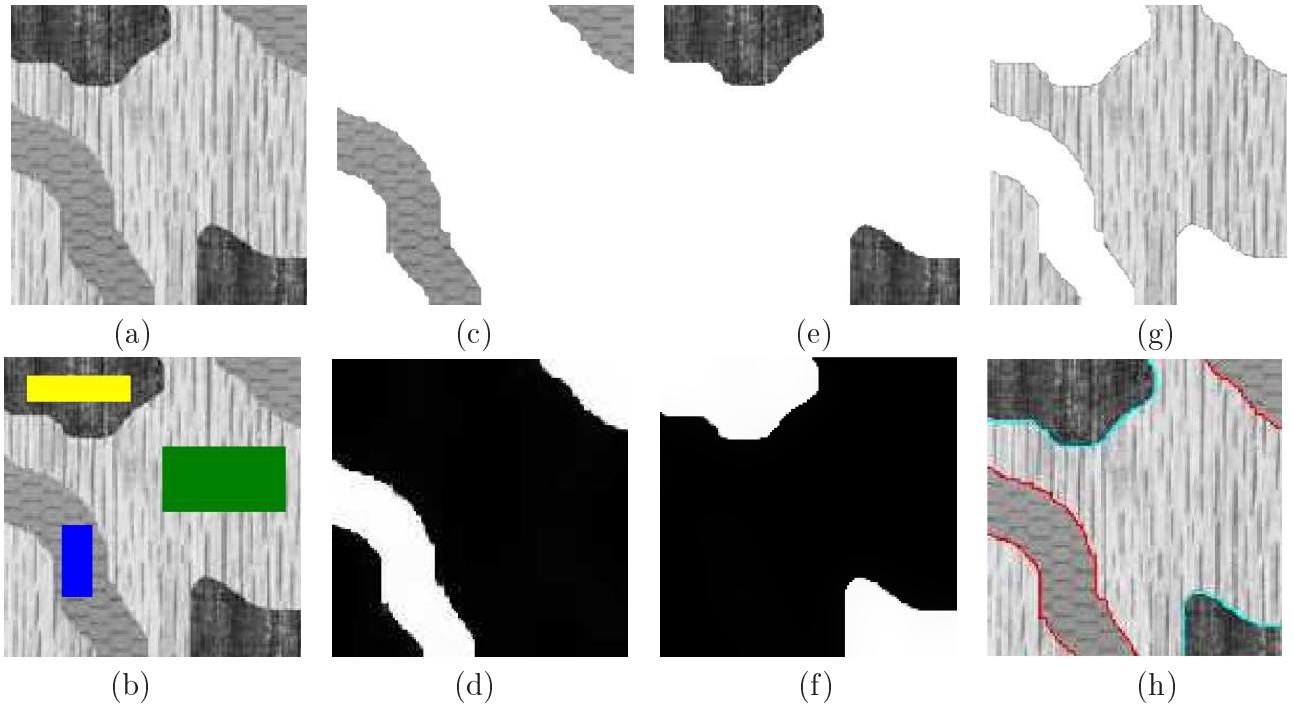


Figura 8.6: Imagem texturizada para segmentação em três regiões ( $200 \times 200$ ): (a) Imagem original; (b) Amostras extraídas (quadrados coloridos) utilizadas para calcular os parâmetros  $\alpha$  para o modelo CSMRF; (c-e-g) Regiões reconstruídas da imagem utilizando as partições  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ , respectivamente; (d-f-h) Funções  $u_1$  e  $u_2$ , e a segmentação final obtida pelo modelo CMRF não-paramétrico de Li [Li e Ng, 2010].

*et al.*.

A Figura 8.8 apresenta um exemplo de uma segmentação de uma imagem natural da base de dados *Berkeley Segmentation Dataset* [Martin et al., 2001] em três regiões. O objetivo é dividir as regiões da imagem identificadas pelo céu, pela floresta e pelos pássaros. A Figura 8.8(a) mostra a imagem original sobreposta pelas amostras de cada região. Pode-se verificar que as amostras foram extraídas do pássaro, do céu e da floresta. As Figuras 8.8(b-c-d) ilustram as regiões da imagem reconstruídas utilizando as partições  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  and  $\Omega_3$  obtidas pelo modelo proposto, respectivamente. Os parâmetros foram ajustados em:  $\lambda = 0,25$ ,  $\beta = 0,00005$  e 200 iterações foram executadas para determinar cada partição.

Na Figura 8.9, um resultado obtido pela segmentação de uma imagem panorâmica em três regiões é mostrada. A Figura 8.9(a) apresenta a imagem original sobreposta pelas amostras de cada região. As Figuras 8.9(b-c-d) representam as regiões da imagem reconstruídas utilizando as partições obtidas pelo modelo proposto. Neste experimento, os parâmetros foram fixados como:  $\lambda = 0,35$ ,  $\beta = 0,0005$  e 500 iterações no processo de obtenção de cada partição hard. É importante notar que as três regiões da imagem foram corretamente segmentadas devido à dificuldade de identificar pontos que pertencem às bordas entre os prédios e o céu.

A Figura 8.10 apresenta uma segmentação em três regiões de uma imagem sintética tex-

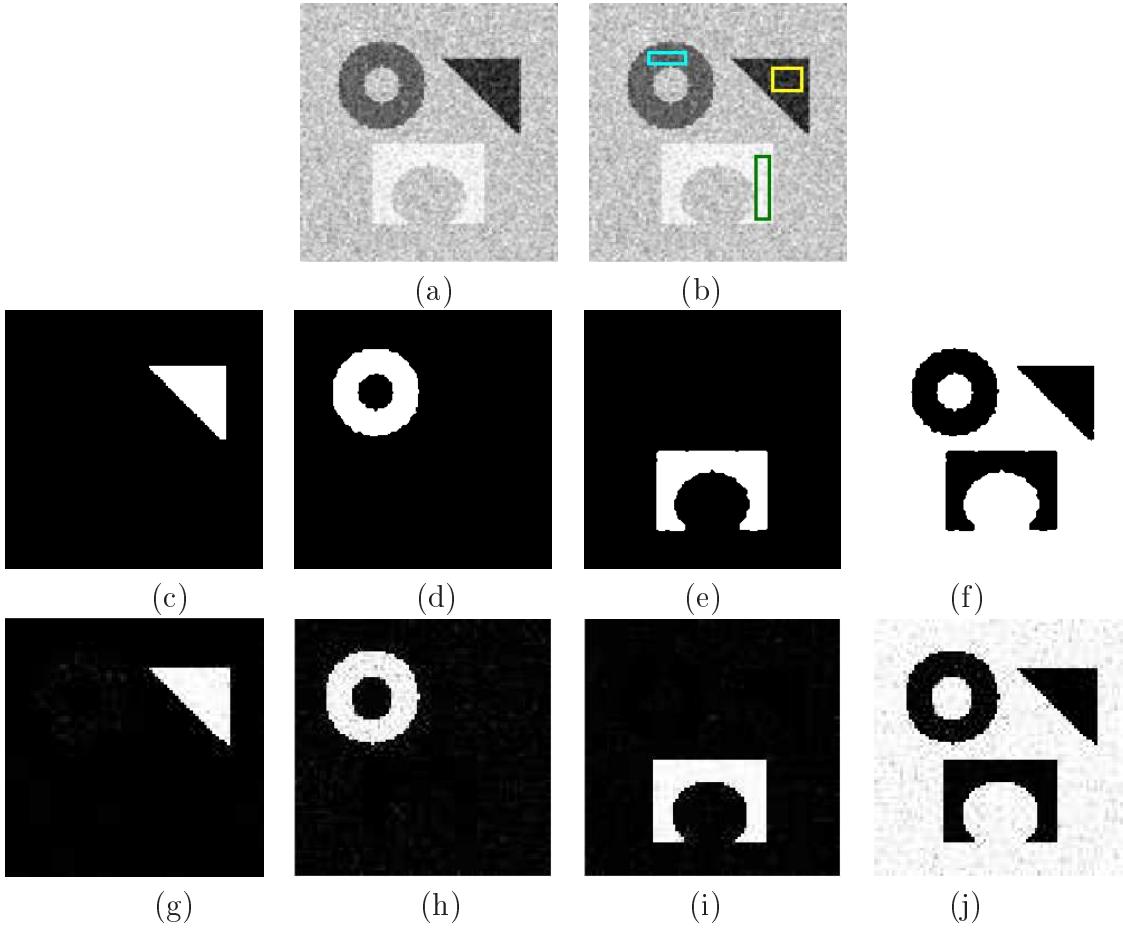


Figura 8.7: Imagem ruidosa para segmentação em quatro regiões ( $100 \times 100$ ): (a) Imagem original; (b) Amostras extraídas (linhas dos quadrados coloridos) utilizadas no modelo proposto SMFRC; (c-d-e-f) Pontos que representam as respectivas partições *hard*  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  e  $\Omega_4$ , respectivamente; (g-h-i-j) Funções de pertinência  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  obtidas pelo modelo de segmentação de *Li* [Li et al., 2010].

turizada construída utilizando-se as texturas da base de dados *Brodatz* [Brodatz, 1956]. Cada textura da imagem foi amostrada para o cálculo dos parâmetros  $\alpha$ . A Figura 8.10(a) ilustra a imagem original sobreposta pelas amostras de cada região. As Figuras 8.10(b-c-d) os pontos do domínio que pertencem às partições  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ , respectivamente, onde foram gastos 1000 iterações no tempo para se obter cada uma destas partições. Os parâmetros utilizados foram:  $\lambda = 0,25$  e  $\beta = 0$ . É importante observar a boa precisão da segmentação, desde que alguns pontos pertencentes à textura inferior da imagem possuem intensidades bastante similares às intensidade da textura do círculo.

Um caso de segmentação em quatro regiões é mostrado na Figura 8.11, onde deseja-se identificar cada das quatro texturas observadas na Figura 8.11(a). A Figura 8.11(b) descreve o processo de amostragem, onde os quadrados com linhas vermelha, amarela, azul e branca se referem às áreas amostradas de cada região da imagem utilizadas para calcular os parâmetros

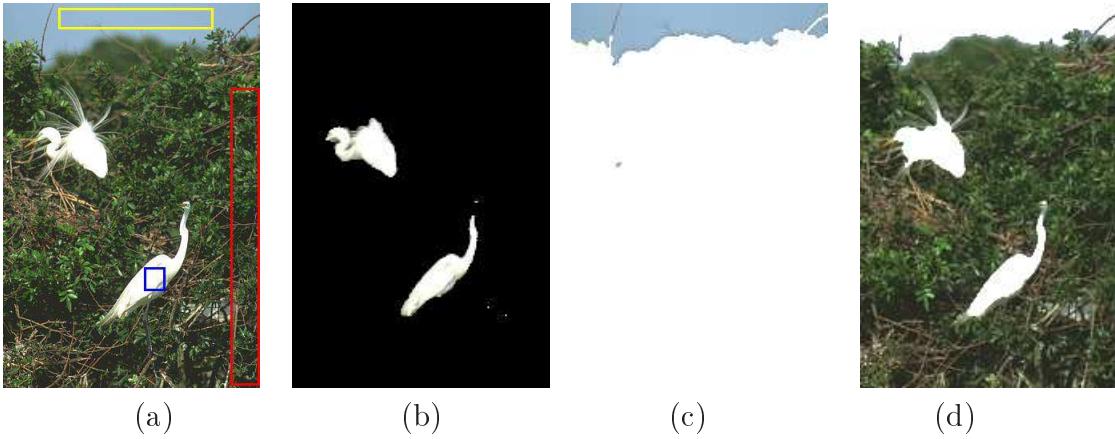


Figura 8.8: Imagem de um pássaro ( $481 \times 321$ ) para segmentação em três regiões [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original sobreposta pelas amostras de cada região; (b) Image reconstruída utilizando a partição  $\Omega_1$ ; (c) Imagem reconstruída utilizando a partição  $\Omega_2$ ; (d) Image reconstruída utilizando a partição  $\Omega_3$ .

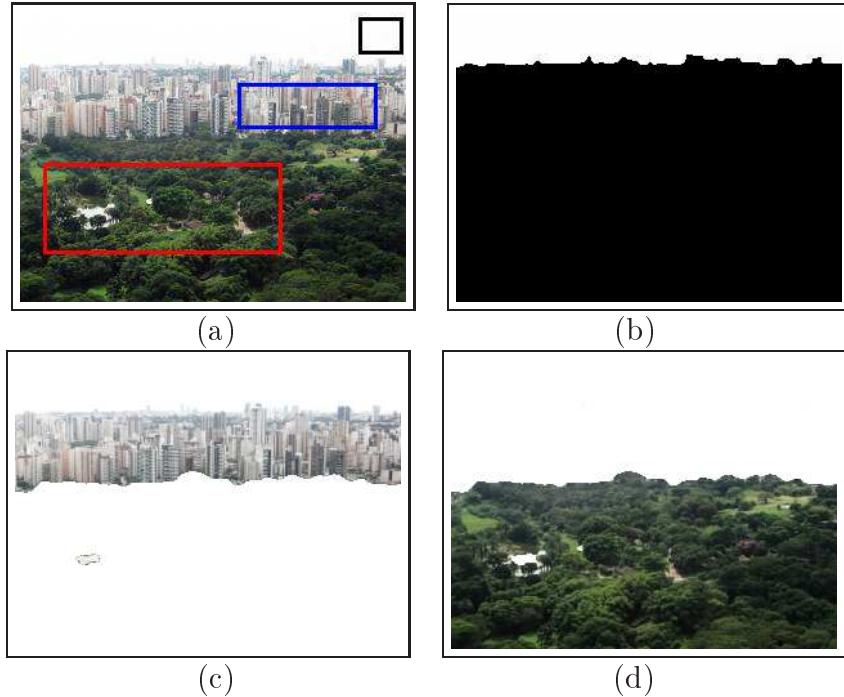


Figura 8.9: Imagem panorâmica ( $300 \times 225$ ) para segmentação em três regiões: (a) Imagem original sobreposta pelas amostras de cada região; (b-c-d) Região reconstruída a partir da imagem original utilizando-se as partições  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ , respectivamente.

$\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ , respectivamente. As Figuras 8.11(c-d-e-f) representam os pontos do domínio que pertencem às partições  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  e  $\Omega_4$  obtidas pelo modelo proposto. Neste experimento, os parâmetros foram fixados em  $\lambda = 0,5$  e  $\beta = 0$  e 800 iterações foram executadas para se determinar cada uma das quatro partições. Quanto maior é o número de regiões a serem segmentadas na imagem, maior é a dificuldade de distinção entre elas utilizando-se as propriedades

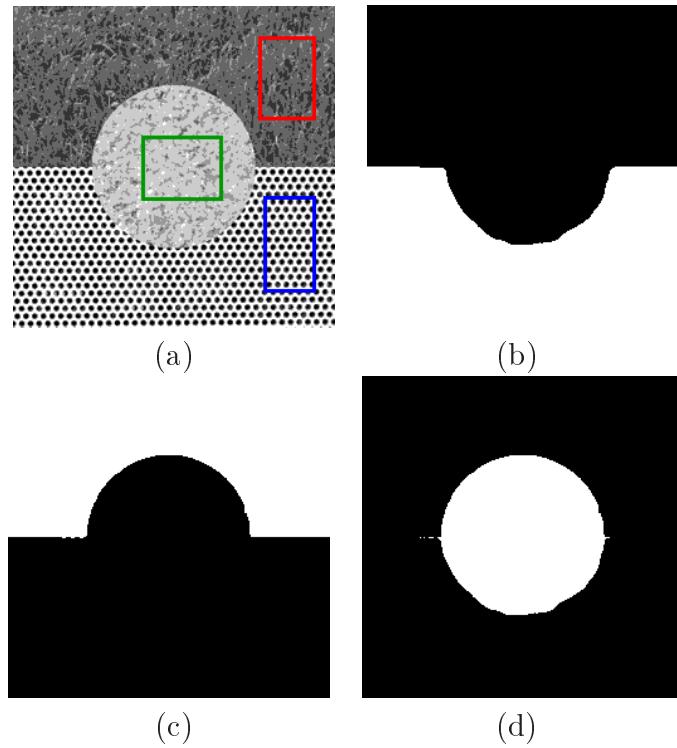


Figura 8.10: Imagem texturizada ( $512 \times 512$ ) para segmentação em três regiões: (a) Imagem original sobreposta pelas amostras de cada região; (b-c-d) Pontos que representam as partições  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ , respectivamente.

de intensidade. Por isso, percebe-se a alta qualidade da segmentação que o modelo proposto obteve.

As Figuras 8.12 e 8.13 apresentam a segmentação em três regiões de cenas naturais das imagens da base de dados *Berkeley Segmentation Dataset* [Martin et al., 2001]. As Figuras 8.12(a) e 8.13(a) mostram a imagem original com a amostras indicadas pelos quadrados coloridos sobrepostos. As Figuras 8.12(b-c-d) e 8.13(b-c-d) ilustram as regiões da imagem reconstruídas a partir das partições *hard* obtidas pelo modelo proposto. Por estes resultados, percebe-se que o modelo consegue distinguir as três regiões das imagens devido ao uso de funções de densidade de probabilidade para descrever estas regiões.

## 8.4 Considerações Finais

Neste capítulo, foi apresentado um algoritmo para segmentação de uma imagem em várias regiões com base no modelo *Competição entre Regiões Fuzzy*. O modelo proposto, denominado *Competição Seletiva entre Multi-Regiões Fuzzy*, possui uma abordagem supervisionada e representa as regiões da imagem por meio de distribuições de probabilidade. Com isso, o modelo é capaz de segmentar textura e possui robustez em relação à imagens ruidosas.

Basicamente, a idéia é executar o método *Competição entre Regiões Fuzzy* diversas vezes, onde em cada rodada, a função de pertinência determinada é transformada em uma partição

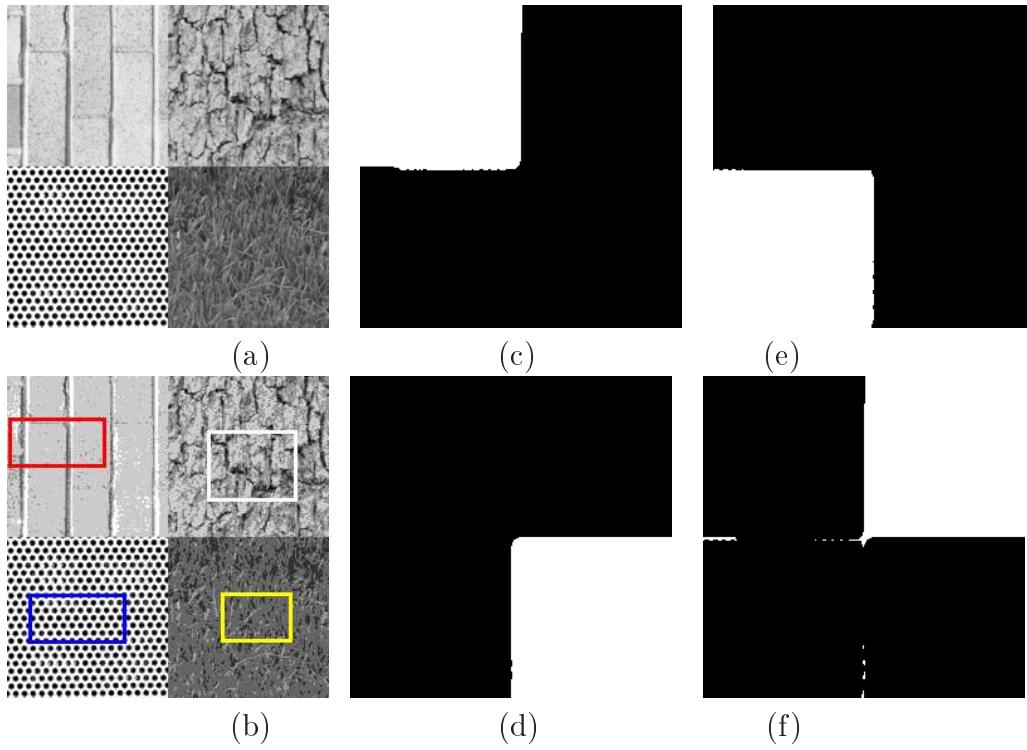


Figura 8.11: Imagem texturizada para segmentação em quatro regiões ( $512 \times 512$ ): (a) Imagem original; (b) Amostras extraída para calcular os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ ; (c) Pontos da partição  $\Omega_1$  final após 700 iterações no tempo; (d) Pontos da partição  $\Omega_2$ ; (e) Pontos da partição  $\Omega_3$ ; (f) Pontos da partição  $\Omega_4$ .

*hard* e os pontos desta partição são eliminados das próximas rodadas. Desta maneira, o algoritmo ganha em custo computacional e é caracterizado por possuir um processo de segmentação *soft*, enquanto que o resultado final é *hard*. Além disso, o algoritmo proposto possui fraca sensibilidade em relação às condições iniciais, pois herda vantagens do modelo *Competição entre Regiões Fuzzy*

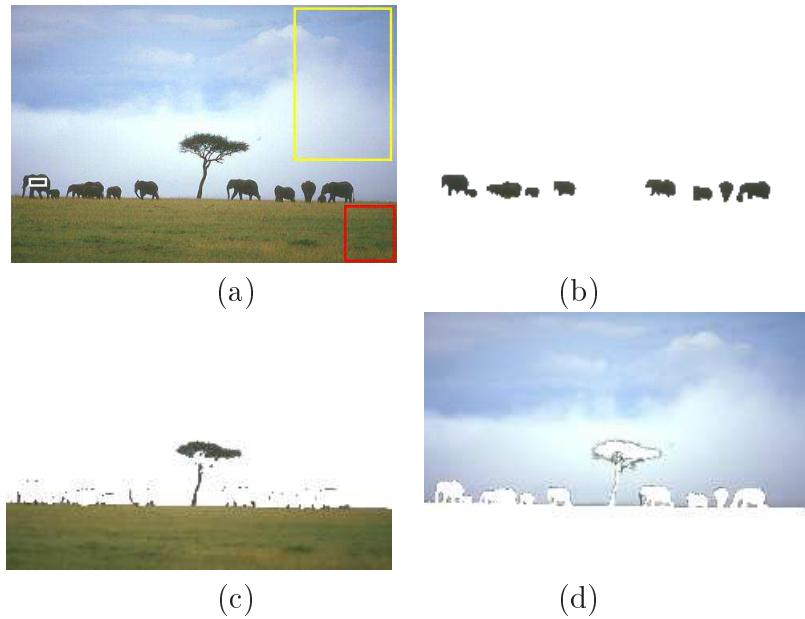


Figura 8.12: Imagem de elefantes ( $321 \times 481$ ) para segmentação em três regiões [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Região reconstruída da imagem utilizando a partição  $\Omega_1$ ; (c) Região reconstruída da imagem utilizando a partição  $\Omega_2$ ; (d) Região reconstruída da imagem utilizando a partição  $\Omega_3$ ; Parâmetros foram fixados como  $\lambda = 0,25$  e  $\beta = 0,0001$ .

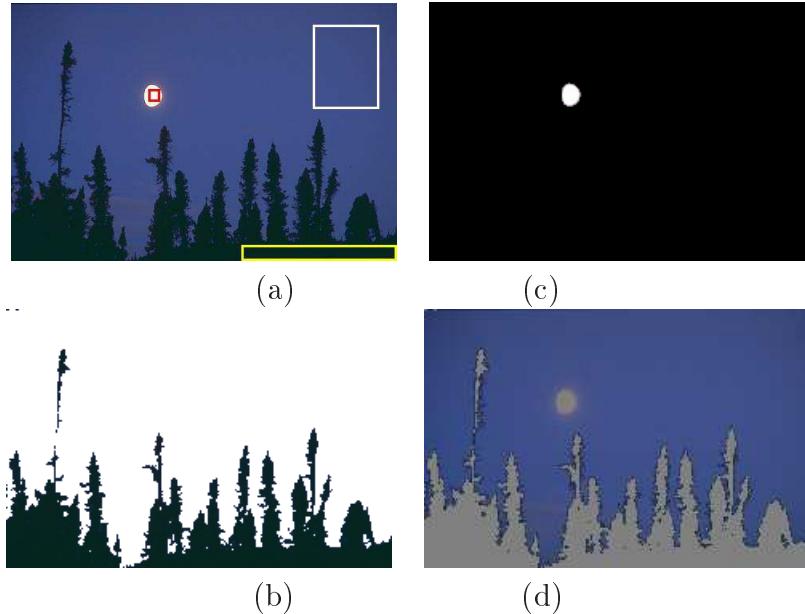


Figura 8.13: Cena natural ( $481 \times 321$ ) para segmentação em três regiões [Martin et al., 2001]: (a) Imagem original; (b) Região reconstruída da imagem utilizando a partição  $\Omega_1$ ; (c) Região reconstruída da imagem utilizando a partição  $\Omega_2$ ; (d) Região reconstruída da imagem utilizando a partição  $\Omega_3$ ; Parâmetros foram fixados como  $\lambda = 0,3$  e  $\beta = 0,001$ .

## *Considerações Finais*

---

---

Embora o problema de segmentação de imagens tenha constantemente recebido diversas contribuições ao longo dos últimos anos, existem diversas aplicações que carecem de métodos para segmentação especializados ou que ainda apresentam metodologias que podem ser aperfeiçoadas. A segmentação é ainda um campo do conhecimento que não está completamente resolvido e que nos próximos anos, continuará a receber novas propostas, com algoritmos cada vez mais eficientes e robustos.

Nesta dissertação, foi abordado o emprego de métodos de segmentação de imagens através da metodologia *Competição entre Regiões Fuzzy*. Em geral, estes métodos desenvolvidos possuem uma abordagem *soft* e possuem um funcional de energia convexo, onde as soluções ótimas são calculadas e são fracamente sensíveis com relação às condições iniciais, o que representa uma vantajosa característica deste método. Além disso, a partir do referido funcional de energia, diversos modelos de segmentação que se diferenciam na maneira em que representam estatisticamente as regiões da imagem podem ser derivados.

A partir dos estudos realizados sobre os métodos variacionais para segmentação de imagens, sendo que de maneira detalhada o método *Competição entre Regiões Fuzzy*, esta dissertação apresentou três contribuições que são modificações de alguns dos modelos já propostos por *Mory e Ardon*, como foi visto no Capítulo 5 e que podem ser úteis para a segmentação de imagens naturais e ruidosas, como apresentado nos resultados dos últimos três Capítulos.

A primeira modificação proposta, denominada *Competição entre Regiões Constantes Ponderada Localmente*, se baseia no modelo *Competição entre Regiões Constantes* de *Mory e Ardon* e aproxima o objeto e o fundo da imagem por duas regiões de intensidades constantes utilizando como princípio e motivação a idéia de análise local. Este modelo tem como objetivo fazer a competição entre as regiões em uma determinada vizinhança da imagem, como também

calcular as médias dos pontos das regiões considerando uma ponderação sobre a vizinhança. Os experimentos mostraram que o modelo proposto é robusto na presença de ruídos e aumentou a precisão da segmentação em imagens que possuem detalhes que caracterizam textura.

Também foi descrito um modelo de segmentação não-supervisionado que utiliza funções de densidade de probabilidade em sua formulação. Diferentemente dos outros métodos *Competição entre Regiões Fuzzy* não-supervisionados, os quais aproximam as regiões da imagem constantes ou funções suaves, o modelo proposto aproxima as regiões da imagem por distribuições de probabilidade. Por isso, imagens naturais e texturizadas podem ser eficientemente segmentadas, ao contrário dos outros métodos que assumem que as regiões da imagem são homogêneas na intensidade ou que variam levemente na intensidade. Os resultados mostraram que o modelo apresentou robustez à ruído e que imagens compostas por objeto e fundo de cenas naturais e texturizadas foram precisamente segmentadas. De certa maneira, o método combinou as vantagens de uma abordagem não-supervisionada com uma eficaz estratégia para descrever as regiões da imagem.

Por fim, foi apresentado um algoritmo para segmentação de uma imagem em várias regiões que possui um processo de segmentação *soft*, mas que seu resultado final é *hard*. O modelo proposto se baseia em sucessivas execuções do método *Competição entre Regiões Fuzzy* para duas regiões, sendo que em cada execução, uma região da imagem é determinada. O modelo proposto, denominado *Competição Seletiva entre Multi-Regiões Fuzzy*, evita a ocorrência de sobreposição de regiões, que, de fato, representam grandes dificuldades a serem tratadas em técnicas de segmentação em várias regiões. Os experimentos realizados com o modelo mostraram que o modelo apresentou eficácia na segmentação de textura e cenas naturais, como também é robusto em relação à presença de ruídos nas imagens.

## 9.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, podem ser citadas algumas propostas:

- No modelo *Competição entre Regiões Constantes Localmente Ponderada*, apresentado no Capítulo 6, pode ser trabalhado o uso de um desvio-padrão na janela Gaussiana que pode variar dependendo de uma certa área da imagem. De certa forma, isto minimiza os efeitos indesejados de se ter um desvio-padrão global aplicado em objetos topologicamente e estruturalmente distintos em uma mesma imagem, resultando na deterioração dos menores elementos;
- Tornar o resultado final do algoritmo *Competição entre Multi-Regiões Fuzzy Seletiva* totalmente *fuzzy*, que é uma característica de seu processo de segmentação;
- Adaptar o algoritmo *Competição entre Multi-Regiões Fuzzy Seletiva* para uma abordagem não-supervisionada;

- Aplicação das modificações propostas em imagens médicas, com o intuito de auxiliar o diagnóstico médico por meio de sistemas computacionais;
- Adaptação e aplicação dos três modelos propostos na segmentação de imagens coloridas;

## 9.2 Publicações

- BORGES, V. R. P. ; BATISTA, M. A. ; BARCELOS, C. A. Z., A Soft Unsupervised Two-Phase Image Segmentation Model based on Global Probability Density Functions. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B Cybernetics, Anchorage - Alaska, 2011;
- BORGES, V. R. P. ; BATISTA, M. A. ; GULIATO, D. ; BARCELOS, C. A. Z., Weighted Variational Two-Phase Image Segmentation based on Fuzzy Region Competition. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B. Cybernetics, Anchorage - Alaska, 2011;
- BORGES, V. R. P. ; BATISTA, M. A. ; GULIATO, D. ; BARCELOS, C. A. Z., Multiphase Selective Fuzzy Region Competition. IEEE International Conference and Tools on Artificial Intelligence, Boca Raton - Flórida, 2011;
- BORGES, V. R. P. ; BARCELOS, C. A. Z. ; BATISTA, M. A. ; FREITAS, K. B., Segmentação Não-Supervisionada de Imagens em Duas Regiões Baseada no Método Competição entre Regiões Fuzzy utilizando Distribuições de Probabilidade, Anais do VII Workshop de Visão Computacional, Curitiba - Paraná, pp. 196-201, 2011;
- BORGES, V. R. P. ; BATISTA, M. A. ; BARCELOS, C. A. Z., Variational Two-Phase Image Segmentation based on Region Competition by Level Set and Fuzzy Approaches. X Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications (DINCON), Águas de Lindóia - São Paulo, 2011.
- BORGES, V. R. P. ; BARCELOS, C. A. Z. ; BATISTA, M. A., Uma Revisão dos Métodos Variacionais para Segmentação Soft de Imagens em Várias Regiões. Congresso de Matemática Aplicada e Computacional do Sudeste (CMAC-SE), Uberlândia - Minas Gerais, 2011.

## *Referências Bibliográficas*

---

---

- [Ambrosio e Tortorelli, 1990] Ambrosio, L. & Tortorelli, V. M., 1990. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 43, n. 8, pp. 999–1036.
- [Barcelos et al., 2009a] Barcelos, C., Barcelos, E., & Cuminato, J., 2009a. A multiresolution flow-based multiphase image segmentation. *Systems, Man and Cybernetics, 2009. SMC 2009. IEEE International Conference on*, vol. 1, pp. 3002 –3006.
- [Barcelos et al., 2009b] Barcelos, C., Chen, Y., & Chen, F., 2009b. A soft multiphase segmentation model via gaussian mixture. *Image Processing (ICIP), 2009 16th IEEE International Conference on*, vol. 1, pp. 4049 –4052.
- [Barron et al., 1998] Barron, A., Rissanen, J., & Yu, B., 1998. The minimum description length principle in coding and modeling. *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 6, pp. 2743 –2760.
- [Bresson et al., 2007] Bresson, X., Esedoglu, S., Vandergheynst, P., Thiran, J.-P., & Osher, S., 2007. Fast global minimization of the active contour/snake model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 28, pp. 151–167.
- [Brodatz, 1956] Brodatz, P., 1956. *Textures: A Photographic Album for Artists and Designers*. New York: Dover.
- [Canny, 1986] Canny, J., 1986. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8(6), pp. 679 – 698.
- [Caselles et al., 1997] Caselles, V., Kimmel, R., & Sapiro, G., 1997. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, vol. 22, pp. 61–79.
- [Chambolle, 1995] Chambolle, A., 1995. Image segmentation by variational methods: Mumford and shah functional and the discrete approximations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 55, n. 3, pp. 827–863.

- [Chambolle, 2004] Chambolle, A., 2004. An algorithm for total variation minimization and applications. *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 20, pp. 89–97.
- [Chambolle e Dal Maso, 1999] Chambolle, A. & Dal Maso, G., 1999. Discrete approximation of the mumford-shah functional. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 33(4), pp. 827–863.
- [Chan e Vese, 2001a] Chan, T. & Vese, L., 2001a. Active contour model without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10(2), pp. 266–277.
- [Chan e Vese, 2001b] Chan, T. F. & Vese, L. A., 2001b. A level set algorithm for minimizing the mumford-shah functional in image processing. *IEEE Workshop on Variational and Level Sets in Computer Vision*, vol. 1, pp. 1–12.
- [Cohen, 1991] Cohen, L. D., 1991. On active contour models and balloons. *CVGIP: Image Understanding*, vol. 53, pp. 227–243.
- [Cremers et al., 2007] Cremers, D., Rousson, M., & Deriche, R., 2007. A review of statistical approaches to level set segmentation: integrating color, texture, motion and shape. *International Journal of Computer Vision*, vol. 1, pp. 195–215.
- [Duda et al., 2001] Duda, R. O., Hart, P. E., & Stork, D. G., 2001. *Pattern classification, second edition*. Wiley.
- [Farlow, 1993] Farlow, S. J., 1993. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover, 1 edition.
- [Fortuna, 2000] Fortuna, A. O., 2000. *Técnicas Computacionais Para Dinâmica Dos Fluidos*. Edusp, 1 edition.
- [Freitas, 2011] Freitas, K., 2011. Modelos variacionais em processamento de imagens - formulação primal e dual. *Dissertação de Mestrado*, vol. 1.
- [Geman e Geman, 1984] Geman, S. & Geman, D., 1984. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, pp. 721–741.
- [Gonzalez e Woods, 2008] Gonzalez, R. C. & Woods, R. E., 2008. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, 3 edition.
- [Guo e Chen, 2006] Guo, W. & Chen, Y., 2006. Using non-parametric kernel to segment and smooth images simultaneously. *Image Processing, 2006 IEEE International Conference on*, vol. 1, pp. 217 – 220.
- [Houhou, 2009] Houhou, N., 2009. *Variational methods for texture segmentation*. Tese de Doutorado - École polytechnique fédérale de Lausanne theses.

- [Kass et al., 1988] Kass, M., Witkin, A., & Terzopoulos, D., 1988. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, vol. 1, n. 4, pp. 321–331.
- [Kim et al., 2005] Kim, J., Fisher, J.W., I., Yezzi, A., Cetin, M., & Willsky, A., 2005. A nonparametric statistical method for image segmentation using information theory and curve evolution. *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 14, n. 10, pp. 1486 –1502.
- [Lankton e Tannenbaum, 2008] Lankton, S. & Tannenbaum, A., 2008. Localizing region-based active contours. *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 17, n. 11, pp. 2029 –2039.
- [Li et al., 2007] Li, C., Kao, C.-Y., Gore, J., & Ding, Z., 2007. Implicit active contours driven by local binary fitting energy. *J. Comput. Phys.*, vol. 79, n. 1, pp. 12–49.
- [Li e Ng, 2010] Li, F. & Ng, M. K., 2010. Kernel density estimation based multiphase fuzzy region competition method for texture image segmentation. *Commun. Comput. Phys.*, vol. 8, pp. 623–641.
- [Li et al., 2010] Li, F., Ng, M. K., Zeng, T. Y., & Shen, C., 2010. A multiphase image segmentation method based on fuzzy region competition. *SIAM J. on Imaging Sciences*, vol. 2, pp. 277–299.
- [Lie et al., 2006] Lie, J., Lysaker, M., & Tai, X.-C., 2006. A variant of the level set method and applications to image segmentation. *Mathematics of Computation*, vol. 60, pp. 1155–1174.
- [Mansouri et al., 2006] Mansouri, A.-R., Mitiche, A., & Vázquez, C., 2006. Multiregion competition: a level set extension of region competition to multiple region image partitioning. *Comput. Vis. Image Underst.*, vol. 101, pp. 137–150.
- [Marr e Hildreth, 1980] Marr, D. & Hildreth, E., 1980. Theory of edge detection. *Royal Society of London Proceedings Series B*, vol. 207, pp. 187–217.
- [Martin et al., 2001] Martin, D., Fowlkes, C., Tal, D., & Malik, J., 2001. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. *Computer Vision, 2001. ICCV 2001. Proceedings. Eighth IEEE International Conference on*, vol. 2, pp. 416 –423 vol.2.
- [Modica, 1987] Modica, L., 1987. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 98, pp. 123–142. 10.1007/BF00251230.
- [Mory e Ardon, 2007] Mory, B. & Ardon, R., 2007. Fuzzy region competition: A convex two-phase segmentation framework. *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, vol. 4485, pp. 214–226.

- [Mory et al., 2007] Mory, B., Ardon, R., & Thiran, J.-P., 2007. Variational segmentation using fuzzy region competition and local non-parametric probability density functions. *IEEE 11th International Conference on Computer Vision. ICCV*, vol. 1, pp. 1–8.
- [Mumford e Shah, 1989] Mumford, D. & Shah, J., 1989. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 2, pp. 577–685.
- [Osher et al., 2003] Osher, S., Paragios, N., Weickert, J., & Kahne, G., 2003. Fast methods for implicit active contour models. In *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*, pp. 43–57. Springer New York.
- [Osher e Sethian, 1988] Osher, S. & Sethian, J. A., 1988. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, vol. 79, n. 1, pp. 12–49.
- [Otsu, 1979] Otsu, N., 1979. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 9, pp. 62–66 vol.2.
- [Paragios e Deriche, 2002] Paragios, N. & Deriche, R., 2002. Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, vol. 46, n. 3, pp. 223–247.
- [Parzen, 1979] Parzen, E., 1979. Nonparametric statistical data modeling. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, n. 365, pp. 105–121.
- [Pedrini e Schwartz, 2008] Pedrini, H. & Schwartz, W. R., 2008. *Análise de Imagens Digitais - Princípios, Algoritmos e Aplicações*. Thomson Learning.
- [Pock e Bischof, 2006] Pock, T. & Bischof, H., 2006. A probabilistic multi-phase model for variational image segmentation. *Pattern Recognition*, vol. 4174, pp. 71–80.
- [Rissanen, 2004] Rissanen, J., 2004. *Minimum-Description-Length Principle*, pp. 500. John Wiley and Sons, Inc.
- [Rousson et al., 2005] Rousson, M., Cremers, D., & Brox, T., 2005. Efficient kernel density estimation of shape and intensity priors for level set segmentation. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention MICCAI 2005*, vol. 3750, pp. 757–764.
- [Rudin et al., 1992] Rudin, L. I., Osher, S., & Fatemi, E., 1992. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, vol. 1, pp. 259–268.

- [Samson et al., 2000] Samson, C., Blanc-Flaraud, L., Aubert, G., & Zerubia, J., 2000. A level set model for image classification. *International Journal of Computer Vision*, vol. 40, pp. 187–197. 10.1023/A:1008183109594.
- [Shen, 2006] Shen, J. J., 2006. A stochastic-variational model for soft mumford-shah segmentation. *International Journal of Biomedical Imaging*, vol. 1, pp. 1–22.
- [Smith, 1985] Smith, G. D., 1985. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Clarendon Press, 3 edition.
- [Tsai et al., 2001] Tsai, A., Yezzi, A., J., & Willsky, A., 2001. Curve evolution implementation of the mumford-shah functional for image segmentation, denoising, interpolation, and magnification. *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 10, n. 8, pp. 1169 –1186.
- [Vese e Chan, 2002] Vese, L. A. & Chan, T. F., 2002. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, vol. 50, pp. 271–293.
- [Wang et al., 2010] Wang, X. F., Huang, D. S., & Xu, H., 2010. An efficient local chan-veze model for image segmentation. *Pattern Recognition*, vol. 43, pp. 603–618.
- [Zhao et al., 1996] Zhao, H. K., Chan, T., Merriman, B., & Osher, S., 1996. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, vol. 27, pp. 179–195.
- [Zhu e Yuille, 1996] Zhu, S. C. & Yuille, A. L., 1996. Region competition: unifying snakes, region growing, energy/bayes/mdl for multi-band image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 18, pp. 884–900.